

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NÖTROSOFİK TAMSAYILAR HALKASININ BAZI
ÖZELLİKLERİ**

Şerife Sultan TEKİN

**Danışman
Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2020**



© 2020 [Şerife Sultan TEKİN]

TEZ ONAYI

Şerife Sultan TEKİN tarafından hazırlanan "**Nötrosofik Halkalar Üzerine**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi

Doç. Dr. Barış Bülent KIRLAR
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet UC
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Şule Sultan UĞUR

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Şerife Sultan TEKİN



İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	2
3. GAUSS TAM SAYILARI, NÖTROSOFİK GRUP VE HALKALAR.....	4
3.1. Gauss Tam Sayıları.....	4
3.2. Nötrosofik Gruplar.....	11
3.3. Nötrosofik Halkalar ve Temel Özellikleri	15
4. NÖTROSOFİK TAM SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ.....	29
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	36
ÖZGEÇMİŞ	40

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NÖTROSOFİK TAMSAYILAR HALKASININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Şerife Sultan TEKİN

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN

Bu tez çalışması, nütrosolik halkalardan biri olan nütrosolik tamsayılar halkası üzerinedir. Nütrosolik tamsayıların yapısı, Gauss tamsayıları ile benzerlik göstermektedir. Bu sebeple bu tezin amacı Gauss tamsayıları üzerine yapılan bazı çalışmaların nütrosolik tamsayılar için karşılıklarını araştırmaktır.

Bu tez çalışmasında öncelikle Gauss tamsayıları ve bazı özellikleri verilecektir. Daha sonra nütrosolik grup, nütrosolik halka kavramları ile ilgili temel bilgiler özetlenmiştir.

Tezin son kısmında ise, Gauss tamsayılarının özelliklerinin, nütrosolik tamsayılardaki karşılıkları incelenmiştir. Bu amaçla nütrosolik tamsayılarda norm tanımı verilmiş, normun özellikleri incelenmiştir. Nütrosolik tamsayılarda tersinir elemanlar, bunların normla ilişkisi, nütrosolik asal ve bileşik sayılar incelenmiştir. Nütrosolik tamsayılar için bölme algoritması verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Nütrosolik grup, nütrosolik halka, nütrosolik tamsayı.

2020, 40 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME PROPERTIES OF NEUTROSOPHIC INTEGERS RING

Şerife Sultan TEKİN

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN

In this thesis, we investigated the properties of the neutrosophic integers ring which is one of the neutrosophic rings.

The structure of the neutrosophic integers are similar with Gaussian integers. So, the purpose of this thesis is to research the equivalents of the properties given in Gaussian integers for the neutrosophic integers.

Firstly, some properties of Gaussian integers will be given and then the basic concepts on neutrosophic groups and rings will be summarized.

In the last section, some of the studies done for Gauss integers are given the equivalents in neutrosophic integers. For this purpose, the definition of the norm of a neutrosophic integer and the properties of the norm are given. The unit elements in the set of neutrosophic integers and their relationship with the norm, neutrosophic prime numbers are examined. Furthermore, the division algorithm for the neutrosophic integers is given.

Keywords: Neutrosophic group, neutrosophic ring, neutrosophic integer.

2020, 40 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan, tezime çok değerli katkıları bulunan, bana çalıştığım alanın temel ilkelerini kavratan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında bana destek olan ve beni bu süreç boyunca sabırla karşılayan, sevgili eşim Levent'e ve canım çocuklarım Mert ve Gülçe'ye sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin yazılması sürecinde maddi ve manevi yardımlarını gördüğüm değerli arkadaşlarım Fatih ÖNAL ve yeğenim Merve ŞAHİNBAŞ' a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında beni yalnız bırakmayan, aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Şerife Sultan TEKİN
ISPARTA, 2020

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$a \in A$	a , A kümesinin elemanıdır
$a \notin A$	a , A kümesinin elemanı değildir
$a b$	a sayısı b sayısını böler
$a \nmid b$	a sayısı b sayısını bölmez
$\bar{a}$	a sayısının eşleniği
$\mathbb{C}$	kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}[I]$	nötrosofik kompleks sayılar halkası
$C(G)$	G grubunun merkezi
$G[I]$	nötrosofik grup
$(G,*)$	ikili işlemi $*$ olan G grubu
$(\langle G \cup I \rangle, *)$	G ve I ile üretilen nötrosofik grup
$Hom(A, B)$	A dan B ye homomorfizmler kümesi
I	Nötrosofik bilinmeyen
$Ker\phi$	Çekirdek
$M_{2 \times 2}[I]$	2×2 matrislerinin nötrosofik halkası
$N(\alpha) = \alpha.\alpha = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$	α sayısının normu
$N(G) = (G[I], *)$	Nötrosofik Grup
$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}[I]$	nötrosofik reel sayılar halkası
$R[I]$	Nötrosofik Halka
$R[I] / P = \{r + P : r \in R[I]\}$	Nötrosofik Bölüm Halkası
$\mathbb{Z}$	tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}[i]$	Gauss Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}[I]$	nötrosofik tamsayılar halkası
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}[I]$	nötrosofik rasyonel sayılar halkası
$\cong$	İzomorfizm

1.GİRİŞ

Nötrosofi 1980 yılında Florantin Smarandache tarafından ortaya konulan bir felsefe dalıdır. Nötro-sophy terimi tarafsız düşünce anlamına gelir ve nötr kelimesi bulanık (fuzzy) ve sezgisel bulanık (intuitionistic fuzzy) kümeler arasındaki ana ayrımı temsil eder. Nötrosofi, nötrosofik mantık, nötrosofik olasılık, nötrosofik küme, nötrosofik istatistik gibi birçok konunun temelini oluşturur. Nötrosofik mantık, bulanık mantığın ve özellikle de sezgisel bulanık mantığın bir genişlemesi gibi görülebilir. Nötrosofik mantıktaki her önermenin, bir T alt kümesindeki doğruluk yüzdesi, bir I alt kümesindeki belirsizlik yüzdesine ve bir F alt kümesindeki yanlışlık yüzdesine sahip olacağı tahmin edilmektedir.

Nötrosofi, bulanık mantığı genelleştiren nötrosofik mantığın, bulanık kümeyi genelleştiren nötrosofik kümenin ve sırasıyla klasik ve kesin olmayan olasılık ve istatistikleri genelleştiren nötrosofik olasılık ve nötrosofik istatistiklerin temelidir. Bu matematiksel araç, belirsizlik, tutarsızlık, eksiklik ve yanlışlık içeren problemleri ele almak için kullanılır. Dünya belirsizliklerle dolu olduğundan, hukuk, tıp, sosyoloji, psikoloji, siyaset, mühendislik, endüstri, ekonomi, finans, yapayzeka ve bunun gibi belirsizlik içeren birçok gerçek dünya sorunu nötrosofik mantıkla çözülebilir.

Nötrosofi teorisi kullanarak nötrosofik cebirsel yapılar ortaya çıkmıştır. Bu cebirsel yapılardan bir kısmı şunlardır: nötrosofik cisim, nötrosofik vektör uzayı, nötrosofik grup, nötrosofik halka, nötrosofik yarıgrup, nötrosofik polinom.

Cebirsel yapıya belirsiz bir “ I ” ögesi ekleyerek ve ardından I ‘yı bir ikili işlemle yapının her bir ögesi ile birleştirerek, nötrosofik cebirsel yapılar ortaya çıkmıştır. Örneğin; $(G, *)$ herhangi bir grup ve $\langle G \cup I \rangle = \{a + bI : a, b \in G\}$ olsun. $(\langle G \cup I \rangle, *)$ kümesine $*$ ikili işlemi altında G ve I ile üretilen bir nötrosofik grup denir. Buradaki I elemanına nötrosofik eleman denir ve $I^2 = I$ özelliğini sağlamaktadır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Nötrosofi, 1980 yılında F. Smarandache tarafından ortaya atılan bir felsefe dalıdır.

Zadeh (1965), bulanık (fuzzy) küme kavramını ve üyelik / doğruluk derecesini tanımlamıştır. Atanassov (1986), sezgisel bulanık küme (intuitionistic fuzzy set) kavramını ve üye olmama / yanlışlık derecesini tanımlamıştır.

Smarandache (1998), nötrosofik küme kavramını ve belirsizlik / nötrality derecesini tanımlamıştır. Kandasamy ve Smarandache (2003), çalışmalarında I bilinmeyen olmak üzere $a + bI$ tipindeki nötrosofik sayıları ve nötrosofik grup, nötrosofik halka, nötrosofik uzay gibi cebirsel yapıları tanıtmışlardır.

Bu çalışmadan sonra, nötrosofik yapılar üzerine yüzlerce çalışma yapılmış ve halen yapılmaktadır.

Kandasamy ve Smarandache (2006), nötrosofik grup, nötrosofik halka, nötrosofik grup halkalarını tanımlamışlar ve bunların birçok özelliklerini vermişlerdir.

Agboola vd. (2012), nötrosofik gruplar ve nötrosofik alt gruplar üzerine çalışmışlar, bir değişmeli nötrosofik grubun bir nötrosofik alt grubu ile bir pseudo nötrosofik alt grubunun çarpımının da bir nötrosofik altgrup olduğunu göstermişlerdir.

Agboola vd. (2011,2012), çalışmalarında nötrosofik halkaların ve nötrosofik polinom halkalarının bazı temel özelliklerini vermişlerdir. Nötrosofik polinom halkalarında temel ideal, asal ideal, çarpanlara ayırma, nötrosofik bölüm halkası gibi konuları incelemişlerdir.

Gauss tamsayılarının özellikleri Conrad (2013), Murply (2015), Ho (2016) gibi bazı çalışmalarda ele alınmıştır. Bu çalışmalar da $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ olarak bilinen Gauss tamsayılar kümesinde, norm bölünebilme, bölme algoritması, Eulid algoritması, Bezoud teoremi, tek çarpanlama, modüler aritmetik, asal sayılar vb. konular incelenmiştir.

Çeven ve Tekin (2020), çalışmalarında yapısal olarak $\mathbb{Z}[i]$ halkasına benzerlik gösteren $\langle \mathbb{Z} \cup I \rangle$ nötrosofik tamsayılar halkasını ele almışlar ve bu halkada, nötrosofik tamsayıların normunu, normun özelliklerini, bölünebilirlik özelliklerini

nötrosofik asal sayı kavramını ve nötrosofik tamsayılar için bölme algoritmasını vermişlerdir.



3. GAUSS TAM SAYILARI, NÖTROSOFİK GRUP VE HALKALAR

Bu bölümde, Gauss tam sayıları, nôtrosofik grup ve nôtrosofik halka kavramları ele alınacak ve temel özelliklerinden bahsedilecektir.

3.1. Gauss Tam Sayıları

Tezin bu kısmında, Gauss tam sayıları ve bazı özellikleri verilecektir. Burada verilecek bilgiler Condrad (2013), Murphy (2016), Ho (2016) kaynaklarından alınmıştır. Gauss tam sayılar kümesi

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

biçiminde gösterilir. Boyutu ölçmek için, tam sayılar kümesi olan $\mathbb{Z}$ 'de mutlak değer, gauss tam sayılar kümesi olan $\mathbb{Z}[i]$ 'de ise norm kullanılır.

Tanım 3.1.1 (Norm tanımı) $\alpha = a + bi$ Gauss tam sayısının normu

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.1 $N(2 + 7i) = 2^2 + 7^2 = 53$, $m \in \mathbb{Z}$ için $N(m) = m^2$ ve özellikle, $N(1) = 1$ 'dir.

Bilindiği gibi, $a + bi$ sayısı bir karmaşık sayı olarak düşünülürse, onun normu mutlak değerinin karesidir. $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ olmak üzere $N(a + bi) = a^2 + b^2 = |a + bi|^2$ dir. $\mathbb{Z}[i]$ 'deki mutlak değerler yerine $\mathbb{Z}[i]$ 'deki normlarla uğraşılmasının nedeni, normların tamsayılar olmasıdır. $\mathbb{Z}$ 'deki normların bölünebilme özellikleri, $\mathbb{Z}[i]$ 'deki bölünebilme özellikleri hakkında önemli bilgiler sağlar.

Teorem 3.1.1 Norm çarpımsaldır. Yani her $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ için

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$$

dır.

İspat: $\alpha = a + bi$ ve $\beta = c + di$ olsun. Bu durumda

$\alpha.\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$ olur. Şimdi $N(\alpha).N(\beta)$ ve $N(\alpha.\beta)$ 'yı hesaplayalım:

$$\begin{aligned} N(\alpha).N(\beta) &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} N(\alpha\beta) &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 \\ &= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle $N(\alpha\beta) = N(\alpha).N(\beta)$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.1 'in ilk uygulaması olarak $\mathbb{Z}[i]$ 'de çarpımsal tersleri olan Gauss tam sayıları belirlenebilir.

Sonuç 3.1.1 $\mathbb{Z}[i]$ 'de tersinir elemanlar sadece ± 1 ve $\pm i$ Gauss tam sayılarıdır.

İspat: 1 ve -1 sayılarının tersleri kendileri, i 'nin tersi $-i$, $-i$ 'nin tersi i 'dir. Şimdi bir $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ 'nin tersinir olduğunu ve tersinin $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\alpha.\beta = 1$ 'dir. $\alpha \in \{\pm 1, \pm i\}$ olduğunu görmek istiyoruz. $\alpha.\beta = 1$ denkleminin her iki tarafının normu alınır, $N(\alpha).N(\beta) = 1$ elde edilir. Bu ise $\mathbb{Z}$ 'de bir denklemdir. Bu denklemden $N(\alpha) = \pm 1$ olduğu görülür. Norm negatif değer olmadığından $N(\alpha) = 1$ 'dir. $\alpha = a + bi$ yazdığımızda $a^2 + b^2 = 1$ olur. Bu denklemin çözümleri bize $\alpha = \pm 1, \pm i$ değerlerini verir.

Sonuç olarak, $\mathbb{Z}$ 'nin tersinir elemanları ± 1 , $\mathbb{Z}[i]$ 'nin tersinir elemanları ± 1 ve $\pm i$ 'dir.

Not: Her Gauss tam sayısının normu negatif olmayan bir tamsayıdır. Ancak negatif olmayan her tam sayının norm olduğu doğru değildir. Normlar $a^2 + b^2$ formunda tam sayılardır. Her pozitif tam sayı iki karenin toplamı değildir. Örnek verecek olursak 3,7,11,15,19 ve 21 sayıları olabilir. Gauss tam sayılarının bu değerlere eşit normu yoktur.

Tanım 3.1.2 ($\mathbb{Z}[i]$ 'de bölünebilme) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ olsun. $\alpha = \beta\gamma$ olacak şekilde bir $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ varsa β sayısı α sayısını böler denir ve $\beta|\alpha$ şeklinde yazılır. Bu durumda β 'ya α 'nın bir böleni veya çarpanı denir.

Örnek 3.1.2 $14-3i = (4+5i)(1-2i)$ olduğundan $4+5i$ sayısı $14-3i$ sayısını böler.

Örnek 3.1.3 $(4+5i)|(14+3i)$ midir?

Bölünmeyi bir oran olarak ve paydayı rasyonelleştirerek yapabiliriz.

$$\frac{14+3i}{4+5i} = \frac{(14+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{71-58i}{41} = \frac{71}{41} - \frac{58}{41}i$$

Bu sonuç $\mathbb{Z}[i]$ 'de değildir. Gerçek ve imajiner kısımlar $\frac{71}{41}$ ve $-\frac{58}{41}$ sayıları tamsayı değildir. Bu nedenle $4+5i$ sayısı $\mathbb{Z}[i]$ 'de $14+3i$ 'yi bölmez.

Teorem 3.1.2 Bir Gauss tamsayısı $\alpha = a+bi$ olsun. $\alpha = a+bi$ sayısının bir c tam sayısı ile bölünebilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathbb{Z}$ 'de $c|a$ ve $c|b$ olmasıdır.

İspat: $c|a+bi$ olsun. $m, n \in \mathbb{Z}$ için $a+bi = c(m+ni)$ olur. Buradan $a = cm$ ve $b = cn$ olur. Bu da $c|a$ ve $c|b$ demektir. İspatın diğer kısmı açıktır.

Teorem 3.1.2'de $b=0$ olması normal tamsayılar arasındaki bölünebilirliğe karşılık gelir. Yani; $\mathbb{Z}[i]$ 'de $c|a \iff \mathbb{Z}$ 'de $c|a$ 'dır. Bu durum $\mathbb{Z}$ 'deki her özelliğin $\mathbb{Z}[i]$ 'de aynı olacağı anlamına gelmez. Örneğin $\mathbb{Z}$ 'deki bir asal sayı $\mathbb{Z}[i]$ 'de asal olmayabilir. (Daha sonra verilecektir.)

Teorem 3.1.3 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ olsun. $\beta|\alpha$ ise $\mathbb{Z}$ 'de $N(\beta)|N(\alpha)$ 'dır.

İspat $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ için $\alpha = \beta\gamma$ olsun. İki tarafın normu alınırsa $N(\alpha) = N(\beta).N(\gamma)$ olur. Bu eşitlik $\mathbb{Z}$ 'dedir. Bu sebeple $\mathbb{Z}$ 'de $N(\beta)|N(\alpha)$ 'dır.

Sonuç 3.1.2 Bir Gauss tamsayısının normunun çift sayı olması için gerek ve yeter koşul bu sayının $1+i$ 'nin bir katı olmasıdır.

İspat: $N(1+i) = 2$ olduğundan $1+i$ 'nin herhangi bir katının normu çift sayıdır. Tersine olarak $m+ni$ 'nin normunun çift sayı olduğunu varsayalım. Bu durumda $m^2 + n^2 \equiv 0 \pmod{2}$ olur. Burada m ve n 'nin her ikisinin tek ya da her ikisinin çift olduğu görülür. Kısacası $m \equiv n \pmod{2}$ olur. $u, v \in \mathbb{Z}$ için $m+ni = (1+i)(u+vi)$ olarak yazmak istiyoruz. Bu sayı $m+ni = (u-v) + (u+v)i$ dir. Buradaki çözümü $u = \frac{m+n}{2}$ ve $v = \frac{n-m}{2}$ 'dir. $m \equiv n \pmod{2}$ olduğundan u ve v tamsayılardır. Böylece $(1+i)|(m+ni)$ 'dir.

Örnek 3.1.4 $1+3i$ 'nin normu 10 ve $1+3i = (1+i).(2+i)$ 'dir.

Örnek 3.1.5 $1-i$ 'nin normu 2 olduğundan $1-i$, $1+i$ 'nin katı olmalıdır. Gerçekten $1-i = (-i).(1+i)$ 'dir.

Teorem 3.1.3 bir Gauss tamsayısının diğerini bölüp bölmediğini göstermede yararlıdır. Teorem 3.1.3 'e göre $N(\beta) \nmid N(\alpha) \Rightarrow \beta \nmid \alpha$ 'dır. Örneğin: $\mathbb{Z}[i]$ 'de $N(3+7i) = 58$ ve $N(10+3i) = 109$ dir. $58 \nmid 109$ olduğundan $\mathbb{Z}[i]$ 'de $(3+7i) \nmid (10+3i)$ 'dir. Bununla birlikte Teorem 3.1.3'e göre $N(\beta) | N(\alpha)$ ise β, α 'yı bölmeyebilir. Örneğin: $\alpha = 14+3i$ ve $\beta = 4+5i$ ise $N(\alpha) = 205 = 41.5$ ve $N(\beta) = 41$ dir. Fakat Örnek 3.1.3 'de $4+5i$ 'nin $14+3i$ 'yi bölmediği görüldü.

$\mathbb{Z}[i]$ 'de bölünebilirliği doğrulamanın kusursuz yöntemi Örnek 3.1.3' de olduğu gibi paydayı rasyonelleştirdikten sonra oranın $\mathbb{Z}[i]$ 'de olup olmadığını test etmektir. $\mathbb{Z}$ 'deki normların bölünebilirlik kontrolü, $\mathbb{Z}[i]$ 'de bölünebilirlik için gerekli bir koşuldur. Ancak yeterli değildir. $\mathbb{Z}$ 'de, $|m| = |n|$ ise o zaman $m \equiv \pm n$ yani m ve n birbirinin ± 1 tersinir katıdır. $\mathbb{Z}[i]$ 'deki karşılık gelen durum yanlıştır. $N(\alpha) = N(\beta)$ ise α ve β 'nin ± 1 , $\pm i$ 'nin katları olduğu genellikle doğru değildir. $4+5i$ ve $4-5i$ sayılarını ele alalım. Bu iki sayının normu 41 'dir. $4+5i$ 'nin tersinir katları $4+5i$, $-4-5i$, $-5+4i$, $5-4i$ 'dir. $4-5i$ bu listede yoktur. Bu yüzden $4+5i$ ve $4-5i$ birbirinin tersinir katı değildir. Bu durum $4+5i$ ve $4-5i$ 'nin $\mathbb{Z}[i]$ 'de aralarında asal olduğu şeklinde söylenecektir.

$\mathbb{Z}$ 'den $\mathbb{Z}[i]$ 'ya çok sayıda sonuç aktarabilmemizin sebebi $\mathbb{Z}$ 'deki bölüm, kalan durumlarının benzer olmasıdır.

Teorem 3.1.4 (Bölme Algoritması) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ve $\beta \neq 0$ olsun.

$$\alpha = \beta\gamma + \rho \text{ ve } N(\rho) < N(\beta)$$

olacak şekilde $\gamma, \rho \in \mathbb{Z}[i]$ vardır. Gerçekte ρ sayısını $N(\rho) \leq (1/2)N(\beta)$ olacak şekilde seçebiliriz.

Bu teoremdaki γ ve ρ sayıları sırasıyla bölüm ve kalandır. Kalanın boyutu (normu), bölüm'ün boyutu (normu) ile sınırlıdır.

Teorem 3.1.4'i kanıtlamadan önce, γ ve ρ 'yi hesaplamaya çalışırken bir incelik olduğunu not edelim. Bu en iyi şekilde bir örnek üzerinde çalışarak anlaşılır.

Örnek 3.1.6 $\alpha = 27 - 23i$ ve $\beta = 8 + i$ olsun. $N(\beta) = 65$ dir. $\alpha = \beta\gamma + \rho$ ve $N(\rho) < 65$ şeklinde yazmak istiyoruz. α / β oranını alır ve paydayı rasyonelleştirsek

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}} = \frac{(27 - 23i)(8 - i)}{65} = \frac{193 - 211i}{65}$$

olur. $193/65 = 2,969...$ ve $-211/65 = -3,246...$ olduğundan her kesri tam değeri ile değiştirerek $\gamma = 2 - 4i$ alalım. Bu durumda $\alpha - \beta(2 - 4i) = 7 + 7i$ dir ve $\rho = 7 + 7i$ olması teoreme uymaz. Çünkü $N(7 + 7i) = 98$ sayısı $N(\beta) = 65$ sayısından büyüktür. Bu nedenle alınan γ ve ρ 'nin seçimi doğru olmaz. Şimdi $193/65 = 2,696...$ ve $-211/65 = -3,246...$ 'yı en yakındaki tamsayılarla değiştirerek. $\gamma = 3 - 3i$ alalım. $\alpha - \beta(3 - 3i) = 2i$ ve $N(-2i) < N(\beta) = 65$ olur. Bu yüzden $\gamma = 3 - 3i$ ve $\rho = -2i$ teoreme uygun bir seçimdir.

En büyük tam sayı yerine en yakın tamsayıyı seçmek de $\mathbb{Z}$ 'de yapılabilir. Örneğin $34/9 = 3.77...$ sayısı 4'e 3 ten daha yakındır. Bölme algoritmasında $34 = 9 \cdot 3 + 7$ yazılır ancak $34 = 9 \cdot 4 - 2$ yazıldığında da -2'nin mutlak değeri 9'dan küçüktür. Bu iki durum, $\mathbb{Z}$ de modifiye edilmiş bölme algoritması şeklinde yazılır.

$\mathbb{Z}$ de modifiye edilmiş bölme algoritması: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olsun.

$$a = bq + r, \quad |r| \leq \frac{1}{2}|b|$$

olacak şekilde q ve r tam sayıları vardır (teklik yok). Çünkü $\mathbb{Z}$ deki bölme algoritmasında $bq \leq a < b(q+1)$ dir. bq ile $b(q+1)$ arası uzaklık $|b|$ kadardır. Eğer a sayısı bq 'ya daha yakın ise $|a - bq| = |r| \leq \frac{|b|}{2}$ olur. Eğer a sayısı $b(q+1)$ 'e daha yakın ise $|a - b(q+1)| = |r_1| \leq \frac{|b|}{2}$ olur. Böylece ya $a = bq + r, |r| \leq \frac{|b|}{2}$ dir ya da $a = b(q+1) + r_1, |r_1| \leq \frac{|b|}{2}$ olur. Örneğin; $a = 27, b = 6$ alınırsa, $4 < 27/6 < 5$ tir. O halde $27 = 6 \cdot 4 + 3$ veya $27 = 6 \cdot 5 - 3$ olarak yazılabilir. Her durumda $|r| \leq \frac{|b|}{2}$ dir.

İspat: (Bölme Algoritması İspatı) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i], \beta \neq 0$ olsun. $\gamma, \rho \in \mathbb{Z}[i]$ 'yi $\alpha = \beta\gamma + \rho$ ve $N(\rho) \leq (1/2)N(\beta)$ olacak şekilde yazmak istiyoruz.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{N(\beta)} = \frac{m + ni}{N(\beta)}$$

dir. Burada $\alpha\bar{\beta}$ yerine $m + ni$ yazıldı. $\mathbb{Z}$ 'de değiştirilmiş bölme algoritması kullanarak m ve n 'yi $N(\beta)$ ile bölelim:

$$m = N(\beta) q_1 + r_1, \quad n = N(\beta) q_2 + r_2$$

Burada $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ 'dir. Ve $0 \leq |r_1|, |r_2| \leq (1/2)N(\beta)$ 'dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{N(\beta)q_1 + r_1 + (N(\beta)q_2 + r_2)i}{N(\beta)} \\ &= q_1 + q_2i + \frac{r_1 + r_2i}{N(\beta)} \end{aligned}$$

dır. $\gamma = q_1 + q_2i$ diyelim. Böylece yukarıdaki denklem

$$\alpha - \beta\gamma = \frac{r_1 + r_2i}{\bar{\beta}} \tag{3.1}$$

şekline gelir. Şimdi $N(\alpha - \beta\gamma) \leq (1/2)N(\beta)$ olduğunu göstereceğiz. $\rho = \alpha - \beta\gamma$ alınırsa Bölüm algoritması sağlanmış olacaktır. (3.1)'nin her iki tarafının normları alınır ve $N(\bar{\beta}) = N(\beta)$ olduğu kullanılırsa:

$$N(\alpha - \beta\gamma) = \frac{r_1^2 + r_2^2}{N(\beta)}$$

bulunur. $0 \leq |r_1|, |r_2| \leq (1/2)N(\beta)$ olduğu kullanılırsa

$$N(\rho) = N(\alpha - \beta\gamma) \leq \frac{(1/4)N(\beta)^2 + (1/4)N(\beta)^2}{N(\beta)} = \frac{1}{2}N(\beta)$$

elde edilir.

Örnek 3.1.7 $\alpha = 11 + 10i$ ve $\beta = 4 + i$ olsun. $N(\beta) = 17$ 'dir.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{N(\beta)} = \frac{54 + 29i}{17}$$

dir. $\frac{54}{17} = 3,17\dots$ ve $\frac{29}{17} = 1,70\dots$ dir. $\gamma = 3 + 2i$ alalım. $\alpha - \beta\gamma = 1 - i$ eşitliğinden

$\rho = 1 - i$ olur ve $N(\rho) = 2 \leq (1/2)N(\beta)$ dir. Böylece Bölme algoritması sağlanır.

Örnek 3.1.8 $\alpha = 41 + 24i$ ve $\beta = 11 - 2i$ alalım. $N(\beta) = 125$ ve

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{N(\beta)} = \frac{403 + 346i}{125}$$

dir. $\frac{403}{125} = 3,224$ ve $\frac{346}{125} = 2,768$ olduğundan $\gamma = 3 + 3i$ alarak $\alpha - \beta\gamma = 2 - 3i$

olur. $\rho = 2 - 3i$ 'dir ve $N(\rho) = 13$ ve $N(\beta) = 125$ olup Bölme Algoritması sağlanır.

Not: $\mathbb{Z}$ 'deki bölme algoritması ile $\mathbb{Z}[i]$ 'deki (olağan) bölme algoritması arasında ilginç bir fark vardır. $\mathbb{Z}[i]$ 'de bölüm ve kalan tek değildir.

Örnek 3.1.9 $\alpha = 37 + 2i$ ve $\beta = 11 + 2i$ olsun. $N(\beta) = 125$ 'dir. Yukarıdaki gibi $\mathbb{Z}[i]$ 'de bölme algoritması uygularsak $\alpha = \beta \cdot 3 + (4 - 4i)$ olur. Ancak aynı zamanda $\alpha = \beta(3 - i) + (2 + 7i)$ dir. Her iki durumda da kalanların normları 125 'ten küçüktür. (Aslında $125/2$ ' den küçüktür.)

Örnek 3.1.10 $\alpha = 1 + 8i$ ve $\beta = 2 - 4i$ olsun.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{N(\beta)} = \frac{-30 + 20i}{20} = -\frac{3}{2} + i$$

dir. $-\frac{3}{2}$ sayısı -2 ve -1 ' in tam ortasında yer aldığından $\gamma = -1+i$ veya $\gamma = -2+i$ kullanabiliriz. İlk tercihi kullanarak $\alpha = \beta(-1+i) - 1 + 2i$, ikinci tercihimizi kullanarak $\alpha = \beta(2+i) + 1 - 2i$ olur. Bunlar da bölme algoritmasını sağlar.

3.2 Nötrosifik Gruplar

Bu kısımda ki bilgiler Agboola vd. (2012), Vasantha Kandasamy ve Smarandache (2006) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 3.2.1 $(G,*)$ herhangi bir grup olsun. $*$ ikili işlemi altında G ve I ile üretilen nötrosifik grup $N(G) = (\langle G \cup I \rangle, *)$ ile gösterilir. Burada I elemanı, $I^2 = I$ özelliğini sağlayan bir bilinmeyendir. Bir n tam sayısı için $n+I$ ve nI tipindeki elemanlara nötrosifik eleman denir. Eğer her $a, b \in \langle G \cup I \rangle$ için $ab = ba$ ise $\langle G \cup I \rangle$ ye değişmelidir denir.

Not: G toplamsal bir grup ise $\langle G \cup I \rangle = \{a + bI : a, b \in G\}$ biçiminde, çarpımsal bir grup ise $\langle G \cup I \rangle = G \cup \{aI : a \in G\}$ biçimindedir.

Not: Bu kısımda üstteki teoriye de uygun olması bakımından $\langle G \cup I \rangle$ gösterimi yerine $G[I]$ gösterimi kullanılacaktır.

Örnek 3.2.1 (i) $\mathbb{Z}[I], \mathbb{Q}[I], \mathbb{R}[I]$ ve $\mathbb{C}[I]$ kümeleri bilinen toplama işlemine göre sırasıyla tam sayıların, rasyonel sayıların, reel sayıların ve kompleks sayıların nötrosifik gruplarıdır.

(ii) $\mathbb{Q}^*[I], \mathbb{R}^*[I]$ ve $\mathbb{C}^*[I]$ kümeleri bilinen çarpma işlemine göre sırasıyla rasyonel sayıların, reel sayıların ve kompleks sayıların nötrosifik gruplarıdır.

Örnek 3.2.2 $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ kümesi, mod7 toplama işlemi altında bir gruptur. O halde $\mathbb{Z}_7[I] = \{a + bI \mid a, b \in \mathbb{Z}_7\}$ kümesi, $\mathbb{Z}_7$ ve I ile üretilen bir nötrosifik gruptur.

$N(\mathbb{Z}_7) = \{\mathbb{Z}_7[I], +\}$ biçiminde de gösterilir. Ayrıca $\mathbb{Z}_7[I]$ kümesinin kendisi de “+” işlemine göre bir gruptur. O halde bu nütrosolik grup aynı zamanda bir gruptur.

Teorem 3.2.1 $N(G) = (G[I], *)$ bir nütrosolik grup olsun.

- i) $N(G)$ genel olarak grup değildir.
- ii) $N(G)$ daima bir grup içerir.

İspat: (i) $N(G)$ ’nin bir grup olduğunu varsayalım. $x \in G[I]$ olsun. Eğer x bir nütrosolik eleman ise $x^{-1} \notin G[I]$ dir. O halde $N(G)$ grup olamaz. Bu çelişkidir.

(ii) Ayrıca $N(G)$ nütrosolik grubu G ve I ile üretilmektedir ve her zaman $G \subsetneq G[I]$ dir. Bu sebeple $N(G)$ daima bir grup içerir.

Tanım 3.2.2 $N(G) = (G[I], *)$ nütrosolik grup ve $A, G[I]$ ’nin bir proper alt kümesi olsun.

- (i) Eğer A kümesi nütrosolik grup ise ve grup olan bir proper alt küme içerirse, bu kümeye $N(G)$ ’nin bir nütrosolik altgrubu denir.
- (ii) Eğer A , grup olan hiçbir proper altgrup içermezse A ’ya $N(G)$ ’nin pseudo nütrosolik altgrubu denir.

Hatırlatma: G , birimi e olan bir grup olsun. $\{e\} \neq A \subsetneq G$ olacak şekildeki A altgrubuna G ’nin proper alt grubu denir.

Örnek 3.2.3 $\mathbb{Z}_4[I] = \{0, 1, 2, 3, I, 1+I, 2+I, 3+I, 2I, 1+2I, 2+2I, 3+2I, 3I, 1+3I, 2+3I, 3+3I\}$ kümesi toplamsal nütrosolik gruptur. $T = \{0, 2, 2+2I, 2I\}$ kümesini ele alalım. Bu kümenin proper alt kümesi olan $\{0, 2\}$ kümesi $\mathbb{Z}_4$ ’ün alt grubudur. O halde T kümesi bir nütrosolik altgruptur. $P = \{0, 2I\}$ kümesi ise bir pseudo nütrosolik altgruptur. Çünkü P kümesi $\mathbb{Z}_4$ ’ün alt grubu olan hiçbir proper alt küme içermez.

Örnek 3.2.4 $G = \{e, a, b, c\}$ Klein 4-grup olsun. Bilindiği gibi $a^2 = b^2 = c^2 = e$, $bc = cb = a$, $ac = ca = b$, $ab = ba = c$ dir. Bu işlemler altında $G[I] = \{e, a, b, c, I, aI, bI, cI\}$ kümesi nütrosolik değişmeli gruptur. $H = \{e, a, I, aI\}$, $K = \{e, b, I, bI\}$, $P = \{e, c, I, cI\}$ kümeleri $G[I]$ 'nin nütrosolik altgruplarıdır.

Teorem 3.2.2 Nütrosolik gruplar aşıkır olmayan idempotentlere sahip olabilir.

İspat: $I \in N(G)$ için $I^2 = I$ 'dir. Yani I aşıkır olmayan idempotent elemandır.

Örnek 3.2.4 'teki a, b, c elemanları, nütrosolik grubun aşıkır olmayan idempotent elemanlarıdır.

Tanım 3.2.3 $N(G)$ nütrosolik grup olsun. $N(G)$ 'deki farklı elemanların sayısına $N(G)$ 'nin mertebesi denir. $N(G)$ 'deki elemanların sayısı sonlu ise $N(G)$ 'ye sonlu nütrosolik grup denir. Aksi taktirde $N(G)$ 'ye sonsuz nütrosolik grup denir. $N(G)$ 'nin mertebesi $o(N(G))$ veya $|N(G)|$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.5 $N(G) = \{1, 2, 3, 4, I, 2I, 3I, 4I\} = \mathbb{Z}_5^*[I]$ çarpımsal nütrosolik grubunu ele alalım. $P = \{1, 2, 4, I, 2I, 4I\} \subset N(G)$ 'dir. P kümesi nütrosolik altgruptur. $o(N(G)) = 8$ ve $o(P) = 6$ 'dir. Buna göre P nin mertebesi $N(G)$ nin mertebesini bölmez. Böylece nütrosolik gruplarda genel olarak Lagrange teoremi sağlanmaz.

Tanım 3.2.4 $N(G)$ sonlu nütrosolik grup olsun. P , $N(G)$ 'nin özalt kümesi olsun ve P , $N(G)$ 'nin işlemleri altında nütrosolik grup olsun. Eğer P 'nin mertebesi $N(G)$ 'nin mertebesini bölerse yani $o(P) \mid o(N(G))$ ise P 'ye Lagrange nütrosolik alt grup denir. Eğer sonlu bir nütrosolik grubun tüm nütrosolik alt grupları Lagrange ise $N(G)$ 'ye Lagrange nütrosolik grup denir. Eğer $N(G)$ en azından bir tane Lagrange nütrosolik alt gruba sahipse $N(G)$ 'ye zayıf Lagrange nütrosolik grup

denir. Eğer $N(G)$ 'nin hiç Lagrange nörtrosofik alt grubu yoksa $N(G)$ 'ye Lagrange olmayan nörtrosofik grup denir.

Tanım 3.2.5 $N(G)$ nörtrosofik grup ve $x \in N(G)$ olsun. Eğer $x^n = I$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa x 'e nörtrosofik eleman denir. $x^m = 1$ olacak şekilde bir pozitif m tamsayısı varsa x 'e torsion eleman denir.

Örnek 3.2.6 $N(\mathbb{Z}_7^*) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, I, 2I, 3I, 4I, 5I, 6I\}$ çarpımsal nörtrosofik grup olsun. $(3I)^6 = I, (4I)^3 = I, (6I)^2 = I, I^2 = I, (2I)^6 = I, (5I)^6 = I$ dir. Ayrıca $1^2 = 1, 2^3 = 1, 3^6 = 1, 4^3 = 1, 5^6 = 1, 6^2 = 1$ dir. Bu nörtrosofik grupta bütün elemanlar ya nörtrosofik elemandır, yada torsion elemandır.

Tanım 3.2.6 $N(G)$ nörtrosofik bir grup ve $H, N(G)$ 'nin nörtrosofik bir alt grubu olsun. $n \in N(G)$ için

$$Hn = \{hn \mid h \in H\}$$

kümesine H 'nin G 'deki bir sağ yan kümesi denir. Benzer şekilde sol yan küme de tanımlanabilir.

Örnek 3.2.7 $N(G) = \{1, 2, 3, 4, I, 2I, 3I, 4I\}$ modül5 altında nörtrosofik grubunu ele alalım. $H = \{1, 4, I, 4I\}$ kümesi bir nörtrosofik alt gruptur. H 'nin sol yan kümeleri $2H = \{2, 3, 2I, 3I\}$, $3H = \{3, 2, 3I, 2I\}$, $1H = 4H = \{1, 4, I, 4I\}$, $IH = \{I, 4I\} = 4IH$, $2IH = \{2I, 3I\} = 3IH$ dir.

Tanım 3.2.7 $N(G)$ nörtrosofik grup ve $H, N(G)$ 'nin nörtrosofik alt grubu olsun. Eğer $x, y \in N(G)$ için $H = xHy$ olacak şekilde $N(G)$ 'de x ve y elemanları bulunabiliyorsa H 'ye normaldir denir.

Örnek 3.2.8 $N(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, I, 2I, 3I, 4I, 5I, 6I, 7I\}$ mod8 çarpma işlemi altında nörtrosofik grubunu ve $H = \{1, 7, I, 7I\} \subset N(G)$ alt kümesini ele alalım.

$xHy = H$ olacak şekilde hiçbir $x, y \in N(G)$ yoktur. Böylece $H, N(G)$ 'de normal değildir.

Tanım 3.2.8 $N(G)$ nütrosofik bir grup olsun.

$C(N(G)) = \{x \in N(G) \mid ax = xa, \forall a \in N(G)\}$ kümesine $N(G)$ 'nin merkezi denir.

Not: Nütrosofik grubun birimi $C(N(G))$ 'ye ait olduğu için $C(N(G)) \neq \emptyset$ 'dir.

Ayrıca $N(G)$ değişmeli nütrosofik bir grupsa $C(N(G)) = N(G)$ olur.

Örnek 3.2.9 $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ olsun. Bu küme çarpımsal nütrosofik gruptur, değişmeli değildir. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduğu için $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C(G)$ dir.

3.3. Nütrosofik Halkalar ve Temel Özellikleri

Bu kısımda Agboola vd (2012), Kandasamy ve Smarandache (2006) makalelerinden yararlanılmıştır.

Tanım 3.3.1 $(R, +, .)$ bir halka olsun.

$$R[I] = \{a + bI : a, b \in R\}$$

kümesine, R 'nin işlemleri altında R ve I ile üretilen nütrosofik halka denir. (I bilinmeyen $I^2 = I$ özelliğini sağlayan bir elemandır.) Eğer R halkası bir cisim ise $R[I]$ 'ya nütrosofik cisim denir.

Not: I elemanının tersi olmadığı için $R[I]$ halkası hiçbir zaman cisim değildir.

Örnek 3.3.1 $\mathbb{Z}[I], \mathbb{Q}[I], \mathbb{R}[I]$ ve $\mathbb{C}[I]$ sırasıyla nütrosofik tam sayılar halkası, nütrosofik rasyonel sayılar halkası, nütrosofik reel sayılar halkası ve nütrosofik kompleks sayılar halkasıdır. $\mathbb{Z}[I] = \{a + bI \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[I]$

'dir. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ cisim oldukları için $\mathbb{Q}[I], \mathbb{R}[I]$ ve $\mathbb{C}[I]$ kümeleri nütrosifik cisimdir. Ancak I elamanının tersi olmadığı için $\mathbb{Q}[I], \mathbb{R}[I], \mathbb{C}[I]$ nütrosifik halkaları cisim olamaz. Bunun bir sonucu olarak

$$(a+bI)x = (c+dI)$$

formundaki nütrosifik denklem $\mathbb{Q}[I], \mathbb{R}[I], \mathbb{C}[I]$ 'de $b=0$ durumu hariç çözülemez.

Örnek 3.3.2 $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\dots,n-1\}$ modn tamsayılar halkası olsun. $\mathbb{Z}_n[I]$ nütrosifik halkadır ve n^2 elemanlıdır. Örneğin; $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ mod2 tamsayılar halkası olmak üzere $\mathbb{Z}_2[I] = \{0,1,I,1+I\}$, $2^2 = 4$ elemanlı bir nütrosifik halkadır. $\mathbb{Z}_2$ cisim olduğu için $\mathbb{Z}_2[I]$ nütrosifik cisimdir. Ancak cisim değildir.

Teorem 3.3.1 $R[I]$ bir nütrosifik halka ise $R[I]$ bir halkadır.

İspat: $R[I]$ nütrosifik halka ve R 'nin ikili işlemleri "+" ve "." olsun. $R[I]$ 'nin halka olduğunu göstermek için toplama işlemi altında bir abelyan grup ve çarpma işlemi altında yarı grup ve dağılma özelliğini sağladığını gösterelim. $a+bI, c+dI \in R[I]$ olsun. $a+c \in R$ ve $b+d \in R$ olduğu için $a+bI+c+dI = a+c+(b+d)I \in R[I]$ dir. Böylece toplama işlemi altında kapalılık özelliği sağlanır. R 'deki toplama işleminin birleşmeli olması kullanılarak $R[I]$ 'nin birleşme özelliğini sağladığı görülebilir. $a+c=c+a$ ve $b+d=d+b$ olduğundan $(a+bI)+(c+dI)=(c+dI)+(a+bI)$ dir ve böylece toplama işlemine göre $R[I]$ değişmelidir. R halkasının toplamsal birimi sıfır olmak üzere $a+bI+0=a+0+(b+0)I=a+bI$ olduğundan sıfır aynı zamanda $R[I]$ 'nin toplamsal birimidir. Her $a+bI \in R[I]$ için $-a+(-b)I \in R[I]$ dir ve $(a+bI)+(-a+(-b)I)=0$ dir. Böylece $R[I]$ 'da her elemanın toplamsal tersi vardır ve $R[I]$ toplamsal abelyan gruptur. $a+bI, c+dI \in R[I]$ için $(a+bI).(c+dI)=ac+(bc+ad+bd)I \in R[I]$ dir. Böylece $R[I]$ çarpma işlemine göre kapalıdır. R 'deki çarpma işleminin birleşmeli olması kullanılarak $R[I]$ 'nin da

bu işleme göre birleşme özelliğini sağladığı görülebilir. Ayrıca $R[I]$ da çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliklerinin sağlandığı görülebilir. Böylece $R[I]$ toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır.

Tanım 3.3.2 $R[I]$ nütrosifik halka olsun. Eğer her $x, y \in R[I]$ için $xy = yx$ ise $R[I]$ 'ya komutatif veya değişmeli nütrosifik halka denir. Eğer her $r \in R[I]$ için $1.r = r.1 = r$ olacak şekilde $1 \in R[I]$ varsa $R[I]$ 'ya birimli nütrosifik halka denir.

Örnek 3.3.3 $\mathbb{Z}[I], \mathbb{Q}[I], \mathbb{R}[I]$ ve $\mathbb{C}[I]$ birimli ve değişmeli nütrosifik halkalardır.

Tanım 3.3.3 $R[I]$ nütrosifik halka olsun. $M_{n \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{n \times n} : a_{ij} \in R[I] \right\}$ kümesine bilinen matris toplamı ve çarpımı altında nütrosifik matris halkası denir.

Örnek 3.3.4 $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}[I] \right\}$ kümesi, matris toplamına ve çarpımına göre değişmeli olmayan, birimli nütrosifik matris halkasıdır.

Tanım 3.3.4 $R[I]$ nütrosifik halka olsun. Her $x \in R[I]$ için $nx = 0$ olacak şekilde pozitif n tam sayıları varsa bunların en küçüğüne $R[I]$ halkasının karakteristiği denir. Eğer böyle bir pozitif tam sayı yoksa karakteristik sıfırdır denir.

Örnek 3.3.5 $\mathbb{Z}[I], \mathbb{Q}[I], \mathbb{R}[I]$ ve $\mathbb{C}[I]$ sıfır karakteristikli nütrosifik halkalardır.

Örnek 3.3.6 $\mathbb{Z}_4[I] = \{0, 1, 2, 3, I, 1+I, 2+I, 3+I, 2I, 1+2I, 2+2I, 3+2I, 3I, 1+3I, 2+3I, 3+3I\}$ dört karakteristikli bir nütrosifik halkadır.

Örnek 3.3.7 $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2[I] \right\}$ iki karakteristikli nütrosifik matris halkasıdır.

Tanım 3.3.5 $R[I]$ ntrosofik halka ve P , $R[I]$ 'nin bir proper alt kümesi olsun. Eğer $R[I]$ 'nin işlemleri altında P 'nin kendisi bir ntrosofik halka ise P kümesine $R[I]$ 'nin ntrosofik alt halkası denir.

Not: Bazı kaynaklarda da Kandasamy ve Smarandache (2006), Agboola vd. (2012) ntrosofik alt halka tanımı řu şekilde de verilmektedir: S , R 'nin bir alt halkası ve n bir pozitif tam sayı olmak üzere, S ve nI kümesi ile üretilen $P = S[nI]$ kümesine, $R[I]$ 'nin ntrosofik alt halkası denir.

rnek 3.3.8 $\mathbb{Z}_{12}[I]$ sonlu ntrosofik halkadır ve 12 karakteristiktir. $S = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $\mathbb{Z}_{12}$ 'nin alt halkası olmak üzere $P = S[I] = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 2I, 2+2I, \dots, 10+10I\}$ kümesi $\mathbb{Z}_{12}[I]$ 'nin bir ntrosofik alt halkasıdır. $T = \{0, 6+6I\}$ kümesi, $\mathbb{Z}_{12}[I]$ ntrosofik halkasının işlemleri altında bir halkadır ancak ntrosofik halka değildir.

Tanım 3.3.6 T boştan farklı bir küme ve “+”, “.” işlemleri T zerindeki ikili işlemler olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa T ye bir pseudo ntrosofik halka denir:

- (1) a ve b reel sayılar, en az bir $b \neq 0$ olmak üzere T kümesi $a+bI$ tipindeki elemanlardan oluşur,
- (2) $(T, +)$ bir değişmeli gruptur,
- (3) $(T, .)$ bir yarı gruptur,
- (4) her $x, y, z \in T$ için $x(y+z) = xy+xz$ ve $(y+z)x = yx+zx$ dağılma özellikleri sağlanır.

rnek 3.3.9 $T = \{0, 2I, 4I, 6I, 8I, 10I\}$ kümesi mod12 ye göre toplama ve çarpma işlemlerine göre bir pseudo ntrosofik halkadır. T ntrosofik halka değildir.

Tanım 3.3.7 $R[I]$ ntrosofik halka ve $R[I]$ 'nin boş olmayan bir alt kümesi P olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa P 'ye $R[I]$ 'nin ntrosofik ideali denir.

- i) P , $R[I]$ 'nin ntrosofik alt halkasıdır,
- ii) her $p \in P$ ve $r \in R[I]$ için $rp \in P$ ve $pr \in P$.

Eğer sadece $rp \in P$ ise P 'ye sol nörtrosofik ideal, $pr \in P$ ise P 'ye sağ nörtrosofik ideal denir. $R[I]$ değişmeli olduğunda $rp = pr$ olduğundan sağ ve sol idealler aynıdır.

Örnek 3.3.10 Nörtrosofik halkasında

$P = S[I] = \{ 0, 2, 4, 6, 8, 10, 2I, 2+2I, \dots, 10+10I \}$ kümesi kolayca görülebilirki $\mathbb{Z}_{12}[I]$ 'nin bir nörtrosofik idealidir.

Örnek 3.3.11 $\mathbb{Z}[I]$ nörtrosofik halkasında $P = n\mathbb{Z}[I]$ alt kümesi ($n \in \mathbb{Z}^+$) nörtrosofik idealdir.

Tanım 3.3.8 $R[I]$ nörtrosofik halka ve P , $R[I]$ 'nin pseudo nörtrosofik alt halkası olsun. Eğer her $p \in P$ ve $r \in R[I]$ için $rp \in P$ ve $pr \in P$ ise P ye $R[I]$ 'nin pseudo nörtrosofik ideali denir.

Örnek 3.3.12 $\mathbb{Z}_{16}[I]$ nörtrosofik halkasında $P = \{0, 2I, \dots, 14I\}$ kümesi bir pseudo nörtrosofik idealdir.

Teorem 3.3.2 p bir asal sayı olmak üzere

- i) $\mathbb{Z}_p[I]$ nörtrosofik halkasının hiçbir nörtrosofik ideali yoktur,
- ii) $\mathbb{Z}_p[I]$, p mertebeli bir tane pseudo nörtrosofik ideale sahiptir.

İspat: i) $\mathbb{Z}_p[I]$ nörtrosofik halkasının bir nörtrosofik P idealinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $P_1, \mathbb{Z}_p$ 'nin proper alt halkası olmak üzere $P = P_1[I]$ şeklinde olacaktır. p asal olduğundan $\mathbb{Z}_p$ 'nin $\{0\}$ ve $\mathbb{Z}_p$ den başka alt halkası yoktur. Yani $\mathbb{Z}_p$ nin P_1 gibi bir proper alt halkası yoktur. Böylece $\mathbb{Z}_p[I]$ nin $P = P_1[I]$ gibi bir alt halkası olamaz. Sonuç olarak $\mathbb{Z}_p[I]$ nörtrosofik halkasının hiçbir nörtrosofik ideali yoktur.

ii) $K = \{0, I, 2I, \dots, (p-1)I\}$ kümesi p mertebeli bir pseudo idealdir. p asal sayı olduğu için $K - \{0\}$ kümesinin her elemanı K yı üretir. K hem maksimal hem de minimaldir. O halde K kümesinden başka p mertebeli pseudo nörtrosofik ideal yoktur.

Aşağıdaki önermelerin ispatı da klasik halka teorideki ispatların aynısıdır.

Önerme 3.3.1 $R[I]$ nörtrosofik halka ve P , $R[I]$ 'nin bir alt kümesi olsun. P nörtrosofik idealdir ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanır:

- i) $P \neq \emptyset$,
- ii) her $a, b \in P \Rightarrow a - b \in P$,
- iii) her $a \in P, r \in R[I] \Rightarrow ra, ar \in P$.

Önerme 3.3.2 $R[I]$ nörtrosofik halka olsun. $R[I]$ ve $\langle 0 \rangle$ kümeleri, $R[I]$ 'nin nörtrosofik idealidir.

Önerme 3.3.3 $R[I]$ birimli nörtrosofik halka ve P , $R[I]$ 'nin nörtrosofik ideali olsun. Eğer $1 \in P$ ise $P = R[I]$ 'dir.

Önerme 3.3.4 $a = x + yI$, $R[I]$ nörtrosofik halkasının bir elemanı ve $P = \{ra : r \in R[I]\} \subset R[I]$ olsun.

- i) $x, y \neq 0$ ise P , $R[I]$ 'nin sol nörtrosofik idealidir.
- ii) $x = 0$ ise $P, R[I]$ 'nin sol pseido nörtrosofik idealidir.

İspat :

i) Açıktır.

ii) $x = 0$ ise P 'nin her elemanı bir $s \in R$ için sI formundadır. Böylece $P = \{0, sI\}$ olur bu da $R[I]$ 'nin sol pseido nörtrosofik idealidir.

Tanım 3.3.9 $R[I]$ nörtrosofik bir halka olsun.

1) Eğer P , $a, b \neq 0$ olmak üzere $r = a + bI \in R[I]$ elemanı ile üretilen bir nötrosofik ideal ise P 'ye $R[I]$ 'nin nötrosofik temel ideali denir ve (r) ile gösterilir.

2) Eğer P , $R[I]$ 'nin, $a \neq 0$ olmak üzere bir $r = aI$ elemanı ile üretilen pseudo nötrosofik ideali ise P ye pseudo nötrosofik temel ideal denir ve (r) ile gösterilir.

Önerme 3.3.5 $R[I]$ nötrosofik halka ve $a, b \neq 0$ olmak üzere $r = a + bI \in R[I]$ olsun.

i) (r) , r 'yi içeren en küçük nötrosofik idealdir.

ii) $R[I]$ nin her pseudo nötrosofik ideali bir nötrosofik ideal tarafından içerilir.

Önerme 3.3.6 $\mathbb{Z}[I]$ nin her pseudo nötrosofik ideali bir temel idealdir.

Tanım 3.3.10 $R[I]$ nötrosofik halka ve P nötrosofik ideali olsun.

i) $R[I]$ 'nin herhangi bir $P \subseteq J$ olacak şekildeki nötrosofik J ideali için $J = P$ veya $J = R[I]$ oluyorsa P 'ye maksimaldir denir.

ii) Eğer $JQ \subseteq P$ olacak şekilde $R[I]$ 'nin iki nötrosofik J ve Q idealleri için $J \subseteq P$ ya da $Q \subseteq P$ oluyorsa P 'ye asal ideal denir.

Önerme 3.3.7 $R[I]$ birimli ve komutatif nötrosofik halka ve P nötrosofik ideal olsun. Bu durumda P 'nin asal olması için gerek ve yeter koşul $x, y \in R[I]$ için $xy \in P$ olduğunda $x \in P$ veya $y \in P$ olmasıdır.

Örnek 3.3.13 $\mathbb{Z}[I]$ nötrosofik halkasında

i) $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere (nI) pseudo nötrosofik temel idealdir,

ii) (I) tek maksimal pseudo nötrosofik temel idealdir,

iii) (0) tek asal nötrosofik temel idealdir.

Tanım 3.3.11 $R[I]$ nötrosofik halka ve $0 \neq x \in R[I]$ olsun. Eğer $xy = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $y \in R[I]$ varsa x elemanına sol sıfır bölen denir. Sağ sıfır

bölen benzer şekilde tanımlanır. Eğer bir x elemanı hem sağ hem sol sıfır bölense x 'e kısaca sıfır bölen denir.

Tanım 3.3.12 $R[I]$ nörtrosofik halka olsun. Eğer $R[I]$ değişmeli, birimli ve sıfır bölensiz ise tamlık bölgesi adını alır.

Teorem 3.3.3 R bir tamlık bölgesi olsa bile $R[I]$ nörtrosofik halkası tamlık bölgesi değildir.

İspat: Varsayalım ki $R[I]$ bir tamlık bölgesi olsun. $R \subset R[I]$ olduğu açıktır. α ve β sıfırdan farklı pozitif tam sayılar olmak üzere $x = (\alpha - \alpha I)$ ve $y = \beta I$, $R[I]$ 'nin iki elemanı olsun. $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ 'dır ve $xy = 0$ 'dır. Bu da gösterir ki x ve y , $R[I]$ 'da nörtrosofik sıfır bölendir ve sonuç olarak $R[I]$ tamlık bölgesi değildir.

Tanım 3.3.13 $R[I]$ nörtrosofik halkasında bir $x \in R[I]$ elemanı $x^2 = x$ özelliğini sağlarsa x 'e idempotent eleman denir. $b \neq 0$ olmak üzere $x = a + bI \in R[I]$ olsun. $x^2 = x$ ise x 'e nörtrosofik idempotent eleman denir.

Örnek 3.3.14 $\mathbb{Z}_2[I]$ nörtrosofik halkasında 0 , 1 , I ve $1+I$ idempotent elemanlar, bunlardan I ve $1+I$ aynı zamanda nörtrosofik idempotent elemanlardır.

Örnek 3.3.15 $\mathbb{Z}_3[I]$ nörtrosofik halkasında I ve $1+2I$ nörtrosofik idempotent elemanlardır.

Tanım 3.3.14 $a \neq \pm b$ olmak üzere $x = a + bI$, $R[I]$ 'de bir eleman olsun. Eğer $xy = yx = 0$ olacak şekilde $y = c + dI$, $(c \neq \pm d)$ elemanı varsa x 'e nörtrosofik sıfır bölen denir. $(a - aI)I = 0$ olduğu için $a - aI$ ve I tipli elemanlara aşık sıfır bölen denir.

Örnek 3.3.16 $\mathbb{Z}_4[I]$ nörtrosofik halkasında $(2-2I)I=0$ dır. $2-2I$ ve I aşıkâr nörtrosofik sıfır bölenlerdir. $(2+2I)(2+3I)=0$ olduğundan $2+3I$ aşıkâr olmayan nörtrosofik sıfır bölenidir.

Tanım 3.3.15 $b \neq 0$ olmak üzere $x=a+bI$, $R[I]$ 'nın bir elemanı olsun. Eğer $x^n=0$ olacak şekilde bir pozitif n tam sayısı varsa x 'e nörtrosofik nilpotent eleman denir.

Örnek 3.3.17 $\mathbb{Z}_4[I]$ nörtrosofik halkasında $2+2I$ bir nörtrosofik nilpotent elemandır. Çünkü $(2+2I)^2=0$ dır.

Örnek 3.3.18 $M_{2 \times 2}[I]$ matrislerin nörtrosofik halkası olsun. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi için $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan A matrisi nörtrosofik nilpotenttir.

Tanım 3.3.16 $R[I]$ nörtrosofik halka ve r nörtrosofik halkanın sabit bir elemanı olsun. $N(r)=\{x \in R[I]: xr=rx\}$ kümesine $R[I]$ 'de r 'nin normalleyen kümesi denir.

Örnek 3.3.19 M kümesi

$$M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: a, b \in \mathbb{Z}_2[I]\right\}$$

şeklinde tanımlı nörtrosofik halka olsun. M 'nin 16 elemana sahip olduğu açıktır. M

İkümesindeki $r=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elemanının normalleyen kümesini bulalım:

$$N(r)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r = r \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ dir.}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a=0 \text{ bulunur. Böylece}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ şeklindeki elemanlar normalleyene aittir. O halde } b=0, b=1, b=I, b=1+I$$

$$\text{olacağından } N\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ olur.}$$

Tanım 3.3.17 $R[I]$ nütrosofik halka ve P de $R[I]$ 'nin nütrosofik ideali olsun.

$$R[I] / P = \{r + P : r \in R[I]\}$$

kümesi bir nütrosofik halkadır. Bu halkaya da nütrosofik bölüm halkası denir.

Yukarıdaki tanımda $R[I] / P$ 'nin herhangi bir iki elemanı $x = r_1 + P$ ve $y = r_2 + P$ olsun. $R[I] / P$ 'de $+$ ve $\cdot$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x + y = (r_1 + r_2) + P$$

$$xy = (r_1 \cdot r_2) + P$$

Kolayca gösterilebilir ki

- i) İkili işlemler iyi tanımlıdır.
- ii) $(R[I] / P, +)$ bir abelyan gruptur.
- iii) $(R[I] / P, \cdot)$ bir yarı gruptur.
- iv) $z \in R[I] / P$ için $z(x + y) = zx + zy$ ve $(x + y)z = xz + yz$

dir. Buna göre $R[I] / P$ bir nütrosofik halkadır ve P 'de toplamsal birim elemanıdır.

Örnek 3.3.20 $\mathbb{Z}[I]$ nütrosofik halkasında $P = 3\mathbb{Z}[I]$ nütrosofik idealdir.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[I] / P &= \{a + P \mid a \in \mathbb{Z}[I]\} \\ &= \{P, 1+P, 2+P, I+P, 2I+P, (1+I)+P, (2+I)+P, \\ &\quad (1+2I)+P, (2+2I)+P\} \end{aligned}$$

dir. Bu küme nütrosofik bölüm halkasıdır.

Örnek 3.3.21 $\mathbb{Z}_{12}[I] = \{0, 1, 2, 3, \dots, 11, I, 2I, \dots, 11I, 1+I, 2+I, \dots, 11+11I\}$

nötrosofik halkasında $P = \{0, 6, I, 2I, \dots, 11I, I + 6, \dots, 11I + 6\}$ kümesi nötrosofik idealdir. $\mathbb{Z}_{12}[I]/P = \{P, 1+P, 2+P, \dots, 5+P\}$ kümesi nötrosofik bölüm halkasıdır fakat nötrosofik halka değildir.

Tanım 3.3.18 $R[I]$ nötrosofik halkasında P nötrosofik ideal olsun. Eğer $R[I]/P$ bir halka ise fakat nötrosofik halka değilse $R[I]/P$ 'ye sahte nötrosofik bölüm halkası denir.

3.3.21' deki örnek sahte nötrosofik bölüm halkasıdır.

Örnek 3.3.22 $\mathbb{Z}_7[I]$ nötrosofik halkasında $P = \{0, I, 2I, 3I, \dots, 6I\}$ için $\mathbb{Z}_7[I]/P = \{P, 1+P, 2+P, 3P, \dots, 6+P\}$ dir. Bu küme $\mathbb{Z}_7$ ye izomorf olan bir sahte nötrosofik bölüm halkasıdır.

Tanım 3.3.19 $R[I]$ ve $S[I]$ iki nötrosofik halka olsun. $\phi: R[I] \rightarrow S[I]$ fonksiyonunu ele alalım. Eğer

- i) ϕ bir halka homomorfizması,
- ii) $R[I]$ 'nin I elemanı için $\phi(I) = I$

koşulları sağlanıyor ise ϕ dönüşümüne nötrosofik halka homomorfizmi denir. Eğer ϕ hem birebir hem örten ise ϕ 'ya nötrosofik izomorfizm denir. Bu durumda $R[I]$ ve $S[I]$ ya nötrosofik izomorf halkalar denir ve $R[I] \cong S[I]$ ile gösterilir. $\{x \in R[I]: \phi(x) = 0\}$ kümesine ϕ 'nun çekirdeği denir ve $\text{Ker } \phi$ ile gösterilir.

Örnek 3.3.23 $\mathbb{Z}[I]$ tam sayıların nötrosofik halkası ve $P = 5\mathbb{Z}[I]$ olsun. P 'nin $\mathbb{Z}[I]$ 'da nötrosofik ideal olduğu açıktır. $\mathbb{Z}[I]/P$ nötrosofik bölüm halkası aşağıda gibidir.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[I]/P = \{ & P, 1+P, 2+P, 3+P, 4+P, I+P, 2I+P, 3I+P, 4I+P, (1+I)+P, (1+2I)+P, \\ & (1+3I)+P, (1+4I)+P, (2+I)+P, (2+2I)+P, (2+3I)+P, (2+4I)+P, (3+I)+P, (3+2I)+P, \\ & (3+3I)+P, (3+4I)+P, (4+I)+P, (4+2I)+P, (4+3I)+P, (4+4I)+P \} \end{aligned}$$

Teorem 3.3.4 $\phi: R[I] \rightarrow S[I]$ bir n trosolik halka homomorfizmi ve $K = \text{Ker } \phi$ olsun.

- i) $K, R[I]$ 'nin alt halkasıdır.
- ii) $K, R[I]$ 'nin n trosolik alt halkası olamaz.
- iii) $K, R[I]$ 'nin ideali olamaz.

İspat :

- i) A ık.
- ii) $\phi(I) = I$ olduğundan $I \notin K$ 'dır ve sonu  açıktır.
- iii) (ii)'den direk çıkar.

 rnek 3.3.24 $R[I]$ nütrosolik halka ve $\phi: R[I] \rightarrow R[I]$ 'ye $\forall r \in R[I]$ için $\phi(r) = r$ ile tanımlanan bir d n     olsun. Bu durumda ϕ nütrosolik halka homomorfizmasıdır.

 rnek 3.3.25 $R[I]$ nütrosolik halka ve P onun nütrosolik ideali olsun. $\phi: R[I] \rightarrow R[I]/P$ d n     $\forall r \in R[I]$ için $\phi(r) = r + P$ şeklinde tanımlansın. $\forall r, s \in R[I]$ için $\phi(r + s) = \phi(r) + \phi(s)$ ve $\phi(rs) = \phi(r) \cdot \phi(s)$ sağlanır. Bunlarda gösterir ki ϕ bir halka homomorfizmasıdır. Ancak $\phi(I) = I + P \neq I$ dir. Bu nedenle ϕ nütrosolik halka homomorfizması değildir. Bu durum klasik halka kavramı ve nütrosolik halka kavramı arasında ki önemli bir farkı gösterir.

Önerme 3.3.8 $(R[I], +)$ nütrosolik abelyan grup olsun ve $\text{Hom}(R[I], R[I])$ kümesi de $R[I]$ 'den kendisi içine nütrosolik endomorfizmlerin kümesi olsun. Bu kümede $+$ ve $\cdot$ işlemleri a  ağıdaki gibi tanımlansın. $\forall \phi, \psi \in \text{Hom}(R[I], R[I])$ ve $x \in R[I]$ için

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$$

$$(\phi \cdot \psi)(x) = \phi(\psi(x))$$

Bu durumda $(Hom(R[I], R[I]), +, \cdot)$ ntrosofik halkadır.

İspat: Klasik halka ile benzerdir.

Tanım 3.3.20 $R[I]$ komutatif ntrosofik halka ve $x = a + bI \in R[I]$ olsun.

- i) $a, b \neq 0$ olmak üzere $x^n = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tam sayısı varsa x 'e $R[I]$ 'nin güçlü ntrosofik nilpotent elamanı denir.
- ii) Eğer $a = 0, b \neq 0$ ise ve $x^n = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tam sayısı varsa x 'e zayıf ntrosofik nilpotent eleman denir.
- iii) Eğer $b = 0$ iken $x^n = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tam sayısı varsa x 'e $R[I]$ 'nin adi nilpotent elemanı denir.

rnek 3.3.26 $Z_4[I]$ ntrosofik halkasında 0 ve $2I$ adi nilpotent elemanlardır. $2I$ zayıf ntrosofik nilpotent eleman ve $2 + 2I$ güçlü ntrosofik nilpotent elemandır.

Önerme 3.3.9 $R[I]$ komutatif ntrosofik halka olsun.

- i) $R[I]$ 'nın tüm güçlü ntrosofik nilpotent elemanları kümesi ntrosofik ideal değildir.
- ii) $R[I]$ 'nın tüm zayıf ntrosofik nilpotent elemanları ntrosofik bir ideal değildir.
- iii) $R[I]$ 'nın tüm nilpotent (adi, güçlü, zayıf) ntrosofik elemanlarının kümesi ntrosofik idealdir.

Önerme 3.3.10 $Z[I]$ tamsayıların ntrosofik halkası ve $P = nZ[I]$ (n pozitif tamsayı) olsun. Bu durumda

- i) $Z[I]/P$ ntrosofik bir halkadır,
- ii) $Z[I]/P$, n bir asal sayı olsa bile ne cisimdir ne de tamlık bölgesidir,
- iii) $Z[I]/P \cong Z_n[I]$ dir

Önerme 3.3.11 $\phi: R[I] \rightarrow S[I]$ 'ye nôtrosofik halka homomorfizması olsun.

- i) $\phi(R[I]) = \{ \phi(r) : r \in R[I] \}$ kümesi $S[I]$ 'nin nôtrosofik alt halkasıdır.
- ii) $\phi(-r) = -\phi(r), \forall r \in R[I]$
- iii) $0, R[I]$ 'nin sıfırı ise $\phi(0), \phi(R[I])$ 'nin sıfırındır.
- iv) $P, R[I]$ 'nin nôtrosofik ideali ise $\phi(P), S[I]$ 'nin bir nôtrosofik idealidir.
- v) $J, S[I]$ 'nin nôtrosofik ideali ise $\phi^{-1}(J), R[I]$ 'nin nôtrosofik idealidir.
- vi) $R[I]$ birimli ve birimi 1 ise $\phi(1), \phi(R[I])$ 'nin birimidir.
- vii) $R[I]$ komutatif ise $\phi(R[I])$ de komutatiftir.

İspat klasik halkadaki gibidir.

4. NÖTROSOFİK TAM SAYILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu Bölümde, Çeven ve Tekin (2020) tarafından yayınlanan “Some Properties of Neutrosophic Integers” isimli makaleye yer verilmiştir. Bilindiği gibi nütrosolik tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}[I] = \{a + bI : a, b \in \mathbb{Z}\}$ değişmeli ve birimli halkadır. Aynı zamanda $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[I]$ olduğu da açıktır.

Önerme 4.1 $a + bI \in \mathbb{Z}[I]$ olsun. Bu durumda bir $x + yI \in \mathbb{Z}[I]$ için $(a + bI).(x + yI) \in \mathbb{Z}$ olması için gerek ve yeter koşul $x = (a + b)k$ ve $y = -bk$ ($k \in \mathbb{Z}$) olmasıdır.

İspat: $(a + bI).(x + yI) \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $bx + (a + b)y = 0$ dır. Böylece $x = (a + b)k$ ve $y = -bk$ ($k \in \mathbb{Z}$) olduğunu görürüz. İspatın diğer kısmı açıktır.

Önerme 4.2 $\mathbb{Z}[I]$ nın tersinir elemanları kümesi $\{\mp 1, \mp(1 - 2I)\}$ dır.

İspat: $a + bI \in \mathbb{Z}[I]$ olsun. $a + bI$ nın tersinir olduğunu ve tersinin $x + yI$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $(a + bI).(x + yI) = 1$ dir. Böylece $ax = 1$ ve $bx + (a + b)y = 0$ olduğu görülür. Bu denklemleri çözmek için iki durum ortaya çıkar:

Durum 1: $a = x = 1$ olursa $b + (1 + b)y = 0$ dır. Böylece $y = -\frac{b}{1+b} \in \mathbb{Z}$ 'dir. Bu durumda $b = 0$, $y = 0$ veya $b = -2$, $y = -2$ 'yi elde edilir. Bu sebeple $1 + 0I = 1$ ve $1 - 2I$ tersinir elemanlar olur.

Durum 2: $a = x = -1$ ve $-b + (b - 1)y = 0$ 'dır. Böylece $y = \frac{b}{b-1} \in \mathbb{Z}$ olur. Bu durumda da $b = 0$, $y = 0$ veya $b = 2$, $y = 2$ elde ederiz. O halde $-1 + 0I = -1$ ve $-1 + 2I$ tersinir elemanlardır.

Ayrıca Önerme 4.2 de elde edilen tersinir elemanların tersleri kendileridir.

Önerme 4.3 $\mathbb{Q}[I] = \{a + bI : a, b \in \mathbb{Q}\}$ olmak üzere $\mathbb{Q}[I]$ kümesinin tersinir elemanları kümesi $U = \{a + bI : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0, a + b \neq 0\}$ dir. Ayrıca bir $a + bI \in U$ için $(a + bI)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{bI}{a(a+b)}$ dir.

İspat: $a + bI \in \mathbb{Q}[I]$ olsun. $(a + bI).(x + yI) = 1$ ise $ax = 1$ ve $bx + (a + b)y = 0$ dir. Böylece $x = \frac{1}{a}$ ve $y = -\frac{b}{a(a+b)}$ elde edilir. Önermenin doğruluğu görülmüş olur.

$\mathbb{Z}[I]$ halkasında $(3 - 3I).(0 + 4I) = 0$ olduğu için, bu halka sıfır bölene sahiptir. Böylece $\mathbb{Z}[I]$ halkasının tamlık bölgesi olmadığı görülür. Bu kısa saptamadan $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının bazı temel özelliklerinin $\mathbb{Z}[I]$ halkasında sağlanmadığı görülür. Bunu aşağıdaki sonuçlarda da göreceyiz.

Tanım 4.1 $u = a + bI \in \mathbb{Q}[I]$ olsun. $a + b - bI$ nötrosolik rasyonel sayısına u sayısının eşleniği denir ve $\bar{u}$ ile gösterilir. $u = a + bI$ sayısının normu $N(u) = u.\bar{u} = a.(a + b)$ olarak tanımlanır.

Önerme 4.4 $u = a + bI$ ve $v = c + dI \in \mathbb{Q}[I]$ olsun.

- i) $N(u) \in \mathbb{Q}$ dir,
- ii) $u \in \mathbb{Z}[I]$ ise $N(u) \in \mathbb{Z}$ dir,
- iii) $N(u) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ veya $a = -b$ dir,
- iv) $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow N(a) = a^2$ dir,
- v) $N(bI) = 0$ dir,
- vi) $N(u.v) = N(u).N(v)$ dir,
- vii) $u \neq 0$ ve $N(u) \neq 0$ ise $\frac{1}{u} \in \mathbb{Q}[I]$ dir,
- viii) $v \neq 0$ ve $N(v) \neq 0$ ise $N\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{N(u)}{N(v)}$ dir.

İspat: (i)-(v) maddelerinin ispatları norm tanımından açıktır.

vi) $N(uv) = N(ac + (ad + bc + bd)I)$

$$= ac(ac + ad + bc + bd)$$

$$= a^2c^2 + a^2cd + abc^2 + abcd$$

$$= (a^2 + ab)(c^2 + cd)$$

$$= N(u).N(v)$$

vii) $u = a + bI \in \mathbb{Q}[I]$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{u} = \frac{\bar{u}}{u\bar{u}} = \frac{a+b}{N(u)} - \frac{bI}{N(u)} \in \mathbb{Q}[I]$ dir.

viii) $u = a + bI \in \mathbb{Q}[I]$ olsun.

$$\begin{aligned} N\left(\frac{1}{u}\right) &= N\left(\frac{a+b}{N(u)} - \frac{b}{N(u)}I\right) \\ &= \frac{a+b}{N(u)}\left(\frac{a+b}{N(u)} - \frac{b}{N(u)}I\right) \\ &= \frac{1}{N(u)} \end{aligned}$$

olduğundan

$$N\left(\frac{u}{v}\right) = N\left(u \cdot \frac{1}{v}\right) = N(u) \cdot N\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{N(u)}{N(v)}$$

elde edilir.

Önerme 4.5 $u \in \mathbb{Z}[I]$ olsun. Bu durumda u nun tersinir olması için gerek ve yeter koşul $N(u) = \pm 1$ olmasıdır.

İspat: u tersinir eleman olsun. Bu durumda $u.v=1$ olacak şekilde bir $v \in \mathbb{Z}[I]$ vardır. Böylece $N(u.v) = N(1) = 1$ dir. Önerme 4.4 (vi) ve (ii) ile $N(u).N(v) = 1$ ve $N(u) \in \mathbb{Z}$ olduğundan $N(u) = \mp 1$ elde edilir. Tersine olarak, $u = a + bI \in \mathbb{Z}[I]$ ve $N(u) = a(a+b) = \mp 1$ olsun. Bu durumda u sayısının $-1, 1, -1+2I, 1-2I$ sayılarından biri olduğu görülür. Önerme 4.2 ile u bir tersinir eleman olur.

Tanım 4.2 x, y nötrosifik tamsayılar olsun. Eğer $y = xz$ olacak şekilde bir nötrosifik z tamsayısı varsa $x|y$ yazılır veya x, y yi böler denir. x ile z ye y nin bölenleri veya çarpanları denir.

Örnek 4.1 (i) $3 = (1+2I)(3-2I)$ olduğundan $1+2I|3$ ve $3-2I|3$ tür.

(ii) $2+7I$ sayısının $3+5I$ sayısını bölüp bölmediğini kontrol edelim:

$$\frac{3+5I}{2+7I} = \frac{(3+5I)(9-7I)}{(2+7I)(9-7I)} = \frac{27}{18} - \frac{11}{18}I \notin \mathbb{Z}[I] \quad \text{olduğundan, } \mathbb{Z}[I] \text{ da } 2+7I \text{ sayısı}$$

$3+5I$ sayısını bölmez.

Teorem 4.1 $a+bI \in \mathbb{Z}[I]$ ve $c \in \mathbb{Z}$ olsun. $c|a+bI$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{Z}$ de $c|a$ ve $c|b$ olmasıdır.

İspat: $\mathbb{Z}[I]$ da $c|a+bI$ olsun. Bu durumda $x, y \in \mathbb{Z}$ için $a+bI = c(x+yI)$ dir. Böylece $a=cx$ ve $b=cy$ olur. Bu eşitliklerden de $\mathbb{Z}$ de $c|a$ ve $c|b$ olduğu görülür. Tersine olarak $c|a$ ve $c|b$ olsun. $a=ck$ ve $b=ct$ olacak şekilde k, t tam sayıları vardır. Bu durumda $a+bI = c(k+tI)$ olduğundan $c|a+bI$ elde edilir.

Teorem 4.1 de $b=0$ alınırsa, tamsayılar arasındaki bölünebilme bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı $\mathbb{Z}[I]$ içinde de değişmez. Yani $a, c \in \mathbb{Z}$ için, $\mathbb{Z}[I]$ da $c|a \Leftrightarrow \mathbb{Z}$ de $c|a$ dır. Fakat bu $\mathbb{Z}$ deki diğer bazı özelliklerin $\mathbb{Z}[I]$ da aynı kalacağı anlamına gelmez. Örneğin; $\mathbb{Z}$ deki tüm asal sayılar $\mathbb{Z}[I]$ da asal çarpanlarına ayrılabilir.

Teorem 4.2 $u, v \in \mathbb{Z}[I]$ olsun. $\mathbb{Z}[I]$ da $u|v$ ise $\mathbb{Z}$ de $N(u)|N(v)$ dir.

İspat: $\mathbb{Z}[I]$ da $u|v$ olsun. Bu durumda bir $w \in \mathbb{Z}[I]$ için $v=uw$ dir. Norm alınırsa $N(v) = N(u).N(w)$ olur. Bu ise $\mathbb{Z}$ de $N(u)|N(v)$ demektir.

Teorem 4.2 nin karşıtı genellikle yanlıştır. Yani $N(u)|N(v)$ ise u sayısı v sayısını bölmeyebilir. Örneğin; $2+I$ ve $3+5I$ sayıları ele alınırsa, $N(2+I)=6$, $N(3+5I)=24$ tür. $N(2+I)|N(3+5I)$ dır. Fakat $2+I$ sayısı $3+5I$ sayısını bölmez. Çünkü $\frac{3+5I}{2+I} = \frac{15-3I}{6} \notin \mathbb{Z}[I]$ dir.

Teorem 4.3 $u \in \mathbb{Z}[I]$ ise u en az iki çarpana sahiptir.

İspat: $1 \in \mathbb{Z}[I]$ için $1 = (1-2I)(1-2I) = (-1+2I)(-1+2I) = (-1)(-1) = 1.1$ dir.

Bu durumda her

$$u = a+bI \in \mathbb{Z}[I]$$

için $u = u.1 = (-u)(-1) = u(1-2I)(1-2I) = u(-1+2I)(-1+2I) = (-u)(-1+2I)(1-2I)$ dir.

$u \in \mathbb{Z}[I]$ olsun. u nun 8 tane aşikar çarpanı vardır. Bunlar $\mp 1, \mp u, \mp(1-2I), \mp(1-2I)u$ dur. Bu çarpanlara u nun aşikar çarpanları denir. Bu çarpanların normları ∓ 1 ve $\mp N(u)$ dur. Bir $u \in \mathbb{Z}[I]$ nin bu 8 çarpandan başka çarpanı varsa, bu çarpanlara aşikar olmayan çarpanlar denir. u nun aşikar olmayan çarpanlarının normları ∓ 1 ve $\mp N(u)$ den farklıdır.

Tanım 4.3 u nütrosifik tamsayı olsun. Eğer u nun en az iki aşikar olmayan çarpanı varsa u ya bileşik nütrosifik sayı denir. Eğer u sayısı aşikar olmayan çarpama sahip değilse u ya asal nütrosifik tamsayı denir.

Örnek 4.2 $3 = (1+2I)(3-2I)$ şeklinde yazılabilir ve $1+2I$, $3-2I$ aşikar olmayan çarpanlardır. O halde 3 bileşik nütrosifik tam sayıdır. Genel olarak, $\mathbb{Z}$ deki p asal sayısı $\mathbb{Z}[I]$ da $p = (p+(1-p)I)(1+(p-1)I)$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin sağındaki çarpanlar aşikar olmayan çarpanlardır. Bu yüzden $p, \mathbb{Z}$ de asal olmasına rağmen, $\mathbb{Z}[I]$ da asal değildir. Benzer şekilde $3+5I = (1-9I)(3-4I)$ olduğundan $3+5I$, $\mathbb{Z}[I]$ da asal değildir.

Bununla birlikte $5-4I$ nütrosifik tam sayısı, $\mathbb{Z}[I]$ da asaldır. Bunu göstermek için $5-4I$ sayısının $\mathbb{Z}[I]$ da asal olmadığını varsayalım. Yani $5-4I$ bileşik nütrosifik tam sayı olsun. $5-4I = u.v$ aşikar olmayan çarpanlara ayrılışı olsun. Her iki yanın normu alınırsa $5 = N(u).N(v)$ olur. Böylece $N(u) = \mp 5$ veya $N(u) = \mp 1$ dir. Çarpanlar aşikar olmadığı için bir çelişki elde edilir. Böylece $5-4I$, $\mathbb{Z}[I]$ da sadece aşikar çarpanlara sahiptir yani $5-4I$, $\mathbb{Z}[I]$ da asaldır.

Teorem 4.4 Eğer $\mathbb{Z}[I]$ da, bir u sayısının normu $\mp p$ ise ($p, \mathbb{Z}$ de asal sayı) u sayısı $\mathbb{Z}[I]$ da asaldır.

İspat: $u \in \mathbb{Z}[I]$ ve $N(u) = p$ olsun. u nun bileşik sayı olduğunu varsayalım ve $x, y \in \mathbb{Z}[I]$ olmak üzere $u = x.v$ olsun. Her iki yanın normu alınırsa $p = N(x).N(y)$

elde edilir. Böylece $N(x) = \mp 1$ veya $\mp p$ olur. Böylece u , aşıkâr çarpanlara sahiptir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece normu $\mp p$ olan bir nôtrosifik tamsayı, $\mathbb{Z}[I]$ da asaldır.

Sonuç 4.15 $\mathbb{Z}[I]$ daki asal sayılar aşağıdaki formlardan birine sahiptir.

$$\mp(p + (1-p)I), \mp(p - (1+p)I), \mp(1 + (p-1)I), \mp(1 - (p+1)I).$$

($p, \mathbb{Z}$ de asal sayıdır)

İspat: $N(a+bI) = a(a+b) = \mp p$ ise sekiz farklı durum elde edilir. ($a = \mp p$ ve $a+b = \mp 1$), ($a = \mp 1, a+b = \mp p$). Bu durumlar, $\mathbb{Z}[I]$ daki asal sayıların iddia edilen sonuçla aynı olduğunu gösterir.

Teorem 4.4 Normu çift sayı olan nôtrosifik tam sayılar, $2-I$ veya $1+I$ nin bir katıdır.

İspat: $a+bI \in \mathbb{Z}[I]$ ve $N(a+bI) = a.(a+b)$ çift sayı olsun. Bu durumda bir $k \in \mathbb{Z}$ için $a = 2k$ ise, $2k+bI = (k+(k+b)I).(2-I)$ ve $N(2-I) = 2$ olduğundan $a+bI$ sayısı $2-I$ nin katıdır. Eğer $a = 2k+1$ ve $b = 2t+1$ şeklinde ise ($k, t \in \mathbb{Z}$ için) $2k+1+(2t+1)I = (2k+1+(t-k)I).(1+I)$ ve $N(1+I) = 2$ olduğundan $a+bI$, $1+I$ nin katı olur.

Teorem 4.5 (Bölme Algoritması) $u, v \in \mathbb{Z}[I]$ ve $v \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$u = qv + r, \quad |N(r)| < |N(v)|$$

olacak şekilde q ve $r \in \mathbb{Z}[I]$ vardır.

İspat: $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}[I]$ olduğunu biliniyor. $x, y \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $\frac{u}{v} = x + yI$ olsun.

$m, n \in \mathbb{Z}$ sayıları da sırasıyla x ve y ye en yakın tamsayılar olsun. Bu durumda

$|x-m| \leq \frac{1}{2}$ ve $|y-n| \leq \frac{1}{2}$ dir. $q = m + nI$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} N\left(\frac{u}{v} - q\right) &= N((x-m) + (y-n)I) \\ &= (x-m)((x-m) + (y-n)I) \\ &= (x-m)^2 + (x-m)(y-n) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$< 1$$

elde edilir. Böylece

$$\left| N\left(\frac{u}{v} - q\right) \right| = \left| N\left(\frac{u - qv}{v}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{N(u - qv)}{N(v)} \right|$$

$$= \frac{|N(u - qv)|}{|N(v)|}$$

$$< 1$$

olduğundan, $|N(u - qv)| < |N(v)|$ elde edilir. $u - qv = r$ alınırsa sonuç çıkmış olur

Örnek 4.3 $u = 5 + 6I$, $v = 3 + 2I$ olsun. Bu durumda

$$\frac{u}{v} = \frac{5 + 6I}{3 + 2I} = \frac{(5 + 6I)(5 - 2I)}{(3 + 2I)(5 - 2I)} = \frac{25 + 8I}{15} = \frac{25}{15} + \frac{8}{15}I = x + yI$$

olsun. $m = 2, n = 1$ alınırsa $q = 2 + I$ ve $r = u - qv = -1 - 3I$ dir. Bu durumda $u = qv + r$ ve $|N(r)| = 4 < |N(v)| = 15$ olup Bölme algoritması sağlanmış olur.

Dikkat ediniz ki $\mathbb{Z}[I]$ ile $\mathbb{Z}$ deki bölme algoritmaları arasında önemli fark vardır.

Bölüm ve kalan, $\mathbb{Z}[I]$ da tek değildir .

Örnek 4.4

$$8 + 6I = (3 + 2I)(2 + I) + 2 - 3I \text{ ve } |N(2 - 3I)| = 2 < |N(2 + I)| = 6 \text{ dir.}$$

Aynı zamanda

$$8 + 6I = (3 + 2I)(4 - I) - 4 + 3I \text{ ve } |N(-4 + 3I)| = 4 < |N(4 - I)| = 12 \text{ ifadesi de}$$

doğrudur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, nütrosifik halkalardan biri olan nütrosifik tamsayılar üzerine çalışılmıştır. Nütrosifik tamsayıların yapısı, Gauss tamsayıları ile benzerlik göstermektedir. Bu tezde Gauss tamsayılarının özelliklerinin, nütrosifik tamsayılardaki karşılıkları incelenmiştir. Bu doğrultuda nütrosifik tamsayılarda norm tanımı verilmiş normun özellikleri incelenmiştir. Nütrosifik tamsayılarda tersinir elemanlar, nütrosifik asal ve bileşik sayılar incelenmiş nütrosifik tamsayılar için Bölme Algoritması verilmiştir. Elde edilen bu özellikler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ 'nin eşleniği: $a - ib$,

$a + bI \in \mathbb{Z}[I]$ 'eşleniği: $a + b - bI$,

$a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ 'nin normu: $N(a + ib) = a^2 + b^2$,

$a + bI \in \mathbb{Z}[I]$ 'nin normu: $N(a + bI) = a(a + b)$,

$\mathbb{Z}$ 'de çarpımsal terse sahip elemanlar: ∓ 1 ,

$\mathbb{Z}[i]$ 'de çarpımsal terse sahip elemanlar: $\mp 1, \mp i$,

$\mathbb{Z}[I]$ 'da çarpımsal terse sahip elemanlar: $\mp 1, \mp(1 - 2I)$,

Bir Gauss tamsayısının normu çifttir ancak ve ancak sayı $1 + i$ 'nin bir katıdır,

Bir nütrosifik tamsayının normu çifttir ancak ve ancak sayı $2 - I$ veya $1 + I$ 'nın bir katıdır,

$\mathbb{Z}$ 'deki Bölme Algoritmasında bölüm ve kalan tek iken, $\mathbb{Z}[i]$ ve $\mathbb{Z}[I]$ 'deki Bölme Algoritmalarında bölüm ve kalan tek değildir,

$|n| > 1$ olan n tamsayısının aşikar çarpanları ∓ 1 ve $\mp n$,

$\mathbb{Z}[i]$ 'de $N(\alpha) > 1$ olan α sayısının aşikar çarpanları: $\mp 1, \mp i, \mp \alpha, \mp i\alpha$,

$\mathbb{Z}[I]$ 'da bir α sayısının aşikar çarpanları: $\mp 1, \mp \alpha, \mp(1 - 2I), \mp(1 - 2I)\alpha$ 'dır,

$\mathbb{Z}$ 'de asal olan p sayılarının bazıları $\mathbb{Z}[i]$ ve $\mathbb{Z}[I]$ 'da asal değildir.

Bundan sonraki çalışmalarda ise $\mathbb{Z}[I]$ nütrosifik tamsayılar kümesinde, Euclid algoritması, Bezout teoremi, tek çarpanlama, $\mathbb{Z}[I]$ da modüler aritmetik, $\mathbb{Z}[I]$ da asallar gibi konuların incelenmesi düşünülmektedir. Böylece tamsayılar kümesi olan

$\mathbb{Z}$ de, Gauss tamsayılar kümesi olan $\mathbb{Z}[i]$ de yapılmış olan sayılarla ilgili incelemeler nütrosifik tamsayılar kümesi olan $\mathbb{Z}[I]$ da da yapılmış olacaktır.



KAYNAKLAR

- Agboola, A. A. A., Adeleke, E. O., and Akinleye S. A., 2012. Neutrosophic Rings II international Journal of Mathematical Combinatorics, 2, 1-8.
- Agboola, A.A.A., Akinola, A. D. And Oyebola, O. Y., 2011. Neutrosophic Rings I. International Journal of Mathematical Combinatorics, 4, 1-14.
- Agboola, A.A.A., Akwa, A. D. And Oyebo, Y. T., 2012. Neutrosophic Groups and Subgroups. international Journal of Mathematical Combinatorics, 3, 1-9.
- Asar, A. O., Arıkan, A., Arıkan, A., 2009. Cebir. Eflatun Yayınevi, Ankara.
- Atanassov, K., 1986. Intuitionistic Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, 20, 87-96.
- Conrad, K., 2013. The Gaussian Integers. Erişim Tarihi: 25.09.2019.
<http://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/Zinotes.pdf>.
- Çeven, Y., Türen, B., 2016, Soyut Cebir, Süleyman Demirel Üniversitesi Yayını, Yayın No: 100, 283 sayfa, Isparta
- Çeven, Y., Tekin, Ş. S., 2020. Some Properties of Neutrosophic Integers. Kırklareli University Journal of Engineering and Science, 6(1), 50-59.
- Ho, H., 2016. Gaussian Integers. Erişim Tarihi: 10.10.2019.
<http://math.uchicago.edu/~may/REU2016/RUUPapers/Ho.pdf>
- Hungerford, T. W., 1974. Algebra. Holt Rinehard and Winston, INC.,
- Herstein, I. N., 1964. Topics in Algebra. John Wiley and Sons.
- Kandasamy, W.B.V., Smarandache, F., 2004. Basic Neutrosophic Algebraic Structures and their Applications to Fuzzy and Neutrosophic Models. Hexis, Church Rock.
- Kandasamy, W.B.V., 1997. Gaussian Polynomial Rings. Octogol, 5, 58-59.
- Karakaş, H.İ., 2010. Cebir Dersleri. Türkiye Bilimler Akademisi Ders Kitapları, 2. baskı.
- Kandasamy, W. B. V., 2006. Smarandache Neutrosophic Algebraic Structures. Erişim tarihi: 10.10.2019, <http://arxiv.org/ftp/math/papers/0603/0603708.pdf>
- Kandasamy, W.B.V., Smarandache, F., 2006. Some Neutrosophic Algebraic Structures and Neutrosophic N-Algebraic Structures. Hexis, Phoenix, Arizona.
- Kandasamy, W.B.V. Smarandache, F., 2006. Neutrosophic Rings. Hexis, Phoenix, Arizona
- Murphy, T., 2015. Introduction to Number Theory. Erişim tarihi: 10.10.2019, <https://www.maths.tcd.ie/pub/maths/Courseware/NumberTheory.pdf>
- Smarandache, F., 1998. Neutrosophy/ neutrosophic probability, set and logic. American Research Press, Rehoboth.

- Smarandache F., 2003. A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic, Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability (3rd edition), American Research Press, Rehoboth. (4), 125-129.
- Passman, D.S, 1977. The Algebraic Structure of Group Rings, Inter-science Wiley, 32, 131–144
- Wilson, J.S., 2000. A Note on Additive Subgroups of Finite Rings Journal of Algebra, 234, 362-364
- Zadeh ,L. A., 1965. Fuzzy sets. Information Control, 8, 338-353.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şerife Sultan TEKİN

Doğum Yeri ve Yılı : Isparta, 1981

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : sultanserife81@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Isparta ŞAİK Lisesi, 1999

Lisans : AKÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2002-2006

Mesleki Deneyim

Isparta Birey Dershanesi 2006-2008

SDÜ Atabey MYO 2009-2017

Yayınlar

Çeven, Y., Tekin, Ş. S., 2020. Some Properties of Neutrosophic Integers. Kırklareli University Journal of Engineering and Science, 6(1), 50-59