BURULMALI İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR

Zühre TOPUZ

Danışman: Doç. Dr. Çağrı KARAMAN

Doktora Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
2023

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

BURULMALI İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR

(Statistical Manifolds With Torsion)

DOKTORA TEZİ

Zühre TOPUZ

Danışman: Doç. Dr. Çağrı KARAMAN

Erzurum
Aralık, 2023

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Zühre TOPUZ tarafından hazırlanan "Burulmalı İstatistiksel Manifoldlar" başlıklı çalışması 29/12/2023 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Geometri Bilim Dalındadoktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Nejmi CENGİZ *Atatürk Üniversitesi*	Aslı ıslak imzalıdır
Danışman:	Doç. Dr. Çağrı KARAMAN *Atatürk Üniversitesi*	Aslı ıslak imzalıdır
Jüri Üyesi:	Prof. Dr. Muhammet YILDIRIM *Atatürk Üniversitesi*	Aslı ıslak imzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. İnan ÜNAL *Munzur Üniversitesi*	Aslı ıslak imzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Sibel TURANLI *Erzurum Teknik Üniversitesi*	Aslı ıslak imzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN

Enstitü Müdürü

Aslı ıslak imzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Doktora tezi olarak Doç. Dr. Çağrı KARAMAN danışmanlığında sunulan ‘‘Burulmalı İstatistiksel Manifoldlar’’ başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	**Tezin Benzerlik Oranı (%)**	**Maksimum Oran (%)**
Giriş	*2*	**30**
Kuramsal Temeller	*24*	**30**
Materyal ve Yöntem	*13*	**35**
Bulgular	*17*	**20**
Tartışma	*0*	**20**
Tezin Geneli	*11*	**25**

Not: *Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının* ***%5’den*** *büyük olmaması gerekir.*

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	**Tez Danışmanı**
Zühre TOPUZ	**Doç. Dr. Çağrı KARAMAN**
23.12.2023	**23.12.2023**
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

***** Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

1989 yılında trafik kazasında kaybettiğim babam Ahmet ÇAKIR'A ithafen yazdığım doktora tezimde;

Öncelikle danışmanlığımı üstlenen, konu seçiminden tez bitimine dek bilgisini ve zamanını esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Çağrı KARAMAN'A danışmanlığı için çok teşekkür ediyorum. Tez izleme komitesinde yer alarak değerli görüşleri ile çalışmalarımızı destekleyen değerli hocamız Prof. Dr. Nejmi CENGİZ' e çok teşekkür ediyorum.

Sürecin başından bitimine kadar yardımcı olan aileme, yanımda yardımını esirgemeyen dostlarıma çok teşekkür ediyorum.

Zühre TOPUZ

ÖZET

DOKTORA TEZİ
BURULMALI İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR
Zühre TOPUZ
Danışman: Doç. Dr. Çağrı KARAMAN

Amaç: Bu tez çalışması bir anti-Kähler manifold üzerinde özel burulmalı istatistiksel F-konneksiyon incelemeyi amaçlamaktadır.

Yöntem: Tez ile ilgili olarak kuramsal temel, genel metotlar ve araştırma teknikleri olarak aşağıdaki konular kullanılacaktır.

1. Difensiyellenebilir manifoldlar
2. Tachibana operatörleri
3. Anti-Kähler manifoldlar
4. Burulmalı istatistiksel manifoldlar
5. Walker manifoldları

Bulgular: Tezde ilk olarak, Riemannian konneksiyonu ve özel seçilen deformasyon tensörü aracılığıyla burulmalı istatistiksel F-konneksiyon oluşruruldu. Bu yeni konneksiyonun burulma tensörü, eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve skaler eğrilik tensörlerinin özellikleri incelendi. Ayrıca burulmalı istatistiksel F-konneksiyonunun hangi şart altında $U(Ric)$-vektör alanları oluşturduğu incelendi ve bazı geometrik sonuçlar elde edildi. Son olarak, anti-Kähler-Walker manifoldlar üzerinde bu konneksiyonlara örnekler verildi.

Sonuç: İstatistiksel manifoldlar günümüzde oldukça yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bu tezde de istatistiksel manifoldların özel bir hali incelenmiştir. Anti-Kähler manifoldları üzerinde incelenen bu konuya Walker-4 manifoldları üzerinde örnekler verildi. Tezde dört boyutta hesaplanan koordinatlar Maple® programıyla hesaplanması literatüre kazandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: anti-Kähler manifoldlar, holomorfik tensor, istatistiksel F-konneksiyon, burulmalı istatistiksel manifold, Walker metriği

Aralık 2023, 70 sayfa

ABSTRACT

DOCTORAL DISSERTATION

STATISTICAL MANIFOLDS WITH TORSION

Zühre TOPUZ

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Çağrı KARAMAN

Purpose: This thesis aims to examine special statistical F-connection with torsion on an anti-Kähler manifold.

Method: The followings will be used as the theoretical basis, general methods, and research techniques for the thesis:

1. Differentiable manifolds,
2. Tachibana operators,
3. Anti-Kähler manifolds,
4. Statistical manifolds with Torsion,
5. Walker manifolds.

Findings: In this thesis, firstly a statistical F-connection with torsion was created through the Riemannian connection and a specially selected deformation tensor. The properties of the torsion tensor, curvature tensor, Ricci curvature tensor and scalar curvature tensors of this new connection were examined. Additionally, the conditions under which torsional statistical F-connection creates $U(Ric)$-vector fields were examined and some geometric results were obtained. Finally, examples of these connections on anti-Kähler-Walker manifolds were given.

Results: Statistical manifolds are studied quite intensively today. In this thesis, a special case of statistical manifolds was examined. This subject was examined on anti-Kähler manifolds and examples were given on Walker-4 manifolds. In the thesis, the calculation of the coordinates calculated in four dimensions with the Maple® programme has been introduced to the literature.

Keywords: anti-Kähler manifold, holomorphic tensor, statistical F-connection, statistical manifold with torsion, Walker metric

December 2023, 70 pages

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

KISALTMALAR ve SİMGELER DİZİNİ

g	Riemann Metriği
∇	Riemann (Levi-Civita) Konneksiyonu
R	Riemann Eğrilik Tensörü
Ric	Ricci Tensörü
τ	Skaler Eğrilik
Φ	Tachibana Operatörü
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
I	Birim Afinor Alanı
$\overline{\nabla}$	Burulmalı İstatistiksel Konneksiyon
$\bar{R}$	Burulmalı İstatistiksel Konneksiyonun Eğrilik Tensörü
$\overline{Ric}$	Burulmalı İstatistiksel Konneksiyonun Ricci Tensörü
$\bar{\tau}$	Burulmalı İstatistiksel Konneksiyonun Skaler Eğriliği
$\bar{T}$	Burulmalı İstatistiksel Konneksiyonun Burulması
D	Deformasyon Tensörü
F	Hemen hemen kompleks yapı
p	Kovektör Alanı (1-form)

GİRİŞ

İstatistiksel manifloldlar burulmasız konneksiyona sahip özel bir Riemann manifoldudur. Lauritzen' in tanımına göre, (M_n, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere her X, Y, Z vektör alanları için $(\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) = g(\bar{C}(X, Y), Z) = \bar{C}(X, Y, Z)$ şartını sağlayan $(M_n, g, \overline{\nabla}, \bar{C})$ dörtlüsüdür. Burada $\overline{\nabla}$, M_n üzerinde herhangi bir burulmasız konneksiyon ve $\bar{C}(X, Y)$ ise (1,2) tipli simetrik kübik form tensörüdür. Burada dikkat edilmesi gereken husus kübik formun tamamen simetrik olmasıdır. Yani,

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) &= \bar{C}(X, Y, Z) = \bar{C}(X, Z, Y) = \bar{C}(Y, X, Z)\\ &= \bar{C}(Y, Z, X) = \bar{C}(Z, Y, X) = \bar{C}(Z, X, Y)\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır. Ayrıca Lauritzen, $(M_n, g, \overline{\nabla}, \bar{C})$ istatistiksel manifoldu ∇ Riemann konneksiyonu (Levi-Civita) yardımıyla

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_{\mathrm{X}} Y - \frac{1}{2}\bar{C}(X, Y) \text{ ve } (\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) = \bar{C}(X, Y, Z)$$

biçiminde tanımlandığını da göstermiştir (Laurizten 1987).

İstatistiksel manifoldun başka bir tanımını ise Kurose yapmıştır (Kurose 1994). Kurose'ye göre ise; $\overline{\nabla}$, (M_n, g) Riemann mianifoldu üzerinde burulmasız bir afin konneksiyon olmak üzere $(\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) = (\overline{\nabla}_Y g)(X, Z)$ şartını sağlayan $(M_n, g, \overline{\nabla})$ üçlüsüne istatistiksel manifold denir. Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi $\overline{\nabla} g$ tamamen simetriktir (Kurose 1994). İstatistiksel manifoldlar için Amari 1985, Kurose 1994, Kurose 2007, Lauritzen 1987, Matsuzoe 2006 ve Sun and Marchand-Maillet 2014 çalışmaları incelenmiştir.

Hazırlanılan bu tezde de diferensiyellenebilir manifoldların özel bir hali üzerinde çalışılmıştır. Burulmalı istatistiksel manifold (SMAT = Statistical Manifold Admitting Torsion) olarak bilinen manifoldların yeni bir sınıflandırılması yapılmıştır. Burulmalı istatistiksel manifoldlar, (M_n, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde alınan burulmalı $\overline{\nabla}$ konneksiyonu için

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y g)(X, Z) = -g(\bar{T}(X, Y), Z) = -\bar{T}(X, Y, Z)$$

şartı sağlanıyorsa $(M_n, g, \overline{\nabla})$ üçlüsüne burulmalı istatistiksel manifold denir, (Kurose 2007). Buradaki X, Y, Z ler keyfi vektör alanları ve $\bar{T}(X, Y)$ ise

$$\bar{T}(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X, Y]$$

biçiminde tanımlanan $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörüdür. Burulmalı istatistiksel manifoldlar için Kurose 2007, Matsuzoe 2013, Keisuke 2020, çalışmaları incelenmiştir.

Konneksiyon teorisinde iyi bilinir ki, herhangi bir $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna (1,2)-tipli bir $D(X,Y)$ deformasyon tensörü eklenirse yeni bir konneksiyon elde edilir. Yani $\overline{\nabla}=\nabla+D$ şeklinde yazılabilir. Bu tez çalışmasında $(M_n,g,\overline{\nabla})$ burulmalı istatistiksel manifoldunun konneksiyonu $\overline{\nabla}$, g nin Levi-Civita konneksiyonu olan ∇ ve deformasyon tensörü D nin toplamı şeklinde ifade edilmiştir. Buradan

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D(X,Y)$$

şeklinde verilen burulmalı bir konneksiyonun istatistiksel konneksiyon olması için $D(X,Y)$ nin hangi şartı sağlaması gerektiği araştırıldı.

Burulmalı istatistiksel konneksiyonun özelliklerinin daha ayrıntılı incelenebilmesi için (M_n,g,F) anti-Kähler manifoldu tercih edildi. Bu manifold üzerinde alınan $\overline{\nabla}$ burulmalı istatistiksel konneksiyon ile birlikte $(M_n,g,F,\overline{\nabla})$ dörtlüsüne burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifoldu adı verildi.

$(M_n,g,F,\overline{\nabla})$ burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifoldunda $D(X,Y)$ deformasyon tensörü içinde $F^2=-I$ kompleks yapısını da barındıracak şekilde özel seçildi. Bunun sonucunda $\overline{\nabla}$ burulmalı istatistiksel konneksiyonun burulma tensörünün aslında yarı-simetrik bir burulma olduğu görüldü. Yarı-simetrik burulmalı manifoldlar için Agashe and Chafle 1992, Duggal and Sharma 1986, Karaman 2015, Liang 1994 ve Mishra and Pandey 1980 çalışmaları incelenmiştir.

$(M_n,g,F,\overline{\nabla})$ burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifoldunun $\overline{\nabla}$ konneskyionun yarı-simetrik burulması $\overline{T}$ nin özellikleri incelendi. F kompleks yapısına göre pürlük (self-adjoint) şartını sağlayan burulma tensörünün hangi şart altında holomorfik olduğu araştırıldı. Holomorfikliği incelemek için ise Tachibana operatörü kullanılmıştır.

Hazırlanan tezin ikinci bölümünde ise $\overline{\nabla}$ burulmalı istatistiksel konneksiyonun eğrilik özellikleri incelendi. Öncelikle $\overline{R}(X,Y,Z)$ biçiminde olan eğrilik tensörü hesaplandı ve sonra ise g Riemann metriği yardımıyla $g(\overline{R}(X,Y,Z),W)=\overline{R}(X,Y,Z,W)$ biçiminde tanımlanan (0,4) tipli $\overline{R}$ eğrilik tensörünün özellikleri ve yine holomorfluğu incelendi. Daha sonra ise $\overline{R}(X,Y,Z)$ eğrilik tensöründen elde edilen Ricci tensörü $\overline{R\iota c}$ hesaplandı ve bazı özellikleri araştırıldı. Ricci tensörünün tam kontraksiyonu sonucunda oluşan skaler eğrilik $\overline{\tau}$ hesaplandı ve Levi-Civita konneksiyonunun skaler eğriliği τ ile çakışması durumu incelendi. Bu kısmın sonunda ise $U(Ric)$-vektör alanı tanımı $(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifoldunun $\overline{\nabla}$ konneksiyonu için verildi ve sabit skaler eğrilikli uzay olma şart elde edildi.

Tezin son bölümünde ise buraya kadar elde edilen sonuçları desteklemek adına örnekler verilmiştir. Bir anti-Kähler manifoldu olan (M_4, g, F) Walker manifoldu üzerinde $\overline{\nabla}$ burulmalı istatistiksel konneksiyonunun özellikleri incelendi ve önemli sonuçlar elde edildi. Örnekler kısmında hesaplamaların daha kolay ve sağlamlığı için Maple® programı kullanıldı.

KURAMSAL TEMELLER

Tensörler

Tanım 1: V_n, n-boyutlu bir vektör uzayı ve ${}^{D}\mathrm{V}_\mathrm{n}$ de V_n vektör uzayının dual uzayı olsun. Bu durumda,

$$t: \overbrace{V_n \times V_n \ldots \times V_n}^{q\ tane} \times \overbrace{{}^{D}\mathrm{V}_\mathrm{n} \times {}^{D}\mathrm{V}_\mathrm{n} \ldots \times {}^{D}\mathrm{V}_\mathrm{n}}^{p\ tane} \to \mathbb{R}$$

ile gösterilen ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \ldots v_q \in V_n$, ${}^{D}V_1$, ${}^{D}V_2, \ldots$, ${}^{D}V_p \in {}^{D}V_n$ olmak üzere,

$$t\big(v_1, \ldots, \lambda_1 v_k + \lambda_1 v_k', \ldots\big) = \lambda_1 t(v_1, \ldots, v_k, \ldots) + \lambda_2 t\big(v_1, \ldots, v_k', \ldots\big)$$

bu denklemle p dereceden kontravaryant ve q dereceden kovaryant tensör t dönüşümüne tensör denir. Bu denklemde $v_k, v_k' \in \mathrm{V}_\mathrm{n}$ (ya da ${}^{D}\mathrm{V}_\mathrm{n}$) dir. Belirtilen tensörlerin kümesi $\mathfrak{J}_q^p(V_n)$ ile ifade edilebilir ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $t_1, t_2 \in \mathfrak{J}_q^p(V_n)$ olmak üzere,

$$(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)\,(v_1, v_2, \ldots) = \lambda_1 t_1(v_1, v_2, \ldots) + \lambda_2 t_2(v_1, v_2, \ldots)$$

olup $\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \in \mathfrak{J}_q^p(V_n)$ olduğundan $\mathfrak{J}_q^p(V_n)$ vektör uzay yapısı olarak belirtilir. Tensörün tipi ise (p, q) ifadesiyle tanımlanabilir (Şahin 2013).

Tanım 2: V_n, n-boyutlu bir vektör uzayı ve ${}^{D}\mathrm{V}_\mathrm{n}$ de V_n vektör uzayının dual uzayı olsun. $\mathfrak{J}_q^p(V_n)$, (p, q) tipli tensörlerin kümesi olmak üzere,

$$C_j^i : \mathfrak{J}_q^p(V_n) \to \mathfrak{J}_{q-1}^{p-1}(V_n)$$

$$A \to (C_j^i A)\big(e_1, \ldots e_{q-1}, w^1, \ldots w^{p-1}\big) = C\{A\big(., e_1, \ldots e_{q-1}, ., w^1, \ldots w^{p-1}\big)\}$$

$$C_j^i A = \sum_m A(e_m, e_1, \ldots e_{q-1}\,, w^m, w^1, \ldots w^{p-1}$$

denklemi olarak gösterilen operatör kontraksiyon (daraltma) operatörüdür(Şahin 2013). Burada $w^m, w^1, \ldots w^{p-1}$ ler ${}^{D}\mathrm{V}_\mathrm{n}$ de dual baz (kobaz) ve $e_m, e_1, \ldots e_{q-1}$ler için V_n de baz vektörlerdir. Bu nedenle, bir daralma operatörü olan (p, q) tipindeki bir tensörü $(p-1, q-1)$ tipinde bir tensöre getirir (Şahin 2013).

(0,2) şeklinde bir tensör olarak, $t(v_1, v_2)$ yi seçelim. Bu tensör için de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$olmak şartıyla,

$$t'(v_1, v_2) = \lambda t(v_1, v_2) + \mu t(v_2, v_1)$$

biçiminde bir $t'(v_1, v_2)$ tensörü tanımlansın. Burada λ ve μ reel değerleri için sonsuz sayıda tensör elde edebilir. $Sim(t)$ biçiminde gösterilen ve bu değerler içerisinden $\lambda = \mu = \frac{1}{2!}$ biçiminde seçilerek gelen yeni tensöre $t(v_1, v_2)$ tensörünün simetrikleşmesi denir.

Yani,

$$Sim\big(t(v_1, v_2)\big) = \frac{1}{2!}(t(v_1, v_2) + t(v_2, v_1))$$

elde edilir. Değişken sayısının 3 tane olması durumunda $t(v_1, v_2, v_3)$ tensörünün simetrikleşmesi,

$$Sim\big(t(v_1, v_2, v_3)\big) = \frac{1}{3!}[t(v_1, v_2, v_3) + t(v_2, v_3, v_1) + t(v_3, v_1, v_2)$$

$$+t(v_1, v_3, v_2) + t(v_3, v_2, v_1) + t(v_2, v_1, v_3)]$$

şeklinde olur.

Benzer olarak $\lambda = -\mu = \frac{1}{2!}$ seçilerek, $t'(v_1, v_2) = \lambda t(v_1, v_2) + \mu t(v_2, v_1)$ tensörlerinden biri elde edilebilir. Bu sonuçla elde edinilen yeni tensöre $t(v_1, v_2)$ tensörünün antisimetrikleşmesi denebilir ve $Alt(t)$ şeklinde gösterilir. Yani,

$$Alt\big(t(v_1, v_2)\big) = \frac{1}{2!}(t(v_1, v_2) - t(v_2, v_1))$$

olur. Değişken sayısı üç tane olması durumunda $t(v_1, v_2, v_3)$ tensörünün antisimetrikleşmesi,

$$Alt\big(t(v_1, v_2, v_3)\big) = \frac{1}{3!}[t(v_1, v_2, v_3) + t(v_2, v_3, v_1) + t(v_3, v_1, v_2)$$

$$-t(v_1, v_3, v_2) - t(v_3, v_2, v_1) + t(v_2, v_1, v_3)]$$

şeklinde olur (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 3: t tensörüne simetrik (antisimetrik) tensör denilebilmesi, $Sim(t) = t(Alt(t) = t)$ denklemiyle sağlanabilir (Salimov ve Mağden 2008).

Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 4: f, reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\mathbb{R}$ uzayının bir U açık kümesi üzerinde tanımlanmış olsun. Eğer k. mertebeden kısmi türevleri f fonksiyonunda mevcut ve, $k \leq r$ olmak şartıyla sürekli ise f fonksiyonuna r. mertebeden diferensiyellenebilir fonksiyon denir ve $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir (Şahin 2013).

Tanım 5: M bir Haussdorf uzayı olsun. Eğer herhangi bir $p \in M$ noktası için p nin bir açık komşuluğu U nun,$\mathbb{R}^n$nin bir açık kümesine homeomorfik olma koşulu sağlanıyorsa, bu M Haussdorf uzayı manifold olarak ya da topolojik manifold olarak adlandırılır. $boy(\mathbb{R}^n) = n$ olduğundan, manifoldun boyutu da n dir ve M_n şeklinde gösterilir (Şahin 2013).

Tanım 4 deki homeomorfizma $\varphi: U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ olarak ifade edilirse, (U, φ) ikilisine harita denir. M_n manifoldu üzerindeki her noktanın en az bir harita tarafından örtülebilmesi için, bu haritaların oluşturduğu açık kümelerin kesişiminin boş olmaması gerekmektedir. φ bir homeomorfizma olmak üzere $p \in U$noktasının koordinatları $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ noktasının koordinatları şeklinde ifade edilebilir. Böylece φ homeomorfizması M_n manifoldunun bir p noktasına $x_1(p), \dots, x_n(p)$ n-lisini karşılık getirir. $x_1(p), \dots, x_n(p)$ sayıları ise p noktasının φ altındaki yerel koordinatları olarak belirtilir. Bu nedenle, n bağımsız koordinatla ifade edilen bir küme olarak da tanımlanabilen manifold herhangi bir noktasının komşuluğunu oluşturabilir (Şahin 2013).

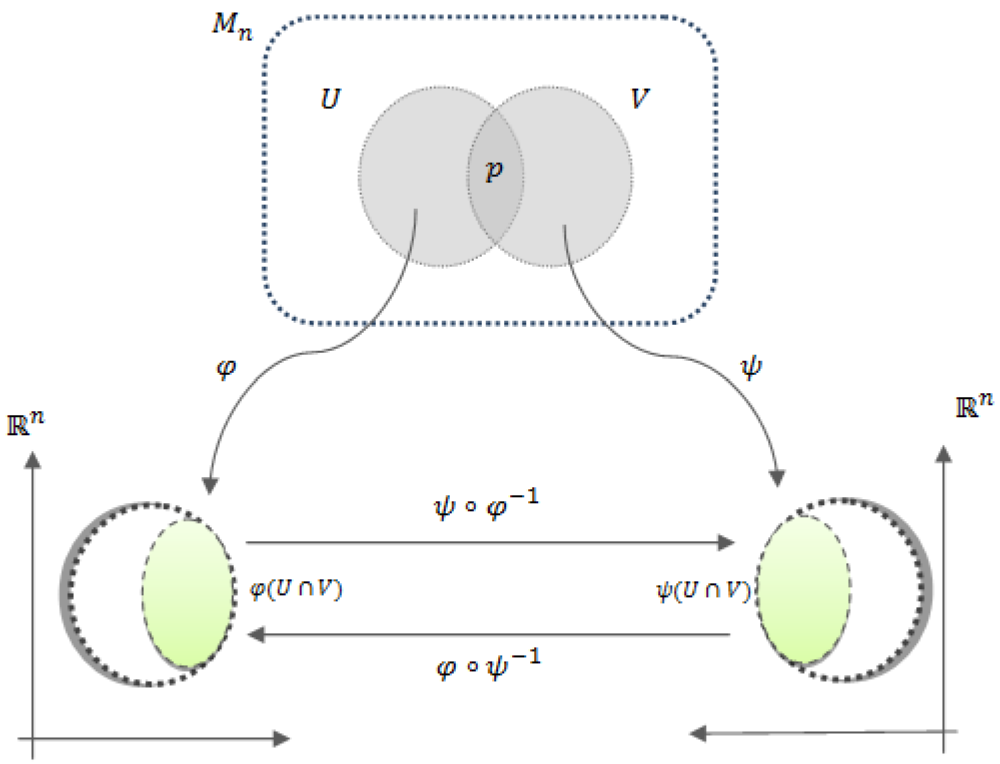
$U \cap V \neq \phi$ koşulu altında iki harita olarak(U, φ) ve (V, ψ) seçilsin. $U \cap V$ kümesinde bir noktanın φ tarafından sağlanan koordinatları $(x_1, \dots, x_n)$ olsun. φ dönüşümü ve onun tersi olan φ^{-1} ile, $U \cap V$ de yalnızca bir p noktası bulunmaktadır. Bu durumda p noktasının ψ tarafından sağlanan koordinatları da $(y_1, \dots, y_n)$ şeklinde ifade edilebilir. Bu koordinatlar arasında,

$$y_i = f^i(x_1, \dots, x_n) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)\right)^i,$$
$$x_i = g^i(y_1, \dots, y_n) = \left(\varphi \circ \psi^{-1}(y_1, \dots, y_n)\right)^i$$

olur. Bu durumda elde edilen bağlantı $(x_1, \dots, x_n) \in \varphi\,(U \cap V)$, $(y_1, \dots, y_n) \in \psi(U \cap V), i = 1, \dots, n$ şeklindedir. $\psi \circ \varphi^{-1}$ ve $\varphi \circ \psi^{-1}$ homeomorfizmaları birbirinin tersi olduğundan, f^i ve g^i fonksiyonları süreklidir. Eğer $U \cap V \neq \phi$ durumunda $f^i(x_1, \dots, x_n)$ ve $g^i(y_1, \dots, y_n)$ fonksiyonları $r.$ mertebeden diferensiyellenebiliyorsa (φ, U) ve (ψ, V) haritaları $r.$ mertebeden uyumludur denir. $U \cap V \neq \phi$ durumunda uyumlu kabul edilir (Şahin 2013).

Tanım 6: M_n, n-boyutlu manifold olsun. Eğer M_n deki haritaların bir parçası olan $A = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \xi), \dots\}$ kümesi aşağıdaki koşulları sağlarsa, A kümesine M_n üzerinde $r.$ mertebeden diferensiyellenebilir atlas veya yapı denir (Şahin 2013).

1) M_n manifoldunun bir açık örtüsü {U,V,W,…} açık kümeleri oluşturabiliyorsa,
2) $r.$ mertebeden A daki herhangi bir harita uyumludur.
3) Eğer bir $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ haritası A daki tüm koordinat haritaları ile uyumlu ise o zaman $(\bar{U}, \bar{\varphi}) \in A$ dır ve A maksimaldir.



Şekil 1. Diferensiyellenebilir Atlas

Tanım 7 :M_n, n-boyutlu manifold olsun. Eğer M_n manifoldu üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas bulunuyorsa, bu durumda M_n manifolduna r. mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Diferensiyellenebilir yapının her bir haritasına M_n manifoldunun uyumlu haritası denir. Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M_n manifolduna C^∞-manifold (veya diferensiyellenebilir manifold) adı verilir. (Şahin 2013).

Lie Operatörü ve Lie Türevi

Tanım 8: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold olsun. M_n üzerinde alınan X ve $Y \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ vektör alanları ve $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$[,]: \mathfrak{J}_0^1(M_n) \times \mathfrak{J}_0^1(M_n) \to \mathfrak{J}_0^1(M_n)$$

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde verilen dönüşüme Lie operatörü (parantezi) denir. Burada $X(f)$, f fonksiyonunun X vektör alanı yönündeki türevidir.

Tanım 9: $X, Y \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ ve $f \in \mathfrak{J}_0^0(M_n)$ olsun $D = L_X$ diferensiyelleme işlemi için aşağıdaki şartlar sağlanırsa L_X e X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi adı verilir.

1) $L_X f = X(f)$,

2) $L_X Y = [X,Y]$.

Burada $[X, Y]$ Lie parantezidir (Salimov ve Mağden 2008).

Keyfi (p, q) tipli t tensörü için Lie türevi $X_1, \ldots, X_q \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{w}, \ldots, \overset{p}{w} \in \Im_0^1(M_n)$ için L_X özelliklerine göre,

$$(L_X t)\left(X_1, \ldots, X_q, \overset{1}{w}, \ldots, \overset{p}{w}\right) = X\left(t\left(X_1, \ldots, X_q, \overset{1}{w}, \ldots, \overset{p}{w}\right)\right)$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{q} \mathrm{t}\left(X_1, \ldots, L_X X_\lambda, \ldots, X_q, \overset{1}{w}, \ldots \overset{p}{w}\right)$$

$$- \sum_{\mu=1}^{p} \mathrm{t}\left(X_1, \ldots, X_q, \overset{1}{w}, \ldots, L_x \overset{\mu}{w}, \ldots, \overset{p}{w}\right)$$

biçiminde ve lokal koordinatlarla bu ifade $X = X^k \partial_k, X_\lambda = \partial j_\lambda, \lambda = 1, \ldots, q$ ve $\overset{\mu}{w} = dx^{i_\mu}, \mu = 1, \ldots, p$ için,

$$(L_X t)_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} = X^k \partial_k t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} + \sum_{\mu=1}^{q} (\partial j_\lambda X^k) t_{j_1 \ldots k \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} - \sum_{\mu=1}^{p} \left(\partial_k X^{i_\mu}\right) t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots k \ldots i_p}$$

şeklinde tanımlananır (Salimov ve Mağden 2008).

Lineer Konneksiyon ve Kovaryant Türev

M_n, C^∞-sınıfından bir manifold, $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$\nabla : \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$$

dönüşümü

1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$

2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

3) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{Y},$

4) $\nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y,$

şartlarını sağlıyorsa bu ∇ dönüşümüne afin ya da lineer konneksiyon denir (Şahin 2013). Y vektör alanının X vektör alanı yönündeki kovaryan türevi ise $\nabla_X Y$ şeklinde gösterilir. Afin konneksiyonun ifadesinden açıkça görülebilir ki, bir afin konneksiyon M_n üzerindeki bir vektör alanını yine başka bir vektör alanı içinde bir dönüşümdür.

x^i ler M_n manifoldunun bir U koordinat komşuluğundaki lokal koordinatları olsun. $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ doğal vektörü alanı olmak üzere

$$\nabla_i \partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

olur. Burada Γ_{ij}^k, U komşuluğundaki C^∞-sınıfından fonksiyonlardır (Salimov ve Mağden 2008). Ayrıca bu Γ_{ij}^k ifadesine ∇ konneksiyonunun katsayıları olup 2.tür Christoffel sembolleri olarak adlandırılır.

Keyfi (p,q)-tipli bir t tensörünün kovaryant türevi, $x_1, \dots, x_q \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w} \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için,

$$\begin{aligned}(\nabla_Y t)\left(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right) = {} & Y\left(t\left(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right)\right) \\ & - \sum_{\lambda=1}^{q} \mathrm{t}\left(X_1, \dots, \nabla_Y X_\lambda, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots \overset{p}{w}\right) \\ & - \sum_{\mu=1}^{p} \mathrm{t}\left(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \nabla_Y \overset{\mu}{w}, \dots \overset{p}{w}\right)\end{aligned}$$

biçimindedir. Lokal koordinatlarla bu ifade $Y = \partial_k, X_\lambda = \partial_{j_\lambda}, \lambda = 1, \dots, q$ ve $\overset{\mu}{w} = dx^{i_\mu}$, $\mu = 1, \dots, p$ için,

$$(\nabla_Y t)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\lambda=1}^{q} r_{k j_\lambda}^{m} t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^{p} r_{km}^{i_\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p}$$

şeklindedir (Salimov ve Mağden 2008).

Afinor

Tanım 10: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold olsun. $\mathfrak{I}_1^1(M_n)$ uzayının elemanlarına (1,1)-tipli tensör alanı (ya da afinor) denir.

M_n manifoldunda afinorlar için kullanılan başka bir terim ise endomorfizmlerdir. Dolayısıyla keyfi bir $F \in \mathfrak{I}_1^1(M_n)$ için,

$$F: \mathfrak{I}_0^1(M_n) \to \mathfrak{I}_0^1(M_n)$$

yazılabilir. O halde tanıma göre her $X \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için

$$\begin{aligned} F: \mathfrak{I}_0^1(M_n) &\to \mathfrak{I}_0^1(M_n) \\ X &\to F(X) \in \mathfrak{I}_0^1(M_n) \end{aligned}$$

$$F(X) \to F^2(X) \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$$

ifade edilir. I birim afinor olmak üzere,

1) $F^2(X) = I(X)$ ise F, hemen hemen çarpım yapı,

2) $F^2(X) = -I(X)$ ise F, hemen hemen kompleks yapı,

3) $F^2(X) = 0(X)$ ise F, hemen hemen tanjant (dual) yapı

olur (Yano and Kon 1984).

Yarı-Simetrik Metrik *F*-Konneksiyonlu Manifoldlar

Tanım 11: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold ve $\widehat{\nabla}$ ise bu manifold üzerinde bulunan herhangi bir afin konneksiyon olsun. Eğer, her $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $p \in \mathfrak{I}_1^0(M_n)$ 1-formu için, $\widehat{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü,

$$\hat{S}(X, Y) = p(Y)X - p(X)Y \tag{2.1}$$

şeklinde ise bu $\widehat{\nabla}$ konneksiyonuna yarı-simetrik burulmaya sahip konneksiyon denir (Yano 1970).

Koordinatlarla (2.1) ifadesi,

$$\hat{S}_{ij}^{\ \ k} = p_j \delta_i^{\ k} - p_i \delta_j^{\ k}$$

şeklindedir. Kolayca görülür ki $\hat{S}_{ij}^{\ \ k} = -\hat{S}_{ji}^{\ \ k}$ dir. Yani alt iki indislere göre antisimetriktir.

Tanım 12: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold ve g ise bu manifold üzerinde (0,2)-tipli bir metrik tensör olsun. Bu durumda $\widehat{\nabla}$ yarı-simetrik burulmaya sahip konneksiyonu $\widehat{\nabla} g = 0$ şartını sağlarsa bu konnesiyona yarı-simetrik metrik konneksiyon denir. Ayrıca genel olarak (global ya da invaryant)

$$Xg(Y, Z) = g\left(\widehat{\nabla}_X Y, Z\right) + g(Y, \widehat{\nabla}_X Z) \tag{2.2}$$

şeklinde de ifade edilebilir (Yano 1970).

Tanım 13: M_n manifoldu üzerinde alınan bir $F \in \mathfrak{I}_1^1(M_n)$ afinoru için, $\widehat{\nabla} F = 0$ şartını sağlayan $\widehat{\nabla}$ ya yarı-simetrik metrik F-konneksiyon denir (Yano 1970).

MATERYAL ve YÖNTEM

Rieman Manifoldu

Tanım 14: M_n**,** C^∞-sınıfından bir manifold ve $\mathfrak{I}_0^1(M_n)$ bu manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi olmak üzere

$$g: \mathfrak{I}_0^1(M_n) \times \mathfrak{I}_0^1(M_n) \to C^\infty(M_n, \mathbb{R})$$

biçiminde tanımlanan g bilineer formunu ele alınsın. Bu bilineer form, aşağıdaki şartları sağlıyorsa, g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir:

1) $g(X, Y) = g(Y, X)$, (simetriklik)

2) $g(X, X) \geq 0$ ve herbir X için $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, (pozitif tanımlılık)

Bu şartları sağlayan g bilineer formuyla verilen M_n ye Riemann manifoldu denir ve $(M_{n,}g)$ ile temsil edilir.

Yukarıda belirtilen pozitif tanımlılık koşulu yerine daha zayıf bir koşul olan ve "Her $Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için $g(X, Y) = 0$, $X = 0$ olmasını gerektirir." biçimindeki g bilineer formunun regülerlik (veya non-dejenere) şartı eklenirse, (M_n, g) çiftine yarı-Riemann (pseudo-Riemann) manifoldu denir (Kühnel 2005).

Regülerlik şartı için , $X = X^i \partial_i$ ve $Y = Y^j \partial_j$olmak üzere,

$$g(X, Y) = g(\partial_i, \partial_j) X^i Y^j = 0$$

şeklinde gösterilir. Verilen son eşitlik her Y^j için geçerli olduğundan $g_{ij} X^i = 0$ denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin $X^i = 0$ çözümüne sahip olması için,

$$det(g_{ij}) \neq 0$$

şartını sağlaması gerekir. Burada (g_{ij}), g_{ij} tensörüne karşılık gelen matris olarak tanımlanır.

Tachibana Operatörü

Tanım 15: $\mathfrak{I}(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \mathfrak{I}_q^p(M_n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir tensör cebiri ve $F \in \mathfrak{I}_1^1(M_n)$ olarak belirlensin. $\Phi_F: \overset{*}{\mathfrak{I}}_q^p(M_n) \to: \mathfrak{I}_q^p(M_n)$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa buradaki Φ_F dönüşümüne Tachibana operatörü veya Φ-operatörü denir.

1) Φ , sabit katsayılara terimlere göre lineer olmalıdır,

2) Her bir (p,q) için $\Phi_F: \overset{*}{\Im}{}^p_q(M_n) \to: \Im^p_{q+1}(M_n)$,

3) Her $K, L \in \overset{*}{\Im}(M_n)$ için, $\Phi_F\left(K\overset{C}{\otimes}L\right) = (\Phi_F K)\overset{C}{\otimes}L + K\overset{C}{\otimes}(\Phi_F L)$,

4) Her $X, Y \in \Im^1_0(M_n)$ için $\Phi_{FX}Y = -(L_Y F)X$,

5) Her $\omega \in \Im^0_1(M_n)$ ve $X, Y \in \Im^1_0(M_n)$için,

$$\begin{aligned}\Phi_{\varphi X}(l_Y\omega) &= \big(d(l_Y\omega)\big)(\varphi X) - \big(d\big(l_Y(\omega\circ\varphi)\big)\big)(X)\\ &= (\varphi X)(l_Y\omega) - X(l_{\varphi Y}\omega)\end{aligned}$$

Burada, $l_Y\omega = \omega(Y) = \omega\overset{C}{\otimes}Y$ dir (Yano and Ako 1968; Salimov 2013).

1-forma uygulanan Φ_φ-operatörü için $\omega \in \Im^0_1(M_n)$ olmak üzere Tanım 15 ten faydalanarak, herhangi $X, Y \in \Im^1_0(M_n)$ vektör alanları için,

$$\begin{aligned}(\Phi_\varphi\omega)(X,Y) &= \big(\Phi_{\varphi X}\omega\big)Y\\ &= \Phi_{\varphi X}(\iota_Y\omega) - \omega(\Phi_{\varphi X}Y)\\ &= (\varphi X)(\iota_Y\omega) - X\big(\iota_{\varphi Y}\omega\big) + \omega((L_Y\varphi)X)\\ &= \Big(L_{\varphi X}\omega - L_X(\omega\circ\varphi)\Big)Y\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki $\omega\circ\varphi$ 1-formu,

$$(\omega\circ\varphi)Y = ({}'\varphi\omega)Y = (\omega\overset{C}{\otimes}\varphi)Y = \omega(\varphi Y)$$

şeklinde gösterilir. $(\Phi_\varphi\omega)(X,Y) = \Big(L_{\varphi X}\omega - L_X(\omega\circ\varphi)\Big)Y$ eşitliğinden doğal çatıya göre,

$$(\Phi_\varphi\omega)_{ij} = \varphi_i^m\partial_m\omega_j - \partial_i\big(\omega_m\varphi_j^m\big) + \omega_m\partial_j\varphi_i^m$$

bileşenlerine sahip olduğu görülür (Salimov 2013).

$(0,s)$, $s \geq 2$, tipli tensör alanına uygulanan Φ_φ –operatörü

Teorem 1: $\omega \in \overset{*}{\Im}{}^0_s(M_n)$ olmak üzere,

$$\Phi_{\varphi X}\big(\omega(Y_1,\dots,Y_s)\big) = (\varphi X)\big(\omega(Y_1,\dots,Y_s)\big) - X(\omega(\varphi Y_1,\dots,Y_s))$$

şeklindedir (Salimov 2013).

İspat: $\omega_{Y_2,\dots,Y_s}$, $\omega_{Y_2,\dots,Y_s}(Y_1) = \omega(Y_1,\dots,Y_s)$ ile verilen 1-form olsun. O zaman Tanım 15 in (e) eşitliğinden,

$$\Phi_{\varphi X}\big(\omega(Y_1,\dots,Y_s)\big) = \Phi_{\varphi X}(\omega_{Y_2,\dots,Y_s}(Y_1))$$

$$= (\varphi X)\left(\iota_{Y_1}\omega_{Y_2,\dots,Y_s}\right) - X(\iota_{\varphi Y_1}\omega_{Y_2,\dots,Y_s})$$
$$= (\varphi X)\left(\omega(Y_1,\dots,Y_s)\right) - X\left(\omega(\varphi Y_1,\dots,Y_s)\right)$$

olur ve ispat tamamlanır.

$\omega \in \overset{*}{\Im}{}_s^0(M_n)$, $s \geq 2$ için Teorem 1 faydalanarak,

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi \omega)(X, Y_1, \dots, Y_s) &= \phi_{\varphi X}\left(\omega(Y_1,\dots,Y_s)\right) \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^{s}(Y_1,\dots,\phi_{\varphi X}Y_\lambda,\dots,Y_s) \\ &= (\varphi X)\left(\omega(Y_1,\dots,Y_s)\right) - X\left(\omega(\varphi Y_1,\dots,Y_s)\right) \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^{s}\varphi(Y_1,\dots,(L_{Y_\lambda}\varphi)X,\dots,Y_s) \\ &= (L_{\varphi X}\omega - L_X(\omega \circ \varphi))(Y_1,\dots,Y_s)\end{aligned} \tag{3.1}$$

olur.

Burada $\omega \circ \varphi$ tensör alanı

$$\begin{aligned}(\omega \circ \varphi)(Y_1,\dots,Y_s) &= \omega(\varphi Y_1,\dots,Y_s) \\ &\;\vdots \\ &= \omega(Y_1,\dots,\varphi Y_s)\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

İstatistiksel Manifoldlar

Tanım 16: (M_n, g) Riemann manifoldu olsun. $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned}\bar{C} : \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) &\to \Im_0^1(M_n) \\ X \quad , \quad Y \quad &\to \bar{C}(X,Y)\end{aligned}$$

şeklindeki (1,2)-tipli simetrik $\bar{C}$ tensörüne manifoldun kübik formu denir. Ayrıca $\overline{\nabla}, M_n$ üzerinde herhangi bir burulmasız konneksiyon olmak üzere

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y,Z) = g(\bar{C}(X,Y),Z) = C(X,Y,Z)$$

ifadesi tamamen simetrik ise $(M_n, g, \overline{\nabla}, C)$ ye istatistiksel manifold denir (Lauritzen 1987).

Tanım 17: $(M_n, g, \overline{\nabla}, C)$ istatistiksel manifold olmak üzere

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}\bar{C}(X,Y) \text{ ve } (\overline{\nabla}_X g)\,(Y,Z) = C(X,Y,Z)$$

eşitliği tanımlıdır (Lauritzen 1987).

Tanım 18: $\overline{\nabla}, M_n$ üzerinde herhangi bir burulmasız konneksiyon olmak üzere, eğer

$$Xg(Y,Z) = g(\overline{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X^* Z) \tag{3.2}$$

denkliği sağlanıyorsa $\overline{\nabla}^*$ a $\overline{\nabla}$ nın dual konneksiyonu denir (Lauritzen 1987).

Önerme 1: (M_n, g) Riemann manfoldu ve $\overline{\nabla}$ ise bu manifold üzerinde herhangi bir burulmasız konneksiyon olmak üzere

$$(\overline{\nabla}^*)^* = \overline{\nabla}$$

şeklindedir. Gerçekten, Tanım 18 deki denklemde $\overline{\nabla}$ konneksiyonu yerine $\overline{\nabla}^*$ duali yazılırsa

$$Xg(Y,Z) = g(\overline{\nabla}^*{}_X Y, Z) + g(Y, (\overline{\nabla}_X^*)^* Z) \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir. Burada denklem (3.2) den $g(\overline{\nabla}^*{}_X Y, Z) = Xg(Z,Y) - g(\overline{\nabla}_X Z, Y)$ olup bu eşitlik denklem (3.3) te yerine yazıllırsa $g(\overline{\nabla}_X Z, Y) = g(Y, (\overline{\nabla}_X^*)^* Z)$ elde edilir. Yani (3.3) denklemi

$$Xg(Y,Z) = g(\overline{\nabla}_X^* Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X Z) \tag{3.4}$$

biçimde de yazılabilir.

Tanım 19: (M_n, g) Riemann manfoldu ve $\overline{\nabla}$ ise bu manifold üzerinde herhangi bir burulmasız konneksiyon olmak üzere bu konneksiyonun burulma tensörü

$$\overline{T}(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y]$$

biçimindedir. Eğer $(M_n, g, \overline{\nabla})$ manifoldu için

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y g)(X,Z) = -g(\overline{T}(X,Y),Z) = -\overline{T}(X,Y,Z) \tag{3.5}$$

şartı sağlanırsa (ya da kübik form simetrik değilse) $(M_n, g, \overline{\nabla})$ ye burulmalı istatistiksel manifold (SMAT) denir (Matsuzoe 2013).

(3.5) denkleminin sol tarafı için, kovaryant türevler açılır ve (3.4) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&Xg(Y,Z) - g(\overline{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overline{\nabla}_X Z) - Y g(X,Z) + g(\overline{\nabla}_Y X, Z) + g(X, \overline{\nabla}_Y Z) \\
&= Xg(Y,Z) - g(\overline{\nabla}_X Y, Z) - Xg(Y,Z) + g(\overline{\nabla}_X^* Y, Z) \\
&-Yg(X,Z) + g(\overline{\nabla}_Y X, Z) + Yg(X,Z) - g(\overline{\nabla}_Y^* X, Z) \\
&= -g(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X, Z) + g(\overline{\nabla}_X^* Y - \overline{\nabla}_Y^* X, Z) \\
&= -g(\overline{T}(X,Y),Z) + g(\overline{T}^*(X,Y),Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Önerme 2: $(M_n, g, \overline{\nabla})$ burulmalı istatistiksel manifoldunun burulmalı $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun duali $\overline{\nabla}^*$ burulmasızdır. Yani,

$$\overline{\nabla}, \overline{\mathrm{T}} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{\nabla}^*, \overline{\mathrm{T}}^* = 0$$

$$\overline{\mathrm{T}}^*(X, Y) = \overline{\nabla}_X^* - \overline{\nabla}_Y^* \, X - [X, Y] = 0$$

olur (Matsuzoe 2013).

Anti-Kähler Manifoldlar

Tanım 20: M_{2n}, $2n$-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Bumanifold üzerinde tanımlanmış olan F afinor alanı $F^2 = -I$ denkliğini sağlıyorsa F ye M_{2n} manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks yapı denir ve (M_{2n}, F) ikilisine hemen hemen kompleks manifold adı verilir (Yano and Kon 1984).

Tanım 21: (M_{2n}, F) hemen hemen kompleks manifoldu olsun. Bu manifold üzerindeki g Riemann metriği her $X, Y, \in \Im_0^1(M_{2n})$vektör alanları için,

$$g(FX, Y) = g(X, FY)$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu g metriğine F hemen hemen kompleks yapısına göre pür metriktirdenir. (M_{2n}, g, F) üçlüsüne ise hemen hemen anti-Hermitian manifoldu denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 22: (M_{2n}, g, F) hemen hemen anti-Hermitian manifoldu üzerinde F kompleks yapısı için eğer $\nabla F = 0$ ise g ye anti-Kähler metrik, (M_{2n}, g, F) ye ise anti-Kähler manifold adı verilir. Burada ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonudur (Yano and Kon 1984).

Tanım 23: Eğer M_4 manifoldunda g metriğine göre paralel ve 2-boyutlu D null dağılımı mevcut ise 4-boyutlu M_4 manifoldu üzerinde bulunan g nötral metriği Walker metriği olarak adlandırılır.

Walker'in (Walker 1950) teoreminde a, b ve c, (x, y, z, t) koordinatlarının diferensiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere, lokal koordinat sistemi için Walker metriği

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

şeklinde ifade edilir. Paralel D null 2 manifoldu lokal olarak $\{\partial_x, \partial_y\}$ ile örtülür. Burada $\partial_x = \frac{\partial}{\partial_x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial_y}$ şeklindedir.

(Matsushita 2005) de, (M_4, g) Walker manifoldunda g ye uygun J hemen hemen kompleks yapısı $J\partial_x = \partial_y$ ve $J\partial_y = -\partial_y$ olmak üzere;

$$J = \left(J_i^j\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -c & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

şeklinde tek türlü tanımlanmıştır.

Bu durumdaki uygun J hemen hemen kompleks yapının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul ise

$$a_x - b_x - 2c_y = 0 \qquad\qquad a_y - b_y - 2c_x = 0$$

kısmi diferensiyel denklemlerinin sağlanmasıdır.

Tanım 24: M_4 Walker manifoldu üzerinde bulunan φ hemen hemen kompleks yapısı

i. $\varphi^2 = -I$

ii. $g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$, (Nordenlik ya da pür olma özelliği)

iii. $\varphi\partial_x = \partial_y$, $\varphi\partial_y = -\partial_x$,

şartlarını sağlamış olsun. Bu üç özellikten

$$\begin{cases} \varphi\partial_x = \partial_y \\ \varphi\partial_y = -\partial_x \\ \varphi\partial_z = \alpha\partial_x + \frac{1}{2}(a+b)\partial_y - \partial_t \\ \varphi\partial_z = -\frac{1}{2}(a+b)\partial_x + \alpha\partial_y + \partial_y \end{cases}$$

ifadesinde tek olmayan φ yapısı belirlenir. φ nin lokal bileşenleri ise, $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$ doğal çatısına göre,

$$\varphi = \left(\varphi_i^j\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha & -\frac{1}{2}(a+b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ifade edilir. Denklemde $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$ keyfi fonksiyonlardır (Matsushita 2005).

Son matriste $\alpha = c$ alınırsa, hemen hemen kompleks yapısı

$$F=\left(F_i^j\right)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & c & -\frac{1}{2}(a+b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

denklemi olarak tek türlü elde edilmiş olur (Matsushita 2005).

Tanım 25:(M_4, F, g) hemen hemen Norden-Walker manifold olarak olmak üzere F hemen hemen komplek yapısı için

$$(\Phi_F g)_{kij} = F_k^m \partial_m g_{ij} - F_i^m \partial_k g_{mj} + g_{mj}(\partial_i F_k^m - \partial_k F_i^m) + g_{ij}\partial_j F_k^m = 0 \tag{3.9}$$

Eşitliği geçerli ise F ye integrallenebilirdir denir. (M_4, φ, g) üçlüsü bir holomorfik Norden-Walker veya Kähler-Norden-Walker manifold olur. Ayrıca $\Phi_F g = 0 \Leftrightarrow \nabla F = 0$ şeklindedir. Burada ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonudur (Salimov and Iscan 2010).

Teorem 26: (M_4, φ, g) üçlüsü Kähler-Norden-Walker olması için gerek ve yeterli koşul

$$a_x = a_y = c_x = c_y = b_x = b_y = b_z = 0, \quad a_t - 2c_z = 0 \tag{3.10}$$

kısmi diferensiyel denklemin sağlanmasıdır (Salimov and Iscan 2010).

Sonuç-1: (M_4, φ, g) Kähler-Norden-Walker manifoldunun g metriği ve F kompleks yapısı sırasıyla

$$g=\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(z) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b(t) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

ve

$$J = \left(J^i{}_j\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2}(a(z)-b(t)) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a(z)-b(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

şeklindedir (Salimov and Iscan 2010).

ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin bu kısmında burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifold üzerinde Levi-Civita konneksiyonununa bağlı yeni bir konneksiyon tanımlandı. Kompleks yapıya bağlı özel seçilen deformasyon tensörü ile elde edilen bu yeni konneksiyonun burulması, eğrilik tensörleri incelendi. Daha sonra Walker manifoldları üzerinde bazı örnekler verildi.

(M_n, g, F) anti-Kähler manifoldu için

$$g(FX,Y) = g(FY,X)$$
$$\nabla F = 0 \text{ ve } F^2 = -I$$

olmak üzere, herhangi bir $\overline{\nabla}$ burulmalı konneksiyonu için

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y g)(X,Z) = -g(\overline{T}(X,Y),Z) = -\hat{T}(X,Y,Z) \tag{4.1}$$

şartı sağlanıyor ise $(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ dörtlüsüne "burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifold" denir.

Teorem 3: $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D(X,Y)$ konneksiyonu ile verilen $(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ manifoldunun burulmalı istatistiksel manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$\overline{D}(X,Y,Z) = \overline{D}(Z,Y,X)$$

olmasıdır. Burada $g(D(X,Y),Z) = \overline{D}(X,Y,Z)$ şeklindedir.

İspat 3: İlk olarak (4.1) eşitliği sağlansın. Bu durumda, $\overline{T}(X,Y)$, $\overline{\nabla}$ burulmalı konneksiyonun burulma tensörü olmak üzere

$$\begin{aligned}\overline{T}(X,Y) &= \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y]\\ &= \nabla_X Y + D(X,Y) - \nabla_Y X - D(Y,X) - [X,Y]\\ &= D(X,Y) - D(Y,X)\end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca (4.1) denkleminden

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X g)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y g)(X,Z) &= Xg(Y,Z) - g(\overline{\nabla}_X Y, Z)\\ &\quad -g(Y,\overline{\nabla}_X Z) - Yg(X,Z) + g(\overline{\nabla}_Y X, Z) + g(X, \overline{\nabla}_Y Z)\\ &= Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y + D(X,Y), Z) - g(Y, \nabla_X Z + D(X,Z)\\ &\quad -Yg(X,Z) - g(\nabla_Y X + D(Y,X), Z) + g(X, \nabla_Y Z + D(Y,Z)\\ &= -g(D(X,Y),Z) - g\big(Y, D(X,Z)\big) + g(D(Y,X),Z)\\ &\quad +g(X, D(Y,Z))\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan,

$$-g(D(X,Y),Z) - g\big(Y,D(X,Z)\big) + g(D(Y,X),Z) + g\big(X,D(Y,Z)\big)$$

$$= -\overline{D}(X,Y,Z) + \overline{D}(Y,X,Z)$$

ve

$$-\overline{D}(X,Y,Z) - \overline{D}(X,Z,Y) + \overline{D}(Y,X,Z) + \overline{D}(Y,Z,X) = -\overline{D}(X,Y,Z) + \overline{D}(Y,X,Z)$$

olduğundan

$$-\overline{D}(X,Z,Y) + \overline{D}(Y,Z,X) = 0$$

elde edilir.

İkinci olarak $\overline{D}(X,Y,Z) = \overline{D}(Z,Y,X)$ olsun, $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D(X,Y)$ eşitliğinden

$$\overline{D}(X,Y,Z) = g(D(X,Y),Z) = g(\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z)$$

$$= g(\overline{\nabla}_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z)$$

olup

$$\overline{D}(X,Y,Z) = \overline{D}(Z,Y,X) = g(\overline{\nabla}_Z Y, X) - g(\nabla_Z Y, X)$$

olur. Buradan

$$g(\overline{\nabla}_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) = g(\overline{\nabla}_Z Y, X) - g(\nabla_Z Y, X)$$

olup son eşitlik X, Y, Z ye göre döngüsel olarak yazılırsa,

$$g(\overline{\nabla}_X Y, Z) - g(\overline{\nabla}_Z Y, X) = g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Z Y, X)$$

$$g(\overline{\nabla}_Z X, Y) - g(\overline{\nabla}_Y X, Z) = g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Y X, Z)$$

$$-g(\overline{\nabla}_Y Z, X) + g(\overline{\nabla}_X Z, Y) = -g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_X Z, Y)$$

elde edilir. Son üç denklem taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} &g(\overline{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X Z) - [g(\overline{\nabla}_Y X, Z) + g(X, \overline{\nabla}_Y Z)] \\ &+g(\overline{\nabla}_Z X, Y) - g(\overline{\nabla}_Z Y, X) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &\qquad -[g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z)] + g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Z Y, X) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$Xg(Y,Z) - (\overline{\nabla}_X g)(Y,Z) - Yg(X,Z) + (\overline{\nabla}_Y g)(X,Z) + g(\overline{\nabla}_Z X, Y) - g(\overline{\nabla}_Z Y, X)$$

$$= Xg(Y,Z) - (\nabla_X g)(Y,Z) - Yg(X,Z) + (\nabla_Y g)(X,Z)$$

$$+g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Z Y, X)$$

olur. Ayrıca

$$-(\overline{\nabla}_X g)(Y,Z) + (\overline{\nabla}_Y g)(X,Z) = g(\overline{\nabla}_Z Y - \nabla_Z Y, X) - g(\overline{\nabla}_Z X - \nabla_Z X, Y)$$

$$= g(D(Z,Y),X) - g(D(Z,X),Y)$$
$$= g(D(X,Y),Z) - g(D(Y,X),Z)$$
$$= g(D(X,Y) - D(Y,X),Z) = g(\bar{T}(X,Y),Z)$$

elde edilir.

Bu kısımdaki amaç, $\overline{D}(X,Y,Z) = \overline{D}(Z,Y,X)$ şartını sağlayan özel bir deformasyon tensörü yazıp oluşan $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun özelliklerini incelemektir. Deformasyon tensörü

$$D(X,Y) = p(X)Y + Ug(X,Y) - p(FX)(FY) - (FU)g(FX,Y)$$

şeklinde seçilsin. Burada p keyfi bir kovektör alanı ve U ise $g(X,U) = p(X)$ şartını sağlayan keyfi bir vektör alanıdır. Buradan $\overline{D}(X,Y,Z) = g(D(X,Y),Z)$ olmak üzere

$$\overline{D}(X,Y,Z) = p(X)g(Y,Z) + p(Z)g(X,Y) - p(FX)g(FY,Z) - p(FZ)g(FX,Y)$$

olup kolayca görülür ki $\overline{D}(X,Y,Z) = \overline{D}(Z,Y,X)$ dir. O halde $\overline{\nabla}$ burulmalı istatistiksel konneksiyon

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + p(X)Y + Ug(X,Y) - p(FX)(FY) - (FU)g(FX,Y) \tag{4.2}$$

şeklinde olacaktır. Bu konneksiyonun burulma tensörü $\bar{T}(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y]$ ifadesinden

$$\bar{T}(X,Y) = p(X)Y - p(Y)X - p(FX)(FY) + p(FY)(FX)$$

elde edilir. Yani aslında deformasyon tensörü özel seçilerek yarı simetrik burulmaya sahip bir istatistiksel manifold elde edilmiş oldu.

Elde edilen bu yeni konneksiyon için,

$$D(FX,Y) = D(X,FY) = FD(X,Y)$$

olduğu aşikardır. Yani deformasyon tensörü F kompleks yapısına göre pürdür. Ayrıca ∇ Levi-Civita konneksiyonu da F kompleks yapısına göre pür olduğundan

$$\overline{\nabla}_{FX} Y = \overline{\nabla}_X (FY) = F\overline{\nabla}_X Y$$

ve buradan $(\overline{\nabla}_X F)Y = \overline{\nabla}_X (FY) - F\overline{\nabla}_X Y = 0$ olup $\overline{\nabla}$ konneksiyonu F kompleks yapısına göre pür ve F, $\overline{\nabla}$ burulmalı konneksiyonuna göre paraleldir.

Burulma Tensörünün Özellikleri

Yarı-simetrik olan burulma tensörü

$$\bar{T}(X,Y) = p(X)Y - p(Y)X - p(FX)(FY) + p(FY)(FX)$$

şeklinde olup buradan

$$\bar{T}(FX,Y) = p(FX)(Y) - p(Y)(FX) + p(X)(FY) - p(FY)(X)$$

$$\bar{T}(X,FY) = p(X)(FY) - p(FY)(X) + p(FX)(Y) - p(Y)(FX)$$

$$F\bar{T}(X,Y) = p(X)(FY) - p(Y)(FX) + p(FX)(Y) - p(FY)(X)$$

elde edilir. Buradan kolayca görülür ki

$$\bar{T}(FX,Y) = \bar{T}(X,FY) = F\bar{T}(X,Y)$$

dir. Yani $\bar{\nabla}$ yarı-simetrik konneksiyona sahip istatistiksel konneksiyonun burulma tensörü F kompleks yapısına göre pürdür.

$\bar{T}$ burulma tensörünün pür olması sebebiyle (3.1) denklemiyle belirtilen Tachibana operatör bu $\bar{T}$ tensörüne uygulanırsa,

$$\begin{aligned}(\Phi_{FZ}\bar{T})(X,Y) &= (\nabla_{FZ}\bar{T})(X,Y) - (\nabla_Z\bar{T})(FX,Y)\\ &= (\nabla_{FZ}p)(X)Y - (\nabla_{FZ}p(Y)X - (\nabla_{FZ}p)(FX)(FY) + (\nabla_{FZ}p)(FY)(FX)\\ &\quad -(\nabla_Z p)(FX)Y + (\nabla_Z p)(Y)(FX) - (\nabla_Z p)(X)(FY) + (\nabla_Z p)(FY)(X)\\ &= [(\nabla_{FZ}p)(X) - (\nabla_Z p)(FX)](Y) - [(\nabla_{FZ}p)(Y) - (\nabla_Z p)(FY)](X)\\ &\quad -[(\nabla_{FZ}p)(FX) + (\nabla_Z p)(X)](FY) + [(\nabla_{FZ}p)(FY) + (\nabla_Z p)(Y)](FX)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\bar{T}$ burulma tensörü içinde bulunan p kovektörü (1-form) için de

$$(\Phi_{FZ}p)(X) = (\nabla_{FZ}p)(X) - (\nabla_Z p)(FX)$$

yazılabilir. Son iki eşitlikten

$$\begin{aligned}(\Phi_{FZ}\bar{T})(X,Y) &= (\Phi_{FZ}p)(X)(Y) - (\Phi_{FZ}p)(Y)(X)\\ &\quad -(\Phi_{FZ}p)(FX)(FY) + (\Phi_{FZ}p)(FY)(FX)\end{aligned}$$

olur. Buradan aşağı teorem elde edilir.

Teorem 5: $(M_n, g, F, \bar{\nabla})$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel anti-Kähler manifold olsun. Bu manifoldun $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü $\bar{T}$ için, eğer bu tensör içinde bulunan p kovektörü holomorfik ise $\bar{T}$ tensörü de holomorfiktir. Yani $\Phi_F p = 0 \Rightarrow \Phi_P \bar{T} = 0$ dır.

Bundan sonra $\Phi_F p = 0$ olduğu kabul edilecektir. Yani

$$(\Phi_{FX}p)(Y) = (\nabla_{FX}p)(Y) - (\nabla_X p)(FY) = 0$$

şartı her zaman sağlanacaktır.

Her hangi bir $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörü

$$\bar{R}(X,Y,Z) = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z$$

şeklinde verilir. Eğer bu konneksiyon $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D(X,Y)$ şeklinde olursa eğrilik tensörü

$$\bar{R}(X,Y,Z) = R(X,Y,Z) + (\nabla_X D)(Y,Z) - (\nabla_Y D)(X,Z) + D\big(X,D(Y,Z)\big) - D(Y,D(X,Z))$$

biçiminde olur. Burada ∇ ve R sırasıyla Levi-Civita konneksiyonu ve Riemann eğrilik tensörüdür.

(4.2) denkleminde verilen konneksiyon için $D(X,Y)$ tensörü

$$D(X,Y) = p(X)Y + Ug(X,Y) - p(FX)(FY) - (FU)g(FX,Y)$$

şeklinde olup buradan

$$(\nabla_X D)(Y,Z) = (\nabla_X D)(Y)(Z) + (\nabla_X U)g(Y,Z) - (\nabla_X p)(FY)(FZ) - (F\nabla_X U)g(FY,Z)$$

ve

$$\begin{aligned} D(X,D(Y,Z)) &= D(X,p(Y)Z + Ug(Y,Z) - p(FY)(FZ) - (FU)g(FY,Z)) \\ &= D(X,Z)p(Y) + g(Y,Z)D(X,U) - p(FY)D(X,FZ) - g(FY,Z)D(Z,FU) \\ &= p(Y)(p(X)(Z) + p(Y)Ug(X,Z) - p(Y)p(FX)(FZ) - p(Y)(FU)g(FX,Z) \\ &+g(Y,Z)p(X)Ug(Y,Z)Up(X) - g(Y,Z)p(FX)(FU) - g((Y,Z)(FU)p(FX) \\ &-p(FY)p(X)(FZ) - p(FY)Ug(X,FZ) - p(FY)p(FX)(Z) \\ &- p(FY)(FU)g(X,Z) - g(FY,Z)p(X)(FU) - g(FY,Z)Up(FX) \\ &- g(FY,Z)p(FX)(U) - g(FY,Z)(FU)p(X) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son iki denklem $\bar{R}$ de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{R}(X,Y,Z) = R(X,Y,Z) &+ [(\nabla_X P)(Y) - (\nabla_Y pP)(X)(Z) \\ &+[\nabla_X U + Up(X) - (FU)p(FX)]g(Y,Z) \\ &-[\nabla_Y U + Up(Y) - (FU)p(FY)]g(X,Z) \\ &-[\mathrm{F}\nabla_X U + (U)p(FX) + (FU)p(FX)]g(FY,Z) \\ &+[\mathrm{F}\nabla_Y U + (U)p(FY) + (FU)p(FY)]g(FX,Z) \\ &-[\nabla_X p(FY) - (\nabla_Y p)(FX)](FZ) \end{aligned}$$

olur. Son olarak

$$A(X,Y) = (\nabla_X p)(Y) + p(X)p(Y) - p(FX)p(FY)$$

denilirse

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + A(X,W)g(Y,Z) - A(Y,W)g(X,Z)\\ -A(X,FW)g(FY,Z) + A(Y,FW)g(FX,Z)\\ +[A(X,Y) - A(Y,X)]g(Z,W) - [A(X,FY) - A(FY,X)]g(FZ,W)\end{aligned}$$

şeklinde $(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel anti-Kähler manifoldun (0,4) tipli eğrilik tensörü elde edilir.

$(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel anti-Kähler manifoldunun (0,4) tipli eğrilik tensörü içinde bulunan $A(X,Y)$ tensörü için

$$A(FX,Y) = (\nabla_{FX}p)(Y) + p(FX)p(Y) + p(X)p(FY)$$

$$A(X,FY) = (\nabla_X p)(FY) + p(X)p(FY) + p(FX)p(Y)$$

olup $A(FX,Y) - A(X,FY) = 0$ dır. Yani $A(X,Y)$ tensörü F kompleks yapısına göre pürdür. Dolayısıyla Tachibana operatörü uygulanabilir. Buradan

$$A(X,Y) = (\nabla_X p)(Y) + p(X)p(Y) - p(FX)p(FY)$$

şeklinde olup bu tensöre Tachibana operatörünün 3. şartı (Leibniz Kuralı) uygulanırsa

$$(\Phi_{FZ}A)(X,Y) = (\Phi_{FZ}\nabla_X p)(Y)$$

elde edilir. Son denklemin sağ tarafı $(\Phi_{FZ}p)(X) = (\nabla_{FZ}p)(X) - (\nabla_Z p)(FX)$ denklemine uyarlanırsa

$$\begin{aligned}(\Phi_{FZ}A)(X,Y) &= (\Phi_{FZ}\nabla_X p)(Y)\\ &= (\nabla_{FZ}\nabla_X p)(Y) - (\nabla_Z\nabla_X p)(FY)\end{aligned}$$

olur. Son eşitlikten ve 1-forma uygulanan Ricci özdeşliğinden (Salimov ve Mağden 2008)

$$(\nabla_{FZ}\nabla_X p)(Y) = (\nabla_X\nabla_{FZ}p)(Y) - \frac{1}{2}p(R(FZ,X,Y)) \tag{4.3}$$

$$(\nabla_Z\nabla_X p)(FY) = (\nabla_X\nabla_Z p)(FY) - \frac{1}{2}p(R(Z,X,FY)) \tag{4.4}$$

elde edilir. Burada $(\nabla_{FZ}p)(Y) = (\nabla_Z p)(FY)$ ifadesinin kovaryant türevi alınırsa

$$(\nabla_X\nabla_{FZ}p)(Y) = (\nabla_X\nabla_Z p)(FY) \tag{4.5}$$

olup (4.3), (4.4) ve (4.5) denklemlerinden

$$(\nabla_{FZ}\nabla_X p)(Y) - (\nabla_Z\nabla_X p)(FY) = -\frac{1}{2}p(R(FZ,X,Y) - R(Z,X,FY))$$

olur. Son olarak Riemann eğrilik tensörü F kompleks yapısına göre pür olduğundan

$$(\nabla_{FZ}\nabla_X p)(Y) - (\nabla_Z\nabla_X p)(FY) = 0$$

olur. Buradan

$$(\Phi_{FZ}A)(X,Y) = (\nabla_{FZ}\nabla_X p)(Y) - (\nabla_Z\nabla_X p)(FY) = 0 \tag{4.6}$$

yazılır. Tachibana operatörü $\bar{R}$ eğrilik tensörüne uygulanırsa ve (4.6) denkleminden

$$\begin{aligned}(\Phi_{FV}\bar{R})(X,Y,Z,W) = {} & (\Phi_{FV}R)(X,Y,Z,W) + (\Phi_{FV}A)(X,W)g(Y,Z) \\ & -(\Phi_{FV}A)(Y,W)\, g(X,Z) - (\Phi_{FV}A)(X,FW)\, g(FY,Z) \\ & +(\Phi_{FV}A)(Y,FW)\, g(FX,Z) \\ & +[(\Phi_{FV}A)(X,Y) - (\Phi_{FV}A)(Y,X)]\, g(Z,W) \\ & -[(\Phi_{FV}A)(X,FY) - (\Phi_{FV}A)(FY,X)]\, g(FZ,W) \\ & = 0\end{aligned}$$

olur. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6: $(M_n, g, F, \bar{\nabla})$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel anti-Kähler manifold olsun. Bu manifoldun $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörü $\bar{R}$ holomorfiktir. Yani $\Phi_F\bar{R} = 0$ dır ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(\Phi_{FV}\bar{R})(X,Y,Z,W) = (\nabla_{FV}\bar{R})(X,Y,Z,W) - (\nabla_F\bar{R})(FX,Y,Z,W)$$

olup son eşitliğin sağ tarafından

$$\begin{aligned}(\nabla_{FV}\bar{R})(X,Y,Z,W) &= (\nabla_V\bar{R})(FX,Y,Z,W) \\ &= (\nabla_V\bar{R})(X,FY,Z,W) \\ &= (\nabla_V\bar{R})(X,Y,FZ,W) \\ &= (\nabla_V\bar{R})(X,Y,Z,FW).\end{aligned}$$

yazılır. Yani $\bar{R}$ eğrilik tensörünün Levi-Civita konneksiyonuna göre türevi de F kompleks yapısına göre pürdür.

$(M_n, g, F, \bar{\nabla})$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel anti-Kähler manifoldunun Ricci eğrilik tensörü $\overline{Rıc}$, $\{E_i\}, i = 1, \dots n$ vektör sistemi M_n üzerinde ortanormal vektör alanları olmak üzere

$$\begin{aligned}\overline{Rıc}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} \bar{R}(E_i, X, Y, E_i) \\ &= Ric(X,Y) + 2A(X,Y) - 4A(Y,X)\end{aligned}$$

$$+iz(A)g(X,Y) - iz(Q)g(FX,Y)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} iz(A) &= \sum_{i=1}^{n} A(E_i, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\nabla_{E_i} p \right)(E_i) + 2p(E_i)p(E_i) \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} iz(Q) &= \sum_{i=1}^{n} (A \circ F)(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} (A)(E_i, FE_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\nabla_{E_i} p \right)(FE_i) + 2p(E_i)p(FE_i) \right] \end{aligned}$$

biçimindedir. $\overline{R\imath c}$ tensörünün simetrikliği için,

$$\begin{aligned} \overline{R\imath c}(X,Y) - \overline{R\imath c}(Y,X) &= 6[A(X,Y) - A(Y,X)] \\ &= 6[(\nabla_{\mathrm{X}} p)Y - (\nabla_{\mathrm{Y}} p)X] \\ &= 6[(\nabla_{\mathrm{X}} p)Y - (\nabla_{\mathrm{Y}} p)X + p(\nabla_{\mathrm{X}} Y - \nabla_{\mathrm{Y}} X) - p([\mathrm{X},\mathrm{Y}])] \\ &= 6[Xp(Y) - Yp(X) - p([\mathrm{X},\mathrm{Y}])] \\ &= 12(dp)(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada dp, p kovektörünün dış türevidir. Buradan

Teorem 7: $(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel anti-Kähler manifold olsun. Bu manifoldun $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart p kovektörünün kapalı olmasıdır. Yani $dp = 0$ olmasıdır.

$(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel manifoldunun skaler eğriliği $\bar{\tau}$,

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \sum_{i=1}^{n} \overline{R\imath c}(E_i, E_i) \\ &= \tau + (n-2)(iz(A)) \end{aligned}$$

biçimindedir.

Teorem 8: $(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel anti-Kähler manifold olsun. Bu manifoldun $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun skaler eğriliği $\bar{\tau}$ nin ∇ Levi-Civita konneksiyonunun skaler eğriliği τ ile çakışması için gerek ve yeter şart $iz(A)=0$ olması ya da

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\nabla_{E_i}p\right)(E_i)+2p(E_i)p(E_i)\right]=0$$

denkleminin sağlanmasıdır.

***$U(Ric)$*-Vektör Alanı**

Tanım 22: U, (M_n,g) Riemann manifoldlarda bir vektör alanı ve $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$ olmak üzere eğer

$$(\nabla_X p)(Y)=\lambda Ric(X,Y) \tag{4.7}$$

şartı sağlanıyorsa U ya (M_n,g) üzerinde $U(Ric)$-vektör alanı denir. Buradan λ, C^k-sınıfından sıfırdan farklı skaler bir fonksiyon, ∇ Levi-Civita konveksiyonu ve $X\in\Im_0^1(M_n)$ için $g(U,X)=p(X)$ dir. Lokal koordinatlarda (4.7) ifadesi

$$\nabla_i p_j=\lambda(Ric)_{ij}$$

olup burada $p_i=g_{im}U^m$ şeklindedir.

(4.7) denklemindeki ∇ Levi-Civita konveksiyonunun Ricci tensörü simetrik olduğundan, yani

$$\begin{aligned}
Ric(X,Y)-Ric(Y,X) &= \frac{1}{\lambda}[(\nabla_X p)(Y)-(\nabla_Y p)(X)]\\
&= \frac{1}{\lambda}[Xp(Y)-p(\nabla_X Y)-Yp(X)+p(\nabla_Y X)\\
&= \frac{1}{\lambda}[Xp(Y)-Yp(X)-p(\nabla_X Y-\nabla_Y X)]\\
&= \frac{1}{\lambda}[Xp(Y)-Yp(X)-p([X,Y])]\\
&= \frac{2}{\lambda}(dp)(X,Y)\\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Önerme-2: $(M_n,g,\overline{\nabla},F)$ burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifoldunda $p, U(Ric)$-vektör alanı seçilirse $dp=0$ yani p kapalı olur.

Önerme-3: $U(Ric)$-vektör alanına sahip $(M_n, g, \overline{\nabla}, F)$ burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifoldunda $\overline{\nabla}$ yarı-simetrik konneksiyonuna göre $U(\overline{R\iota c})$ şartı

$$(\overline{\nabla}_X p)(Y) = \gamma \overline{R\iota c}(X, Y) \tag{4.8}$$

biçimindedir. Burada γ, C^k-sınıfından sıfırdan farklı skaler bir fonksiyon ve $\overline{R\iota c}(X, Y)$, $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun Ricci tensörüdür.

İspat: (4.8) denkleminin sol tarafı için

$$(\overline{\nabla}_X p)(Y) = (\nabla_X p)(Y) - p(X)p(Y) - p(U)g(X, Y) - p(FX)p(FY) - p(FU)g(FX, Y)$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X p)(Y) - (\overline{\nabla}_Y p)(X) &= (\nabla_Y p)(X) - (\nabla_X p)(Y) \\ &= \lambda[Ric(X, Y) - Ric(Y, X)] \\ &= 0\end{aligned}$$

ve (4.8) denkleminin sağ tarafı için ise Teorem 7 den

$$\overline{R\iota c}(X, Y) - \overline{R\iota c}(Y, X) = 12(dp)(X, Y)$$

ve Önerme-1 den $dp = 0$ olup $\overline{R\iota c}$ simetriktir.

Önerme-4: $(M_n, g, \overline{\nabla}, F)$, $U(Ric)$-vektör alanına sahip yarı simetrik burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifold olsun. Bu durumda ∇ Levi-Civita konveksiyonunun skaler eğriliği,

$$\tau = \frac{n - 2\gamma(n-2)}{\gamma^2(n-2)} p(U)$$

şeklindedir.

İspat: (4.8) denkleminden

$$(\overline{\nabla}_X p)(Y) = (\nabla_X p)(Y) - p(X)p(Y) - p(U)g(X, Y) - p(FX)p(FY) - p(FU)g(FX, Y)$$

ve $\overline{R\iota c}$ tensörünün tanımından

$$\gamma \overline{R\iota c}(X, Y) = \gamma[Ric(X, Y) + 2A(Y, X) - 4(X, Y) + (izA)g(X, Y) - (izB)g(FX, Y)$$

yazılır. Son iki denklemin eşitliğinden,

$$\begin{aligned}&-p(X)p(Y) + p(U)g(X, Y) - p(FX)p(FY) - p(FU)g(FX, Y) \\ &= \gamma[2A(Y, X) - 4A(X, Y) + (izA)g(X, Y) - (izB)g(FX, Y)]\end{aligned}$$

olup $X = Y = E_i$ alınırsa $g(E_i, E_i) = n, g(FE_i, E_i) = 0,\ \ p(U) = p(E_i)p(E_i)$

olmak üzere son eşitlikten

$$np(E_i)p(E_i) = \gamma(n-2)(izA)$$
$$= \gamma(n-2)\left[\nabla_{E_i}p\right)(E_i) + 2p(E_i)p(E_i)]$$

olup buradan,

$$\left[\frac{n-2\gamma(n-2)}{\gamma(n-2)}\right]p(E_i)p(E_i) = (\nabla_{E_i}p)(E_i) \tag{4.9}$$

yazılır.

(4.7) denkleminde $(\nabla_X p)(Y) = \gamma Ric(X,Y)$ ifadesinde $X = Y = E_i$ alınırsa

$$\left(\nabla_{E_i}p\right)(E_i) = \gamma R(E_i, E_i) = \gamma\tau \tag{4.10}$$

olup (4.9) ve (4.10) dan,

$$\tau = \frac{n-2\gamma(n-2)}{\gamma^2(n-2)}p(U) \tag{4.11}$$

elde edilir.

Tanım-23: M_n manifoldu üzerindeki herhangi bir $V \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$g(V,X) = w(X) \in \Im_1^0(M_n)$$

olmak üzere V vektörü sabit uzunluklu ise

$$\|V\| = w(V) = c, (c = \text{sabit})$$

şeklinde yazılır.

Teorem 7: $(M_n, g, \overline{\nabla}, F)$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel anti-Kähler manifold olsun. Eğer bu manifold sabit uzunluklu bir $U(\overline{R\iota c})$ vektörüne sahipse,

$$\nabla\tau = 0$$

dır. Yani manifold sabit skaler eğriliğe sahiptir.

İspat 7: Eğer $U(\overline{R\iota c})$-vektör alanı sabit uzunluklu ise,

$$\|U\| = p(U) = p(E_i)P(E_i) = c, (c = \text{sabit})$$

olup (4.7) denkleminden

$$\tau = \frac{n-2\gamma(n-2)}{\gamma^2(n-2)}p(E_i)P(E_i)$$
$$= \frac{n-2\gamma(n-2)}{\gamma^2(n-2)}p(U)$$
$$= \frac{n-2\gamma(n-2)}{\gamma^2(n-2)}c$$

olur. Her iki tarafın ∇ ya göre kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla\tau = 0$$

bulunur.

Anti-Kähler-Walker Manifoldlar Üzerinde Hesaplamalar

Bu çalışmadaki $(M_n, g, \overline{\nabla}, F)$, yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel anti-Kähler manifoldu temelde bir anti-Kähler (Kähler-Norden) manifoldudur. Dolayısıyla (M_4, g, F) Kähler-Norden-Walker manifoldları üzerinde burulmalı istatistiksel konneksiyonlar incelenebilir.

$(M_4, g, \overline{\nabla}, F)$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel Kähler-Norden-Walker manifoldu olsun. Buradan,

Durum-1: (3.11) ve (3.12) de $a(z) = b(t) = 0$ alınırsa

$$g = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$F = \left(F_j^i\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$D(X,Y) = p(X)Y + Ug(X,Y) - p(FX)(FY) - (FU)g(FX,Y)$$

biçiminde verilen deformasyon tensörünün koordinatlarla ifadesi $X = \partial_i, Y = \partial_j$ için

$$D_{ij}^k = p_i\delta_j^k + p^k g_{ij} - \sum_{m=1}^{4}\left(p_m F_i^m F_j^k - p^m F_m^k F_{ij}\right)$$

şeklinde olup burada $p^k = \sum_{m=1}^{4}(p_m g^{mk})$ ve $F_{ij} = \sum_{m=1}^{4}(F_i^m g_{mj})$ biçimindedir. Mapple programıyla hesaplanan deformasyon tensörünün bileşenleri

$$p_i = p_i(x,y,z,t), \qquad i = 1 \dots 4$$

ve

$$p_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(p_i), \qquad i,j = 1 \dots 4$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
D_{11}^{1} &= D_{12}^{2} = D_{21}^{2} = D_{31}^{3} \\
&= D_{41}^{4} = D_{42}^{3} = \frac{1}{2} D_{13}^{1} = \frac{1}{2} D_{14}^{4} \\
&= \frac{1}{2} D_{24}^{3} = -D_{22}^{1} = -D_{32}^{4} = -\frac{1}{2} D_{23}^{4} \\
&= p_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{12}^{1} &= D_{21}^{1} = D_{22}^{2} = D_{31}^{4} \\
&= D_{32}^{3} = D_{42}^{4} = \frac{1}{2} D_{13}^{4} = \frac{1}{2} D_{23}^{3} \\
&= \frac{1}{2} D_{24}^{4} = -D_{11}^{2} = -D_{41}^{3} = -\frac{1}{2} D_{14}^{3} \\
&= p_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{13}^{1} &= D_{23}^{2} = D_{24}^{1} = D_{33}^{3} \\
&= D_{34}^{4} = D_{43}^{4} = \frac{1}{2} D_{31}^{1} = \frac{1}{2} D_{32}^{2} \\
&= \frac{1}{2} D_{42}^{1} = -D_{14}^{2} = -D_{44}^{3} = -\frac{1}{2} D_{41}^{2} \\
&= p_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{13}^{2} &= D_{14}^{1} = D_{24}^{2} = D_{34}^{3} \\
&= D_{43}^{3} = D_{44}^{4} = \frac{1}{2} D_{31}^{2} = \frac{1}{2} D_{41}^{1} \\
&= \frac{1}{2} D_{42}^{2} = -D_{23}^{1} = -D_{33}^{4} = -\frac{1}{2} D_{32}^{1} \\
&= p_4
\end{aligned}
$$

şeklinde olur.

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} + D_{ij}^{k}$$

biçimde tanımlanan istatistiksel konneksiyonun katsayıları ise Γ_{ij}^{k} Levi-Civita konneksiyon katsayıları sıfır olup,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{11}^{1} &= \bar{\Gamma}_{12}^{2} = \bar{\Gamma}_{21}^{2} = \bar{\Gamma}_{31}^{3} \\ &= \bar{\Gamma}_{41}^{4} = \bar{\Gamma}_{42}^{3} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{13}^{1} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{14}^{4} \\ &= \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{24}^{3} = -\bar{\Gamma}_{22}^{1} = -\bar{\Gamma}_{32}^{4} = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{23}^{4} \\ &= p_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{12}^{1} &= \bar{\Gamma}_{21}^{1} = \bar{\Gamma}_{22}^{2} = \bar{\Gamma}_{31}^{4} \\ &= \bar{\Gamma}_{32}^{3} = \bar{\Gamma}_{42}^{4} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{13}^{4} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{23}^{3} \\ &= \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{24}^{4} = -\bar{\Gamma}_{11}^{2} = -\bar{\Gamma}_{41}^{3} = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{14}^{3} \\ &= p_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{13}^{1} &= \bar{\Gamma}_{23}^{2} = \bar{\Gamma}_{24}^{1} = \bar{\Gamma}_{33}^{3} \\ &= \bar{\Gamma}_{34}^{4} = \bar{\Gamma}_{43}^{4} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{31}^{1} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{32}^{2} \\ &= \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{42}^{1} = -\bar{\Gamma}_{14}^{2} = -\bar{\Gamma}_{44}^{3} = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{41}^{2} \\ &= p_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{13}^{2} &= \bar{\Gamma}_{14}^{1} = \bar{\Gamma}_{24}^{2} = \bar{\Gamma}_{34}^{3} \\ &= \bar{\Gamma}_{43}^{3} = \bar{\Gamma}_{44}^{4} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{31}^{2} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{41}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{42}^{2} = -\bar{\Gamma}_{23}^{1} = -\bar{\Gamma}_{33}^{4} = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{32}^{1} \\ &= p_4\end{aligned}$$

biçimindedir. Çalışma boyunca kabul ettiğimiz

$$(\Phi_{FX}p)(Y) = (\nabla_{FX}p)(Y) - (\nabla_X p)(FY) = 0$$

şartının koordinatlarla açık ifadesi

$$\begin{aligned}(\Phi_F p)_{ij} &= \sum_{m=1}^{4}\left(F_i^m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}p_j\right) - F_j^m\left(\frac{\partial}{\partial x^j}p_m\right)\right) \\ &= \sum_{m=1}^{4}\left(F_i^m(p_{j,m}) - F_j^m(p_{m,j})\right)\end{aligned}$$

şeklinde olup

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_F p)_{11} = (\Phi_F p)_{22} = p_{1,2} - p_{2,1}\\
&(\Phi_F p)_{32} = (\Phi_F p)_{41} = -p_{2,4} + p_{1,3}\\
&(\Phi_F p)_{33} = (\Phi_F p)_{44} = -p_{3,4} + p_{4,3}\\
&(\Phi_F p)_{14} = (\Phi_F p)_{23} = p_{4,2} - p_{3,1}\\
&(\Phi_F p)_{31} = -p_{1,4} - p_{2,3}\\
&(\Phi_F p)_{21} = -p_{1,1} - p_{2,2}\\
&(\Phi_F p)_{12} = p_{2,2} + p_{1,1}\\
&(\Phi_F p)_{42} = p_{2,3} + p_{1,4}\\
&(\Phi_F p)_{13} = p_{3,2} + p_{4,1}\\
&(\Phi_F p)_{43} = -(\Phi_F p)_{34} = p_{3,3} + p_{4,4}\\
&(\Phi_F p)_{24} = -p_{4,1} - p_{3,2}
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

elde edilir.

$(M_4, g, \overline{\nabla}, F)$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel Kähler-Norden-Walker manifoldunun (0,4) tipli eğrilik tensörü koordinatlarla

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + A_{il}g_{jk} - A_{jl}g_{ik}\\
- \sum_{m=1}^{4} F_l^m \left(A_{im}F_{jk} - A_{jm}F_{ik}\right)\\
+\left(A_{ij} - A_{ji}\right)g_{kl} + \sum_{m=1}^{4} F_j^m (A_{im} - A_{mi})F_{kl}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada $A_{ij} = \nabla_i p_j + p_i p_j - \sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4} p_m p_n F_i^m F_j^n$ biçimindedir.

(4.12) ile verilen eşitlikler sıfıra eşitlenerek sistem çözülür ve bu çözümler (0,4) tipli $\bar{R}$ eğrilik tensöründe yerlerine yazılarsa, $\bar{R}_{ijkl}$ biçimindeki eğrilik tensörünün bileşenleri

$$
\begin{aligned}
-\bar{R}_{1411} &= -\bar{R}_{2322} = -\bar{R}_{3112} = -\bar{R}_{3121} = -\bar{R}_{3211} = -\bar{R}_{4122}\\
&= -\bar{R}_{4212} = -\bar{R}_{4221} = \bar{R}_{1312} = \bar{R}_{1321} = \bar{R}_{1422}\\
&= \bar{R}_{2311} = \bar{R}_{2412} = \bar{R}_{2421} = \bar{R}_{3222} = \bar{R}_{4111}\\
&= p_{2,1} + 2p_2 \cdot p_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\bar{R}_{1334} &= -\bar{R}_{1343} = -\bar{R}_{1433} = -\bar{R}_{2344} = -\bar{R}_{2434} = -\bar{R}_{2443} \\
&= -\bar{R}_{3233} = -\bar{R}_{4144} = \bar{R}_{1444} = \bar{R}_{2333} = \bar{R}_{3134} \\
&= \bar{R}_{3143} = \bar{R}_{3244} = \bar{R}_{4133} = \bar{R}_{4234} = \bar{R}_{4245} \\
&= p_{4,3} + 2p_3 \cdot p_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\bar{R}_{1311} &= -\bar{R}_{1412} = -\bar{R}_{1421} = -\bar{R}_{2411} \\
&= -\bar{R}_{3122} = -\bar{R}_{3212} = -\bar{R}_{3221} = -\bar{R}_{4222} \\
&= \bar{R}_{1322} = \bar{R}_{2312} = \bar{R}_{2321} = \bar{R}_{2422} \\
&= \bar{R}_{3111} = \bar{R}_{4112} = \bar{R}_{4121} = \bar{R}_{4211} \\
&= p_{2,2} - (p_1)^2 + (p_2)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{1344} &= \bar{R}_{1434} = \bar{R}_{1443} = \bar{R}_{2444} \\
&= \bar{R}_{3133} = \bar{R}_{3234} = \bar{R}_{3243} = \bar{R}_{4233} \\
&= -\bar{R}_{1333} = -\bar{R}_{2334} = -\bar{R}_{2343} = -\bar{R}_{2433} \\
&= -\bar{R}_{3144} = -\bar{R}_{4134} = -\bar{R}_{4143} = -\bar{R}_{4244} \\
&= -p_{4,4} - (p_4)^2 + (p_3)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{1332} &= \bar{R}_{2331} = \bar{R}_{2342} = \bar{R}_{2432} \\
&= \bar{R}_{3141} = \bar{R}_{4131} = \bar{R}_{4142} = \bar{R}_{4241} \\
&= -2p_{2,3} - p_{4,1} - p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{1314} &= \bar{R}_{1413} = \bar{R}_{1424} = \bar{R}_{2414} \\
\bar{R}_{3123} &= \bar{R}_{3213} = \bar{R}_{3224} = \bar{R}_{4223} \\
&= p_{2,3} + 2p_{4,1} - p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{1414} &= \bar{R}_{2323} = \bar{R}_{3113} = \bar{R}_{3124} \\
&= \bar{R}_{3214} = \bar{R}_{4123} = \bar{R}_{4213} = \bar{R}_{4224} \\
&= p_{2,4} - p_{4,2} - p_1 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{1441} &= \bar{R}_{2332} = \bar{R}_{3131} = \bar{R}_{3142} \\
&= \bar{R}_{3241} = \bar{R}_{4132} = \bar{R}_{4231} = \bar{R}_{4242} \\
&= 2p_{2,4} - p_{4,2} + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4
\end{aligned}
$$

$$
\bar{R}_{1323} = \bar{R}_{2313} = \bar{R}_{2324} = \bar{R}_{2423}
$$

$$= \bar{R}_{3114} = \bar{R}_{4113} = \bar{R}_{4124} = \bar{R}_{4214}$$
$$= -2p_{4,1} - p_{2,3} - p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3$$

$$\bar{R}_{1341} = \bar{R}_{1431} = \bar{R}_{1442} = \bar{R}_{2441}$$
$$= \bar{R}_{3132} = \bar{R}_{3231} = \bar{R}_{3242} = \bar{R}_{4132}$$
$$= p_{4,1} + 2p_{2,3} - p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3$$

$$\bar{R}_{1331} = \bar{R}_{1342} = \bar{R}_{1432} = \bar{R}_{2341}$$
$$= \bar{R}_{2431} = \bar{R}_{2442} = \bar{R}_{3232} = \bar{R}_{4141}$$
$$= p_{4,2} - 2p_{2,4} - p_1 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4$$

$$\bar{R}_{1313} = \bar{R}_{1324} = \bar{R}_{1423} = \bar{R}_{2314}$$
$$= \bar{R}_{2413} = \bar{R}_{2424} = \bar{R}_{3223} = \bar{R}_{4114}$$
$$= 2p_{4,2} - p_{2,4} + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4$$

şeklinde olur.

$(M_4, g, \overline{\nabla}, F)$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel Kähler-Norden-Walker manifoldunun Ricci eğrilik tensörü $\overline{R\iota c}$ koordinatlarla

$$(\overline{R\iota c})_{ij} = (Ric)_{ij} + 2A_{ij} - 4A_{ji}$$
$$+ \sum_{n=1}^{4} A_n^n g_{ij} - \sum_{n=1}^{4} \sum_{m=1}^{4} A_n^m F_m^n F_{ij}$$

şeklinde olup bu bileşenler

$$(\overline{R\iota c})_{13} = (\overline{R\iota c})_{24} = 4p_{2,4} - 2p_{4,2} + 2p_1 \cdot p_3 + 2p_2 \cdot p_4$$
$$(\overline{R\iota c})_{12} = (\overline{R\iota c})_{21} = -2p_{2,1} - 4p_2 \cdot p_1$$
$$(\overline{R\iota c})_{31} = (\overline{R\iota c})_{42} = 4p_{4,2} - 2p_{2,4} + 2p_1 \cdot p_3 + 2p_2 \cdot p_4$$
$$(\overline{R\iota c})_{34} = (\overline{R\iota c})_{43} = -2p_{4,3} - 4p_3 \cdot p_4$$
$$(\overline{R\iota c})_{11} = 2p_{2,2} - 2(p_1)^2 + 2(p_2)^2$$
$$(\overline{R\iota c})_{14} = -4p_{2,3} - 2p_{2,1} - 2p_2 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_4$$
$$(\overline{R\iota c})_{11} = -2p_{2,2} + 2(p_1)^2 - 2(p_2)^2$$
$$(\overline{R\iota c})_{23} = 2p_{4,1} + 4p_{2,3} - 2p_1 \cdot p_4 + 2p_2 \cdot p_3$$
$$(\overline{R\iota c})_{32} = -4p_{4,1} - 2p_{2,3} - 2p_1 \cdot p_4 + 2p_2 \cdot p_3$$
$$(\overline{R\iota c})_{33} = 2p_{4,4} - 2(p_3)^2 + 2(p_4)^2$$
$$(\overline{R\iota c})_{41} = 2p_{2,3} + 4p_{4,1} - 2p_2 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_4$$

$$(\overline{R\iota c})_{44} = -2p_{4,4} - 2(p_4)^2 + 2(p_3)^2$$

biçiminde elde edilir.

$(M_4, g, \overline{\nabla}, F)$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel Kähler-Norden-Walker manifoldunun skaler eğrilik tensörü $\bar{\tau}$ koordinatlarla

$$\bar{\tau} = \tau + 2\sum_{n=1}^{4} A_n^n$$

şeklinde olup bu bileşen

$$\bar{\tau} = 4p_{4,2} + 8p_1 \cdot p_3 + 8p_2 \cdot p_4$$

biçimindedir.

Durum-2: (3.11) ve (3.12) de $a(z) = 2\cosh(z)$ ve $b(t) = 0$ alınırsa

$$g = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2\cosh(z) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$F = (F_i^j) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -\cosh(z) \\ 1 & 0 & \cosh(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup D_{ij}^k deformasyon tensörünün bileşenleri

$$D_{44}^1 = -\frac{1}{2}D_{43}^2 = -D_{34}^2 = (-p_1 \cdot \cosh(z) + p_3)\cosh(z)$$

$$\begin{aligned} D_{22}^1 &= D_{32}^4 = \frac{1}{2}D_{23}^4 = \frac{1}{2}D_{13}^3 \\ &= -\frac{1}{2}D_{14}^4 = -\frac{1}{2}D_{24}^3 = -D_{11}^1 = -D_{12}^2 \\ &= -D_{21}^2 = -D_{31}^3 = -D_{41}^4 = -D_{42}^3 \\ &= -p_1 \end{aligned}$$

$$D_{11}^2 = D_{41}^3 = \frac{1}{2}D_{14}^3 = \frac{1}{2}D_{13}^3$$

$$= -\frac{1}{2}D_{13}^{4} = \frac{1}{2}D_{23}^{3} = \frac{1}{2}D_{24}^{4} = -D_{12}^{1}$$
$$= -D_{21}^{1} = -D_{22}^{2} = -D_{31}^{4} = -D_{32}^{3} = -D_{42}^{4}$$
$$= -p_2$$

$$D_{24}^{2} = D_{44}^{4} = -\frac{1}{2}D_{32}^{1} = \frac{1}{2}D_{42}^{2} = p_4$$
$$D_{23}^{2} = D_{43}^{4} = p_3$$
$$D_{43}^{1} = (p_4 + p_2) \cdot \cosh(z)$$
$$D_{33}^{2} = -\cosh(z)\,(p_2 \cdot \cosh(z) - 3p_4)$$
$$D_{14}^{2} = D_{44}^{3} = \frac{1}{2}D_{41}^{2} = p_1 \cdot \cosh(z) - p_3$$
$$D_{24}^{1} = -3p_1 \cdot \cosh(z) + p_3$$
$$D_{42}^{1} = -3p_1 \cdot \cosh(z) + 2p_3$$
$$D_{13}^{1} = -2p_1 \cdot \cosh(z) + p_3$$
$$D_{34}^{3} = -2p_2 \cdot \cosh(z) + p_4$$
$$D_{14}^{1} = 2p_2 \cdot \cosh(z) + p_4$$
$$D_{33}^{4} = 3p_2 \cdot \cosh(z) - p_4$$
$$D_{34}^{4} = p_3 + p_1 \cdot \cosh(z)$$
$$D_{33}^{3} = p_3 + 2p_1 \cdot \cosh(z)$$
$$D_{31}^{1} = 2p_3 - 2p_1 \cdot \cosh(z)$$
$$D_{32}^{2} = 2p_3 - p_1 \cdot \cosh(z)$$
$$D_{23}^{1} = -p_4 - p_2 \cdot \cosh(z)$$
$$D_{13}^{2} = D_{43}^{3} = p_4 - p_2 \cdot \cosh(z)$$
$$D_{31}^{2} = 2p_4 - p_2 \cdot \cosh(z)$$
$$D_{41}^{1} = 2p_4 + p_2 \cdot \cosh(z)$$
$$D_{33}^{1} = -4p_1 \cdot (\cosh(z))^2 + 2p_3 \cdot \cosh(z)$$

şeklinde olur.

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} + D_{ij}^{k}$$

biçimde tanımlanan istatistiksel konneksiyonun katsayıları ise Γ_{ij}^{k} Levi-Civita konneksiyon katsayıları $\Gamma_{33}^{1} = \sinh(z)$ olup bu bileşenler

$$\bar{\Gamma}_{44}^{1} = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{43}^{2} = -\bar{\Gamma}_{34}^{2} = (-p_1 \cdot \cosh(z) + p_3)\cosh(z)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{22}^{1} &= \bar{\Gamma}_{32}^{4} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{23}^{4} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{13}^{3}\\ &= -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{14}^{4} = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{24}^{3} = -\bar{\Gamma}_{11}^{1} = -\bar{\Gamma}_{12}^{2}\\ &= -\bar{\Gamma}_{21}^{2} = -\bar{\Gamma}_{31}^{3} = -\bar{\Gamma}_{41}^{4} = -\bar{\Gamma}_{42}^{3}\\ &= -p_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{11}^{2} &= \bar{\Gamma}_{41}^{3} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{14}^{3} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{13}^{3}\\ &= -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{13}^{4} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{23}^{3} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{24}^{4} = -\bar{\Gamma}_{12}^{1}\\ &= -\bar{\Gamma}_{21}^{1} = -\bar{\Gamma}_{22}^{2} = -\bar{\Gamma}_{31}^{4} = -\bar{\Gamma}_{32}^{3} = -\bar{\Gamma}_{42}^{4}\\ &= -p_2\end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{24}^{2} = \bar{\Gamma}_{44}^{4} = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{32}^{1} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{42}^{2} = p_4$$
$$\bar{\Gamma}_{23}^{2} = \bar{\Gamma}_{43}^{4} = p_3$$
$$\bar{\Gamma}_{43}^{1} = (p_4 + p_2)\cdot\cosh(z)$$
$$\bar{\Gamma}_{33}^{2} = -\cosh(z)\,(p_2\cdot\cosh(z) - 3p_4)$$
$$\bar{\Gamma}_{14}^{2} = \bar{\Gamma}_{44}^{3} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{41}^{2} = p_1\cdot\cosh(z) - p_3$$
$$\bar{\Gamma}_{24}^{1} = -3p_1\cdot\cosh(z) + p_3$$
$$\bar{\Gamma}_{42}^{1} = -3p_1\cdot\cosh(z) + 2p_3$$
$$\bar{\Gamma}_{13}^{1} = -2p_1\cdot\cosh(z) + p_3$$
$$\bar{\Gamma}_{34}^{3} = -2p_2\cdot\cosh(z) + p_4$$
$$\bar{\Gamma}_{14}^{1} = 2p_2\cdot\cosh(z) + p_4$$
$$\bar{\Gamma}_{33}^{4} = 3p_2\cdot\cosh(z) - p_4$$
$$\bar{\Gamma}_{34}^{4} = p_3 + p_1\cdot\cosh(z)$$
$$\bar{\Gamma}_{33}^{3} = p_3 + 2p_1\cdot\cosh(z)$$
$$\bar{\Gamma}_{31}^{1} = 2p_3 - 2p_1\cdot\cosh(z)$$
$$\bar{\Gamma}_{32}^{2} = 2p_3 - p_1\cdot\cosh(z)$$
$$\bar{\Gamma}_{23}^{1} = -p_4 - p_2\cdot\cosh(z)$$
$$\bar{\Gamma}_{13}^{2} = p_{43}^{3} = p_4 - p_2\cdot\cosh(z)$$
$$\bar{\Gamma}_{31}^{2} = 2p_4 - p_2\cdot\cosh(z)$$
$$\bar{\Gamma}_{41}^{1} = 2p_4 + p_2\cdot\cosh(z)$$

$$\bar{\Gamma}^1_{33} = -4p_1 \cdot (\cosh(z))^2 + 2p_3 \cdot \cosh(z) + \sinh(z)$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca $\Phi_F p$ bileşenleri için

$$\begin{aligned}
(\Phi_F p)_{12} &= -(\Phi_F p)_{21} = p_{2,2} + p_{1,1} \\
(\Phi_F p)_{11} &= (\Phi_F p)_{22} = p_{1,2} - p_{2,1} \\
(\Phi_F p)_{41} &= -\cosh(z)\left(p_{1,1}\right) + p_{1,3} - p_{2,4} \\
(\Phi_F p)_{31} &= \cosh(z)\left(p_{1,2}\right) - p_{1,4} - p_{2,3} \\
(\Phi_F p)_{42} &= -\cosh(z)\left(p_{2,1}\right) + p_{2,3} - p_{1,4} \\
(\Phi_F p)_{32} &= \cosh(z)\left(p_{2,2}\right) - p_{2,4} + p_{1,3} \\
(\Phi_F p)_{23} &= -p_{3,1} - \cosh(z)\left(p_{2,2}\right) + p_{4,2} \\
(\Phi_F p)_{13} &= p_{3,2} - \cosh(z)\left(p_{2,1}\right) - p_{4,1} \\
(\Phi_F p)_{24} &= -p_{4,1} + \cosh(z)\left(p_{1,2}\right) - p_{3,2} \\
(\Phi_F p)_{14} &= -p_{4,2} + \cosh(z)\left(p_{1,1}\right) - p_{3,1} \\
(\Phi_F p)_{43} &= -\cosh(z)\left(p_{3,1}\right) + p_{3,3} - \cosh(z)\left(p_{2,4}\right) + p_{4,2} \\
(\Phi_F p)_{33} &= \cosh(z)\left(p_{3,2}\right) - p_{3,4} - \cosh(z)\left(p_{2,3}\right) + p_{4,3} \\
(\Phi_F p)_{44} &= -\cosh(z)\left(p_{4,1}\right) + p_{4,3} + \cosh(z)\left(p_{1,4}\right) - p_{3,4} \\
(\Phi_F p)_{34} &= \cosh(z)\left(p_{4,2}\right) - p_{4,4} + \cosh(z)\left(p_{1,3}\right) - p_{3,3}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) ile verilen eşitlikler sıfıra eşitlenerek sistem çözülür ve bu çözümler (0,4) tipli $\bar{R}$ eğrilik tensöründe yerlerine yazılarsa,$\bar{R}_{ijkl}$ biçimindeki eğrilik tensörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{3411} &= \bar{R}_{4322} = -p_{2,1} - 8p_1 \cdot p_2 \cdot \cosh(z) \\
\bar{R}_{4344} &= -\bar{R}_{3444} = \left(2\cosh(z)\, p_1 \cdot p_4 - 2p_3 \cdot p_4 + \cosh(z)\, p_{4,1} - p_{4,3}\right)\cosh(z) \\
\bar{R}_{3431} &= \left(-3\cosh(z)\, p_{2,1} + 2p_{2,3} + p_{4,1} + (-3p_2 \cdot \cosh(z) - p_4) \cdot p_1 + p_2 \cdot p_3\right)\cosh(z) \\
\bar{R}_{4324} &= (\cosh(z)\, p_{2,1} - p_{2,3} - 2p_{4,1} + p_1(-p_4 - p_2 \cdot \cosh(z)) + p_2 \cdot p_3) \cdot \cosh(z) \\
\bar{R}_{4313} &= \left(2\cosh(z)\, p_{2,1} - p_{2,3} - 2p_{4,1} + p_2 \cdot \cosh(z) - p_4\right)p_1 + p_2 \cdot p_3) \cdot \cosh(z) \\
\bar{R}_{4343} &= (p_3 \cdot \cosh(z) - \sinh(z) \cdot p_1 - (p_3)^2 + (p_4)^2 - \cosh(z) \cdot p_2 \cdot p_4 + (2p_{2,4} + p_{4,2}) \\
&\quad \cdot \cosh(z) \\
\bar{R}_{3434} &= \bar{R}_{4334} \\
&\quad = (-2(\cosh(z))^2 \cdot (p_1)^2 + \cosh(z) \cdot p_2 \cdot p_4 + 3\cosh(z) \cdot p_1 \cdot p_3 + (p_4)^2 \\
&\quad - (p_3)^2 - 2p_1 \sinh(z) - \cosh(z)\, p_{2,4} + 2\cosh(z)\, p_{4,2} + p_{4,4}) \cdot \cosh(z) \\
\bar{R}_{3422} &= \bar{R}_{4311} = \cosh(z)\,(p_{2,1} + 2p_1 \cdot p_2) \\
\bar{R}_{4312} &= \bar{R}_{4321} = -\bar{R}_{3412} = -\bar{R}_{4321} = \cosh(z)\,(p_{2,2} - (p_1)^2 + (p_2)^2
\end{aligned}$$

$$\bar{R}_{3442} = \cosh(z)\,(-2\cosh(z)\,p_{2,1} + 2p_{2,3} + p_{4,1} + p_1(-p_4 - p_2\cdot\cosh(z) + p_2\cdot p_3$$

$$\bar{R}_{3424} = -((-p_1\cdot\cosh(z) + p_3)\cdot p_2 - p_1\cdot p_4 + \cosh(z)\,p_{2,1} - p_{2,3} - 2p_{4,1})\cdot\cosh(z)$$

$$\bar{R}_{4333} = 2((-p_1\cdot\cosh(z) + p_3)\cdot p_4 + p_1\cdot(\cosh(z))^2 + 2(\cosh(z))^2\,p_{2,1} + \left(-\frac{3p_{2,3}}{2} - 2p_{4,1}\right)\cdot\cosh(z) + \cosh(z) + \frac{p_{4,3}}{2})\cdot\cosh(z)$$

$$\bar{R}_{4331} = -(-3\cosh(z)\,p_{2,1} + 2p_{2,3} + p_{4,1} + (-3p_2\cdot\cosh(z) - p_4)\cdot p_1 + p_2\cdot p_3)\cdot\cosh(z)$$

$$\bar{R}_{3413} = -(p_2(p_3 + p_1\cdot\cosh(z)) - p_1\cdot p_4 + 2\cosh(z)\,p_{2,1} - p_{2,3} - 2p_{4,1})\cdot\cosh(z)$$

$$\bar{R}_{3433} = -2(\cosh(z)(p_2\cdot\cosh(z) - p_4\cdot p_1 + p_3\cdot p_4 + 2(\cosh(z))^2\,p_{2,1} + \left(-\frac{3p_{2,3}}{2} - 2p_{4,1}\right)\cdot\cosh(z) + \frac{p_{4,3}}{2})\cdot\cosh(z)$$

$$\bar{R}_{3443} = -\cosh(z)\,(p_3\cdot\cosh(z) - \sinh(z)\,p_1 - (p_3)^2 + (p_4)^2 - \cosh(z)\,p_2\cdot p_4 + \left(-2p_{2,4} + p_{4,2}\right)\cdot\cosh(z) + p_{4,4}$$

$$\bar{R}_{4342} = -\cosh(z)\,(-p_1\cdot\cosh(z) + p_3\cdot p_2 - p_1\cdot p_4 - 2\cosh(z)\,p_{2,1} + 2p_{2,3} + p_{4,1}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{1411} &= \bar{R}_{2322} = \bar{R}_{3112} = \bar{R}_{3121} = \bar{R}_{3211} = \bar{R}_{4122} = \bar{R}_{4212} = \bar{R}_{4221} = -\bar{R}_{1312} = -\bar{R}_{1321}\\ &= -\bar{R}_{1422} = -\bar{R}_{2311} = -\bar{R}_{2412} = -\bar{R}_{2421} = -\bar{R}_{3222} = -\bar{R}_{4111}\\ &= -p_{2,1} - 2p_1\cdot p_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{3423} &= -\bar{R}_{4323}\\ &= (p_3\cdot\cosh(z) - 2\sinh(z)\,p_1 - \cosh(z)(\cosh(z)\cdot(p_2)^2 - p_2\cdot p_4\\ &\quad + \cosh(z)\,p_{2,2} + p_{2,4} - 2p_{4,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\bar{R}_{1311} &= -\bar{R}_{1412} = -\bar{R}_{1421} = -\bar{R}_{3122} = -\bar{R}_{2411} = -\bar{R}_{3212} = -\bar{R}_{3221} = -\bar{R}_{4222} = \bar{R}_{1322}\\ &= \bar{R}_{2312} = \bar{R}_{2321} = \bar{R}_{2422} = \bar{R}_{3111} = \bar{R}_{4112} = \bar{R}_{4121} = \bar{R}_{4211}\\ &= p_{2,2} - (p_1)^2 + (p_2)^2\end{aligned}$$

$$\bar{R}_{1444} = \bar{R}_{3244} = (2p_3 - 2p_1\cosh(z)\cdot p_4 - \cosh(z)\,p_{4,1} + p_{4,3}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{3432} &= -\bar{R}_{4332}\\ &= 2(\cosh(z))^2\,(p_1)^2 + (-p_3\cdot\cosh(z) - \sinh(z)\,p_1\\ &\quad - \cosh(z)(\cosh(z)\,(p_2)^2 + p_2\cdot p_4 + \cosh(z)\,p_{2,2} + 2p_{2,4} - p_{4,2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{3414} &= -\bar{R}_{4314}\\ &= (\cosh(z))^2\,(p_1)^2 + (-p_3\cdot\cosh(z) + 2\sinh(z)\,p_1 - \cosh(z)(p_2\cdot p_4 - p_{2,4}\\ &\quad + 2p_{4,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{4341} &= -\bar{R}_{3441}\\ &= (\cosh(z))^2\,(p_1)^2 + (-p_3\cdot\cosh(z) - \sinh(z)\,p_1 - \cosh(z)(p_2\cdot p_4 + 2p_{2,4}\\ &\quad - 2p_{4,2})\end{aligned}$$

$$\bar{R}_{2344} = \bar{R}_{4144} = p_4(2p_1\cdot\cosh(z) - 2p_3) + \cosh(z)\,p_{4,1} - p_{4,3}$$

$$\bar{R}_{2333} = \bar{R}_{4133} = -\bar{R}_{3223} = -\bar{R}_{1433}$$
$$= (2(\cosh(z))^2\, p_2 - 2p_4)\cdot p_1 + 2p_3\cdot p_4 + 4(\cosh(z))^2\, p_{2,1}$$
$$+ \left(-3p_{2,3} - 4p_{4,1}\right)\cdot \cosh(z) + p_{4,3}$$

$$\bar{R}_{1332} = \bar{R}_{2331} = \bar{R}_{2432} = \bar{R}_{4131} = -\bar{R}_{1431} = -\bar{R}_{3132} = -\bar{R}_{3231} = -\bar{R}_{4232}$$
$$= 3\cosh(z)\, p_{2,1} - 2p_{2,3} - p_{4,1} + (3p_2\cdot \cosh(z) + p_4)p_1 - p_2\cdot p_3$$

$$\bar{R}_{1323} = \bar{R}_{2313} = \bar{R}_{2423} = \bar{R}_{4113} = -\bar{R}_{14131} = -\bar{R}_{3123} = -\bar{R}_{3213} = -\bar{R}_{4223}$$
$$= 2\cosh(z)\, p_{2,1} - p_{2,3} - 2p_{4,1} + (p_2\cdot \cosh(z) - p_4\cdot p_1 + p_2\cdot p_3$$

$$\bar{R}_{2342} = \bar{R}_{3141} = \bar{R}_{4142} = \bar{R}_{4241} = -\bar{R}_{3242} = -\bar{R}_{1341} = -\bar{R}_{1442} = -\bar{R}_{2441}$$
$$= 2\cosh(z)\, p_{2,1} - 2p_{2,3} - p_{4,1} + (p_4 + p_2\cdot \cosh(z)p_1 - p_2\cdot p_3)$$

$$\bar{R}_{2324} = \bar{R}_{3114} = \bar{R}_{4124} = \bar{R}_{4214} = -\bar{R}_{3224} = -\bar{R}_{2414} = -\bar{R}_{1424} = -\bar{R}_{1314}$$
$$= \cosh(z)\, p_{2,1} - p_{2,3} - 2p_{4,1} + p_1(-p_4 - p_2\cdot \cosh(z) + p_2\cdot p_3)$$

$$\bar{R}_{1414} = \bar{R}_{3124} = \bar{R}_{3214} = \bar{R}_{4224} = -\bar{R}_{1324} = -\bar{R}_{2314} = -\bar{R}_{2424} = -\bar{R}_{4114}$$
$$= \cosh(z)\cdot (p_1)^2 - p_1\cdot p_3 - p_2\cdot p_4 + p_{2,4} - 2p_{4,2}$$

$$\bar{R}_{2341} = \bar{R}_{2442} = \bar{R}_{4141} = \bar{R}_{1342} = -\bar{R}_{1441} = -\bar{R}_{3142} = -\bar{R}_{3241} = -\bar{R}_{4242}$$
$$= \cosh(z)\cdot (p_1)^2 - p_1\cdot p_4 - p_1\cdot p_3 + p_{4,2} - 2p_{2,4}$$

$$\bar{R}_{1344} = -\bar{R}_{3144} = (\cosh(z))^2\cdot (p_1)^2 + (-2p_3\cdot \cosh(z) - \sinh(z)\cdot p_1 - (p_4)^2 - p_{4,4}$$

$$\bar{R}_{2444} = -\bar{R}_{4244} = (\cosh(z))^2\cdot (p_1)^2 - 2\cosh(z)\cdot p_1\cdot p_3 + (p_3)^2 - (p_4)^2 - p_{4,4}$$

$$\bar{R}_{1443} = -\bar{R}_{4143}$$
$$= (p_3)^2 + \cosh(z)\cdot p_1\cdot p_3 + (p_4)^2 + \cosh(z)\cdot p_2\cdot p_4 + \left(-2p_{2,4} + p_{4,2}\right)$$
$$\cdot \cosh(z) - p_{4,4}$$

$$\bar{R}_{1334} = \bar{R}_{2434} = -\bar{R}_{3134} = -\bar{R}_{4234}$$
$$= \cosh(z)\,(p_2\cdot \cosh(z) + 3p_4\cdot p_1 - \cosh(z)\, p_2\cdot p_3 - 2p_3\cdot p_4$$
$$- \cosh(z)^2\, p_{2,1} + \left(p_{2,3} + 3p_{4,1}\right)\cosh(z) - p_{4,3}$$

$$\bar{R}_{4243} = \bar{R}_{3143} = -\bar{R}_{2443} = -\bar{R}_{1343}$$
$$= \cosh(z)\,(p_2$$
$$\cdot \cosh(z) - p_4)p_1 - \cosh(z)\cdot p_2\cdot p_3 + 2p_3\cdot p_4 + 2(\cosh(z))^2\, p_{2,1}$$
$$+ \left(-2p_{2,3} - 2p_{4,1}\right)\cdot \cosh(z) + p_{4,3})$$

$$\bar{R}_{2343} = -\bar{R}_{3243}$$
$$= (p_3\cdot \cosh(z) + \sinh(z))\cdot p_1 - (p_3)^2 + (p_4)^2 - \cosh(z)\cdot p_2\cdot p_3$$
$$+ \left(-2p_{2,4} + p_{4,2}\right)\cdot cosh(z) + p_{4,4}$$

$$\bar{R}_{2323} = \bar{R}_{3113} = \bar{R}_{4123} = \bar{R}_{4213} = -\bar{R}_{3223} = -\bar{R}_{1313} = -\bar{R}_{2423} = -\bar{R}_{1343}$$
$$= \cosh(z)\cdot (p_2)^2 - p_2\cdot p_4 - p_1\cdot p_3 + \cosh(z)\, p_{2,2} - 2p_{4,2} + p_{2,4}$$

$$\bar{R}_{4233} = -\bar{R}_{2433}$$
$$= (p_3)^2 - 2\cosh(z)\cdot p_1\cdot p_3 + (\cosh(z))^2\cdot(p_2)^2 - (p_4)^2 + (\cosh(z)^2\, p_{2,2} + \left(3p_{2,4} - 3p_{4,2}\right)\cdot\cosh(z) - p_{4,4}$$

$$\bar{R}_{1333} = -\bar{R}_{3133}$$
$$= (2p_3\cdot\cosh(z) + \sinh(z))\cdot p_1 - (p_3)^2 - (\cosh(z))^2\cdot(p_2)^2 + (p_4)^2 - (\cosh(z))^2\, p_{2,2} + (-3p_{2,4} + 3p_{4,2})\cdot\cosh(z) - p_{4,4}$$

$$\bar{R}_{3232} = \bar{R}_{2431} = \bar{R}_{1432} = \bar{R}_{1331} = -\bar{R}_{2332} = -\bar{R}_{4231} = -\bar{R}_{4132} = -\bar{R}_{31313}$$
$$= 2\cosh(z)\cdot(p_1)^2 + 3p_3\cdot\cosh(z) + \sinh(z)\cdot p_1 - (p_3)^2 + (p_4)^2 + \cosh(z)\cdot p_2\cdot p_4 + \left(-p_{2,4} + 2p_{4,2}\right)\cdot\cosh(z) + p_{4,4}$$

$$\bar{R}_{3234} = -\bar{R}_{2334}$$
$$= 2(\cosh(z))^2\cdot(p_1)^2 + (-3p_3\cdot\cosh(z) - \sinh(z)\cdot p_1 + (p_3)^2 - (p_4)^2 - \cosh(z)\cdot p_2\cdot p_4 + \left(p_{2,4} + 2p_{4,2}\right)\cdot\cosh(z)$$

$$\bar{R}_{1434} = -\bar{R}_{4134}$$
$$= 2(\cosh(z))^2\cdot(p_1)^2 - 3\cdot\cosh(z)\, p_1\cdot p_3 + (p_3)^2 - (p_4)^2 - \cosh(z)\cdot p_2\cdot p_4 + \left(p_{2,4} - 2p_{4,2}\right)\cdot\cosh(z) - p_{4,4}$$

şeklinde olur.

$(M_4, g, \overline{\nabla}, F)$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel Kähler-Norden-Walker manifoldunun Ricci eğrilik tensörü $\bar{Ric}$ bileşenleri

$$(\overline{Ric})_{11} = -(\overline{Ric})_{22} = 2pp_{2,2} - 2(p_1)^2 + 2(p_2)^2$$
$$(\overline{Ric})_{12} = (\overline{Ric})_{21} = -2p_{2,1} - 4p_1\cdot p_2$$
$$(\overline{Ric})_{13} = -4\cosh(z)\cdot(p_1)^2 + 2\cosh(z)\cdot(p_2)^2 + 2\cosh(z)\, p_{2,2} + 2p_2\cdot p_4 + 2p_1\cdot p_3 - 2p_{4,2} + 4p_{2,4}$$
$$(\overline{Ric})_{14} = 4\cosh(z)\cdot p_{2,1} - 4p_{2,3} - 2p_{4,1} + 2(p_4 + p_2\cdot\cosh(z)\cdot p_1 - 2p_2\cdot p_3$$
$$(\overline{Ric})_{23} = -6\cosh(z)\cdot p_{2,1} + 4p_{23} + 2(-3\cdot p_2\cdot\cosh(z) - p_4\cdot p_1 + 2p_2\cdot p_3$$
$$(\overline{Ric})_{24} = -2\cosh(z)\cdot(p_1)^2 + 2p_2\cdot p_4 + 2p_1\cdot p_3 - 2p_{4,2} + 4p_{2,4}$$
$$(\overline{Ric})_{31} = (\overline{Ric})_{42}$$
$$= -2\cosh(z)\left(p_{2,2} + (p_1)^2 - (p_2)^2\right) + \cosh(z)\left(p_{2,2} - (p_1)^2 + (p_2)^2\right) - \cosh(z)\cdot(p_2)^2 - \cosh(z)\, p_{2,2} + 2p_2\cdot p_4 + 2p_1\cdot p_3 + 4p_{4,2} - 2p_{2,4} - \cosh(z)\cdot(p_1)^2$$
$$(\overline{Ric})_{32} = -2\cosh(z)\left(p_{2,1} + 2p_1\cdot p_2\right) + \left(-p_{2,1} - 2p_1\cdot p_2\right)\cdot\cosh(z) + 3\cosh(z)p_{2,1} - 2p_{2,3} - 4p_{4,1} + (p_2\cdot\cosh(z) - p_4)\cdot p_1 + 2p_2\cdot p_3 + p_1(-p_4 - p_2)\cdot\cosh(z)$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{Ric})_{33} = & -2\cosh(z)(2\cosh(z)\cdot(p_1)^2 - \cosh(z)\cdot(p_2)^2 - \cosh(z)p_{2,2} - p_2\cdot p_4 - p_1\cdot p_3 \\
& + p_{4,2} - 2p_{2,4}) - 4(\cosh(z))^2\cdot(p_1)^2 \\
& + \big(p_3\cdot\cosh(z) + \sinh(z)\cdot p_1 + \cosh(z)\,(\cosh(z)\cdot(p_2)^2 + p_2\cdot p_4) \\
& + \cosh(z)\,p_{2,2} + 2p_{2,4} - p_{4,2}\big) + 2p_3\cdot\cosh(z) + \sinh(z)\cdot p_1) - 2(p_3)^2 \\
& - (\cosh(z))^2\cdot(p_2)^2 + 2(p_4)^2 - (\cosh(z))^2\,p_{2,2} + (3p_{2,4} + 3p_{4,2})\cosh(z) \\
& + 2p_{4,4} + 3(p_3\cdot\cosh(z) + \sinh(z)\cdot p_1 + \cosh(z)\cdot p_2\cdot p_4 + (-p_{2,4} + 2p_{4,2}) \\
& \cdot\cosh(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{Ric})_{34} = & -2\cosh(z)(-2\cosh(z)\cdot p_{2,1} + 2p_{2,3} + p_{4,1} \\
& + p_1(-p_4 - p_2\cdot\cosh(z) + p_2\cdot p_3) - \cosh(z)\,((-p_1\cdot\cosh(z) + p_3\cdot p_2 - p_3 \\
& \cdot p_2 - p_1\cdot p_4 - 2\cosh(z)\,p_{2,1} + 2p_{2,3} + p_{4,1}) \\
& + (-(\cosh(z))^2\cdot p_2 + p_4\cdot\cosh(z))\cdot p_1 + \cosh(z)\cdot p_2\cdot p_4 - 2p_3\cdot p_4 \\
& - 2(\cosh(z))^2\,p_{2,1} + \big(2p_{2,3} + 2p_{4,1}\big)\cdot\cosh(z) - 2p_{4,3} \\
& + p_4(2p_1\cdot\cosh(z) - 2p_3) + \cosh(z)p_{4,1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{Ric})_{41} = & -\big(-p_{2,1} - 2p_1\cdot p_2\big)\cosh(z) - 3\cosh(z)\,p_{2,1} + 2p_{2,3} + 4p_{4,1} \\
& + p_1(p_4 - p_2\cdot\cosh(z)) - 2p_2\cdot p_3 + (p_4 + p_2\cdot\cosh(z))\cdot p_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{Ric})_{43} = & -\big(-3\cosh(z)\,p_{2,1} + 2p_{2,3} + p_{4,1} + (-3p_2\cdot\cosh(z) - p_4)\cdot p_1 + p_2\cdot p_3\big) \\
& \cdot\cosh(z) + (-2(\cosh(z))^2\cdot p_2 + 2p_4 \\
& \cdot\cosh(z)\cdot p_1 - 4p_3\cdot p_4 - 5(\cosh(z))^2\,p_{2,1} + (3p_{2,3} + 4p_{4,1})\ \cdot\cosh(z) \\
& - 2p_{4,3} + \cosh(z)(p_2\cdot\cosh(z) + 3p_4)\cdot p_1 - \cosh(z)p_2\cdot p_3 + (p_{2,3} + 3p_{4,1}) \\
& \cdot\cosh(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{Ric})_{44} = & -2\big(-\cosh(z)\cdot(p_1)^2 + p_2\cdot p_4 + p_1\cdot p_3 - p_{4,2} + 2p_{2,4}\big)\cdot\cosh(z) \\
& + \big(p_3\cdot\cosh(z) + \sinh(z)\cdot p_1 + \cosh(z)\,(p_2\cdot p_4 + 2p_{2,4} - p_{4,2}\big) + 2(p_3)^2 \\
& - 3\cosh(z)\cdot p_1\cdot p_3 - 2(p_4)^2 + \cosh(z)\cdot p_2\cdot p_4 + \big(2p_{2,4} - p_{4,2}\big)\cosh(z) \\
& - 2p_{4,4}
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir.

$(M_4, g, \overline{\nabla}, F)$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel Kähler-Norden-Walker manifoldunun skaler eğrilik tensörü $\bar{\tau}$ ise

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tau} = & 4p_{2,4} + 4p_{4,2} - 4\cosh(z)\left(-p_{2,2} + (p_1)^2 - (p_2)^2\right) \\
& -2\big(2p_{2,2} - 2(p_1)^2 + 2(p_2)^2\big)\cdot\cosh(z) \\
& -8\cosh(z)\cdot(p_1)^2 + 8p_1\cdot p_3 + 8p_2\cdot p_4
\end{aligned}
$$

biçimindedir.

Durum-3: (3.11) ve (3.12) de $a(z) = 0$ ve $b(t) = 2e^t$ alınırsa

$$g = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2e^t \end{bmatrix}$$

ve

$$F = (F_i^j) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -e^t \\ 1 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup D_{ij}^k deformasyon tensörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} D_{22}^1 &= D_{32}^4 = -\frac{1}{2}D_{13}^3 = -\frac{1}{2}D_{14}^4 \\ &= -\frac{1}{2}D_{23}^4 = -\frac{1}{2}D_{24}^3 = -D_{11}^1 = -D_{12}^2 \\ &= -D_{21}^2 = -D_{31}^3 = -D_{41}^4 = -D_{42}^3 \\ &= -p_1 \\ D_{11}^2 &= D_{41}^3 = -\frac{1}{2}D_{23}^3 = -\frac{1}{2}D_{24}^4 \\ &= -D_{12}^1 = -D_{21}^1 = -D_{22}^2 = -D_{31}^4 \\ &= -D_{32}^3 = -D_{42}^4 = -\frac{1}{2}D_{13}^4 \\ &= -p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{13}^1 &= D_{33}^3 = -\frac{1}{2}D_{41}^2 = \frac{1}{2}D_{31}^1 = p_3 \\ D_{14}^1 &= D_{34}^3 = p_4 \\ D_{43}^1 &= (p_2 \cdot e^t - p_4) \cdot e^t \\ D_{34}^2 &= (p_3 + p_1 \cdot e^t) \cdot e^t \\ D_{44}^2 &= 2(-2 \cdot p_2 \cdot e^t + p_4) \cdot e^t \end{aligned}$$

$$D_{23}^2 = 2p_1 \cdot e^t + p_3$$
$$D_{44}^3 = 3p_1 \cdot e^t - p_3$$
$$D_{13}^2 = -3p_2 \cdot e^t + 2 \cdot p_4$$
$$D_{24}^2 = -2p_2 \cdot e^t + p_4$$
$$D_{23}^1 = D_{33}^4 = p_2 \cdot e^t - p_4$$
$$D_{32}^1 = 2p_2 \cdot e^t - 2p_4$$
$$D_{44}^1 = 2p_3 \cdot e^t + (p_3 - p_1 \cdot e^t)\, e^t$$
$$D_{14}^2 = -p_3 - p_1 \cdot e^t$$
$$D_{43}^4 = -p_3 - 2p_1$$
$$D_{24}^1 = -p_3 - p_1 \cdot e^t$$
$$D_{42}^1 = 2p_3 - p_1 \cdot e^t$$
$$D_{32}^2 = p_4 + p_1 \cdot e^t$$
$$D_{43}^3 = p_4 + p_2 \cdot e^t$$
$$D_{44}^4 = p_4 + 2p_2 \cdot e^t$$
$$D_{42}^2 = 2p_4 - 2p_2 \cdot e^t$$
$$D_{41}^1 = 2p_4 - p_2 \cdot e^t$$

şeklinde olur.

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + D_{ij}^k$$

biçimde tanımlanan istatistiksel konneksiyonun katsayıları ise Γ_{ij}^k Levi-Civita konneksiyon katsayıları $\Gamma_{44}^2 = e^t$ olup bu bileşenler

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{22}^1 = \bar{\Gamma}_{32}^4 = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{13}^3 = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{14}^4 \\ = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{23}^4 = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{24}^3 = -\bar{\Gamma}_{11}^1 = -\bar{\Gamma}_{12}^2 \\ = -\bar{\Gamma}_{21}^2 = -\bar{\Gamma}_{31}^3 = -\bar{\Gamma}_{41}^4 = -\bar{\Gamma}_{42}^3 \\ = -p_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{11}^2 = \bar{\Gamma}_{41}^3 = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{23}^3 = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{24}^4 \\ = -\bar{\Gamma}_{12}^1 = -\bar{\Gamma}_{21}^1 = -\bar{\Gamma}_{22}^2 = -\bar{\Gamma}_{31}^4 \\ = -\bar{\Gamma}_{32}^3 = -\bar{\Gamma}_{42}^4 = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{13}^4 \\ = -p_2\end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{13}^{1} = \bar{\Gamma}_{33}^{3} = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{41}^{2} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{31}^{1} = p_3$$
$$\bar{\Gamma}_{14}^{1} = \bar{\Gamma}_{34}^{3} = p_4$$
$$\bar{\Gamma}_{43}^{1} = (p_2 \cdot e^t - p_4) \cdot e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{34}^{2} = (p_3 + p_1 \cdot e^t) \cdot e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{44}^{2} = 2(-2 \cdot p_2 \cdot e^t + p_4) \cdot e^t + e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{23}^{2} = 2p_1 \cdot e^t + p_3$$
$$\bar{\Gamma}_{44}^{3} = 3p_1 \cdot e^t - p_3$$
$$\bar{\Gamma}_{13}^{2} = -3p_2 \cdot e^t + 2 \cdot p_4$$
$$\bar{\Gamma}_{24}^{2} = -2p_2 \cdot e^t + p_4$$
$$\bar{\Gamma}_{23}^{1} = \bar{\Gamma}_{33}^{4} = p_2 \cdot e^t - p_4$$
$$\bar{\Gamma}_{32}^{1} = 2p_2 \cdot e^t - 2p_4$$
$$\bar{\Gamma}_{44}^{1} = 2p_3 \cdot e^t + (p_3 - p_1 \cdot e^t)\, e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{14}^{2} = -p_3 - p_1 \cdot e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{43}^{4} = -p_3 - 2p_1$$
$$\bar{\Gamma}_{24}^{1} = -p_3 - p_1 \cdot e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{42}^{1} = 2p_3 - p_1 \cdot e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{32}^{2} = p_4 + p_1 \cdot e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{43}^{3} = p_4 + p_2 \cdot e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{44}^{4} = p_4 + 2p_2 \cdot e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{42}^{2} = 2p_4 - 2p_2 \cdot e^t$$
$$\bar{\Gamma}_{41}^{1} = 2p_4 - p_2 \cdot e^t$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca $\Phi_F p$ bileşenleri için

$$\begin{aligned}
(\Phi_F p)_{21} &= -p_{1,1} + p_{2,2} \\
(\Phi_F p)_{11} &= (\Phi_F p)_{22} = p_{1,2} - p_{2,1} \\
(\Phi_F p)_{12} &= p_{2,2} + p_{1,1} \\
(\Phi_F p)_{41} &= -e^t(p_{1,1}) + p_{1,3} - p_{2,4} \\
(\Phi_F p)_{31} &= e^t(p_{1,2}) - p_{1,4} - p_{2,3} \\
(\Phi_F p)_{42} &= -e^t(p_{2,1}) + p_{2,3} + p_{1,4} \\
(\Phi_F p)_{32} &= e^t(p_{2,3}) - p_{2,4} + p_{1,3} \\
(\Phi_F p)_{23} &= -p_{3,1} - e^t(p_{2,2}) + p_{4,2} \\
(\Phi_F p)_{13} &= p_{3,2} - e^t(p_{2,1}) + p_{4,1}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$(\Phi_F p)_{24} = -p_{4,1} + e^t(p_{1,2}) - p_{3,1}$$
$$(\Phi_F p)_{14} = p_{4,2} + e^t(p_{1,1}) - p_{3,1}$$
$$(\Phi_F p)_{43} = -e^t(p_{3,1}) + p_{3,3} - e^t(p_{2,3}) + p_{4,3}$$
$$(\Phi_F p)_{44} = -e^t(p_{4,1}) + p_{4,3} + e^t(p_{1,4}) - p_{3,4}$$
$$(\Phi_F p)_{34} = e^t(p_{4,2}) - p_{4,4} + e^t(p_{1,3}) - p_{3,3}$$

elde edilir. (4.14) ile verilen eşitlikler sıfıra eşitlenerek sistem çözülür ve bu çözümler (0,4) tipli $\bar{R}$ eğrilik tensöründe yerlerine yazılarsa,$\bar{R}_{ijkl}$ biçimindeki eğrilik tensörünün bileşenleri

$$\bar{R}_{3422} = \bar{R}_{4311} = -\bar{R}_{4322} = -\bar{R}_{3411} = e^t(p_{2,1} + 2p_1 \cdot p_2)$$
$$\bar{R}_{4312} = \bar{R}_{4321} = -\bar{R}_{3412} = -\bar{R}_{3421} = e^t(p_{2,1} + (p_1)^2 + (p_2)^2)$$
$$-\bar{R}_{1411} = -\bar{R}_{2322} = -\bar{R}_{3112} = -\bar{R}_{3121} = -\bar{R}_{3211} = -\bar{R}_{4122} = -\bar{R}_{4212} = -\bar{R}_{4221} = \bar{R}_{1312}$$
$$= \bar{R}_{1321} = \bar{R}_{1422} = \bar{R}_{2311} = \bar{R}_{2412} = \bar{R}_{2421} = \bar{R}_{3222} = \bar{R}_{4111}$$
$$= p_{2,1} + 2p_1 \cdot p_2$$
$$-\bar{R}_{4342} = \bar{R}_{3442} = (-3 \cdot p_2 \cdot e^{2t} + p_4 \cdot e^t)p_1 - e^t(p_3 \cdot p_2 + 2p_{2,3} + p_{4,1})$$
$$-\bar{R}_{4333} = \bar{R}_{3433} = \left(2p_3 \cdot p_2 + p_{2,3}\right)e^{2t} - 2e^t(p_3 \cdot p_4 + \frac{p_{4,3}}{2})$$
$$-\bar{R}_{4334} = \bar{R}_{3434} \left((p_4 - 1)p_2 - p_1 \cdot p_3 - p_{2,4} + 2p_{4,2}\right) e^{2t} + e^t(p_3)^2 - (p_4)^2 - p_{4,4})$$
$$-\bar{R}_{1311} = -\bar{R}_{1412} = -\bar{R}_{1421} = -\bar{R}_{2411} = -\bar{R}_{3111} = -\bar{R}_{3212} = -\bar{R}_{4222} = \bar{R}_{1322} = \bar{R}_{2312}$$
$$= \bar{R}_{4211} = \bar{R}_{3111} = \bar{R}_{4121} = \bar{R}_{4121} = p_{2,2} - (p_1)^2 + (p_2)^2$$
$$-\bar{R}_{2333} = -\bar{R}_{4133} = \bar{R}_{1433} = \bar{R}_{3233} = e^t \cdot p_{2,3} - p_{4,3} + (2p_2 \cdot e^t - 2p_4)p_3$$
$$-\bar{R}_{4314} = \bar{R}_{3414} = (p_1)^2 \cdot e^{2t} - p_3 \cdot p_1 \cdot e^t - e^t((p_4 - 2) \cdot p_2 - p_{2,4} + 2p_{4,2})$$
$$-\bar{R}_{2342} = -\bar{R}_{3141} = -\bar{R}_{4142} = -\bar{R}_{4241} = \bar{R}_{1341} = \bar{R}_{1442} = \bar{R}_{2441} = \bar{R}_{3242}$$
$$= 2p_{2,3} + p_{4,1} + (3 \cdot p_2 \cdot e^t - p_4) \cdot p_1 + p_3 \cdot p_2$$
$$-\bar{R}_{4324} = \bar{R}_{3424} = (p_2 \cdot e^{2t} + p_4 \cdot e^t) \cdot p_1 - p_3 \cdot p_2 \cdot e^t - p_{2,1} \cdot e^{2t} + e^t\left(p_{2,3} - 2p_{4,1}\right)$$
$$-\bar{R}_{3413} = \bar{R}_{4313} = (p_2 \cdot e^{2t} - p_4 \cdot e^t) \cdot p_1 + p_3 \cdot p_2 \cdot e^t + 2p_{2,1} \cdot e^{2t} - e^t\left(p_{2,3} - 2p_{4,1}\right)$$
$$-\bar{R}_{4331} = \bar{R}_{3431} = (p_2 \cdot e^{2t} - p_4 \cdot e^t) \cdot p_1 + p_3 \cdot p_2 \cdot e^t - p_{2,1} \cdot e^{2t} + 2(p_{2,3} + \frac{p_{4,1}}{2})e^t$$
$$-\bar{R}_{3441} = \bar{R}_{4341}$$
$$= 2(p_2)^2 \cdot e^{2t} - e^t(p_4 + 1) \cdot p_2 + \left(-(p_1)^2 + 2p_{2,2}\right)e^{2t} - e^t(p_1 \cdot p_3 + 2p_{2,4}$$
$$- p_{4,2}$$
$$-\bar{R}_{2344} = -\bar{R}_{4144} = \bar{R}_{1444} = \bar{R}_{3244}$$
$$= (2 \cdot p_1 \cdot e^{2t} - 2 \cdot p_3 \cdot e^t) \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 \cdot p_4 - 2p_{2,1} \cdot e^{2t} + \left(2p_{2,3} + 3p_{4,1}\right)e^t$$
$$+ p_{4,3}$$

$$-\bar{R}_{3444} = \bar{R}_{4344}$$
$$= 2 \cdot p_3 \cdot p_2 - 2p_{2,3} - 3p_{4,1})e^{2t} - 2e^{3t}p_1 \cdot p_2 - 2e^t p_3 \cdot p_4 + 2e^{3t} \cdot p_{2,1} - p_{4,3} \cdot e^t$$
$$-\bar{R}_{1413} = -\bar{R}_{3123} = -\bar{R}_{3213} = -\bar{R}_{4223} = \bar{R}_{4113} = \bar{R}_{1323} = \bar{R}_{2313} = \bar{R}_{2423}$$
$$= 2e^t \cdot p_{2,1} - p_{2,3} - 2 \cdot p_{4,1} + p_1(p_2 \cdot e^t - p_4) + p_3 \cdot p_2$$
$$-\bar{R}_{1314} = -\bar{R}_{1424} = -\bar{R}_{2414} = -\bar{R}_{3224} = \bar{R}_{2324} = \bar{R}_{3114} = \bar{R}_{4124} = \bar{R}_{4214}$$
$$= e^t \cdot p_{2,1} - p_{2,3} - 2 \cdot p_{4,1} + (-p_2 \cdot e^t - p_4) \cdot p_1 + p_3 \cdot p_2$$
$$-\bar{R}_{1431} = -\bar{R}_{3132} = -\bar{R}_{3231} = -\bar{R}_{4232} = \bar{R}_{4131} = \bar{R}_{1332} = \bar{R}_{2331} = \bar{R}_{2432}$$
$$= e^t \cdot p_{2,1} - 2p_{2,3} - p_{4,1} + (-p_2 \cdot e^t + p_4) \cdot p_1 - p_3 \cdot p_2$$
$$-\bar{R}_{1324} = -\bar{R}_{2314} = -\bar{R}_{2424} = -\bar{R}_{4114} = \bar{R}_{1414} = \bar{R}_{3124} = \bar{R}_{3214} = \bar{R}_{4224}$$
$$= e^t \cdot (p_1)^2 - p_1 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4 - 2p_{4,2} + p_{2,4}$$
$$-\bar{R}_{3234} = \bar{R}_{2334} = (p_3)^2 - p_3 \cdot p_1 \cdot e^t - (p_4)^2 + p_2 \cdot p_4 \cdot e^t + \left(-p_{2,4} + 2p_{4,2}\right)e^t - p_{4,4}$$
$$-\bar{R}_{1344} = \bar{R}_{3144} = (p_4)^2 - 2p_2 \cdot p_4 \cdot e^t + (p_1)^2 \cdot e^{2t} - (p_3)^2 + \left(2p_{2,4} - 4p_{4,2}\right)e^t + p_{4,4}$$
$$-\bar{R}_{3143} = -\bar{R}_{4243} = \bar{R}_{1343} = \bar{R}_{2443}$$
$$= \left(p_1 \cdot p_2 + 2p_{2,1}\right)e^{2t} - p_1 \cdot p_4 \cdot e^t + 3p_3 \cdot p_2 \cdot e^t - p_3 \cdot p_4 - 2e^t \cdot p_{4,1} - p_{4,3}$$
$$-\bar{R}_{4234} = -\bar{R}_{3134} = \bar{R}_{2434} = \bar{R}_{1334}$$
$$= (p_2 \cdot e^{2t} - p_4 \cdot e^t)p_1 - p_3 \cdot p_2 \cdot e^t + 2p_3 \cdot p_4 - p_{2,1} \cdot e^{2t} + \left(p_{2,3} + p_{4,1}\right)e^t + p_{4,3}$$
$$-\bar{R}_{4244} = \bar{R}_{2444}$$
$$= (2 \cdot p_4 \cdot e^t + e^t)p_2 - (p_4)^2 - (p_1)^2 \cdot e^{2t} + (p_3)^2 + \left(-2p_{2,4} + 4p_{4,2}\right)e^t - p_{4,4}$$
$$-\bar{R}_{4343} = \bar{R}_{3443}$$
$$= (3p_4 - 2)p_2 + p_1 \cdot p_3 + 3p_{4,2})e^{2t} - 2e^{3t} \cdot (p_2)^2 + e^t \cdot (p_3)^2 - e^t \cdot (p_4)^2 - 2e^{3t} \cdot p_{4,4} - e^t p_{4,4}$$
$$-\bar{R}_{2332} = -\bar{R}_{3131} = -\bar{R}_{4132} = -\bar{R}_{4231} = \bar{R}_{1331} = \bar{R}_{3232} = \bar{R}_{2431} = \bar{R}_{1432}$$
$$= (p_1)^2 \cdot e^t + e^t p_{2,2} - p_1 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4 - 2p_{2,4} + p_{4,2}$$
$$-\bar{R}_{1423} = -\bar{R}_{2413} = -\bar{R}_{3223} = -\bar{R}_{1313} = \bar{R}_{2323} = \bar{R}_{3113} = \bar{R}_{4213} = \bar{R}_{4123}$$
$$= (p_2)^2 \cdot e^t + e^t p_{2,2} - p_1 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4 + p_{2,4} - 2p_{4,2}$$
$$-\bar{R}_{4134} = \bar{R}_{1434} = e^t(p_4 + 1) \cdot p_2 + (p_3)^2 - p_3 \cdot p_1 \cdot e^t - (p_4)^2 + \left(-p_{2,4} - 2p_{4,2}\right)e^t - p_{4,4}$$
$$-\bar{R}_{3243} = \bar{R}_{2343}\left(2 \cdot (p_2)^2 + 2p_{2,2}\right) \cdot e^{2t} - p_3 \cdot p_1 \cdot e^t - 3 \cdot p_2 \cdot p_4 \cdot e^t - (p_3)^2 + (p_4)^2 - 3e^t p_{4,2} + p_{4,4}$$

$$-\bar{R}_{1342} = -\bar{R}_{2341} = -\bar{R}_{2442} = -\bar{R}_{4141} = \bar{R}_{1441} = \bar{R}_{4242} = \bar{R}_{3241} = \bar{R}_{3142}$$
$$= e^t \cdot (p_1)^2 - 2(p_2)^2 \cdot e^t - 2e^t p_{2,2} + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4 + 2p_{2,4} - p_{4,2}$$
$$-\bar{R}_{4233} = \bar{R}_{2433}$$
$$= (p_2)^2 \cdot e^{2t} + (-2p_4 \cdot e^t - e^t)p_2 + (p_4)^2 + e^{2t}p_{2,2} - (p_3)^2$$
$$+ \left(-p_{2,4} - p_{4,2}\right)e^t + p_{4,4}$$
$$-\bar{R}_{3133} = \bar{R}_{1333}$$
$$= (p_2)^2 \cdot e^{2t} - 2p_2 \cdot p_4 \cdot e^t + (p_4)^2 + e^{2t} \cdot p_{2,2} - (p_3)^2 + \left(-p_{2,4} - p_{4,2}\right)e^t$$
$$+ p_{4,4}$$
$$-\bar{R}_{1443} = \bar{R}_{4143}$$
$$= 2 \cdot (p_2)^2 \cdot e^{2t} + (-3 \cdot p_4 \cdot e^t - e^t)p_2 - p_3 \cdot p_1 \cdot e^t - (p_3)^2 + (p_4)^2$$
$$+ 2 \cdot e^{2t} \cdot p_{2,2} - 3 \cdot e^t p_{4,2} + p_{4,4}$$
$$\bar{R}_{3412} = \bar{R}_{3421} = -e^t(p_{2,2} - (p_1)^2 + (p_2)^2)$$

şeklinde olur.

$(M_4, g, \overline{\nabla}, F)$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel Kähler-Norden-Walker manifoldunun Ricci eğrilik tensörü $\overline{R\iota c}$ bileşenleri

$$(\overline{R\iota c})_{11} = -(\bar{R}ic)_{22} = 2p_{2,2} - 2(p_1)^2 + 2(p_2)^2$$
$$(\overline{R\iota c})_{12} = (\bar{R}ic)_{21} = -2p_{2,1} - 4 \cdot p_1 \cdot p_2$$
$$(\overline{R\iota c})_{13} = -2 \cdot (p_2)^2 \cdot e^t - 2 \cdot e^t p_{2,2} + 2 \cdot p_1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_2 \cdot p_4 + 4p_{2,4} - 2p_{4,2}$$
$$(\overline{R\iota c})_{14} = -4 \cdot p_{2,3} - 2p_{4,1} + 2p_1 \cdot (-3 \cdot p_2 \cdot e^t + p_4) - 2 \cdot p_3 \cdot p_2$$
$$(\overline{R\iota c})_{2,3} = -2 \cdot e^t p_{2,1} + 4p_{2,3} + 2p_{4,1} + 2p_1 \cdot (p_2 \cdot e^t - p_4 + 2 \cdot p_3 \cdot p_2)$$
$$(\overline{R\iota c})_{2,4} = 2 \cdot e^t(p_1)^2 - 4(p_2)^2 \cdot e^t - 4 \cdot e^t p_{2,2} + 2 \cdot p_1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_2 \cdot p_4 + 4p_{2,4} - 2p_{4,2}$$
$$(\overline{R\iota c})_{3,1} = -e^t\left(p_{2,2} - (p_1)^2 + (p_2)^2\right) - (p_2)^2 \cdot e^t - e^t p_{2,2} + 2 \cdot p_1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_2 \cdot p_4 - 2p_{2,4}$$
$$+ 4p_{4,2} - e^t \cdot p_1$$
$$(\overline{R\iota c})_{3,2} = -2\left(-p_{2,1} - 2 \cdot p_1 \cdot p_2\right) \cdot e^t - e^t(p_{2,1} + 2 \cdot p_1 \cdot p_3 + 3 \cdot e^t p_{2,1} - 2p_{2,3} - 4p_{4,1}$$
$$+ p_1(p_2 \cdot e^t - p_4) + 2 \cdot p_3 \cdot p_2 + (-p_2 \cdot e^t - p_4) \cdot p_1$$
$$(\overline{R\iota c})_{3,3} = -2\left(-(p_2)^2 \cdot e^t - e^t p_{2,2} + p_1 \cdot p_3 + p_2\right) \cdot p_4 + 2p_{2,4} - p_{4,2}) \cdot e^t + e^t(p_4 + 1)$$
$$\cdot p_2 e^t\left(p_1 \cdot p_3 + 2p_{2,4} - p_{4,2}\right) - 3p_2 \cdot p_4 \cdot e^t + 2(p_4)^2 - 2(p_3)^2$$
$$+ \left(-p_{2,4} - p_{4,2}\right) \cdot e^t + 2p_{4,4} + p_3 \cdot p_1 \cdot e^t + (p_{2,4} - 2p_{4,2}) \cdot e^t$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{Rıc})_{3,4} = {} & -2(-2\cdot p_{2,3} - p_{4,1} + p_1(-3\cdot p_2\cdot e^t + p_4) - p_3\cdot p_2\cdot e^t \\
& + (-3\cdot p_2\cdot e^{2t} + p_4\cdot e^t)p_1 - e^t\big(p_3\cdot p_2 + 2p_{2,3} + p_{4,1}\big) \\
& + \big(p_1\cdot p_2 + 2p_{2,1}\big)e^{2t} - p_1\cdot p_4\cdot e^t + 3p_3\cdot p_2\cdot e^t - 4p_3\cdot p_4 - 2\cdot e^t p_{4,1} \\
& - 2p_{4,3} + (-2\cdot p_1\cdot e^{2t} + 2\cdot p_3\cdot e^t)\cdot p_2 + 2p_{2,1}\cdot e^{2t} + (-2\cdot p_{2,3} - 3p_{4,1}) \\
& \cdot e^t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{Rıc})_{4,1} = {} & -3\cdot e^t\big(p_{2,1} + 2\cdot p_1\cdot p_2 - 3\big)\cdot e^t p_{2,1} + 2p_{2,3} + 4p_{4,1} + (-p_2\cdot e^t + p_4)\cdot p_1 \\
& - 3p_3\cdot p_2 + p_1(p_4 + p_2\cdot e^t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{Rıc})_{4,2} = {} & -3\cdot e^t\big(p_{2,2} - (p_1)^2 + (p_2)^2\big) - (p_2)^2)\cdot e^t - e^t p_{2,2} + 2\cdot p_1\cdot p_3 + 2\cdot p_2\cdot p_4 \\
& - 2p_{2,4} + 4p_{4,2} - e^t(p_1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{Rıc})_{4,3} = {} & (p_2)\cdot e^{2t} - p_4\cdot e^t)\cdot p_1 + 2p_3\cdot p_2)\cdot e^t + 2\left(p_{2,3} + \frac{p_{4,1}}{2}\right)e^t - 2(e^t p_{2,1} - 2p_{2,3} \\
& - p_{4,1} + (p_2\cdot e^t + p_4\cdot p_1 - p_3\cdot p_2\cdot e^t + e^t p_{2,3} - 2p_{4,3} \\
& + (2\cdot p_2\cdot e^t - 2p_4)p_3 + (-p_2\cdot e^t + p_4\cdot e^t)p_1 - 2p_3\cdot p_4 + (-p_{2,3} - p_{4,1}) \\
& \cdot e^t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{Rıc})_{4,4} = {} & -4\cdot (p_2)^2\cdot e^{2t} + e^t(p_4 + 1)\cdot p_2 + \big((p_1)^2 - 2p_{2,2}\big)\cdot e^{2t} \\
& + e^t\big(p_1\cdot p_3 + 2p_{2,4} - p_{4,2}\big) \\
& - 2\big(-e^t(p_1)^2 + 2(p_2)^2\cdot e^t + 2\cdot e^t\cdot p_{2,2} - p_1\cdot p_3 - p_2\cdot p_4 - 2p_{2,4} + p_{4,2}\big) \\
& \cdot e^t(3p_4)\cdot e^t + e^t)\cdot p_2 + p_3\cdot p_1\cdot e^t + 2(p_3)^2 - 2(p_4)^2 - 2\cdot e^t p_{2,2} \\
& + 3e^t p_{4,2} - 2p_{4,4} + (2p_4\cdot e^t + e^t) - (p_1)^2\cdot e^{2t} + (-2p_{2,4} + 4p_{4,2})\cdot e^t
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir.

$(M_4, g, \overline{\nabla}, F)$ yarı-simetrik burulmaya sahip istatistiksel Kähler-Norden-Walker manifoldunun skaler eğrilik tensörü $\bar{\tau}$ ise

$$
\begin{aligned}
\bar{\tau} = {} & 8p_1\cdot p_3 + 8p_2\cdot p_4 + 4p_{4,2} + 4p_{2,4} \\
& -2\big(-2p_{2,2}\big) + 2(p_1)^2 - 2(p_2)^2\cdot e^t - 8(p_2)^2\cdot e^t \\
& -4\cdot e^t\big(p_{2,2} - (p_1)^2 + (p_2)^2\big) - 8\cdot e^t\cdot p_{2,2}
\end{aligned}
$$

biçimindedir.

Maple® ile Yazılan Bazı Kodlar

Deformasyon Tensörü

$$D_{ij}^{\ k} = p_i\delta_j^k + p^k g_{ij} - \sum_{m=1}^{4}\left(p_m F_i^{\ m} F_j^k - p^m F_m^k F_{ij}\right)$$

```
> print("Deformasyon Tensörü");
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> for k from 1 to 4 do;
> D[k,i,j]:=(wi[i]*crn[k,j]+wup[k]*G[i,j]-add(wi[l]*F[l,i],l=1..4)*F[k,j]-add(wup[l]*F[k,l],l=1..4)*B[i,j]);
> od;
> od;
> od;
> Dk:=convert(D,set);
> Dküme:=(Dk minus {0});
> Dkümesayısı:=numelems(Dküme);
> for h from 1 to Dkümesayısı do;
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> for k from 1 to 4 do;
> if D[k,i,j]=Dküme[h] then print(`#mover(mi("D"),mi(""))`[i, j]^[k]=D[k,i,j],[h]) else fi;
> od;
> od;
> od;
> od;
```

İstatistiksel Konneksiyonlar

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + D_{ij}^k$$

```
> print("İstatistiksel Konneksiyonlar");
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> for k from 1 to 4 do;
> Ist_Kon[k,i,j]:=simplify(Levi[k,i,j]+(D[k,i,j]),assume=reel);
> od;
> od;
> od;
> Ist_Konk:=convert(Ist_Kon,set);
>Ist_Konküme:=( Ist_Konk minus {0});
>Ist_Konkümesayısı:=numelems(Ist_Konküme);
> for h from 1 to Ist_Konkümesayısı do;
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> for k from 1 to 4 do;
> if Ist_Kon [k,i,j]= Ist_Kon küme[h] then print(`#mover(mi("Gamma"),mo("~"))`[i, j]^[k]= Ist_Kon [k,i,j],[h]) else fi;
> od;
> od;
> od;
```

```
> od;
```

Φ-Operatörleri

$$(\Phi_F p)_{ij} = \sum_{m=1}^{4}\left(F_i^m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}p_j\right) - F_j^m\left(\frac{\partial}{\partial x^j}p_m\right)\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{4}\left(F_i^m\left(p_{j,m}\right) - F_j^m\left(p_{m,j}\right)\right)$$

```
> print("Phi Operatörler");
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> phi[i,j]:=add(F[l,i]*diff(w[j](x,y,z,t),coord[l]),l=1..4)-
add(F[l,j]*diff(w[l](x,y,z,t),coord[i]),l=1..4);
> od;
> od;
> yer_yaz:=[];
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> yer_yaz:=[op(yer_yaz), diff(w[i](x,y,z,t),coord[j])=D[i,j]];
> od;
> od;
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> denk[i,j]:=subs(yer_yaz,phi[i,j]);
> od;
> od;
> ortak:=[];
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> ortak:=[op(ortak), denk[i,j]];
> od;
> od;
> ortakçözüm:=solve(ortak);
> phiküme:=convert(phi,set);
> phikümeES:=numelems(phiküme);
> for h from 1 to phikümeES do;
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> if phi[i,j]=phiküme[h] then print(Phi[i,j]=phiküme[h],[h]) else fi;
> od;
> od;
> od
```

(0,4) Tipli Eğrilik Tensörü

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + A_{il}g_{jk} - A_{jl}g_{ik} \\
- \sum_{m=1}^{4} F_l^m \left(A_{im}F_{jk} - A_{jm}F_{ik}\right) \\
+\left(A_{ij} - A_{ji}\right)g_{kl} + \sum_{m=1}^{4} F_j^m (A_{im} - A_{mi})F_{kl}
\end{aligned}
$$

```
> for l from 1 to 4 do;
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> for k from 1 to 4 do;
>Rnormal[l,i,j,k]:=diff(Ist_Kon[l,j,k],coord[i]) diff(Ist_Kon[l,i,k],coord[j]) +
sum((Ist_Kon[l,i,n]* Ist_Kon [n,j,k])-( Ist_Kon [l,j,n]* Ist_Kon [n,i,k]),n=1..4);
> R:=simplify(Rnormal,assume=reel);
> od;
> od;
> od;
> od;
> "(0,4) Tipli Eğrilik Tensörü":
> for i from 1 to 4 do;
> for j from 1 to 4 do;
> for k from 1 to 4 do;
> for l from 1 to 4 do;
> katsayınormal[i,j,k,l]:=sum(R[n,i,j,k]*G[n,l],n=1..4);
> katsayı:=simplify(katsayınormal,assume=reel);
> "if katsayı[i,j,k,l]<>0 then print(ks[i,j,k,l]=katsayı[i,j,k,l]) else fi":
> od;
> od;
> od;
> od;
```

Ricci Eğrilik Tensörü

$$
\begin{aligned}
(\bar{R}ic)_{ij} = (Ric)_{ij} + 2A_{ij} - 4A_{ji} \\
+ \sum_{n=1}^{4} A_n^n g_{ij} - \sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{4} A_n^m F_m^n F_{ij}
\end{aligned}
$$

```
> print("Ricci Eğrilikler");
> for j from 1 to 4 do;
> for k from 1 to 4 do;
> Ric[j,k]:=sum(sum(Regrilik[r,j,k,s]*Gters[r,s],r=1..4),s=1..4);
> print(`#mover(mi("R"),mo("~"))`[j,k]=Ric[j,k]);
> od;
> od;
```

Skaler Eğrilik

$$\bar{\tau} = \tau + 2\sum_{n=1}^{4} A_n^n$$

```
> print("Skaler Eğrilik");
> Skaler:=sum(sum(Ric[r,s]*Gters[r,s],r=1..4),s=1..4);
> print(`#mover(mi("tau"),mo("~"))`= Skaler);
```

TARTIŞMA VE SONUÇ

Sunulan bu tezde, burulmalı istatistiksel manifoldların (SMAT) konneksiyonu $\overline{\nabla}$ yi Levi-Civita konneksiyonu (∇) ile yeniden ifade etmek amaçlandı. Bunun sonucu olarak da burulması yarı-simetrik olan yeni bir konneksiyon elde edildi. $F^2 = -I$ kompleks yapısı ile verilen (M_n, g, F) anti-Kähler manifoldu üzerinde burulmalı $\overline{\nabla}$ konneksiyonu $\overline{\nabla} = \nabla + D$ şeklinde tanımlandı ve buradaki D (1,2) tipli deformasyon tensörü $F^2 = -I$ kompleks yapısına bağlı olarak özel seçildi.$(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ olarak ifade edilen burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifoldu oluşturuldu.

$(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifoldunun ilk önce burulma tensörü $\overline{T}$ nin özellikleri incelendi. $F^2 = -I$ kompleks yapısına göre pür olan burulma tensörünün holomorfluğu araştırıldı. Tachibana operatörü yardımıyla araştırılan holomorfluğunu hangi şart altında sağlandığı ise teorem olarak verildi.

Tezin ikinci kısmında ise elde ettiğimiz yeni $\overline{\nabla}$ burulmalı istatistiksel konneksiyonun eğrilik özellikleri incelendi. İlk olarak (1,3) tipli eğrilik tensörü ve daha sonra ise g Riemann metriği yardımıyla $g(\overline{R}(X,Y,Z),W) = \overline{R}(X,Y,Z,W)$ biçiminde tanımlanan (0,4) tipli $\overline{R}$ Riemann eğrilik tensörü hesaplandı. Hesaplanan eğrilik tensörünün Riemann özellikleri ve yine Tachibana operatörü yardımıyla holomorfluğu incelendi. Daha sonra Riemann eğrilik tensörünün kontraksiyonu sonucu elde edilen Ricci tensörü$\overline{Ric}$ hesaplandı. Riemann uzayında Livi-Civita konneksiyonunun Ricci tensörü Ricsimetriktir. Yani $Ric(X,Y) = Ric(Y,X)$ şeklindedir. Bu kısımda da $(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifoldunun $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun Ricci tensörü $\overline{Ric}$ in hangi durumda simetrik olduğu gösterildi.

$\overline{Ric}$ tensörünün tam kontraksiyonu ile elde edilenskaler eğrilik $\overline{\tau}$ hesaplandı ve Levi-Civita konneksiyonunun skaler eğriliği τ ile çakışması durumu incelendi. Bu bölümün sonunda ise $U(Ric)$-vektör alanının tanımı $(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifoldunun $\overline{\nabla}$ konneksiyonu için tanımlandı ve $U(\overline{Ric})$-vektör alanına sahip $(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ manifoldunda ∇ Levi-Civita konnesiyonunun skaler eğriliği τ nun açık ifadesine ulaşıldı. Son olarak ise sabit skalerli bir uzay olma şart elde edildi.

Tezin son bölümünde ise $(M_n, g, F, \overline{\nabla})$ burulmalı istatistiksel anti-Kähler manifolduna 4-boutta örnekler verildi. Temelde ani-Kähler manifoldu olan (M_4, g, F) Walker manifoldu üzerinde $\overline{\nabla}$ burulmalı istatistiksel konneksiyonu incelendi. Konneksiyonun eğrilik özellikleri farklı durumlar altında araştırıldı. Çok fazla sayıda koordinatın hesabı için Maple® bilgisayar programı kullanıldı.

Bu tez çalışmasında seçilen yapı $F^2 = -I$ şeklindeki kompleks yapıdır. Yani manifold kompleks manifolddur. Yapı değiştirilerek benzer çalışmalar litaratüre kazandırılabilir. Örneğin, $F^2 = I$ şeklindeki çarpım yapıyla, $F^2 = 0$ şeklindeki dual yapıyla, $F^2 = F + I$ şeklindeki altın yapıyla ya da p, q pozitif tamsayıları için altın yapının genellemesi olan $F^2 = pF + qI$ şeklindeki metalik yapıyla benzer çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Agashe, N.S. and Chafle, M.R., 1992. A semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold. Indian J. Pure Appl. Math., 23, 399-409.

Amari S., 1985. Differantial-Geometrical methods in statistic, Springer Lectures Notes in Statistics 28.

Duggal, K.L. and Sharma, R., 1986. Semi-symmetric metric connection in a semi-Riemannian manifold. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 17, 1276-1283.

Karaman, Ç., 2015. Riemann Manifoldları Üzerindeki Bazı Özel Yapılar ve F-Konneksiyonlar. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Keisuke, H., 2020. Conformal geomtry of quasi statistical manifolds, Information Geometry, **4,** 159-176.

Kurose, T., 1994. On the divergences of 1-conformally flat statistical manifolds, Tohoku Math. J. **46**, 427-433.

Kurose, T., 2007. Statistical manifolds admitting torsion, Geometry and something, Fukuoka University, Fukuoka-shi, Japan.

Kühnel, W., 2005. Differential geometry curves- surfaces- manifolds. Amer. Mat. Soc., New York.

Lauritzen, S., 1987. Statistical manifolds., in: Differential Geometry in Statistical Inference. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes. Monograph Series, 10 (Inst. Math. Statist., Hayward, CA, p. 163.216.

Liang, Y., 1994. On semi-symmetric recurrent-metric connection, N. S., 55, 107-112.

Matsushita Y., 2005. Walker 4-manifolds with proper almost complex structure, J. Geom. Phys.,**55**, 385-398.

Matsuzoe H., 2006. Geometry of statistical manifolds and its generalization, Proceedings of the 8th International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, Bulgaria.

Matsuzoe, H., 2013. Quasi Statistical Manifolds. In: Van der Veken, J., Van deWoestyne, I., Verstraelen, L., Vrancken, L. (eds.) Pure and Applied Differential Geometry—PADGE 2012: In Memory of Franki Dillen, pp. 208–214. Shaker Verlag GmbH, Germany.

Mishra, R. S. and Pandey, S. N., 1980. On quarter-symmetric metric F-connections, Tensor N.S. 34 1-7.

Salimov, A. A. and Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometri, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Salimov, A., 2013. Tensor operators and their applications. Mathematics Research Developments Series. Nova Science Publishers, Inc., New York, xii+186 pp.

Salimov, A.A. and Iscan, M., 2010. On Norden-Walker 4-manifolds, Note Mat., 30, no.1, 111-128.

Sun K. and Marchand-Maillet S., 2014. An information geometry of statistical manifold learning, (Proceedings of the 31st International Conference on Machine Learning (ICML-14), 1–9.

Şahin, B., 2013. Manifoldların diferensiyel geometrisi., Nobel yayıncılık, Ankara.

Walker, A.G., 1950. Canonical form for a Rimannian space with a paralel field of null planes, Quart. J. Math. Oxford **1** (2), 69-79.

Whitney, H., 1936. Differentiable manifolds. The Annals of Mathematics, Second series, Volume 37, Issue 3, 645-880.

Yano, K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor field. Kodai Math. Sem. Rep. 20, 414-436.

Yano, K. and Kon M., 1984. Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore.

Yano, K., 1970. On Semi-symmetric Metric Connections. Rev. Roumanie Math. Pures Appl., 15, p. 134-138.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Zühre TOPUZ
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	
Lisans:	
Yüksek lisans:	
Doktora:	
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar	
-	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
-	