

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FIBONACCI VE LUCAS SEDENİYONLARIN YENİ BİR GENELLEŞTİRİLMESİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SELİHAN KIRLAK

KASIM 2020

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FIBONACCI VE LUCAS SEDENİYONLARIN YENİ BİR GENELLEŞTİRİLMESİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selihan KIRLAK

DANIŞMAN: Doç. Dr. Can KIZILATEŞ

ZONGULDAK

Kasım 2020

KABUL:

Selihan KIRLAK tarafından hazırlanan “Fibonacci ve Lucas Sedeniyonların Yeni Bir Genelleştirilmesi” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 06/11/2020

Danışman: Doç. Dr. Can KIZILATEŞ
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
Bölümü

Üye: Prof. Dr. Naim TUĞLU
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Emrah POLATLI
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2020

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Selihan KIRLAK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FIBONACCI VE LUCAS SEDENİYONLARIN YENİ BİR GENELLEŞTİRİLMESİ

Selihan KIRLAK

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Can KIZILATEŞ

Kasım 2020, 41 sayfa

Bu tezin temel amacı bileşenleri q –tamsayıları olan sedeniyonlar tanımlayarak yani Fibonacci ve Lucas sedeniyonların bir q –genellemesini tanımlayarak bu dizilerin temel özelliklerini araştırmaktır.

Birinci bölümde, tezin amacından ve tez içerisinde kullandığımız kaynaklardan bahsedilmiştir

İkinci bölümde, tez için gerekli olan tanım ve temel kavramlardan söz edilmiştir.

Üçüncü bölümde, q –Fibonacci ve q –Lucas sedeniyonların tanımları, Binet formülleri, üstel üreteç fonksiyonları, Catalan, Cassini, d'Ocagne eşitlikleri ve bu sedeniyonları içeren bazı binomiyel toplam formülleri verilmiştir.

ÖZET (devam ediyor)

Dördüncü bölümde, q –Fibonacci ve q –Lucas sedeniyonları için bazı özel durumlardan söz edilmiştir. Ve bu özel durumlardan elde edilen sonuçların sırasıyla Fibonacci sedeniyon, Lucas sedeniyon, k –Fibonacci sedeniyon, k –Lucas sedeniyon, Pell sedeniyon, Pell –Lucas sedeniyon, k –Pell sedeniyon, k –Pell–Lucas sedeniyon, Jacobsthal sedeniyon ve Jacobsthal –Lucas sedeniyona dönüştükleri gösterilmiştir. Daha sonra yeni elde edilen sedeniyonların sırasıyla Binet formülleri, üstel üreteç fonksiyonları, Catalan, Cassini, d'Ocagne özdeşlikleri ve bu sedeniyonları içeren bazı binomiyel toplam formülleri verilmiştir

Anahtar Kelimeler: Q –Fibonacci sedeniyon, Q –Lucas sedeniyon, Binet formülü, Üstel üreteç fonksiyonu, Catalan eşitliği, Cassini eşitliği, D'Ocagne eşitliği

Bilim Kodu: 403.01.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

A NEW GENERALIZATION OF FIBONACCI AND LUCAS SEDENIONS

Selihan KIRLAK

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Doç. Dr. Can KIZILATEŞ

November 2020, 41 pages

The main purpose of this thesis is to investigate the basic properties of these sequences by defining sedenions whose components are q –integers, that is, defining a generalization of Fibonacci and Lucas sedenions.

In the first part, the purpose of the thesis and the references we used in the thesis were mentioned.

In the second chapter, the definitions and basic concepts required for the thesis are mentioned.

In the third chapter, the definitions of q –Fibonacci and q –Lucas sedenions, Binet formulas, exponential generating functions, Catalan, Cassini, d'Ocagne identities and some binomial sum formulas including these sedenions are given.

In the fourth chapter, some special cases for the q –Fibonacci and q –Lucas sedenions are mentioned. And it has been shown that the results obtained from these special cases are

ABSTRACT (continued)

transformed into Fibonacci sedenion, Lucas sedenion, k -Fibonacci sedenion, k -Lucas sedenion, Pell sedenion, Pell-Lucas sedenion, k -Pell sedenion, k -Pell-Lucas sedenion, Jacobsthal sedenion and Jacobsthal-Lucas sedenion. Then, Binet formulas, exponential generating functions, Catalan, Cassini, d'Ocagne identities and some binomial sum formulas including these sedenions are given respectively.

Key words: Q -Fibonacci sedenion, Q -Lucas sedenion, Binet formula, Exponential generating function, Catalan identity, Cassini identity, D'Ocagne identity

Science Code: 403.01.01

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın gerçekleőtirilmesinde, iki yıl boyunca değerli bilgilerini benimle paylaőan, kendisine ne zaman danıősam bana zamanını ayırıp sabırla ve büyük ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, her sorun yaőadıęımda yanına çekinmeden gidebildiğim ve örnek aldığım değerli danışman hocam Doç. Dr. Can KIZILATEŞ'e sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ve her daim yanımda olan hayatta baőarılı olabileceğime beni inandıran tek destekçim anneme ve aileme sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	ix
TABLolar DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 AMAÇ VE KAPSAM	2
1.2 KAYNAK ARAŞTIRMASI	2
BÖLÜM 2 ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARI	5
2.1.1. Fibonacci Tanım.....	5
2.1.2. Lucas Tanım	5
2.1.3. Kompleks Sayı Tanım.....	7
2.1.4. Kuaterniyon Tanım.	8
2.1.5. Oktoniyon Tanım	9
2.1.6. Sedeniyon Tanım.....	11
2.1.7. q –Analiz	13
2.1.8. q –Faktöriyel.	13
2.1.9. q –Binomiyel.....	13

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

BÖLÜM 3 FİBONACCİ VE LUCAS SEDENİYONLARININ YENİ BİR GENELLEŞTİRİLMESİ.....	15
3.1 GİRİŞ	15
3.1.1. Q –Fibonacci sedeniyon ve Q –Lucas sedeniyon Tanım.....	15
3.1.2. Binet Formül	15
3.1.3. Üstel Üreteç Fonksiyon.....	17
3.1.4. Catalan Eşitliği	17
3.1.5. Cassini Eşitliği.....	18
3.1.6. D'Ocagne Eşitliği.....	18
BÖLÜM 4 Q –FİBONACCİ VE Q –LUCAS SEDENİYONLARIN ÖZEL DURUMLARI	25
4.1. BİNET FORMÜLLERİ	24
4.2. ÜSTEL ÜRETEÇ FONKSİYONLARI	26
4.3. CATALAN EŞİTLİKLERİ.....	26
4.4. CASSİNİ EŞİTLİKLERİ	29
4.5. D'OCAGNE EŞİTLİKLERİ	30
BÖLÜM 5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	37
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ	41

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1. Horadam Dizisinin Özel Durumları	6
Çizelge 2.2. Oktoniyonların Çarpım Tablosu	10
Çizelge 3.1. q –Fibonacci ve q –Lucas Sedeniyonların Özel Durumları.....	15





SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

F_n	: n . Fibonacci sayısı
L_n	: n . Lucas sayısı
W_n	: n . Horadam sayısı
$F_{k,n}$: k –Fibonacci sayısı
$L_{k,n}$: k –Lucas sayısı
P_n	: n . Pell sayısı
PL_n	: n . Pell-Lucas sayısı
$P_{k,n}$: k –Pell sayısı
$PL_{k,n}$: k –Pell-Lucas sayısı
J_n	: n . Jacobsthal sayısı
j_n	: n . Jacobsthal-Lucas sayısı
\mathbb{R}	: Reel sayılar
\mathbb{C}	: Kompleks sayılar
\mathbb{H}	: Kuaterniyonlar
\mathbb{O}	: Oktoniyonlar
\mathbb{S}	: Sedeniyonlar
$(n)_q$: q –analoğu
$(n)_{q!}$: q –faktoriyel
$\binom{n}{j}_q$: q –binomiyel
SF_n	: n . Fibonacci sedeniyon
SL_n	: n . Lucas sedeniyon
$SF_{k,n}$: n . k –Fibonacci sedeniyon
$SL_{k,n}$: n . k –Lucas sedeniyon

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

SP_n	: n. Pell sedeniyon
SPL_n	: n. Pell–Lucas sedeniyon
$SP_{k,n}$: n. k –Pell sedeniyon
$SPL_{k,n}$: n. k –Pell–Lucas sedeniyon
SJ_n	: n. Jacobsthal sedeniyon
Sj_n	: n. Jacobsthal–Lucas sedeniyon
$\mathbb{S}F_n(\alpha; \beta)$: q –Fibonacci sedeniyon
$\mathbb{S}L_n(\alpha; \beta)$: q –Lucas sedeniyon



BÖLÜM 1

GİRİŞ

1821 doğumlu İngiliz matematikçi Arthur Cayley çoğunlukla cebir alanında çalışmalar yapmış ve grup kavramını modern bir şekilde tanımlamıştır. 1874 doğumlu Amerikalı matematikçi Leonard Equene Dickson ise soyut cebir ve özellikle sayılar teorisi alanında çalışmıştır. Arthur Cayley ve Leonard Equene Dickson adını taşıyan Cayley–Dickson yapısı "ikiye katlama inşası" olarak adlandırılan hiper kompleks sayıları inşa etmek için kullanılan bir yöntemdir. Cayley–Dickson inşası iyi bilinen \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} ve \mathbb{O} cebirlerini genelleştiren bir cebirdir. Yani bu yapı tek boyutlu reel sayılara uygulandığında iki boyutlu kompleks sayıları, kompleks sayılara uygulandığında dört boyutlu kuaterniyonları, kuaterniyonlara uygulandığında sekiz boyutlu oktoniyonları, oktoniyonlara uygulandığında ise on altı boyutlu sedeniyonları elde etme işlemidir. Bu hiper kompleks sayıları ve bu sayıların temel özelliklerini elde etmek için Cayley–Dickson inşası güzel bir yöntemdir.

Reel sayılara Cayley–Dickson işlemi uygulandığında elde edilen karmaşık sayılar, reel sayıların bütün cebirsel özelliklerini sağlamaz. Karmaşık sayılar, reel sayılarda olan eşleniğin kendisine eşit olma özelliğini kaybeder. Karmaşık sayılara bu işlem uygulandığında oluşan kuaterniyonlar değişme özelliğini kaybeder. Kuaterniyonlara bu yapı uygulandığında oluşan oktoniyonlar birleşme özelliğini kaybeder ve oktoniyonlara bu yapı uygulandığında ise sedeniyonlar bölme özelliğini yitirir. Sonuç olarak sedeniyonlar birleşmeli ve değişmeli olmayan cebir yapısına sahip olur. Kuaterniyonlar, oktoniyonlar, sedeniyonlar matematik ve fizik gibi iki bilim dalının uygulamalarında kullanılır. Oktoniyonlar topoloji, kuantum teorisi, Clifford cebirlerinde, sedeniyonlar ise doğrusal yer çekimi ve elektromanyetik teori gibi birçok bilim alanlarında görülür [1,2,3].

1.1 AMAÇ VE KAPSAM

Bu tezin temel amacı bileşenleri q -tamsayıları olan sedeniyonlar tanımlayarak yani Fibonacci ve Lucas sedeniyonların bir q -genellemesi tanımlayarak bu dizilerin temel özelliklerini araştırmaktır. Yani q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonlarını tanımlayıp, bu sedeniyonlar için Binet formüllerini, üstel üreteç fonksiyonlarını, Catalan, Cassini, d'Ocagne eşitliklerini ve bu sedeniyonları içeren bazı binomiyel toplam formüllerini araştırmaktır. Ayrıca q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonları için α ve q nun özel durumlarıyla ortaya çıkan Fibonacci sedeniyon, Lucas sedeniyon, k -Fibonacci sedeniyon, k -Lucas sedeniyon, Pell sedeniyon, Pell-Lucas sedeniyon, k -Pell sedeniyon, k -Pell-Lucas sedeniyon, Jacobsthal sedeniyon ve Jacobsthal-Lucas sedeniyonları elde edilecektir. Dahası literatürde var olan bu sedeniyonlar için sırasıyla Binet formülleri, üstel üreteç fonksiyonları, Catalan, Cassini, d'Ocagne eşitlikleri ve bu sedeniyonları içeren bazı toplam formülleri verilecektir.

1.2 KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu kısımda tez içerisinde kullanılan çalışmalar hakkında bilgi verilecektir.

Koshy (2001) "Fibonacci and Lucas numbers with applications" isimli kitabında Fibonacci ve Lucas sayıları hakkında bilinmesi gereken her şeyi en kapsamlı şekilde ele almıştır [4].

Vajda (1989) "Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section " isimli kitabında Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımlarını ve çeşitli özelliklerini incelemiştir [5].

Falcon ve Plaza (2007) "On the Fibonacci k -numbers" isimli çalışmasında Fibonacci dizisini ve bu diziyi genelleştiren k -Fibonacci dizisini ve bu dizinin bazı özelliklerini incelemiştir [6].

Falcon (2011) "On the k -Lucas numbers " bu çalışmasında k -Fibonacci dizisi ile aynı rekürans bağıntısına sahip fakat başlangıç şartları farklı olan k -Lucas sayılarını tanımlamıştır [7].

Horadam (1963) "Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions" isimli çalışmasında bileşenleri Fibonacci ve Lucas sayıları olan Fibonacci kuaterniyonları ve Lucas kuaterniyonları tanımlamış ve bu kuaterniyonların bazı özelliklerini vermiştir [8].

Horadam (1993) "Quaternion recurrence relations" isimli çalışmasında Fibonacci kuaterniyonlarının bazı rekürans ilişkilerini incelemiştir [9].

Iyer (1969) "A note on Fibonacci quaternions " isimli çalışmasında Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları arasında ki çeşitli ilişkileri incelemiştir [10].

Iyer (1969) "Some results on Fibonacci quaternions " isimli çalışmasında Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını Fibonacci ve Lucas sayıları cinsinden elde etmiştir [11].

Halici (2012) "On Fibonacci Quaternions " isimli çalışmasında Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını incelemiş, bu kuaterniyonlar için için üreteç fonksiyonları, Binet formüllerini ve toplam formülleri elde etmiştir [12].

Akkuş ve Kızılaslan (2019) "Quaternions: Quantum calculus approach with applications" isimli çalışmasında bileşenleri q - tamsayıları olan sırasıyla Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları tanımlamış, bu kuaterniyonların bazı özel durumlarından ve uygulamalarından bahsetmişlerdir [13].

Cimen ve Ipek (2016) "On Pell quaternions and Pell-Lucas quaternions " isimli çalışmasında bileşenleri Pell ve Pell-Lucas sayıları olan yeni bir kuaterniyon ailesi tanımlamış ve bu kuaterniyonların bazı özelliklerini elde etmişlerdir [14].

Keçilioğlu ve Akkus (2015) "The Fibonacci Octonions" isimli çalışmasında Fibonacci ve Lucas oktoniyonlarını tanımlamışlar ve bu oktoniyonların üreteç fonksiyonu, Binet formülünü ve bazı cebirsel özelliklerini elde etmişlerdir [15].

Kizilates ve Polath (2021) "New families of Fibonacci and Lucas octonions with q -integer components " isimli çalışmasında bileşenleri q - tamsayıları olan q -Fibonacci oktoniyon ve q -Lucas oktoniyonların tanımlarını vermişler ve ayrıca Binet formüllerini, üstel üreteç fonksiyonlarını, toplam formüllerini Cassini, Catalan, d'Ocagne eşitliklerini elde etmişlerdir [16].

Cimen ve Ipek (2017) "On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas octonions" çalışmasında bileşenleri Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları olan oktoniyonlar tanımlamış ve bu oktoniyonların bazı cebirsel özelliklerini vermişlerdir [17].

Catarino (2016) "The modified Pell and the modified k -Pell quaternions and octonions " çalışmasında sırasıyla modifiye Pell ve modifiye k -Pell kuaterniyonları ve oktoniyonları tanımlamış ve kuaterniyon ve oktoniyonlar için Binet benzeri formüller ve üreteç fonksiyonu da dahil olmak üzere bunları içeren bazı özellikler vermiştir [18].

Bilgici, Tokeşer ve Ünal (2017) "Fibonacci and Lucas Sedenions " isimli çalışmasında Fibonacci ve Lucas sedeniyonlarını tanımlamış ve bu sedeniyonlarının birçok özelliklerini elde etmişlerdir [19].

Catarino (2017) " k -Pell, k -Pell Lucas and modified k -Pell sedenions " isimli çalışmasında k -Pell, k -Pell Lucas ve modifiye k -Pell sedeniyonlarını tanımlamış ve bu sedeniyonlar için Binet formülleri, üreteç fonksiyonlarını ve bazı toplam özelliklerini elde etmiştir [20].

Cimen ve Ipek (2017) "On Jacobsthal and the Jacobsthal-Lucas sedenions " isimli çalışmasında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sedeniyonlarını tanımlamışlar ve bu sedeniyonlar için birçok özdeşlikleri elde etmişlerdir [21].

Soykan (2019) "Tribonacci and Tribonacci-Lucas Sedenions " isimli çalışmasında bileşenleri tribonacci ve tribonacci Lucas olan sedeniyonları tanımlamış ve bu sedeniyonların bazı özelliklerini incelemiştir [22].



BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimizde kullandığımız temel kavramlar verilecektir. Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları, Horadam dizisinin özellikleri, karmaşık sayıları, kuaterniyon, oktoniyon, sedeniyon tanımları ve özellikleri verilecek ve ayrıca q -analizin tanımından bahsedilecektir.

2.1 FIBONACCI VE LUCAS SAYILARI

Tanım 2.1.1 F_n , n . Fibonacci sayısını göstermek üzere, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için Fibonacci sayıları

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [26].

Fibonacci dizisinin ilk on terimi

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

biçimindedir.

Tanım 2.1.2 L_n , n . Lucas sayısını göstermek üzere, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ doğal sayısı için Lucas sayıları

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2},$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [26].

Lucas dizisinin ilk on terimi

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123

şeklindedir.

Fibonacci ve Lucas dizileri için çeşitli genelleştirmeler, birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu genelleştirmelerden biri Horadam tarafından, ikinci mertebeden rekürans bağıntısı için keyfi başlangıç koşulları ve keyfi katsayılar alınarak elde edilmiştir [25,26]. Her $n > 1$ tamsayısı ve a, b, p ve q birer tamsayı olmak üzere, $W_0 = a$ ve $W_1 = b$ başlangıç koşulları ile

$$W_n = pW_{n-1} + qW_{n-2}, \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır [25].

Burada a, b, p ve q nun özel değerlerine göre Fibonacci, Lucas, k -Fibonacci, k -Lucas, Pell, Pell-Lucas, k -Pell, k -Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas gibi birçok sayı dizileri elde edilebilir.

Çizelge 2.1 Horadam Dizisinin Özel Durumları

$W(p, q; a, b)$	Dizinin Adı	Dizinin Sembolü
$W(1, 1; 0, 1)$	Fibonacci	F_n
$W(1, 1; 2, 1)$	Lucas	L_n
$W(k, 1; 0, 1)$	k -Fibonacci	$F_{k,n}$
$W(k, 1; 2, 1)$	k -Lucas	$L_{k,n}$
$W(2, 1; 0, 1)$	Pell	P_n
$W(2, 1; 2, 2)$	Pell-Lucas	PL_n
$W(2, k; 0, 1)$	k -Pell	$P_{k,n}$
$W(2, k; 2, 2)$	k -Pell-Lucas	$PL_{k,n}$
$W(1, 2; 0, 1)$	Jacobsthal	J_n
$W(1, 2; 2, 1)$	Jacobsthal-Lucas	j_n

Horadam dizisinin Binet formülü

$$x^2 - px - q = 0,$$

$\alpha = \frac{p+\sqrt{\Delta}}{2}$ ve $\beta = \frac{p-\sqrt{\Delta}}{2}$ karakteristik polinomun kökleri, $A = b - a\beta$ ve $B = a\alpha - b$ olmak üzere

$$W_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta},$$

biçimindedir.

Horadam dizisinin Üreteç fonksiyonu ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n = \frac{W_0 + (W_1 - pW_0)x}{1 - px - qx^2},$$

formundadır.

Tanım 2.1.3 a, b reel sayılar ve $i^2 = -1$ olmak üzere $a + ib$ biçimindeki sayılara karmaşık(kompleks) sayılar denir. Kompleks sayıyı genellikle z ve bu sayıların oluşturduğu kümeyi \mathbb{C} ile göstereceğiz.

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\},$$

dir.

$z = a + ib$ karmaşık sayısında a ya bu sayının reel kısmı denir ve $\text{Re}(z)$ ile gösterilir, b ye bu sayının sanal kısmı denir ve $\text{Im}(z)$ ile gösterilir. Şimdi karmaşık sayıların sağladığı bazı basit aritmetik işlemleri özetleyelim.

$z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ ve λ bir reel sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),$$

$$\lambda z_1 = \lambda a_1 + i(\lambda b_1),$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i,$$

z nin eşleşimini $\bar{z} = a - ib$ olmak üzere z ve eşleşiminin çarpımı;

$$z\bar{z} = a^2 + b^2,$$

dir [27].

Yukarıdaki tanımı sağlayan tüm kompleks sayıların kümesi \mathbb{C} , 2 boyutlu, değişmeli, birleşmeli cebir yapısındadır.

Matematiğin en önemli konularından birisi olan kuaterniyonlar ise 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton(1805–1865) tarafından karmaşık sayıları 4 boyutlu uzaya taşımak amacı ile geliştirilmiştir [8].

Tanım 2.1.4 Reel bileşenleri q_0, q_1, q_2, q_3 ve taban elemanları $1, i, j, k$ olan bir p reel kuaterniyonu

$$p = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k,$$

formunda bir hiperkompleks sayı olup i, j, k aşağıdaki çarpım kurallarını sağlar;

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

$$ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik.$$

Dikkat edilirse i, j, k taban elemanlarının kendi aralarındaki çarpımları değişme özelliğini sağlamaz.

Yukarıdaki tanımları sağlayan tüm reel kuaterniyonların kümesi William Rowan Hamilton'un anısına \mathbb{H} ile gösterilir.

Şimdi reel kuaterniyonların sağladığı bazı basit aritmetik işlemleri özetleyelim.

$$p_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k,$$

$$p_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k,$$

ve λ bir reel sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k,$$

$$p_1 - p_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)j + (d_1 - d_2)k,$$

$$\lambda p_1 = \lambda a_1 + (\lambda b_1)i + (\lambda c_1)j + (\lambda d_1)k,$$

$$p_1 p_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k.$$

Yukarıdaki basit aritmetik işlemler göz önüne alınırsa $\forall p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{H}$ için

1. $p_1 + p_2 = p_2 + p_1,$
2. $p_1 + (p_2 + p_3) = (p_1 + p_2) + p_3,$
3. $p_1(p_2 + p_3) = p_1 p_2 + p_1 p_3,$
4. $(p_1 p_2) p_3 = p_1 (p_2 p_3).$

p nin eşleniği $\bar{p} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$ olarak tanımlanır. p ve eşleniğinin çarpımı;

$$p \cdot \bar{p} = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = |q|^2,$$

dir. Elde edilen $|q|$ reel sayısına q nun normu adı verilir.

Kuaterniyonlar 4 boyutlu toplama işlemine göre birleşmeli, değişmeli, çarpma işlemine göre birleşmeli fakat değişmeli olmayan cebir yapısındadır [9].

Hamilton'un kuaterniyonları keşfinden kısa bir süre sonra Arthur Cayley, Oktoniyonlar olarak adlandırılan Cayley sayılarını tanımlamıştır [1]. Oktoniyolar, 8 boyutlu değişmeli ve birleşmeli olmayan cebir yapısına sahiptir. Oktoniyon yapısını detaylı olarak John C. Baez ele almıştır [2]. Şimdi de bir reel oktoniyonunun tanımını verelim.

Tanım 2.1.5 *Reel bileşenleri q_0, q_1, \dots, q_7 ve taban elemanları $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7$ olan bir p reel oktoniyonu için $\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = i, \mathbf{e}_2 = j, \mathbf{e}_3 = k, \mathbf{e}_4 = e, \mathbf{e}_5 = ie, \mathbf{e}_6 = je, \mathbf{e}_7 = ke$ olmak üzere*

$$p = \sum_{s=0}^7 q_s \mathbf{e}_s,$$

şeklinde tanımlanır. Bir p reel oktoniyonunu, $p = \text{Re}(p) + \text{Im}(p)$ biçiminde ifade edebiliriz. Burada $\text{Re}(p) = p_0$ ' a p reel oktoniyonun reel kısmı ve $\text{Im}(p) = \sum_{s=1}^7 q_s \mathbf{e}_s$ ifadesine de p oktoniyonun sanal kısmı denir.

Yukarıdaki tanımı sağlayan tüm reel oktoniyonların kümesini \mathbb{O} ile göstereceğiz.

$\forall p, q \in \mathbb{O}$ için

$$p = \sum_{i=0}^7 p_i \mathbf{e}_i,$$

ve

$$q = \sum_{i=0}^7 q_i \mathbf{e}_i,$$

olmak üzere

$$p + q = \sum_{i=0}^7 (p_i + q_i) \mathbf{e}_i,$$

$$p - q = \sum_{i=0}^7 (p_i - q_i) \mathbf{e}_i,$$

dir.

p nin eşleniği $\bar{p} = \text{Re}(p) - \text{Im}(p)$ olmak üzere

$$p \cdot \bar{p} = \bar{p} \cdot p = \sum_{i=0}^7 p_i^2,$$

şeklindedir. Oktoniyonlarda çarpma işlemi

$$p = \sum_{i=0}^7 a_i \mathbf{e}_i,$$

ve

$$q = \sum_{j=0}^7 b_j \mathbf{e}_j,$$

için

$$p.q = \left(\sum_{i=0}^7 a_i \mathbf{e}_i \right) \left(\sum_{j=0}^7 b_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=0}^7 a_i b_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j),$$

olarak tanımlanır. Oktoniyonların çarpım tablosu

Çizelge 2.2 Oktoniyonlarının Çarpım Tablosu

*	\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_4	\mathbf{e}_5	\mathbf{e}_6	\mathbf{e}_7
\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_4	\mathbf{e}_5	\mathbf{e}_6	\mathbf{e}_7
\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_1	$-\mathbf{e}_0$	\mathbf{e}_3	$-\mathbf{e}_2$	\mathbf{e}_5	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	\mathbf{e}_6
\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_6	\mathbf{e}_7	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$
\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	\mathbf{e}_7	$-\mathbf{e}_6$	\mathbf{e}_5	$-\mathbf{e}_4$
\mathbf{e}_4	\mathbf{e}_4	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_0$	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3
\mathbf{e}_5	\mathbf{e}_5	\mathbf{e}_4	$-\mathbf{e}_7$	\mathbf{e}_6	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	\mathbf{e}_2
\mathbf{e}_6	\mathbf{e}_6	\mathbf{e}_7	\mathbf{e}_4	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_2$	\mathbf{e}_3	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$
\mathbf{e}_7	\mathbf{e}_7	$-\mathbf{e}_6$	\mathbf{e}_5	\mathbf{e}_4	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	\mathbf{e}_1	$-\mathbf{e}_0$

formundadır [2].

Cayley-Dickson işlemi oktoniyonlara uygulandığında 16 boyutlu değişmeli ve birleşmeli olmayan sedeniyonlar yapısı ortaya çıkar. Sedeniyonlar, doğrusal yer çekimi ve elektromanyetik teori gibi birçok bilim alanında görülür. Sedeniyonlar ayrıntılı olarak Imaeda K. ve Imaeda M. ve Cariow A. ve Cariowa G. [3,23] tarafından çalışılmıştır. Şimdi bir reel p sedeniyonun tanımını verelim.

Tanım 2.1.6 Reel bileşenleri q_0, q_1, \dots, q_{15} ve taban elemanları $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{15}$ olan bir p reel sedeniyonu

$$p = \sum_{i=0}^{15} q_i \mathbf{e}_i,$$

şeklinde tanımlanır. Bir p reel sedeniyonunu, $p = \text{Re}(p) + \text{Im}(p)$ biçiminde ifade edebiliriz.

Bir p sedeniyonu için $\text{Re}(p) = p_0$ reel kısım ve $\text{Im}(p) = \sum_{s=1}^{15} q_s \mathbf{e}_s$ sanal kısımdır.

Yukarıdaki tanımları sağlayan tüm reel sedeniyonların kümesini \mathbb{S} ile göstereceğiz.

$\forall p, q \in \mathbb{S}$ için

$$p = \sum_{i=0}^{15} p_i \mathbf{e}_i,$$

ve

$$q = \sum_{i=0}^{15} q_i \mathbf{e}_i,$$

olmak üzere

$$p + q = \sum_{i=0}^{15} (p_i + q_i) \mathbf{e}_i,$$

$$p - q = \sum_{i=0}^{15} (p_i - q_i) \mathbf{e}_i,$$

dir.

p nin eşleştiği $\bar{p} = \text{Re}(p) - \text{Im}(p)$ olmak üzere

$$p \cdot \bar{p} = \bar{p} \cdot p = \sum_{i=0}^{15} p_i^2,$$

dir.

Sedeniyonlarda çarpma işlemi $i, j, k = 1, 2, \dots, 15$ için

$$\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_i, \quad (\mathbf{e}_i)^2 = -\mathbf{e}_0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i, \quad i \neq j, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) = -(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k, \quad i \neq j, \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \neq \pm \mathbf{e}_k, \quad (2.4)$$

olmak üzere

$$p = \sum_{i=0}^{15} a_i \mathbf{e}_i,$$

ve

$$q = \sum_{j=0}^{15} b_j \mathbf{e}_j,$$

için

$$p \cdot q = \left(\sum_{i=0}^{15} a_i \mathbf{e}_i \right) \left(\sum_{j=0}^{15} b_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=0}^{15} a_i b_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j),$$

şeklinde tanımlanır [3].

Yukarıdaki tanımları sağlayan tüm sedeniyonların kümesi \mathbb{S} , 16 boyutlu, toplama işlemine göre değişmeli, birleşmeli fakat çarpma işlemine göre değişmeli ve birleşmeli olmayan ve sıfır bölene sahip bir cebir yapısındadır. Yani sıfırdan farklı iki sedeniyonun çarpımının sıfır olmasıdır. Örneğin;

$$(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_{10})(\mathbf{e}_{16} - \mathbf{e}_{15}) = 0,$$

veya

$$(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{14})(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_{15}) = 0,$$

olduğunu kolayca tablodan görebiliriz.

Sedeniyonların diğer cebirsel özellikleri içinde Cawagas, Cariow, Imeada tarafından yayınlanan çalışmalara bakılabilir [3,23,24].

Şimdi ise q -analizinin önemli tanımları ve gösterimlerinden söz edelim. Q -tamsayıları, q -faktöriyelleri ve q -binomiyel katsayılarının tanımlarını verelim.

Tanım 2.1.7 Bir n gerçel sayısının q -analoğu $(n)_q$ ya da kısacası (n) ile gösterilir ve

$$(n)_q = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

ile tanımlanır. $q \neq 1$ için

$$(n)_q = \frac{1 - q^n}{1 - q} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1,$$

olduğundan,

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} (n)_q = \lim_{q \rightarrow 1^-} (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1) = n,$$

dir, kısacası; $q \rightarrow 1$ iken $(n)_q \rightarrow n$ olur [28].

Tanım 2.1.8 Bir pozitif n tamsayısının q -faktoriyeli

$$(n)_q! = (1)_q(2)_q \dots (n)_q,$$

ile tanımlanır ve $(n)_q!$ ile gösterilir. $n = 0$ için $(0)! = 1$ olarak tanımlanmıştır [28].

Tanım 2.1.9 n, j negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$\binom{n}{j}_q = \frac{(n)_q!}{(n-j)_q!(j)_q!},$$

ifadesine q -binomiyel katsayı denir [28].

Ayrıca

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \binom{n}{j}_q = \binom{n}{j},$$

dir.





BÖLÜM 3

FIBONACCI VE LUCAS SEDENİYONLARININ YENİ BİR GENELLEŞTİRMESİ

Bu bölümde sırasıyla q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonların tanımları, Binet formülleri, üstel türeteç fonksiyonları, Catalan, Cassini, d'Ocagne eşitliklerini ve bu sedeniyonları içeren bazı binomiyel toplam formülleri verilecektir. Bu bölümden itibaren $1 - q$ sıfırdan farklı bir reel sayı olarak alınacaktır.

3.1 Q -FIBONACCI VE Q -LUCAS SEDENİYONLARI

Tanım 3.1.1 $n \geq 0$ tamsayıları için q -Fibonacci sedeniyon $SF_n(\alpha; q)$ ve q -Lucas sedeniyon $SL_n(\alpha; q)$

$$SF_n(\alpha; q) = \sum_{s=0}^{15} \alpha^{n+s-1} (n+s)_q \mathbf{e}_s, \quad (3.1)$$

$$SL_n(\alpha; q) = \sum_{s=0}^{15} \alpha^{n+s} \frac{(2n+2s)_q}{(n+s)_q} \mathbf{e}_s, \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanır.

α ve q 'nun özel durumlarına göre q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonları aşağıdaki tabloda verilen sedeniyonlara dönüşmektedir.

Çizelge 3.1 q - Fibonacci ve q - Lucas Sedeniyonların Özel Durumları

α	q	q -Fibonacci Sedenions	q -Lucas sedenions
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1}{\alpha^2}$	Fibonacci sedenions SF_n	Lucas sedenions SL_n
$1 + \sqrt{2}$	$\frac{-1}{\alpha^2}$	Pell sedenions SP_n	Pell-Lucas sedenions SPL_n
$\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$	$\frac{-1}{\alpha^2}$	k -Fibonacci sedenions $SF_{k,n}$	k -Lucas sedenions $SL_{k,n}$
2	$\frac{-1}{2}$	Jacobsthal sedenions SJ_n	Jacobsthal-Lucas sedenions Sj_n
$1 + \sqrt{1+k}$	$\frac{-k}{\alpha^2}$	k -Pell sedenions $SP_{k,n}$	k -Pell-Lucas sedenions $SPL_{k,n}$

Şimdi ise q -Fibonacci sedeniyon ve q -Lucas sedeniyon için Binet formülünü aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.1.2

$$\alpha^* = \sum_{s=0}^{15} \alpha^s \mathbf{e}_s, \quad (3.3)$$

ve

$$\beta^* = \sum_{s=0}^{15} (\alpha q)^s \mathbf{e}_s, \quad (3.4)$$

olmak üzere q -Fibonacci sedeniyon ve q -Lucas sedeniyonlarının Binet formülleri sırasıyla

$$\mathbb{SF}_n(\alpha; q) = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* (\alpha q)^n}{\alpha(1-q)}, \quad (3.5)$$

$$\mathbb{SL}_n(\alpha; q) = \alpha^* \alpha^n + \beta^* (\alpha q)^n, \quad (3.6)$$

biçimindedir.

İspat. Eş. (3.1) den q -Fibonacci sedeniyonun Binet formülünü elde edelim;

$$\begin{aligned} \mathbb{SF}_n(\alpha; q) &= \sum_{s=0}^{15} \alpha^{n+s-1} (n+s)_q \mathbf{e}_s, \\ &= \alpha^{n-1} (n)_q \mathbf{e}_0 + \alpha^n (n+1)_q \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^{n+14} (n+15)_q \mathbf{e}_{15}, \\ &= \alpha^{n-1} \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) \mathbf{e}_0 + \alpha^n \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^{n+14} \left(\frac{1-q^{n+15}}{1-q} \right) \mathbf{e}_{15}, \\ &= \alpha^n \left(\frac{1-q^n}{\alpha(1-q)} \right) \mathbf{e}_0 + \alpha^{n+1} \left(\frac{1-q^{n+1}}{\alpha(1-q)} \right) \mathbf{e}_1 + \cdots \\ &\quad + \alpha^{n+15} \left(\frac{1-q^{n+15}}{\alpha(1-q)} \right) \mathbf{e}_{15}, \\ &= \frac{1}{\alpha(1-q)} ((\alpha^n - (\alpha q)^n) \mathbf{e}_0 + (\alpha^{n+1} - (\alpha q)^{n+1}) \mathbf{e}_1 + \cdots \\ &\quad + (\alpha^{n+15} - (\alpha q)^{n+15}) \mathbf{e}_{15}), \\ &= \frac{1}{\alpha(1-q)} ((\alpha^n (\mathbf{e}_0 + \alpha \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^{15} \mathbf{e}_{15})) - ((\alpha q)^n (\mathbf{e}_0 + (\alpha q) \mathbf{e}_1 + \cdots \\ &\quad + (\alpha q)^{15} \mathbf{e}_{15})), \\ &= \frac{\alpha^n \alpha^* - (\alpha q)^n \beta^*}{\alpha(1-q)}. \end{aligned}$$

Benzer biçimde Eş. (3.2) den q -Lucas sedeniyonun Binet formülünü elde edelim;

$$\begin{aligned}
SL_n(\alpha; q) &= \sum_{s=0}^{15} \alpha^{n+s} \frac{(2n+2s)_q}{(n+s)_q} \mathbf{e}_s, \\
&= \alpha^n \frac{(2n)_q}{(n)_q} \mathbf{e}_0 + \alpha^{n+1} \frac{(2n+2)_q}{(n+1)_q} \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^{n+15} \frac{(2n+30)_q}{(n+15)_q} \mathbf{e}_{15}, \\
&= \alpha^n \left(\frac{1-q^{2n}}{1-q} \right) \left(\frac{1-q}{1-q^n} \right) \mathbf{e}_0 + \alpha^{n+1} \left(\frac{1-q^{2n+2}}{1-q} \right) \left(\frac{1-q}{1-q^{n+1}} \right) \mathbf{e}_1 + \cdots \\
&\quad + \alpha^{n+15} \left(\frac{1-q^{2n+30}}{1-q} \right) \left(\frac{1-q}{1-q^{n+15}} \right) \mathbf{e}_{15}, \\
&= \alpha^n (1+q^n) \mathbf{e}_0 + \alpha^{n+1} (1+q^{n+1}) \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^{n+15} (1+q^{n+15}) \mathbf{e}_{15}, \\
&= (\alpha^n + (\alpha q)^n) \mathbf{e}_0 + (\alpha^{n+1} + (\alpha q)^{n+1}) \mathbf{e}_1 + \cdots + (\alpha^{n+15} + (\alpha q)^{n+15}) \mathbf{e}_{15}, \\
&= \alpha^n (\mathbf{e}_0 + \alpha \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^{15} \mathbf{e}_{15}) + (\alpha q)^n (\mathbf{e}_0 + \alpha q \mathbf{e}_1 + \cdots + (\alpha q)^{15} \mathbf{e}_{15}), \\
&= \alpha^* \alpha^n + \beta^* (\alpha q)^n,
\end{aligned}$$

dir. ■

Teorem 3.1.3 q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonlarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{SF}_n(\alpha; q) \frac{x^n}{n!} = \frac{\alpha^* e^{\alpha x} - \beta^* e^{\alpha q x}}{\alpha(1-q)}, \quad (3.7)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{SL}_n(\alpha; q) \frac{x^n}{n!} = \alpha^* e^{\alpha x} + \beta^* e^{\alpha q x}, \quad (3.8)$$

şeklindedir.

İspat. q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonların Binet formülünden dolayı

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{SF}_n(\alpha; q) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n \alpha^* - (\alpha q)^n \beta^*}{\alpha(1-q)} \right) \frac{x^n}{n!}, \\
&= \frac{\alpha^*}{\alpha(1-q)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\alpha x)^n}{n!} \right) - \frac{\beta^*}{\alpha(1-q)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\alpha q x)^n}{n!} \right), \\
&= \frac{\alpha^* e^{\alpha x} - \beta^* e^{\alpha q x}}{\alpha(1-q)},
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{SL}_n(\alpha; q) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n \alpha^* + (\alpha q)^n \beta^*) \frac{x^n}{n!}, \\
&= \alpha^* \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\alpha x)^n}{n!} \right) + \beta^* \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\alpha q x)^n}{n!} \right), \\
&= \alpha^* e^{\alpha x} + \beta^* e^{\alpha q x},
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1.4 (*Catalan Eşitliği*) n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\mathbb{SF}_{n+r}(\alpha; q) \cdot \mathbb{SF}_{n-r}(\alpha; q) - \mathbb{SF}_n^2(\alpha; q) = \frac{\alpha^{2n-2}q^n(1-q^r)(\beta^*\alpha^* - q^{-r}\alpha^*\beta^*)}{(1-q)^2}, \quad (3.9)$$

ve

$$\mathbb{SL}_{n+r}(\alpha; q) \cdot \mathbb{SL}_{n-r}(\alpha; q) - \mathbb{SL}_n^2(\alpha; q) = \alpha^{2n}q^{n-r}(1-q^r)(\alpha^*\beta^* - q^r\beta^*\alpha^*), \quad (3.10)$$

dir.

İspat. q -Fibonacci sedeniyonun Binet formülünden faydalanarak Eş. (3.5) den

$$\begin{aligned} & \mathbb{SF}_{n+r}(\alpha; q) \cdot \mathbb{SF}_{n-r}(\alpha; q) - \mathbb{SF}_n^2(\alpha; q) \\ &= \left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+r} - \beta^*(\alpha q)^{n+r}}{\alpha(1-q)} \right) \left(\frac{\alpha^*\alpha^{n-r} - \beta^*(\alpha q)^{n-r}}{\alpha(1-q)} \right) - \left(\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*(\alpha q)^n}{\alpha(1-q)} \right) \left(\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*(\alpha q)^n}{\alpha(1-q)} \right), \\ & \quad \alpha^*\alpha^*\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*\alpha^{2n}q^{n-r} - \beta^*\alpha^*\alpha^{2n}q^{n+r} + \beta^*\beta^*(\alpha q)^{2n} \\ &= \frac{-\alpha^*\alpha^*\alpha^{2n} + \alpha^*\beta^*\alpha^{2n}q^n + \beta^*\alpha^*\alpha^{2n}q^n - \beta^*\beta^*(\alpha q)^{2n}}{\alpha^2(1-q)^2}, \\ &= \frac{-\alpha^*\beta^*\alpha^{2n}q^{n-r} - \beta^*\alpha^*\alpha^{2n}q^{n+r} + \alpha^*\beta^*\alpha^{2n}q^n + \beta^*\alpha^*\alpha^{2n}q^n}{\alpha^2(1-q)^2}, \\ &= \frac{\alpha^*\beta^*(-\alpha^{2n}q^{n-r} + \alpha^{2n}q^n) + \beta^*\alpha^*(-\alpha^{2n}q^{n+r} + \alpha^{2n}q^n)}{\alpha^2(1-q)^2}, \\ &= \frac{\alpha^*\beta^*(\alpha^{2n}q^n(1-q^{-r})) + \beta^*\alpha^*(\alpha^{2n}q^n(1-q^r))}{\alpha^2(1-q)^2}, \\ &= \frac{\alpha^{2n}q^n(\alpha^*\beta^*(1-q^{-r}) + \beta^*\alpha^*(1-q^r))}{\alpha^2(1-q)^2}, \\ &= \frac{\alpha^{2n-2}q^n(1-q^r)(\beta^*\alpha^* - q^{-r}\alpha^*\beta^*)}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi benzer olarak q -Lucas sedeniyon için Catalan eşitliğini elde edelim.

q -Lucas sedeniyonun Binet formülünden faydalanarak Eş. (3.6) den

$$\begin{aligned} & \mathbb{SL}_{n+r}(\alpha; q) \cdot \mathbb{SL}_{n-r}(\alpha; q) - \mathbb{SL}_n^2(\alpha; q) \\ &= (\alpha^*\alpha^{n+r} + \beta^*(\alpha q)^{n+r})(\alpha^*\alpha^{n-r} + \beta^*(\alpha q)^{n-r}) - (\alpha^*\alpha^n + \beta^*(\alpha q)^n)(\alpha^*\alpha^n + \beta^*(\alpha q)^n), \\ &= \alpha^*\alpha^*\alpha^{2n} + \alpha^*\beta^*\alpha^{2n}q^{n-r} + \beta^*\alpha^*\alpha^{2n}q^{n+r} + \beta^*\beta^*(\alpha q)^{2n} - \\ & \quad \alpha^*\alpha^*\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*\alpha^{2n}q^n - \beta^*\alpha^*\alpha^{2n}q^n - \beta^*\beta^*(\alpha q)^{2n}, \\ &= \alpha^*\beta^*(\alpha^{2n}q^{n-r} - \alpha^{2n}q^n) + \beta^*\alpha^*(\alpha^{2n}q^{n+r} - \alpha^{2n}q^n), \\ &= \alpha^*\beta^*(\alpha^{2n}q^{n-r}(1-q^r)) + \beta^*\alpha^*(\alpha^{2n}q^{n-r}(q^{2r} - q^r)), \\ &= \alpha^{2n}q^{n-r}(1-q^r)(\alpha^*\beta^* - q^r\beta^*\alpha^*), \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1.5 (*Cassini Eşitliği*) n negatif olmayan tamsayı olmak üzere q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\mathbb{SF}_{n+1}(\alpha; q) \cdot \mathbb{SF}_{n-1}(\alpha; q) - \mathbb{SF}_n^2(\alpha; q) = \frac{\alpha^{2n-2} q^n (\beta^* \alpha^* - q^{-1} \alpha^* \beta^*)}{(1-q)}, \quad (3.11)$$

ve

$$\mathbb{SL}_{n+1}(\alpha; q) \cdot \mathbb{SL}_{n-1}(\alpha; q) - \mathbb{SL}_n^2(\alpha; q) = \alpha^{2n} q^{n-1} (1-q) (\alpha^* \beta^* - q \beta^* \alpha^*), \quad (3.12)$$

dir.

İspat. q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonları için Eş.(3.9) ve Eş.(3.10) de $r = 1$ alındığında Cassini eşitliği elde edilir. ■

Teorem 3.1.6 (*d'Ocagne Eşitliği*) n negatif olmayan tamsayı ve m doğal sayı olmak üzere, $m > n + 1$, q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\mathbb{SF}_m(\alpha; q) \cdot \mathbb{SF}_{n+1}(\alpha; q) - \mathbb{SF}_{m+1}(\alpha; q) \cdot \mathbb{SF}_n(\alpha; q) = \frac{\alpha^{m+n-1} (q^n \alpha^* \beta^* - q^m \beta^* \alpha^*)}{(1-q)}, \quad (3.13)$$

ve

$$\mathbb{SL}_m(\alpha; q) \cdot \mathbb{SL}_{n+1}(\alpha; q) - \mathbb{SL}_{m+1}(\alpha; q) \cdot \mathbb{SL}_n(\alpha; q) = \alpha^{m+n+1} (1-q) (\beta^* \alpha^* q^m - \alpha^* \beta^* q^n), \quad (3.14)$$

dir.

İspat. q -Fibonacci sedeniyonunun Binet formülünden dolayı;

$$\begin{aligned} & \mathbb{SF}_m(\alpha; q) \cdot \mathbb{SF}_{n+1}(\alpha; q) - \mathbb{SF}_{m+1}(\alpha; q) \cdot \mathbb{SF}_n(\alpha; q) \\ &= \left(\frac{\alpha^* \alpha^m - \beta^* (\alpha q)^m}{\alpha(1-q)} \right) \left(\frac{\alpha^* \alpha^{n+1} - \beta^* (\alpha q)^{n+1}}{\alpha(1-q)} \right) - \left(\frac{\alpha^* \alpha^{m+1} - \beta^* (\alpha q)^{m+1}}{\alpha(1-q)} \right) \left(\frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* (\alpha q)^n}{\alpha(1-q)} \right), \\ & \quad \alpha^* \alpha^* \alpha^{m+n+1} - \alpha^* \beta^* \alpha^{m+n+1} q^{n+1} - \beta^* \alpha^* \alpha^{m+n+1} q^m + \beta^* \beta^* (\alpha q)^{m+n+1} \\ &= \frac{-\alpha^* \alpha^* \alpha^{m+n+1} + \alpha^* \beta^* \alpha^{m+n+1} q^n + \beta^* \alpha^* \alpha^{m+n+1} q^{m+1} - \beta^* \beta^* (\alpha q)^{m+n+1}}{\alpha^2 (1-q)^2}, \\ &= \frac{\alpha^* \beta^* (-\alpha^{m+n+1} q^{n+1} + \alpha^{m+n+1} q^n) + \beta^* \alpha^* (-\alpha^{m+n+1} q^m + \alpha^{m+n+1} q^{m+1})}{\alpha^2 (1-q)^2}, \\ &= \frac{\alpha^* \beta^* (\alpha^{m+n+1} (q^n - q^{n+1})) + \beta^* \alpha^* (\alpha^{m+n+1} (q^{m+1} - q^m))}{\alpha^2 (1-q)^2}, \\ &= \frac{\alpha^{m+n+1} (q^n (1-q) \alpha^* \beta^* + q^m (q-1) \beta^* \alpha^*)}{(1-q)^2}, \\ &= \frac{\alpha^{m+n-1} (q^n \alpha^* \beta^* - q^m \beta^* \alpha^*)}{(1-q)}. \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Şimdi benzer şekilde q -Lucas sedeniyon için d'Ocagne eşitliğini elde edelim. q -Lucas sedeniyonunun Binet formülünden dolayı;

$$\begin{aligned}
& \mathbb{SL}_m(\alpha; q) \cdot \mathbb{SL}_{n+1}(\alpha; q) - \mathbb{SL}_{m+1}(\alpha; q) \cdot \mathbb{SL}_n(\alpha; q) \\
&= (\alpha^* \alpha^m + \beta^* (\alpha q)^m) (\alpha^* \alpha^{n+1} + \beta^* (\alpha q)^{n+1}) - \\
& (\alpha^* \alpha^{m+1} + \beta^* (\alpha q)^{m+1}) (\alpha^* \alpha^n + \beta^* (\alpha q)^n), \\
&= \alpha^* \alpha^* \alpha^{m+n+1} + \alpha^* \beta^* \alpha^{m+n+1} q^{n+1} + \beta^* \alpha^* \alpha^{m+n+1} q^m + \beta^* \beta^* (\alpha q)^{m+n+1} \\
& - \alpha^* \alpha^* \alpha^{m+n+1} - \alpha^* \beta^* \alpha^{m+n+1} q^n - \beta^* \alpha^* \alpha^{m+n+1} q^{m+1} - \beta^* \beta^* (\alpha q)^{m+n+1}, \\
&= \alpha^* \beta^* (\alpha^{m+n+1} q^{n+1} - \alpha^{m+n+1} q^n) + \beta^* \alpha^* (\alpha^{m+n+1} q^m - \alpha^{m+n+1} q^{m+1}), \\
&= \alpha^* \beta^* (\alpha^{m+n+1} (q^{n+1} - q^n)) + \beta^* \alpha^* (\alpha^{m+n+1} (q^m - q^{m+1})), \\
&= \alpha^* \beta^* (\alpha^{m+n+1} (q^n (q - 1))) + \beta^* \alpha^* (\alpha^{m+n+1} q^m (1 - q)), \\
&= \alpha^{m+n+1} (1 - q) (\beta^* \alpha^* q^m - \alpha^* \beta^* q^n),
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. ■

Şimdi de q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonlarını içeren bazı toplam özelliklerini verelim.

Teorem 3.1.7 $(\alpha - \alpha q) = \sqrt{\Delta}$ olmak üzere, q -Fibonacci sedeniyonu ve q -Lucas sedeniyonu için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SF}_{2n+k}(\alpha; q) = \begin{cases} \Delta^{\frac{m}{2}} \mathbb{SF}_{m+k}(\alpha; q), & m \text{ çift} \\ \Delta^{\frac{m-1}{2}} \mathbb{SL}_{m+k}(\alpha; q), & m \text{ tek} \end{cases}, \quad (3.15)$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SL}_{2n+k}(\alpha; q) = \begin{cases} \Delta^{\frac{m}{2}} \mathbb{SL}_{m+k}(\alpha; q), & m \text{ çift} \\ \Delta^{\frac{m+1}{2}} \mathbb{SF}_{m+k}(\alpha; q), & m \text{ tek} \end{cases}, \quad (3.16)$$

dir.

İspat. q -Fibonacci sedeniyon için toplam özelliğini elde edelim.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SF}_{2n+k}(\alpha; q) \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \left(\frac{\alpha^* \alpha^{2n+k} - \beta^* (\alpha q)^{2n+k}}{\alpha(1-q)} \right), \\
&= \frac{\alpha^* \alpha^k}{\alpha(1-q)} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \alpha^{2n} - \frac{\beta^* (\alpha q)^k}{\alpha(1-q)} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} (\alpha q)^{2n}, \\
&= \frac{\alpha^* \alpha^k (\alpha^2 - \alpha^2 q)^m - \beta^* (\alpha q)^k (\alpha^2 q^2 - \alpha^2 q)^m}{\alpha(1-q)}, \\
&= \frac{\alpha^* \alpha^k (\alpha(\sqrt{\Delta}))^m - \beta^* (\alpha q)^k (-\alpha q(\sqrt{\Delta}))^m}{\alpha(1-q)}.
\end{aligned}$$

Eğer m çift ise;

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SF}_{2n+k}(\alpha; q) \\
&= \frac{\alpha^* \alpha^{m+k} (\sqrt{\Delta})^m - \beta^* (\alpha q)^{m+k} (\sqrt{\Delta})^m}{\alpha(1-q)}, \\
&= (\sqrt{\Delta})^m \left(\frac{\alpha^* \alpha^{m+k} - \beta^* (\alpha q)^{m+k}}{\alpha(1-q)} \right), \\
&= (\sqrt{\Delta})^m \mathbb{SF}_{m+k}(\alpha; q).
\end{aligned}$$

Eğer m tek ise;

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SF}_{2n+k}(\alpha; q) \\
&= \frac{\alpha^* \alpha^{m+k} (\sqrt{\Delta})^m - \beta^* (\alpha q)^k (-\alpha q)^m (\sqrt{\Delta})^m}{\alpha(1-q)}, \\
&= \frac{\alpha^* \alpha^{m+k} (\sqrt{\Delta})^m + \beta^* (\alpha q)^{m+k} (\sqrt{\Delta})^m}{\alpha(1-q)}, \\
&= \frac{(\sqrt{\Delta})^m}{\alpha(1-q)} (\alpha^* \alpha^{m+k} + \beta^* (\alpha q)^{m+k}), \\
&= \frac{(\sqrt{\Delta})^{m-1} (\sqrt{\Delta})}{(\alpha - \alpha q)} \cdot \mathbb{SL}_{m+k}(\alpha; q), \\
&= (\sqrt{\Delta})^{m-1} \mathbb{SL}_{m+k}(\alpha; q),
\end{aligned}$$

şeklinde dir. Benzer biçimde q -Lucas sedeniyon için toplam özelliğini elde edelim.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SL}_{2n+k}(\alpha; q) \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} (\alpha^* \alpha^{2n+k} + \beta^* (\alpha q)^{2n+k}), \\
&= \alpha^* \alpha^k \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \alpha^{2n} + \beta^* (\alpha q)^k \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} (\alpha q)^{2n}, \\
&= \alpha^* \alpha^k (\alpha^2 - \alpha^2 q)^m + \beta^* (\alpha q)^k (\alpha^2 q^2 - \alpha^2 q)^m, \\
&= \alpha^* \alpha^k (\alpha \sqrt{\Delta})^m + \beta^* (\alpha q)^k (-\alpha q \sqrt{\Delta})^m.
\end{aligned}$$

Eğer m çift ise;

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SL}_{2n+k}(\alpha; q) \\
&= \alpha^* \alpha^{m+k} (\sqrt{\Delta})^m + \beta^* (\alpha q)^{m+k} (\sqrt{\Delta})^m, \\
&= (\sqrt{\Delta})^m (\alpha^* \alpha^{m+k} + \beta^* (\alpha q)^{m+k}), \\
&= (\sqrt{\Delta})^m \mathbb{SL}_{m+k}(\alpha; q),
\end{aligned}$$

dır. Eğer m tek ise;

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SL}_{2n+k}(\alpha; q) \\
&= \alpha^* \alpha^{m+k} (\sqrt{\Delta})^m + \beta^* (\alpha q)^k (-\alpha q)^m (\sqrt{\Delta})^m, \\
&= (\sqrt{\Delta})^m (\alpha^* \alpha^{m+k} - \beta^* (\alpha q)^{m+k}), \\
&= \frac{(\sqrt{\Delta})^{m+1}}{\sqrt{\Delta}} (\alpha^* \alpha^{m+k} - \beta^* (\alpha q)^{m+k}), \\
&= (\sqrt{\Delta})^{m+1} \mathbb{SF}_{m+k}(\alpha; q),
\end{aligned}$$

dır. ■

Teorem 3.1.8 $n, k \geq 0$, q -Fibonacci sedeniyonu ve q -Lucas sedeniyonu için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SF}_{2n+k}(\alpha; q) = (-\alpha[2]_q)^m \mathbb{SF}_{m+k}(\alpha; q), \quad (3.17)$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SL}_{2n+k}(\alpha; q) = (-\alpha[2]_q)^m \mathbb{SL}_{m+k}(\alpha; q), \quad (3.18)$$

dir.

İspat. q -Fibonacci sedeniyon için Binet formülünden faydalanarak;

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SF}_{2n+k}(\alpha; q) \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \left(\frac{\alpha^* \alpha^{2n+k} - \beta^* (\alpha q)^{2n+k}}{\alpha(1-q)} \right), \\
&= \frac{\alpha^* \alpha^k}{\alpha(1-q)} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \alpha^{2n} - \frac{\beta^* (\alpha q)^k}{\alpha(1-q)} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} (\alpha q)^{2n}, \\
&= \frac{\alpha^* \alpha^k (-\alpha^2 q - \alpha^2)^m - \beta^* (\alpha q)^k (-\alpha^2 q - \alpha^2 q^2)^m}{\alpha(1-q)}, \\
&= \frac{\alpha^* \alpha^k (-\alpha^2(1+q))^m - \beta^* (\alpha q)^k (-\alpha^2 q(1+q))^m}{\alpha(1-q)}, \\
&= (-\alpha(1+q))^m \frac{\alpha^* \alpha^k \alpha^m - \beta^* (\alpha q)^k (\alpha q)^m}{\alpha(1-q)}, \\
&= (-\alpha[2]_q)^m \mathbb{SF}_{m+k}(\alpha; q).
\end{aligned}$$

ve q -Lucas sedeniyon için Binet formülünden faydalanarak;

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SL}_{2n+k}(\alpha; q) \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} (\alpha^* \alpha^{2n+k} + \beta^* (\alpha q)^{2n+k}), \\
&= \alpha^* \alpha^k \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \alpha^{2n} + \beta^* (\alpha q)^k \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} (\alpha q)^{2n}, \\
&= \alpha^* \alpha^k (-\alpha^2 q - \alpha^2)^m + \beta^* (\alpha q)^k (-\alpha^2 q - \alpha^2 q^2)^m, \\
&= \alpha^* \alpha^k (-\alpha^2(1+q))^m + \beta^* (\alpha q)^k (-\alpha^2 q(1+q))^m, \\
&= (-\alpha(1+q))^m (\alpha^* \alpha^k \alpha^m + \beta^* (\alpha q)^k (\alpha q)^m), \\
&= (-\alpha[2]_q)^m \mathbb{SL}_{m+k}(\alpha; q).
\end{aligned}$$

■

Teorem 3.1.9 q -Fibonacci ve q -Lucas Sedeniyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha + \alpha q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SF}_n(\alpha; q) = \mathbb{SF}_{2m}(\alpha; q), \quad (3.19)$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha + \alpha q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SL}_n(\alpha; q) = \mathbb{SL}_{2m}(\alpha; q). \quad (3.20)$$

İspat. q -Fibonacci sedeniyon için Binet formülünden faydalanarak;

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha + \alpha q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SF}_n(\alpha; q) \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha + \alpha q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \left(\frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* (\alpha q)^n}{\alpha(1-q)} \right), \\
&= \frac{\alpha^*}{\alpha(1-q)} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha + \alpha q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \alpha^n \\
&\quad - \frac{\beta^*}{\alpha(1-q)} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha + \alpha q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} (\alpha q)^n, \\
&= \frac{\alpha^*}{\alpha(1-q)} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha^2 + \alpha^2 q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \\
&\quad - \frac{\beta^*}{\alpha(1-q)} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha^2 q + \alpha^2 q^2)^n (-\alpha^2 q)^{m-n}, \\
&= \frac{\alpha^*}{\alpha(1-q)} (\alpha^2 + \alpha^2 q - \alpha^2 q)^m - \frac{\beta^*}{\alpha(1-q)} (\alpha^2 q + \alpha^2 q^2 - \alpha^2 q)^m, \\
&= \frac{\alpha^* \alpha^{2m} - \beta^* (\alpha q)^{2m}}{\alpha(1-q)}, \\
&= \mathbb{SF}_{2m}(\alpha; q),
\end{aligned}$$

ve q -Lucas sedeniyon için Binet formülünden faydalanarak;

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha + \alpha q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbb{SL}_n(\alpha; q) \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha + \alpha q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} (\alpha^* \alpha^n + \beta^* (\alpha q)^n), \\
&= \alpha^* \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha + \alpha q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \alpha^n \\
&\quad + \beta^* \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha + \alpha q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} (\alpha q)^n, \\
&= \alpha^* \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha^2 + \alpha^2 q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \\
&\quad + \beta^* \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha^2 + \alpha^2 q)^n (-\alpha^2 q)^{m-n}, \\
&= \alpha^* (\alpha^2 + \alpha^2 q - \alpha^2 q)^m + \beta^* (\alpha^2 + \alpha^2 q - \alpha^2 q)^m, \\
&= \alpha^* \alpha^{2m} + \beta^* (\alpha q)^{2m}, \\
&= \mathbb{SL}_{2m}(\alpha; q).
\end{aligned}$$

■

BÖLÜM 4

Q -FIBONACCI VE Q -LUCAS SEDENİYONLARIN ÖZEL DURUMLARI

Bu bölümde q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonları için bazı özel durumlar verilecektir. Özel durumlardan elde edilen sonuçların sırasıyla Fibonacci sedeniyon, Lucas sedeniyon, k -Fibonacci sedeniyon, k -Lucas sedeniyon, Pell sedeniyon, Pell-Lucas sedeniyon, k -Pell sedeniyon, k -Pell-Lucas sedeniyon, Jacobsthal sedeniyon ve Jacobsthal-Lucas sedeniyonuna dönüştüklerini göstereceğiz. Daha sonra yeni elde edilen sedeniyonların sırasıyla Binet formülleri, üstel üreteç fonksiyonları, Catalan, Cassini, d'Ocagne özellikleri ve bu sedeniyonları içeren bazı binomiyel toplam formülleri verilecektir.

4.1 BINET FORMÜLLERİ

Sonuç 4.1.1 *Eş. (3.5) ve Eş. (3.6) de $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde Fibonacci ve Lucas sedeniyonları için Binet formülü*

$$\alpha^* = \sum_{s=0}^{15} \alpha^s \mathbf{e}_s, \quad (4.1)$$

ve

$$\beta^* = \sum_{s=0}^{15} \beta^s \mathbf{e}_s, \quad (4.2)$$

olmak üzere

$$SF_n = \frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad (4.3)$$

$$SL_n = \alpha^* \alpha^n + \beta^* \beta^n, \quad (4.4)$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç 4.1.2 *Eş.(3.5) ve Eş. (3.6) de $\alpha = \alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\beta = \beta_k = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde k -Fibonacci ve k -Lucas sedeniyonları için Binet formülü*

$$\alpha_k^* = \sum_{s=0}^{15} \alpha_k^s \mathbf{e}_s, \quad (4.5)$$

ve

$$\beta_k^* = \sum_{s=0}^{15} \beta_k^s \mathbf{e}_s, \quad (4.6)$$

olmak üzere

$$SF_{k,n} = \frac{\alpha_k^* \alpha_k^n - \beta_k^* \beta_k^n}{\alpha_k - \beta_k}, \quad (4.7)$$

$$SL_{k,n} = \alpha_k^* \alpha_k^n + \beta_k^* \beta_k^n, \quad (4.8)$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç 4.1.3 Eş. (3.5) ve Eş.(3.6) de $\alpha = r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = r_2 = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde Pell ve Pell–Lucas sedeniyonları için Binet formülü

$$r_1^* = \sum_{s=0}^{15} r_1^s \mathbf{e}_s, \quad (4.9)$$

ve

$$r_2^* = \sum_{s=0}^{15} r_2^s \mathbf{e}_s, \quad (4.10)$$

olmak üzere

$$SP_n = \frac{r_1^* r_1^n - r_2^* r_2^n}{r_1 - r_2}, \quad (4.11)$$

$$SPL_n = r_1^* r_1^n + r_2^* r_2^n, \quad (4.12)$$

biçimde elde edilir.

Sonuç 4.1.4 Eş. (3.5) ve Eş.(3.6) de $\alpha = r_{1,k} = 1 + \sqrt{1+k}$, $\beta = r_{2,k} = \frac{-k}{\alpha}$ ve $q = \frac{-k}{\alpha^2}$ seçildiğinde k -Pell ve k -Pell–Lucas sedeniyonları için Binet formülü

$$r_{1,k}^* = \sum_{s=0}^{15} r_{1,k}^s \mathbf{e}_s, \quad (4.13)$$

ve

$$r_{2,k}^* = \sum_{s=0}^{15} r_{2,k}^s \mathbf{e}_s, \quad (4.14)$$

olmak üzere

$$SP_{k,n} = \frac{r_{1,k}^* r_{1,k}^n - r_{2,k}^* r_{2,k}^n}{r_{1,k} - r_{2,k}}, \quad (4.15)$$

$$SPL_{k,n} = r_{1,k}^* r_{1,k}^n + r_{2,k}^* r_{2,k}^n, \quad (4.16)$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç 4.1.5 Eş. (3.5) ve Eş.(3.6) de $\alpha = 2$, $\beta = -1$ ve $q = \frac{-1}{2}$ seçildiğinde Jacobsthal ve Jacobsthal–Lucas sedeniyonları için Binet formülü

$$\alpha^* = \sum_{s=0}^{15} \alpha^s \mathbf{e}_s, \quad (4.17)$$

ve

$$\beta^* = \sum_{s=0}^{15} \beta^s \mathbf{e}_s, \quad (4.18)$$

olmak üzere

$$SJ_n = \frac{\alpha^* 2^n - \beta^* (-1)^n}{3}, \quad (4.19)$$

$$Sj_n = \alpha^* 2^n + \beta^* (-1)^n, \quad (4.20)$$

biçiminde elde edilir.

4.2 ÜSTEL ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Sonuç 4.2.1 Eş.(3.7) ve Eş.(3.8) de $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde Fibonacci ve Lucas sedeniyonların üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} SF_n \frac{x^n}{n!} = \frac{\alpha^* e^{\alpha x} - \beta^* e^{\beta x}}{\alpha - \beta}, \quad (4.21)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} SL_n \frac{x^n}{n!} = \alpha^* e^{\alpha x} + \beta^* e^{\beta x}, \quad (4.22)$$

formundadır.

Sonuç 4.2.2 Eş.(3.7) ve Eş.(3.8) de $\alpha = \alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\beta = \beta_k = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde k -Fibonacci ve k -Lucas sedeniyonların üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} SF_{k,n} \frac{x^n}{n!} = \frac{\alpha_k^* e^{\alpha_k x} - \beta_k^* e^{\beta_k x}}{\alpha_k - \beta_k}, \quad (4.23)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} SL_{k,n} \frac{x^n}{n!} = \alpha_k^* e^{\alpha_k x} + \beta_k^* e^{\beta_k x}, \quad (4.24)$$

formundadır.

Sonuç 4.2.3 Eş.(3.7) ve Eş.(3.8) de $\alpha = r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = r_2 = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde Pell ve Pell–Lucas sedeniyonların üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} SP_n \frac{x^n}{n!} = \frac{r_1^* e^{r_1 x} - r_2^* e^{r_2 x}}{r_1 - r_2}, \quad (4.25)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} SP_n \frac{x^n}{n!} = r_1^* e^{r_1 x} + r_2^* e^{r_2 x}, \quad (4.26)$$

formundadır.

Sonuç 4.2.4 Eş.(3.7) ve Eş.(3.8) de $\alpha = r_{1,k} = 1 + \sqrt{1+k}$, $\beta = r_{2,k} = \frac{-k}{\alpha}$ ve $q = \frac{-k}{\alpha^2}$ seçildiğinde k -Pell ve k -Pell–Lucas sedeniyonların üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} SP_{k,n} \frac{x^n}{n!} = \frac{r_{1,k}^* e^{r_{1,k} x} - r_{2,k}^* e^{r_{2,k} x}}{r_{1,k} - r_{2,k}}, \quad (4.27)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} SP_{k,n} \frac{x^n}{n!} = r_{1,k}^* e^{r_{1,k} x} + r_{2,k}^* e^{r_{2,k} x}, \quad (4.28)$$

formundadır.

Sonuç 4.2.5 Eş.(3.7) ve Eş.(3.8) de $\alpha = 2$, $\beta = -1$ ve $q = \frac{-1}{2}$ seçildiğinde Jacobsthal ve Jacobsthal–Lucas sedeniyonların üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} SJ_n \frac{x^n}{n!} = \frac{\alpha^* e^{2x} - \beta^* e^{-x}}{3}, \quad (4.29)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} SJ_n \frac{x^n}{n!} = \alpha^* e^{2x} + \beta^* e^{-x}, \quad (4.30)$$

formundadır.

4.3 CATALAN EŞİTLİKLERİ

Sonuç 4.3.1 Eş.(3.9) ve Eş.(3.10) de $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere Fibonacci ve Lucas sedeniyonları için Catalan eşitliği

$$SF_{n+r} \cdot SF_{n-r} - SF_n^2 = \frac{(-1)^n (\alpha^* \beta^* (1 - \alpha^r \beta^{-r}) + \beta^* \alpha^* (1 - \beta^r \alpha^{-r}))}{(\alpha - \beta)^2}, \quad (4.31)$$

ve

$$SL_{n+r} \cdot SL_{n-r} - SL_n^2 = (-1)^n (\alpha^* \beta^* (\alpha^r \beta^{-r} - 1) + \beta^* \alpha^* (\beta^r \alpha^{-r} - 1)), \quad (4.32)$$

dir.

Sonuç 4.3.2 Eş.(3.9) ve Eş.(3.10) de $\alpha = \alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\beta = \beta_k = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere k -Fibonacci ve k -Lucas sedeniyonları için Catalan eşitliği

$$SF_{k,n+r} \cdot SF_{k,n-r} - SF_{k,n}^2 = \frac{(-1)^n (\alpha_k^* \beta_k^* (1 - \alpha_k^r \beta_k^{-r}) + \beta_k^* \alpha_k^* (1 - \beta_k^r \alpha_k^{-r}))}{(\alpha_k - \beta_k)^2}, \quad (4.33)$$

ve

$$SL_{k,n+r} \cdot SL_{k,n-r} - SL_{k,n}^2 = (-1)^n (\alpha_k^* \beta_k^* (\alpha_k^r \beta_k^{-r} - 1) + \beta_k^* \alpha_k^* (\beta_k^r \alpha_k^{-r} - 1)), \quad (4.34)$$

dir.

Sonuç 4.3.3 Eş.(3.9) ve Eş.(3.10) de $\alpha = r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = r_2 = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere Pell ve Pell-Lucas sedeniyonları için Catalan eşitliği

$$SP_{n+r} \cdot SP_{n-r} - SP_n^2 = \frac{(-1)^n (r_1^* r_2^* (1 - r_1^r r_2^{-r}) + r_2^* r_1^* (1 - r_2^r r_1^{-r}))}{(r_1 - r_2)^2}, \quad (4.35)$$

ve

$$SPL_{n+r} \cdot SPL_{n-r} - SPL_n^2 = (-1)^n (r_1^* r_2^* (r_1^r r_2^{-r} - 1) + r_2^* r_1^* (r_2^r r_1^{-r} - 1)), \quad (4.36)$$

dir.

Sonuç 4.3.4 Eş.(3.9) ve Eş.(3.10) de $\alpha = r_{1,k} = 1 + \sqrt{1+k}$, $\beta = r_{2,k} = \frac{-k}{\alpha}$ ve $q = \frac{-k}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere k -Pell ve k -Pell-Lucas sedeniyonları için Catalan eşitliği

$$SP_{k,n+r} \cdot SP_{k,n-r} - SP_{k,n}^2 = \frac{(-k)^n (r_{1,k}^* r_{2,k}^* (1 - r_{1,k}^r r_{2,k}^{-r}) + r_{2,k}^* r_{1,k}^* (1 - r_{2,k}^r r_{1,k}^{-r}))}{(r_{1,k} - r_{2,k})^2}, \quad (4.37)$$

ve

$$SPL_{k,n+r} \cdot SPL_{k,n-r} - SPL_{k,n}^2 = (-k)^n (r_{1,k}^* r_{2,k}^* (r_{1,k}^r r_{2,k}^{-r} - 1) + r_{2,k}^* r_{1,k}^* (r_{2,k}^r r_{1,k}^{-r} - 1)), \quad (4.38)$$

dir.

Sonuç 4.3.5 Eş.(3.9) ve Eş.(3.10) de $\alpha = 2$, $\beta = -1$ ve $q = \frac{-1}{2}$ seçildiğinde, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere Jacobsthal ve Jacobsthal–Lucas sedeniyonları için Catalan eşitliği

$$SJ_{n+r} \cdot SJ_{n-r} - SJ_n^2 = (-2)^n \left(\frac{\alpha^* \beta^* (1 - (-2)^r) + \beta^* \alpha^* (1 - (-\frac{1}{2})^r)}{9} \right), \quad (4.39)$$

ve

$$Sj_{n+r} \cdot Sj_{n-r} - Sj_n^2 = (-2)^n \left(\alpha^* \beta^* ((-2)^r - 1) + \beta^* \alpha^* \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^r - 1 \right) \right), \quad (4.40)$$

dir.

4.4 CASSINI EŞİTLİKLERİ

Sonuç 4.4.1 Eş.(3.11) ve Eş.(3.12) de $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n negatif olmayan tamsayı olmak üzere Fibonacci ve Lucas sedeniyonları için Cassini eşitliği

$$SF_{n+1} \cdot SF_{n-1} - SF_n^2 = \frac{(-1)^n (\alpha^* \beta^* (1 - \alpha \beta^{-1}) + \beta^* \alpha^* (1 - \beta \alpha^{-1}))}{(\alpha - \beta)^2}, \quad (4.41)$$

ve

$$SL_{n+1} \cdot SL_{n-1} - SL_n^2 = (-1)^n (\alpha^* \beta^* (\alpha \beta^{-1} - 1) + \beta^* \alpha^* (\beta \alpha^{-1} - 1)), \quad (4.42)$$

dir.

Sonuç 4.4.2 Eş.(3.11) ve Eş.(3.12) de $\alpha = \alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\beta = \beta_k = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n negatif olmayan tamsayı olmak üzere k -Fibonacci ve k -Lucas sedeniyonları için Cassini eşitliği

$$SF_{k,n+1} \cdot SF_{k,n-1} - SF_{k,n}^2 = \frac{(-1)^n (\alpha_k^* \beta_k^* (1 - \alpha_k \beta_k^{-1}) + \beta_k^* \alpha_k^* (1 - \beta_k \alpha_k^{-1}))}{(\alpha_k - \beta_k)^2}, \quad (4.43)$$

ve

$$SL_{k,n+1} \cdot SL_{k,n-1} - SL_{k,n}^2 = (-1)^n (\alpha_k^* \beta_k^* (\alpha_k \beta_k^{-1} - 1) + \beta_k^* \alpha_k^* (\beta_k \alpha_k^{-1} - 1)), \quad (4.44)$$

biçimindedir.

Sonuç 4.4.3 Eş.(3.11) ve Eş.(3.12) de $\alpha = r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = \beta_k = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde n negatif olmayan tamsayı olmak üzere Pell ve Pell–Lucas sedeniyonları için Cassini eşitliği

$$SP_{n+1} \cdot SP_{n-1} - SP_n^2 = \frac{(-1)^n (r_1^* r_2^* (1 - r_1 r_2^{-1}) + r_2^* r_1^* (1 - r_2 r_1^{-1}))}{(r_1 - r_2)^2}, \quad (4.45)$$

ve

$$SPL_{n+1} \cdot SPL_{n-1} - SPL_n^2 = (-1)^n (r_1^* r_2^* (r_1 r_2^{-1} - 1) + r_2^* r_1^* (r_2 r_1^{-1} - 1)), \quad (4.46)$$

biçimindedir.

Sonuç 4.4.4 Eş.(3.11) ve Eş.(3.12) de $\alpha = r_{1,k} = 1 + \sqrt{1+k}$, $\beta = r_{2,k} = \frac{-k}{\alpha}$ ve $q = \frac{-k}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n negatif olmayan tamsayı olmak üzere k -Pell ve k -Pell-Lucas sedeniyonları için Cassini eşitliği

$$SP_{k,n+1} \cdot SP_{k,n-1} - SP_{k,n}^2 = \frac{(-k)^n (r_{1,k}^* r_{2,k}^* (1 - r_{1,k} r_{2,k}^{-1}) + r_{2,k}^* r_{1,k}^* (1 - r_{2,k} r_{1,k}^{-1}))}{(r_{1,k} - r_{2,k})^2}, \quad (4.47)$$

ve

$$SPL_{k,n+1} \cdot SPL_{k,n-1} - SPL_{k,n}^2 = (-k)^n (r_{1,k}^* r_{2,k}^* (r_{1,k} r_{2,k}^{-1} - 1) + r_{2,k}^* r_{1,k}^* (r_{2,k} r_{1,k}^{-1} - 1)), \quad (4.48)$$

biçimindedir.

Sonuç 4.4.5 Eş.(3.11) ve Eş.(3.12) de $\alpha = 2$, $\beta = -1$ ve $q = \frac{-1}{2}$ seçildiğinde, n negatif olmayan tamsayı olmak üzere ve Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sedeniyonları için Cassini eşitliği

$$SJ_{n+1} \cdot SJ_{n-1} - SJ_n^2 = \frac{(-2)^n}{3} \left(\alpha^* \beta^* + \frac{\beta^* \alpha^*}{2} \right), \quad (4.49)$$

ve

$$Sj_{n+1} \cdot Sj_{n-1} - Sj_n^2 = 2^{n-1} (-1)^{n+1} (6\alpha^* \beta^* + 3\beta^* \alpha^*), \quad (4.50)$$

biçimindedir.

4.5 D'OCAGNE EŞİTLİKLERİ

Sonuç 4.5.1 Eş.(3.13) ve Eş.(3.14) de $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere Fibonacci ve Lucas sedeniyonları için d'Ocagne eşitliği

$$SF_m \cdot SF_{n+1} - SF_{m+1} \cdot SF_n = \frac{\alpha^* \beta^* (\alpha^m \beta^n) - \beta^* \alpha^* (\alpha^n \beta^m)}{(\alpha - \beta)}, \quad (4.51)$$

ve

$$SL_m \cdot SL_{n+1} - SL_{m+1} \cdot SL_n = (\alpha - \beta) (-\alpha^* \beta^* (\alpha^m \beta^n) + \beta^* \alpha^* (\alpha^n \beta^m)), \quad (4.52)$$

dir.

Sonuç 4.5.2 Eş.(3.13) ve Eş.(3.14) de $\alpha = \alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\beta = \beta_k = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere k -Fibonacci ve k -Lucas sedeniyonları için d'Ocagne eşitliği

$$SF_{k,m} \cdot SF_{k,n+1} - SF_{k,m+1} \cdot SF_{k,n} = \frac{\alpha_k^* \beta_k^* (\alpha_k^m \beta_k^n) - \beta_k^* \alpha_k^* (\alpha_k^n \beta_k^m)}{(\alpha_k - \beta_k)}, \quad (4.53)$$

ve

$$SL_{k,m} \cdot SL_{k,n+1} - SL_{k,m+1} \cdot SL_{k,n} = (\alpha_k - \beta_k) (-\alpha_k^* \beta_k^* (\alpha_k^m \beta_k^n) + \beta_k^* \alpha_k^* (\alpha_k^n \beta_k^m)), \quad (4.54)$$

dir.

Sonuç 4.5.3 Eş.(3.13) ve Eş.(3.14) de $\alpha = r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = r_2 = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere Pell ve Pell-Lucas sedeniyonları için d'Ocagne eşitliği

$$SP_m \cdot SP_{n+1} - SP_{m+1} \cdot SP_n = \frac{r_1^* r_2^* (r_1^m r_2^n) - r_2^* r_1^* (r_1^n r_2^m)}{(r_1 - r_2)}, \quad (4.55)$$

ve

$$SPL_m \cdot SPL_{n+1} - SPL_{m+1} \cdot SPL_n = (r_1 - r_2) (-r_1^* r_2^* (r_1^m r_2^n) + r_2^* r_1^* (r_1^n r_2^m)), \quad (4.56)$$

dir.

Sonuç 4.5.4 Eş.(3.13) ve Eş.(3.14) de $\alpha = r_{1,k} = 1 + \sqrt{1+k}$, $\beta = r_{2,k} = \frac{-k}{\alpha}$ ve $q = \frac{-k}{\alpha^2}$ seçildiğinde, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere k -Pell ve k -Pell-Lucas sedeniyonları için d'Ocagne eşitliği

$$SP_{k,m} \cdot SP_{k,n+1} - SP_{k,m+1} \cdot SP_{k,n} = \frac{r_{1,k}^* r_{2,k}^* (r_{1,k}^m r_{2,k}^n) - r_{2,k}^* r_{1,k}^* (r_{1,k}^n r_{2,k}^m)}{(r_{1,k} - r_{2,k})}, \quad (4.57)$$

ve

$$SPL_{k,m} \cdot SPL_{k,n+1} - SPL_{k,m+1} \cdot SPL_{k,n} = (r_{1,k} - r_{2,k}) (-r_{1,k}^* r_{2,k}^* (r_{1,k}^m r_{2,k}^n) + r_{2,k}^* r_{1,k}^* (r_{1,k}^n r_{2,k}^m)), \quad (4.58)$$

dir.

Sonuç 4.5.5 Eş.(3.13) ve Eş.(3.14) de $\alpha = 2$, $\beta = -1$ ve $q = \frac{-1}{2}$ seçildiğinde, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere ve Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sedeniyonları için d'Ocagne eşitliği

$$SJ_m \cdot SJ_{n+1} - SJ_{m+1} \cdot SJ_n = \frac{\alpha^* \beta^* 2^m (-1)^n + \beta^* \alpha^* 2^n (-1)^{m+1}}{3}, \quad (4.59)$$

ve

$$Sj_m \cdot Sj_{n+1} - Sj_{m+1} \cdot Sj_n = 3(\alpha^* \beta^* 2^m (-1)^{n+1} + \beta^* \alpha^* 2^n (-1)^m), \quad (4.60)$$

dir.

4.6 TOPLAM FORMÜLLERİ

Sonuç 4.6.1 Eş.(3.15) ve Eş.(3.16) de $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, Fibonacci sedeniyon ve Lucas sedeniyon için toplam özellikleri aşağıdaki şekilde

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} SF_{2n+k} = \begin{cases} 5^{\frac{m}{2}} SF_{m+k}, & m \text{ çift} \\ 5^{\frac{m-1}{2}} SL_{m+k}, & m \text{ tek} \end{cases},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} SL_{2n+k} = \begin{cases} 5^{\frac{m}{2}} SL_{m+k}, & m \text{ çift} \\ 5^{\frac{m+1}{2}} SF_{m+k}, & m \text{ tek} \end{cases},$$

dir.

Sonuç 4.6.2 Eş.(3.15) ve Eş.(3.16) de $\alpha = \alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\beta = \beta_k = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, k -Fibonacci ve k -Lucas sedeniyonları için toplam özellikleri aşağıdaki şekilde

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} SF_{k,2n+k} = \begin{cases} (k^2 + 4)^{\frac{m}{2}} SF_{k,m+k}, & m \text{ çift} \\ (k^2 + 4)^{\frac{m-1}{2}} SL_{k,m+k}, & m \text{ tek} \end{cases},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} SL_{k,2n+k} = \begin{cases} (k^2 + 4)^{\frac{m}{2}} SL_{k,m+k}, & m \text{ çift} \\ (k^2 + 4)^{\frac{m+1}{2}} SF_{k,m+k}, & m \text{ tek} \end{cases},$$

dir.

Sonuç 4.6.3 Eş.(3.15) ve Eş.(3.16) de $\alpha = r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = r_2 = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, Pell ve Pell-Lucas sedeniyonları için toplam özellikleri aşağıdaki şekilde

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} SP_{2n+k} = \begin{cases} 8^{\frac{m}{2}} SP_{m+k}, & m \text{ çift} \\ 8^{\frac{m-1}{2}} SPL_{m+k}, & m \text{ tek} \end{cases},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} SPL_{2n+k} = \begin{cases} 8^{\frac{m}{2}} SPL_{m+k}, & m \text{ çift} \\ 8^{\frac{m+1}{2}} SP_{m+k}, & m \text{ tek} \end{cases},$$

dir.

Sonuç 4.6.4 Eş.(3.15) ve Eş.(3.16) de $\alpha = r_{1,k} = 1 + \sqrt{1+k}$, $\beta = r_{2,k} = \frac{-k}{\alpha}$ ve $q = \frac{-k}{\alpha^2}$ seçildiğinde, k -Pell ve k -Pell-Lucas sedeniyonları için toplam özellikleri aşağıdaki şekilde

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} k^{m-n} SP_{k,2n+k} = \begin{cases} (4+4k)^{\frac{m}{2}} SP_{k,m+k}, & m \text{ çift} \\ (4+4k)^{\frac{m-1}{2}} SPL_{k,m+k}, & m \text{ tek} \end{cases},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} k^{m-n} SPL_{k,2n+k} = \begin{cases} (4+4k)^{\frac{m}{2}} SPL_{k,m+k}, & m \text{ çift} \\ (4+4k)^{\frac{m+1}{2}} SP_{k,m+k}, & m \text{ tek} \end{cases},$$

dir.

Sonuç 4.6.5 Eş.(3.15) ve Eş.(3.16) de $\alpha = 2$, $\beta = -1$ ve $q = \frac{-1}{2}$ seçildiğinde, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sedeniyonları için toplam özellikleri aşağıdaki şekilde

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} 2^{m-n} SJ_{2n+k} = \begin{cases} 9^{\frac{m}{2}} SJ_{m+k}, & m \text{ çift} \\ 9^{\frac{m-1}{2}} Sj_{m+k}, & m \text{ tek} \end{cases},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} 2^{m-n} Sj_{2n+k} = \begin{cases} 9^{\frac{m}{2}} Sj_{m+k}, & m \text{ çift} \\ 9^{\frac{m+1}{2}} SJ_{m+k}, & m \text{ tek} \end{cases},$$

dir.

Sonuç 4.6.6 Eş.(3.17) ve Eş.(3.18) de $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, Fibonacci sedeniyon ve Lucas sedeniyon için toplam özellikleri aşağıdaki

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n SF_{2n+k} = (-1)^m SF_{m+k},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n SL_{2n+k} = (-1)^m SL_{m+k},$$

şekildedir.

Sonuç 4.6.7 Eş.(3.17) ve Eş.(3.18) de $\alpha = \alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\beta = \beta_k = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, k -Fibonacci ve k -Lucas sedeniyonları için toplam özellikleri aşağıdaki

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n SF_{k,2n+k} = (-k)^m SF_{k,m+k},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n SL_{k,2n+k} = (-k)^m SL_{k,m+k},$$

biçimdedir.

Sonuç 4.6.8 Eş.(3.17) ve Eş.(3.18) de $\alpha = r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = r_2 = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, Pell ve Pell–Lucas sedeniyonları için toplam özellikleri aşağıdaki

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n SP_{2n+k} = (-2)^m SP_{m+k},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n SPL_{2n+k} = (-2)^m SPL_{m+k},$$

biçimdedir.

Sonuç 4.6.9 Eş.(3.17) ve Eş.(3.18) de $\alpha = r_{1,k} = 1 + \sqrt{1+k}$, $\beta = r_{2,k} = \frac{-k}{\alpha}$ ve $q = \frac{-k}{\alpha^2}$ seçildiğinde, k -Pell ve k -Pell–Lucas sedeniyonları için toplam özellikleri aşağıdaki

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n k^{m-n} SP_{k,2n+k} = (-2)^m SP_{k,m+k},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n k^{m-n} SPL_{k,2n+k} = (-2)^m SPL_{k,m+k},$$

şekildedir.

Sonuç 4.6.10 Eş.(3.17) ve Eş.(3.18) de $\alpha = 2$, $\beta = -1$ ve $q = \frac{-1}{2}$ seçildiğinde, Jacobsthal ve Jacobsthal–Lucas sedeniyonları için toplam özellikleri aşağıdaki

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n 2^{m-n} SJ_{2n+k} = (-1)^m SJ_{m+k},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n 2^{m-n} Sj_{2n+k} = (-1)^m Sj_{m+k},$$

biçimdedir.

Sonuç 4.6.11 Eş.(3.19) ve Eş.(3.20) de $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, Fibonacci sedeniyon ve Lucas sedeniyon için toplam özellikleri aşağıdaki

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} SF_n = SF_{2m},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} SL_n = SL_{2m}.$$

şekildedir.

Sonuç 4.6.12 Eş.(3.19) ve Eş.(3.20) de $\alpha = \alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\beta = \beta_k = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, k -Fibonacci ve k -Lucas sedeniyonları için toplam özellikleri aşağıdaki

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} k^n SF_{k,n} = SF_{k,2m},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} k^n SL_{k,n} = SL_{k,2m},$$

biçimdedir.

Sonuç 4.6.13 Eş.(3.19) ve Eş.(3.20) de $\alpha = r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = r_2 = \frac{-1}{\alpha}$ ve $q = \frac{-1}{\alpha^2}$ seçildiğinde, Pell ve Pell-Lucas sedeniyonları için toplam özellikleri aşağıdaki

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} 2^n SP_n = SP_{2m},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} 2^n SPL_n = SPL_{2m},$$

biçimdedir.

Sonuç 4.6.14 Eş.(3.19) ve Eş.(3.20) de $\alpha = r_{1,k} = 1 + \sqrt{1+k}$, $\beta = r_{2,k} = \frac{-k}{\alpha}$ ve $q = \frac{-k}{\alpha^2}$ seçildiğinde, k -Pell ve k -Pell-Lucas sedeniyonları içeren aşağıdaki eşitlikler

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} 2^n k^{m-n} SP_{k,n} = SP_{k,2m},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} 2^n k^{m-n} SPL_{k,n} = SPL_{k,2m},$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç 4.6.15 Eş.(3.19) ve Eş.(3.20) de $\alpha = 2$, $\beta = -1$ ve $q = \frac{-1}{2}$ seçildiğinde, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sedeniyonları içeren aşağıdaki eşitlikler

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} 2^{m-n} SJ_n = SJ_{2m},$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} 2^{m-n} Sjn = Sjn_{2m},$$

biçiminde elde edilir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Bu tezin temel amacı bileşenleri q -tamsayıları olan sedeniyonlar tanımlayarak yani Fibonacci ve Lucas sedeniyonların bir q genellemesini tanımlayarak bu dizilerin temel özelliklerini araştırmaktır. Birinci bölümde, tezin amacından ve tez içerisinde kullandığımız kaynaklardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, tanım ve temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonların tanımları, Binet formülleri, üstel üreteç fonksiyonları, Catalan, Cassini, d'Ocagne eşitlikleri ve bu sedeniyonları içeren bazı binomiyel toplam formülleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, q -Fibonacci ve q -Lucas sedeniyonları için bazı özel durumlardan söz edilmiştir. Bu özel durumlardan elde edilen sonuçların sırasıyla Fibonacci sedeniyon, Lucas sedeniyon, k -Fibonacci sedeniyon, k -Lucas sedeniyon, Pell sedeniyon, Pell-Lucas sedeniyon, k -Pell sedeniyon, k -Pell-Lucas sedeniyon, Jacobsthal sedeniyon ve Jacobsthal-Lucas sedeniyona dönüştükleri gösterilmiştir. Daha sonra elde edilen sedeniyonların sırasıyla Binet formülleri, üstel üreteç fonksiyonları, Catalan, Cassini, d'Ocagne özellikleri ve bu sedeniyonları içeren bazı binomiyel toplam formülleri verilmiştir. Bu çalışmadan yola çıkarak, otuz iki ve altmış dört boyutlu cebir yapıları içinde bu yöntem uygulanabilir.



KAYNAKLAR

- [1] **Cayley Dickson Yapısı** (12.04.2020) *Wikipedia*. Adres: http://tr.gaz.wiki/wiki/Cayley-Dickson_construction.
- [2] **John C Baez** (2001) The Octonions. *Available: Bulletin Of the American Mathematical Society*, 39 (2): 145-205.
- [3] **Imaeda K and Imaeda M** (2000) Sedenions: algebra and analysis. *Applied Mathematics and Computation*, 115 (2-3): 77-88.
- [4] **Koshy T** (2001) *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. ISBN:978-047-13-9969-8, A Wiley Interscience Publication, Canada. 654 pages.
- [5] **Vajda S** (2009) *Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section: theory and applications*. ISBN:0-4864-6276-5, Courier Corporation Dover Publications Inc. 189 pages.
- [6] **Falcon S and Plaza A** (2007) On the Fibonacci k-numbers. *Chaos Solitons Fractals*, 32 (5):1615-1624
- [7] **Falcon S** (2011) On the k-Lucas numbers. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 6(21): 1039-1050.
- [8] **Horadam A F** (1963) Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *The American Mathamatical Monthly*, 70 (3): 289-291.
- [9] **Horadam A F** (1993) Quaternion recurrence relations. *Ulam Quaterly*, 2: 23-33.
- [10] **Iyer M R** (1969) A note on Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quaterly*, 7 (3): 225-229.
- [11] **Iyer M R** (1969) Some results on Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quaterly*. 7: 201-210.
- [12] **Halici S** (2012) On Fibonacci Quaternions. *Advancesin Applied Clifford Algebras*, 22 (2): 321-327.
- [13] **Akkus I and Kizilaslan G** (2019) Quaternions: Quantum calculus approach with applications. *Kuwait Journal of Science*, 46 (4):1-13.
- [14] **Cimen C and Ipek A** (2016) On Pell quaternions and Pell-Lucas quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26 (1): 39-51.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [15] **Keçilioğlu O and Akkus I** (2015) The Fibonacci Octonions. *Advances Applied Clifford Algebras*, 25 (1): 151-158.
- [16] **Kizilates C and Polatlı E** (baskıda) New Families Of Fibonacci And Lucas Octonions With q -Integer Components, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics* (Kabul edildi).
- [17] **Cimen C and İpek A** (2017) On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas octonions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14 (2): 1-13
- [18] **Catarino P** (2016) The modified Pell and the modified k -Pell quaternions and octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26 (2): 577-590.
- [19] **Bilgici G, Tokeşer Ü and Ünal Z** (2017) Fibonacci and Lucas sedenions. *Journal of Integer Sequences*, 20 (2): 3
- [20] **Catarino P** (2017) k -Pell, k -Pell-Lucas and modified k -Pell sedenions. *Asian-European Journal of Mathematics*, 13: 1-10.
- [21] **Cimen C and İpek A** (2017) On Jacobsthal and the Jacobsthal-Lucas sedenions and several identities involving these numbers. *Mathematica Aeterna*, 7 (4): 447-454.
- [22] **Soykan Y** (2019) Tribonacci and Tribonacci-Lucas Sedenions. *Mathematics*, 7 (1): 74.
- [23] **Cariow A and Cariowa G** (2013) An Algorithm for Fast Multiplication of Sedenions. *Inform. Process. Lett.* 113: 324-331.
- [24] **Cawagas R E** (2004) On The Structure and Zero Divisors of the Cayley-Dickson Sedenion Algebra. *Discussiones Mathematicae- General Algebra and Applications*, 24 (2): 251-265.
- [25] **Horadam A F** (1965) Basic properties of a certain generalized sequences of numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 3 (2): 161-176.
- [26] **Koshy T** (2018) Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. *Wiley-Blackwell 1,2nd Edition*, ISBN: 978-111-87-4212-9.
- [27] **Karmaşık Sayı** (27.04.2020) *Wikipedia*. Adres: http://tr.wikipedia.org/wiki/Karmaşık_sayı
- [28] **Kac V and Cheung P** (2002) Quantum Calculus. *Springer Newyork*. ISBN: 978-1-4613-0071-7.

ÖZGEÇMİŞ

1994 yılı Merkez/ZONGULDAK doğumlu olan Selihan KIRLAK, ilk ve orta eğitimini Zonguldak ili Merkez ilçesinde tamamladıktan sonra 2018 yılında Karabük Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. 2018 yılında özel öğretim kurumlarında matematik öğretmeni olarak göreve başlamış ve göreve halen devam etmektedir.

İLETİŞİM BİLGİLERİ

E-Posta : selihankirlak@gmail.com