OCAK 2024

YüksekLisansTezi-Matematik

MEHMET DÜNDAR

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FIBONACCI KALKÜLÜSÜN BAZI SAYI DİZİLERİ VE POLİNOMLARI ÜZERİNDEKİ YANSIMALARI

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET DÜNDAR

OCAK 2024

FIBONACCI KALKÜLÜSÜN BAZI SAYI DİZİLERİ VE POLİNOMLARI ÜZERİNDEKİ YANSIMALARI

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Mehmet DÜNDAR

Ocak 2024

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Mehmet DÜNDAR

ABSTRACT

REFLECTIONS OF FIBONACCI CALCULUS ON SOME NUMBER SEQUENCES AND POLYNOMIALS

DÜNDAR, Mehmet
Master's Thesis, Mathmatics
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
January 2024
62 pages

This thesis consists of six chapters. In the first part of the thesis, the introduction and definitions that will be required throughout the thesis are included. In the second part of the thesis, basic definitions, theorems and identities for the Fibonacci number sequence are included. In the third part of the thesis basic definitions, theorems and identities regarding the Bernstein operator and Bernstein polynomials are included. In the fourth chapter of the thesis basic definitions, theorems and identities of Bernoulli numbers and polynomials and Euler numbers and polynomials are included. In the fifth chapter of the thesis definitions, theorems and identities related to Bernoulli F-polynomial, Bernoulli-Fibonacci numbers and polynomials, Euler-Fibonacci numbers and polynomials, F-Bernstein operator and F-Bernstein polynomial are included. In the sixth chapter of the thesis the findings and conclusions are included.

Key Words: Fibonacci numbers, Golden ratio, F-derivative, F-integral, F-Bernstein polynomials, Bernoulli F-polynomials, Bernoulli-Fibonacci polynomials, Euler-Fibonacci polynomials.

ÖZET

FIBONACCI KALKÜLÜSÜN BAZI SAYI DİZİLERİ VE POLİNOMLARI ÜZERİNDEKİ YANSIMALARI

DÜNDAR, Mehmet
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Ocak 2024
62 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde giriş ve tez boyunca gerekli olacak tanımlara yer verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde Fibonacci sayı dizisine yönelik temel tanımlara, teoremlere ve özdeşliklere yer verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde Bernstein operatörü ve Bernstein polinomları ile ilgili temel tanımlara, teoremlere ve özdeşliklere yer verilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde Bernoulli sayıları ve polinomları ile Euler sayıları ve polinomlarına ait temel tanımlara, teoremlere ve özdeşliklere yer verilmiştir. Tezin beşinci bölümünde Bernoulli *F*-polinomu, Bernoulli-Fibonacci sayıları ve polinomları, Euler-Fibonacci sayıları ve polinomları ile *F*-Bernstein operatörü ve *F*-Bernstein polinomu ile ilgili tanımlara, teoremlere ve özdeşliklere yer verilmiştir. Tezin altıncı bölümünde ise elde edilen bulgulara ve sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Altın oran, F-türev, F-integral, F-Bernstein polinomları, Bernoulli F-polinomları, Bernoulli-Fibonacci polinomları, Euler-Fibonacci polinomları.

"nurCANıma"

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini ve deneyimlerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her anlamda desteğini benden esirgemeyen ve tezimin hazırlanma süresince büyük emeği olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ´e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında desteklerini benden esirgemeyen, her konuşmasında bana ilham kaynağı olan Hasan Kalyoncu Üniversitesi öğretim üyelerinden değerli hocam Doç. Dr. Serkan ARACI'ya ve her sorduğum soruya sabırla ve titizlikle cevap veren kıymetli doktora öğrencisi Ayşe KARAGENÇ'e ve bu yola birlikte çıktığım kıymetli arkadaşım Burcu DOĞRUER'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Tezin hazırlanma sürecinde bana zaman kazandıran değerli öğretmen arkadaşlarım Mehmet EVCAN, Ş. Çiğdem DOYURAN ve M. Ali ELÇİ başta olmak üzere tüm mesai arkadaşlarıma ve son olarak en zor günlerimde desteklerini benden esirgemeyen çok kıymetli abim Mustafa DÜNDAR ve kardeşim Orhan DÜNDAR'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$\boldsymbol{B_n(f:x)}$	Bernstein operatörü
$\boldsymbol{B_{k,n}(x)}$	$n.$ dereceden $k.$ Bernstein polinomu
$\boldsymbol{F_n}$	$n.$ Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{B_n(x)}$	Bernoulli polinomu
$\boldsymbol{B_n}$	Bernoulli sayısı
$\boldsymbol{E_n(x)}$	Euler polinomu
$\boldsymbol{E_n}$	Euler sayısı
$\boldsymbol{B_n^F(f:x)}$	*F*-Bernstein operatörü
$\boldsymbol{B_{k,n}^F(x)}$	$n.$ dereceden $k.$ *F*-Bernstein polinomu
$\boldsymbol{B_{n,F}(x)}$	Bernoulli *F*-polinomu
$\boldsymbol{B_n^F(x)}$	Bernoulli-Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{B_n^F}$	Bernoulli-Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{E_{n,F}(x)}$	Euler-Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{E_{n,F}}$	Euler-Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{D_F^x}$	Golden *F*-türev operatörü
$\boldsymbol{(x +_F y)^n}$	Binom teoreminin *F*-benzeri

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı

1170 yılında İtalya'da dünyaya gelen Leonardo Fibonacci, annesini erken yaşta kaybedince tüccar olan babası ile Akdeniz kıyılarındaki ülkelerde çokça zaman geçirmiştir. Bu sayede birçok tüccar ve matematikçilerle tanışma fırsatı bulan Fibonacci'nin sayılar sistemine karşı ilgisi artmış ve bu konu ile ilgili birçok araştırma yapmıştır. Yaptığı araştırmalardan en ilginç olanı ise tavşanlar üzerine olmuştur. İki tavşan ile başlattığı bu deneyde tavşan sayılarının artışlarının kaydını tutmuştur. Bu kayıtlardan elde ettiği verileri Liber Abaci adlı kitabında tavşan problemi olarak yayınlamıştır. İlerleyen yıllarda bu problemin çözümü için elde edilen sonuçlar neticesinde ortaya bir sayı dizisi çıkmış ve bu sayı dizisine Fibonacci sayıları denmiştir. Kendinden bir önceki ve iki önceki sayının toplamı (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,…) olacak şekilde sıralanan bu sayılar üzerine yapılan çalışmalarda, ardışık terimlerinden büyük olanın küçük olana oranının limiti alındığında $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel sayısı ile ilişkili olduğu görülmüştür. Bu irrasyonel sayının kendini birçok alanda göstermesi 'altın oran' kavramının ortaya çıkmasını sağlamıştır [5,15,22].

Altın oranın farklı alanlarda kendini göstermesi bu sayılara olan ilgiyi arttırmış ve bunun sonucunda birçok matematikçi kendini bu sayılarla ilgilenirken bulmuştur. Fibonacci sayı dizisi üzerine yapılan çalışmalar, ilerleyen yıllarda Pell, Lucas gibi farklı sayı dizilerinin de ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu sayı dizisi dünya üzerinde var olan birçok gizemin de çözüme kavuşmasında rol oynamıştır. Bu sayede modern bilimde de çok sayıda uygulama alanı bulan Fibonacci sayıları ve altın oran, sayılar teorisi, uygulamalı matematik, fizik, sanat, estetik gibi pek çok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır [5,22].

Fibonacci sayılarının ortaya çıkmasından itibaren yapılan çalışmalar bu sayıların ne derecede dikkat çekici ve özel olduğunu göstermektedir. Fibonacci sayıları birçok matematikçiyi bu sayılar üzerine araştırmalar yapmaya yöneltmiş ve bu konu ile ilgili çok sayıda yayınlar yapılmıştır [5,8,10,12-17,19]. Günümüzde dahi öneminden hiçbir şey kaybetmeyen Fibonacci sayılarının üzerine daha nice araştırmalar ve çalışmalar yapılacağı yadsınamaz bir gerçek olarak karşımızda durmaktadır.

Uygulamalı matematik ve yaklaşım teorisinin vazgeçilmez bir parçası olan polinomlar, matematikçiler tarafından en çok sevilen fonksiyonlar olarak önemini her geçen gün arttırmakta ve dolayısıyla araştırma konularında odak noktayı oluşturmaktadır. Her aralıkta sürekli ve türevlenebilir olmaları, üzerinde çok daha kolay işlemler yapılabilmesi polinomları cazip hale getirmiştir. Birçok araştırmacı polinomlar üzerine çalışmalar yapmış ve bunun sonucunda da birtakım özel polinomlar ortaya çıkmıştır [7,9,18,20,21].

Yakın zamanlarda yapılan araştırmalar [10,13-15,17] sayı dizileri ile bazı özel polinomlar arasında ilişki kurulabileceğini göstermiştir. Pek çok araştırmacının yaptığı çalışmalar incelendiğinde bazı özel polinomların Fibonacci sayıları cinsinden yazılabileceğini göstermektedir. Yapılan bu çalışmalar da bizlere, Fibonacci sayılarının polinomlar üzerine etkisinin uzun zaman boyunca devam edeceği bilgisini vermektedir.

Ewa Krot (2004) tarafından verilen Fibonacci kalkulüs [13], bazı matematikçileri Fibonacci sayılarının bir takım özel polinomlar üzerine nasıl yansıyabileceğini incelemeye yöneltmiştir. Çalışmalar sonucunda elde edilen veriler bu özel polinomlara pek çok ilginç özellikler katmıştır. Bu konu üzerine yapılan çalışmalardan biri de Kuş ve arkadaşları tarafından verilen Bernoulli polinomlarının ve Euler polinomlarının bu sayı dizisine bağlı olduğu anlamı taşıyan Bernoulli-Fibonacci ve Euler-Fibonacci polinomlarıdır [14]. Ayrıca Krot'un verdiği Fibonacci kalkulüs ve bunun üzerine yapılan araştırmalar Fibonomial, F-İntegral, F-Türev, F-Üstel fonksiyon gibi yeni kavramların da literatüre girmesini sağlamıştır [10,13-15,17].

Son zamanlarda Erdem ve arkadaşları Bernstein polinomlarının Fibonacci sayı dizisine bağlı olduğu anlamı taşıyan F-Bernstein polinomlarını tanıttılar. Yaptıkları çalışmada bu polinomlarla ilgili bazı özellikleri ve özdeşlikleri inceleyip, *F*-Bernstein polinomlarını üreten bir fonksiyon verdiler [10].

Bu tezde Fibonacci sayı dizisinin, Bernoulli sayı ve polinomlarının, Euler sayı ve polinomlarının ve Bernstein polinomlarının bazı temel tanımları, özellikleri ve özdeşlikleri verilmiştir. Son zamanlarda yapılan çalışmalardan esinlenerek Fibonacci sayı dizisinin bu polinomlar üzerine yansımaları incelenmiş ve bunlar ile ilgili tanımlara, teoremlere, özdeşliklere yer verilmiştir. Ayrıca Fibonacci sayı dizisinin Bernoulli polinomları, Euler polinomları ve Bernstein polinomları arasında kurulan bağıntıların *F*-integral ile arasındaki ilişkiler gösterilmiştir.

1.2. Temel Kavramlar

Bu tezde kullanışlı olacak temel kavramlar aşağıdaki gibidir [3-6,22].

Tanım 1.2.1. $f(x)$, x_0 ın komşuluğunda tanımlı bir fonksiyon olsun ve bir l sayısı verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - l| < \varepsilon$ olmak şartıyla bir $\delta > 0$ elde edilebiliyorsa $f(x)$'in x_0'daki limiti l dir denir [5]

Tanım 1.2.2. f, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun ve $x_0 \in (a,b)$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti bulunabiliyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir [3].

Tanım 1.2.3. $K \in \mathbb{R}$ için $|t| < K$ bölgesinde,

$$R(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa $R(t,x)$ iki değişkenli fonksiyonuna $f_n(x)$ fonksiyonunun üreteç fonksiyonu denir [3].

Tanım 1.2.4. x_0 noktasını içermiş olan bir aralıkta, f fonksiyonu her mertebeden türevlenebilir ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

serisine x_0 noktasında f fonksiyon tarafından üretilen Taylor serisi denir.

Özel olarak $x_0 = 0$ ve $f(x) = e^x$ alınırsa;

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^k}{k!}+...$$

elde edilir [3].

Tanım 1.2.5. Bir dizideki herhangi bir terim kendinden önceki terimler vasıtasıyla tespit edilebiliyorsa, bu diziye rekürans dizisi denir. Bu terimi tespit ederken kullanılan bağıntıya ise rekürans bağıntısı denir [5,22].

Tanım 1.2.6. $\forall n \geq m,$ sabit $a_i\ (0 \leq i \leq m-1)$ ve $a_0 \neq 0$ sayıları için,

$$u_n = a_{m-1}u_{n-1} + a_{m-2}u_{n-2} + ... + a_1u_{n-m+1} + a_0u_{n-m}$$

şeklinde verilen ve bu eşitliği sağlayan (u_n) dizisine m. dereceden homojen doğrusal rekürans dizi denir.

Buradaki eşitliğe ise m. dereceden homojen doğrusal rekürans bağıntı denir. Bu dizinin $u_0, u_1, ..., u_{m-1}$ şeklinde olan ilk m terimine (u_n) dizisinin başlangıç değerleri denir.

$u_n = a_{m-1}u_{n-1} + a_{m-2}u_{n-2} + ... + a_1u_{n-m+1} + a_0u_{n-m}$ şeklinde tanımlı olan bir dizi ise

$$p(x) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - a_{m-2}x^{m-2} - ... - a_1 - a_0$$

polinomuna (u_n) dizisinin karakteristik polinomu denir. $p(x)=0$ denklemine ise (u_n) dizisinin karakteristik denklemi denir [5,22].

Tanım 1.2.7. $b_1, b_2, ..., b_m \in \mathbb{C}$ olmak üzere $p(x)$ polinomunun kökleri, $\forall i, j \in \{1, 2, ..., m\}$ için, $b_i \neq b_j$ ise,

$$u_n = c_1 b_1^n + c_2 b_2^n + ... + c_m b_m^n$$

olacak şekilde $c_1, c_2, ..., c_m$ sabit sayıları vardır. Bu eşitlik başlangıç değerleri için yerine yazılıp bulunan denklem sisteminden $c_1, c_2, ..., c_m$ bilinmeyenleri elde edilir. Bu şekilde tespit edilen karakteristik polinomun kökleri ile u_n arasındaki eşitliğe rekürans bağıntının çözümü denir [5,22].

Tanım 1.2.8 (Cauchy çarpımı). $P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{t^n}{n!}$ ve $R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{t^n}{n!}$ iki yakınsak kuvvet serisi olmak üzere bu kuvvet serilerinin çarpımı,

$$S(t) = P(t)R(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k r_{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}$$

şeklindedir [3].

BÖLÜM 2

FIBONACCI SAYILARI

Kendinden bir önceki ve iki önceki sayının toplamı $(0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144...)$ şeklinde devam eden bu sayılar Fibonacci sayıları olarak bilinir. Bu sayılar üzerine yapılan çalışmalar altın oran kavramının ortaya çıkmasını sağlamıştır [5,15,22].

Bu bölümde Fibonacci sayılarının bazı temel özellikleri ve Binet formülü ile ilgili bilgiler verilecektir.

2.1. Fibonacci Dizisi

Tanım 2.1.1. Fibonacci dizisi aşağıdaki yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.1}$$

Burada $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ dir [5,12-15].

Fibonacci serisinin ilk birkaç terimi;

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...$$

şeklindedir.

Bu sayı dizisi adını Leonardo Fibonacci (1170-1250) den almıştır. Fibonacci, birçok tüccar ve matematikçiler ile görüşme fırsatı bulmuş ve bu fırsatları değerlendirerek aritmetik yapma sistemini öğrenmiştir. Yaptığı çalışmalar sonucunda Hint-Arap rakam sisteminin birçok avantaja sahip olduğunu ve Roma rakam sisteminden daha kullanışlı ve basit olduğunu görmüştür. Yaptığı çalışmaları yayınladığı kitabı ile Hint-Arap rakam sistemini Avrupa'ya tanıtmıştır. Kitabında defter tutma, faiz hesaplama, birimleri dönüştürme gibi uygulamalara yer vererek bu rakamların kullanışlılığını göstermiştir [5,22].

İlerleyen yıllarda Fibonacci sayıları üzerine yapılan çalışmalar sonucunda ortaya çıkan ve bugün de son derecede önemini koruyan Altın Oran; yaşam, sanat ve estetik gibi birçok alan ile ilişkilendirilmiştir. Bu oran papatyada, çam kozalağında, ayçiçeğinde, yaprakların diziliminde, Mimar Sinan'ın eserlerinde, Ömer Hayyam'ın üçgeninde ve değişik birçok alanlarda kendini göstermektedir [5,22].

2.2. Binet Formülü

Verilen bir n doğal sayısı için Fibonacci sayılarını veren F_n formülü, Binet formülü olarak adlandırılır. Fibonacci sayılarına ait Binet formülünü türetilmesi için $F_n = \lambda^n$ olarak seçilsin. O halde (2.1) deki yenileme bağıntısından,

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \Rightarrow \lambda^2 = \lambda + 1$$

yazılabilir. İkinci dereceden olan bu denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033... \qquad \text{ve} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618033...$$

olarak elde edilir. Buradaki α ve β altın ve gümüş oran olarak bilinmektedir ve $\alpha\beta = -1$ ve $\alpha + \beta = 1$ olduğu kolayca görülebilmektedir.

F_n çözümü lineer bir kombinasyon olduğundan keyfi c_1 ve c_2 sabitleri için,

$$F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n \tag{2.2}$$

dir. $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç değerlerini kullanarak c_1 ve c_2 sabitleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c_1 + c_2 = F_0 = 0,$$

$$c_1\alpha + c_2\beta = F_1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{\alpha-\beta}, \quad c_2 = -\frac{1}{\alpha-\beta}$$

Elde edilen bu c_1 ve c_2 sabitleri (2.2) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa F_n Fibonacci sayıları Binet Formülü ile açık bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.3}$$

Binet formülü Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısını kullanmadan bulunmasına olanak sağlar.

Örnek olarak $n=8$ için;

$$F_8 = \frac{\alpha^8 - \beta^8}{\alpha - \beta} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = 21$$

Binet formülü negatif n sayıları için de Fibonacci sayılarının tanımlanmasını sağlar.

Teorem 2.2.1. Negatif n tamsayıları için Fibonacci sayıları,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. (2.3) de n yerine $-n$ yazılırsa,

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha - \beta} \frac{1}{(\alpha\beta)^n}$$

bulunur. Burada $\alpha\beta = -1$ değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \frac{1}{(-1)^n} &= -F_n \frac{1}{(-1)^n} \\ &= -F_n (-1)^n \\ &= (-1)^{n+1} F_n \end{aligned}$$

elde edilir.

Ardışık olan herhangi iki Fibonacci sayısının sonsuza giderken oranları Altın oran olan α ya daha fazla yaklaşır. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} = \alpha$$

dir [5,15,22].

BÖLÜM 3

BERNSTEIN POLİNOMLARI

3.1 Bernstein Operatörü ve Özellikleri

K. Weierstrass, 1885 yılında sonlu bir aralıkta tanımlanan herhangi bir sürekli fonksiyona yakınsayan bir polinom dizisinin varlığını göstermiştir. Weierstrass, oluşturduğu teoremle f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayında ve $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$ olmak koşulu ile her $\varepsilon>0$ için n. dereceeden bir $P_n(x)$ polinom dizisinin varlığını belirtmiştir. İlerleyen yıllarda bu teoremin birçok ispatı yapılmasına rağmen bu ispatlardan en ilgi çekici olanı 1992 yılında Bernstein tarafından yapılmıştır. Bernstein, toplam biçiminde bir polinom tanımlayarak bu teoreminin basit bir ispatını verdi. Bernstein'in tanımladığı bu polinom sonraki yıllarda Bernstein polinomu olarak adlandırıldı. Bernstein polinomlarının işlevsel olması, kolay türevlenebilir ve integre edilebilir olması birçok araştırmacının bu polinomlar üzerine çalışmalar yapmasını sağlamıştır. İlerleyen yıllarda Bernstein polinomlarının kompleks uzaydaki yakınsamaları incelenmiş, çeşitli modifiyeleri yapılmış, iki değişkenli ve q-benzeri gibi çalışmaları yapılmıştır [7,9,20,21].

Bu bölümde Bernstein operatörü ve Bernstein polinomlarının tanımı, özellikleri ve ayrıca bu polinomlar ile ilgili önemli teoremler verilecektir.

Bernstein operatörünün tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.1.1. $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı olsun,

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

biçiminde tanımlanan ifadeye $f(x)$ fonksiyonuna bağlı n-inci $(n\geq 1)$ Bernstein operatörü denir.

Burada,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{l=0}^{k-1}(n-l)$$

dir. n. dereceden $(n+1)$ tane Bernstein polinomu vardır. Matematiksel açıdan uygunluğu sağlamak adına $k<0$ ve $k>n$ için $B_{k,n}(x)=0$ olarak kabul edilir [3].

Yukarıdaki tanımdan,

$$B_n(f;0)=f(0) \quad \text{ve} \quad B_n(f;1)=f(1)$$

elde edilir.

$$B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanmış n. dereceden k. Bernstein polinomu $[0,1]$ aralığında;

$$B_{k,n}(x)\geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x)=1$$

dir. Ayrıca, Bernstein polinomunun $[0,1]$ aralığındaki integrali,

$$\int_0^1 B_{k,n}(x)dx=\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\frac{1}{n-j+1}$$

şeklindedir [4].

3.2. Bernstein Polinomu

Tanım 3.2.1. $x\in[0,1]$ ve $k=0,1,2,3,...,n$ için $B_{k,n}(x)$ polinomu,

$$B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{3.1}$$

eşitliği ile tanımlanıyorsa bu polinomlara n. dereceden Bernstein polinomlarıdır denir. [1-3,7,20,21].

Teorem 3.2.1. $n.$ dereceden olan Bernstein polinomları $(n-1).$ dereceden olan iki tane Bernstein polinomunun lineer kombinasyonu,

$$B_{k,n}(x) = x\,B_{k-1,n-1}(x) + (1-x)\,B_{k,n-1}(x)$$

şeklinde gösterilir [3,7,21].

İspat. Tanım 3.2.1 den,

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x\left[\binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)}\right] + (1-x)\left[\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k}\right]$$

$$= x\,B_{k-1,n-1}(x) + (1-x)\,B_{k,n-1}(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. $n.$ dereceden Bernstein polinomlarının türevi $(n-1).$ dereceden iki Bernstein polinomlarının doğrusal birleşimi $k = 0,1,2,...,n$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dx} B_{k,n}(x) = n\left(B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x)\right)$$

şeklinde ifade edilir [3,7,21].

İspat. Tanım 3.2.1 den;

$$\frac{d}{dx} B_{k,n}(x) = \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right] = k\binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k} - (n-k)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k}$$

$$= n\left[\binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} - \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k}\right]$$

$$= n\left(B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x)\right)$$

elde edilmiş olur.

2010 yılında Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu Açıkgöz ve Aracı tarafından verilmiştir [1]. Bu yıldan itibaren Bernstein polinomları üzerine yapılan çalışmalar hız kazanmış ve bu polinomların birçok yeni ve ilginç özellikleri gösterilmiştir [2-4,7,9,20,21].

Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.3. $t \in \mathbb{C}$, $k = 0,1,2,...,n$ ve $x \in [0,1]$ olmak üzere Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$G_k(x,t) = \frac{(tx)^k}{k!} e^{(1-x)t} = \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x) \frac{t^n}{n!}$$

şeklindedir [1-4].

İspat. $G_k(x,t)$ fonksiyonunun $e^{(1-x)t}$ çarpanının Taylor açılımı,

$$e^{t(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \frac{t^n}{n!}$$

dir. Yukarıdaki eşitlik $G_k(x,t)$ fonksiyonu içerisinde yazılırsa;

$$G_k(x,t) = \frac{(tx)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^k (1-x)^n \frac{t^{n+k}}{n!k!}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntının sağ tarafı $(n+k)!$ ile çarpılıp bölündüğünde;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^n \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Böylece istenen eşitlik,

$$G_k(x,t) = \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x) \frac{t^n}{n!} \quad \text{ve} \quad G_k(x,t) = \frac{(tx)^k}{k!} e^{t(1-x)}$$

gösterilmiş olur.

BÖLÜM 4

BERNOULLI VE EULER SAYILARI VE POLİNOMLARI

Bu bölümde Bernoulli sayıları ve polinomları ile Euler sayıları ve polinomlarına ilişkin bazı temel tanımlara, özdeşliklere ve bu polinomları elde etmeye yarayan teoremlere yer verilecektir.

4.1. Bernoulli Sayıları ve Polinomları

Jakob Bernoulli 1654 yılında İsviçre'nin Basel şehrinde dünyaya gelmiştir. Babası Nicolaus ve annesi Margaretha şehrin önde gelen önemli insanlarındandır. Üstün zekaya sahip olan bu ailede yetişen Bernoulli, ailesinin baskısı ile psikoloji ve din bilimleri eğitimi almış olmasına rağmen matematik ve astronomiye olan ilgisi hiçbir zaman azalmamıştır. Bu ilgi ilerleyen zamanlarda matematik ve teorik fizik alanı üzerine dersler vermesini sağlamıştır [18].

Aile üyelerinin başka alanlarda kariyer yapmalarına rağmen matematik ve fizik ile de ilgilenmeleri onların, ilerleyen zamanlarda unutulmayacak başarılara kapı açmış bir aile olmalarını sağlayacaktır. Uygulamalı matematik, olasılık ve istatistik alanlarında yaptıkları çalışmalar bu alanların gelişmesine katkı sağlamıştır [6,18].

Bu polinomlardan ilk olarak Jakob Bernoulli bahsetmiştir. Bernoulli'nin ölümünden sonra Bernoulli polinomları olarak adlandırılmasını ise Euler sağlamıştır. Üzerinden yüzlerce yıl geçmesine rağmen önemini korumaya devam eden Bernoulli sayı ve polinomlarının, gelecekte de birçok uygulamaları olacağı görülmektedir [18].

Bernoulli sayıları, trigonometrik fonksiyonların Taylor seri açılımında, ilk n pozitif tamsayıların k. kuvvetlerinin toplamında, Euler-Maclaurin formülünde olmak üzere birçok uygulamada kendini göstermektedir [6,18].

Bu kısımda Bernoulli sayıları ve polinomları ile ilgili önemli tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 4.1.1. Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu;

$$G(x,t)=\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad |t|<2\pi \tag{4.1}$$

eşitliği ile tanımlanır [3,6].

Özel olarak (4.1) de $x=0$ alınırsa $B_n(0):=B_n$ Bernoulli sayısı olarak isimlendirilir. Dolayısıyla Bernoulli sayılarını üreten fonksiyon,

$$G(t)=\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!} \tag{4.2}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1. $n\in\mathbb{N}$ için Bernoulli polinomları Bernoulli sayıları cinsinden

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}B_k$$

şeklinde ifade edilir [3].

İspat. (4.1) ve (4.2) denklemlerinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\right)$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}B_k\right)\frac{t^n}{n!}$$

dir. Burada t^n katsayıları eşitlenirse Bernoulli polinomlarının açık formülü elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.2. $n\in\mathbb{N}$ için Bernoulli polinomunun simetriklik özelliği aşağıdaki gibi verilir [3].

$$B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$$

İspat. (4.1) de verilen üreteç fonksiyonu kullanılırsa,

$$G(1-x,t)=\frac{t}{e^{t}-1}e^{(1-x)t}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(1-x)\frac{t^n}{n!}=\frac{(-t)}{e^{(-t)}-1}e^{x(-t)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

olur. Burada t^n katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç,

$$B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3. $n\in\mathbb{N}$ için Bernoulli sayılarının yineleme bağıntısı aşağıdaki gibidir.

$$B_0=1,\ \ (B+1)^n-B_n=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}$$

İspat. (4.2) de her iki tarafın $t\to 0$ iken limiti alınırsa,

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^{t}-1}=1=B_0$$

elde edilir. Burada (4.2) denkleminden

$$t=e^{(B+1)t}-e^{Bt}$$

ifadesine ulaşılır.

Burada Taylor açılımı kullanılırsa istenen sonuç,

$$t=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(B+1)^n-B_n\right\}\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir [3].

4.2. Euler Sayıları ve Polinomları

Leonhard Euler 1707 yılında İsviçre'nin Basel şehrinde dört çocuklu bir ailenin en büyüğü olarak dünyaya geldi. Örgün eğitimini anneannesinin yanında tamamlayan Euler, henüz onüç yaşında iken Basel üniversitesine kaydoldu. Descartes ve Newton'un üzerinde çalıştıkları felsefeleri karşılaştırarak bir tez yayınladı. Sonraki zamanlarda ilahiyat fakültesine kaydolan Euler, yunanca ve ibranice eğitimleri de aldı. Birçok konuda başarı sağlamasına rağmen asıl başarıyı matematik alanında sağlayabileceği Johann Bernoulli tarafından keşfedildi ve bu sayede matematik alanında ders alma fırsatı oldu. Euler, Johann Bernoulli'den ders aldığı süreçte birçok matematikçinin çalışmaları ile ilgilendi ve bunlardan bir kısmını yeniden şekillendirdi [18].

Sayılar teorisi, topoloji, karmaşık analiz gibi pek çok alanda çalışmalar yapıp bu alanların öncüsü durumuna gelen Euler, ilerleyen yıllarda en üretken matematikçi ünvanını aldı. Öyle ki Gauss, 'Euler'i okuyun. O hepimizin efendisidir' sözü Euler'in ne derecede üstün bir zekaya sahip olduğunun kanıtıdır [18].

Günümüzde de halen sıkça kullandığımız doğal logaritma tabanı olan ve Euler sayısı olarak bilinen e yi, sanal kısmın ifade edilmesinde kullanılan i yi, toplamları sembolize eden $\sum$ sembolünü ve bunlar gibi pekçok simgenin yanı sıra özel birtakım fonksiyon ve denklemleri de tanıtmıştır [18].

Euler polinomları, Bernoulli polinomları ile birlikte Leonhard Euler tarafından tanımlanmıştır. Pekçok alanda kullanılan bu polinomlar günümüzde de halen popülerliğini korumakta ve birçok araştırmacı için çalışma alanı olmaya devam etmektedir. [6,18].

Bu kısımda Euler sayıları ve polinomlarının tanımı, özellikleri ve ayrıca bu polinomları hesaplamaya yarayan temel bağıntılar verilmiştir.

Tanım 4.2.1. Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu;

$$M(x,t)=\frac{2e^{xt}}{e^{t}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad |t|<\pi \tag{4.3}$$

eşitliği ile tanımlanır [3].

Özel olarak (4.3) de $x=0$ seçilirse $E_n(0):=E_n$ olarak kabul edilir ve buradaki E_n Euler sayısı olarak isimlendirilir.

Dolayısıyla Euler sayıları,

$$M(t)=\frac{2}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!} \tag{4.4}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Teorem 4.2.1. $n\in\mathbb{N}$ için Euler polinomları Euler sayıları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir [3].

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}E_k$$

İspat. (4.3) ve (4.4) bağıntılarından,

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!}\right)$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}E_k\right)\frac{t^n}{n!}$$

dir. Burada t^n katsayıları eşitlenirse istenen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.2. $n\in\mathbb{N}$ için Euler polinomunun simetrik özelliği,

$$E_n(1-x)=(-1)^nE_n(x)$$

şeklindedir [3].

İspat. (4.3) de verilen üreteç fonksiyonu kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n(1-x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2}{e^t+1}e^{(1-x)t}$$

eşitliği yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$=\frac{2}{e^t+1}e^{(-t)x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur.

Elde edilen bu eşitlikler,

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n(1-x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

şeklinde yazılır ve t^n katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç,

$$E_n(1-x)=(-1)^n E_n(x)$$

bulunur.

BÖLÜM 5

BAZI ÖZEL POLİNOMLAR

Krot'un öncülüğünü yaptığı Fibonacci kalkulüs, birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve bu konuda yapılan çalışmalar sonucunda bir takım özel polinomlar ortaya çıkmıştır [10,13-15,17].

Tezin bu bölümünde Fibonacci kalkulüs üzerine yapılan çalışmalar sonucunda ortaya çıkan bazı özel polinomların temel tanımları ve özellikleri verilecektir.

Tanım 5.1. Fibonacci serisi aşağıdaki yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ , \qquad F_0 = 0 \quad \text{ve} \quad F_1 = 1$$

Tanım 5.2. *F*-faktöriyel,

$$F_n! = F_n F_{n-1} F_{n-2} ... F_1, \qquad F_0! = 1$$

şeklinde tanımlanır [10,13-15,17].

Örnek olarak $n = 5$ için,

$$F_5! = F_5 F_4 F_3 F_2 F_1 = 5.3.2.1.1 = 30$$

olarak bulunur.

Tanım 5.3. $n \geq k \geq 1$ için Fibonomial katsayıları,

$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_n!}{F_k! F_{n-k}!}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\binom{n}{0}_F = 1$ ve $n < k$ için $\binom{n}{k}_F = 0$ dır [10,13-15,17].

Örnek olarak $n=5$ ve $k=2$ için,

$$\binom{5}{2}_F = \frac{F_5!}{F_2!F_3!} = \frac{F_5F_4F_3F_2F_1}{F_2F_1F_3F_2F_1}$$

$$= \frac{5.3.2.1.1}{1.1.2.1.1} = 15$$

olarak bulunur.

Fibonomial katsayıları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $\binom{n}{k}_F = \binom{n}{n-k}_F$
- $\binom{n}{k}_F \binom{k}{j}_F = \binom{n}{j}_F \binom{n-j}{k-j}_F$
- $\binom{n}{k}_F = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+1}} \binom{n+1}{k}_F$
- $F_{n-k}\binom{n}{k}_F = F_n \binom{n-1}{k}_F \quad (k \neq n)$
- $\binom{n}{k}_F = \frac{F_{n-k+1}}{F_k} \binom{n}{k-1}_F \quad (k \neq 0)$
- $F_k\binom{n}{k}_F = F_n \binom{n-1}{k-1}_F$
- $\binom{n}{k}_F = F_{k-1}\binom{n-1}{k}_F + F_{n-k}\binom{n-1}{k-1}_F$
- $\binom{n}{k}_F \binom{n-k}{j}_F = \binom{n}{k+j}_F \binom{k+j}{k}_F$

Tanım 5.4. Binom teoreminin *F*-benzeri,

$$\left(x +_F y\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F x^k y^{n-k}$$

şeklinde tanımlanır [13-15,17].

Tanım 5.5. Golden *F*-üstel fonksiyonu olan e_F^t

$$e_F^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!}$$

dir [13-15,17].

Tanım 5.6. (Golden *F*-türev) $f(x)$ keyfi bir fonksiyon olsun. Golden *F*-türev operatörü D_F^x, aşağıdaki şekilde formüle edilir [6].

$$D_F^x\left[f(x)\right]=\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{(\alpha-\beta)x}$$

Golden türev operatörü lineerdir. Çünkü her f ve g fonksiyonu ve λ skaleri için aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$D_F^x\left(f(x)+g(x)\right)=D_F^x\left(f(x)\right)+D_F^x\left(g(x)\right)$$

$$D_F^x\left(\lambda f(x)\right)=\lambda D_F^x\left(f(x)\right)$$

Yukarıdaki tanımda $f(x)=x^n$ alınırsa,

$$D_F^x\left[x^n\right]=\frac{(\alpha x)^n-(\beta x)^n}{(\alpha-\beta)x}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}x^{n-1}=F_n x^{n-1}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$D_F^x\left(x^n\right)=F_n x^{n-1}$$

dir.

Örnek olarak $f(x)=x^6$ alınırsa,

$$D_F^x\left[x^6\right]=\frac{(\alpha x)^6-(\beta x)^6}{(\alpha-\beta)x}$$

$$=\frac{\alpha^6-\beta^6}{\alpha-\beta}x^5$$

$$=F_6 x^5$$

$$=8x^5$$

elde edilir.

Teorem 5.1. Keyfi bir k için golden üstel fonksiyonun golden *F*-türevi

$$D_F^x\left(e_F^{kx}\right)=ke_F^{kx}$$

dir [6].

İspat. Tanım.5.5 kullanılıp her iki tarafın *F*-türevi alınırsa,

$$D_F^x\left(e_F^{kx}\right)=D_F^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kx)^n}{F_n!}\right)=D_F^x\left(\frac{1}{F_0!}+\frac{kx}{F_1!}+\frac{(kx)^2}{F_2!}+\dots\right)$$

$$=D_F^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^nx^n}{F_n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}k^n\frac{D_F^x\left(x^n\right)}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^nF_nx^{n-1}}{F_n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^nx^{n-1}}{F_{n-1}!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^{n+1}x^n}{F_n!}=k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kx)^n}{F_n!}$$

$$=ke_F^{kx}$$

elde edilir. Golden F- türev aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$D_F^x\left(x+_F y\right)^n=F_n\left(x+_F y\right)^{n-1}$$
$$D_F^y\left(x+_F y\right)^n=F_n\left(x-_F y\right)^{n-1}$$
$$D_F^y\left(x-_F y\right)^n=-F_n\left(x+_F y\right)^{n-1}$$

Aşağıda verilen tanım ilerleyen kısımlarda sık kullanılacak olan *F*-integrale aittir.

Tanım 5.7. (*F*-integral) *F*-integral,

$$\int_0^1 f(x)d_F(x)=(\alpha-\beta)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}f\left(\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}\right),\qquad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1$$

şeklinde tanımlanır.

Özel olarak $f(x) = x^n$ seçilirse,

$$\int_0^1 f(x) d_F(x) = (\alpha - \beta) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}} f\left(\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}\right)^n$$

$$= (\alpha - \beta) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{n+1}} \left(\frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}\right)^i$$

$$= \frac{(\alpha - \beta)}{\alpha^{n+1}} \left(\frac{1}{1 - \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}} \right)$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} = \frac{1}{F_{n+1}}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\int_0^1 x^n d_F(x) = \frac{1}{F_{n+1}}$$

dir [19].

Fibonomial kalkulüs birçok matematikçiye ilham kaynağı olmuş ve bu konuda birçok çalışmalar yapılmıştır. Yapılan çalışmalar sonucunda uzun yıllar önce verilmiş olan Bernoulli, Euler ve Bernstein polinomlarının Fibonacci sayı dizisine bağlı olduğu anlamına gelen yeni gösterimleri elde edilmiştir [10,13-15,17]. Elde edilen bu polinomlar ile ilgili tanım ve özellikler aşağıda verilmiştir.

5.1. Bernoulli *F*-Polinomları ve Özellikleri

Teorem 5.1.1. $\binom{n}{k}_F$ Fibonomial katsayısı ve F_n , n inci Fibonacci sayısı olmak üzere, birinci dereceden Bernoulli *F*-polinomu,

$$B_{n,F}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k}$$

şeklindedir [14].

Bernoulli F-polinomunun ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir.

$$B_{0,F}(x)=1$$
$$B_{1,F}(x)=x+1$$
$$B_{2,F}(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$$
$$B_{3,F}(x)=x^3+2x^2+x+\frac{1}{3}$$
$$B_{4,F}(x)=x^4+3x^3+3x^2+x+\frac{1}{5}$$

Burada özel olarak $x=0$ alınırsa,

$$B_{0,F}(0)=1,\qquad B_{1,F}(0)=1,\qquad B_{2,F}(0)=\frac{1}{2},\quad B_{3,F}(0)=\frac{1}{3},\quad B_{4,F}(0)=\frac{1}{5},...$$

olacaktır. Dolayısıyla $B_{n,F}(0):=B_{n,F}$ Bernoulli F-sayıları olarak tanımlanırsa, Bernoulli F-sayıları,

$$B_{n,F}=\frac{1}{F_{n+1}}$$

ve F-integralin tanımı gereği,

$$B_{n,F}=\int_0^1 x^n d_F(x)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 5.1.2. $B_{n,F}(x)$ Bernoulli F-polinomunun üreteç fonksiyonu,

$$g(x,t)=\frac{\left(e_F^t-1\right)e_F^{xt}}{t}$$

şeklinde tanımlanır [14].

İspat. Teoremin ispatı için F-üstel fonksiyonun açılımı kullanılırsa,

$$\frac{(e_F^t-1)e_F^{xt}}{t}=\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}-1\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{F_n!}\right)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{n+1}}\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{F_n!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{k+1}!}\frac{x^{n-k}}{F_{n-k}!}\right)t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F x^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,F}(x)\frac{t^n}{F_n!}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teoremde Bernoulli F-polinom ile F-integrali arasındaki bağıntı verilmiştir.

Teorem 5.1.3. Bernoulli F-polinomu ile F-integrali arasındaki özdeşlik,

$$\int_0^1 \left(x+_F y\right)^n d_F\left(y\right)=B_{n,F}\left(x\right)$$

şeklindedir [19].

İspat. Bernoulli F-polinomunun tanımı $B_{n,F}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F x^{n-k}$

ve F-integralin tanımı $\int_0^1 x^n d_F\left(x\right)=\frac{1}{F_{n+1}}$

kullanılırsa,

$$\int_0^1 \left(x+_F y\right)^n d_F\left(y\right)=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F x^k y^{n-k}\right)d_F\left(y\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F x^k\int_0^1 y^{n-k}d_F\left(y\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F x^k \frac{1}{F_{n-k+1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F x^{n-k}$$

$$=B_{n,F}\left(x\right)$$

elde edilir.

Teorem 5.1.4. $B_{n,F}\left(x+y\right)$ Bernoulli *F*-polinom olmak üzere,

$$B_{n,F}\left(x+y\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_{k,F}\left(x\right)y^{n-k}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $B_{n,F}\left(x+y\right)=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F\left(x+_F y\right)^{n-k}$ dir [14].

İspat. Bernoulli *F*-polinomunun tanımı gereği,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,F}\left(x\right)\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^n\frac{t^n}{F_n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{k,F}\left(x\right)}{F_k!}\frac{y^{n-k}}{F_{n-k}!}\right)t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_{k,F}\left(x\right)y^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,F}\left(x\right)\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^n\frac{t^n}{F_n!}\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F x^{n-k}\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^n\frac{t^n}{F_n!}\right)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{n+1}}\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^n\frac{t^n}{F_n!}\right)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{F_{n+1}!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(x+_F y\right)^n\frac{t^n}{F_n!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F\left(x+_F y\right)^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,F}\left(x+y\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

dir. Her iki eşitlikteki t^n katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç,

$$B_{n,F}\left(x+y\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_{k,F}\left(x\right)y^{n-k}$$

elde edilmiş olur.

5.2. Euler-Fibonacci Sayıları ve Polinomları

Tanım 5.2.1. Negatif olmayan tüm n tamsayıları için Euler-Fibonacci sayıları $E_{0,F}=1$ olmak üzere,

$$E_{n,F}=-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_{k,F}$$

şeklinde tanımlanır [14].

Euler-Fibonacci sayılarının ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir.

$$E_{0,F}=1,\quad E_{1,F}=-\frac{1}{2},\quad E_{2,F}=\frac{1}{4},\quad E_{3,F}=-\frac{1}{4},\quad E_{4,F}=\frac{11}{8},\quad E_{5,F}=\frac{17}{16}$$

Teorem 5.2.1. $E_{n,F}$ Euler-Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,F}\frac{t^n}{F_n!}=\frac{2}{e_F^t+1}$$

dir [14].

İspat. İspat için,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,F}\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(e_F^t+1\right)=2$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. O halde,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}+1\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}\right)$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}\frac{t^n}{F_n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{E_{k,F}}{F_k!}\frac{1}{F_{n-k}!}\right)t^n$$

$$=2\sum_{n=}^{\infty} E_{n,F}\frac{t^n}{F_n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_{k,F}-E_{n,F}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}\frac{t^n}{F_n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-2E_{n,F}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=2$$

elde edilir ve istenen eşitlik sağlanmış olur.

Tanım 5.2.2. $E_{0,F}(x)=1$ ve $E_{n,F}$, n inci Euler-Fibonacci sayısı olmak üzere Euler-Fibonacci polinomları,

$$E_{n,F}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_{k,F}x^{n-k}$$

şeklinde tanımlanır [14].

Euler-Fibonacci polinomlarının ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir.

$$E_{0,F}(x)=1$$
$$E_{1,F}(x)=x-\frac{1}{2}$$
$$E_{2,F}(x)=x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$$
$$E_{3,F}(x)=x^3-x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$$
$$E_{4,F}(x)=x^4-\frac{3}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{11}{8}$$
$$E_{5,F}(x)=x^5-\frac{5}{4}x^4+\frac{15}{4}x^3-\frac{15}{4}x^2+\frac{55}{8}x+\frac{17}{16}$$

Teorem 5.2.2. $E_{n,F}(x)$, Euler-Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{2e_F^{xt}}{e_F^t+1}$$

şeklindedir [14].

İspat. Euler-Fibonacci polinomunun tanımı kullanılırsa,

$$\frac{2e_F^{xt}}{\left(e_F^t+1\right)}=\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}\frac{t^n}{F_n!}\sum_{n=0}^{\infty} x^n\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{E_{k,F}}{F_k!}\frac{x^{n-k}}{F_{n-k}!}\right)t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_{k,F}x^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x)\frac{t^n}{F_n!}$$

bulunur ve arzu edilen eşitlik elde edilmiş olur.

5.3. Bernoulli-Fibonacci Sayıları ve Polinomları

Tanım 5.3.1. Negatif olmayan tüm n tamsayıları için Bernoulli-Fibonacci polinomları $B_n^F(x)$ in üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir [14].

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{te_F^{xt}}{e_F^t-1}$$

Burada $B_n^F(0)=B_n^F$ dir. Dolayısıyla n inci Bernoulli-Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F\frac{t^n}{F_n!}=\frac{t}{e_F^t-1}$$

olacaktır.

Tanım 5.3.2. B_n^F, Bernoulli-Fibonacci sayıları, $B_0^F = 1$ olmak üzere,

$$B_n^F = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{n-k+1}} \binom{n}{k}_F B_k^F$$

şeklinde tanımlanır [14].

Bernoulli-Fibonacci sayılarının ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir.

$$B_0^F = 1, \quad B_1^F = -1, \quad B_2^F = \frac{1}{2}, \quad B_3^F = -\frac{1}{3}, \quad B_4^F = \frac{3}{10}, \quad B_5^F = -\frac{5}{8}$$

Tanım 5.3.3. n inci Bernoulli-Fibonacci polinomlarının yenileme bağıntısı,

$$B_n^F(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F B_k^F x^{n-k}$$

şeklindedir [14].

Bernoulli-Fibonacci polinomlarının ilk birkaç terimi aşağıda verilmiştir.

$$B_0^F(x) = 1$$
$$B_1^F(x) = x + 1$$
$$B_2^F(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$$
$$B_3^F(x) = x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{3}$$
$$B_4^F(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + \frac{3}{10}$$
$$B_5^F(x) = x^5 - 5x^4 + \frac{15}{2}x^3 - 5x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$$

5.4. *F*-Bernstein Polinomları

Son zamanlarda Erdem ve arkadaşları Bernstein polinomlarının Fibonacci sayı dizisine bağlı olduğu anlamı taşıyan *F*-Bernstein polinomlarını tanıttılar. Yaptıkları çalışmada bu polinomlarla ilgili bazı özellikleri ve özdeşlikleri inceleyip, *F*-Bernstein polinomlarını üreten bir fonksiyon tanımladılar [10]. Bu kısımda, Erdem ve arkadaşları tarafından tanımlanan *F*-Bernstein polinomlarının bazı tanımları, özellikleri ve Fibonacci sayıları ile ilgili bazı özdeşlikleri verilecektir.

Tanım 5.4.1. $k,n\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $k=0,1,2,3,...,n$ ve $k\leq n$ olmak üzere, n-inci dereceden F-Bernstein polinomları,

$$B_{k,n}^{F}\left(x\right)=\binom{n}{k}_{F}x^{k}\left(1-x\right)^{n-k} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır [10].

İlk birkaç F-Bernstein polinomları aşağıda verilmiştir.

• $B_{0,0}^{F}\left(x\right)=1$

• $B_{0,1}^{F}\left(x\right)=1-x,\ B_{1,1}^{F}\left(x\right)=x$

• $B_{0,2}^{F}\left(x\right)=1-2x+x^{2},\ B_{1,2}^{F}\left(x\right)=x-x^{2},\ B_{2,2}^{F}\left(x\right)=x^{2}$

• $B_{0,3}^{F}\left(x\right)=1-3x+3x^{2}-x^{3},\ B_{1,3}^{F}\left(x\right)=2x-4x^{2}+2x^{3},\ B_{2,3}^{F}\left(x\right)=2x^{2}-2x^{3},\ B_{3,3}^{F}\left(x\right)=x^{3}$

• $B_{0,4}^{F}\left(x\right)=1-4x+6x^{2}-4x^{3}+x^{4},\ B_{1,4}^{F}\left(x\right)=3x-9x^{2}+9x^{3}-3x^{4},$
$B_{2,4}^{F}\left(x\right)=6x^{2}-12x^{3}+6x^{4},\ B_{3,4}^{F}\left(x\right)=3x^{3}-3x^{4},\ B_{4,4}^{F}\left(x\right)=x^{4}$

Teorem 5.4.1. F-Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{k\leq n}B_{k,n}^{F}\left(x\right)\frac{t^{n}}{F_{n}!}=\frac{\left(xt\right)^{n}}{F_{k}!}e_{F}^{(1-x)t}$$

şeklinde verilir [10].

İspat. İspat için F-üstel fonksiyonunun Taylor seri açılımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{x^{k}t^{k}}{F_{k}!}e_{F}^{(1-x)t}&=\frac{x^{k}t^{k}}{F_{k}!}\sum_{0\leq n}\frac{\left(1-x\right)^{n}t^{n}}{F_{n}!}\\&=\frac{1}{F_{k}!}\sum_{0\leq n}\frac{x^{k}\left(1-x\right)^{n}t^{n+k}}{F_{n}!}\\&=\sum_{0\leq n}\frac{F_{n+k}!}{F_{n}!F_{k}!}\frac{x^{k}\left(1-x\right)^{n}t^{n+k}}{F_{n+k}!}\end{aligned}$$

$$=\sum_{0\le n}\binom{n+k}{k}_F \frac{x^k(1-x)^n t^{n+k}}{F_{n+k}!}$$

$$=\sum_{k\le n}\left(\binom{n}{k}_F x^k(1-x)^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{k\le n} B_{k,n}^F(x)\frac{t^n}{F_n!}$$

bulunur ve istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

Teorem 5.4.2. *F*-Bernstein polinomları $x\in[0,1)$ olmak üzere aşağıdaki özyenileme bağıntısına sahiptir [10].

$$B_{k,n}^F(x)=\frac{F_{n-k+1}}{F_k}\frac{x}{1-x}B_{k-1,n}^F(x)$$

İspat. İspat için (5.1) kullanılırsa,

$$B_{k,n}^F(x)=\binom{n}{k}_F x^k(1-x)^{n-k}=\frac{F_{n-k+1}}{F_k}\binom{n}{k-1}_F x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{F_{n-k+1}}{F_k}\binom{n}{k-1}_F x^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)}\frac{x}{1-x}$$

$$=\frac{F_{n-k+1}}{F_k}\frac{x}{1-x}B_{k-1,n}^F(x)$$

elde edilir.

Teorem 5.4.3. *n*. dereceden *F*-Bernstein polinomları $(n-1)$. dereceden iki *F*-Bernstein polinomunun doğrusal kombinasyonu,

$$B_{k,n}^F(x)=(1-x)F_{k-1}B_{k,n-1}^F(x)+xF_{n-k}B_{k-1,n-1}^F(x)$$

olacak şekilde yazılır [10].

İspat. (5.1) ve Fibonomial katsayıları özelliği kullanılırsa,

$$B_{k,n}^{F}(x)=\binom{n}{k}_F x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\left[F_{k-1}\binom{n-1}{k}_F+F_{n-k}\binom{n-1}{k-1}_F\right]x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=F_{k-1}\binom{n-1}{k}_F x^k(1-x)^{n-k}+F_{n-k}\binom{n-1}{k-1}_F x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=(1-x)F_{k-1}\binom{n-1}{k}_F x^k(1-x)^{n-k-1}+xF_{n-k}\binom{n-1}{k-1}_F x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=(1-x)F_{k-1}B_{k,n-1}^{F}(x)+xF_{n-k}B_{k-1,n-1}^{F}(x)$$

elde edilir ve istenen ispat gösterilmiş olur.

BÖLÜM 6

BULGULAR VE SONUÇLAR

Bu bölümde, tez boyunca yapılan çalışma ve araştırmalar sonucunda ortaya çıkan bulgular ve sonuçlara yer verilmiştir.

Elde edilen bu bulgular ve sonuçların okuyucular açısından daha iyi anlaşılmasını sağlamak amacıyla hatırlatılması gereken tanımlar aşağıdaki gibidir.

$B_n^F(x)$, Bernoulli-Fibonacci polinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{te_F^{xt}}{e_F^t-1}$$

ve B_n^F, Bernoulli-Fibonacci sayıları;

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F\frac{t^n}{F_n!}=\frac{t}{e_F^t-1}$$

eşitlikleri ile tanımlanmıştır.

Aynı şekilde $E_{n,F}(x)$, Euler-Fibonacci polinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}(x)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{2e_F^{xt}}{e_F^t+1}$$

ve $E_{n,F}$, Euler-Fibonacci sayıları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,F}\frac{t^n}{F_n!}=\frac{2}{e_F^t+1}$$

eşitlikleri ile tanımlanmıştır.

6.1. Bernoulli-Fibonacci ve Euler-Fibonacci Polinomlarının Birleştirilmesi

Bernoulli-Fibonacci ve Euler-Fibonacci sayı ve polinomlarının birleştirilmesini sağlamak için gereken polinomun tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 6.1.1. ξ sıfırdan farklı bir reel sayı ve k bir tamsayı olmak üzere $D_{n,F}(x;\xi,k)$ polinomunun üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!} = \frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{xt}}{e_F^t - \xi} \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlanır.

$D_{n,F}(x;\xi,k)$ polinomu, Bernoulli-Fibonacci ve Euler-Fibonacci polinomlarının birleştirilmiş şeklidir. Yani,

i) Eğer $\xi = k = 1$ ise $D_{n,F}(x;\xi,k)$ polinomu,

$$D_{n,F}(x;1,1) = B_n^F(x)$$

dir.

ii) Eğer $\xi = k = 1$ ve $x = 0$ ise $D_{n,F}(x;\xi,k)$ polinomu,

$$D_{n,F}(0;1,1) = B_n^F$$

dir.

iii) Eğer $\xi = -1,\ k = 0$ ise $D_{n,F}(x;\xi,k)$ polinomu,

$$D_{n,F}(x;-1,0) = E_{n,F}(x)$$

dir.

iv) Eğer $\xi = -1$ ve $x = k = 0$ ise $D_{n,F}(x;\xi,k)$ polinomu,

$$D_{n,F}(0;-1,0) = E_{n,F}$$

dir.

6.2. Bernoulli *F*-Polinomlarının Genelleştirilmesi

Bernoulli *F*-polinomunun genelleştirilmesini yapmak için gereken polinomun tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 6.2.1. ξ sıfırdan farklı bir reel sayı ve k bir tamsayı olmak üzere Bernoulli tipli *F*-polinomlarının üreteç fonksiyonunu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{n,F}(x;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!} = \frac{e_F^{xt}(e_F^t - \xi)}{t^k} \tag{6.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\xi = k = 1$ için Bernoulli tipli *F*-polinomları,

$$M_{n,F}(x;1,1) = B_{n,F}(x)$$

dir.

Aşağıdaki teoremlerde $D_{n,F}(x;\xi,k)$ ve $M_{n,F}(x;\xi,k)$ polinomları ile ilgili bazı özdeşliklere ve özelliklere yer verilmiştir.

Teorem 6.1. ξ sıfırdan farklı bir reel sayı ve k bir tamsayı olmak üzere Bernoulli tipli *F*-polinomlarının *F*-türevi,

$$D_F^x\left(M_{n,F}(x;\xi,k)\right) = F_n M_{n-1,F}(x;\xi,k)$$

dir. Burada $n < r$ için $M_{n-r,F}(x;\xi,k) = 0$ dır.

İspat. (6.2) de her iki tarafın *F*-türevi alınırsa,

$$D_F^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} M_{n,F}(x;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}\right) = D_F^x\left(\frac{e_F^{xt}\left(e_F^t - \xi\right)}{t^k}\right)$$

$$= \frac{D_F^x\left(e_F^{xt}\right)\left(e_F^t - \xi\right)}{t^k}$$

$$=\frac{te_F^{xt}\left(e_F^t-\xi\right)}{t^k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}M_{n,F}(x;\xi,k)\frac{t^{n+1}}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}M_{n-1,F}(x;\xi,k)\frac{t^{n}}{F_{n-1}!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}F_nM_{n-1,F}(x;\xi,k)\frac{t^{n}}{F_{n}!}$$

dir. Burada t^n katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 6.2. Bernoulli tipli *F*-polinomu için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$M_{n,F}(x+y;\xi,k)=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}_F M_{s,F}\left(x;\xi,k\right)y^{n-s}$$

İspat. İspat için (6.2) deki üreteç fonksiyonu kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}M_{n,F}(x+y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{(e_F^t-\xi)e_F^{(x+_F y)t}}{t^k}$$

$$=\frac{(e_F^t-\xi)e_F^{xt}e_F^{yt}}{t^k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}M_{n,F}\left(x;\xi,k\right)\frac{t^n}{F_n!}\sum_{n=0}^{\infty}y^n\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}_F M_{s,F}\left(x;\xi,k\right)y^{n-s}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

elde edilir. Buradan t^n katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç,

$$M_{n,F}(x+y;\xi,k)=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}_F M_{s,F}\left(x;\xi,k\right)y^{n-s}$$

bulunur.

Teorem 6.3. Bernoulli tipli F-polinomu için,

$$\binom{n}{k}_F F_k!M_{n-k,F}\left(x;\xi,k\right)+\xi x^n=\begin{cases}\left(x+_F 1\right)^n, & n\geq k\\ 0, & n<k\end{cases}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. İspat için (6.2) deki üreteç fonksiyonu kullanılırsa,

$$e_F^{xt}\left(e_F^t-\xi\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}-\xi\right)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}\right)-\xi\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n}x^r\frac{t^n}{F_r!F_{n-r}!}\right)-\xi\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F x^r-\xi x^n\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(x+_F 1\right)^n-\xi x^n\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

dir. Diğer taraftan,

$$e_F^{xt}\left(e_F^t-\xi\right)=\sum_{n=0}^{\infty}t^kM_{n,F}(x;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}M_{n,F}(x;\xi,k)\frac{t^{n+k}}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}M_{n-k,F}(x;\xi,k)\frac{t^n}{F_{n-k}!}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}F_k!\binom{n}{k}_F M_{n-k,F}(x;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}$$

elde edilir. Buradan t^n katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç,

$$\binom{n}{k}_F F_k!M_{n-k,F}\left(x;\xi,k\right)+\xi x^n=\left(x+_F 1\right)^n \ , \qquad n\geq k$$

veya

$$\binom{n}{k}_F F_k!M_{n-k}\left(x;\xi,k\right)=\left(x+_F 1\right)^n-\xi x^n \ , \quad n\geq k$$

elde edilmiş olur.

Burada özel olarak $\xi=k=1$ alınırsa $M_{n,F}(x;1,1)=B_{n,F}(x)$ olduğundan,

$$F_nB_{n-1,F}\left(x\right)=\left(x+_F 1\right)^n-x^n \ , \quad n\geq 1$$

dir.

Teorem 6.4. $D_{n,F}(x;\xi,k)$ ve $M_{n,F}(x;\xi,k)$ polinomları aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}(x;\xi,k)M_{n-r,F}(y;\xi,k)=\frac{1}{2^{k-1}}\left(x+_F y\right)^n$$

İspat. İspat için (6.1) ve (6.2) de verilen üreteç fonksiyonları taraf tarafa çarpılırsa,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}D_{n,F}(x;\xi,t)\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}M_{n,F}(y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}\right)=\left(\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{xt}}{\left(e_F^t-\xi\right)}\right)\left(\frac{\left(e_F^t-\xi\right)e_F^{yt}}{t^k}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{k-1}}e_F^{\left(x+_F y\right)t}=\frac{1}{2^{k-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(x+_F y\right)^n\frac{t^n}{F_n!}$$

bulunur. Eşitliğin sol tarafında Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}\left(x;\xi,k\right)M_{n-r,F}\left(y;\xi,k\right)\right)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{1}{2^{k-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(x+_F y\right)^n\frac{t^n}{F_n!}$$

elde edilir. Burada t^n katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç,

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}(x;\xi,k)M_{n-r,F}(y;\xi,k)=\frac{1}{2^{k-1}}\left(x+_F y\right)^n \tag{6.3}$$

elde edilmiş olur.

Teorem 6.5. Bernoulli F-polinomu ile $D_{n,F}(x;\xi,k)$ ve $M_{n,F}(x;\xi,k)$ polinomları arasındaki ilişki,

$$B_{n,F}(x)=2^{k-1}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}(x;\xi,k)\left(\frac{M_{n-r+1,F}(1;\xi,k)-M_{n-r+1,F}(0;\xi,k)}{F_{n-r+1}}\right)$$

şeklindedir.

İspat. (6.3) deki eşitliğin her iki tarafının F-integrali alınırsa,

$$\int_0^1\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}(x;\xi,k)M_{n-r,F}(y;\xi,k)d_F(y)=\int_0^1\frac{1}{2^{k-1}}\left(x+_F y\right)^n d_F(y)$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}(x;\xi,k)\int_0^1 M_{n-r,F}(y;\xi,k)d_F(y)=\frac{1}{2^{k-1}}\int_0^1\left(x+_F y\right)^n d_F(y)$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}(x;\xi,k)\left(\frac{M_{n-r+1,F}(1;\xi,k)-M_{n-r+1,F}(0;\xi,k)}{F_{n-r+1}}\right)=\frac{1}{2^{k-1}}B_{n,F}(x)$$

dir.

Sonuç olarak,

$$B_{n,F}(x)=2^{k-1}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}(x;\xi,k)\left(\frac{M_{n-r+1,F}(1;\xi,k)-M_{n-r+1,F}(0;\xi,k)}{F_{n-r+1}}\right)$$

elde edilir.

Teorem 6.6. $D_{n,F}(x;\xi,k)$ polinomunun F-türevi,

$$D_F^x\left(D_{n,F}(x;\xi,k)\right)=F_nD_{n-1,F}(x;\xi,k)$$

şekildedir.

İspat. (6.1) deki eşitlikte her iki tarafının F-türevini alınırsa,

$$D_F^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}\right) = D_F^x\left(\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{xt}}{e_F^t-\xi}\right)$$

$$= \frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k D_F^x\left(e_F^{xt}\right)}{e_F^t-\xi}$$

$$= \frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k te_F^{xt}}{e_F^t-\xi}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x;\xi,k)\frac{t^{n+1}}{F_n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} D_{n-1,F}(x;\xi,k)\frac{t^n}{F_{n-1}!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} F_n D_{n-1,F}(x;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}$$

eşitliği sağlanır. Burada t^n katsayıları eşitlenirse istenilen eşitlik,

Teorem 6.7. Aşağıda verilen eşitlik geçerlidir.

$$D_{n,F}\left(x+y;\xi,k\right) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}\left(x;\xi,k\right)y^{n-r} \tag{6.4}$$

İspat. (6.1) den,

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x+y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!} = \frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{(x+_F y)t}}{e_F^t-\xi}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x+y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{(x+_F y)t}}{e_F^t-\xi}$$

$$=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{xt}e_F^{yt}}{e_F^t-\xi}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\frac{t^n}{F_n!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}(x;\xi,k)y^{n-r}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

dir. Eğer t^n katsayıları eşitlenirse sonuç olarak,

$$D_{n,F}\left(x+y;\xi,k\right)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}\left(x;\xi,k\right)y^{n-r}$$

bulunur.

Teorem 6.8. ξ sıfırdan farklı bir reel sayı ve k bir tamsayı olmak üzere,

$$D_{n,F}\left(x+1;\xi,k\right)-\xi\,D_{n,F}\left(x;\xi,k\right)=\begin{cases}\frac{1}{2^{k-1}}\binom{n}{k}_F F_k!x^{n-k}, & n\geq k\\ 0, & n<k\end{cases}$$

dir.

İspat. (6.1) deki üreteç fonksiyonu kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}\left(x+1;\xi,k\right)\frac{t^n}{F_n!}-\xi\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}\left(x;\xi,k\right)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{(x+_F 1)t}}{e_F^t-\xi}-\xi\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{xt}}{e_F^t-\xi}$$

$$=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{xt}}{e_F^t-\xi}\left(e_F^t-\xi\right)$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^{n+k}}{F_n!}$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{n=k}^{\infty} x^{n-k} \frac{t^n}{F_{n-k}!}$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}_F F_k! x^{n-k} \frac{t^n}{F_n!}$$

eşitliği sağlanır. Burada t^n katsayıları eşitlenirse,

$$D_{n,F}(x+1;\xi,k) - \xi D_{n,F}(x;\xi,k) = \frac{1}{2^{k-1}} \binom{n}{k}_F F_k! x^{n-k}, \qquad n \geq k$$

elde edilir.

Teorem 6.9. Herhangi bir $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$2\left(\frac{t}{2}\right)^k x^n + \xi D_{n,F}(x;\xi,k) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}_F D_{r,F}(x;\xi,k)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (6.1) deki üreteç fonksiyonu kullanılırsa,

$$2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{xt} = 2\left(\frac{t}{2}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{t}{2}\right)^k x^n \frac{t^n}{F_n!}$$

dir. Diğer taraftan,

$$2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{xt} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x;\xi,k) \frac{t^n}{F_n!}\right)\left(e_F^t - \xi\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x;\xi,k) \frac{t^n}{F_n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{F_n!}\right) - \xi \sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x;\xi,k) \frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}\left(x;\xi,k\right)\right)\frac{t^n}{F_n!}-\xi\sum_{n=0}^{\infty}D_{n,F}\left(x;\xi,k\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}\left(x;\xi,k\right)-\xi\sum_{n=0}^{\infty}D_{n,F}\left(x;\xi,k\right)\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

dir. Burada t^n katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç,

$$2\left(\frac{t}{2}\right)^k x^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}\left(x;\xi,k\right)-\xi D_{n,F}\left(x;\xi,k\right)$$

veya

$$2\left(\frac{t}{2}\right)^k x^n+\xi D_{n,F}\left(x;\xi,k\right)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F D_{r,F}\left(x;\xi,k\right)$$

gösterilmiş olur.

Burada özel olarak $\xi=-1,\ k=0$ alınırsa $D_{n,F}(x;-1,0)=E_{n,F}(x)$ olduğundan,

$$2x^n-E_{n,F}\left(x\right)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_F E_{r,F}\left(x\right)$$

dir.

Teorem 6.10. $D_{n,F}\left(x;\xi,k\right)$ polinomunun *F*-türevleri toplamı,

$$D_F^x\left(D_{n,F}(x+y;\xi,k)\right)+D_F^y\left(D_{n,F}(x-y;\xi,k)\right)=0$$

dir.

İspat. (6.1) de verilen eşitlikten

$$\sum_{n=0}^{\infty}D_{n,F}(x+y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{\left(x+_F y\right)t}}{e_F^t-\xi}$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının *F*-türevi alınırsa,

$$D_F^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x+y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}\right)=D_F^x\left(\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{(x+_F y)t}}{e_F^t-\xi}\right)$$

$$=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k}{e_F^t-\xi}\sum_{n=0}^{\infty} D_F^x\left(x+_F y\right)^n\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k}{e_F^t-\xi}\sum_{n=0}^{\infty} F_n\left(x+_F y\right)^{n-1}\frac{t^n}{F_n!}$$

bulunur. Burada t^n katsayıları eşitlenirse,

$$D_F^x\left(D_{n,F}(x+y;\xi,k)\right)=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k}{e_F^t-\xi}F_n\left(x+_F y\right)^{n-1}$$

elde dilir. Benzer şekilde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x-y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{(x-_F y)t}}{e_F^t-\xi}$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının *F*-türevi alınırsa,

$$D_F^y\left(\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,F}(x-y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}\right)=D_F^y\left(\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k e_F^{(x-_F y)t}}{e_F^t-\xi}\right)$$

$$=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k}{e_F^t-\xi}\sum_{n=0}^{\infty} D_F^y\left(x-_F y\right)^n\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k}{e_F^t-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-F_n\left(x+_F y\right)^{n-1}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

bulunur. Burada t^n katsayıları eşitlenirse,

$$D_F^y\left(D_{n,F}(x-y;\xi,k)\right)=-\frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^k}{e_F^t-\xi}F_n\left(x+_F y\right)^{n-1}$$

elde edilir. Elde edilen bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa istenen sonuç,

$$D_F^x\left(D_{n,F}(x+y;\xi,k)\right)+D_F^y\left(D_{n,F}(x-y;\xi,k)\right)=0$$

elde edilmiş olur.

Teorem 6.11. Bernoulli tipli F-polinomları için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$D_F^x\left(M_{n,F}(x+y;\xi,k)\right)+D_F^y\left(M_{n,F}(x-y;\xi,k)\right)=0$$

İspat. (6.2) de verilen eşitlikten

$$\sum_{n=0}^{\infty}M_{n,F}(x+y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{\left(e_F^t-\xi\right)e_F^{(x+_F y)t}}{t^k}$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının F-türevi alınırsa,

$$D_F^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}M_{n,F}(x+y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}\right)=D_F^x\left(\frac{\left(e_F^t-\xi\right)e_F^{(x+_F y)t}}{t^k}\right)$$

$$=\frac{\left(e_F^t-\xi\right)}{t^k}\sum_{n=0}^{\infty}D_F^x\left(\left(x+_F y\right)^n\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\frac{\left(e_F^t-\xi\right)}{t^k}\sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(x+_F y\right)^{n-1}\frac{t^n}{F_n!}$$

bulunur. Burada t^n katsayıları eşitlenirse,

$$D_F^y\left(M_{n,F}(x+y;\xi,k)\right)=\frac{\left(e_F^t-\xi\right)}{t^k}F_n\left(x+_F y\right)^{n-1}$$

elde dilir. Benzer şekilde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{n,F}(x-y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{\left(e_F^t-\xi\right)e_F^{(x-_F y)t}}{t^k}$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının F-türevi alınırsa,

$$D_F^y\left(\sum_{n=0}^{\infty} M_{n,F}(x-y;\xi,k)\frac{t^n}{F_n!}\right)=D_F^y\left(\frac{\left(e_F^t-\xi\right)e_F^{(x-_F y)t}}{t^k}\right)$$

$$=\frac{\left(e_F^t-\xi\right)}{t^k}\sum_{n=0}^{\infty} D_F^x\left(\left(x-_F y\right)^n\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

$$=\frac{\left(e_F^t-\xi\right)}{t^k}\sum_{n=0}^{\infty} -F_n\left(x+_F y\right)^{n-1}\frac{t^n}{F_n!}$$

bulunur. Burada t^n katsayıları eşitlenirse,

$$D_F^y\left(M_{n,F}(x-y;\xi,k)\right)=-\frac{\left(e_F^t-\xi\right)}{t^k}F_n\left(x+_F y\right)^{n-1}$$

elde edilir. Elde edilen bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa istenen sonuç,

$$D_F^x\left(M_{n,F}(x+y;\xi,k)\right)+D_F^y\left(M_{n,F}(x-y;\xi,k)\right)=0$$

elde edilmiş olur.

Bulgular ve sonuçlar bölümünün buraya kadar olan kısmında Bernoulli F-polinomu, Euler-Fibonacci ve Bernoulli-Fibonacci sayıları ve polinomları ile ilgili yapılan çalışmalar verilmiş ve Euler-Fibonacci ve Bernoulli-Fibonacci sayıları ve polinomlarının birleştirilmesi sağlanmıştır. Ayrıca Bernoulli F-polinomunun genelleştirilmesi yapılmıştır.

6.3. *F*-Bernstein Polinomu Uygulamaları

Bu kısımda Bernstein polinomlarının Fibonacci sayıları dizisine bağlı olduğu anlamına gelen F-Bernstein polinomları ile ilgili yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen bazı yeni özdeşlikler verilecektir.

Teorem 6.12. *F*-Bernstein polinomları,

$$B_{k,n-1}^{F}(x)\,B_{k,n+1}^{F}(x)=\frac{F_{n+1}F_{n-k}}{F_{n}F_{n-k+1}}\left[B_{k,n}^{F}(x)\right]^{2}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. *F*-Bernstein polinomlarının tanımı gereği,

$$B_{k,n-1}^{F}(x)=\binom{n-1}{k}_{F}x^{k}(1-x)^{n-k-1}$$

ve

$$B_{k,n+1}^{F}(x)=\binom{n+1}{k}_{F}x^{k}(1-x)^{n-k+1}$$

dir. Bu ifadeler taraf tarafa çarpılırsa,

$$B_{k,n-1}^{F}(x)\,B_{k,n+1}^{F}(x)=\binom{n-1}{k}_{F}\binom{n+1}{k}_{F}x^{2k}(1-x)^{2n-2k}$$

$$=\frac{F_{n-1}!}{F_{k}!F_{n-k-1}!}\frac{F_{n+1}!}{F_{k}!F_{n-k+1}!}x^{2k}(1-x)^{2n-2k}$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$B_{k,n-1}^{F}(x)\,B_{k,n+1}^{F}(x)=\frac{F_{n+1}F_{n-k}}{F_{n}F_{n-k+1}}\binom{n}{k}_{F}\binom{n}{k}_{F}x^{2k}(1-x)^{2n-2k}$$

$$=\frac{F_{n+1}F_{n-k}}{F_{n}F_{n-k+1}}\left[B_{k,n}^{F}(x)\right]^{2}$$

elde edilir ve arzu edilen eşitlik gösterilmiş olur.

Teorem 6.13. *F*-Bernstein polinomları,

$$F_{k}B_{k,n}^{F}(x)=xF_{n}B_{k-1,n-1}^{F}(x)$$

eşitliği sağlar.

İspat. F-Bernstein polinomu tanımında her iki taraf F_k ile çarpılıp, $F_k\binom{n}{k}_F = F_n\binom{n-1}{k-1}_F$ özelliği kullanılırsa,

$$F_k B_{k,n}^F(x) = F_k\binom{n}{k}_F x^k(1-x)^{n-k} = F_n\binom{n-1}{k-1}_F x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= xF_n\binom{n-1}{k-1}_F x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$= xF_n B_{k-1,n-1}^F(x)$$

elde edilir ve arzu edilen eşitlik gösterilmiş olur.

Teorem 6.14. F-Bernstein polinomlarının simetriklik özelliği,

$$B_{k,n}^F(1-x) = B_{n-k,n}^F(x)$$

şeklindedir.

İspat. F-Bernstein polinomlarının tanımı gereği,

$$B_{k,n}^F(1-x) = \binom{n}{k}_F (1-x)^k x^{n-k} = \binom{n}{n-k}_F (1-x)^k x^{n-k}$$

$$= \binom{n}{n-k}_F x^{n-k}(1-x)^{n-(n-k)}$$

$$= B_{n-k,n}^F(x)$$

elde edilir ve arzu edilen eşitlik gösterilmiş olur.

Teorem 6.15. F-Bernstein polinomları,

$$B_{k,n}^F(x)B_{k,n}^F(1-x) = \left[\binom{n}{k}_F\right]^2 B_{n,n}^F(x)B_{0,n}^F(x)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. F-Bernstein polinomu tanımından,

$$B_{k,n}^{F}(x)=\binom{n}{k}_F x^k(1-x)^{n-k}$$

$$B_{k,n}^{F}(1-x)=\binom{n}{k}_F (1-x)^k x^{n-k}$$

dir. Burada taraf tarafa çarpma işlemi yapılırsa,

$$B_{k,n}^{F}(x)B_{k,n}^{F}(1-x)=\binom{n}{k}_F x^k(1-x)^{n-k}\binom{n}{k}_F (1-x)^k x^{n-k}$$

$$=\left[\binom{n}{k}_F\right]^2 x^n(1-x)^n$$

$$=\left[\binom{n}{k}_F\right]^2\left(\binom{n}{n}_F x^n(1-x)^0\right)\left(\binom{n}{0}_F x^0(1-x)^n\right)$$

$$=\left[\binom{n}{k}_F\right]^2 B_{n,n}^{F}(x)B_{0,n}^{F}(x)$$

elde edilir. Böylece arzu edilen eşitlik gösterilmiş olur.

Teorem 6.16. F-Bernstein polinomları,

$$\binom{k}{r}_F B_{k,n}^{F}(x)=\binom{k}{r}_F B_{k-r,n-r}^{F}(x)x^r$$

eşitliğini sağlar.

İspat. (6.5) te verilen,

$$B_{k,n}^{F}(x)=\binom{n}{k}_F x^k(1-x)^{n-k}$$

eşitliğinin her iki tarafı F_k ile çarpılıp, k yerine $k-1$ ve n yerine $n-1$ alınırsa,

$$F_{k-1}B_{k-1,n-1}^{F}\left(x\right)=F_{k-1}\binom{n-1}{k-1}_{F}x^{k-1}\left(1-x\right)^{n-k}$$

$$=F_{n-1}\binom{n-2}{k-2}_{F}x^{k-1}\left(1-x\right)^{n-k}$$

$$=xF_{n-1}\binom{n-2}{k-2}_{F}x^{k-2}\left(1-x\right)^{n-k}$$

$$=xF_{n-1}B_{k-2,n-2}^{F}\left(x\right)$$

dir. Benzer şekilde diğerleri de elde edilip alt alta yazılırsa,

$$F_{k}B_{k,n}^{F}\left(x\right)=xF_{n}B_{k-1,n-1}^{F}\left(x\right)$$

$$F_{k-1}B_{k-1,n-1}^{F}\left(x\right)=xF_{n-1}B_{k-2,n-2}^{F}\left(x\right)$$

$$F_{k-2}B_{k-2,n-2}^{F}\left(x\right)=xF_{n-2}B_{k-3,n-3}^{F}\left(x\right)$$

$$\vdots$$

$$F_{k-r+1}B_{k-r+1,n-r+1}^{F}\left(x\right)=xF_{n-r}B_{k-r,n-r}^{F}\left(x\right)$$

olacaktır. Burada bulunan ifadeler taraf tarafa çarpılıp ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{F_{k}!}{F_{r}!F_{k-r}!}B_{k,n}^{F}\left(x\right)=\frac{F_{n}!}{F_{r}!F_{n-r}!}x^{r}B_{k-r,n-r}^{F}\left(x\right)\Rightarrow\binom{k}{r}_{F}B_{k,n}^{F}\left(x\right)=\binom{k}{r}_{F}B_{k-r,n-r}^{F}\left(x\right)x^{r}$$

elde edilir.

Teorem 6.17. *F*-Bernstein polinomları,

$$\sum_{i=0}^{k}B_{i,n}^{F}\left(x\right)B_{k-i,n}^{F}\left(x\right)=\frac{\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}_{F}\binom{n}{k-l}_{F}}{\binom{2n}{k}_{F}}B_{k,2n}^{F}\left(x\right)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. F-Bernstein polinomu tanımı gereği,

$$B_{0,n}^{F}(x)\,B_{k,n}^{F}(x)=\binom{n}{0}_F\ x^{0}(1-x)^{n}\binom{n}{k}_F\ x^{k}(1-x)^{n-k}$$

$$B_{1,n}^{F}(x)\,B_{k-1,n}^{F}(x)=\binom{n}{1}_F\ x^{1}(1-x)^{n-1}\binom{n}{k-1}_F\ x^{k-1}(1-x)^{n-k+1}$$

$$\vdots$$

$$B_{k,n}^{F}(x)\,B_{0,n}^{F}(x)=\binom{n}{k}_F\ x^{k}(1-x)^{n-k}\binom{n}{0}_F\ x^{0}(1-x)^{n}$$

dir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$\sum_{i=0}^{k}B_{i,n}^{F}(x)B_{k-i,n}^{F}(x)$$

$$=\binom{n}{0}_F\binom{n}{k}_F\ x^{k}(1-x)^{2n-k}+\binom{n}{1}_F\binom{n}{k-1}_F\ x^{k}(1-x)^{2n-k}+\ldots+\binom{n}{k}_F\binom{n}{0}_F\ x^{k}(1-x)^{2n-k}$$

$$=\left[\binom{n}{0}_F\binom{n}{k}_F+\binom{n}{1}_F\binom{n}{k-1}_F+\ldots+\binom{n}{k}_F\binom{n}{0}_F\right]x^{k}(1-x)^{2n-k}$$

$$=\frac{\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}_F\binom{n}{k-l}_F}{\binom{2n}{k}_F}B_{k,2n}^{F}(x)$$

elde edilir ve böylece istenen eşitlik gösterilmiş olur.

Bu kısımdan itibaren Açıkgöz ve Aracı'nın klasik Bernstein polinomlarının integral yansımaları için elde ettikleri sonuçlardan [4] esinlenilerek F-Bernstein polinomlarının F-integral ile ilişkisi verilecektir. Ayrıca Bernoulli F-polinomları, Euler-Fibonacci ve Bernoulli-Fibonacci sayıları ve polinomları ile ilgili yapılan çalışmalardan [13-15,17] elde edilen sonuçların F-integral ile arasındaki ilişkiler gösterilecektir.

Teorem 6.18. $k,n \in N$ ve $k=0,1,2,3,...,n$ için $k \le n$ olmak üzere, n-inci dereceden F-Bernstein polinomlarının F-integrali,

$$\int_0^1 B_{k,n}^F(x)\,d_F(x) = \binom{n}{k}_F \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} \frac{1}{F_{n-j+1}}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. F-Bernstein polinomu tanımında her iki tarafın F-integrali alınırsa,

$$\int_0^1 B_{k,n}^F(x)\,d_F(x) = \int_0^1 \binom{n}{k}_F x^k (1-x)^{n-k}\, d_F(x)$$

$$= \binom{n}{k}_F \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} d_F(x)$$

$$= \binom{n}{k}_F \int_0^1 x^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j}\, x^{n-k-j} d_F(x)$$

$$= \binom{n}{k}_F \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} \int_0^1 x^{n-j} d_F(x)$$

$$= \binom{n}{k}_F \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} \frac{1}{F_{n-j+1}}$$

elde edilir. Bu sonuç ile

$$\int_0^1 B_{k,n}^F(x)\,d_F(x) = \binom{n}{k}_F \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} \frac{1}{F_{n-j+1}}$$

yazılır ve böylece arzu edilen eşitlik gösterilmiş olur.

Teorem 6.19. F-Bernstein polinomunun F-integralinin, Bernoulli F-sayıları ile arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\int_0^1 B_{k,n}^F(x)\,d_F(x) = \binom{n}{k}_F \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j}\, B_{n-j,F}$$

İspat. Teorem 5.1.1. de elde edilen $B_{n,F}=\dfrac{1}{F_{n+1}}$ Bernoulli F-sayılarında n yerine $n-j$ yazılırsa,

$$B_{n-j,F}=\frac{1}{F_{n-j+1}}$$

elde edilecektir. Bu ifade Teorem 6.18 da yerine yazılırsa istenen eşitlik elde edilmiş olur.

Teorem 6.20. $n.$ ve $m.$ dereceden $k-$inci F-Bernstein polinomlarının çarpımının F-integrali,

$$\int_0^1 B_{k,n}^F(x)B_{k,m}^F(x)d_F(x)=\binom{n}{k}_F\binom{m}{k}_F\sum_{j=0}^{n+m-2k}\binom{n+m-2k}{j}(-1)^{n+m-2k-j}\frac{1}{F_{n+m-j+1}}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. F-Bernstein polinomunun tanımı gereği,

$$B_{k,n}^F(x)B_{k,m}^F(x)=\binom{n}{k}_F x^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{k}_F x^k(1-x)^{m-k}$$

yazılır. Her iki tarafın F-integrali alınırsa,

$$\int_0^1 B_{k,n}^F(x)B_{k,m}^F(x)d_F(x)=\int_0^1\binom{n}{k}_F\binom{m}{k}_F x^{2k}(1-x)^{n+m-2k}d_F(x)$$

$$=\int_0^1\binom{n}{k}_F\binom{m}{k}_F x^{2k}\sum_{j=0}^{n+m-2k}\binom{n+m-2k}{j}(-1)^{n+m-2k-j}x^{n+m-2k-j}d_F(x)$$

$$=\binom{n}{k}_F\binom{m}{k}_F\sum_{j=0}^{n+m-2k}\binom{n+m-2k}{j}(-1)^{n+m-2k-j}\int_0^1 x^{n+m-j}d_F(x)$$

$$=\binom{n}{k}_F\binom{m}{k}_F\sum_{j=0}^{n+m-2k}\binom{n+m-2k}{j}(-1)^{n+m-2k-j}\frac{1}{F_{n+m-j+1}}$$

elde edilir.

Teorem 6.21. $n.$, $m.$ ve $s.$ dereceden $k-$inci F-Bernstein polinomlarının çarpımının F-integrali,

$$\int_0^1 B_{k,n}^F(x) B_{k,m}^F(x) B_{k,s}^F(x) d_F(x)$$

$$=\binom{n}{k}_F \binom{m}{k}_F \binom{s}{k}_F \sum_{j=0}^{n+m+s-3k} \binom{n+m+s-3k}{j} (-1)^{n+m+s-2k-j} \frac{1}{F_{n+m+s-j+1}}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. F-Bernstein polinomunun tanımı gereği,

$$B_{k,n}^F(x) B_{k,m}^F(x) B_{k,s}^F(x) = \binom{n}{k}_F x^k (1-x)^{n-k} \binom{m}{k}_F x^k (1-x)^{m-k} \binom{s}{k}_F x^k (1-x)^{s-k}$$

yazılır. Her iki tarafın F-integrali alınırsa,

$$\int_0^1 B_{k,n}^F(x) B_{k,m}^F(x) B_{k,s}^F(x) d_F(x) = \int_0^1 \binom{n}{k}_F \binom{m}{k}_F \binom{s}{k}_F x^{3k} (1-x)^{n+m+s-3k} d_F(x)$$

$$=\int_0^1 \binom{n}{k}_F \binom{m}{k}_F \binom{s}{k}_F x^{3k} \sum_{j=0}^{n+m+s-3k} \binom{n+m+s-3k}{j} (-1)^{n+m+s-3k-j} x^{n+m+s-3k-j} d_F(x)$$

$$=\binom{n}{k}_F \binom{m}{k}_F \binom{s}{k}_F \sum_{j=0}^{n+m+s-3k} \binom{n+m+s-3k}{j} (-1)^{n+m+s-3k-j} \int_0^1 x^{n+m+s-j} d_F(x)$$

$$=\binom{n}{k}_F \binom{m}{k}_F \binom{s}{k}_F \sum_{j=0}^{n+m+s-3k} \binom{n+m+s-3k}{j} (-1)^{n+m+s-3k-j} \frac{1}{F_{n+m+s-j+1}}$$

elde edilir.

Teorem 6.20 ve Teorem 6.21 de elde edilen $n.$ ve $m.$ dereceden $k-$inci ve $n.$, $m.$ ve $s.$ dereceden $k-$inci F-Bernstein polinomlarının çarpımının F-integrali sonuçları doğrultusunda bir genelleme yapılırsa, r tane $k-$inci F-Bernstein polinomlarının çarpımının F-integrali aşağıdaki teorem de verildiği gibi olacaktır.

Teorem 6.22. r tane $k-$inci F-Bernstein polinomlarının çarpımının F-integrali,

$$\int_0^1 B_{k,n_1}^F(x)\,B_{k,n_2}^F(x)\ldots B_{k,n_r}^F(x)\,d_F(x)$$

$$=\binom{n_1}{k}_F\binom{n_2}{k}_F\ldots\binom{n_r}{k}_F\sum_{j=0}^{n_1+n_2+\ldots+n_r-rk}\binom{n_1+n_2+\ldots+n_r-rk}{j}(-1)^{n_1+n_2+\ldots+n_r-rk-j}\frac{1}{F_{n_1+n_2+\ldots+n_r-j+1}}.$$

şeklindedir.

Teorem 6.23. Bernoulli F-polinomun, F-integrali,

$$\int_0^1 B_{n,F}(x)\,d_F(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F\frac{B_{n-k,F}}{F_{k+1}}$$

şeklindedir.

İspat. Bernoulli F-polinomu olan,

$$B_{n,F}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F x^{n-k}$$

eşitliğin her iki tarafının F-integrali alınırsa,

$$\int_0^1 B_{n,F}(x)d_F(x)=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F x^{n-k}d_F(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F\int_0^1 x^{n-k}d_F(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F B_{n-k,F}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F\frac{B_{n-k,F}}{F_{k+1}}$$

elde edilir.

Teorem 6.24. Euler-Fibonacci polinomun, *F*-integrali aşağıdaki gibidir.

$$\int_0^1 E_{n,F}(x)\, d_F(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F E_{k,F} B_{n-k,F}$$

İspat. Euler-Fibonacci polinomu olan,

$$E_{n,F}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F E_{k,F} x^{n-k}$$

eşitliğin her iki tarafının *F*-integrali alınırsa,

$$\int_0^1 E_{n,F}(x) d_F(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F E_{k,F} x^{n-k} d_F(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F E_{k,F} \int_0^1 x^{n-k} d_F(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F E_{k,F} B_{n-k,F}$$

elde edilir.

Teorem 6.25. Bernoulli-Fibonacci polinomun *F*-integrali,

$$\int_0^1 B_n^F(x)\, d_F(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F B_k^F B_{n-k,F}$$

şeklindedir.

İspat. Bernoulli-Fibonacci polinomu olan,

$$B_n^F(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F B_k^F x^{n-k}$$

eşitliğin her iki tarafının *F*-integrali alınırsa,

$$\int_0^1 B_n^F(x) d_F(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F B_k^F x^{n-k} d_F(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_k^F \int_0^1 x^{n-k} d_F(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_k^F B_{n-k,F}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Açíkgöz, M., & Araci, S. (2010). On the generating function for Bernstein polynomials. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1281, No. 1, pp. 1141-1143). American Institute of Physics.

[2] Açíkgöz, M., & Araci, S. (2010). The relations between Bernoulli, Bernstein and Euler polynomials. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1281, No. 1, pp. 1144-1147). American Institute of Physics.

[3] Araci, S. (2010). *Bernstein polinomları ve analitik sayılar teorisi üzerindeki yansımaları* (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).

[4] Acikgoz, M., & Araci, S. (2010). A study on the integral of the product of several type Bernstein polynomials, IST Transaction of Applied Mathematics-Modelling and Simulation.

[5] Birol, F. (2018). *Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, genelleştirilmiş Pell sayı dizileri ve polinomlarının lineer gruplarla ilişkileri* (Master's thesis, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).

[6] Çapkın, M. (2009). *Bernoulli Sayıları, Polinomları ve Özellikleri* (Doctoral dissertation, Bursa Uludag University (Turkey)).

[7] Çetin, E. (2011). *Bernstein polinomlarının uygulamaları* (Doctoral dissertation, Bursa Uludag University (Turkey)).

[8] Dil, A., & Mező, I. (2008). A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers. *Applied Mathematics and Computation*, *206*(2), 942-951.

[9] Döne, Y. (2011). *Bernstein-Stancu polinomlarıyla yaklaşım* (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).

[10] Erdem A., Dişkaya O. and Menken H., On The F-Bernstein Polynomials, (To appear)

[11] Karande, B. K., & Thakare, N. K. (1975). On the unification of Bernoulli and Euler polynomials. *Indian J. Pure Appl. Math*, *6*(1), 98-107.

[12] Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2*. John Wiley & Sons.

[13] Krot, E. (2004). An introduction to finite fibonomial calculus. *Open Mathematics*, *2*(5), 754-766.

[14] Kuş, S., Tuglu, N., & Kim, T. (2019). Bernoulli F-polynomials and Fibo–Bernoulli matrices. *Advances in Difference Equations*, *2019*, 1-16.

[15] Özvatan, M. (2018). *Generalized golden-Fibonacci calculus and applications* (Doctoral dissertation, Izmir Institute of Technology (Turkey)).

[16] Pashaev, O. K., & Nalci, S. (2011). Golden quantum oscillator and Binet–Fibonacci calculus. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, *45*(1), 015303.

[17] Pashaev, O. K., & Ozvatan, M. (2020). Bernoulli-Fibonacci Polynomials. *arXiv preprint arXiv:2010.15080*.

[18] Şaşmaz, E., (2018). *Bernoulli ve Euler polinomlarının matris özellikleri ve gecikmeli integro diferansiyel denklemlere uygulamaları* (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).

[19] Tuglu, N., Kızılates, C., & Kesim, S. (2015). On the harmonic and hyperharmonic Fibonacci numbers, *Advances in Difference Equations*, 297.

[20] URAL, A. (2012). *Bernstein polinomları ve bazı modifikasyonlarının yaklaşımlarının grafik ve nümerik tablolar ile karşılaştırılmaları/Comparison of bernstein polynomials and some modifications of Bernstein polynomials by graphics and numerical tables* (Doctoral dissertation).

[21] Ustaoğlu, C. (2014). *Generalized Bernstein Polynomials* (Doctoral dissertation, Eastern Mediterranean University (EMU)-Doğu Akdeniz Üniversitesi (DAÜ)).

[22] Yılmaz, S. (2015). "Lineer İndirgeme Dizilerine Karşılık Gelen Polinomlar ve Periyodik Sistemler", Doktora Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Mehmet DÜNDAR

Eğitim Bilgileri:

-Kocaeli Üniversitesi/Teknik Eğitim Fakültesi/Elektronik Öğretmenliği (2004-2008)

-Anadolu Üniversitesi/Açıköğretim Fakültesi/Adalet (2012-2014)

-Gaziantep Üniversitesi/Fen Edebiyat Fakültesi/Matematik (2017-2021)

Sertifikalar:

- “2. Bilsel International Ahlat Scientific Researches Congress” 09-10 December, 2023-Bitlis/Türkiye