T.C.

NECMETTİN ERBAKAN NİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Genelleştirilmiş Hybrid Fibonacci $p-$Sayıları

HÜRİYE ALŞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2021
KONYA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ HYBRİD FİBONACCİ $p-$SAYILARI

Hüriye ALŞAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
2021, 37 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Kompleks, hiperbolik ve dual sayıları içeren değişmeli olmayan bir halka olan Hybrid sayılar kümesi Özdemir tarafından tanımlanmıştır. Hybrid sayılar ve özel sayı dizileri ile ilgili günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu tezde, ilk olarak Fibonacci ve Lucas $p-$ sayıları ile hybrid sayılar tanıtılmış ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları kullanarak tanımlanan hybrid sayıların özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayısı, Fibonacci $p-$ sayısı, Lucas $p-$ sayısı, Hybrid Sayılar.

ABSTRACT

MS THESIS

GENERALIZED HYBRID FIBONACCI $p-$NUMBERS

Hüriye ALŞAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
MATHEMATİC

Advisor: Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

2021, 37 Pages

Jury
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Hybrid numbers which are a non-commutative ring be containing complex, hyperbolic and dual numbers, are defined by Özdemir. Until this time, many studies have been done on hybrid numbers and special number sequences. In this thesis, we introduced hybrid numbers with Fibonacci and Lucas $p-$ numbers and investigated some properties. Afterwards, we consider hybrid numbers with generalized Fibonacci and Lucas $p-$ numbers and obtained some identities.

Keywords: Fibonacci number, Fibonacci $p-$ number, Lucas $p-$ number, Hybrid number.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

F_n	$n-$ inci Fibonacci Sayısı
L_n	$n-$ inci Lucas Sayısı
W_n	$n-$ inci Horadam Sayısı
$F_p(n)$	$n-$ inci Fibonacci $p-$ sayısı
$L_p(n)$	$n-$ inci Lucas $p-$ sayısı
$F_{p,m}(n)$	$n-$ inci genelleştirilmiş Fibonacci $p-$ sayısı
$L_{p,m}(n)$	$n-$ inci genelleştirilmiş Lucas $p-$ sayısı
K	Hybrid Sayılar Kümesi
HF_n	$n-$ inci Hybrid Fibonacci Sayısı
HL_n	$n-$ inci Hybrid Lucas Sayısı
$HF_p(n)$	$n-$ inci Hybrid Fibonacci $p-$ sayısı
$HL_p(n)$	$n-$ inci Hybrid Lucas $p-$ sayısı
$HF_{p,m}(n)$	$n-$ inci genelleştirilmiş Hybrid Fibonacci $p-$ sayısı
$HL_{p,m}(n)$	$n-$ inci genelleştirilmiş Hybrid Lucas $p-$ sayısı

1. GİRİŞ

Özel sayı dizileri günümüze kadar birçok araştırmacının ilgi odağı olmuştur. Özellikle Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ve genelleştirmeleri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmada, Stakhov tarafından tanımlanan Fibonacci ve Lucas sayılarının bir genelleştirmesi olan Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları göz önüne alınmıştır. Ayrıca, 2009 yılında Tuğlu, Koçer ve Stakhov tarafından tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları kullanılmıştır.

Kompleks, hiperbolik ve dual sayılar iki boyutlu sayı sistemleri olup birçok araştırmacı tarafından cebirsel, geometrik özellikleri incelenmiştir. Tüm bu sayıların bir genelleştirmesi, 2018 yılında Özdemir tarafından Hybrid sayılar olarak tanımlanmıştır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde, özel sayı dizileri ve hybrid sayılar ile ilgili yapılan çalışmalar ile ilgili kaynak araştırması verilmiştir.

Üçüncü bölümde, hybrid sayılar, Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları tanıtılarak sağladığı özellikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları ile tanımladığımız hybrid sayılar ve özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde, hybrid sayıları, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları ile tanımlayıp bazı özellikleri elde edilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen tüm sonuçların özel durumları elde edilebilir. Yani bu çalışma literatürdeki çalışmaların genel bir halidir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde özel sayı dizileri ile tanımlanmış olan hybrid sayılar ile ilgili çalışmaları inceleyeceğiz.

Horadam, bu makalesinde $W(a,b;p,q)$ ile gösterilen Horadam sayılarını $n \geq 2$ için

$$W_n(a,b;p,q) = pW_{n-1} + qW_{n-2} \quad ; W_0 = a, W_1 = b$$

rekürans bağıntısı ve başlangıç koşulları ile tanımlamıştır. Ayrıca Horadam sayılarının özelliklerini ve diğer sayılar ile arasındaki ilişkiyi incelenmiştir (Horadam, 1965).

Stakhov ve Rozin, Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarını tanımlamıştır. Ayrıca bu sayı dizilerinin Binet formülünü ve çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir (Stakhov ve Rozin, 2006).

Koçer, Tuğlu ve Stakhov, Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının $m-$genişlemesini tanımlamışlar ve bu sayılarla ilgili çeşitli özdeşlikler elde etmişlerdir (Koçer, Tuğlu ve Stakhov, 2009).

Tuğlu, Koçer ve Stakhov, iki değişkenli Fibonacci ve Lucas $p-$polinomlarını tanımlamışlardır. Bu polinomların matris temsilerini ve çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir (Tuğlu, Koçer ve Stakhov, 2011).

Horadam, kompleks Fibonacci sayılarını ve Fibonacci kuaterniyonlarını tanımlayarak bazı özelliklerini incelemiştir (Horadam, 1963).

Özdemir; kompleks, hiperbolik ve dual sayıların her birini içeren yeni bir sayı sistemi tanımlamıştır. Bu sayı sistemine hybrid sayılar adını vermiştir. Bu sayı sistemi üzerinde bazı sınıflandırmalar yaparak bu sayıların cebirsel ve geometrik özelliklerini incelemiştir (Özdemir, 2018).

Szynal-Liana ve Wloch, Fibonacci hybrid sayıları göz önüne almış ve bu sayıların bazı özelliklerini elde etmiştir (Szynal-Liana ve Wloch, 2019).

Aynı zamanda, Szynal-Liana ve Wloch, Pell, Pell-Lucas hybrid sayıları ve Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas sayıları tanımlamış ve bu sayılar ile ilgili çeşitli özdeşlikler elde etmiştir (Szynal-Liana ve Wloch, 2018).

Catarino, $k-$Pell sayıları ile hybrid sayıları tanımlamış ve özelliklerini araştırmıştır (Catarino, 2019).

Morales, Özdemir tarafından tanımlanan hybrid sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını kullanarak genelleştirilmiş hybrid Fibonacci ve Lucas sayılarını tanımlamıştır. Bu sayıların özel hali

$$HF_n = F_n + iF_{n+1} + \varepsilon F_{n+2} + hF_{n+3}$$

ve

$$HL_n = L_n + iL_{n+1} + \varepsilon L_{n+2} + hL_{n+3}$$

şeklinde tanımlanan hybrid Fibonacci ve Lucas sayılarıdır. Bu sayıların, Binet formülünü kullanarak genelleştirilmiş hybrid Fibonacci sayıları ile ilgili bazı özdeşlikler elde etmiştir (Morales, 2018).

Szynal-Liana, Horadam sayılarını göz önüne alarak Horadam hybrid sayılarını tanımlamıştır. Ayrıca Horadam hybrid sayıları ile ilgili çeşitli özdeşlikler elde etmiştir (Szynal-Liana, 2018).

Szynal-Liana ve Wloch, bu çalışmada Fibonacci ve Lucas polinomlarını kullanarak tanımladıkları hybrid sayıları, Fibonacci ve Lucas Hybrinomial olarak adlandırmışlardır. Yazarlar, Fibonacci Hybrinomial için matris temsilini elde etmiş ve bazı özdeşlikler vermiştir (Szynal-Lina ve Wloch, 2020).

Szynal-Liana ve Wloch, genelleştirilmiş Fibonaccci-Pell Hybrinomial sayılarını göz önüne alarak bu sayılarla ilgili çeşitli özdeşlikler elde etmişlerdir (Szynal-Liana ve Wloch, 2020).

Mangueira ve arkadaşları, Padovan sayıları ile tanımlı hbyrid sayılarını tanımlamışlardır. Padovan hybrid sayıları ile ilgili çeşitli özdeşlikler elde etmişlerdir (Mangueira, 2020).

Kızılateş, bu çalışmasında $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas hybrid sayılarını tanımlamıştır ve bu sayılar ile ilgili birtakım cebirsel özellikler vermiştir (Kızılateş, 2020).

Kızılateş, diğer bir çalışmasında Horadam hybrid polinomlarını tanımlayarak kısaca Horadam Hybrinomial olarak adlandırmıştır. Aynı zamanda Horadam

Hybrinomiallerin bazı özel durumlarını ve cebirsel özelliklerini vermiştir. Ayrıca matrislerde Horadam Hybrinomialler için bazı eşitlikler elde etmiştir (Kızılateş, 2020).

Elfıshuk, bu çalışmasında hybrid sayılardaki $\{1, i, \varepsilon, h\}$ kümesinin elemanlarını Fibonacci dizisinin keyfi bir elemanı olarak ele alıp bu sayılara kısıtlamasız Fibonacci hybrid sayılar adını vererek

$$HF_n\left(x, y, z\right) = F_n + iF_{n+x} + \varepsilon F_{n+y} + hF_{n+z}$$

şeklinde tanımlamıştır. Ayrıca Elfıshuk çalışmasında, bunu Lucas sayılarına taşıyarak kısıtlamasız Lucas hybrid sayılarının da tanımı vermiştir. Ayrıca bu sayı dizilerinin üreteç fonksiyonlarını ve Binet formüllerini elde etmiştir. Binet formüllerini kullanarak bu sayılar için Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliklerini elde etmiştir (Elfıshuk, 2020).

Tan ve Ait-amrane, klasik Horadam hybrid sayılarını genellemesi olan bi-periodic Horadam hybrid sayılarını tanıtmışlardır. Ayrıca bu sayılar ile ilgili üreteç fonksiyonu ve Binet formülleri başta olmak üzere bazı eşitlikler vermişlerdir. Bununla beraber genelleştirilmiş bi-periodic Fibonacci hybrid ve genelleştirilmiş bi-perodic Lucas hybrid sayıları arasında bazı özdeşlikler vermişlerdir (Tan ve Ait-amrane, 2020).

Şentürk ve arkadaşları, Horadam hybrid sayıları üzerine incelemelerde bulunarak bu sayılar ile ilgili bazı özdeşlikler elde etmişlerdir. Ayrıca bu sayılar ile ilgili bazı toplam formüllerini vermişler, genel bilineer formülünü ve Honsberger formülünü elde etmişlerdir (Şentürk, 2020).

3. HYBRİD SAYILAR, FİBONACCİ ve LUCAS $p-$SAYILARI

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarını tanıtarak çeşitli özelliklerini vereceğiz. Ardından Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının $m-$genişlemesi olarak adlandırılan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarını tanımlayarak bu sayıların rekürans bağıntılarını ve çeşitli özelliklerini vereceğiz. Ayrıca hybrid sayıları ayrıntılı bir şekilde inceleyeceğiz.

3.1. Fibonacci ve Lucas $p-$Sayıları

Tanım 3.1.1. $p \geq 1,\ n > p$ için $F_p(n)$, $n-$inci Fibonacci $p-$sayısı

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \tag{3.1.1}$$

rekürans bağıntısı ve $n = 1, 2, \ldots, p$ için $F_p(0) = 0,\ F_p(n) = 1$ başlangıç koşulları ile tanımlanır (Stakhov ve Rozin, 2006).

Tanım 3.1.2. $p \geq 1,\ n > p$ için $L_p(n)$, $n-$inci Lucas $p-$sayısı

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1) \tag{3.1.2}$$

rekürans bağıntısı ve $L_p(0) = p+1$, $n = 1, 2, \ldots, p$ için $L_p(n) = 1$ başlangıç koşulları ile tanımlanır (Stakhov ve Rozin, 2006).

Şimdi Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları ile ilgili bazı özellikleri verelim. Bu özellikler, Tuğlu, Koçer ve Stakhov tarafından yazılan "Bivariate Fibonacci like $p-$ polynamials" isimli makaleden faydalanılarak elde edilmiştir.

Özellik 3.1.3. $F_p(n)$ ve $L_p(n)$, Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_p(n) z^n = \frac{z}{1 - z - z^{p+1}} \tag{3.1.3}$$

ve

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_p(n) z^n = \frac{1 + p(1-z)}{1 - z - z^{p+1}} \tag{3.1.4}$$

dir.

Özellik 3.1.4. $F_p(n)$ ve $L_p(n)$, Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları arasında aşağıdaki eşitlik vardır.

$$L_p(n) = F_p(n+1) + pF_p(n-p) \tag{3.1.5}$$

Özellik 3.1.5. $F_p(n)$ ve $L_p(n)$ sırasıyla Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları olsun. O zaman

$$\sum_{k=0}^{n} F_p(k) = F_p(n+p+1) - F_p(p) \tag{3.1.6}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n} L_p(k) = L_p(n+p+1) - L_p(p) \tag{3.1.7}$$

dir.

Özellik 3.1.6. $F_p(n)$ ve $L_p(n)$ sırasıyla Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{k} F_p(n)L_p(k-n) = (k+p)F_p(k) \tag{3.1.8}$$

dir.

3.2. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$Sayıları

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının bir genelleştirmesi olan sayılar tanıtılarak bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.2.1. $p \geq 0,\ n > p$ tam sayı ve $m > 0$ pozitif reel sayı olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci $p-$sayıları

$$F_{p,m}(n) = mF_{p,m}(n-1) + F_{p,m}(n-p-1) \tag{3.2.1}$$

rekürans bağıntısı ve $n = 1, 2, ..., p$ için $F_{p,m}(n) = m^{n-1}$ başlangıç koşulları ile tanımlanır (Koçer, Tuğlu ve Stakhov, 2009).

Tanım 3.2.2. $p \geq 0,\ n > p$ tam sayı ve $m > 0$ pozitif reel sayı olmak üzere genelleştirilmiş Lucas $p-$sayıları

$$L_{p,m}(n) = mL_{p,m}(n-1) + L_{p,m}(n-p-1) \tag{3.2.2}$$

rekürans bağıntısı ve $n = 1, 2, ..., p$ için $L_{p,m}(n) = m^{n}$ başlangıç koşulları ile tanımlanır (Koçer, Tuğlu ve Stakhov, 2009).

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları, m ve p nin aldığı farklı değerler için başka sayılara dönüşür. Bu durumların birkaçını aşağıdaki gibi verebiliriz.

1. (3.2.1) ve (3.2.2) de $m = p = 1$ alınırsa klasik Fibonacci ve Lucas sayıları elde edilir.
2. (3.2.1) ve (3.2.2) de $m = 1$ alınırsa Fibonacci ve Lucas $p-$ sayıları elde edilir.
3. (3.2.1) ve (3.2.2) de $m = 2,\ p = 1$ alınırsa Pell ve Pell-Lucas sayıları elde edilir.
4. (3.2.1) ve (3.2.2) de $m = 2$ alınırsa Pell ve Pell-Lucas $p-$ sayıları elde edilir.

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının üreteç fonksiyonlarını, toplam formüllerini ve sağladığı bazı özdeşlikleri verelim. Bu özellikler, Tuğlu, Koçer ve Stakhov'un "Bivariate Fibonacci like $p-$polynamials" isimli makalesinden elde edilmiştir.

Özellik 3.2.3. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{p,m}(n)z^{n}=\frac{z}{1-mz-z^{p+1}} \tag{3.2.3}$$

ve

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}L_{p,m}(n)z^{n}=\frac{1+p(1-mz)}{1-mz-z^{p+1}} \tag{3.2.4}$$

dir.

Özellik 3.2.4. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları için toplam formülleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{k}F_{p,m}(n)=\frac{1}{m}\left(F_{p,m}(k+p+1)-F_{p,m}(p)+(1-m)\sum_{n=0}^{p-1}[F_{p,m}(n+k+1)-F_{p,m}(n)]\right) \tag{3.2.5}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{k}L_{p,m}(n)=\frac{1}{m}\left(L_{p,m}(k+p+1)-L_{p,m}(p)+(1-m)\sum_{n=0}^{p-1}[L_{p,m}(n+k+1)-L_{p,m}(n)]\right). \tag{3.2.6}$$

Özellik 3.2.5. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları arasında aşağıdaki eşitlik vardır.

$$L_{p,m}(n)=F_{p,m}(n+1)+pF_{p,m}(n-p) \tag{3.2.7}$$

Özellik 3.2.6. (Genelleştirilmiş Honsberger Formülü) k,n pozitif tam sayı olmak üzere, $F_{p,m}(n)$, $n-$inci genelleştirilmiş Fibonacci $p-$sayısı için

$$F_{p,m}(k+n)=F_{p,m}(k)F_{p,m}(n+1)+\sum_{t=1}^{p}F_{p,m}(k-t)F_{p,m}(n-p+t) \tag{3.2.8}$$

dir.

3.3. Hybrid Sayılar

2018 yıllında Özdemir kompleks, hiperbolik ve dual sayıların bir genelleştirmesini tanımlamıştır. Yazar, bu üç sayı sistemini birlikte içeren yeni bir sayı sistemi oluşturmuştur ve bu sayılara da hybrid sayılar adını vermiştir. Bu bölümde Özdemir tarafında tanımlanan hybrid sayılar ve özellikleri incelenecektir (Özdemir, 2018).

Tanım 3.3.1. Hybrid sayılar kümesi

$$K=\left\{a+bi+c\varepsilon+dh : a,b,c,d\in\mathbb{R}, i^2=-1, \varepsilon^2=0, h^2=1, ih=-hi=\varepsilon+i\right\}$$

olarak tanımlanır (Özdemir, 2018).

Bu sayılar kümesinin reel, kompleks, dual ve hiperbolik birimleri sırasıyla

$1\leftrightarrow(1,0,0,0)$, $i\leftrightarrow(0,1,0,0)$, $\varepsilon\leftrightarrow(0,0,1,0)$, $h\leftrightarrow(0,0,0,1)$

olup bu birimlere hybrid birimler denir. Ayrıca $Z=a+bi+c\varepsilon+dh$ bir hybrid sayı olmak üzere bu sayının skaler kısmı a reel sayısıdır ve $S(Z)=a$ ile gösterilir. $bi+c\varepsilon+dh$ kısmı ise hybrid sayının vektör kısmı olarak adlandırılır ve $V(Z)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.2. Z ve W iki hybrid sayı olmak üzere $Z=W$ olması için gerek ve yeter şart $S(Z)=S(W)$ ve $V(Z)=V(W)$ olmasıdır (Özdemir, 2018).

Tanım 3.3.3. $Z=a+bi+c\varepsilon+dh$ ve $W=p+ri+s\varepsilon+th$ iki hybrid sayı olmak üzere iki hybrid sayının toplamı

$$Z+W=(a+p)+(b+r)i+(c+s)\varepsilon+(d+t)h$$

dir (Özdemir, 2018).

Hybrid sayılarda toplama işleminin değişme ve birleşme özelliği vardır. Ayrıca tanımlanan toplama işleminin birim elemanı sıfır olup ters elemanı ise tüm bileşenlerin ters işaretlisidir yani Z hybrid sayısının tersi $-Z$ dir. Buradan $(K,+)$ cebirsel yapısının değişmeli bir grup olduğu görülür.

Tanım 3.3.4. $Z=a+bi+c\varepsilon+dh$ ve $W=p+ri+s\varepsilon+th$ iki hybrid sayı olmak üzere

$$ZW=(a+bi+c\varepsilon+dh)(p+ri+s\varepsilon+th)$$

olarak tanımlanan işleme hybridian çarpım denir (Özdemir, 2018).

Bu çarpımda soldaki her bir terim sağdaki her bir terimle ayrı ayrı çarpılır ve $i^2=-1,\ \varepsilon^2=0,\ h^2=1,\ ih=-hi=\varepsilon+i$ eşitlikleri göz önünde bulundurularak işlem yapılır.

Burada kullanılan eşitlikler yardımıyla iki hybrid birimin çarpımını bulabiliriz. Örneğin $i\varepsilon$ bulalım. Bunun için $ih = \varepsilon + i$ eşitliğinin sol tarafını i ile çarpalım. Bu bize $i\varepsilon = 1 - h$ ' ı verir. Benzer şekilde devam edersek aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

$\cdot$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1-h$	$\varepsilon+i$
ε	ε	$h+1$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon-i$	ε	-1

Tablo 1. K kümesinin birimleri için çarpım tablosu

Tabloya baktığımızda hybrid sayılarda çarpma işleminin değişme özelliğinin olmadığı ancak birleşme özelliğinin olduğunu açık bir şekilde görebiliriz.

Tanım 3.3.5. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ bir hybrid sayı olmak üzere Z hybrid sayısının eşleniği

$$\overline{Z} = S(Z) - V(Z) = a - bi - c\varepsilon - dh$$

tır (Özdemir, 2018).

Ayrıca $Z_1, Z_2 \in K$ için $\overline{(Z_1 + Z_2)} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ dir. Bununla beraber $Z\overline{Z} = \overline{Z}Z$ dir. Burada $Z\overline{Z} = \overline{Z}Z$ sonucu bir reel sayıya eşit olup bu sayı Z hybrid sayısının karakteri olarak adlandırılır ve

$$C(Z) = \overline{Z}Z = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3.6. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hybrid sayısının tersi $C(Z) \neq 0$ olmak üzere

$$Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{C(Z)}$$

dir (Özdemir, 2018).

Teorem 3.3.7. Hybrid sayılar kümesi K, tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre değişmeli olmayan bir halkadır (Özdemir, 2018).

Tanım 3.3.8. Hybrid sayılar kümesinde skaler çarpım $Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 \varepsilon + d_2 h$ olmak üzere

$$g(p,q):\ K \times K \to \mathbb{R}$$

$$g(Z_1, Z_2) = \frac{Z_1 \overline{Z_2} + Z_2 \overline{Z_1}}{2} = a_1 a_2 + b_1 b_2 - b_1 c_2 - b_2 c_1 - d_1 d_2$$

dir (Özdemir, 2018).

Hybrid sayıların çarpımını kolaylaştırmak için matris temsillerini bulmak önemlidir. Hybrid sayılar kümesi ve 2×2 matrisler kümesi arasında bir izomorfizm tanımlayarak iki hybrid sayıyı kolayca çarpabilir ve bu çarpımın birçok özelliğini ispatlayabiliriz. Öte yandan hybrid sayıları, matris gösterimlerini dikkate alarak tanımlayabiliriz.

Teorem 3.3.9. K hybrid sayılar halkası ve $M_2(\mathbb{R})$ halkası izomorftur (Özdemir, 2018).

İspat. $\varphi : K \to M_2(\mathbb{R})$ dönüşümünü her $Z = a + bi + c\varepsilon + dh \in K$ için

$$\varphi(a + bi + c\varepsilon + dh) = \begin{bmatrix} a + c & b - c + d \\ c - b + d & a - c \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşümün bir halka izomorfizmi olduğunu gösterelim. Daha önce hybrid sayılar için tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri tablosu göz önüne alındığında her $Z_1, Z_2 \in K$ için

$$\varphi(Z_1 Z_2) = \varphi(Z_1)\varphi(Z_2)$$

ve

$$\varphi(Z_1 + Z_2) = \varphi(Z_1) + \varphi(Z_2)$$

olduğu açıkça görülür. Yani φ bir halka homomorfizmidir. Şimdi φ nin bire bir olduğunu gösterelim. Her $Z_1, Z_2 \in K$ için $Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 \varepsilon + d_2 h$ olmak üzere $\varphi(Z_1) = \varphi(Z_2)$ ise iki matrisin eşitliğinden $c_1 = c_2$, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $d_1 = d_2$ elde edilir. Bu da $Z_1 = Z_2$ demektir. Yani φ, $1-1$ bir dönüşümdür. Öte yandan, herhangi bir 2×2 reel matris

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

φ(Z)=A olacak şekilde

$$Z=\left(\frac{a+d}{2}\right)+\left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)i+\left(\frac{a-d}{2}\right)\varepsilon+\left(\frac{b+c}{2}\right)h \tag{3.3.1}$$

hybrid sayısı olduğundan φ örten bir fonksiyondur.

Buradan, φ bir halka izomorfizmi olup $K \cong M_2(\mathbb{R})$ dir.

Tanım 3.3.10. $\varphi(Z) \in M_2(\mathbb{R})$ matrisine Z hybrid sayısına karşılık gelen hybrid matris denir (Özdemir, 2018).

Teorem 3.3.9 da tanımlanan $1,\ i,\ \varepsilon,$ ve h birimlerinin matris temsilleri

$$\varphi(1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \varphi(i)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\ \varphi(\varepsilon)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\ \varphi(h)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu dört matris $M_2(\mathbb{R})$ vektör uzayı için bir baz teşkil eder.

4. HYBRİD FİBONACCİ ve LUCAS $p-$ SAYILARI

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları kullanılarak yeni bir çeşit hybrid sayı tanımlanmış ve hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları olarak adlandırılmıştır. Daha sonra bu sayıların özellikleri incelenmiştir.

Tanım 4.1. $p>0$ ve $n\geq p$ için $F_p(n)$ ve $L_p(n)$, $n-$inci Fibonacci ve Lucas $p-$sayısı olmak üzere

$$HF_p(n)=F_p(n)+iF_p(n+1)+\varepsilon F_p(n+2)+hF_p(n+3) \tag{4.1}$$

ve

$$HL_p(n)=L_p(n)+iL_p(n+1)+\varepsilon L_p(n+2)+hL_p(n+3) \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanan $HF_p(n)$ ve $HL_p(n)$ sayılarına sırasıyla hybrid Fibonacci $p-$sayısı ve hybrid Lucas $p-$sayısı denir.

(4.1) ve (4.2) de $p=1$ alırsak sırasıyla Syznal-Liana ve Wloch tarafından tanımlanan hybrid Fibonacci ve Lucas sayıları elde edilir (Syznal-Liana ve Wloch, 2019).

Şimdi hybrid Fibonacci $p-$sayılarının $n>p$ için rekürans bağıntısını elde edelim. (4.1) den

$$HF_p(n)=F_p(n)+iF_p(n+1)+\varepsilon F_p(n+2)+hF_p(n+3)$$

dir. Burada (3.1.1) rekürans bağıntısı kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$HF_p(n)=HF_p(n-1)+HF_p(n-p-1) \tag{4.3}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.2) den

$$HL_p(n)=L_p(n)+iL_p(n+1)+\varepsilon L_p(n+2)+hL_p(n+3)$$

olup (3.1.2) rekürans bağıntısı kullanılırsa hybrid Lucas $p-$sayılarının rekürans bağıntısı

$$HL_p(n)=HL_p(n-1)+HL_p(n-p-1) \tag{4.4}$$

şeklinde elde edilir.

$HF_p(n)$ hybrid Fibonacci $p-$sayısının eşleniği

$$\overline{HF_p(n)}=F_p(n)-iF_p(n+1)-\varepsilon F_p(n+2)-hF_p(n+3) \tag{4.5}$$

dir. (4.5) ifadesinde (3.1.1) rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\overline{HF_p(n)}=&[F_p(n-1)-iF_p(n)-\varepsilon F_p(n+1)-hF_p(n+1)]\\&+[F_p(n-p-1)-iF_p(n-p-1)-\varepsilon F_p(n-p-1)-hF_p(n-p-1)]\end{aligned}$$

$$\overline{HF_p(n)} = \overline{HF_p(n-1)} + \overline{HF_p(n-p-1)} \tag{4.6}$$

elde edilir. Benzer şekilde $HL_p(n)$ hybrid Lucas $p-$sayısının eşleniği

$$\overline{HL_p(n)} = L_p(n) - iL_p(n+1) - \varepsilon L_p(n+2) - hL_p(n+3) \tag{4.7}$$

dir. Burada (3.1.2) rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$\overline{HL_p(n)} = \overline{HL_p(n-1)} + \overline{HL_p(n-p-1)} \tag{4.8}$$

bulunur.

$HF_p(n)$ hybrid Fibonacci $p-$sayısının normu kendisi ile eşleniğinin çarpımının kareköküne eşittir. O halde $HF_p(n)$ ve $HL_p(n)$ hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının normları sırasıyla

$$\|HF_p(n)\| = \sqrt{\left|\left(F_p(n)\right)^2 + \left(F_p(n+2) - F_p(n+1)\right)^2 - \left(F_p(n+2)\right)^2 - \left(F_p(n+3)\right)^2\right|} \tag{4.9}$$

ve

$$\|HL_p(n)\| = \sqrt{\left|\left(L_p(n)\right)^2 + \left(L_p(n+2) - L_p(n+1)\right)^2 - \left(L_p(n+2)\right)^2 - \left(L_p(n+3)\right)^2\right|} \tag{4.10}$$

dir.

Teorem 4.2. $HF_p(n)$ ve $HL_p(n)$ hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları olmak üzere

$$HL_p(n) = HF_p(n+1) + pHF_p(n-p) \tag{4.11}$$

dir.

İspat. (4.2) ifadesinden

$$HL_p(n) = L_p(n) + iL_p(n+1) + \varepsilon L_p(n+2) + hL_p(n+3)$$

olup (3.1.5) bağıntısı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$HL_p(n) = HF_p(n+1) + pHF_p(n-p)$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3. $HF_p(n)$ ve $HL_p(n)$ sırasıyla hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayısı olmak üzere

$$\begin{aligned}\left(HF_p(n)\right)^2 &= \left(F_p(n+3)\right)^2 + \left(F_p(n-p)\right)^2 + 2F_p(n+1)F_p(n-p+1) \\ &\quad + 2F_p(n)\left(F_p(n-p) + HF_p(n)\right)\end{aligned} \tag{4.12}$$

ve

$$\left(HL_p(n)\right)^2 = \left(L_p(n+3)\right)^2 + \left(L_p(n-p)\right)^2 + 2L_p(n+1).L_p(n-p+1) + 2L_p(n)\left(L_p(n-p)+HL_p(n)\right) \tag{4.13}$$

dir.

İspat.(4.12) nin sol tarafında (4.1) ifadesini kullanırsak

$$\left(HF_p(n)\right)^2 = [F_p(n)+iF_p(n+1)+\varepsilon F_p(n+2)+hF_p(n+3)][F_p(n)+iF_p(n+1)+\varepsilon F_p(n+2)+hF_p(n+3)]$$
$$= \left(F_p(n)\right)^2 - \left(F_p(n+1)\right)^2 + \left(F_p(n+3)\right)^2 + 2iF_p(n)F_p(n+1)$$
$$+2\varepsilon F_p(n)F_p(n+2) + 2hF_p(n)F_p(n+3) + 2F_p(n+1)F_p(n+2)$$
$$= \left[F_p(n+1)+F_p(n+2)\right]^2 - 2\left[F_p(n+1)\right]^2 - \left[F_p(n+2)\right]^2$$
$$+2F_p(n)HF_p(n) - \left[F_p(n)\right]^2 + \left[F_p(n+3)\right]^2$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\left(HF_p(n)\right)^2 = \left(F_p(n+3)\right)^2 + \left(F_p(n-p)\right)^2 + 2F_p(n+1)F_p(n-p+1) + 2F_p(n)\left(F_p(n-p)+HF_p(n)\right)$$

olur. Benzer şeklide (4.2) göz önüne alınırsa

$$\left(HL_p(n)\right)^2 = \left(L_p(n+3)\right)^2 + \left(L_p(n-p)\right)^2 + 2L_p(n+1).L_p(n-p+1) + 2L_p(n)\left(L_p(n-p)+HL_p(n)\right)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4. $HF_p(k)$, $k-$ıncı hybrid Fibonacci $p-$sayısı olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{n} HF_p(k) = HF_p(n+p+1) - HF_p(p) \tag{4.14}$$

dir.

İspat. Hybrid Fibonacci $p-$sayısının tanımından

$$\sum_{k=1}^{n} HF_p(k) = \sum_{k=1}^{n} (F_p(k)+iF_p(k+1)+\varepsilon F_p(k+2)+hF_p(k+3))$$
$$= \sum_{k=1}^{n} F_p(k) + i\sum_{k=1}^{n} F_p(k+1) + \varepsilon\sum_{k=1}^{n} F_p(k+2) + h\sum_{k=1}^{n} F_p(k+3)$$

dir. Burada (3.1.6) kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{n} HF_p(k) = HF_p(n+p+1) - HF_p(p)$$

elde edilir.

Hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları arasında elde edilecek diğer bazı eşitlikleri aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$HL_p(n)\overline{HF_p(n)} = -p\left\|HF_p(n)\right\| + (p+1)HF_p(n+1)\overline{HF_p(n)} \tag{4.15}$$

$$\overline{HL_p(n)}HF_p(n) = -p\left\|HF_p(n)\right\| + (p+1)\overline{HF_p(n+1)}HF_p(n) \tag{4.16}$$

$$HL_p(n) + \overline{HF_p(n)} = 2F_p(n) + (p+1)HF_p(n-p) \tag{4.17}$$

$$\overline{HL_p(n)} + HF_p(n) = 2F_p(n) + (p+1)\overline{HF_p(n-p)} \tag{4.18}$$

$$HL_p(n) + pHF_p(n) = (p+1)HF_p(n+1) \tag{4.19}$$

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ HYBRİD FİBONACCİ ve LUCAS $p-$SAYILARI

Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$ sayıları kullanılarak hybrid sayılar tanımlanmıştır. Tanımlanan bu sayıların üreteç fonksiyonları, toplamları ve matris temsilleri elde edilmiştir.

Tanım 5.1. $p>0$ ve $n\geq p$ için $F_{p,m}(n)$ ve $L_{p,m}(n)$ $n-$inci genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları olmak üzere $n-$inci genelleştirilmiş hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$ sayıları sırasıyla

$$HF_{p,m}(n)=F_{p,m}(n)+iF_{p,m}(n+1)+\varepsilon F_{p,m}(n+2)+hF_{p,m}(n+3) \tag{5.1}$$

ve

$$HL_{p,m}(n)=L_{p,m}(n)+iL_{p,m}(n+1)+\varepsilon L_{p,m}(n+2)+hL_{p,m}(n+3) \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Genelleştirilmiş hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının özel durumlarını aşağıdaki gibi verebiliriz.

i. (5.1) ve (5.2) de $m=1$ alınırsa hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları elde edilir.
ii. (5.1) ve (5.2) de $m=2$ alınırsa hybrid Pell ve Pell-Lucas $p-$sayıları elde edilir.
iii. (5.1) ve (5.2) de $m=p=1$ alınırsa hybrid Fibonacci ve Lucas sayıları elde edilir (Szynal-Liana ve Wloch, 2019).
iv. (5.1) ve (5.2) de $m=2,\ p=1$ alınırsa hybrid Pell ve hybrid Pell-Lucas sayıları elde edilir (Szynal-Liana ve Wloch, 2018).

Şimdi genelleştirilmiş hybrid Fibonacci $p-$sayılarının $n>p$ için rekürans bağıntısını elde edelim. (5.1) den

$$HF_{p,m}(n)=F_{p,m}(n)+iF_{p,m}(n+1)+\varepsilon F_{p,m}(n+2)+hF_{p,m}(n+3)$$

dir. Burada (3.2.1) rekürans bağıntısı kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$HF_{p,m}(n)=mHF_{p,m}(n-1)+HF_{p,m}(n-p-1) \tag{5.3}$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.2) den

$$HL_{p,m}(n)=L_{p,m}(n)+L_{p,m}(n+1)i+L_{p,m}(n+2)\varepsilon+L_{p,m}(n+3)h$$

olup (3.2.2) rekürans bağıntısı kullanılırsa genelleştirilmiş hybrid Lucas $p-$ sayılarının rekürans bağıntısı

$$HL_{p,m}(n)=mHL_{p,m}(n-1)+HL_{p,m}(n-p-1) \tag{5.4}$$

şeklinde elde edilir.

$HF_{p,m}(n)$ ve $HL_{p,m}(n)$ genelleştirilmiş hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$ sayılarının eşlenikleri sırasıyla

$$\overline{HF_{p,m}(n)} = F_{p,m}(n) - iF_{p,m}(n+1) - \varepsilon F_{p,m}(n+2) - hF_{p,m}(n+3) \tag{5.5}$$

ve

$$\overline{HL_{p,m}(n)} = L_{p,m}(n) - iL_{p,m}(n+1) - \varepsilon L_{p,m}(n+2) - hL_{p,m}(n+3) \tag{5.6}$$

dir.

$HF_{p,m}(n)$ ve $HL_{p,m}(n)$ genelleştirilmiş hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının normları sırasıyla

$$\left\|HF_{p,m}(n)\right\| = \sqrt{\left|\left(F_{p,m}(n)\right)^2 + \left(F_{p,m}(n+2) - F_{p,m}(n+1)\right)^2 - \left(F_{p,m}(n+2)\right)^2 - \left(F_{p,m}(n+3)\right)^2\right|} \tag{5.7}$$

ve

$$\left\|HL_{p,m}(n)\right\| = \sqrt{\left|\left(L_{p,m}(n)\right)^2 + \left(L_{p,m}(n+2) - L_{p,m}(n+1)\right)^2 - \left(L_{p,m}(n+2)\right)^2 - \left(L_{p,m}(n+3)\right)^2\right|} \tag{5.8}$$

dir.

Teorem 5.2. $HF_{p,m}(n)$ ve $HL_{p,m}(n)$ genelleştirilmiş hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları olmak üzere

$$HL_{p,m}(n) = HF_{p,m}(n+1) + pHF_{p,m}(n-p) \tag{5.9}$$

dir.

İspat. (5.2) ifadesinden

$$HL_{p,m}(n) = L_{p,m}(n) + iL_{p,m}(n+1) + \varepsilon L_{p,m}(n+2) + hL_{p,m}(n+3)$$

olup (3.2.7) bağıntısı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$HL_{p,m}(n) = HF_{p,m}(n+1) + pHF_{p,m}(n-p)$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3. $\{HF_{p,m}(n)\}$ ve $\{HL_{p,m}(n)\}$ genelleştirilmiş hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla, $p \geq 1$ için

$$g(z) = \frac{HF_{p,m}(0) + z + z^{p-1}h + z^{p}(\varepsilon + mh)}{1 - mz - z^{p+1}} \tag{5.10}$$

ve $p > 1$ için

$$h(z) = \frac{HL_{p,m}(0) - mpz + ((p+1)h)\, z^{p-2} + ((p+1)\ \varepsilon + mh)\, z^{p-1} + ((p+1)i + m\varepsilon + m^2 h) z^{p}}{1 - mz - z^{p+1}} \tag{5.11}$$

dir.

İspat. Üreteç fonksiyonun tanımından

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} HF_{p,m}(n) z^n = HF_{p,m}(0) z^0 + HF_{p,m}(1) z^1 + \cdots + HF_{p,m}(n) z^n + \cdots$$

dir. Öte yandan

$$\begin{aligned} g(z) &= HF_{p,m}(0)z^0 + HF_{p,m}(1)z^1 + \cdots + HF_{p,m}(n)z^n + \cdots \\ -mzg(z) &= mHF_{p,m}(0)z^1 - mHF_{p,m}(1)z^2 - \cdots - mHF_{p,m}(n)z^{n+1} - \cdots \\ -z^{p+1}g(z) &= HF_{p,m}(0)z^{p+1} - HF_{p,m}(1)z^{p+2} - \cdots - HF_{p,m}(n)z^{n+p+1} - \cdots \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa topladığımızda aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned} (1 - mz - z^{p+1})g(z) &= HF_{p,m}(0)z^0 + z^1[HF_{p,m}(1) - mHF_{p,m}(0)] \\ &\quad + \cdots + z^n[HF_{p,m}(n) - mHF_{p,m}(n-1) - HF_{p,m}(n-p-1)] + \cdots \end{aligned}$$

Buradan (5.3) rekürans bağıntısı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa üreteç fonksiyonu $p \geq 1$ için

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} HF_{p,m}(n) z^n = \frac{HF_{p,m}(0) + zHF_{p,m}(-p) + z^{p-1}HF_{p,m}(-1) + z^{p}HF_{p,m}(-2)}{1 - mz - z^{p+1}}$$

olarak bulunur. Buradan değerler yerine yazılırsa, $p \geq 1$ için $\{HF_{p,m}(n)\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(z) = \frac{HF_{p,m}(0) + z + z^{p-1}h + z^{p}(\varepsilon + mh)}{(1 - mz - z^{p+1})}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde $\{HL_{p,m}(n)\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu, $p>1$ için

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}HL_{p,m}(n)z^{n}$$
$$=\frac{HL_{p,m}(0)+zHL_{p,m}(-p)+z^{p-2}HL_{p,m}(-3)+z^{p-1}HL_{p,m}(-2)+z^{p}HL_{p,m}(-1)}{1-mz-z^{p+1}}$$

olarak bulunur. Buradan değerler yerine yazılırsa

$$h(z)=\frac{HL_{p,m}(0)-mpz+((p+1)h)\,z^{p-2}+((p+1)\,\varepsilon+mh)\,z^{p-1}+((p+1)i+m\varepsilon+m^{2}h)z^{p}}{(1-mz-z^{p+1})}$$

bulunur.

(5.10) da $m=p=1$ alırsak hybrid Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonunu aşağıdaki gibi verebiliriz.

Sonuç 5.4. Hybrid Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(z)=\frac{(i+\varepsilon+2h)+(1+\varepsilon+h)z}{1-z-z^{2}}$$

dir.

Teorem 5.5. (Genelleştirilmiş Honsberger Formülü) k,n pozitif tam sayılar olmak üzere $n-$ inci genelleştirilmiş hybrid Fibonacci $p-$ sayısı için

$$HF_{p,m}(k+n)=F_{p,m}(k)HF_{p,m}(n+1)+\sum_{t=1}^{p}F_{p,m}(k-t)HF_{p,m}(n-p+t) \tag{5.12}$$

dir.

İspat. (5.1) ifadesinden

$$HF_{p,m}(k+n)=F_{p,m}(k+n)+iF_{p,m}(k+n+1)+\varepsilon F_{p,m}(k+n+2)+hF_{p,m}(k+n+3)$$

dir. Burada Özellik 3.2.6. kullanılırsa

$$\begin{aligned}HF_{p,m}(k+n)=&\ F_{p,m}(k)F_{p,m}(n+1)+\sum_{t=1}^{p}F_{p,m}(k-t)F_{p,m}(n-p+t)\\&+i\left(F_{p,m}(k)F_{p,m}(n+2)+\sum_{t=1}^{p}F_{p,m}(k-t)F_{p,m}(n-p+t+1)\right)\\&+\varepsilon\left(F_{p,m}(k)F_{p,m}(n+3)+\sum_{t=1}^{p}F_{p,m}(k-t)F_{p,m}(n-p+t+2)\right)\\&+h\left(F_{p,m}(k)F_{p,m}(n+4)+\sum_{t=1}^{p}F_{p,m}(k-t)F_{p,m}(n-p+t+3)\right)\end{aligned}$$

olur. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$HF_{p,m}(k+n)=F_{p,m}(k)(F_{p,m}(n+1)+iF_{p,m}(n+2)+\varepsilon F_{p,m}(n+3)+hF_{p,m}(n+4))$$
$$+\sum_{t=1}^{p}F_{p,m}(k-t)\begin{pmatrix}F_{p,m}(n-p+t)+iF_{p,m}(n-p+t+1)\\+\varepsilon F_{p,m}(n-p+t+2)+hF_{p,m}(n-p+t+3)\end{pmatrix}$$
$$=F_{p,m}(k)HF_{p,m}(n+1)+\sum_{t=1}^{p}F_{p,m}(k-t)HF_{p,m}(n-p+t)$$

bulunur.

Teorem 5.6. $HF_{p,m}(n)$ ve $HL_{p,m}(n)$ sırasıyla genelleştirilmiş hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları olmak üzere, $m\geq 1$ için

$$\sum_{n=0}^{k}HF_{p,m}(n)=\frac{1}{m}\left(HF_{p,m}(k+p+1)-HF_{p,m}(p)+(1-m)\sum_{n=0}^{p-1}[HF_{p,m}(n+k+1)-HF_{p,m}(n)]\right) \tag{5.13}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{k}HL_{p,m}(n)=\frac{1}{m}\left(HL_{p,m}(k+p+1)-HL_{p,m}(p)+(1-m)\sum_{n=0}^{p-1}[HL_{p,m}(n+k+1)-HL_{p,m}(n)]\right) \tag{5.14}$$

dir.

İspat. Genelleştirilmiş hybrid Fibonacci $p-$sayıları için (5.3) reküranс bağıntısı kullanılırsa

$$mHF_{p,m}(n+p)=HF_{p,m}(n+p+1)-HF_{p,m}(n)$$

olur. Her iki tarafın toplamı alınırsa

$$m\sum_{n=0}^{k}HF_{p,m}(n+p)=\sum_{n=0}^{k}HF_{p,m}(n+p+1)-\sum_{n=0}^{k}HF_{p,m}(n)$$

olur. Buradan

$$m\sum_{n=0}^{k}HF_{p,m}(n+p)=m\sum_{n=0}^{k}HF_{p,m}(n)+m\sum_{n=k+1}^{k+p}HF_{p,m}(n)-m\sum_{n=0}^{p-1}HF_{p,m}(n)$$
$$=m\sum_{n=0}^{k}HF_{p,m}(n)+m\sum_{n=0}^{p-1}[HF_{p,m}(n+k+1)-HF_{p,m}(n)]$$

ve

$$\sum_{n=0}^{k}HF_{p,m}(n+p+1)=HF_{p,m}(k+p+1)-HF_{p,m}(p)+\sum_{n=0}^{k}HF_{p,m}(n)+\sum_{n=k+1}^{k+p}HF_{p,m}(n)-\sum_{n=0}^{p-1}HF_{p,m}(n)$$
$$=HF_{p,m}(k+p+1)-HF_{p,m}(p)+\sum_{n=0}^{k}HF_{p,m}(n)+\sum_{n=0}^{p-1}[HF_{p,m}(n+k+1)-HF_{p,m}(n)]$$

elde edilir. Ardından gerekli düzenlemeler yapıldığında $m\geq 1$ için genelleştirilmiş hybrid Fibonacci $p-$sayılarının toplamı

$$\sum_{n=0}^{k} HF_{p,m}(n) = \frac{1}{m}\left(HF_{p,m}(k+p+1) - HF_{p,m}(p) + (1-m)\sum_{n=0}^{p-1}[HF_{p,m}(n+k+1) - HF_{p,m}(n)] \right)$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde $m \geq 1$ genelleştirilmiş hybrid Lucas $p-$sayılarının toplamı

$$\sum_{n=0}^{k} HL_{p,m}(n) = \frac{1}{m}\left(HL_{p,m}(k+p+1) - HL_{p,m}(p) + (1-m)\sum_{n=0}^{p-1}[HL_{p,m}(n+k+1) - HL_{p,m}(n)] \right)$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi bu teoremle ilgili bazı özel sonuçları vereceğiz.

Sonuç 5.7. $HF_p(n)$ ve $HL_p(n)$ sırasıyla $n-$inci hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları olsun. O zaman

$$\sum_{n=0}^{k} HF_p(n) = HF_p(k+p+1) - HF_p(p)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{k} HL_p(n) = HL_p(k+p+1) - HL_p(p)$$

dir.

İspat. (5.13) ve (5.14) de $m=1$ aldığımızda sonuç açıkça görülür.

Sonuç 5.8. HP_n ve HQ_n sırasıyla $n-$inci hybrid Pell ve Pell-Lucas sayıları olsun. O zaman

$$\sum_{n=0}^{k} HP_n = \frac{1}{2}\left(HP_{k+2} - HP_{k+1} - HP_1 + HP_0 \right)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{k} HQ_n = \frac{1}{2}\left(HQ_{k+2} - HQ_{k+1} - HQ_1 + HQ_0 \right)$$

dir.

İspat. (5.13) ve (5.14) de $m=2$ ve $p=1$ alırsak sonuç açıktır.

Sonuç 5.9. HF_n ve HL_n sırasıyla $n-$inci hybrid Fibonacci ve Lucas sayıları olsun. O zaman

$$\sum_{n=0}^{k} HF_n = HF_{k+2} - HF_1$$

ve

$$\sum_{n=0}^{k} HL_n = HL_{k+2} - HL_1$$

dir.

İspat. (5.13) ve (5.14) de $m = p = 1$ aldığımızda sonuç açıkça görülür.

Benzer şekilde (5.13) ve (5.14) de $m = k$ ve $p = 1$ aldığımızda hybrid $k-$ Fibonacci ve $k-$Lucas sayıları için toplam formüllerini elde ederken, $m = 2$ aldığımızda hybrid Pell ve Pell-Lucas $p-$sayılarının toplam formüllerini elde ederiz.

Genelleştirilmiş hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının sağladığı diğer bazı özdeşlikleri ispatsız olarak aşağıdaki gibi verebiliriz.

- $m \neq 0$ için

$$HL_{p,m}(n) + pHF_{p,m}(n) = \frac{1}{m}[(m+p)HF_{p,m}(n+1) + p(1-m)HF_{p,m}(n-p)] \quad (5.15)$$

- $HL_{p,m}(n) + mpHF_{p,m}(n) = (p+1)HF_{p,m}(n+1)$ (5.16)
- $HL_{p,m}(n) - mpHF_{p,m}(n) = (1-p)HF_{p,m}(n+1) + 2pHF_{p,m}(n-p)$ (5.17)
- $HL_{p,m}(n) - mHF_{p,m}(n) = (p+1)HF_{p,m}(n-p)$ (5.18)
- $\overline{HL_{p,m}(n)} + mHF_{p,m}(n) = 2mF_{p,m}(n) + (p+1)\overline{HF_{p,m}(n-p)}$ (5.19)
- $HL_{p,m}(n) + m\overline{HF_{p,m}(n)} = 2mF_{p,m}(n) + (p+1)HF_{p,m}(n-p)$ (5.20)
- $HL_{p,m}(n)\overline{HF_{p,m}(n)} = -mp\left\|HF_{p,m}(n)\right\| + (p+1)HF_{p,m}(n+1)\overline{HF_{p,m}(n)}$ (5.21)
- $\overline{HL_{p,m}(n)}HF_{p,m}(n) = -mp\left\|HF_{p,m}(n)\right\| + (p+1)\overline{HF_{p,m}(n+1)}HF_{p,m}(n)$ (5.22)

Bu özdeşliklerde $m = 1$ alınırsa, hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları için dördüncü bölümde elde ettiğimiz özdeşlikleri görebiliriz.

Bivariate Fibonacci $p-$polinomlarının matris temsili Tuğlu ve arkadaşları tarafından verilmiştir (Tuğlu, Koçer ve Stakhov, 2011). Bu gösterimden faydalanarak genelleştirilmiş Fibonacci $p-$sayılarının matris temsili $p = 0,1,2,...$ için

$$Q_p = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{(p+1)\times(p+1)}$$

dir. $m=1$ için Q_p, Fibonacci $p-$sayılarını temsil etmektedir. Q_p matrisini kullanarak genelleştirilmiş hybrid Fibonacci $p-$sayılarının matris temsilini aşağıda verilen teoremdeki gibi elde ederiz.

Teorem 5.10. $n \geq 1$ için $\mathbf{F}$ matrisi

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} HF_{p,m}(n+p+1) & HF_{p,m}(n+p) & \dots & HF_{p,m}(n+1) \\ HF_{p,m}(n+p) & HF_{p,m}(n+p-1) & \dots & HF_{p,m}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HF_{p,m}(n+2) & HF_{p,m}(n+1) & \dots & HF_{p,m}(n-p+2) \\ HF_{p,m}(n+1) & HF_{p,m}(n) & \dots & HF_{p,m}(n-p+1) \end{pmatrix}$$

ve $\mathbf{H}$ matrisi

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} HF_{p,m}(p+1) & HF_{p,m}(p) & \dots & HF_{p,m}(1) \\ HF_{p,m}(p) & HF_{p,m}(p-1) & \dots & HF_{p,m}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HF_{p,m}(2) & HF_{p,m}(1) & \dots & HF_{p,m}(2-p) \\ HF_{p,m}(1) & HF_{p,m}(0) & \dots & HF_{p,m}(1-p) \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\mathbf{F}=\mathbf{H}Q_p^n$ dir.

İspat. İspatı $n-$ üzerinden tümevarım ile yapalım. $n=1$ için eşitlik sağlanır. $n>1$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. $n+1$ için aşağıdaki şekilde eşitliği sağlatırız.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}Q_p^{n+1} &= \mathbf{H}Q_p^n\ Q_p \\ &= \mathbf{F}Q_p \\ &= \begin{pmatrix} HF_{p,m}(n+p+1) & HF_{p,m}(n+p) & \dots & HF_{p,m}(n+1) \\ HF_{p,m}(n+p) & HF_{p,m}(n+p-1) & \dots & HF_{p,m}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HF_{p,m}(n+2) & HF_{p,m}(n+1) & \dots & HF_{p,m}(n-p+2) \\ HF_{p,m}(n+1) & HF_{p,m}(n) & \dots & HF_{p,m}(n-p+1) \end{pmatrix} Q_p \end{aligned}$$

Buradan Q_p yerine yazılıp matris çarpma işlemi yapılırsa

$$\mathbf{H}Q_p^{n+1}=\begin{pmatrix} HF_{p,m}(n+p+2) & HF_{p,m}(n+p+1) & \dots & HF_{p,m}(n+2) \\ HF_{p,m}(n+p+1) & HF_{p,m}(n+p) & \dots & HF_{p,m}(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HF_{p,m}(n+3) & HF_{p,m}(n+2) & \dots & HF_{p,m}(n-p+3) \\ HF_{p,m}(n+2) & HF_{p,m}(n+1) & \dots & HF_{p,m}(n-p+2) \end{pmatrix}$$

olur. Böylece $n+1$ için $\mathbf{F}=\mathbf{H}Q_p^n$ eşitliğinin doğru olduğu görülür. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 5.11. (Genelleştirilmiş Cassini Formülü) $HF_{p,m}(n)$, $n-$inci genelleştirilmiş hybrid Fibonacci $p-$sayısı olmak üzere

$$|\mathbf{F}|=(-1)^{pn}\begin{vmatrix} HF_{p,m}(p+1) & HF_{p,m}(p) & \cdots & HF_{p,m}(1) \\ HF_{p,m}(p) & HF_{p,m}(p-1) & \cdots & HF_{p,m}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HF_{p,m}(2) & HF_{p,m}(1) & \cdots & HF_{p,m}(2-p) \\ HF_{p,m}(1) & HF_{p,m}(0) & \cdots & HF_{p,m}(1-p) \end{vmatrix}$$

dir.

Genelleştirilmiş Cassini formülünü kullanarak, hybrid Fibonacci $p-$sayıları, hybrid Pell $p-$sayıları, hybrid Fibonacci, hybrid $k-$Fibonacci ve hybrid Pell sayıları için Cassini formüllerini elde edebiliriz. Örneğin; $m=p=1$ aldığımızda hybrid Fibonacci sayıları için Cassini formülünü aşağıdaki gibi elde ederiz.

Sonuç 5.12. HF_n, $n-$inci hybrid Fibonacci sayısı olsun. O halde hybrid Fibonacci sayıları için Cassini eşitliği

$$HF_{n+2}HF_n-HF^2{}_{n+1}=(-1)^n\,(HF_2HF_0-HF_1^2)$$

dir.

Genelleştirilmiş Cassini formülünde $m=1$ ve $p=2$ alırsak hybrid Fibonacci $2-$ sayıları için Cassini formülünü aşağıdaki sonuç ile verebiliriz.

Sonuç 5.13. $HF_{2,1}(n)$, $n-$inci hybrid Fibonacci $2-$sayısı olsun. O halde hybrid Fibonacci $2-$sayıları için Cassini eşitliği

$$\begin{vmatrix} HF_{2,1}(n+3) & HF_{2,1}(n+2) & HF_{2,1}(n+1) \\ HF_{2,1}(n+2) & HF_{2,1}(n+1) & HF_{2,1}(n) \\ HF_{2,1}(n+1) & HF_{2,1}(n) & HF_{2,1}(n-1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} HF_{2,1}(3) & HF_{2,1}(2) & HF_{2,1}(1) \\ HF_{2,1}(2) & HF_{2,1}(1) & HF_{2,1}(0) \\ HF_{2,1}(1) & HF_{2,1}(0) & HF_{2,1}(-1) \end{vmatrix}$$

dir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları ile genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları yardımıyla tanımlanan hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları ile genelleştirilmiş hybrid Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları ele alınmıştır. Bu sayıların, üreteç fonksiyonları, toplamları ve sağladığı bazı özdeşlikler verilmiştir. Elde edilen tüm sonuçların literatürdeki çalışmalara indirgenebildiği görülmüştür.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları yerine başka özel sayı dizileri kullanılarak tanımlanacak olan hybrid sayıların özellikleri başka bir araştırma konusudur.

7. KAYNAKLAR

Catarino, P., On $k-$Pell hybrid numbers, J. Discrete Math. Sci. Cryptography, 22(1), 8389, 2019.

Elfishuk, M.A., Kısıtlamasız Fibonacci Hibrit Sayıları, Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu, Ağustos-2020.

Horadam, A.F., Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 3(3), 161-176, 1965.

Horadam A. F., Complex Fibonacci Numbers And Fibonacci Quaternions, *Amer.Math. Monthly*, 70, 289–291, 1963.

Kızılateş C., A New Generalization of Fibonacci Hybrid And Lucas Hybrid Numbers, *Chaos, Solitons & Fractals*, 130, 2020.

Kızılateş C., A Note on Horadam Hybrinomials, Preprints, 2020010116. doi: https//doi.org/10 20944/preprints202001.0116.v1, 2020.

Koçer E.G., Tuğlu N., Stakhov A., On the $m-$Extension of the Fibonacci and Lucas $p-$Numbers, *Chaos, Solions&Fractals,* 40(4), 1890-1906, 2009.

Mangueira, M. C. dos Santos, Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V. ve Catarino, P. M. M. C., The Hybrid Numbers of Padovan And Some Identities, *Annales Mathematicae Silesianae* 34(2), 256–267,2020.

Morales G.C., Investigation Of Generalized Hybrid Fibonacci Numbers And Their Properties, arXiv:1806.02231v1 [math.RA] 3 Jun 2018.

Özdemir M., Introduction To Hybrid Numbers, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 28(11), 2018.

Stakhov, A., Rozin, B., Theory of Binet Formulas for Fibonacci and Lucas Numbers, Chaos, Solitons&Fractals, 27(5), 1162-1177, (2006).

Szynal-Liana A., Wloch I., The Fibonacci hybrid numbers, Utilitas Math., 110, 310, (2019).

Szynal-Liana A., Wloch I., On Jacosthal and Jacosthal-Lucas hybrid numbers, Ann. Math. Sil., doi: 10.2478/amsil-2018-0009, (2018).

Szynal-Liana A., Wloch I., On Pell and Pell-Lucas Hybrid Numbers, Commentat. Math., 58,11-17,(2018).

Szynal-Liana A., **Włoch I.,**Generalized Fibonacci-Pell Hybrinomials, *Online Journal of Analytic Combinatorics*,15,2020.

Szynal-Liana A., The Horadam Hybrid Numbers, *General Algebra and Applications*

38, 91–98, 2018.

Szynal-Liana A., **Włoch I.,** Introduction to Fibonacci and Lucas Hybrinomials, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 65(10), 1736-1747, 2020.

Şentürk T.D., Bilgici G., Daşdemir A., ve Ünal Z., A Study on Horadam Hybrid Numbers, *Turkish Journal of Mathematics,*44,1212-1221,2020.

Tan E., Ait-Amrane N.R., On A New Generalization of Fibonacci Hybrid Numbers, arXiv:2006.09727v1 [math.NT] 17 Jun 2020.

Tuğlu N., Koçer E.G., Stakhov A., Bivariate Fibonacci like $p-$polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 10239-10249, 2011.