T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# MERAMORFİK FONKSİYONLAR KULLANILARAK UNİVALENT FONKSİYONLARA AİT YENİ BİR SINIF ELDE EDİLMESİ

AYŞENUR YILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. İSMET YILDIZ

DÜZCE, 2020

**T.C.**
**DÜZCE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# MERAMORFİK FONKSİYONLAR KULLANILARAK UNİVALENT FONKSİYONLARA AİT YENİ BİR SINIF ELDE EDİLMESİ

Ayşenur YILDIZ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT
Sakarya Üniversitesi ______________________

Tez Savunma Tarihi: 10/12/2020

# BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

10 Aralık 2020

Ayşenur YILDIZ

# TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü yardımdan dolayı ve çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyip her zaman hoşgörü ile öğrettiği değerli bilgileri ve desteği için çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet Yıldız'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca her koşulda yardımını esirgemeden yanımda olan çok kıymetli hocam Öğr. Gör. Alaattin Akyar'a ve çalışmam da farklı bakış açıları kazandırarak her daim desteklerini hissettiğim matematik bölümündeki kıymetli öğretim üyeleri hocalarıma ilgileri için teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili babam Ömer Yıldız'a, sevgili annem Vasfiye Yıldız'a ve yüksek lisans tez dönemimde her an inancını hissettiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

**10 Aralık 2020** **Ayşenur YILDIZ**

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa No**

# ŞEKİL LİSTESİ

# SİMGELER

| | |
|---|---|
| $A$ | Analitik olan fonksiyon |
| $B$ | Bölge |
| $C$ | Kompleks sayılar kümesi |
| $E$ | Birim disk |
| $f(z)$ | z' ye bağlı bir fonksiyon |
| $F$ | Skaler cisim |
| $Im$ | Kompleks sayının imajiner kısmı |
| $lim$ | Limit |
| $R$ | Reel sayılar kümesi |
| $Re$ | Kompleks sayının reel kısmı |
| $Rez$ | Rezidü |
| $S^*$ | Starlike (yıldızıl) fonksiyon |
| $U$ | Bir bölge |
| $v,w$ | Vektör uzayı |
| $w_1,\ w_2$ | Kompleks noktalar |
| $z, z_0, z_1, z_2$ | Bir nokta |
| $\zeta(z)$ | z' ye bağlı fonksiyon |
| $\sum$ | Toplam sembolü |
| $\partial$ | Kısmi türev |
| $\prod$ | Çarpım sembolü |

# ÖZET

## MERAMORFİK FONKSİYONLAR KULLANILARAK UNİVALENT FONKSİYONLARA AİT YENİ BİR SINIF ELDE EDİLMESİ

Ayşenur YILDIZ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Aralık 2020, 56 Sayfa

Bu çalışmada geometrik fonksiyonların içerisinde meramorfik fonksiyonlar sınıfından olan Weistrass sigma, zeta, eliptic fonksiyonları kullanarak ünivalent özelliğini sağlayan yeni bir geometrik fonksiyon sınıfı elde edildi.

**Anahtar sözcükler:** Analitik fonksiyon, Meramorfik fonksiyon, Weistrass fonksiyon, Periyot, Latis.

.

# ABSTRACT

## A NEW CLASS OF UNIVALENT FUNCTIONS OBTAINED USING MEROMORPHIC FUNCTIONS

Ayşenur YILDIZ
Düzce University
Graudate School of Natural and Applied Sciences,Department of Mathematic
Master’s Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İsmet YLDIZ
December 2020, 56 pages

In this study, weistrass sigma, zeta, eliptic functions which are in the meramorphic functions class in geometric functions, have obtained a new geometric function class that provides univalent properties.

**Keywords:** Analytic function, Meromorphic function, Weistrass function, Periods, Latice.

# 1. GİRİŞ

İnsanlık tarihinin varoluşundan itibaren matematik günlük yaşamda en önemli ihtiyaçlardan biridir. Gelişen teknoloji ve bilim ile matematiğin kanıtlanabilir oluşuna daha çok ihtiyaç duyulmaktadır. Bilim dünyasında matematiğin evrensel oluşu ve değiştirilemez tanım ve teoremleri karşılaşılan birçok zorlukta çözüm üretilmesini sağlamaktadır. Matematik bilimin yanı sıra ispata dayalı bir dil olarak da belirtilebilir. Tarihin en eski yöntemlerinden biridir. Birçok alana kolaylıkla uygulanmaktadır. Bilişim, fizik, kimya, geometri, işletme, istatistik gibi çeşitli alanlarda uygulamalarına rastlanmaktadır. Literatürde sayısal alanda çeşitli çalışmalarda matematik varlığını görmek aşikârdır. Matematik kendi içinde de çeşitli alanlara ayrılmaktadır. Bunlar: sayılar, uzay, hesap, matematiğin ana dalları, matematiğin temelleri şeklindedir. Bu alanlar da kendi aralarında çalışma şekilleri olarak ayrım göstermektedir. Bunlar: [1]

- Sayılar: Doğal Sayı, Tam Sayı, Rasyonel Sayı, Reel Sayı, Karmaşık Sayı, Hiperbolik Sayı, P-sel Sayı, Mükemmel Sayı, İkili Sayı, Ardışık Sayı, Sıfır ve benzeri vb.
- Uzay: Diferansiyel Geometri, Cebirsel Topoloji, Geometri, Topoloji, Fraktal Geometri, Trigonometri vb.
- Hesap: Analiz, Fonksiyon, Kaos Kuramı, Diferansiyel Denklem vb.
- Matematiğin Ana Dalları: Soyut Cebir, Genel Cebir, Olasılık, Genel Cebir, Kompleks Fonksiyonlar vb.
- Matematiğin Temelleri: Matematik Felsefesi, Matematiksel Şüphecilik, Teorem İspatlama, Tersine Matematik vb.

Tarih boyunca bu çeşitli alanda çalışmalar devam etmiştir. Bu tez çalışmasında ise matematik alanında geometrik fonksiyonlar üzerinde çalışılmaktadır. Kompleks fonksiyonlar teorisinin birçok bölümü bulunmaktadır. Geometrik fonksiyonlar teorisi bu teoriler arasında oldukça önemlidir. Geometrik fonksiyonlar teorisi konformal dönüşümlerin analitik özellikleri ile geometrik özellikleri arasında bağlantı kurmayı amaçlamaktadır. Geometrik fonksiyonlar teorisi tarihte Bernard Reimann tarafından 1851'de tarafından öne sürülmüştür. Bieberbach tarafından 1916 yılında normalize koşullar sağlanarak geliştirilmiştir. Geliştirilen bu çalışma sayesinde ünivalent fonksiyon kavramı oluşturularak uygulama alanı ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışma ile amaçlanan: Meramorf fonksiyon olan ve aynı zamanda ünivalent fonksiyon olma şartlarını da yerine getiren yeni bir fonksiyon sınıfı oluşturmaktır.

# 2. GENEL KAVRAMLAR

## 2.1. TANIMLAR

Bu bölümde çalışma içeriğinde kullanılan ve gerekli olan tanım ve teoremlerden bahsedeceğiz.

### 2.1.1. ε- Komşuluğu

$z_0 \in \mathbb{C}$ noktasını alalım. $D\,(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine $z_0$ noktasının ε komşuluğu denir.

### 2.1.2. Dış Nokta

$B \subset \mathbb{C}$ alt kümesi verilsin. $B$ kümesinin tümleyenine ait iç noktasına $B$ kümesinin bir dış noktası denir. Tüm dış noktaların meydana getirdiği kümeye $B$ kümesinin dışı denir ve

$(\mathbb{C} - B)^0$ ifadesi ile gösterilir.

### 2.1.3. İç Nokta

$A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in A$ olarak verilsin. $z_0$ noktasının en az bir $\varepsilon$ komşuluğu var ve tamamen $A$ kümesine ait ise $z_0$ noktasına $A$ kümesinde bir iç nokta denir.

### 2.1.4. Kapanış Noktası

$A \subset \mathbb{C}$ alt kümesi olsun. Herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. Eğer $z$ noktasının her boşluğunda $A$ kümesine ait en az bir elemanı mevcut ise $z$ noktasına $A$ kümesinin kapanış noktası denir.

### 2.1.5. Yığılma Noktası

$z \in \mathbb{C}$ olsun. $z$' nın her $\varepsilon > 0$ komşuluğunda $A$ kümesine ait sonsuz eleman mevcut ise z' ya $A$ kümesinin yığılma noktası denir.

### 2.1.6. Kutup Noktası, Sıfır Noktaları

$f$ fonksiyonu, $z = z_0$ noktasında analitik değil fakat

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0 \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısı bulunuyorsa $z = z_0$ noktasına $f$ fonksiyonunun bir kutup noktası denir. İşlemi gerçekleştiren en küçük $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına $z_0$ kutup noktasının mertebesi denir. Mertebesi 1 olan kutup noktası basit kutup noktası şeklinde ifade edilmektedir.

$z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında analitik olan bir $f$ fonksiyonu için $f(z_0) = 0$ iken

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \tag{2.2}$$

şartını sağlayan bir $n$ pozitif tamsayı ve $g(z_0) \neq 0$ şartını sağlayan $z_0$ noktasında analitik olan bir $g$ fonksiyonu mevcut ise $z_0$ noktasına $f$ fonksiyonuna ait basit sıfırı denir.

### 2.1.7. Bağlantılı Küme

$B, T\ ve\ Z$ $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesine ait alt kümelerdir. Eğer;

$$B \subset T \bigcup Z,\ \ A \cap Z \neq \emptyset, B \cap T \neq \emptyset, B \cap T \cap Z \neq \emptyset \tag{2.3}$$

olacak biçimde $T$ ve $Z$ gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunmaz ise $B \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi bir ifade ile tanımlanırsa da bağlantısızdır şeklinde ifade edilir.

### 2.1.8. Açık Küme

$A \subset \mathbb{C}$ olsun ve $A$ kümesinin tüm noktaları bir iç nokta olan kümeye açık küme denir.

### 2.1.9. Basit Bağlantılı Küme

$B \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer bir $B$ kümesi bulunan herhangi iki noktayı birleştiren tüm yollar bakıldığında $B$ kümesi içerisinde kalıyorsa bu $B$ kümesine basit bağlantılı küme denir.

### 2.1.10. Bölge

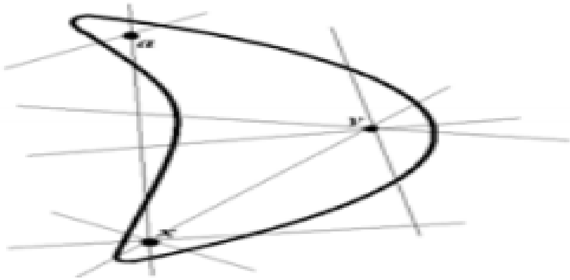
Kompleks düzlem içinde açık ve bağlantılı olan kümelere bölge denir.

### 2.1.11. Konveks Bölge

$D$ bir bölge ve $z_1$ $D$ bölgesinde yer alan herhangi bir nokta olsun. Eğer $z_1$ ve $z_2$ noktalarının birleşimi ile elde edilen doğru parçası $D$ bölgesinin içinde kalıyor ise $D$ bölgesine konveks bölge denir.

### 2.1.12. Starlike Bölge

$D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $y \in D$ verilsin. Eğer $y$ noktasına ait $B$ nin herhangi bir $x$ noktasına birleştirdiği doğru parçası bütün olarak $D$ nin içinde kalıyorsa $D$ ye $y$ noktasına göre starlike bölge denir. Genel bir ifade ile $D$ bölgesinin her bir noktası $y$ noktasından görünüyorsa starlike bölge denir.



Şekil 2.1. Starlike bölge ($y$ ye göre).

Yani rastgele seçilmiş olan $D$ bölgesi, $x$ noktasında starlike değildir ama inceleme sağlanırsa $y$ noktasında starlike bölge olduğu görülmektedir [2].

### 2.1.13. Yakınsaklık

Kompleks sayılara ait $\{z_n\}$ dizisi verilsin. $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0$ doğal sayısı bulunuyor ise bu diziye $z_0$ sayısına yakınsıyor denir. $\{z_n\}$ dizisinin $z_0$ noktasına yakınsıyor olması $z_n \rightarrow z_0$ veya $\lim z_n = z_0$ şeklinde gösterilmektedir.

### 2.1.14. Düzgün Yakınsaklık

$A \subset Z$ ve $f_m: A \rightarrow \mathbb{C}$ olsun. $\{f_m\}$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve tüm $z \in A$ değerleri için $m \geq m_0$ alınırsa

$$|f_m(z) - f(z)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

şartını sağlayan bir $m_0$ doğal sayısı varsa $\{f_m\}$ fonksiyon dizisi $f$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsıyor denir.

### 2.1.15. Mutlak Yakınsaklık

$$\sum_{m=1}^{\infty} |U_m| \tag{2.5}$$

serisi yakınsak olduğunda

$$\sum_{m=1}^{\infty} |U_m| \tag{2.6}$$

serisine mutlak yakınsak denir.

### 2.1.16. Süreklilik

$B \subset \mathbb{C}$, $f: B \to \mathbb{C}$ fonksiyon verilsin. $z_0 \in B$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere $z \in B$, $|z - z_0| < \delta$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ şeklinde $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise $f$ fonksiyonu $z_0$ noktasında süreklidir denir.

### 2.1.17. Parçalı Süreklilik

$A \subset \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonu verilsin. $f$ nin $A$'da sürekli olmadığı noktalarının sayısı sonlu ise $f$ fonksiyonu için $A$ üzerinde parçalı sürekli denir [3].

### 2.1.18. Seri

$b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$ ifadesine seri denir. $b_1, b_2, \ldots$ sayıları serinin terimleri denir. Bir seri şeklinde

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2.7}$$

veya başka bir ifade ile

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots = \sum b_n \tag{2.8}$$

tanımlanır.

### 2.1.19. Rezidü

$f$ fonksiyonu, tek değerli olmak üzere $\mathbb{C}$ nin içinde mevcut bir $z = z_0$ noktası dışında, $\mathbb{C}$ nin üzerinde ve içinde analitik fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonuna ait $z = z_0$ noktasındaki Laurent açılımı,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \tag{2.9}$$

şeklindedir.

Bu açılımında yer alan $\frac{1}{z-z_0}$ terimlerinin katsayısı $f$ fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki rezidüsü olacaktır. $Rez(f, z_0) = b_1$ ile gösterilir.

$$Rez(f, z_0) = b_1 \tag{2.10}$$

ifadesi ile tanımlanır. Rezidü aynı zamanda

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz \tag{2.11}$$

integrali şeklinde de hesaplanabilir. Bu nokta bir basit kutup ise

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{2.12}$$

açılımı mevcut olup bu ifade

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)] \tag{2.13}$$

limitinin sonucu ile de rezidü hesaplanmaktadır.

### 2.1.20. Eğri Çeşitleri

$t = t(z)$ ve $p = p(z)$ sürekli fonksiyon olmak üzere $t(z), p(z)$ $a \leq z \leq b$ denklemlerinin kümesinde bir $C$ eğrisi olduğunu kabul edelim. $C$ eğrisinin başlangıç noktası ve bitiş noktaları $\big(t(a), p(a)\big)$ ve $(t(b), p(b))$ sırasıyla, $A$ ve $B$ ile ifade edilsin. Bu durumda:

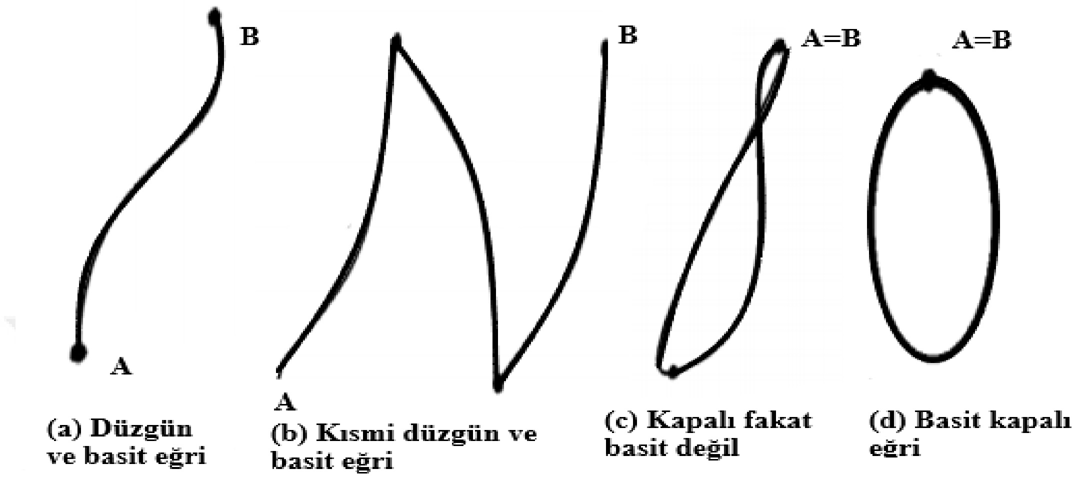
$t'$ ve $p'$ $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve $(a, b)$ aralığı içinde aynı zamanda sıfır olmuyor ise $C$ ye düzgün eğri denir.

$C$ eğrisi sonlu sayılı $C_1, C_2, \dots, C_n$ düzgün eğrileri ile oluşan bir $C_k$ eğrisinin bitiş noktası ve bir sonraki $C_{k+1}$ eğrisinin bitiş noktasında çakışıyorsa $C$ ye düzgün parçalı bir eğri denir.

$z = a$ , $z = b$ noktalarının dışında $C$ eğrisi kendi eğriyle kesişmediğin de $C$ eğrisine basit eğri denir.

$A = B$ ifadesi sağlanıyor ise $C$ eğrisine kapalı eğri denir.

$C$ eğrisi kendisiyle kesişmediği ve $A = B$ verilsin. $C$ aynı anda hem basit eğri ve hem de kapalı eğriyse $C$ eğrisine basit kapalı eğri şeklinde ifade edilmektedir [4].




Şekil 2.2. Eğri çeşitleri.

# 3. ÜNİVALENT VE ANALİTİK OLAN FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

## 3.1. GENEL FONKSİYON TANIMLARI

### 3.1.1. Ünivalent Fonksiyon

Herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu alınan $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde bire bir fonksiyon olup $\forall\, u, v \in D$ için $f(u) = f(v)$ sağlanması ancak ve ancak $u = v$ şartının olmasını gerektiriyorsa $D$ bölgesinde $f(z)$ fonksiyonuna ünivalent fonksiyon denir [5].

### 3.1.2. Starlike Fonksiyon

$f \in S$ ve $f(D)$ orijine göre starlike olsun. Burada $f(z)$ fonksiyonu için starlike fonksiyon adı verilmektedir ve starlike fonksiyon matematiksel olarak $S^*$ şeklinde gösterilmektedir [6].

### 3.1.3. Analitik Fonksiyon

$f$ fonksiyonu kompleks değişkenli ve kompleks olsun. $f$ fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının komşuluğunda tanımlansın. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{3.1}$$

limiti mevcut ise $f$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında türevlenebilirdir denir. $f(z)$ fonksiyonu $z_0$ noktasına ait bir komşuluğunda türevlenebilir ise $f$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında analitik fonksiyon denir [7].

### 3.1.4. Meramorf Fonksiyon

Bir $K$ bölgesinde kutup noktalarının dışında başka singüler noktası bulunmayan fonksiyonlara meramorf fonksiyon adı verilmektedir.

### 3.1.5. Periyodik Fonksiyon

Kompleks düzlem üzerinde alınan her noktada tanımlı olan $w_1\; ve\; w_2$ reel sayılar cisminde lineer bağımsız vektörel kompleks sayılar olmak üzere iki periyodu bulunan fonksiyonlara çifte periyodik fonksiyon ifade ile tanımlanmaktadır.

Bütün kompleks $z$ sayılarının $w_1$ ve $w_2$'ye ait $f$ fonksiyonlarının periyodlarının olması

$$f(z+w_1)=f(z+w_2)=f(z) \tag{3.2}$$

ifadesi ile belirtilmektedir.

### 3.1.6. Lokal Olarak Ünivalent Fonksiyon

Alınan $f$ fonksiyonu $z_0 \in B$ noktasında uygun alınan bir komşulukta ünivalent ise $f'$ye lokal şekilde ünivalent denir. $f$ fonksiyonunda analitik fonksiyon olması için $f'(z_0)=0$ şartı $z_0$ noktasında lokal ünivalentliğe denktir. Analitik olan ünivalent fonksiyon onun açı koruma özelliğinden kaynaklı konform dönüşüm şeklinde adlandırılır.

### 3.1.7. Konvekslik

Eğer

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}>0 \quad , \qquad z\in U \tag{3.3}$$

olacak şekilde bir $g$ fonksiyonu varsa birim diskte $f$ fonksiyonuna hemen hemen konvekstir denir.

### 3.1.8. Konveks Fonksiyon

Eğer $f(z)$ $|z|<1$ için analitik ise o zaman ancak ve ancak $f'(z)\neq 0,\ zf''(z)/f'(z)$ ve $\beth[1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}]>0$ analitik iken ünivalent ve konveks olur.

Bu şekilde aşağıdaki gösterime ulaşabiliriz:

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}d\mu(t) \tag{3.4}$$

bunu da $\mu(t)$ yi azalmayan $\mu(\pi)-\mu(-\pi)=1$ ve $\mu(t)$ yi normalize edilmiş olarak kabul edebiliriz. Bu şekilde

$$\frac{1}{2}[\,\mu(t+0)+\mu(t-0)]=\mu(t), \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\mu(t)dt=0 \tag{3.5}$$

ifade edilmektedir. Diğer bir ifade ile birim diskte analitik ve görüntü kümesi konveks olan bölgeye konveks fonksiyon denir.

### 3.1.9. Taylor Serisi

Bir $|z - z_0| = R$ içinde bir $f$ fonksiyonunu gösterdiği bu şekilde kabul edersek devamında,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots \quad (3.6)$$

$f(z)$ fonksiyonunun türevlerini alalım.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(z - z_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \cdots \quad (3.7)$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)(z - z_0)^{k-2} = 2.1a_2 + 3.2.\, a_3(z - z_0) + \cdots \quad (3.8)$$

$$f'''(z) = \sum_{k=3}^{\infty} a_k k(k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} = 3.2.1a_3 + \cdots \quad (3.9)$$

serileri olduğu aşikardır. Denklem 3.6. de kuvvet serisi $|z - z_0| = R$ yakınsaklık çemberi içinde türetilebilen bir $f$ fonksiyonu gösterildiğinde yakınsaklık çemberi içerisinde kuvvet serisinin analitik fonksiyon olduğunu belirtilir.

Denklem 3.6'de bulunan $a_k$ katsayıları ile $f$ nin türevleri arasında bir bağ bulunmaktadır. $z = z_0$ da Denklem 3.6 , Denklem 3.7 , Denklem 3.8 ve Denklem 3.9 yorumlanırsa

$$f(z_0) = z_0 \quad , f'(z_0) = 1!\, a_1 \quad , f''(z_0) = 2!\, a_2$$

ve

$$f'''(z_0) = 3!\, a_3 \quad (3.10)$$

elde edilir. Genel bir ifade ile

$$f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n \quad (3.11)$$

ya da

$$a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} \,, n \geq 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. Burada

$$a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}, n \geq 0 \tag{3.13}$$

ifadesi $n = 0$ olduğunda sıfır mertebeli türevi $f(z_0)$ ve $0! = 1$ olarak alınmaktadır.

$$a_0 = f(z_0) \tag{3.14}$$

formülü elde edilmektedir.

$$a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}, n \geq 0 \tag{3.15}$$

ifadesi ve Denklem 3.6 ifadesi aynı anda kullanılarak

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \tag{3.16}$$

elde edilir.

Bu seriye $f$ in $z_0$ merkezli Taylor serisi denir. $z_0 = 0$ merkezli bir Taylor Serisi

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!}(z)^k \tag{3.17}$$

sağlanırsa bu seriye Maclaurin serisi adı verilmektedir.

### 3.1.10. Yıldızıl Bölge

$D$ bir bölge olsun. $z_1$, $D$ bölgesinde herhangi bir nokta olarak tanımlansın. Eğer $z_1$ ile orijini birleştiren doğru parçası $D$ bölgesinin içinde kalıyorsa $D$ bölgesine orijine göre yıldızıl bölge denir.

### 3.1.11. Yıldızıl Fonksiyon

$U = \{z: z \in \mathbb{C}\ ve\ |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve görüntü kümesi yıldızıl bölge olan fonksiyonlara yıldızıl fonksiyon denir.

### 3.1.12. Lineer Dönüşüm

$F$ skaler cismi üzerinde $V\ ve\ W$ vektör uzayı olsun. $\forall\, x, y \in V$ için $T: V \to W$ dönüşümü

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) \tag{3.18}$$

özelliğini sağlıyorsa $T$ dönüşümüne lineer dönüşüm denir.

### 3.1.13. Laurent Serisi

Bir $f$ kompleks fonksiyonu bir $z = z_0$ noktasında analitik değilse bu noktaya noktanın tekilliği veya tekil noktası denir. Örneğin; $z = 2i$ ve $z = -2i$ kompleks sayıları,

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4)} \tag{3.19}$$

fonksiyonun tekil noktalarıdır ve $f$ bu noktaların her birinde süreksizdir.

### 3.1.14. S Sınıfı

$D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve ünivalent olan

$$f(0) = 0\,, f'(0) = 1 \tag{3.20}$$

şartlarını sağlayan $D$ diskinde

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{3.21}$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir. Bu şekilde fonksiyonlar sınıfına $S$ sınıfı adı verilmektedir.

### 3.1.15. Cauchy-Reimann Eşitliği

$f: D \to C$ üzerinde analitik olsun. Eğer $f(z) = u(z) + iv(z)$ yazarsak $u$ ve $v$

$f$'nin gerçek ve görüntü parçalarını oluşturur. Sırasıyla Cauchy-Reimann eşitliğini karşılaştırırsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ve \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.22}$$

elde edilir. Tersine eğer $u: D \to R$ $ve$ $v: D \to R$ şeklinde devam edilirse

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ve \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.23}$$

ifadesine ulaşılmaktadır. Buradan $u + iv: D \to C$ üzerinde analitik olur.

### 3.1.16. Koebe Fonksiyon

$S$ sınıfında olan,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z^2)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \tag{3.24}$$

biçiminde gösterilen fonksiyona Koebe fonskiyonu denir. Bu fonksiyon $E$ birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -\frac{1}{4}]$ bölgesi üzerine bire bir olarak dönüştürülür.

### 3.1.17. Reimann Dönüşüm Teoremi

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem $B$ de $\mathbb{C}$ düzleminde birden fazla sınır noktasına sahip bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in B$ olsun. $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan ve $B$ yi birim disk üzerine konform olarak dönüştüren bir tek $f$ konform dönüşümü vardır.

### 3.1.18. Schwarz Lemması

$D$ birim diski içerisindeki $f$ analitik

$$f(0) = 0 \; ve \; |f(z)| < 1 \tag{3.25}$$

olsun. O zaman

$$|f'(0)| \leq 1 \; ve \; f(z) = |z| \tag{3.26}$$

olur. $f$ de tahmin edilemeyen kesin eşitsizlikler diskte dönme yapılırsa

$$f(z) = e^{i\theta} z \tag{3.27}$$

olur.

### 3.1.19. Schwarz Lemması

$f: D = \{ z: |z| < 1 \} \to C$ analitik $z \in D$ için $|f(z)| \leq |z| \; ve \; |f'(0)| \leq 1$ dir. Üstelik $z_0 \in D$ $(z_0 \neq 0)$ için $|f(z_0)| = |z_0|$ ise c, $|c| = 1$ özelliğinde 1 sabit olmak üzere $f(z) = cz$ biçimindedir.

*İspat:*

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \; ise \\ f'(0), & z = 0 \; ise \end{cases} \tag{3.28}$$

şeklinde bir fonksiyon alalım. O halde $g$, $D - \{0\}$ kümesi üzerinde analitiktir ve $D$ de süreklidir. Dolayısıyla $g$, D de analitiktir. Şimdi $0 < r < 1$ olmak üzere $D_r\{ z : |z| \leq r \} \subset D$ kümesinin alalım. $g$, $D_r$ de analitik olacağından $|z| = r$ üzerinde

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r} \tag{3.29}$$

olur. Böylece $D_r$ üzerinde $|f(z)| \leq |z|/r$ dir. Buradan $r \to 1$ için $|f(z)| \leq |z|$ elde edilir. Özel olarak $|g(0)| \leq 1$ elde edilir. Üstelik bu değer $\mathrm{D_r}$'nin içindeki maksimum değer olur. O halde $g$ fonksiyonu bir $\mathrm{D_r}$ bölgesinde analitik ve eğer $\mathrm{D_r}$ de $|g|$ maksimum değer alıyorsa $g, D_r$ de sabittir. Bu sabitlik $r$ den bağımsızdır. O halde Denklem (3.29) dan $D$ de $|g| = 1$ ve $|\mathrm{f(z)/z}| = 1$ yani $|f(z)| = |z|$ bulunur. Böylece $|\mathrm{c}| = 1$ olmak üzere $f(z) = cz'$ dir.

### 3.1.20. Bieberbach Tahmini

$S$ sınıfında yer alan $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (3.30)$$

şeklinde açılıma sahiptir. Bieberbach, $n \geq 2$ koşulunda

$$|a_n| \leq n \qquad (3.31)$$

olacağını belirtmiştir. Elde edilen eşitsizliğe Bieberbach tahmini denir.

# 4. CAUCHY TEOREMİ

## 4.1. CAUCHY TEOREMİ GENEL İFADELER

### 4.1.1. Cauchy Teoremi

$f$ fonksiyonu basit $D$ bölgesi içinde karmaşık değerli fonksiyon ve $f$ fonksiyonu analitik ve $f$ nin $D$ de sürekli olacak şekilde

$$\int c\, f(\,\alpha\,)\, d\alpha = 0 \tag{4.1}$$

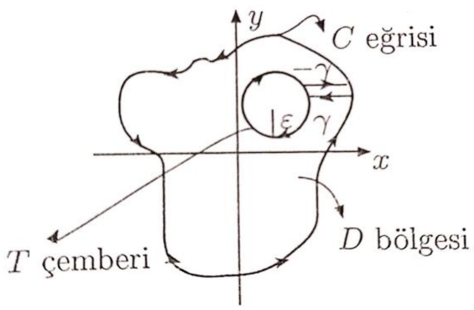
$D$ bölgesinde kapalı bir $C$ eğrisi formülü sağlamaktadır.

### 4.1.2. Cauchy İntegral Formülü

$w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı $C$ eğrisinin kapattığı $D$ bölgesinde tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. $a$ noktası $D$ bölgesinde bir iç nokta olmak üzere

$$f(\propto) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \tag{4.2}$$

formülü vardır.




Şekil 4.1. Cauchy integral formülü bölge gösterimi.

*İspat:* Şekilde görüldüğü gibi $a$ merkezli ε yarıçaplı çember çizilerek elde edilen ve pozitif dönme yönü göz önüne alınarak elde edilen

$$C^* = C + \gamma - T - \gamma \tag{4.3}$$

eğrisinin kapattığı $D$ bölgesinde

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a} \tag{4.4}$$

fonksiyonu tanımlanmış analitik bir fonksiyon olduğundan dolayı Cauchy Goursat Teoremine göre

$$\int_{C^*} g(z)dz = 0 \tag{4.5}$$

dır ve $C^*$ ve $g(z)$ bu eşitlikte kullanılırsa

$$0 = \int_{C^*} g(z)dz = \int_{C+\gamma-\gamma-T} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz \tag{4.6}$$

$$= \int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz + \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}dz - \int_T \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

$$\Rightarrow 0 = \int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz - \int_T \frac{f(z)}{z-\alpha}dz \;\; \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \int_T \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

elde edilir. Diğer yandan $\alpha$ merkezli $\varepsilon$ yarıçaplı çember denklemi gözönüne alındığında

$$|z-\alpha| = \varepsilon \;\Rightarrow z-\alpha = \varepsilon e^{i\theta} \;\Rightarrow dz = i\varepsilon e^{i\theta}d\theta \tag{4.7}$$

olduğu bilinmektedir. Bu eşitlikler integral içinde kullanılırsa

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \int_T \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha+\varepsilon e^{i\theta})}{z-\alpha} i\varepsilon e^{i\theta}d\theta \tag{4.8}$$

$$= i\int_0^{2\pi} f\left(\alpha+\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta \;\; \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = i\int_0^{2\pi} f\left(\alpha+\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte $\varepsilon \to 0$ için limit alınacak olursa

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = i\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\theta \tag{4.9}$$

eşitliği bulunur. Buradan integral alınırsa

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = if(\alpha)\theta I_0^{2\pi} = if(\alpha)2\pi = 2\pi i f(\alpha) \tag{4.10}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

eşitliği elde edilir

### 4.1.3. Cauchy-Goursat Teoremi

Basit bağlantılı bir $D$ bölgesinde bir $f$ fonksiyonunun analitik olduğunu varsayalım. Bu durumda $D$ bölgesindeki her basit kapalı $C$ eğrisi için

$$\int_C f(z)dz = 0 \tag{4.11}$$

dır.

*İspat:* Bu ifadede

$$\int_C f(z)dz = \int_C [u(x,y)dx + iv(x,y)dy]\,[dx + idy] \tag{4.12}$$

$$= \left[\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy\right]$$

eşitliğini yazabiliriz. Öte yandan $f(z)$ fonksiyonu analitik olduğundan Cauchy Reimann denklemlerinin gerçekleri yani

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.13}$$

dir. Ayrıca sırasıyla

$$\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy \tag{4.14}$$

$$\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy \tag{4.15}$$

çizgisel integralleri için Green Teoremi'nin uygulanmasıyla

$$\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy \tag{4.16}$$

$$\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy \tag{4.17}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Bu iki eşitliği sağ yanları için Cauchy Reimann denklemleri kullanılırsa

$$\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy = 0 \tag{4.18}$$

$$\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy = 0 \tag{4.19}$$

elde edilir. Bu halde istenilen

$$\int_C f(z)dz = 0 \tag{4.20}$$

sonucu elde edilir.

# 5. YÖNTEM VE TEOREMLER

## 5.1. ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN TEMEL TEORİSİ

Reimann dönüşüm teoreminden yola çıkarak birden fazla sınıf noktasının olduğu basit bağlantılı bir $Z$ bölgesinde $\vartheta : Z \rightarrow D$ analitik ve ünivalent fonksiyonu kullanılarak

$$D : \{ z : |z| < 1 \} \tag{5.1}$$

birim diski üstüne konform dönüşüm sağlanmaktadır. Böylelikle herhangi bir $f : Z \rightarrow G$ ünivalent fonksiyonu $g : D \rightarrow G$ ünivalent fonksiyonu ile birleştirilebilir.

### 5.1.1. Ünivalentlik

Tek değerli $f$ fonksiyonu eğer iki kere aynı değeri almazsa $D \subset C$ alanında ünivalent olur. D içinde $z_1 \neq z_2$ ve bütün $z_1, z_2$ noktaları için $f(z_1) \neq f(z_2)$ olur. $f$ fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasında bölgesel ünivalent ise bazı $z_0$ noktasının komşuları ünivalenttir. Analitik $f$ fonksiyonları için $f'(z_0) \neq 0$ şartı $z_0$ noktasında bölgesel ünivalente eşdeğerdir. Analitik ünivalent fonksiyonlar konform dönüşüm olarak gösterilir çünkü açı-koruma özelliği vardır.

Öncelikle birim $D = \{ z : |z| < 1 \}$ diski içinde $S$ sınıfının analitik ve ünivalent olan $f$ fonksiyonu ile ilgilenerek

$$f(0) = 0 \; ve \; f'(0) = 1 \tag{5.2}$$

şartlarını sağlayarak normalleştirmeliyiz. $f \in S$ Taylor serisi açılımı şeklinde

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \cdots \;, |z| < 1 \tag{5.3}$$

dir.

Reimann dönüşüm teorisinde geometrik teoremleri ilgilendiren $S$ sınıfının fonksiyonlarından ünivalent fonksiyonlar, bir sınır noktasından daha çok rastgele seçilen basit bağlantılı alanlar olarak açıklanır.

## 5.2. ALAN TEORİSİ

**Teorem 5.1.** Eğer $g \in \sum$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left|{b_n}^2\right| \leq 1 \qquad (5.4)$$

eşitliği ancak ve ancak $g \in \tilde{\Sigma}$ olduğunda sağlanır.

*İspat:* $E$ $g$ tarafından kurulsun. $r > 1$ için, $|z| = r$ çemberin $g$ görüntüsü altında $|z| = r$ olsun. $C_r$ basit kapalı eğrisi $E_r \supset E$ alanını kapsamaktadır. $E_r$ alanından

$$A_r = \frac{1}{2i}\int_{C_r} \overline{w}dw = \frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{g(z)}\, g'(z)dz \qquad (5.5)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{re^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} e^{in\theta}\right\}$$

$$= x\left\{1 - \sum_{v=1}^{\infty} v b_v r^{-v-1} e^{-i(v+1)\theta}\right\} re^{i\theta} d\theta$$

$$= \pi\left\{r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}\right\}, \qquad r > 1.$$

$r$ yi 1'e azaltırsak o zaman

$$m(E) = \pi\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right\} \qquad (5.6)$$

Buradan $m(E)$, $E$'nin ölçümü dışındadır. O zaman $m(E) \geq 0$ teoremi ispatlar.

$|b_n| \leq n^{-1/2}, n = 1{,}2{,}3$ ... bu eşitsizlikte $n \geq 2$ etkili değildir. Fonksiyon içerisinde

$$g(z) = z + n^{-1/2} z^{-n} \qquad (5.7)$$

ünivalent değildir. Sonuç olarak türevde

$$g'(z) = 1 - n^{1/2} z^{-n-1} \qquad (5.8)$$

$A$ içerisindeki bazı noktalar $n \geq 2$ için ortadan kaybolur. Eşitsizliğin keskin ve önemli sonucu $|b_1| \leq 1$'dir.

**Teorem 5.2. (Bieberbach Teoremi)** Eğer $f \in S$ ve $|a_2| \leq 2$, Koebe fonksiyonunun dönüşümü olan $f$ ancak ve ancak bu şekilde eşit olur.

**Teorem 5.3. (Dış Alan Teoremi)** $f \in P$ olsun. Bu halde $\overline{f(D)'}$ kapalı bölgesinin alanı,

$$B = \pi\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right] \tag{5.9}$$

eşitliği ile verilir. Burada $f(D)' = C/f(D)'$ dir.

*İspat:* $f \in P$ için $0 \le |z| < 1$ için geçerli olan

$$w = f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{5.10}$$

ifadesini yazmak kolaydır. $F$ altında $D$'nin görüntüsünün alanı $\infty$ noktasını ihtiva edeceğinden $f(D)$ sonlu olmaz. Bu yüzden bu teorem $\Delta = \overline{f(D)'}$ alanından söz eder.

$$C_r = \{z: re^{i\theta} \ , \quad 0 < r < 1 \ , \quad 0 \le \theta \le 2\pi\} \tag{5.11}$$

$$D_r = int(C_r) \quad , \quad E_r = Ext(C_r) \quad , \quad \Gamma_r = f(C_r) \tag{5.12}$$

olsun. İlk olarak $f(D_r) = Ext(\Gamma_r)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $w_0 = f(z_0)$ olmak üzere $r < |z_0| < 1$ olacak biçimde $|z_0| \in E_r$ seçelim. $F$ ünivalent olduğundan

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) \tag{5.13}$$

fonksiyonunun $|z| \le r$ de sıfırı yoktur. Bununla birlikte bu fonksiyon $|z| = r$ çemberinin içinde $z = 0$ noktasında basit kutba sahiptir. Dolaysıyla argüman teoreminden

$$-1 = N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f'(z)dz}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{dw}{w - w_0} \tag{5.14}$$

yazılır. Bu gösterir ki $\Omega_{c_r}(w_0) = -1$ olup $w_0 \in int(\Gamma_r)$ ve $\Gamma_r$ negatif yöndedir.

( $C_r$ pozitif yönde yönlendirilmiş) Üstelik eğer $z_1 \in D_r$ ise $N - P = 0$ olacağından $\Omega_{c_r}(w_1) = 0$ olur. Buda $w_1 \in Ext(\Gamma_r)$ olduğunu gösterir.

$\Delta_r = int\ (\Gamma_r)$ ve $B_r$ de $\Delta_r'$ nin alanı olsun. Bu durumda

$$B_r = \frac{1}{2i}\int_{-\Gamma_r} \bar{w}\, dw \tag{5.15}$$

$$= \frac{i}{2}\int_{C_r} \overline{f(z)}\, f'(z)dz$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_m z^m \tag{5.16}$$

olacağından $f'(z) = -z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} m b_m z^{m-1}$ şeklinde elde edilmektedir. Bu ifade denklemde yerine konulursa

$$B_r = -\frac{i}{2}\int_{C_r}\left[\overline{(z)^{-1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_n}\,z^{-n}\right]\left[z^{-2} - \sum_{m=1}^{\infty} m b_m z^{m-1}\right] dz \tag{5.17}$$

eşitliği elde edilecektir. Akabinde

$$\int_{C_r} z^{-n} z^{m-1} dz = i r^{n+m}\int_0^{2\pi} e^{(m-n)} d\theta = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ 2\pi i r^{2n}\,, & m = n \end{cases} \tag{5.18}$$

ifadesi kullanılarak

$$B_r = \pi\left[\frac{1}{r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n}\right] \tag{5.19}$$

elde edilir. $B_r \geq 0$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n} \leq \frac{1}{r^2} \tag{5.20}$$

bulunur. Böylece

$$B = \lim_{r\to 1^-} \quad B_r = \pi\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right] \tag{5.21}$$

sonucu elde edilmektedir.

**Teorem 5.4. (İç Alan Teoremi)** $f \in S$ olsun. $0 < r < 1$ için

$$A_r = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\, r^{2n} \tag{5.22}$$

ifadesindeki sayılarının sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu halde $f(D)$ nin alanı,

$$A = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \tag{5.23}$$

ile verilir.

*İspat:* $|z| < 1$ için gerekli

$$W = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad a_1 = 1 \tag{5.24}$$

toplamını yazalım ve

$$C_r = \{z: z = re^{i\theta}\ , 0 < r < 1\ , 0 < \theta < 2\pi \qquad (5.25)$$

çemberini göze alalım. Burada

$$\Gamma_r = f(C_r), D_r = int(C_r), \Delta_r = int(\Gamma_r) A_r = Alan\Delta_r \qquad (5.26)$$

olsun.

$$A_r = \int_{\Delta}\int_{r} dudv = \int_{D}\int_{r} \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy \qquad (5.27)$$

$$= \int_{D}\int_{r} |f'(z)| dxdy$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0} \left|f'(re^{i\theta})\right|^2 rdrd\theta$$

biçiminde yazılır. Ayrıca

$$f'\left(re^{i\theta}\right) = a_1 + 2a_2re^{i\theta} + \cdots + n\overline{a_n}r^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + \cdots \qquad (5.28)$$

olup

$$\overline{f'(re^{i\theta})} = \overline{a_1} + 2\overline{a_2}re^{-i\theta} + \cdots + n\overline{a_n}r^{n-1}e^{-i(n-1)\theta} + \cdots \qquad (5.29)$$

yazabileceğinden

$$\left|f'(re^{i\theta})\right|^2 = f'\left(re^{i\theta}\right)\overline{f'(re^{i\theta})} \qquad (5.30)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|r^{2n-2} + \sum_{k=0} c_k e^{ik\theta}$$

eşitliği elde edilir. Son toplamda $k$ sıfırdan farklı tamsayılar olup ve $c_k$ larda $a_n$ ye ve $r$ ye bağlıdır. Dolayısıyla

$$r\left|f'(re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2 r^{n-1} + \sum_{k=1} rc_k e^{ik\theta} \qquad (5.31)$$

ifadesi Denklem 5.27' de kullanılır ve terimin integrali alınırsa

$$A_r = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n} < M \qquad (5.32)$$

yazılır. Burada $N$ keyfi sabit pozitif bir tamsayıdır. Sol taraftaki toplam $r$ ye göre monoton olarak artan ve sınırlıdır. Dolayısıyla $r \to 1^-$ giderken bir limite sahip olup

$$\pi \sum_{n=1}^{N} n|a_n|^2 \leq M \tag{5.33}$$

eşitsizliği elde edilir. Çünkü

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \tag{5.34}$$

kısmi toplamları sınırlıdır. $N \to \infty$ giderken

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \tag{5.35}$$

serisi yakınsak olduğundan

$$A = \lim_{r \to 1^-} A_r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \tag{5.36}$$

ifadesi elde edilir. Denklem (5.36)'da tanımlanan $A$ sayısına $\Delta = f(D)'$ nin iç alanı denir. Daima

$$A = \pi(1 + 2|a_2|^2 + \cdots) \geq \pi \tag{5.37}$$

eşitsizliği vardır. $F(z) = z$ olması durumunda $f(D)$ alanı ile $D$ nin alanı eşittir. $F(z) = z$ durumu hariç diğer durumlarında $f(D)$'nin alanından fazladır. [8]

### 5.3. DİSTORTİON TEROMLERİ VE BİEBERBACH EŞİTSİZLİĞİ

**Teorem 5.5. (Bieberbach)** Eğer $f \in S$ ise $|a_2| \leq 2$ dir. Eşitlik sadece $f(z) = z(1 + e^{i\beta}z)^{-2}$ şeklindeki Koebe fonksiyonları için sağlanır.

*İspat:* Burada

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \in S \tag{5.38}$$

iken fonksiyonun tersi

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z(1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots)} \tag{5.39}$$

$$= \frac{1}{z}[1 - (a_2 z + a_3 z^2 + \cdots) + (a_2 z + a_3 z^2 + \cdots)^2 - \cdots]$$

$$= \frac{1}{z} - a_2 + ({a_2}^2 - a_3)z + \cdots$$

şeklinde olup ilave bir sabit hariç $P$ sınıfındadır. Böylece Sonuç 5.6 dan dolayı

$$|{a_2}^2 - a_3| \leq 1 \tag{5.40}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlikten sadece $a_2$ yi içeren bir başka eşitsizliği şöyle çıkarabiliriz. Bunun içinde $D$ de ünivalent ve analitik alan

$$h(z) = [f(z^2)]^{1/2} = z(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \cdots)^{1/2} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 \tag{5.41}$$

fonksiyonunu göz önüne almak yeterlidir. Bu fonksiyon $S$ sınıfındadır. $D$ de $h(z)$ fonksiyonunun ünivalent olduğunu görmek için $|z_1| < 1\,, |z_2| < 1$ olmak üzere $h(z_1) = h(z_2)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $f({z_1}^2) = f({z_2}^2)$ şeklinde olup $f$ ünivalent olduğundan ${z_1}^2 = {z_2}^2$ yazabiliriz. Bu halde $z_1 = z_2$ veya $z_1 = -z_2$ dir.

Fakat $z_1 = -z_2$ olması $h(z_1) = h(-z_1)$ olmasını gerektirir ki bu $z_1 \neq 0$ için $h$ sıfırdan farklı ve tek fonksiyon olduğundan mümkün değildir.

Denklem 5.41 de ki ifadeye göre $h(z)$ nin açılımındaki ikinci ve üçüncül katsayılar

$$a'_2 = 0 \ \ ve \ \ a'_3 = \frac{1}{2} a_2 \tag{5.42}$$

dir. Böylece bunu $|a^2{}_2 - a_3| \leq 1$ de kullanırsak

$$\left|0 - \frac{1}{2} a_2\right| \leq 1 \tag{5.43}$$

$$= \left|-\frac{1}{2} a_2\right| \leq 1$$

$$= \frac{1}{2}|a_2| \leq 1$$

$$= |a_2| \leq 2$$

eşitsizliğini buluruz. Alternatif olarak $\sum$ sınıfına ait olan

$$F(z) = \left[h\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1} = z - \frac{1}{2} a_2 \frac{1}{z} + \cdots \tag{5.44}$$

fonksiyonunu göz önüne alabiliriz. Buna göre Gronwall-Bieberbach eşitsizliğinden

$$\left|-\frac{1}{2}a_2\right| \leq 1 \quad \text{veya} \quad |a_2| \leq 2 \tag{5.45}$$

yazılır. Eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart $2\alpha = \beta$ olmak üzere

$$F(z) = z + e^{i\beta}\frac{1}{z} \tag{5.46}$$

biçiminde olmasıdır. Böylece

$$F(z) = \left[h\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1} \tag{5.47}$$

ifadesinden

$$h(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\beta}z^2)} \tag{5.48}$$

fonksiyonu ve $h(z) = \sqrt{f(z^2)}$ eşitliğinden de

$$w = f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\beta}z)^2} \tag{5.49}$$

$$= z - 2e^{i\beta}z^2 + 3e^{2i\beta}z^3 - \cdots + (-1)^{n-1}.n.e^{(n-1)i\beta}z^n + \cdots$$

bulunur. Bu fonksiyonu Koebe fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu Koebe fonksiyonu bütün $n$ ler için $|a_n| = n$ özelliğine sahiptir.

Denklem 5.49 eşitliğinin yani

$$\omega = \frac{z}{(1 + e^{i\beta}z)^2} \tag{5.50}$$

eşitliğinin her iki yanını $e^{i\beta}$ ile çarpıp $\frac{1}{e^{i\beta w}}$ yı hesaplarsak

$$\frac{1}{e^{i\beta}w} = \frac{1}{\dfrac{e^{i\beta}z}{(1 + e^{i\beta}z)^2}} = \frac{(1 + e^{i\beta}z)^2}{e^{i\beta}z} = \frac{1}{e^{i\beta}z} + e^{i\beta}z + 2 \tag{5.51}$$

buluruz. Denklem 5.51. ifadesinin sağ tarafı $|z| = r < 1$ için $[0,4]$ reel aralığındaki değerleri alır.

Böylece Koebe fonksiyon $D$ birim diskini $t \geq \frac{1}{4}$ olmak üzere $w = te^{-i\beta}$ ışını ile delinmiş $w$-düzlemi içinde dönüştürür.

**Sonuç 5.6. (Gronwall-Bieberbach)** Eğer $f \in P$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1 \tag{5.52}$$

Bu sonuç 1914 de Gronwall tarafından 1916'da da Bieberbach tarafından ayrı ayrı elde edilmiştir.

**Uyarı 5.7.** Gronwall-Bieberbach eşitsizliğinin bir sonucu olarak

$$|b_1| \leq 1 \tag{5.53}$$

yazılır.

$|b_1| = 1$ eşitliği sadece $b_2 = b_3 = \cdots = 0$ olduğundan ortaya çıkar. Bu durumda

$$b_1 = e^{2i\alpha} \tag{5.54}$$

olmak üzere $f$ fonksiyonu

$$f(z) = \frac{1}{z} + e^{2i\alpha} z \tag{5.55}$$

biçimindedir.

$$z = e^{i\theta} \quad \text{için} \quad f\left(e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta} + e^{2i\alpha} e^{i\theta} \tag{5.56}$$

$$= e^{i\alpha}\left(e^{-i\theta} e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} e^{i\theta} \;\right)$$

$$= e^{i\alpha}(e^{-i(\alpha+\theta)} + e^{i(\alpha+\theta)})$$

$$= e^{i\alpha}(\cos(\alpha+\theta) - i\sin(\alpha+\theta) + \cos(\alpha+\theta) + isin(\alpha+\theta)$$

$$= 2e^{i\alpha}\cos(\alpha+\theta)$$

yazılır. $w = u + iv$ denirse

$$2e^{i\alpha}\cos(\alpha+\theta) = u + iv \tag{5.57}$$

eşitliğinden

$$u = 2\cos\alpha\cos(\alpha+\theta) \tag{5.58}$$

$$v = 2\sin\alpha\cos(\alpha+\theta) \tag{5.59}$$

ve bu iki eşitlikten de

$$\frac{v}{u} = \tan\alpha \implies v = (\tan\alpha).u \tag{5.60}$$

şeklinde bir doğru denklemi elde edilir. Böylece $z$, $c_1$ birim diskini bir kez tararken $w$ orta noktası orijin olan ve $\alpha$ eğim açısına sahip olan 4 birim uzunluğundaki $L$ doğrusunu, iki kez ileri ve geri tarar. Bu $f$ fonksiyonu açık birim diski, $L$ doğrusu çıkarılmış $w$ düzleminin tamamına dönüştürür. Bu durumda $B = 0$ dır.

**Teorem 5.8.** Bir $f \in S$ dönüşümü altında birim diskin görüntüsü $|w| < \frac{1}{4}$ diskinin tüm noktalarını ihtiva eder. (Koebe-Bieberbach Teoremi)

*İspat:* $b$, $f(D)$ nin bir sınır noktası olsun ve

$$\psi(z) = \frac{bf(z)}{b - f(z)} = z + (a_2 + b^{-1})z^2 + \cdots \qquad (5.61)$$

fonksiyonu göz önüne alalım. $\psi = Tof$ olduğundan $\psi$ de $S$ sınıfındadır. Burada $T$,

$$T(w) = \frac{bw}{(b - w)} \qquad (5.62)$$

şeklinde lineer olmayan bir dönüşümdür.

Teorem 5.5. (Bieberbach) ifadesinden yararlanarak $|a_2 + b^{-1}| \leq 2$

olup

$$|b^{-1}| \leq 2 + |a_2| \leq 4 \qquad (5.63)$$

yazılır. Bundan dolayı $|b| \geq \frac{1}{4}$ olur. Bir sınır noktasının tam olarak başlangıç noktasından $\frac{1}{4}$ birim uzaklığında olabilmesi, bu fonksiyonun Koebe fonksiyonu olması durumunda gösterildi. Böylece $\frac{1}{4}$, herhangi daha büyük bir sabit ile değiştirilemez.

**Not 5.9.** $\overline{D}$ de analitik

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (5.64)$$

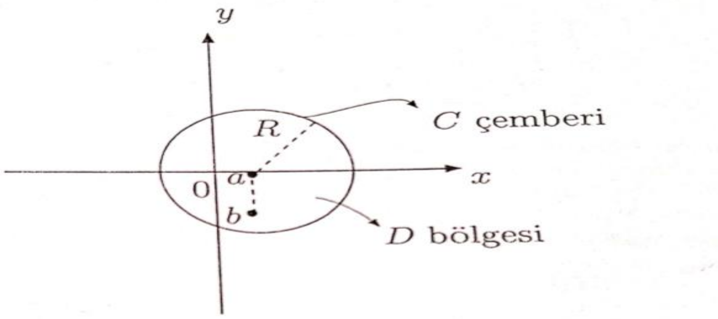
biçimindeki fonksiyonların ailesi için ($\overline{D}$ de ünivalent olması gerekmeyen ) $f(D)$ nin $L$ yarıçapı bazı diskleri ihtiva edecek şekilde $L > 0$ pozitif sabiti vardır.

Landau, $L$ nin mümkün olan en iyi değerinin en az $\frac{1}{16}$ olduğunu gösterdi.

## 5.4. LİOUVİLLE TEOREMİ

**Teorem 5.10.** $w = f(z)$ fonksiyonu genişletilmiş kompleks düzlemde analitik ve sınırlı ise bu fonksiyon sabit olmak zorundadır.

*İspat:* Bölüm 4.2. de yer alan Cauchy İntegral Teoremi' ne dayanarak yapılabilmektedir. Şekilde de




Şekil 5.1. Liouville teoremi.

görüldüğü gibi $a$ merkezli, $R$ yarıçaplı $C$ çemberi ve $C$ çemberinin sınırladığı $D$ bölgesi göz önüne alınsın. Ayrıca $D$ bölgesinde $a$ dan farklı olmak üzere ikinci bir $b$ noktasını

$$|b-a| < \frac{R}{2} \ , a \neq b \tag{5.65}$$

olacak şekilde seçilsin.

$w = f(z)$ fonksiyonu genişletilmiş düzlemde analitik olduğundan $C$ çemberi ve onun kapattığı $D$ bölgesinde de analitiktir ve aynı fonksiyon genişletilmiş düzlemde sınırlı olduğundan $|f(z)| < M$ $(M > 0)$ gerçeklenir. Öte yandan

$$|z-b| = |z-b+a-a| = |z-a-(b-a)| \geq |z-a| - |b-a| \tag{5.66}$$

$$\Longrightarrow \ |z-b| \geq |z-a| - |b-a|$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca $a$ merkezli $R$ yarıçaplı çember göz önüne alındığından dolayı

$$|z-a| = R \ \Longrightarrow z-a = Re^{i\theta} \Longrightarrow dz = iRe^{i\theta}d\theta \tag{5.67}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan

$$|b-a| < \frac{R}{2} \tag{5.68}$$

ve

$$|z-b| \geq |z-a| - |b-a| \tag{5.69}$$

olduğundan ve $|z-a| = R$ eşitliğinden

$$|z-b| \geq \frac{R}{2} \tag{5.70}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Öte yandan $a$ ve $b$ için Cauchy İntegral Formülü yazılacak olursa

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{5.71}$$

$$f(b) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-b}dz \tag{5.72}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$f(b)-f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-a}\right]f(z)dz \tag{5.73}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z-a-z+b}{(z-a)(z-b)}f(z)dz$$

$$= \frac{(b-a)}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin iki tarafının da mutlak değeri alınırsa

$$|f(b)-f(a)| = \left|\frac{(b-a)}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}\right| \tag{5.74}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe integraller için Darboux Teoremi uygulanırsa

$$|f(b)-f(a)| \leq \frac{|b-a|}{2\pi}\int_C \frac{|f(z)||dz|}{|z-a||z-b|} \tag{5.75}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte daha önce elde edilen eşitsizlikler kullanılırsa

$$|f(b)-f(a)| \leq \frac{|b-a|}{2\pi}\int_C \frac{M}{R.\frac{R}{2}}|dz| = \frac{|b-a|}{2\pi R\frac{R}{2}}M\int_C |dz| = \frac{|b-a|M}{\pi R^2}\int_C |dz| \tag{5.76}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\int_C |dz| = L = 2\pi R \tag{5.77}$$

ifadesinin $C$ çemberinin yay uzunluğu olduğu bilinmektedir. Bu da en son eşitsizlikte kullanılırsa

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{|b-a|M}{\pi R^2} 2\pi R = \frac{2M|b-a|}{R} \tag{5.78}$$

eşitsizliği elde edilir.

Genişletilmiş düzlemde çalışıldığından dolayı $R \to \infty$ için bulunan eşitsizlik

$$|f(b) - f(a)| \leq 0 \tag{5.79}$$

şekline dönüşür ki bu eşitsizliğin çözümü kompleks sayıların modül özelliğinden

$$|f(b) - f(a)| = 0 \ \Rightarrow f(b) = f(a) \tag{5.80}$$

şeklinde olacaktır. O halde fonksiyonun sabit olması gerektiği sonucuna ulaşılmaktadır.

**Teorem 5.11. (Darboux Teoremi)** $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı $D$ bölgesine tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. $D$ bölgesinde bulunan her $C$ eğrisi üzerinde alınan çizgisel integral eğer

$$|f(z)| \leq M \tag{5.81}$$

eşitsizliğini gerçekler.

*İspat:* Aşağıdaki

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,|dz| = \int_C |f(z)||dz| \leq \int_C M|dz| = M\int_C |dz| \tag{5.82}$$

$$= M\int_C |dx + idy| = M\int_C \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = M\int_C \sqrt{(dx)^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

$$= M\int_C \sqrt{(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = ML \ \Rightarrow \left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML$$

ifade elde edilmektedir.

## 5.5. WEİSTRASS M-TESTİ

Bu bölümde Weistrass M-testi uygulaması ile serilerin düzgün şekilde yakınsayıp yakınsamadığını bulmak adına uygulanıp kullanılan teorem incelenmektedir.

**Teorem 5.12.** $g_n$, $A \subset \mathbb{C}$ cümlesindeki fonksiyonların bir dizisi olsun ve $M_n \geq 0$ reel sabitlerin bir dizisi alınsın.

i. Tüm $z \in A$ değerleri için $|g_n(z)| \leq M_n$ ve,

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak

olacak şekilde iki koşul gerçekleşiyorsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) \tag{5.83}$$

serisi mutlak ve düzgün olarak $A$ cümlesine yakınsar.

*Örnek:* $g(z)$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \tag{5.84}$$

serisini alalım. $\forall\ 0 \leq r < 1$ için bu serinin $A_r = \{z \text{ I } |z| \leq r\}$ üzerine yakınsak olduğunu gösterelim.

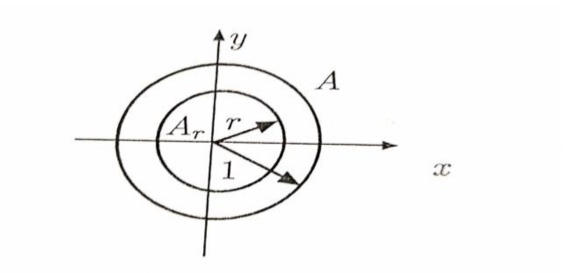
Burada $g_n(z) = \frac{z^n}{n}$ şeklinde alalım.$|z| \leq r$ olacağı için

$$|g_n(z)| = \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{r^n}{n} \tag{5.85}$$

elde edilir. Böylelikle $M_n = \frac{r^n}{n}$ olsun. $r\,, 0 \leq r < 1$ olduğuna göre, $\frac{r^n}{n} \leq r^n$ elde edilmektedir. Bu kısımda karşılaştırma testine uygun olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \tag{5.86}$$

serisi yakınsaktır. Böylelikle $\sum M_n$ serisi de yakınsak olacaktır. Buna göre Weistrass M-testi teoremine göre verilen $A_r$'nin elemanı olacağından seri $A = \{\, z \text{ I } |z| < 1 \,\}$ ifadesi noktasal yakınsaktır. Aşağıda belirtilen şekle göre




.

Şekil 5.2.Weistrass M-testi.

burada seri $A$ bölgesinin tamamına düzgün yakınsak değildir. Gerçekten alınan seri $A$ bölgesinin tamamında düzgün yakınsak olmuş olsaydı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{5.87}$$

serisi $[0,1)$ aralığında düzgün yakınsaktır şeklinde kabul edelim. Yani $[0,1)$ aralığında düzgün yakınsak olsun. Böylelikle düzgün yakınsaklık tanımından $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq N$ ele alındığında, tüm $x \in [0,1)$ ve $p = 0,1,2, \ldots$ değerleri için

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{x^{n+p}}{n+p} < \varepsilon \tag{5.88}$$

olmaktadır. Oysa ki

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots \tag{5.89}$$

serisi sonsuza ıraksaktır. Bu serinin parçalı toplamları sonsuza gitmektedir. Böylece $p$ sayısını

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+p} > 2\varepsilon \tag{5.90}$$

olacak şekilde seçelim. İkinci adımda, $x$ sayısını 1 sayısına olabildiğince yakın alalım ki

$$x^{n+p} > \frac{1}{2} \tag{5.91}$$

dir. Bu halde

$$\frac{x^N}{N} + \frac{x^{N+1}}{N+1} + \cdots + \frac{x^{N+p}}{N+p} > x^{N+p}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+p}\right) > \varepsilon \tag{5.92}$$

elde edilmektedir.

Böylelikle yukarıdaki

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{x^{n+p}}{n+p} < \varepsilon \tag{5.93}$$

ifadesi ile çelişmektedir. Bu halde $A$ bölgesini tamamına düzgün yakınsamayacaktır.

$g(z)$ fonksiyonu her $z$ noktası üzerinde sürekli olacağı için $A$ cümlesi üzerinde süreklidir. Her bir $z$ noktası, bazı $A_r$ cümlesinde olduğundan bu cümle içerisinde her zaman düzgün yakınsaklık bulunmaktadır.

## 5.6. ROUCHE TEOREMİ

**Teorem 5.13.** $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları basit bağlantılı $C$ eğrisi üzerinde ve onun kapattığı basit bağlantılı $D$ bölgesinde tanımlanmış analitik fonksiyonlar olsun. $C$ eğrisi üzerindeki her noktada $|g(z)| < |f(z)|$ eşitsizliği gerçekleniyorsa $D$ bölgesinde $(f(z) + g(z))$ fonksiyonu ile $f(z)$ fonksiyonunun aynı sayıda sıfır yeri mevcuttur.

*İspat:* $f(z) + g(z)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı $N_1$ ve $f(z)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı da $N_2$ olsun. Bu halde

$$F(z) = \frac{g(z)}{f(z)} \Leftrightarrow g(z) = f(z)F(z) \tag{5.94}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $f(z) + g(z)$ ve $f(z)$ fonksiyonlarının $C$ eğrisi üzerinde ve bunun kapattığı $D$ bölgesinde kutup noktası bulunmadığından Argüman Presibi'nden

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(f(z)+g(z))'}{f(z)+g(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz \tag{5.95}$$

ve

$$N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz \tag{5.96}$$

eşitlikleri yazılabilir. Denklem 5.95 ve Denklem 5.96 eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz - \frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz \tag{5.97}$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan

$$g(z) = f(z)F(z) \Longrightarrow g'(z) = f'(z)F(z) + f(z)F'(z) \tag{5.98}$$

ifadesi Denklem 5.97 eşitliğinde kullanılacak olursa

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+f'(z)F(z)+f(z)F'(z)}{f(z)+f(z)F(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz \tag{5.99}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)[1+F(z)]+f(z)F'(z)}{f(z)[1+F(z)]}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{f'(z)[1+F(z)]}{f(z)[1+F(z)]} + \frac{f(z)F'(z)}{f(z)[1+F(z)]}\right]dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{F'(z)}{[1+F(z)]}\right] dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F'(z)}{1+F(z)} dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F'(z)}{1+F(z)} dz$$

$$\Longrightarrow N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F'(z)}{1+F(z)} dz$$

eşitliğini elde ederiz. Öte yandan teoremin hipotezinden $C$ eğrisi üzerinde

$$|g(z)| < |f(z)| \tag{5.100}$$

eşitsizliğinin daima gerçek olduğu düşünülürse

$$|g(z)| < |f(z)| \;\Longrightarrow\; \frac{|g(z)|}{|f(z)|} = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \tag{5.101}$$

dir.

$$F(z) = \frac{g(z)}{f(z)} \;\Longrightarrow\; |F(z)| = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \tag{5.102}$$

$$\Longrightarrow |F(z)| < 1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu halde

$$\frac{1}{1+F(z)} \tag{5.103}$$

fonksiyonunu geometrik seriye açabiliriz.

Bu durumda

$$\frac{1}{1+F(z)} = 1 + F(z) + (F(z))^2 + (F(z))^3 + \cdots \tag{5.104}$$

şeklinde bir seri elde edilir. Bu seri Denklem 5.99 eşitliğinde kullanılırsa

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F'(z)}{1+F(z)} dz \tag{5.105}$$

$$==\frac{1}{2\pi i}\int_C F'(z)[1+F(z)+(F(z))^2+(F(z))^3+\cdots]\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C F'(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_C F'(z)F(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_C F'(z)\big(F(z)\big)^2dz+\cdots$$

eşitliği elde edilir. Denklem 5.105 eşitliğinin sağ tarafındaki toplamlarda yer alan integrallerin hepsi $F'(z), F'(z)F(z), F'(z)\big(F(z)\big)^2, \ldots$ fonksiyonları, $C$ eğrisi ve onun kapattığı $D$ bölgesinde analitik olduğundan Cauchy Teoremi'ne göre sıfıra eşittir ve

$$N_1-N_2=0 \iff N_1=N_2 \tag{5.106}$$

sonucu elde edilir.

**Teorem 5.14.** Eğer $f\in S$ , $0\le R\le 1$ ve $|z|<1$ ise her bir $z\in D$ için

$$\frac{1-R}{(1+R)^3}\le |f'(z)|\le \frac{1+R}{(1-R)^3} \tag{5.107}$$

ve

$$\frac{R}{(1+R)^2}\le |f(z)|\le \frac{R}{(1-R)^2} \tag{5.108}$$

eşitsizlikleri mevcuttur.

*İspat:* $0<U<1$ olmak üzere $D$ de

$$\varphi(z)=f\left(\frac{z+u}{1+z\bar{u}}\right) \tag{5.109}$$

fonksiyonu univalenttir.

Görelim:

$z_1, z_2\in D$ olmak üzere eğer $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$ ise $z_1 = z_2$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\varphi(z_1)=\varphi(z_2) \implies f\left(\frac{z_1+u}{1+z_1\bar{u}}\right)=f\left(\frac{z_2+u}{1+z_2\bar{u}}\right) \quad ; \quad f\in S \tag{5.110}$$

$$\implies \frac{z_1+u}{1+z_1\bar{u}}=\frac{z_2+u}{1+z_2\bar{u}}$$

$$\implies (z_1+u)(1+z_2\bar{u})=(z_2+u)(1+z_1\bar{u})$$

$$\implies z_1+z_1z_2\bar{u}+u+z_2u\bar{u}=z_2+z_1z_2\bar{u}+u+z_1u\bar{u}$$

$$\implies z_1-z_2+z_2u\bar{u}-z_1u\bar{u}=0$$

$$\Longrightarrow (z_1 - z_2) + u\bar{u}(z_2 - z_1) = 0$$

$$\Longrightarrow (z_1 - z_2)[1 - u\bar{u}] = 0$$

$$\Longrightarrow z_1 - z_2 = 0 \Longrightarrow z_1 = z_2$$

dir. Yani $\varphi(z)$ fonksiyonu univalenttir.

Disk otomorfizminden $\varphi(z) \in S$ ve $|u| < 1$ olmak üzere

$$F(z) = \frac{\varphi(z) - f(u)}{f'(u)(1 - |u|^2)} \tag{5.111}$$

yazılır ki bu fonksiyon univalenttir yani $F(z) \in S$ dir.

$$z = 0 \Longrightarrow F(0) = \frac{\varphi(0) - f(u)}{f'(u)(1 - |u|^2)} \tag{5.112}$$

$$= \frac{f(u) - f(u)}{f'(u)(1 - |u|^2)}$$

$$= \frac{0}{f'(u)(1 - |u|^2)}$$

$$F(0) = 0$$

buradan yola çıkılarak $F'(z) = ?, F'(0) = ?$ ifadelerini bulmamız gerekmektedir.

$$F(z) = \frac{\varphi(z) - f(u)}{f'(u)(1 - |u|^2)} \tag{5.113}$$

$$\Longrightarrow F'(z) = \frac{\varphi'(z) - 0}{f'(u)(1 - |u|^2)}$$

$$= \frac{\varphi'(z)}{f'(u)(1 - |u|^2)}$$

$\varphi'(0)$ ifadesinin değerini bulmak için $\varphi(z)'$ nin türevini alalım.

$$\varphi(z) = f\left(\frac{z + u}{1 + z\bar{u}}\right) \tag{5.114}$$

$$\varphi'(z) = \frac{1(1 + z\bar{u}) - (z + u).\bar{u}}{(1 + z\bar{u})^2} f'\left(\frac{z + u}{1 + z\bar{u}}\right)$$

$$= \frac{1 + z\bar{u} - z\bar{u} - u\bar{u}}{(1 + z\bar{u})^2} f'\left(\frac{z + u}{1 + z\bar{u}}\right)$$

$$= \frac{1-u\bar{u}}{(1+z\bar{u})^2} f'\left(\frac{z+u}{1+z\bar{u}}\right)$$

elde edilen $\varphi'(z)$ ifadesinde $z = 0$ alınarak $\varphi'(0)$ ifadesini elde edelim.

$$\varphi'(0) = \frac{1-u\bar{u}}{(1+0)^2} f'\left(\frac{0+u}{1+0}\right) \tag{5.115}$$

$$\varphi'(0) = (1-u\bar{u})f'(u)$$

$$\varphi'(0) = (1-|u|^2)f'(u)$$

elde edilen $\varphi'(0)$ ifadesini $F'(0)$ ifadesinde yerine yazalım.

$$F'(0) = \frac{\varphi'(0)}{f'(u)(1-|u|^2)} \tag{5.116}$$

$$= \frac{f'(u)(1-|u|^2)}{f'(u)(1-|u|^2)}$$

$$\Rightarrow F'(0) = 1$$

elde edilmektedir.

$F(0) = 0 \; ve \; F'(0) = 1$ olduğundan $F(z) \in A$ sınıfıdır. $F(z) \in A$ hemde $F(z) \in S$ olduğundan bir taylor açılımına sahiptir.

Yani

$$F(z) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}z + \frac{F''(0)}{2!}z^2 + \cdots \tag{5.117}$$

$$= 0 + \frac{F'(0)}{1!}z + \frac{F''(0)}{2!}z^2 + \cdots$$

dir. Bieberbach eşitsizliğine göre $|a_2| \leq 2$ olmamalıdır. Önce $a_2$ yi bulalım:

$$a_2 = \frac{F''(0)}{2!} \tag{5.118}$$

$$F(z) = \frac{\varphi(z) - f(u)}{f'(u)(1-|u|^2)} \;\Rightarrow\; F'(z) = \frac{\varphi'(z)}{f'(u)(1-|u|^2)} \tag{5.119}$$

$$\Rightarrow F''(z) = \frac{\varphi''(z)}{f'(u)(1-|u|^2)}$$

$$\Rightarrow F''(0) = \frac{\varphi''(0)}{f'(u)(1-|u|^2)}$$

buradan öncelikle $\varphi''(0)$ değerinin bulunması zorunludur.

Daha önce

$$\varphi'(z) = \frac{1-u\bar{u}}{(1-z\bar{u})^2}.f'\left(\frac{z+u}{1+z\bar{u}}\right) \tag{5.120}$$

ifadesinin tekrardan türevini alalım:

$$\varphi''(z) = \frac{1-u\bar{u}}{(1-z\bar{u})^2}.\frac{1-u\bar{u}}{(1-z\bar{u})^2}.f''\left(\frac{z+u}{1+z\bar{u}}\right) \tag{5.121}$$

$$\Rightarrow \varphi''(z) = \frac{(1-|u|^2)^2}{(1-z\bar{u})^4}f''\left(\frac{z+u}{1+z\bar{u}}\right)$$

elde edilir. Şimdi $z = 0$ alalım:

$$\varphi''(0) = \frac{(1-|u|^2)^2}{(1-0)^4}f''\left(\frac{0+u}{1+0}\right) \tag{5.122}$$

$$\Rightarrow \frac{(1-|u|^2)^2}{1^4}f''\left(\frac{u}{1}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi''(0) = (1-|u|^2)^2 f''(u)$$

elde edilen bu değer Denklem 5.14. ifadesinde yerine yazılırsa

$$F''(0) = \frac{(1-|u|^2)^2 f''(u)}{(1-|u|^2)f'(u)} \tag{5.123}$$

$$= \frac{(1-|u|^2)f''(u)}{f'(u)}$$

elde edilmektedir. O halde

$$a_2 = \frac{F''(0)}{2!} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(u)(1-|u|^2)}{f'(u)} - 2\bar{u}\right| \leq 2 \tag{5.124}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f''(u)(1-|u|^2)}{f'(u)} - 2\bar{u}\right| \leq 4$$

ifadenin bu kısımda u yerine z alınırsa

$$\left|\frac{f''(z)(1-|u|^2)}{f'(z)} - 2\bar{u}\right| \leq 4 \tag{5.125}$$

olur. Bu son eşitsizliğin her iki tarafı

$$\frac{|z|}{1-|z|^2} \quad \text{yani} \quad \frac{R}{1-R^2} \tag{5.126}$$

ile çarpılırsa

$$\frac{R}{1-R^2}\left|\frac{f''(z)(1-R^2)}{f'(z)}-2\bar{u}\right| \leq \frac{4R}{1-R^2} \tag{5.127}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{R}{1-R^2}.\frac{f''(z)(1-R^2)}{f'(z)}-\frac{2\bar{u}R}{1-R^2}\right| \leq \frac{4R}{1-R^2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{Rf''(z)}{f'(z)}-\frac{2R^2}{1-R^2}\right| \leq \frac{4R}{1-R^2}$$

şekline dönüşür. Her iki tarafın reel kısmını düşünürsek

$$z_1 \leq z_2 \;\; \Rightarrow \;\; R_1(z_1) \leq R_2(z_2) \tag{5.128}$$

$$Re\left\{\left|\frac{Rf''(z)}{f'(z)}-\frac{2R^2}{1-R^2}\right|\right\} \leq Re\left(\frac{4R}{1-R^2}\right) \tag{5.129}$$

$$\Rightarrow \left|Re\left(\frac{Rf''(z)}{f'(z)}\right)-Re\left(\frac{2R^2}{1-R^2}\right)\right| \leq Re\left(\frac{4R}{1-R^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left|Re\left(\frac{Rf''(z)}{f'(z)}\right)-\frac{2R^2}{1-R^2}\right| \leq \frac{4R}{1-R^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{4R}{1-R^2} \leq Re\left(\frac{Rf''(z)}{f'(z)}\right)-\frac{2R^2}{1-R^2} \leq \frac{4R}{1-R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2R^2-4R}{1-R^2} \leq R.Re\left(\frac{Rf''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2R^2+4R}{1-R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2R^2-4}{1-R^2} \leq Re\left(\frac{Rf''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2R^2-4}{1-R^2}$$

elde edilmektedir. Eğer $z = Re^{i\theta}$ olarak alınırsa

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{5.130}$$

olur. Bu durumda

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial R}+\frac{\partial v}{\partial R} \;\Rightarrow\; f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial R^2} \tag{5.131}$$

olur.

Buna göre:

$$\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial R^2} + i\dfrac{\partial^2 v}{\partial R^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial R} + i\dfrac{\partial v}{\partial R}} \tag{5.132}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial R} - i\frac{\partial v}{\partial R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial R^2} + i\dfrac{\partial^2 v}{\partial R^2}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial R} - i\dfrac{\partial v}{\partial R}\right)}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial R}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial R^2}.\dfrac{\partial u}{\partial R} - i\dfrac{\partial^2 u}{\partial R^2}\dfrac{\partial v}{\partial R} + i\dfrac{\partial^2 v}{\partial R^2}\dfrac{\partial u}{\partial R} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial R^2}\dfrac{\partial v}{\partial R}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial R}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial R^2}\dfrac{\partial u}{\partial R} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial R^2}\dfrac{\partial v}{\partial R}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial R}\right)^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial R}\ln\left(\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial R}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial v}{\partial R} \quad idi. \quad \Rightarrow \quad |f'(z)| = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial R}\right)^2\right)} \tag{5.133}$$

$$= \left(\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial R}\right)^2\right)^{1/2}$$

ifadesi elde edilmektedir. Buna göre:

$$Re\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = Re\left\{\frac{\partial}{\partial R}\ln\left[\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial R}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \tag{5.134}$$

$$= \frac{\partial}{\partial R}\ln\left[\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial R}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial R}\ln|f'(z)|$$

elde edilir. Bu değeri Denklem 5.129 nolu eşitsizlikte yerine yazarsak

$$\frac{2R-4}{1-R^2} \le \frac{\partial}{\partial R}\ln|f'(z)| \le \frac{2R+4}{1-R^2} \tag{5.135}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin her tarafının 0’ dan $R$’ye integralini alalım.

$$\int_0^R \frac{2R-4}{1-R^2}dR \le \int_0^R \frac{\partial}{\partial R}\ln|f'(z)|dR \le \int_0^R \frac{2R+4}{1-R^2}dR \tag{5.136}$$

$$\Rightarrow \ln(1-R) - 3\ln(1+R) \le \ln|f'(z)| \le \ln(1+R) - 3\ln(1-R)$$

$$\Rightarrow \ln\frac{1-R}{(1+R)^3} \le \ln|f'(z)| \le \ln\frac{1+R}{(1-R)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1-R}{(1+R)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+R}{(1-R)^3}$$

ifadesi bulunur. Bu eşitsizliğin

$$|f'(z)| \le \frac{1+R}{(1-R)^3} \tag{5.137}$$

kısmını kullanarak ikinci eşitsizliğin ikinci kısmını ispatlayabiliriz.

Bunun için $0 \le t \le R$ alalım. Bu durumda $\delta = 0$ dan $\delta = z = Re^{i\theta}$ ya kadar integral alalım:

$$|f(z)| = \left|\int_0^z f'(\delta)d\delta\right| \le \int_0^R |f'(\delta)|dt \tag{5.138}$$

$$\Rightarrow\le \int_0^R \frac{1+t}{(1-t)^3}dt =?$$

$$\Rightarrow \int_0^R \frac{1+t}{(1-t)^3}dt =?$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+t}{(1-t)^3}dt = \int \frac{2-u}{u^3}(-du)$$

$$\Rightarrow \int \frac{u-2}{u^3}du = \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u^3}\right)du$$

$$\Rightarrow \int (u^{-2} - 2u^{-3}du) = \frac{u^{-1}}{-1} - 2.\frac{u^{-2}}{-2} + c$$

$$= -\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + c$$

$$\int_0^R \frac{1+t}{(1-t)^3}dt = -\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2}\Big|_0^R \tag{5.139}$$

$$= -\frac{1}{1-R} + \frac{1}{(1-R)^2} - [-1+1]$$

$$= \frac{-1+R+1}{(1-R)^2} = \frac{R}{(1-R)^2}$$

Birinci taraf yani

$$|f(z)| \leq \frac{R}{(1-R)^2} \tag{5.140}$$

ispatlandı. Şimdi de

$$\frac{R}{(1+R)^2} \leq |f(z)| \tag{5.141}$$

olduğunu gösterelim. Koebe dörtte bir teoremine göre her bir $f(z) \in S$ için

$$|f(z)| < {}^1\!/_4 \tag{5.142}$$

tür. Buna göre, $0 \leq R < 1$ iken

$$\frac{R}{(1+R)^2} \leq \frac{1}{4} \tag{5.143}$$

olur. Bu durumda $w = f(z)$ noktasını orijine birleştiren $\gamma$ doğru parçası $f(D)$de olur. Bu doğru parçasının görüntüsü $C$ olarak alalım. Bu duruma da $C$, 0'dan $z$ ye bir basit yaydır ve

$$f(z) = \int_C f'(\gamma)d\gamma \tag{5.144.}$$

dır. Bu duruma da bir önceki teoremden

$$|f(z)| = \int_C |f'(\gamma)d\gamma| \geq \int_0^R \frac{1-t}{(1+t)^3}dt \tag{5.145}$$

olur.

*Örnek:* $\int_0^R \frac{1-t}{(1+t)^3}dt$ integralini hesaplayalım.

$$\int \frac{1-t}{(1+t)^3}dt = ? \tag{5.146}$$

$$\Longrightarrow 1+u=u \;\;\Longrightarrow\;\; dt=du$$

$$\Longrightarrow 1-u=-t \quad\Longrightarrow\;\; 2-u=1-t$$

$$\Longrightarrow \int \frac{2-u}{u^3}dt = \int (2u^{-3}-u^{-2})du$$

$$=2.\frac{u^{-2}}{-2}-\frac{u^{-1}}{-1}+c= -u^{-2}+u^{-1}+c$$

$$=\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}+c= \frac{1+t-1}{(1+t)^2}+c$$

$$=\frac{t}{(1+t)^2}+c$$

$$\int_0^R \frac{1-t}{(1+t)^3}dt = \frac{t}{(1+t)^2}\Big|_0^R = \frac{R}{(1+t)^2} \tag{5.147}$$

olur. Yani

$$|f(z)| \geq \frac{R}{(1+R)^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{R}{(1+R)^2} \leq |f(z)| \tag{5.148}$$

Denklem 5.140 ve Denklem 5.148 den

$$\frac{R}{(1+R)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{R}{(1-R)^2} \tag{5.149}$$

elde edilir.

# 6. ÖZEL TANIMLI FONKSİYON VE TEOREMLER

## 6.1. MERAMORFİK FONKSİYONLARA AİT ÜNİVALENT FONKSİYON OLAN YENİ BİR FONKSİYON SINIFI ELDE EDİLMESİ

**Tanım 6.1.** Birim disk $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z|\}$ içerisinde $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ normalize edilmiş olan analitik $f(z)$ fonksiyonların sınıfını $A$ alalım. Bu durumda $f(z) \in A$ fonksiyonu

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n \tag{6.1}$$

olarak yazılır. $D$ de univalent olan $f(z)$ fonksiyonlarının oluşturduğu $A$ sınıfının ait sınıfını $S$ olarak alalım [6].

$$F(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots \tag{6.2}$$

$$\Rightarrow F^* = F(z) - b_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots$$

fonksiyonu $D$ de analitik ve univalenttir.

Bu fonksiyonların sınıfı $P$ ile gösterilir ve $F^*(0) = \infty$ olarak tanımlanır.

$D^* = \{z \,\epsilon\, \mathbb{C} \,:\, |z| > 1\}$ de univalent ve meramorf olan fonksiyonların sınıfı $\sum$ ile gösterilir ve

$$G(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots \tag{6.3}$$

serisi ile tanımlanır.

**Tanım 6.2.** $\frac{2w_2}{2w_1}$ oranı reel olmamak üzere $2w_1\,, 2w_2$ periyotlarına sahip $f(z)$ fonksiyonunu alalım. Eğer, m ve n (bu bildiride a yazılmış) tamsayılar olmak üzere $f(z)$ nin her bir periyodu $m_2 w_1 + n_2 w_2$ formundaysa $(2w_1, 2w_2)$ çifti bir temel çift olarak adlandırılır [9].

Her temel periyot çifti $2w_1, 2w_2$ düzlemin bir yönünü oluşturan paralelkenar ağını belirler. $m$ ve $n$ tamsayılar olmak üzere $L_{mn} = m_2 w_1 + n_2 w_2$ alalım.

**Lemma 6.3.** Bu ifade de

$$\sum_m \sum_n{}' = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \tag{6.4}$$

olmak üzere $k > 2$ için

$$\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m2w_1 + n2w_2)p} \tag{6.5}$$

çift serisi mutlak yakınsaktır.

*İspat:* Öncelikli olarak

$$\frac{1}{(m2w_1 + n2w_2)p} \tag{6.6}$$

terimlerinin toplamını $T_k$ olarak alalım. Burada $-k \leq m \leq k$ olması demek, $\mp k2w_1 \mp k2w_2$ köşeleri ile birlikte noktaların paralelkenarın çevresi üzerindedir. Şimdi

$$T_k \leq \sum_k \frac{1}{|(m2w_1 + n2w_2)|} \leq 8k.\frac{1}{(kq)^p} \tag{6.7}$$

$q$ , $|2w_1|$ ve $|2w_2|$ nin en küçüğü olursa

$$\frac{8}{q^p}.\frac{1}{k^{p-1}} \tag{6.8}$$

ifadesi elde edilir.Dolayısıyla karşılaştırma testine göre eğer $p - 1 > 1$ $ve\, p > 2$ ise $\sum T_k$ mutlak yakınsaktır.

$$T_{m,n} = \sum_{\substack{u\leq m \\ v\leq n}} \frac{1}{|u2w_1 + v2w_2|^p} \tag{6.9}$$

alalım.

Bu durumda $T_{m,n} \leq \sum_1^R T_k{}^*$ dır. Burada $T_k{}^*$ toplamı, $k$ değeri $m$ ve $n$ den büyük olmak üzere, $T_k{}^*$ terimlerinin mutlak değerlerinin ilave edilmesiyle elde edilir. Böylece verilen seri eğer $p > 2$ ise mutlak yakınsaktır [10].

Weierstrass'ın $\wp(z)$ eliptik fonksiyonu $(2w_1 , 2w_2)$ periyotları ile birlikte aşağıdaki bağıntıyı tanımlar.

$$\sigma(z) = z. \prod_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\left(1 - \frac{z}{L_{mn}}\right) exp\left(\frac{z}{L_{mn}} + \frac{z^2}{2.L^2{}_{mn}}\right)\right] \tag{6.10}$$

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz} ln\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{z - L_{mn}} + \frac{1}{L_{mn}} + \frac{z}{L_{mn}}\right] \tag{6.11}$$

$$\wp(z) = \frac{d}{dz}\,\zeta(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z - L_{mn})} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right] \tag{6.12}$$

elde edilmektedir. Burada

$$\prod_{m,n} = \prod_{m}\prod_{n}{}' \quad \text{ve} \quad \sum = \sum_{m}\sum_{n}{}' \tag{6.13}$$

dir.

**Tanım 6.4.** $\wp(z)$ Weierstrass fonksiyonu

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z - L_{mn})} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right] \tag{6.14}$$

çift seriye tanımlanır [10].

Eliptik fonksiyonların Weierstrass teorisini geliştirmek için $\wp(z)$ Weierstrass fonksiyonunu veya daha açık alarak $\wp\,(z\,;\,w_1\,,\,w_2)$ yi düşünmeliyiz. $\wp(z)$ için yakınsaklık sağlanmak üzere $L_{mn}$ de ikinci dereceden meramorfik olmak üzere $\wp(z)$ düzgün olduğu açıktır. $\wp\,(z)$ nın $-2$ dereceden homojen olduğuna dikkat edelim yani

$$\wp(\tau z\,;\,\tau w_1\,,\tau w_2) = \tau^{-2}\,\wp\,(z\,;\,w_1\,;\,w_2) \tag{6.15}$$

**Teorem 6.5.** $\wp(z)$ nın serisi her bir $z$ için $L_{mn}$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır [10].

*İspat:*

$$\left|\frac{1}{(z - L_{mn})^2} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right| = \left|\frac{2.z.L_{mn} - z^2}{L^2{}_{mn}(z - L_{mn})^2}\right| \tag{6.16}$$

$$\leq \frac{[2.|L_{mn}| + |z|].|z|}{|L_{mn}|^2.\left|1 - \left(\frac{z}{L_{mn}}\right)\right|^2}$$

$$< \frac{[3.\ |L_{mn}| + |z|].\ |z|}{|L_{mn}|^2.\left|1 - \left(\frac{z}{L_{mn}}\right)\right|^2} \quad , \ \text{eğer}\ |L_{mn}| \geq |z|$$

$$\leq \frac{12}{|L_{mn}|^3}\,.|z| \quad \text{eğer} \quad |L_{mn}| \geq 2.|z|$$

Dolayısıyla, $|L_{mn}| \geq 2.|z|$ için seri mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu þ $(z)$ için dizinin bütün $z$ ler ve diğer yandan $L_{mn}$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır.

**Teorem 6.6.** $\gamma(z)$ fonksiyonu bir çift fonksiyon yani $þ(z) = þ(-z)$ dir [3].

*İspat:* Burada

$$þ(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z-L_{mn})^2} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right] + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z-L^*{}_{mn})^2} - \frac{1}{L^*{}_{mn}}\right] \quad (6.17)$$

$m$ bir pozitif tamsayı ve $n$ herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$L_{mn} = m2w_1 + n2w_2 \quad (6.18)$$

ve $L^*{}_{mn} = -m2w_1 - n2w_2$ , eş zamanlı olarak $m = 0$ , $n = 0$ olmamak üzere $\sum_{(m,n)}$ toplamı bütün pozitif tamsayıların herhangi bir $n$ tam sayısını kapsar.

**Teorem 6.7.** $2w_1 + 2w_2$ periyodu ile birlikte $þ(z)$ fonksiyonu bir çift periyodik fonksiyondur. [11]

*İspat:* İlk olarak

$$þ(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}\left[\frac{1}{(z-L_{mn})^2} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right] \quad (6.19)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-2w_1)^2} - \frac{1}{(2w_1)^2} + \sum_{m,n}\left[\frac{1}{(z-L_{mn})^2} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right]$$

Burada $m = 0$ , $n = 0$ ve $m = 1$ , $n = 0$ hariç bütün m,n ler için $\sum$ bir toplamdır.

$$þ\,(z + zw_1) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+2w_1)^2} - \frac{1}{(2w_1)^2} + \sum_{m,n}\left[\frac{1}{(z+2w_1-L_{mn})^2} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right] \quad (6.20)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}\left[\frac{1}{(z-L_{mn})^2} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right] = þ(z)$$

Benzer olarak

$$þ(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}\left[\frac{1}{(z-L_{mn})^2} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right] \quad (6.21)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-2w_2)^2} - \frac{1}{(2w_1)^2} + \sum_{m,n}\left[\frac{1}{(z-L_{mn})^2} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right]$$

Burada $m = 0\,, n = 0$ ve $m = 1\,, n = 0$ hariç bütün $m, n$ ler için $\sum$ bir toplamdır.

$$þ\,(z + zw_2) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+2w_2)^2} - \frac{1}{(2w_2)^2} + \sum_{m,n}\left[\frac{1}{(z+2w_2-L_{mn})^2} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right] \qquad (6.22)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}\left[\frac{1}{(z-L_{mn})^2} - \frac{1}{L^2{}_{mn}}\right] = þ(z)$$

# 7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde $z = 0$ ın komşuluğunda

$$A_{2p} = (2p+1) \sum_{(m,n)\neq(0,0)} L_{mn}^{-(2p+2)} \tag{7.1}$$

olmak üzere $\wp(z)$ fonksiyonu bir

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{p} A_{2p} \, . \, z^{2p} \tag{7.2}$$

kuvvet serisine açılabileceğini gösterelim. n tamsayılar ve $^{w_1}/_{w_2}$ oranı bir reel sayı olmak üzere $w_1$ ve $w_2$ kompleks sayıları için Weistrass'ın $\wp(z)$ fonksiyonu tanımı gereğince

$$L_{mn} = 2mw_1 + 2nw_2 \tag{7.3}$$

dir. Bu durumda $|2w|$ normu, $|2w_1|$ ve $|2w_2|$ den küçüktür. Öte yandan $m$ ve $n$ ikisi birden sıfır olamayacağından $\wp(z)$ fonksiyonu bir kutup noktası olan $L_{mn}$ noktaları dışında mutlak ve düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla bir kuvvet serisine açılabilir.

Bu durumda

$$\sum_{m,n} \left[ \frac{1}{(z - L_{mn})^2} - \frac{1}{{L_{mn}}^2} \right] \tag{7.4}$$

$$= \sum_{m,n} \left[ \frac{1}{L^2{}_{mn} \left(1 - \frac{z}{L_{mn}}\right)^2} - \frac{1}{L_{mn}^2} \right]$$

dır. Burada

$$\left(1 - \frac{z}{L_{mn}}\right)^2 \tag{7.5}$$

ifadesini

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 \tag{7.6}$$

kullanarak elde edilmektedir. Yani $\left(1 - \frac{z}{L_{mn}}\right)^2$ ifadesinin açılımı sağlanır ve denklemde yerine yazılırsa

$$= \sum_{m,n} \left( \frac{1}{L_{mn}^2} \left( 1 + \frac{z}{L_{mn}} + \left( \frac{z}{L_{mn}} \right)^2 + \cdots \right) - \frac{1}{L_{mn}^2} \right) \tag{7.7}$$

$$= \sum_{m,n} \left( \frac{1}{L_{mn}^2} \left( \frac{z}{L_{mn}} + \left( \frac{z}{L_{mn}} \right)^2 + \cdots \right) \right)$$

$$= \sum_{m,n} \left( \sum_{p} (p+1) \frac{z^p}{L_{mn}^{p+2}} \right)$$

$$= \sum_{p} \left[ (p+1) \sum_{m,n} \frac{1}{L_{mn}^{p+2}} \right] z^p$$

elde edilir. Burada

$$A_k = (p+1) \sum_{m,n} L_{mn}^{1/p+2} \tag{7.8}$$

alınırsa

$$A_k = \sum_{p} A_k z^k \tag{7.9}$$

olur. Ayrıca $A_k$, $\text{þ}(z)$ nin integral değeri toplamı için $A_p = 0$ olacak şekilde herhangi bir fonksiyondur. $\text{þ}(z)$ fonksiyonu iki katlı kutup noktasındaki $z = L_{mn}$ temel periyot çiftlerine göre bir meramorfik fonksiyon olup ve

$$\left( \sum_{m,n} \left( \frac{1}{(z - L_{mn})^2} - \frac{1}{L_{mn}^2} \right) \right) \tag{7.10}$$

$z = L_{mn}$ iki katlı kutup noktası bulunmaktadır. Böylece

$$\text{þ}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{p=1}^{\infty} A_p z^{2p} \tag{7.11}$$

fonksiyonu bir geometrik fonksiyon olarak düşünülebilir.

Bu durumda

$$z^2 = u \quad \text{ve } |A_2| = 1 \tag{7.12}$$

olmak üzere

$$þ(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{p=1}^{\infty} A_p z^{2p} \tag{7.14}$$

$$= \frac{1}{z^2} + A_2 z^2 + \sum_{p=2}^{\infty} A_{2p} z^{2p}$$

fonksiyonunun birim çemberin dışında yer alması gerekmektedir. Birim çemberin dışına aktarımını sağlamak adına S sınıfına ait olan fonksiyonu P sınıfına ait olması gerekmektedir. Birim çemberin dışında yer alan, laurent serisine açılmış hali hem analitik hem de ünivalent olan fonksiyonlara P sınıfına ait fonksiyonlar olarak tanımlanmaktadır.

$þ(z)$ fonksiyonuna ait elde edilen son eşitsizlikten $-\frac{1}{z^2}$ ifadesi çıkartılırsa

$$\beta(z) = þ(z) - \frac{1}{z^2} \tag{7.15}$$

$$\Rightarrow \beta(z) = \left( \frac{1}{z^2} + A_2 z^2 + \sum_{p=2}^{\infty} A_{2p} z^{2p} \right) - \left( \frac{1}{z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \beta(z) = A_2 z^2 + \sum_{p=2}^{\infty} A_{2p} z^{2p}$$

$\beta(z)$ elde edilmektedir. Bulunan $\beta(z)$ denklemi birim çemberin dışında ve $P$ sınıfına ait olmaktadır. Bulunan $\beta(z)$ fonksiyonuna $z^2 = u$ ve $|A_2| = 1$ kabulleri uygulanırsa

$$\beta(u) = u + \sum_{p=2}^{\infty} A_{2p}.u^{2p} \tag{7.16}$$

ifadesi elde edilmektedir. Bu ifade artık bire bir olan geometrik fonksiyondur ve normalleştirme şartları yani

$$\beta(0) = 0 \quad , \qquad \beta'(0) = 1 \tag{7.17}$$

koşulları

$$\beta(u) = u + \sum_{p=2}^{\infty} A_{2p}.u^{2p} \tag{7.18}$$

elde edilen $\beta(u)$ denkleminde uygulanır ise

$$\beta(0) = 0 + \sum_{p=2}^{\infty} A_{2p}.0^{2p} = 0 \tag{7.19}$$

ve

$$\beta'(0) = 1 + \sum_{p=2}^{\infty} 0 = 1 \tag{7.20}$$

olur. Böylelikle

$$\beta(z) = z + \sum_{p=2}^{\infty} A_{2p}.u^{2p} \tag{7.21}$$

ifadesi elde edilmektedir. Bu fonksiyon birim diskin dışında yer almaktadır. Aynı zamanda $\beta(z)$ fonksiyonu analitik, ünivalent ve $\beta(0) = \beta'(0) - 1 = 0$ normalleştirme şartlarını sağlamaktadır. Böylelikle geometrik fonksiyonlara ait yeni bir fonksiyon sınıfı elde edilerek ispat tamamlanmıştır. Elde edilen fonksiyonların sınıfı “г” kümesiyle tanımlanmaktadır.

# 8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Weistrass fonksiyonlarına ait Weistrass pe fonksiyonunun geometrik fonksiyonlarda meramorf fonksiyondur. Böylelikle Weistrass $\wp(z)$ fonksiyonu kullanılmaktadır.

Bu çalışma ile geometrik fonksiyonlara ait olan birim çemberin dışında yer alıp hem meramorfik hem de ünivalent koşulunu sağlayan yeni bir fonksiyon sınıfı elde edilmektedir. Bu ispat ile birlikte geometrik fonksiyonlar sınıfına ait yeni bir fonksiyon sınıfı kazandırılması amaçlanmaktadır. Elde edilen bu fonksiyonların sınıfı "г" kümesiyle tanımlanmaktadır.

# 9. KAYNAKLAR


[1] A. Baki, *Matematik Tarihi ve Felsefesi*, İstanbul, Türkiye: Pegem Yayıncılık, 2014.

[2] P. L. Duren, *Univalent Functions,New York,USA:Springer & Business Media*, 1983, ss. 31-34.

[3] P. S. S. Miller, "On some classes of first-order diferential subordinations," *Michingon Mathematic Journal*, c.32, ss. 185-195, 1985.

[4] A.Dernek, *Kompleks Analiz ve Uygulamaları*, Ankara, Türkiye: Nobel Akademi Yayıncılık, 2013, ss. 213-214.

[5] Z. Nehari., *Conformal Mapping*, Newyork, USA: Mc.Graw-Hill, 1952.

[6] N.Tuneski, “Some Results on Starlike and Convex Functions,” *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, c.1, s.1, ss. 293-298, 2007.

[7] P. Duren, “Coefficients of Univalents Functions,” *Bulletin of the American Mathematics Society*, c.83, s.5, ss. 891-911, 1977.

[8] Y. J. Leung, “Integral means of the derivate of some univalent functions,” *Bullettin of the London Mathematical Society*, c.11, s.3, ss. 289-294, 1979.

[9] S. Owa, “The order of close-to-Convexity for Certain Univalent Functions,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*,c. 138, s. 2, ss. 393-396, 1989.

[10] M.Dutta and L.Debnath, “Theory of Eliptic Functions,” *Elements of the theory of elliptic and associated funcitons with applications*, Kalküta, Hindistan The World Press Privative, 1965.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

| | |
|---|---|
| Adı Soyadı | : Ayşenur YILDIZ |
| Doğum Tarihi ve Yeri | : 05.11.1995 / Akçakoca |
| Yabancı Dili | : İngilizce |
| E-posta | : aysnrydz81@outlook.com |

## ÖĞRENİM DURUMU

| Derece | Alan | Okul/Üniversite | Mezuniyet Yılı |
|---|---|---|---|
| Y. Lisans | Matematik | Düzce Üniversitesi | 2020 |
| Lisans | Matematik | Düzce Üniversitesi | 2017 |
| Lise | | Akçakoca Barbaros Anadolu Lisesi (GL) | 2013 |