GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

DUAL UZAYDA İKİ FARKLI EĞRİYE KARŞILIK GELEN REGLE YÜZEYLERİN ARAKESİTİ ÜZERİNE

Yunus ÖZTEMİR

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Yunus ÖZTEMİR

01/12/2023

DUAL UZAYDA İKİ FARKLI EĞRİYE KARŞILIK GELEN REGLE YÜZEYLERİN ARAKESİTİ ÜZERİNE

(Doktora Tezi)

Yunus ÖZTEMİR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2023

ÖZET

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş kısmı verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamıza temel teşkil eden temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, birim dual küre üzerinde alınan iki eğriye $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitleri incelenmiştir. Dördüncü bölüm iki kısımdan oluşur. Birinci kısmında, ilk olarak, birim dual Lorentz küre üzerinde alınan iki eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki timelike regle yüzeylerin arakesitleri incelenmiştir. İkinci olarak, birim dual Lorentz küre üzerinde alınan iki eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki spacelike regle yüzeylerin arakesitleri incelenmiştir. Üçüncü olarak, birim dual Lorentz küre üzerinde alınan iki eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen bir timelike bir spacelike regle yüzeylerin arakesitleri incelenmiştir. İkinci kısmında, dual hiperbolik birim küre üzerinde alınan iki eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki timelike regle yüzeylerin arakesitleri incelenmiştir. Beşinci bölümde, ilk olarak, birim dual küre üzerinde alınan iki farklı eğrinin tanjant küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitleri incelenmiştir. İkinci olarak, birim dual küre üzerinde alınan iki farklı eğrinin aslinormal küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitleri incelenmiştir. Üçüncü olarak, birim dual küre üzerinde alınan iki farklı eğrinin binormal küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitleri incelenmiştir. Dördüncü olarak, birim dual küre üzerinde alınan iki farklı eğrinin Pol küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitleri incelenmiştir. Son olarak, altıncı bölümde, sonuç ve öneriler verilmiştir.

Bilim Kodu	:	20402
Anahtar Kelimeler	:	Dual eğri, Dual küresel gösterge eğrileri, E. Study dönüşümü, İki değişkenli fonksiyonlar, Regle yüzeylerin arakesiti
Sayfa Adedi	:	82
Danışman	:	Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

ON THE INTERSECTION OF RULED SURFACES CORRESPONDİNG TO TWO DİFFERENT CURVES IN DUAL SPACE

(Ph. D. Thesis)

Yunus ÖZTEMİR

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2023

ABSTRACT

This thesis consists of six main sections. In the first section, the introduction is given. In the second section, the basic definitions and theorems that form the basis of our study are given. In third section, the intersections of ruled surfaces corresponding to the two curves taken on the unit dual sphere in $\mathbb{R}^3$ were investigated. The fourth section consists of two parts. In the first part, firstly, the intersections of two timelike ruled surfaces corresponding to the two curves taken on the unit dual Lorentz sphere in $\mathbb{R}_1^3$ are investigated. Secondly, the intersections of two spacelike ruled surfaces corresponding to the two curves taken on the unit dual Lorentz sphere at $\mathbb{R}_1^3$ are investigated. Thirdly, the intersections of ruled surfaces with one timelike and one spacelike corresponding to two curves taken on the unit dual Lorentz sphere at $\mathbb{R}_1^3$ are investigated. In the second part, the intersections of two timelike ruled surfaces corresponding to the two curves taken on the dual hyperbolic unit sphere in $\mathbb{R}_1^3$ are examined. In the fifth section, firstly, the intersections of ruled surfaces corresponding to the tangent spherical indicator curves of two different curves taken on the unit dual sphere at $\mathbb{R}^3$ are examined. Secondly, the intersections of ruled surfaces corresponding to the aslinormal spherical indicator curves of two different curves taken on the unit dual sphere at $\mathbb{R}^3$ are investigated. Thirdly, the intersections of ruled surfaces corresponding to the binormal spherical indicator curves of two different curves taken on the unit dual sphere at $\mathbb{R}^3$ are investigated. Fourth, the intersections of ruled surfaces corresponding to the Pole spherical indicator curves of two different curves taken on the unit dual sphere at $\mathbb{R}^3$ are investigated. Finally, In the six section, conclusions and comments are denoted.

Science Code	:	20402
Key Words	:	Dual curve, dual spherical indicatrix curve, E. study mapping, bivariate functions, intersection of ruled surfaces
Page Number	:	82
Supervisor	:	Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca ve bu tez çalışmasının ortaya çıkışından son haline gelene kadar bilgi ve tecrubesiyle beni yönlendiren danışmanım Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN' a, çalışmam boyunca Tez İzleme Komitesi'nde yer alan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Yusuf Yaylı ve Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN' a, doktora eğitimimde manevi desteğiyle ve bilgileriyle her zaman yanımda olan Sayın Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM'a, fikirlerinden ve bilgilerinden faydalandığım Dr. Öğr. Üyesi Emel KARACA ve Dr. Öğr. Üyesi Anıl ALTINKAYA'ya teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bütün hayatım boyunca benden maddi manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan kıymetli anneme, babama ve kardeşime ayrıca teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u})$	Binormal küresel gösterge eğrisi
$\overline{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{u})$	Pol küresel gösterge eğri
$\mathbb{D}^{3}$	$\mathbb{D}$-Modül
$\boldsymbol{D}\mathbb{S}^{2}$	Birim dual küre
$\mathbb{D}_{1}^{3}$	Dual Lorentz uzay
$\mathbb{H}^{2}$	Dual hiperbolik birim küre
$\overline{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{u})$	Aslinormal küresel gösterge eğrisi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{n}$	n-boyutlu Reel uzay
$\mathbb{R}_{1}^{3}$	Lorentz uzay
$\mathbb{S}^{2}$	Birim 2-küre
$\mathbb{S}_{1}^{2}$	Dual Lorentz birim küre
$\overline{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u})$	Tanjant küresel gösterge eğrisi
$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})$	Eğrinin parametrik gösterimi
$\overline{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{u})$	Dual uzay eğrisi
$\boldsymbol{\psi}$	Regle yüzey

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride eğriler ve yüzeyler teorisi önemli bir yer teşkil etmektedir [1-4]. Eğriler ve yüzeyler teorisi ile ilgili birçok kaynak bulunmasına rağmen yüzeylerin arakesitleri ile ilgili çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Ancak son yıllarda yüzeylerin arakesitlerinin araştırılmasına ve arakesit eğrilerinin özelliklerinin incelenmesine yönelik çalışmalar artmaktadır.

Öklid uzayında; Ye ve Maekawa, iki yüzeyin hem enine(transversal) hem de teğet arakesit eğrilerini incelemişlerdir [5]. Uyar Düldül ve Çalışkan, iki yüzeyin arakesit eğrisi boyunca Darboux çatısı yardımıyla arakesit eğrisinin eğriliğini, geodezik eğrilikler cinsinden vermiştir [6].

Lorentz uzayında; Allessio ve Guadalupe Lorentz-Minkowski 3-uzayı $\mathbb{R}_1^3$ de iki spacelike parametrik yüzeyin, spacelike enine(transversal) arakesit eğrisinin eğriliklerini hesaplayarak, arakesit problemini Lorentz uzayına taşımışlardır [7]. Karaahmetoğlu ve Aydemir, $\mathbb{R}_1^3$ de parametrik yüzeylerin enine arakesit eğrilerinin özellikleri ve yüzeyler üzerindeki karakterizasyonları incelemiştir [8].

Yüzeyler teorisi kapsamında bazı özel yüzeyler özellikle günlük hayatta birçok alanda kullanılmaktadır. Bu özel yüzeylerden bir tanesi regle yüzeylerdir. Regle yüzeyler, en genel anlamda, bir doğrunun bir eğri boyunca hareketi sonucu oluşan yüzeyler olarak tanımlanır. Literatürde, regle yüzeylerin teorisi ve karakterizasyonları pek çok yazar tarafından aktif olarak çalışılmıştır [9-14].

Heo, Kim ve Elber $\mathbb{R}^3$ de yüzeylerin özel hali olan regle yüzeyler için iki regle yüzeyin arakesit eğrisini incelemişlerdir. $\mathbb{R}^3$ de iki regle yüzeyin arakesitinin olması için temel teoremler ile sunmuşlardır. Bu temel teoremler iki değişkenli fonksiyonlar ile ifade edilmiştir [15].

Dual sayılar, 1873 yılında Clifford tarafından tanımlanmıştır [16]. Daha sonra, E. Study kendi adını verdiği teoremde çizgiler uzayı ve birim dual kürenin noktaları arasında bağlantı kurmuştur [17]. E. Study dönüşümüne göre birim dual kürenin noktalarına $\mathbb{R}^3$ de yönlü doğrular karşılık gelir. Buradan, $D\mathbb{S}^2$ üzerindeki eğrilere $\mathbb{R}^3$ de regle yüzeyler karşılık gelir. Benzer şekilde, E. Study dönüşümüne göre $\mathbb{S}_1^2$ veya ($\mathbb{H}^2$) nin noktalarına $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayında yönlü spacelike veya timelike doğrular karşılık gelir [18-19]. Buradan yola çıkılarak, $\mathbb{S}_1^2$ veya ($\mathbb{H}^2$) üzerindeki eğrilere $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike veya timelike regle yüzeyler karşılık gelir. Dual sayılar hakkında daha fazla bilgi sunulmuştur [20-21].

Ayrıca Güven Arslan, $D\mathbb{S}^2$ üzerindeki eğrinin küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeyleri incelemişlerdir [22].

Bu çalışmada, ilk olarak, $D\mathbb{S}^2$ üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki farklı regle yüzeyin arakesiti araştırılmıştır. İkinci olarak, $\mathbb{S}_1^2$ üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki farklı timelike-timelike, spacelike-spacelike ve timelike-spacelike regle yüzeylerin arakesiti incelenmiştir. Benzer şekilde, $\mathbb{H}^2$ üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki farklı timelike regle yüzeylerin arakesiti incelenmiştir. Üçüncü olarak, $D\mathbb{S}^2$ üzerindeki iki farklı eğrinin tanjant küresel gösterge eğrisi, aslinormal küresel gösterge eğrisi, binormal küresel gösterge eğrisi ve Pol gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki farklı regle yüzeyin arakesiti araştırılmıştır.

Bu tez, altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, giriş kısmı için ayrılmıştır.

İkinci bölümde, ileriki konularda kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, E. Study dönüşümünden faydalanarak, birim dual küre $D\mathbb{S}^2$ üzerinde alınan iki farklı eğriye $\mathbb{R}^3$ de iki farklı regle yüzey karşılık getirilmiştir. Daha sonra, $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki ayrı regle yüzeyin arakesiti temel teoremler ile verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak, E. Study dönüşümünden faydalanarak, dual Lorentz birim küre $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde alınan iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de iki farklı regle yüzey karşılık getirilmiştir. Karşılık gelen bu regle yüzeyler üç alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci alt başlık, $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde alınan iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de iki farklı timelike regle yüzey karşılık gelir. Daha sonra, $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki ayrı timelike regle yüzeyin arakesiti temel teoremler ile verilmiştir. İkinci alt başlık, $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde alınan iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de iki farklı spacelike regle yüzey karşılık gelir. Daha sonra, $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki ayrı spacelike regle yüzeyin arakesiti temel teoremler ile ifade edilmiştir. Üçüncü alt başlık, $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde alınan iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de bir timelike ve bir spacelike regle yüzey karşılık gelir. Daha sonra, $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen bir timelike ve bir spacelike regle yüzeyin arakesiti temel teoremler ile gösterilmiştir. İkinci olarak, E. Study dönüşümünden faydalanarak, dual hiperbolik birim küre $\mathbb{H}^2$ üzerinde alınan iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de iki farklı regle yüzey karşılık getirilmiştir.

Karşılık gelen bu regle yüzeyler bir alt başlıktan oluşmaktadır. Bu alt başlıkta, $\mathbb{H}^2$ üzerinde alınan iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de iki farklı timelike regle yüzey karşılık gelir. Daha sonra, $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki ayrı timelike regle yüzeyin arakesiti temel teoremler ile verilmiştir.

Beşinci bölümde, E. Study dönüşümünden faydalanarak, birim dual küre $D\mathbb{S}^2$ üzerinde alınan iki farklı eğrinin küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de iki farklı regle yüzey karşılık getirilmiştir. Bu küresel gösterge eğrileri çeşidine göre dört alt başlıktan meydana gelmektedir. Birinci alt başlıkta, $D\mathbb{S}^2$ üzerinde alınan iki farklı eğinin tanjant küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de iki farklı regle yüzey karşılık getirilmiştir. Daha sonra, $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki ayrı regle yüzeyin arakesiti temel teoremler ile verilmiştir. İkinci alt başlıkta, $D\mathbb{S}^2$ üzerinde alınan iki farklı eğrinin aslinormal küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de iki farklı regle yüzey karşılık getirilmiştir. Daha sonra, $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki ayrı regle yüzeyin arakesiti temel teoremler ile verilmiştir. Üçüncü alt başlıkta, $D\mathbb{S}^2$ üzerinde alınan iki farklı eğrinin binormal küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de iki farklı regle yüzey karşılık getirilmiştir. Daha sonra, $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki ayrı regle yüzeyin arakesiti temel teoremler ile verilmiştir. Dördüncü alt başlıkta, $D\mathbb{S}^2$ üzerinde alınan iki farklı eğrinin Pol küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de iki farklı regle yüzey karşılık getirilmiştir. Daha sonra, $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki ayrı regle yüzeyin arakesiti temel teoremler ile verilmiştir.

Son olarak, altıncı bölümde, sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileride kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

2.1. Tanım

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayında $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ şeklinde tanımlanan fonksiyona *standart iç çarpım* veya *Öklid iç çarpımı* denir[1].

2.2. Tanım

$\mathbb{R}^n$ de bir $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\|\vec{x}\| = (|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|)^{\frac{1}{2}}$ eşitliği ile tanımlı $\|\vec{x}\|$ reel sayısına $\vec{x}$ *vektörünün normu* denir [1].

2.3. Tanım

$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ için vektörel çarpım

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır [1].

2.4. Tanım

U, $\mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt cümlesi ve $\psi: U \to \mathbb{R}^3$ düzgün ve regüler bir dönüşüm olmak üzere eğer ψ dönüşümü bir homeomorfizm ise M cümlesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir *basit yüzey* denir [2].

2.5. Tanım

$M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi için $\forall\, p \in M$ noktasında $\mathbb{R}^3$ ün tamamen M de kalan bir doğrusu varsa M

ye bir *regle yüzey* ve $\forall\, p \in M$ noktasından geçen M de kalan bu doğruya da *regle yüzeyin doğrultmanı* denir [3].

Regle yüzey aşağıdaki parametrizasyon ile ifade edilebilir:

$$\psi: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$(v,s) \to \Phi(v,s) = \alpha(v) + se(v) \tag{2.2}$$

Burada, $\alpha(v)$ dayanak eğrisini ve $e(v)$ ise birim doğrultman vektörü göstermektedir.

2.2. Öklid Uzayında Regle Yüzeylerin Arakesiti

$\mathbb{R}^3$ de, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ yüzeyleri

$$\psi_A(u,s) = \alpha_1(u) + se_1(u), \tag{2.3}$$

$$\psi_B(v,t) = \alpha_2(v) + te_2(v) \tag{2.4}$$

eşitlikleriyle tanımlanan iki regle yüzey olsunlar. Burada $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$, sırasıyla, ψ_A ve ψ_B regle yüzeylerinin dayanak eğrileri, $e_1(u) \neq 0$ ve $e_2(v) \neq 0$ de yüzeylerin doğrultmanlarıdır.

ψ_A yüzeyinin sabit bir s parametresi için u-parametre eğrisini

$$L_A(u) = \psi_A\,(\mathrm{u},\mathrm{s})$$

ve ψ_B yüzeyinin sabit bir t parametresi için v-parametre eğrisini

$$L_B(v) = \psi_B\,(\mathrm{v},\mathrm{t})$$

ile gösterilsin.

2.6. Teorem

$\mathbb{R}^3$ de, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ yüzeyleri iki regle yüzey olsun.

$$\xi(u,v) = det\{e_1(u), e_2(v), [\alpha_1(u) - \alpha_2(v)]\} = 0 \tag{2.5}$$

ise $L_A(u)$ ve $L_B(v)$ parametre eğrileri kesişir [15].

2.7. Teorem

$\mathbb{R}^3$ de, $\Gamma(u,v)$, $\gamma_1(u,v)$, $\gamma_2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları

$$\Gamma(u,v) = \|e_1(u) \times e_2(v)\|^2, \tag{2.6}$$

$$\gamma_1(u,v) = \|e_1(u) \times [\alpha_1(u) - \alpha_2(v)]\|^2, \tag{2.7}$$

$$\gamma_2(u,v) = \|e_2(v) \times [\alpha_1(u) - \alpha_2(v)]\|^2 \tag{2.8}$$

olmak üzere $L_A(u)$ ve $L_A(v)$ parametre eğrilerinin kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\Gamma(u,v) = \gamma_1(u,v) = \gamma_2(u,v) = 0$$

olmasıdır [15].

2.3. Lorentz Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

2.8. Tanım

V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$\langle , \rangle_L : V \times V \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu,
$\forall u, v, w \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için;

i.) $\langle u, v\rangle_L = \langle v, u\rangle_L$,
ii.) $\langle au + bv, w\rangle_L = a\langle u, w\rangle_L + b\langle v, w\rangle_L$, $\langle u, av + bw\rangle_L = a\langle u, v\rangle_L + b\langle u, w\rangle_L$

özellikleri sağlanıyor ise bu fonksiyona V üzerinde *simetrik bilineer form* denir [4].

2.9. Tanım

V vektör uzayı üzerinde bir simetrik $\langle , \rangle_L$ bilineer formu için aşağıdaki sınıflandırma söz konusudur:

i.) $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle_L > 0$ ise $\langle , \rangle_L$ simetrik bilineer formuna *pozitif tanımlı*,

ii.) $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle_L < 0$ ise $\langle , \rangle_L$ simetrik bilineer formuna *negatif tanımlı*,

iii.) $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle_L \geq 0$ ise $\langle , \rangle_L$ simetrik bilineer formuna *yarı-pozitif tanımlı*,

iv.) $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle_L \leq 0$ ise $\langle , \rangle_L$ simetrik bilineer formuna *yarı-negatif tanımlı*,

v.) $\forall u \in V$ için $\langle v, w \rangle_L = 0 \Rightarrow w = 0$ ise $\langle , \rangle_L$ simetrik bilineer formuna *non-dejeneredir*

denir [4].

2.10. Tanım

V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$\langle , \rangle_L : V \times V \to \mathbb{R}$

dönüşümü simetrik, bilineer ve non-dejenere ise $\langle , \rangle_L$ ye V üzerinde bir *skalar çarpım*, bu çarpım ile birlikte V vektör uzayına da bir *skalar çarpım uzayı* denir [4].

2.11. Tanım

$\langle , \rangle_L$, V üzerinde bir skalar çarpım olsun. W, $\langle , \rangle_L$ skalar çarpım üzerinde negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı ise W altuzayının boyutuna $\langle , \rangle_L$ skalar çarpımının *indeksi* denir ve v ile gösterilir [4].

Burada, $0 \leq v \leq boyV$ dir.

2.12. Tanım

v nin indeksi 1 ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına *Lorentz uzayı* denir [4].

2.13. Tanım

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu standart reel vektör uzayı olmak üzere $\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle , \rangle_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \to \langle X, Y \rangle_L = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n \tag{2.9}$$

skalar çarpımına $\mathbb{R}^n$ de *Lorentz metriği* denir [4].

2.14. Tanım

$\mathbb{R}^n$, üzerinde tanımlı Lorentz metriği ile $\{\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_L\}$ ikilisine 1 indeksli n-boyutlu *Lorentz uzayı* denir ve $\mathbb{R}_1^n$ ile gösterilir [4].

2.15. Tanım

$\mathbb{R}_1^n$, Lorentz uzayı olsun. $\forall x \in \mathbb{R}_1^n$ için;

i.) $\langle x, x \rangle_L > 0$ veya $x = 0$ ise x e *spacelike vektör*,

ii.) $\langle x, x \rangle_L < 0$ ise x e *timelike vektör*,

iii.) $x \neq 0$ iken $\langle x, x \rangle_L = 0$ ise x e *lightlike* (*null*) *vektör* denir [4].

2.16. Tanım

$\mathbb{R}_1^n$, Lorentz uzayı ve $x \in \mathbb{R}_1^n$ olsun. $\|x\|_L = (|\langle x, x \rangle_L|)^{\frac{1}{2}}$ eşitliği ile tanımlı $\|x\|_L$ reel sayısına x vektörünün *normu* denir. Normu 1 olan vektöre de *birim vektör* denir [4].

2.17. Tanım

$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^3$ için Lorentz vektörel çarpımı

$$\vec{x} \times_L \vec{y} = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_2 y_1 - x_1 y_2) \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır [4].

2.18. Tanım

$\psi(u, v)$, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayında parametrik denklemi ile verilen bir yüzey olsun. $\psi(u, v)$ yüzeyinin birim normal vektörü N olmak üzere;

i.) N timelike vektör ise $\psi(u, v)$ yüzeyine *spacelike yüzey*,

ii.) N spacelike vektör ise $\psi(u, v)$ yüzeyine *timelike yüzey*

denir [4].

2.19. Tanım

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında, verilen bir d doğrusunun, verilen bir α eğrisi boyunca hareket ettirilerek bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-*boyutlu Lorentz uzayında bir regle yüzey* denir [9].

2.20. Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ de aşağıdaki şartları sağlayan cümlelere, sırasıyla, *Lorentz birim küre* ve *hiperbolik birim küre* denir [10]:

$$S_1^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle_L = 1\}, \tag{2.11}$$

$$H^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle_L = -1\}. \tag{2.12}$$

2.4. Dual Uzayda Temel Tanım ve Kavramlar

2.21. Tanım

$\forall\ x, x^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $X = (x, x^*)$ sıralı ikililerin cümlesini $\mathbb{D}$ ile gösterelim.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{X = (x, x^*): x, x^* \in \mathbb{R}\} \qquad (2.13)$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik şu şekilde tanımlanır:

i.) $\forall X = (x, x^*)$ ve $Y = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ için $X + Y = (x + y, x^* + y^*)$

ii.) $\forall X = (x, x^*)$ ve $Y = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ için $X.Y = (x.y, x^*.y + x.y^*)$

iii.) $\forall X = (x, x^*)$ ve $Y = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ için $X = Y \Leftrightarrow x = y$ ve $x^* = y^*)$

$\mathbb{D}$ cümlesi üzerinde bu şekilde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri tanımlanırsa $\mathbb{D}$ cümlesine *dual sayılar sistemi* ve $\forall X = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da *bir dual sayı* denir [21]. Burada sırasıyla çıkarma, sıfır eleman ve bölme;

$A + X = B \Rightarrow X = (b - a, b^* - a^*)$

$A + X = A \Rightarrow X = (0,0)$

$A \neq (0, a^*)$ olmak üzere $A.X = B \Rightarrow X = \left(\frac{b}{a}, \frac{ab^* - a^*b}{a^2}\right)$

şeklinde ifade edilir.

2.22. Teorem

$(\mathbb{D}, +, .)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır [21].

2.23. Teorem

$X = (x, 0)$ şeklinde alalım. Bu durumda, $f: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, 0) = x$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir izomorfizmdir. Yani $X = (x, 0) = x$ alınacaktır [21].

2.24. Tanım

Bir $X = (x, x^*)$ dual sayısında $''x''$ reel sayısına X in *reel kısmı*,$''x^*''$ reel sayısına da X in *dual kısmı* denir [21].

2.25. Tanım

$(1,0) = 1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin $\mathbb{D}$ deki *reel birim* ve $(0,1) = 1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin $\mathbb{D}$ deki *dual birim* denir. Dual birim kısaca ε ile gösterilir. Burada, $\varepsilon^2 = (0,0)$ olduğu açıktır [21].

2.26. Teorem

$X = (x, x^*)$ dual sayısı $X = x + \varepsilon x^*$ şeklinde yazılabilir. Yani $(x, x^*) = x + \varepsilon x^*$ dır [21].

2.27. Teorem

$X = (x, x^*)$ bir dual sayı ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise λ ile X in çarpımı $\lambda . X = (\lambda x, \lambda x^*)$ dır [21].

2.28. Tanım

$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{\vec{X} = (X_1, X_2, X_3) : X_i \in \mathbb{D}, 1 \leq i \leq 3\}$ cümlesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemi tanımlansın:

i.) $\forall \vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ ve $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathbb{D}^3$ için $\vec{X} + \vec{Y} = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, X_3 + Y_3)$

ii.) $\lambda \in \mathbb{D}$ ve $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{D}^3$ için $\lambda . \vec{X} = (\lambda X_1, \lambda X_2, \lambda X_3)$.

Bu işlemlerle birlikte $\mathbb{D}^3$ cümlesine $\mathbb{D}$- *Modül* denir. $\mathbb{D}$- Modülün elemanları olan sıralı dual üçlülere *dual vektörle*r denir [21].

2.29. Teorem

$\vec{x}, \vec{x}^* \epsilon \ \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\mathbb{D}$- Modülde her bir $\vec{X}$ dual vektörü $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^*$ şeklinde yazılır [21].

2.30. Teorem

$\vec{X} = (\vec{x}, 0)$ şeklinde alalım. Bu durumda, $f: \mathbb{D} - Modül \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\vec{x}, 0) = \vec{x}$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir izomorfizmdir. Yani $\vec{X} = (\vec{x}, 0) = \vec{x}$ alınacaktır [21].

2.31. Tanım

$\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^*$, $\vec{Y} = \vec{y} + \varepsilon\vec{y}^* \in \mathbb{D}$-Modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$\langle , \rangle : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) \longrightarrow \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{y}^* \rangle + \langle \vec{x}^*, \vec{y} \rangle) \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlıdır [21].

2.32. Tanım

$\vec{x} \neq 0$ olmak üzere bir $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^*$ dual vektörünün normu,

$$\left\|\vec{X}\right\| = \|\vec{x}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle}{\|\vec{x}\|} \tag{2.15}$$

dual sayısına denir [21].
Normu reel birime karşılık gelen dual vektörlere *birim dual vektörler* denir.

2.33. Teorem

$\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^*$ birim dual vektör ise

$$\|\vec{x}\| = 1, \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle = 0 \tag{2.16}$$

dır [21].

2.34. Tanım

$\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{D}$-Modül dual vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\vec{X} \times \vec{Y} = \vec{x} \times \vec{y} + \varepsilon(\vec{x} \times \vec{y}^* + \vec{x}^* + \vec{y}\,) \tag{2.17}$$

olarak tanımlanır [21]. Burada eşitliğin sağındaki vektörel çarpım $\mathbb{R}^3$ deki vektörel çarpımla aynıdır.

2.35. Tanım

$\vec{X} \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere

$$\mathbb{DS}^2 = \left\{\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^* : \left\|\vec{X}\right\| = (1,0)\right\} \tag{2.18}$$

cümlesine *birim dual küre* denir [21].

2.36. Teorem (E. Study dönüşümü)

Birim dual kürenin noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [21].

2.37. Tanım

$\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{D}$-Modül iki dual birim vektörleri olsun.

$$\langle\vec{X}, \vec{Y}\rangle = \cos\bar{\theta} = \cos(\theta + \varepsilon\theta^*) \tag{2.19}$$

eşitliğiyle verilen $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ birim dual vektörleri arasındaki *dual açı* denir [21]. Burada birim dual vektörlere $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki açı θ ve bunların eksenleri arasındaki uzaklığı θ^* dır.

2.38. Tanım

$\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \alpha^*(s)$ ifadesine bir *dual uzay eğrisi* denir [21].
Burada, $\alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)\big)$ ve $\alpha^*(s) = \big(\alpha_1^*(s), \alpha_2^*(s), \alpha_3^*(s)\big)$, Öklid uzayında reel değerli eğrilerdir.

2.39. Tanım

Dayanak eğrisi $\vec{a} = \vec{a}(u)$ denklemi ile belli olan (C) eğrisi ve ana doğruları $\vec{e} = \vec{e}(u)$ birim vektörü olan regle yüzeyin denklemi

$$\psi(u, s) = \vec{a}(u) + s\vec{e}(u)$$

dir. Burada

$$\vec{e}^* = \vec{a} \times \vec{e} \quad \text{ve} \quad \vec{e} \times \vec{e}^* = \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle \vec{e}$$

olduklarından dolayı regle yüzeyin denklemi için

$$t = s + \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle$$

olmak üzere

$$\psi(u, t) = \vec{\alpha}(u) \times \vec{\alpha}^*(u) + t\vec{\alpha}(u)$$

bulunur [21].

2.40. Teorem

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{DS}^2$ üzerinde u-parametresiyle verilen bir eğri olsun.
$\bar{\alpha}(u)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}^3$ te üretilen regle yüzey,

$$\psi(u, s) = \alpha(u) \times \alpha^*(u) + s\alpha(u) \tag{2.20}$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$C(u) = \alpha(u) \times \alpha^*(u) \tag{2.21}$$

eğrisidir [12], [13].

2.41. Tanım

$\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı $\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \alpha^*(u)$ dual eğrisi için

$$\bar{T}(u) = \dot{\bar{\alpha}}(u) = \dot{\alpha}(u) + \varepsilon\dot{\alpha}^*(u) \tag{2.22}$$

eşitliğiyle belirli $\bar{T}(u) = T(u) + T^*(u)$ dual vektörüne, $\bar{\alpha}$ dual eğrisinin $\bar{\alpha}(u)$ dual noktasındaki *birim dual tanjant vektörü* denir [21].

2.42. Tanım

$\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı $\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \alpha^*(u)$ dual eğrisi için

$$\bar{\kappa}(u) = \langle \dot{\bar{T}}(u), \bar{N}(u) \rangle = \langle \dot{T}, N \rangle + \varepsilon\big(\langle \dot{T}, N^* \rangle + \langle \dot{T}^*, N \rangle\big) \tag{2.23}$$

eşitliğiyle belirli $\bar{\kappa}(u) = \kappa(u) + \kappa^*(u)$ dual fonksiyonuna, $\bar{\alpha}$ dual eğrisinin *dual eğrilik fonksiyonu* denir [21].

2.43. Tanım

$\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı $\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \alpha^*(u)$ dual eğrisi için

$$\bar{N}(u) = \frac{\ddot{\bar{\alpha}}(u)}{\|\ddot{\bar{\alpha}}(u)\|} \tag{2.24}$$

eşitliğiyle belirli $\bar{N}(u) = N(u) + N^*(u)$ dual vektörüne, $\bar{\alpha}$ dual eğrisinin $\bar{\alpha}(u)$ dual noktasındaki *birim dual aslinormal vektörü* denir [21]

2.44. Tanım

$\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı $\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \alpha^*(u)$ dual eğrisi için

$$\bar{B}(u) = \bar{T}(u) \wedge \bar{N}(u) = T \wedge N + \varepsilon(T^* \wedge N + T \wedge N^*) \qquad (2.25)$$

eşitliğiyle belirli $\bar{B}(u) = B(u) + B^*(u)$ dual vektörüne, $\bar{\alpha}$ dual eğrisinin $\bar{\alpha}(u)$ dual noktasındaki *birim dual binormal vektörü* denir [21].

2.45. Tanım

$\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı $\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \alpha^*(u)$ dual eğrisi için

$$\bar{\tau}(u) = \langle \dot{\bar{N}}(u), \bar{B}(u) \rangle = \langle \dot{N}, B \rangle + \varepsilon\big(\langle \dot{N}, B^* \rangle + \langle \dot{N}^*, B \rangle\big) \qquad (2.26)$$

eşitliğiyle belirli $\bar{\tau}(u) = \tau(u) + \tau^*(u)$ dual fonksiyonuna, $\bar{\alpha}$ dual eğrisinin *dual burulma fonksiyonu* denir [21].

2.46. Tanım

$\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı $\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \alpha^*(u)$ dual eğrisi için

$$\bar{W}(u) = \bar{\tau}(u)\bar{T}(u) + \bar{\kappa}(u)\bar{B}(u) = (\tau T + \kappa B) + \varepsilon(\tau T^* + \tau^* T + \kappa B^* + \kappa^* B) \qquad (2.27)$$

eşitliğiyle belirli $\bar{W}(u) = W(u) + W^*(u)$ dual vektörüne, $\bar{\alpha}$ dual eğrisinin $\bar{\alpha}(u)$ dual noktasındaki *birim dual Darboux vektörü* denir [22].

2.47. Tanım

$\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı $\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \alpha^*(u)$ dual eğrisi için

$$\bar{C}(u) = \frac{\bar{W}(u)}{\|\bar{W}(u)\|} \qquad (2.28)$$

eşitliğiyle belirli $\bar{C}(u) = C(u) + C^*(u)$ dual vektörüne, $\bar{\alpha}$ dual eğrisinin $\bar{\alpha}(u)$ dual noktasındaki *birim dual Pol vektörü* denir [22].

2.48. Teorem

$\bar{T}(u) = T(u) + \varepsilon T^*(u)$ tanjant küresel gösterge eğrisi $\mathbb{DS}^2$ üzerinde olsun. $\bar{T}(u)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}^3$ de üretilen regle yüzey,

$$\psi_{\bar{T}}(u,s) = T(u) \times T^*(u) + sT(u), \tag{2.29}$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$C_{\bar{T}}(u) = T(u) \times T^*(u) \tag{2.30}$$

eğrisidir [22].

2.49. Teorem

$\bar{N}(u) = N(u) + \varepsilon N^*(u)$ asli normal küresel gösterge eğrisi $\mathbb{DS}^2$ üzerinde olsun. $\bar{N}(u)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}^3$ de üretilen regle yüzey,

$$\psi_{\bar{N}}(u,s) = N(u) \times N^*(u) + sN(u), \tag{2.31}$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$C_{\bar{N}}(u) = N(u) \times N^*(u) \tag{2.32}$$

eğrisidir [22].

2.50. Teorem

$\bar{B}(u) = B(u) + \varepsilon B^*(u)$ binormal küresel gösterge eğrisi $\mathbb{DS}^2$ üzerinde olsun. $\bar{B}(u)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}^3$ de üretilen regle yüzey,

$$\psi_{\bar{B}}(u,s) = B(u) \times B^*(u) + sB(u), \tag{2.33}$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$C_{\bar{B}}(u) = B(u) \times B^*(u) \tag{2.34}$$

eğrisidir [22].

2.51. Teorem

$\bar{C}(u) = C(u) + \varepsilon C^*(u)$ Pol küresel gösterge eğrisi $\mathbb{DS}^2$ üzerinde olsun. $\bar{C}(u)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}^3$ de üretilen regle yüzey,

$$\psi_{\bar{C}}(u,s) = C(u) \times C^*(u) + sC(u), \tag{2.35}$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$C_{\bar{C}}(u) = C(u) \times C^*(u) \tag{2.36}$$

eğrisidir [22].

2.5. Dual Lorentz Uzayda Temel Tanım ve Kavramlar

2.52. Tanım

$\mathbb{D}^3$ uzayı üzerinde Öklid metriği yerine Lorentz metriği alınırsa $\mathbb{D}^3$ dual uzayına *dual Lorentz uzayı* denir ve $\mathbb{D}^3_1$ ile gösterilir [18].

2.53. Tanım

$\bar{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^*,\ \bar{Y} = \vec{y} + \varepsilon\vec{y}^* \in \mathbb{D}^3$ dual vektörlerinin dual Lorentz iç çarpımı

$$\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{y}^* \rangle_L + \langle \vec{x}^*, \vec{y} \rangle_L) \tag{2.37}$$

şeklinde tanımlıdır [18]. Burada eşitliğin sağindaki iç çarpım $\mathbb{R}_1^3$ deki iç çarpımdır.

2.54. Tanım

$\bar{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^*,\ \bar{Y} = \vec{y} + \varepsilon\vec{y}^* \in \mathbb{D}^3$ dual vektörlerinin dual Lorentz vektörel çarpımı

$$\bar{X} \times \bar{Y} = \vec{x} \times_L \vec{y} + \varepsilon(\vec{x} \times_L \vec{y}^* + \vec{x}^* \times_L \vec{y}\,) \tag{2.38}$$

şeklinde tanımlıdır [18]. Burada eşitliğin sağındaki vektörel çarpım $\mathbb{R}_1^3$ deki vektörel çarpımdır.

2.55. Tanım

$\|\vec{x}\| \neq 0$ olmak üzere bir $\bar{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^* \in \mathbb{D}_1^3$ vektörünün normu,

$$\|\bar{X}\| = \|\vec{x}\|_L + \varepsilon\frac{\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle_L}{\|\vec{x}\|_L} \tag{2.39}$$

şeklinde tanımlıdır [18].

2.56. Tanım

$\bar{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^* \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere

i.) $\vec{x}$ spacelike bir vektör ise $\bar{X}$ vektörüne *dual spacelike vektör*,

ii.) $\vec{x}$ timelike bir vektör ise $\bar{X}$ vektörüne *dual timelike vektör*,

iii.) $\vec{x}$ lightlike bir vektör ise $\bar{X}$ vektörüne *dual lightlike vektör*

denir [18].

2.57. Tanım

$\bar{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^* \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere

$$\mathbb{S}_1^2 = \{\bar{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^* \in \mathbb{D}_1^3 : \langle\vec{x},\vec{x}\rangle_L = 1\}, \langle\vec{x},\vec{x}^*\rangle_L = 0, \tag{2.40}$$

$$\mathbb{H}^2 = \{\bar{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^* \in \mathbb{D}_1^3 : \langle\vec{x},\vec{x}\rangle_L = -1, \langle\vec{x},\vec{x}^*\rangle_L = 0\,\} \tag{2.41}$$

kümelerine, sırasıyla, *dual Lorentz birim küre* ve *dual hiperbolik birim küre* denir [19].

2.58. Teorem

$\mathbb{D}_1^3$ uzayındaki $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim kürenin ve $\mathbb{H}^2$ dual hiperbolik birim kürenin noktaları, sırasıyla, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz çizgiler uzayındaki yönlü spacelike ve timelike doğrulara birebir karşılık gelir [18].

2.59. Teorem

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir eğri olsun. $\bar{\alpha}(u)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}_1^3$ de üretilen regle yüzey,

$$\psi(u,s) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u) + s\alpha(u), \tag{2.42}$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u) \tag{2.43}$$

eğrisidir [13,14].

2.60. Teorem

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{H}^2$ üzerinde bir eğri olsun. $\bar{\alpha}(u)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}_1^3$ de üretilen regle yüzey,

$$\psi(u,s) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u) + s\alpha(u) \tag{2.44}$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u) \tag{2.45}$$

eğrisidir [13,14].

2.61. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{H}^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi spacelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü timelike ise $\alpha^*(u)$ spacelikedır. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeydir [14].

2.62. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{H}^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi spacelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü timelike ise $\alpha^*(u)$ timelikedır. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeydir [14].

2.63. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi spacelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü spacelike ise $\alpha^*(u)$ timelike vektördür. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike regle yüzeydir [14].

2.64. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi spacelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü timelike ise $\alpha^*(u)$ spacelikedır. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeydir [14].

2.65. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi spacelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü timelike ise $\alpha^*(u)$ timelikedır. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeydir [14].

2.66. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi timelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü spacelike ise $\alpha^*(u)$ spacelikedır. Elde edilen $\psi(u, s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeydir [14].

3. DUAL KÜRE ÜZERİNDEKİ İKİ FARKLI EĞRİYE KARŞILIK GELEN REGLE YÜZEYLERİN ARAKESİTLERİ

Bu bölümde, birim dual küre üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğriye E. Study dönüşümü yardımıyla karşılık gelen iki ayrı regle yüzeylerin arakesit problemleri incelenmiştir.

E. Study dönüşümüne göre; birim dual kürenin noktalarına $\mathbb{R}^3$ de yönlü doğrular karşılık gelir. Bu dönüşümden yararlanarak birim dual küre $D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız dual eğriye $\mathbb{R}^3$ de regle yüzey karşılık gelir. Elde edilen regle yüzeylerin arakesit problemleri $\mathbb{R}^3$ de regle yüzeylerin arakesiti için kullanılan teoremler vasıtasıyla incelenmişitir.

3.1. Teorem

Birim dual kürenin noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [21].

3.2. Teorem

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{DS}^2$ üzerinde u- parametresiyle verilen bir eğri olsun. $\bar{\alpha}(u)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}^3$ de üretilen regle yüzey,

$$\psi(u,s) = \alpha(u) \times \alpha^*(u) + s\alpha(u),$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$C(u) = \alpha(u) \times \alpha^*(u)$$

eğrisidir [12,13].

Birim dual küre $D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğri, sırasıyla, $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1(u) + \varepsilon\alpha_1^*(u)$ ve $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2(v) + \varepsilon\alpha_2^*(v)$ olmak üzere E. Study dönüşümü yardımıyla bu eğrilere $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ yüzeyleri olsunlar. Bu regle yüzeyler

$$\psi_A(u,s) = \alpha_1(u) \times \alpha_1^*(u) + s\alpha_1(u), \tag{3.1}$$

$$\psi_B(v,t) = \alpha_2(v) \times \alpha_2^*(v) + t\alpha_2(v) \tag{3.2}$$

eşitlikleriyle tanımlı olsunlar. Burada $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ regle yüzeylerinin dayanak eğrileri sırasıyla

$$C_A(u) = \alpha_1(u) \times \alpha_1^*(u), \tag{3.3}$$

$$C_B(v) = \alpha_2(v) \times \alpha_2^*(v) \tag{3.4}$$

eşitlikleriyle ifade edilirler.

$\psi_A(u,s)$ regle yüzeyinin sabit bir s_0 parametresi için u- parametre eğrisini

$$l_A(u) = \psi_A(u,s_0)$$

eşitliğiyle gösterilsin. Benzer şekilde $\psi_B(v,t)$ regle yüzeyinin sabit bir t_0 parametresi için v-parametre eğrisini

$$l_B(v) = \psi_B(v,t)$$

eşitliğiyle verilsin.

3.3. Teorem

Dual birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki farklı regle yüzey, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu durumda

$$\mu(u,v) = det\{\alpha_1(u), \alpha_2(v), \left(C_A(u) - C_B(v)\right)\} = 0 \tag{3.5}$$

ise $l_A(u)$ ve $l_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

İspat

Dual birim küre üzerindeki $\bar{\alpha}_1(u)$ ve $\bar{\alpha}_2(v)$ dual eğrilerine karşılık gelen regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu regle yüzeylerin kesiştiğini kabul edelim. O halde iki regle yüzey aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\psi_A\,(\mathrm{u},\mathrm{s}) = \psi_B(\mathrm{v},\mathrm{t}). \tag{3.6}$$

Burada Eş. (3.1) ve Eş. (3.2) yerlerine yazılıp düzenlenirse

$C_A(u) - C_B(v) = -s\alpha_1(u) + t\alpha_2(v)$ eşitliği elde edilir. Buaradan $C_A(u) - C_B(v)$ vektörü $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ doğrultman vektörlerinin lineer birleşimi olur. Böylece $C_A(u) - C_B(v)$, $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ vektörleri lineer bağımlıdır. Sonuç olarak,

$$det\{[C_A(u) - C_B(v)], \alpha_1(u), \alpha_2(v)\} = 0$$

olur. Dolayısıyla Eş. (3.5) den $\mu(u,v) = 0$ dır. Sonuç olarak, $\mu(u,v) = 0$ olduğundan $l_A(u)$ ve $l_B(v)$ parametre eğrileri çakışır.

3.4. Sonuç

$D\mathbb{S}^2$ üzerinde iki farklı eğriye karşılık gelen regle yüzeylerin arakesiti için $\mu(u,v) = 0$ koşuluyla $C_A(u) = C_B(v)$ eşit olduğu zaman taban eğrileri çakışır.

$D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğriye $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ regle yüzeylerinin kesişimi için kullanacağımız $\Delta(u,v)$, $\delta_1(u,v)$, $\delta_2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları

$$\Delta(u,v) = \|\alpha_1(u) \times \alpha_2(v)\|^2, \tag{3.7}$$

$$\delta_1(u,v) = \|\alpha_1(u) \times [C_A(u) - C_B(v)]\|^2, \tag{3.8}$$

$$\delta_2(u,v) = \|\alpha_2(v) \times [C_A(u) - C_B(v)]\|^2 \tag{3.9}$$

şeklinde olsun. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.5. Teorem

Dual birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ iki farklı regle yüzeylerin, sırasıyla, parametre eğrileri $l_A(u)$ ve $l_B(v)$ olsun. Bu durumda $l_A(u)$ ve $l_B(v)$ parametre eğrilerinin kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\Delta(u,v) = \delta_1(u,v) = \delta_2(u,v) = 0$$

olmasıdır.

İspat

$\mu(u,v) = 0$ ' ın her çözümü $C_A(u) - C_B(v)$, $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ vektörleri için lineer bağımlı olduğundan

$$m_1\alpha_1(u) + m_2\alpha_2(v) + m_3[C_A(u) - C_B(v)] = 0 \qquad (3.10)$$

eşitliği sıfırdan farklı her bir m_1, m_2, m_3 skalerleri için sağlanır. $m_3 \neq 0$ olduğunda Eş. (3.6) sağlanır ve $l_A(u)$ ve $l_B(v)$ parametre eğrileri çakışır. $m_3 = 0$ alınırsa $m_1 \neq 0$ ve $m_2 \neq 0$ için Eş. (3.10) kullanılarak

$$\alpha_1(u) = -\frac{m_1}{m_2}\alpha_2(v)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ paralel olduğu görülür. Buradan Eş. (3.7) den $\Delta(u,v) = 0$ fonksiyonun çözüm kümesidir. Dolayısıyla $\Delta(u,v) = 0$ 'ın çözüm kümesi $\mu(u,v) = 0$ 'ın çözüm kümesinde kapsanır. $l_A(u)$ ve $l_B(v)$ parametre eğrilerinin çakışması için gerekli ve yeterli şart birbirlerine paralel olmaları gerekir. Yani $\Delta(u,v) = 0$ olmalı ayrıca ve $[C_A(u) - C_B(v)]$ vektörünün sırasıyla $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ vektörlerine paralel olması gerekir.

$\alpha_1(u)$ vektörünün $[C_A(u) - C_B(v)]$ vektörüne paralel olması durumu

$$\delta_1(u,v) = \|\alpha_1(u) \times [C_A(u) - C_B(v)]\|^2 = 0,$$

$\alpha_2(v)$ vektörünün $[C_A(u) - C_B(v)]$ vektörüne paralel olması durumu

$$\delta_2(u,v) = \|\alpha_2(v) \times [C_A(u) - C_B(v)]\|^2 = 0$$

eşitliği yazılır. Böylece $l_A(u)$ ve $l_B(v)$ parametre eğrileri çakışır.

Örnek

$\alpha_1(u) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\alpha_1^*(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin u\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u\,, 0\right)$,

$\alpha_2(v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin v\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos v\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ve $\alpha_2^*(v) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos v\,, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin v\,, 0)$ $\mathbb{R}^3$ de birer vektör olsun.

$|\alpha_1(u)| = 1$ ve $\langle \alpha_1(u),\ \alpha_1^*(u)\ \rangle = 0$ olduğundan $\bar{\alpha}_1(u) = \alpha_1(u) + \varepsilon\alpha_1^*(u)$ dual eğrisi birim dual küresi üzerindedir. Benzer şekilde $\bar{\alpha}_2(u) = \alpha_2(v) + \varepsilon\alpha_2^*(v)$ dual eğrisi de birim dual küre üzerindedir.

$\bar{\alpha}_1(u) = \alpha_1(u) \times \alpha_1^*(u)$ dual eğrisine karşılık gelen regle yüzey

$$\begin{aligned}\psi_A(u,s) &= \alpha_1(u) \times \alpha_1^*(u) + s\alpha_1(u)\\ &= (-\frac{1}{2}\cos u\,, \frac{1}{2}\sin u\,, -\frac{1}{2}) + s(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u\,, \frac{1}{\sqrt{2}})\end{aligned}$$

dır. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi ve doğrultmanı, sırasıyla,

$C_A(u) = \left(-\frac{1}{2}\cos u\,, \frac{1}{2}\sin u\,, -\frac{1}{2}\right)$ ve $\alpha_1(u) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u\,, \frac{1}{\sqrt{2}})$ dır.

Benzer şekilde $\bar{\alpha}_2(v) = \alpha_2(v) + \varepsilon\alpha_2^*(v)$ dual eğrisine karşılık gelen regle yüzey

$$\begin{aligned}\psi_B(v,t) &= \alpha_2(v) \times \alpha_2^*(v) + t\alpha_2(v)\\ &= (\frac{1}{2}\sin v\,, \frac{1}{2}\cos v\,, -\frac{1}{2}) + t(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin v\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos v\,, \frac{1}{\sqrt{2}})\end{aligned}$$

dır. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi ve doğrultmanı, sırasıyla,

$C_B(v) = (\frac{1}{2}\sin v, \frac{1}{2}\cos v, -\frac{1}{2})$, ve $\alpha_2(v) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\sin v, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos v, \frac{1}{\sqrt{2}})$ dır.

Şimdi birim dual küre yüzeyi üzerinde aldığımız iki eğriye karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitini inceleyelim:

$\psi_A\,(\mathrm{u,s}) = \psi_B(\mathrm{v,t})$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{2}(-\cos u, \sin u, -1) + s\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, \sin u, 1) = \frac{1}{2}(\sin v, \cos v, -1) + t\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin v, \cos v, 1)$$

$$-\frac{1}{2}(\cos u + \sin v, -\sin u + \cos v, 0) = -s\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, \sin u, 1) + t\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin v, \cos v, 1)$$

yazılabilir. Burada $C_A(u) - C_B(v) = -\frac{1}{2}(\cos u + sin\, v, -\sin u + \cos v, 0)$ fark vektörü $\alpha_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, \sin u, 1)$ ve $\alpha_2(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin v, \cos v, 1)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilmiş olur. Bu üç vektör lineer bağımlı olduğundan $\mu(u,v) = 0$ dır. Dolayısıyla $\mu(u,v) = 0$ olduğundan $l_A(u)$ ve $l_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

Şimdi $\Delta(u,v)$, $\delta_1(u,v)$, $\delta_2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonlarını hesaplıyalım. Bu fonksiyonlar sırasıyla,

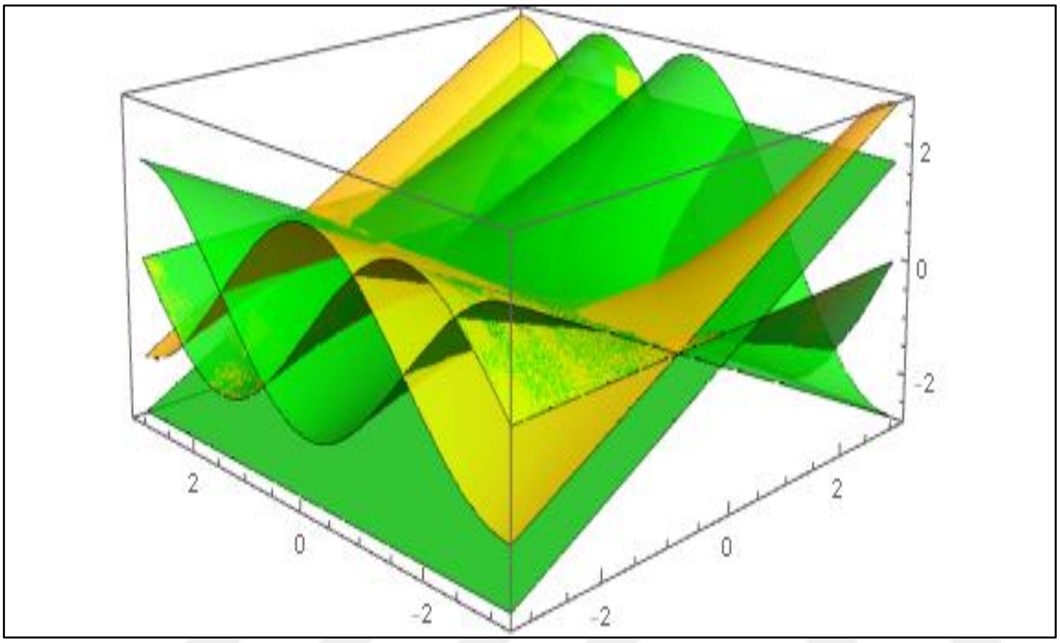
$$\begin{aligned}\Delta(u,v) &= \|\alpha_1(u)x\alpha_2(v)\|^2\\ &= -\frac{1}{4}\{(\sin(u-v)+3)(\sin(u-v)-1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_1(u,v) &= \|\alpha_1(u)x[C_A(u) - C_B(v)]\|^2\\ &= -\frac{1}{8}\{(\sin(u-v)+3)(\sin(u-v)-1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_2(u,v) &= \|\alpha_2(v)x[C_A(u) - C_B(v)]\|^2\\ &= -\frac{1}{8}\{(\sin(u-v)+3)(\sin(u-v)-1)\}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$\mu(u,v)=0$ denkleminin $(u,v)=(\frac{\pi}{2},0)$ çözümü için $\Delta(u,v)=\delta_1(u,v)=\delta_2(u,v)=0$ olacağından $l_A(u)$ ve $l_B(v)$ parametre eğrileri kesişir. Dolayısıyla $\psi_A\,(\mathrm{u,s})$ ve $\psi_B(\mathrm{v,t})$ regle yüzeyleri kesişir.



Şekil 3.1. $D\mathbb{S}^2$ de iki farklı eğriye karşılık gelen iki regle yüzeyin arakesiti

4. PSEUDO KÜRELERİN ÜZERİNDEKİ İKİ FARKLI EĞRİYE KARŞILIK GELEN REGLE YÜZEYLERİN ARAKESİTLERİ

Bu bölümde; Pseudo kürelerin ($\mathbb{S}_1^2$ ve $\mathbb{H}^2$) üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğriye E. Study dönüşümü yardımıyla $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki ayrı regle yüzeylerin arakesit problemleri incelenmiştir.

4.1. Teorem

$\mathbb{D}_1^3$ uzayındaki $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim kürenin ve $\mathbb{H}^2$ dual hiperbolik birim kürenin noktaları, sırasıyla, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz çizgiler uzayındaki yönlü spacelike ve timelike doğrulara birebir karşılık gelir [18].

4.2. Teorem

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde u- parametresiyle verilen bir eğri olsun. $\bar{\alpha}(u)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}_1^3$ de üretilen regle yüzey,

$$\psi(u,s) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u) + s\alpha(u),$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$$

eğrisidir [13,14].

4.3. Teorem

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{H}^2$ üzerinde u- parametresiyle verilen bir eğri olsun. $\bar{\alpha}(u)$ eğrisi tarafından $\mathbb{R}_1^3$ de üretilen regle yüzey,

$$\psi(u,s) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u) + s\alpha(u),$$

olup bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$

eğrisidir [13,14].

4.4. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{H}^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi spacelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü timelike ise $\alpha^*(u)$ spacelikedır. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeydir [14].

4.5. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{H}^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi spacelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü timelike ise $\alpha^*(u)$ timelikedır. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeydir [14].

4.6. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi spacelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü spacelike ise $\alpha^*(u)$ timelikedır. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike regle yüzeydir [14].

4.7. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi spacelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü timelike ise $\alpha^*(u)$ spacelikedır. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeydir [14].

4.8. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi spacelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü timelike ise $\alpha^*(u)$ timelikedır. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeydir [14].

4.9. Önerme

$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) + \varepsilon\alpha^*(u)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde bir eğri olsun. Eğer $D(u) = \alpha(u) \times_L \alpha^*(u)$ dayanak eğrisi timelike eğri ve $\alpha(u)$ doğrultman vektörü spacelike ise $\alpha^*(u)$ spacelikedır. Elde edilen $\psi(u,s)$ regle yüzeyi $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeydir [14].

4.1. $\mathbb{S}_1^2$ Dual Lorentz Birim Küre Üzerindeki İki Farklı Eğriye Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Arakesitleri

Bu bölümde; dual Lorentz birim küre $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğriye E. Study dönüşümü yardımıyla $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki ayrı regle yüzeyin arakesit problemleri incelenmiştir.

E. Study dönüşümüne göre; $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim kürenin noktalarına $\mathbb{R}_1^3$ de yönlü spacelike veya timelike doğrular karşılık gelir. Bu dönüşümden yararlanarak $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim küre üzerinde aldığımız dual eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de yönlü spacelike veya timelike regle yüzeyler karşılık gelir. Elde edilen regle yüzeylerin arakesit problemleri $\mathbb{R}^3$ de regle yüzeylerin arakesiti için kullanılan teoremler vasıtasıyla incelenmişitir.

4.1.1. $\mathbb{S}_1^2$ Dual Lorentz birim küre üzerindeki iki farklı eğriye karşılık gelen iki timelike regle yüzeylerin arakesiti

$\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim kürenin üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğri, sırasıyla, $\bar{\alpha}_1(u) = \alpha_1(u) + \varepsilon\alpha_1^*(u)$ ve $\bar{\alpha}_2(v) = \alpha_2(v) + \varepsilon\alpha_2^*(v)$ olmak üzere E. Study dönüşümü yardımıyla bu eğrilere $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki timelike regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu timelike regle yüzeyler;

$$\psi_A(u,s) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u) + s\alpha_1(u), \tag{4.1}$$

$$\psi_B(v,t) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) + t\alpha_2(v) \tag{4.2}$$

eşitlikleriyle tanımlı olsunlar. Burada

$$\mathrm{D}_A(u) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u), \tag{43}$$

$$D_B(v) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) \tag{4.4}$$

,sırasıyla, ψ_A ve ψ_B yüzeylerinin timelike dayanak eğrileri, $\alpha_1(u) \neq 0$ ve $\alpha_2(v) \neq 0$ de yüzeylerin spacelike doğrultmanlarıdır.

ψ_A timelike regle yüzeyinin sabit bir s_0 parametresi için u-parametre eğrisini

$k_A(u) = \psi_A\,(\mathrm{u}, \mathrm{s}_0)$,

ψ_A timelike regle yüzeyinin sabit bir t_0 parametresi için v-parametre eğrisini

$k_B(v) = \psi_B\,(\mathrm{v}, \mathrm{t}_0)$

ile belirtelim.

4.10. Teorem

Dual Lorentz birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki farklı timelike regle yüzey, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu durumda

$$\eta(u,v) = det\{\alpha_1(u), \alpha_2(v), (D_A(u) - D_B(v))\} = 0 \tag{4.5}$$

ise $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

İspat

Dual Lorentz birim küre üzerindeki $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ dual eğrilerine $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu regle yüzeylerin kesiştiğini kabul edelim. O halde iki regle yüzey aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi_A\,(\mathrm{u}, \mathrm{s}) = \psi_B(\mathrm{v}, \mathrm{t}). \tag{4.6}$$

Burada Eş. (4.1) ve Eş. (4.2) yerlerine yazılırsa

$D_A(u) - D_B(v) = -s\alpha_1(u) + t\beta_1(v)$

eşitliği elde edilir. Buaradan $D_A(u) - D_B(v)$ vektörü $\alpha_1(u)$ ve $\beta_1(v)$ spacelike doğrultman vektörlerinin lineer birleşimi olur. Böylece $D_A(u) - D_B(v)$, $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ spacelike vektörleri lineer bağımlıdır. Sonuç olarak,

$det\{[D_A(u) - D_B(v)], \alpha_1(u), \alpha_2(v)\} = 0$

olur. Dolayısıyla Eş. (4.6) den $\eta(u,v) = 0$ dır. Sonuç olarak, $\eta(u,v) = 0$ olduğundan $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

4.11. Sonuç

$\mathbb{S}_1^2$ üzerindeki iki farklı eğriye karşılık gelen iki timelike regle yüzeyin arakesiti için $\eta(u,v) = 0$ koşuluyla $D_A(u) = D_B(v)$ eşit olduğu zaman taban eğrileri çakışır.

$\mathbb{S}_1^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ timelike regle yüzeylerin kesişimi için kullanacağımız $\Lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları

$$\Lambda(u,v) = \|\alpha_1(u) \times_L \alpha_2(v)\|_L^2, \tag{4.7}$$

$$\lambda_1(u,v) = \|\alpha_1(u) \times_L [D_A(u) - D_B(v)]\|_L^2, \tag{4.8}$$

$$\lambda_2(u,v) = \|\alpha_2(v) \times_L [D_A(u) - D_B(v)]\|_L^2 \tag{4.9}$$

şeklinde olsun. Buna göre aşağıdaki teoremi verebilitiz.

4.12. Teorem

Dual Lorentz birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ iki farklı timelike regle yüzeylerinin, sırasıyla, parametre eğrileri $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ olsun. Bu durumda $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrilerinin kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul

$\Lambda(u,v) = \lambda_1(u,v) = \lambda_2(u,v) = 0$

olmasıdır.

İspat

$\eta(u,v)=0$ ‘ ın her çözümü $D_A(u)-D_B(v)$, $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ spacelike vektörleri için lineer bağımlı olduğundan

$$m_1\alpha_1(u)+m_2\alpha_2(v)+m_3[D_A(u)-D_B(v)]=0 \tag{4.10}$$

eşitliği sıfırdan farklı herbir m_1, m_2, m_3 skalerleri için sağlanır. $m_3 \neq 0$ olduğunda Eş. (4.6) sağlanır ve $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri çakışır. $m_3=0$ alınırsa $m_1 \neq 0$ ve $m_2 \neq 0$ için Eş. (4.10) kullanılarak

$$\alpha_1(u)=-\frac{m_1}{m_2}\alpha_2(v)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ spacelike vektörleri paralel olduğu görülür. Buradan Eş. (4.7) den $\Lambda(u,v)=0$ fonksiyonun çözüm kümesidir. Dolayısıyla $\Lambda(u,v)=0$ ‘ın çözüm kümesi $\eta(u,v)=0$ ‘ın çözüm kümesinde kapsanır. $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrilerinin çakışması için gerekli ve yeterli şart birbirlerine paralel olmaları gerekir. Yani $\Lambda(u,v)=0$ olmalı ayrıca $[D_A(u)-D_B(v)]$ vektörünün sırasıyla $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ spacelike vektörlerine paralel olması gerekir. $\alpha_1(u)$ spacelike vektörünün $[D_A(u)-D_B(v)]$ vektörüne paralel olması durumu

$$\lambda_1(u,v)=\|\alpha_1(u)\times_L[D_A(u)-D_B(v)]\|_L^2=0,$$

$\alpha_2(v)$ spacelike vektörünün $[D_A(u)-D_B(v)]$ vektörüne paralel olması durumu

$$\lambda_2(u,v)=\|\alpha_2(v)\times_L[D_A(u)-D_B(v)]\|_L^2=0$$

eşitliği yazılır. Böylece $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri çakışır.

Örnek

$\alpha_1(u) = \left(\sqrt{2}\sin u\,, \sqrt{2}\cos u\,, 1\right)$, $\alpha_1^*(u) = \left(\sqrt{2}\cos u\,, -\sqrt{2}\sin u\,, 0\right)$ $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike vektörler olsun. $\langle \alpha_1(u), \alpha_1(u) \rangle_L$=1 ve $\langle \alpha_1(u), \alpha_1^*(u) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\alpha}_1(u) = \alpha_1(u) + \varepsilon\alpha_1^*(u)$ dual eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim küresi üzerindedir.

$\bar{\alpha}_1(u)$ dual eğrisine karşılık gelen timelike regle yüzey

$$\psi_A(u,s) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u) + s\alpha_1(u)$$

$$= (\sqrt{2}\sin u\,, -\sqrt{2}\cos u\,, 2) + s(\sqrt{2}\sin u\,, \sqrt{2}\cos u\,, 1)$$

dır. Bu timelike regle yüzeyin sırasıyla timelike dayanak eğrisi ve spacelike doğrultmanı

$D_A(u) = \left(\sqrt{2}\sin u\,, -\sqrt{2}\cos u\,, 2\right)$ ve $\alpha_1(u) = (\sqrt{2}\sin u\,, \sqrt{2}\cos u\,, 1)$ şeklindedir.

$\alpha_2(v) = (-\sqrt{2}\cos v\,, \sqrt{2}\sin v\,, 1)$ ve $\alpha_2^*(v) = (\sqrt{2}\sin v\,, \sqrt{2}\cos v\,, 0)$ $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike vektörler olsun. $\langle \alpha_2(v), \alpha_2(v) \rangle_L = 1$ ve $\langle \alpha_2(v), \alpha_2^*(v) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\alpha}_2(v) = \alpha_2(v) + \varepsilon\alpha_2^*(v)$ dual eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim küresi üzerindedir.

$\bar{\alpha}_2(v)$ dual eğrisine karşılık gelen timelike regle yüzey

$$\psi_B(v,t) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) + t\alpha_2(v)$$

$$= (-\sqrt{2}\cos v\,, -\sqrt{2}\sin v\,, 2) + s(-\sqrt{2}\cos v\,, \sqrt{2}\sin v\,, 1)$$

dir. Bu timelike regle yüzeyin sırasıyla timelike dayanak eğrisi ve spacelike doğrultmanı

$D_B(v) = (-\sqrt{2}\cos v\,, -\sqrt{2}\sin v\,, 2)$ ve $\alpha_2(v) = (-\sqrt{2}\cos v\,, \sqrt{2}\sin v\,, 1)$ dır.

Şimdi $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim küresi üzerinde aldığımız iki dual eğriye karşılık gelen iki timelike regle yüzeylerin arakesitini inceleyelim:

$\psi_A\,(\mathrm{u,s}) = \psi_B(v,t)$ olsun.

$\left(\sqrt{2}\sin u, -\sqrt{2}\cos u, 2\right) + s\left(\sqrt{2}\sin u, \sqrt{2}\cos u, 1\right) = (-\sqrt{2}\cos v, -\sqrt{2}\sin v, 2) +$
$t(-\sqrt{2}\cos v, \sqrt{2}\sin v, 1)$

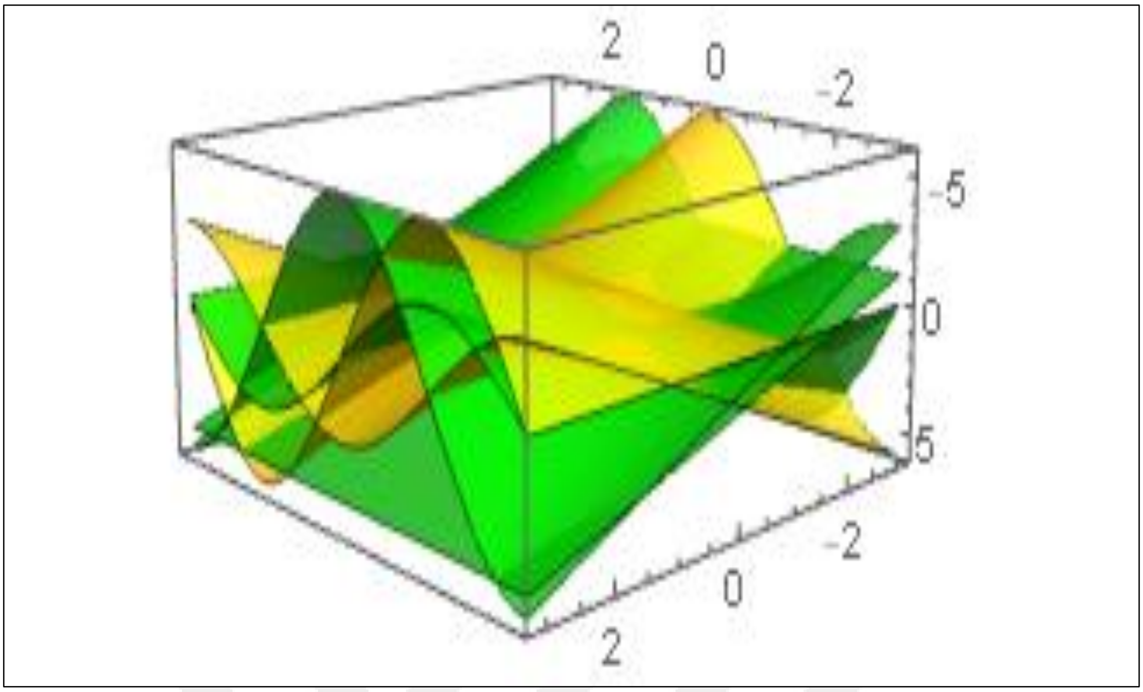
$\sqrt{2}(\sin u + \cos v, \sin v - \cos u, 0) = -s\left(\sqrt{2}\sin u, \sqrt{2}\cos u, 1\right) + t(-\sqrt{2}\cos v, \sqrt{2}\sin v, 1)$

olarak yazılabilir. Burada $D_A(u) - D_B(v) = \sqrt{2}(\text{sinu}\, u + \cos v, \sin v - \cos u, 0)$ fark vektörü $\alpha_1(u) = \sqrt{2}\sin u, \sqrt{2}\cos u, 1)$ ve $\alpha_2(v) = (-\sqrt{2}\cos v, \sqrt{2}\sin v, 1)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilmiş olur. Bu üç vektör lineer bağımlı olduğundan $\eta(u,v) = 0$ dır. Dolayısıyla $\eta(u,v) = 0$ olacağından $\eta(u,v) = 4\cos v\,(\sin v - \cos u)$ olduğundan $\eta(u,v) = 0$ denklemini sağlayan (u,v) ikilileri için $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

Şimdi $\Lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonlarını hesaplıyalım. Bu fonksiyonlar;

$\Lambda(u,v) = 4\sin(u - v)[\sin(\mathrm{u} - \mathrm{v}) + 1]$,
$\lambda_1(u,v) = -4\{(\cos(u+v) + \sin 2u)^2 - (\sin(u-v) + 1)\}$,
$\lambda_2(u,v) = -4\{(\cos(u+v) - \sin 2v)^2 - (\sin(u-v) + 1)\}$

olur. $\eta(u,v) = 0$ denkleminin $(u,v) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ çözümü için $\Lambda(u,v) = \lambda_1(u,v) = \lambda_2(u,v) = 0$ olup $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir. Dolayısıyla $\psi_A\,(\mathrm{u},\mathrm{s})$ ve $\psi_B(\mathrm{v},\mathrm{t})$ timelike regle yüzeyleri kesişir.



Şekil 4.1. $\mathbb{S}_1^2$ de iki farklı eğriye karşılık gelen iki timelike regle yüzeyin arakesiti

4.1.2. $\mathbb{S}_1^2$ Dual Lorentz birim küre üzerindeki iki farklı eğriye karşılık gelen iki spacelike regle yüzeylerin arakesiti

$\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim kürenin üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğri, sırasıyla, $\bar{\alpha}_1(u) = \alpha_1 + \varepsilon\alpha_1{}^*$ ve $\bar{\alpha}_2(v) = \alpha_2 + \varepsilon\alpha_2^*$ olmak üzere E. Study dönüşümü yardımıyla bu eğrilere $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki spacelike regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu spacelike regle yüzeyler;

$$\psi_A(u,s) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u) + s\alpha_1(u), \tag{4.11}$$

$$\psi_B(v,t) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) + t\alpha_2(v) \tag{4.12}$$

eşitlikleri ile verilsin. Burada

$$\mathrm{D}_A(u) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u), \tag{4.13}$$

$$\mathrm{D}_B(v) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) \tag{4.14}$$

,sırasıyla, ψ_A ve ψ_B yüzeylerinin spacelike dayanak eğrileri, $\alpha_1(u) \neq 0$ ve $\alpha_2(v) \neq 0$ de yüzeylerin spacelike doğrultmanlarıdır.

ψ_A spacelike regle yüzeyinin sabit bir s_0 parametresi için u-parametre eğrisini

$k_A(u) = \psi_A\ (\mathrm{u}, \mathrm{s}_0)$,

ψ_B spacelike regle yüzeyinin sabit bir t_0 parametresi için v-parametre eğrisini

$k_B(v) = \psi_B\ (\mathrm{v}, \mathrm{t}_0)$

ile ifade edelim.

4.13. Teorem

Dual Lorentz birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki farklı spacelike regle yüzey, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu durumda

$$\eta(u,v) = det\{\alpha_1(u), \alpha_2(v), \big(D_A(u) - D_B(v)\big)\} = 0 \qquad (4.15)$$

ise $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

İspat

Teoreminin ispatı benzer şekilde 4.10. Teoreminden yararlanılarak yapılabilir.

4.14. Sonuç

$\mathbb{S}_1^2$ üzerindeki iki farklı eğriye karşılık gelen spacelike regle yüzeyin arakesiti için $\eta(u,v) = 0$ koşuluyla $D_A(u) = D_B(v)$ eşit olduğu zaman taban eğrileri çakışır.

$\mathbb{S}_1^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ spacelike regle yüzeylerin kesişimi için kullanacağımız $\Lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları

$$\Lambda(u,v) = \|\alpha_1(u) \times_L \alpha_2(v)\|_L^2, \qquad (4.16)$$

$$\lambda_1(u,v) = \|\alpha_1(u) \times_L [D_A(u) - D_B(v)]\|_L^2, \tag{4.17}$$

$$\lambda_2(u,v) = \|\alpha_2(v) \times_L [D_A(u) - D_B(v)]\|_L^2 \tag{4.18}$$

şeklinde olsun. Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.15. Teorem

Dual Lorentz birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ iki farklı spacelike regle yüzeylerinin, sırasıyla, parametre eğrileri $k_A(u)$ ve $k_A(v)$ olsun. Bu durumda $k_A(u)$ ve $k_A(v)$ parametre eğrilerinin kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\Lambda(u,v) = \lambda_1(u,v) = \lambda_2(u,v) = 0$$

olmasıdır.

İspat

Teoreminin ispatı benzer şekilde 4.12. Teoreminden yararlanılarak yapılabilir.

Örnek

$\alpha_1(u) = (\cosh u, 0, \sinh u)$ ve $\alpha_1^*(u) = (\sinh u, 0, \cosh u)$, sırasıyla, $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike ve timelike vektörler olsun. $\langle \alpha_1(u), \alpha_1(u) \rangle_L$=1 ve $\langle \alpha_1(u), \alpha_1^*(u) \rangle_L$=0 olduğundan $\bar{\alpha}_1(u) = \alpha_1(u) + \varepsilon \alpha_1^*(u)$ dual eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim küresi üzerindedir.

$\bar{\alpha}_1(u)$ dual eğrisine karşılık gelen spacelike regle yüzey

$$\psi_A(u,s) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u) + s\alpha_1(u)$$

$$= (0,1,0) + s(\cosh u, 0, \sinh u)$$

dır. Bu spacelike regle yüzeyin sırasıyla spacelike dayanak eğrisi ve spacelike doğrultmanı

$D_A(u) = (0,1,0)$ ve $\alpha_1(u) = (\cosh u, 0, \sinh u)$ şelinde hesaplanır.

$\alpha_2(v) = (0, \cosh v, \sinh v)$ ve $\alpha_2^*(v) = (0, \sinh v, \cosh v)$, sırasıyla, $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike ve timelike vektörler olsun. $\langle \alpha_2(v), \alpha_2(v) \rangle_L = 1$ ve $\langle \alpha_2(v), \alpha_2^*(v) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\alpha}_2(v) = \alpha_2(v) + \varepsilon \alpha_2^*(v)$ dual eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim küresi üzerindedir.

$\bar{\alpha}_2(v)$ dual eğrisine karşılık gelen spacelike regle yüzey

$$\psi_B(v,t) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) + t\alpha_2(v)$$

$$= (1,0,0) + t(0, \cosh v, \sinh v)$$

dır. Bu spacelike regle yüzeyin, sırasıyla, spacelike dayanak eğrisi ve spacelike doğrultmanı $D_B(v) = (1,0,0)$ ve $\alpha_2(v) = (0, \cosh v, \sinh v)$ dir.

Şimdi $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim küresi üzerinde aldığımız iki dual eğriye karşılık gelen iki spacelike regle yüzeylerin arakesitini inceleyelim:

$\psi_A\,(\mathrm{u}, \mathrm{s}) = \psi_B(\mathrm{v}, \mathrm{t})$ olsun.

$$(0,1,0) + s(\cosh u, 0, \sinh u) = (1,0,0) + t(0, \cosh v, \sinh v)$$

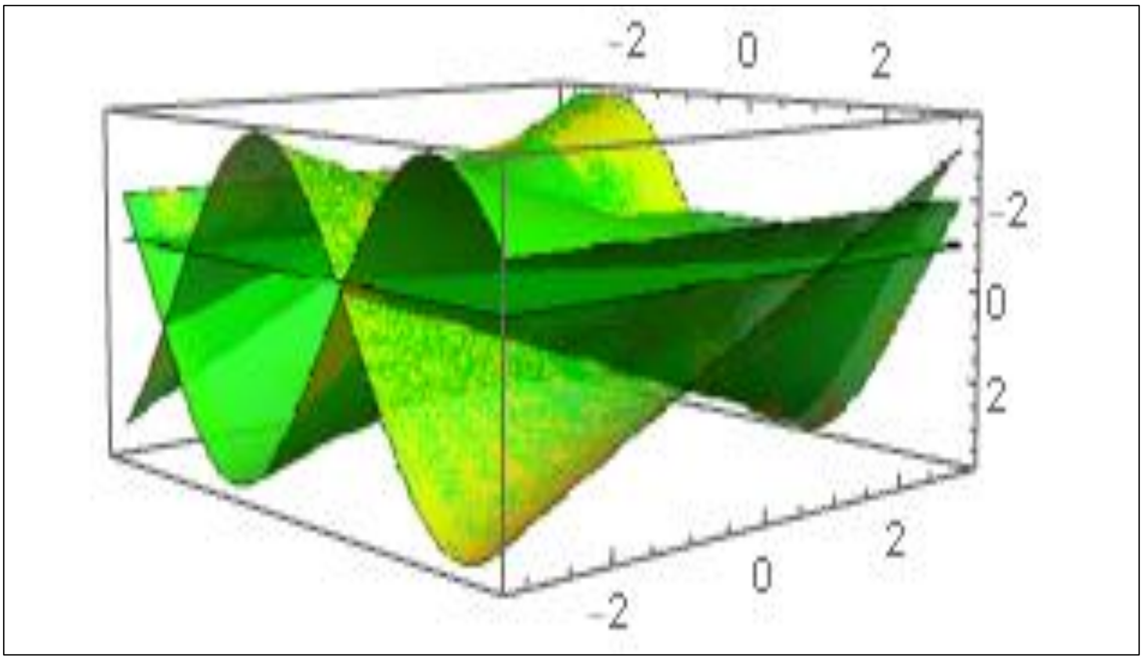
$$(-1,1,0) = -s(\cosh u, 0, \sinh u) + t(0, \cosh v, \sinh v)$$

yazılabilir. Burada $D_A(u) - D_B(v) = (-1,1,0)$ vektörü $\alpha_1(u) = (\cosh u, 0, \sinh u)$ ve $\alpha_2(v) = (0, \cosh v, \sinh v)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilmiş olur. Bu üç vektör lineer bağımlı olduğundan $\eta(u,v) = 0$ olur. Dolayısıyla $\eta(u,v) = 0$ olacağından $\eta(u,v) = -\sinh(u+v)$ olduğundan $\eta(u,v) = 0$ denklemini sağlayan (u,v) ikilileri için $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

Şimdi $\Lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonlarını hesaplıyalım. Bu fonksiyonlar;

$$\Lambda(u,v) = (\sinh u \sinh v)^2 - 1,$$
$$\lambda_1(u,v) = (\sinh u)^2 - 1,$$
$$\lambda_2(u,v) = (\sinh v)^2 - 1$$

şeklindedir. Burada $\sinh u = -1$, $\cosh u = \sqrt{2}$, $\sinh v = 1$, $\cosh v = \sqrt{2}$ alınırsa öncelikle $\eta(u,v) = 0$ şartı sağlanır. Daha sonra $\Lambda(u,v) = \lambda_1(u,v) = \lambda_2(u,v) = 0$ şartı sağlanır. Buradan gerekli işlemler yapılınca $(u,v) = \left(\ln\left|\sqrt{2}-1\right|, \ln\left|\sqrt{2}+1\right|\right)$ elde edilir. Böylece $\eta(u,v) = 0$ denkleminin $(u,v) = \left(\ln\left|\sqrt{2}-1\right|, \ln\left|\sqrt{2}+1\right|\right)$ çözümü için $\Lambda(u,v) = \lambda_1(u,v) = \lambda_2(u,v) = 0$ olacağından $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir. Dolayısıyla ψ_A $(\mathrm{u,s})$ ve $\psi_B(\mathrm{v,t})$ spacelike regle yüzeyleri kesişir.



Şekil 4.2. $\mathbb{S}_1^2$ de iki farklı eğriye karşılık gelen iki spacelike regle yüzeyin arakesiti

4.1.3. $\mathbb{S}_1^2$ Dual Lorentz birim küre üzerindeki iki farklı eğriye karşılık gelen bir timelike ve bir spacelike regle yüzeylerin arakesiti

$\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim kürenin üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğri, sırasıyla, $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 + \varepsilon\alpha_1{}^*$ ve $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 + \varepsilon\alpha_2^*$ olmak üzere E. Study dönüşümü yardımıyla bu eğrilere $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen bir timelike ve bir spacelike regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu timelike ve spacelike regle yüzeyler;

$$\psi_A(u,s) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u) + s\alpha_1(u), \tag{4.19}$$

$$\psi_B(v,t) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) + t\alpha_2(v) \tag{4.20}$$

eşitlikleri ile ifade edilsin. Burada

$$\mathrm{D}_A(u) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u), \tag{4.21}$$

$$\mathrm{D}_B(v) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) \tag{4.22}$$

,sırasıyla, ψ_A timelike ve ψ_B spacelike regle yüzeylerinin timelike ve spacelike dayanak eğrileri, $\alpha_1(u) \neq 0$ ve $\alpha_2(v) \neq 0$ de yüzeylerin spacelike doğrultmanlarıdır.

ψ_A timelike regle yüzeyinin sabit bir s_0 parametresi için u-parametre eğrisini

$$k_A(u) = \psi_A\ (\mathrm{u}, \mathrm{s}_0),$$

ψ_B spacelike regle yüzeyinin sabit bir t_0 parametresi için v-parametre eğrisini

$$k_B(v) = \psi_B\ (\mathrm{v}, \mathrm{t}_0)$$

ile alalım.

4.16. Teorem

Dual Lorentz birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen bir timelike ve bir spacelike regle yüzey, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu durumda

$$\eta(u,v) = det\{\alpha_1(u), \beta_1(v), [D_A(u) - D_B(v)]\} = 0 \tag{4.23}$$

ise $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

İspat

Teoreminin ispatı benzer şekilde 4.10. Teoreminden yararlanılarak yapılabilir

4.17. Sonuç

$\mathbb{S}_1^2$ üzerinde iki farklı eğriye karşılık gelen timelike ve spacelike regle yüzeylerin arakesiti için $\eta(u,v)=0$ koşuluyla $D_A(u)=D_B(v)$ eşit olduğu zaman taban eğrileri çakışır.

$\mathbb{S}_1^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ timelike ve spacelike regle yüzeylerin kesişimi için kullanacağımız $\Lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları

$$\Lambda(u,v)=\|\alpha_1(u)\times_L \alpha_2(v)\|_L^2, \tag{4.24}$$

$$\lambda_1(u,v)=\|\alpha_1(u)\times_L [D_A(u)-D_B(v)]\|_{L,}^2 \tag{4.25}$$

$$\lambda_2(u,v)=\|\alpha_2(v)\times_L [D_A(u)-D_B(v)]\|_L^2 \tag{4.26}$$

şeklinde olsun. Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.18. Teorem

Dual Lorentz birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ bir timelike ve bir spacelike regle yüzeylerinin, sırasıyla, parametre eğrileri $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ olsun. Bu durumda $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrilerinin kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\Lambda(u,v)=\lambda_1(u,v)=\lambda_2(u,v)=0$$

olmasıdır.

İspat

Teoreminin ispatı benzer şekilde 4.12. Teoreminden yararlanılarak yapılabilir.

Örnek

$\alpha_1(u) = (\sin u, \cos u, 0)$, $\alpha_1^*(u) = (\cos u, -\sin u, \sqrt{2})$, $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike ve timelike vektörler olsun. $\langle \alpha_1(u), \alpha_1(u) \rangle_L = 1$ ve $\langle \alpha_1(u), \alpha_1^*(u) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\alpha}_1(u) = \alpha_1(u) + \varepsilon \alpha_1^*(u)$ dual eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim küresi üzerindedir.

$\bar{\alpha}_1(u)$ dual eğrisine karşılık gelen spacelike regle yüzey

$$\psi_A(u, s) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u) + s\alpha_1(u)$$

$$= (\sqrt{2}\cos u, \sqrt{2}\sin u, 1) + s(\sin u, \cos u, 0)$$

dir. Bu spacelike regle yüzeyin sırasıyla spacelike dayanak eğrisi ve spacelike doğrultmanı

$D_A(u) = (\sqrt{2}\cos u, \sqrt{2}\sin u, 1)$ ve $\alpha_1(u) = (\sin u, \cos u, 0)$ olur.

$\alpha_2(v) = (-\cos v, \sin v, 0)$, $\alpha_2^*(v) = (\sin v, \cos v, 0)$ $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike vektörler olsun. $\langle \alpha_2(v), \alpha_2(v) \rangle_L = 1$ ve $\langle \alpha_2(v), \alpha_2^*(v) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\alpha}_2(v) = \alpha_2(v) + \varepsilon \alpha_2^*(v)$ dual eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim küresi üzerindedir.

$\bar{\alpha}_2(v)$ dual eğrisine karşılık gelen timelike regle yüzey

$$\psi_B(v, t) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) + t\alpha_2(v)$$

$$= (0,0,1) + s(-\sqrt{2}\cos v, \sqrt{2}\sin v, 1)$$

dır. Bu timelike regle yüzeyin, sırasıyla, timelike dayanak eğrisi ve spacelike doğrultmanı

$D_B(v) = (0,0,1)$ ve $\alpha_2(v) = (-\cos v, \sin v, 0)$ olarak hesaplanır.

Şimdi $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim küresi üzerinde aldığımız iki dual eğriye karşılık gelen bir spacelike ve bir timelike regle yüzeylerin arakesitini inceleyelim:

$\psi_A\,(\mathrm{u}, \mathrm{s}) = \psi_B\,(\mathrm{v}, \mathrm{t})$ olsun. Bu durumda

$$\left(\sqrt{2}\cos u\,,\sqrt{2}\sin u\,,1\right)+s(\sin u\,,\cos u\,,0)=\ (0{,}0{,}1)+t(-\cos v\,,\sin v\,,0)$$

$$\left(\sqrt{2}\cos u\,,\sqrt{2}\sin u\,,0\right)=-s(\sin u\,,\cos u\,,0)+t(-\cos v\,,\sin v\,,0)$$

olarak düzenlenir. Burada $D_A(u)-D_B(v)$ vektörü $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilmiş olur. Bu üç vektör lineer bağımlı olduğundan $\eta(u,v)=0$ olur. Dolayısıyla $\eta(u,v)=0$ olacağından $\eta(u,v)=0$ denklemini sağlayan (u,v) ikilileri için $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

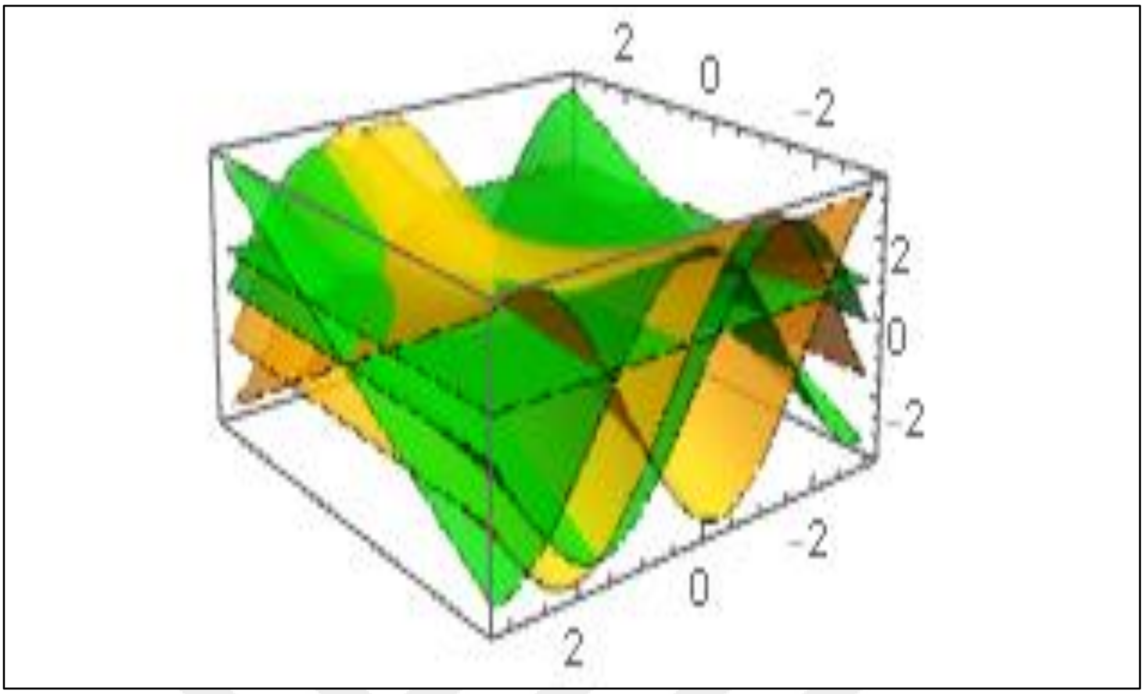
Şimdi $\Lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonlarını hesaplıyalım. Bu fonksiyonlar;

$\Lambda(u,v)=-\cos(u-v)^2,$

$\lambda_1(u,v)=-2(\cos 2u)^2,$

$\lambda_2(u,v)=-2(\sin(u+v))^2$

şeklindedir. $\eta(u,v)=0$ denkleminin $(u,v)=(\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4})$ çözümü için $\Lambda(u,v)=\lambda_1(u,v)=\lambda_2(u,v)=0$ olacağından $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir. Dolayısıyla $\psi_A\,(\mathrm{u,s})$ spacelike ve $\psi_B(\mathrm{v,t})$ timelike regle yüzeyleri kesişir.



Şekil 4.3. $\mathbb{S}_1^2$ de iki farklı eğriye karşılık gelen bir timelike bir spacelike regle yüzeyin arakesiti

4.2. $\mathbb{H}^2$ Hiperbolik Birim Kürenin Üzerindeki İki Farklı Eğriye Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Arakesitleri

Bu bölümde; Hiperbolik birim küre $\mathbb{H}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğriye E. Study dönüşümü yardımıyla $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki ayrı regle yüzeyin arakesit problemleri incelenmiştir.

E. Study dönüşümüne göre; $\mathbb{H}^2$ Hiperbolik birim kürenin noktalarına $\mathbb{R}_1^3$ de yönlü spacelike veya timelike doğrular karşılık gelir. Bu dönüşümden yararlanarak $\mathbb{H}^2$ Hiperbolik birim küre üzerinde aldığımız dual eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de yönlü spacelike veya timelike regle yüzeyler karşılık gelir. Elde edilen regle yüzeylerin arakesit problemleri $\mathbb{R}^3$ de regle yüzeylerin arakesiti için kullanılan teoremler vasıtasıyla incelenmişitir.

4.2.1. $\mathbb{H}^2$ Hiperbolik birim küre üzerindeki iki farklı eğriye karşılık gelen iki timelike regle yüzeyin arakesiti

$\mathbb{H}^2$ Hiperbolik birim kürenin üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğri, sırasıyla, $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 + \varepsilon\alpha_1{}^*$ ve $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 + \varepsilon\alpha_2^*$ olmak üzere E. Study dönüşümü yardımıyla bu eğrilere $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki timelike regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu yüzeyler

$$\psi_A(u,s) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u) + s\alpha_1(u), \tag{4.27}$$

$$\psi_B(v,t) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) + t\alpha_2(v) \tag{4.28}$$

eşitlikleriyle tanımlı olsunlar. Burada

$$D_A(u) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u), \tag{4.29}$$

$$D_B(v) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) \tag{4.30}$$

,sırasıyla, ψ_A ve ψ_B yüzeylerinin spacelike dayanak eğrileri, $\alpha_1(u) \neq 0$ ve $\alpha_2(v) \neq 0$ de yüzeylerin timelike doğrultmanlarıdır.

ψ_A timelike regle yüzeyinin sabit bir s_0 parametresi için u-parametre eğrisini

$k_A(u) = \psi_A\,(\mathrm{u}, \mathrm{s}_0)$,

ψ_B timelike regle yüzeyinin sabit bir t_0 parametresi için v-parametre eğrisini

$k_B(v) = \psi_B\,(\mathrm{v}, \mathrm{t}_0)$

ile gösterelim.

4.19. Teorem

Hiperbolik birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki farklı timelike regle yüzey, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu durumda

$$\eta(u,v) = det\{\alpha_1(u), \alpha_2(v), \left(D_A(u) - D_B(v)\right)\} = 0 \tag{4.31}$$

ise $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

İspat

Dual hiperbolik birim küre üzerindeki $\bar{\alpha}_1(u)$ ve $\bar{\alpha}_2(v)$ dual eğrilerine $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen timelike regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ olsun. Bu timelike regle yüzeylerin kesiştiğini kabul edelim. O halde bu iki timelike regle yüzey aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi_A\,(\mathrm{u},\mathrm{s}) = \psi_B(\mathrm{v},\mathrm{t}). \tag{4.32}$$

Burada Eş. (4.27) ve Eş. (4.28) yerlerine yazılırsa

$$D_A(u) - D_B(v) = -s\alpha_1(u) + t\alpha_2(v)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $D_A(u) - D_B(v)$ vektörü $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ timelike doğrultman vektörlerinin lineer birleşimi olur. Böylece $D_A(u) - D_B(v)$, $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ timelike vektörleri lineer bağımlıdır. Sonuç olarak,

$$det\{[D_A(u) - D_B(v)], \alpha_1(u), \alpha_2(v)\} = 0$$

olur. Dolayısıyla Eş. (4.31) den $\eta(u,v) = 0$ dır. Sonuç olarak, $\eta(u,v) = 0$ olduğundan $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

4.20. Sonuç

$\mathbb{H}^2$ üzerinde iki farklı eğriye karşılık gelen iki timelike regle yüzeyin arakesiti için $\eta(u,v) = 0$ koşuluyla $D_A(u) = D_B(v)$ eşit olduğu zaman taban eğrileri çakışır.

$\mathbb{H}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ iki timelike regle yüzeylerin kesişimi için kullanacağımız $\Lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları

$$\Lambda(u,v) = \|\alpha_1(u) \times_L \alpha_2(v)\|_L^2, \tag{4.33}$$

$$\lambda_1(u,v) = \|\alpha_1(u) \times_L [D_A(u) - D_B(v)]\|_L^2, \tag{4.34}$$

$$\lambda_2(u,v) = \|\alpha_2(v) \times_L [D_A(u) - D_B(v)]\|_L^2 \tag{4.35}$$

şeklinde olsun. Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.21. Teorem

Hiperbolik birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}^3_1$ de karşılık gelen $\psi_A(u,s)$ ve $\psi_B(v,t)$ iki farklı timelike regle yüzeylerinin, sırasıyla, parametre eğrileri $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ olsun. Bu durumda $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrilerinin kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\Lambda(u,v) = \lambda_1(u,v) = \lambda_2(u,v) = 0$$

olmasıdır.

İspat

$\eta(u,v) = 0$ ın her çözümü $D_A(u) - D_B(v)$, $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ vektörleri için lineer bağımlı olduğundan

$$m_1\alpha_1(u) + m_2\alpha_2(v) + m_3[D_A(u) - D_B(v)] = 0 \tag{4.36}$$

eşitliği sıfırdan farklı her bir m_1, m_2, m_3 skalerleri için sağlanır. $m_3 \neq 0$ olduğunda Eş. (4.32) sağlanır ve $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri çakışır. $m_3 = 0$ alınırsa $m_1 \neq 0$ ve $m_2 \neq 0$ için Eş. (4.36) kullanılarak

$$\alpha_1(u) = -\frac{m_1}{m_2}\alpha_2(v)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ timelike vektörlerinin paralel olduğu görülür. Buradan Eş. (4.33) den $\Lambda(u,v) = 0$ fonksiyonun çözüm kümesidir. Dolayısıyla $\Lambda(u,v) = 0$ ‘ın çözüm kümesi $\eta(u,v) = 0$ ‘ın çözüm kümesinde kapsanır. $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrilerinin çakışması için gerekli ve yeterli şart birbirlerine paralel olmaları gerekir. Yani $\Lambda(u,v) = 0$ olmalı ayrıca $[D_A(u) - D_B(v)]$ vektörünün sırasıyla $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ timelike vektörlerine paralel olması gerekir. $\alpha_1(u)$ timelike vektörünün $[D_A(u) - D_B(v)]$ vektörüne paralel olması durumu

$\lambda_1(u,v) = \|\alpha_1(u) \times_L [D_A(u) - D_B(v)]\|_L^2 = 0,$

$\alpha_2(v)$ timelike vektörünün $[D_A(u) - D_B(v)]$ vektörüne paralel olması durumu

$\lambda_2(u,v) = \|\alpha_2(v) \times_L [D_A(u) - D_B(v)]\|_L^2 = 0$

eşitliği ile yazılır. Böylece $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri çakışır.

Örnek

$\alpha_1(u) = (\sin u, \cos u, \sqrt{2})$ ve $\alpha_1^*(u) = (\cos u, -\sin u, 0)$ sırasıyla $\mathbb{R}_1^3$ de timelike ve spacelike vektörler olsun. $\langle \alpha_1(u), \alpha_1(u) \rangle_L = -1$ ve $\langle \alpha_1(u), \alpha_1^*(u) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\alpha}_1(u) = \alpha_1(u) + \varepsilon \alpha_1^*(u)$ dual eğrisi $\mathbb{H}^2$ dual Hiperbolik birim küresi üzerindedir.

$\bar{\alpha}_1(u)$ dual eğrisine karşılık gelen timelike regle yüzey

$$\psi_A(u,s) = \alpha_1(u) \times_L \alpha_1^*(u) + s\alpha_1(u)$$
$$= (\sqrt{2}\sin u, -\sqrt{2}\cos u, 1) + s(\sin u, \cos u, \sqrt{2})$$

dir. Bu timelike regle yüzeyin sırasıyla spacelike dayanak eğrisi ve timelike doğrultmanı

$D_A(u) = (\sqrt{2}\sin u, -\sqrt{2}\cos u, 1)$ ve $\alpha_1(u) = (\sqrt{2}\sin u, \sqrt{2}\cos u, \sqrt{2})$ dır.

$\alpha_2(v) = (-\cos v, \sin v, \sqrt{2})$ ve $\alpha_2^*(v) = (\sin v, \cos v, 0)$ sırasıyla $\mathbb{R}_1^3$ de timelike ve spacelike vektörler olsun. $\langle \alpha_2(v), \alpha_2(v) \rangle_L = -1$ ve $\langle \alpha_2(v), \alpha_2^*(v) \rangle_L = 0$ olduğundan $\bar{\alpha}_2(v) = \alpha_2(v) + \varepsilon \alpha_2^*(v)$ dual eğrisi $\mathbb{H}^2$ dual Hiperbolik birim küresi üzerindedir.

$\bar{\alpha}_2(v)$ dual eğrisine karşılık gelen timelike regle yüzey

$$\psi_B(v,t) = \alpha_2(v) \times_L \alpha_2^*(v) + t\alpha_2(v)$$
$$= (-\sqrt{2}\cos v, -\sqrt{2}\sin v, \sqrt{2}) + s(-\cos v, \sin v, \sqrt{2})$$

dir. Bu timelike regle yüzeyin sırasıyla spacelike dayanak eğrisi ve timelike doğrultmanı

$D_B(v) = (-\sqrt{2}\cos v\,, -\sqrt{2}\sin v\,, \sqrt{2})$ ve $\alpha_2(v) = (-\cos v\,, \sin v\,, \sqrt{2})$ olur.

Şimdi $\mathbb{H}^2$ dual Hiperbolik birim küresi üzerinde aldığımız iki dual eğriye karşılık gelen iki timelike regle yüzeylerin arakesitini inceleyelim:

$\psi_A\,(\mathrm{u},\mathrm{s}) = \psi_B(\mathrm{v},\mathrm{t})$ olsun. Buradan

$\left(\sqrt{2}\sin u\,, -\sqrt{2}\cos u\,, 1\right) + s\left(\sin u\,, \cos u\,, \sqrt{2}\right) = (-\sqrt{2}\cos v\,, -\sqrt{2}\sin v\,, 1) +$
$t(-\cos v\,, \sin v\,, \sqrt{2})$

$\sqrt{2}(\mathrm{sinu}\,u + \cos v\,, \sin v - \cos u\,, 0) = -s\left(\sin u\,, \cos u\,, \sqrt{2}\right) + t(-\cos v\,, \sin v\,, \sqrt{2})$

yazılabilir. Burada $D_A(u) - D_B(v)$ vektörü $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(v)$ timelike vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilmiş olur. Bu üç vektör lineer bağımlı olduğundan $\eta(u, v) = 0$ olur. $\eta(u, v) = 4\cos v\,(\sin v - \cos u)$ olup $\eta(u, v) = 0$ denklemini sağlayan (u, v) ikilileri için $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir.

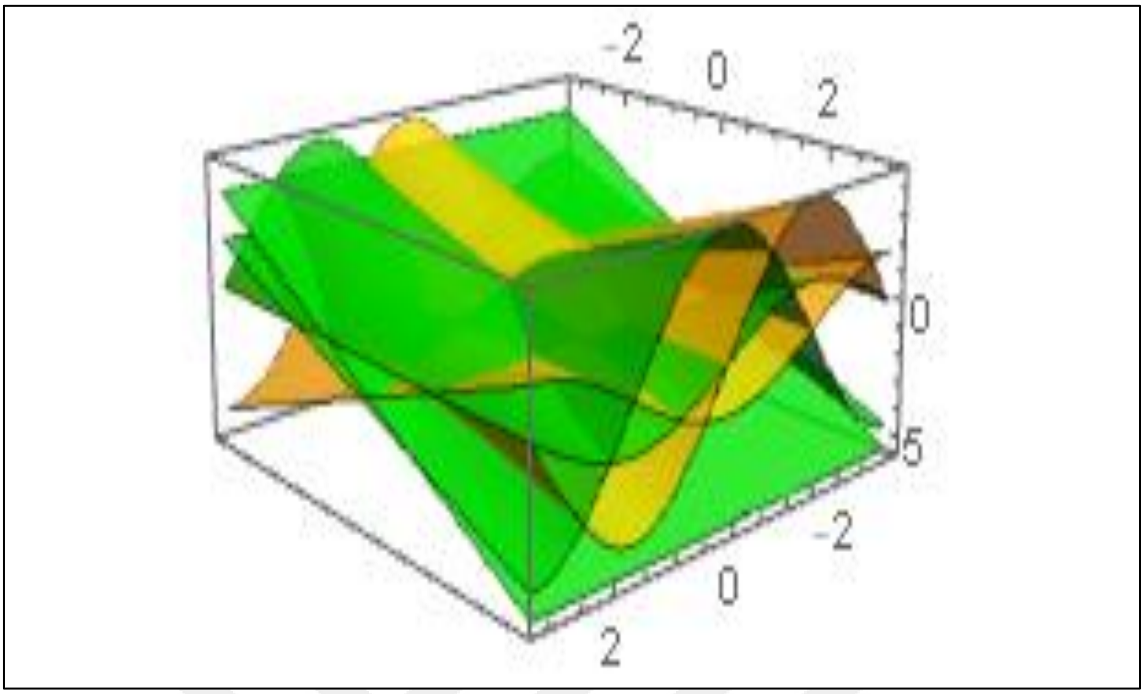
Şimdi $\Lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, $\lambda_2(u, v)$ iki değişkenli fonksiyonlarını hesaplıyalım. Bu fonksiyonlar;

$\Lambda(u, v) = [\sin(\mathrm{u} - \mathrm{v}) + 1][\,\sin(\mathrm{u} - \mathrm{v}) + 3\,]$,

$\lambda_1(u, v) = -2\{(\cos(u + v) + \sin 2u)^2 - 4(\sin(u - v) + 1)\}$,

$\lambda_2(u, v) = -2\{(\cos(u + v) - \sin 2v)^2 - 4(\sin(u - v) + 1)\}$

şeklindedir. $\eta(u, v) = 0$ denkleminin $(u, v) = (0, \frac{\pi}{2})$ çözümü için $\Lambda(u, v) = \lambda_1(u, v) = \lambda_2(u, v) = 0$ olacağından $k_A(u)$ ve $k_B(v)$ parametre eğrileri kesişir. Dolayısıyla $\psi_A(\mathrm{u},\mathrm{s})$ ve $\psi_B(\mathrm{v},\mathrm{t})$ timelike regle yüzeyleri kesişir.



Şekil 4.4. $\mathbb{H}^2$ de iki farklı eğriye karşılık gelen iki timelike regle yüzeyin arakesiti

5. BİRİM DUAL KÜRE ÜZERİNDEKİ İKİ FARKLI EĞRİNİN KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİNE KARŞILIK GELEN REGLE YÜZEYLERİN ARAKESİTİ

Bu bölümde; ilk olarak, birim dual küre üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğrinin tanjant küresel gösterge eğrilerine E. Study dönüşümü yardımıyla karşılık gelen iki ayrı regle yüzeylerin arakesit problemleri incelenmiştir. İkinci olarak, birim dual küre üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğrinin aslinormal küresel gösterge eğrilerine E. Study dönüşümü yardımıyla karşılık gelen iki ayrı regle yüzeylerin arakesit problemleri incelenmiştir. Üçüncü olarak, birim dual küre üzerinde aldığımız iki ayrı dual eğrinin binormal küresel gösterge eğrilerine E. Study dönüşümü yardımıyla karşılık gelen iki ayrı regle yüzeylerin arakesit problemleri incelenmiştir. Son olarak, birim dual küre üzerinde aldığımız iki ayrı eğrinin dual Pol küresel gösterge eğrilerine E. Study dönüşümü yardımıyla karşılık gelen iki ayrı regle yüzeylerin arakesit problemleri incelenmiştir.

Burada elde edilen regle yüzeylerin arakesit problemleri $\mathbb{R}^3$ de regle yüzeylerin arakesiti için kullanılan teoremler vasıtasıyla incelenmişitir.

5.1. Birim Dual Küre Üzerindeki İki Farklı Eğrinin Tanjant Küresel Gösterge Eğrilerine Karşılık Gelen Regle Yüzeyin Arakesiti

Birim dual küre $D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı eğrinin tanjant küresel gösterge eğrileri, sırasıyla, $\bar{T}_1 = T_1 + \varepsilon T_1^*$ ve $\bar{T}_2 = T_2 + \varepsilon T_2^*$ olmak üzere E. Study dönüşümü yardımıyla bu eğrilere $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_{\bar{T}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{T}_2}(v,t)$ yüzeyleri olsunlar. Bu regle yüzeyler

$$\psi_{\bar{T}_1}(u,s) = T_1(u) \times T_1^*(u) + sT_1(u), \tag{5.1}$$

$$\psi_{\bar{T}_2}(v,t) = T_2(v) \times T_2^*(v) + sT_2(v) \tag{5.2}$$

eşitlikleriyle tanımlı olsunlar. Burada

$$C_{\bar{T}_1}(u) = T_1(u) \times T_1^*(u), \tag{5.3}$$

$$C_{\bar{T}_2}(v) = T_2(v) \times T_2^*(v) \tag{5.4}$$

sırasıyla, $\psi_{\bar{T}_1}$ ve $\psi_{\bar{T}_2}$ regle yüzeylerinin dayanak eğrileridir.

$\psi_{\bar{T}_1}$ yüzeyinin sabit bir s_0 parametresi için u- parametre eğrisini

$l_{\bar{T}_1}(u) = \psi_{\bar{T}_1}(\mathrm{u}, \mathrm{s}_0)$,

$\psi_{\bar{T}_2}$ yüzeyinin sabit bir t_0 parametresi için v- parametre eğrisini

$l_{\bar{T}_2}(v) = \psi_{\bar{T}_2}(\mathrm{v}, \mathrm{t}_0)$

ile ifade edelim.

5.1. Teorem

Birim dual küre üzerindeki iki farklı eğrinin tanjant küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki farklı regle yüzey, sırasıyla, $\psi_{\bar{T}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{T}_2}(v,t)$ olsun. Bu durumda

$$\mu_{\bar{T}}(u,v) = det\left\{T_1(u), T_2(v), \left(C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)\right)\right\} = 0 \tag{5.5}$$

ise $l_{\bar{T}_1}(u)$ ve $l_{\bar{T}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir.

İspat

Dual birim küre üzerindeki iki farklı eğrinin tanjant küresel gösterge eğrileri $\bar{T}_1$ ve $\bar{T}_2$ ye karşılık gelen regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_{\bar{T}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{T}_2}(v,t)$ olsun. Bu regle yüzeylerin kesiştiğini kabul edelim. O halde iki regle yüzey aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\psi_{\bar{T}_1}(u,s) = \psi_{\bar{T}_2}(v,t). \tag{5.6}$$

Burada Eş. (5.1) ve Eş. (5.2) yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v) = -sT_1(u) + tT_2(v)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)$ vektörü $T_1(u)$ ve $T_2(v)$ tanjant vektörlerinin lineer birleşimi olur. Böylece $C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)$, $T_1(u)$ ve $T_2(v)$ vektörleri lineer bağımlıdır. Sonuç olarak,

$$det\{[C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)], T_1(u), T_2(v)\} = 0$$

olur. Dolayısıyla Eş. (5.5) den $\mu_{\bar{T}}(u,v) = 0$ dır. Sonuç olarak, $\mu_{\bar{T}}(u,v) = 0$ olduğundan $l_{\bar{T}_1}(u)$ ve $l_{\bar{T}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir.

5.2. Sonuç

$\mu_{\bar{T}}(u,v) = 0$ koşuluyla $C_{\bar{T}_1}(u) = C_{\bar{T}_2}(v)$ eşit olduğu zaman taban eğrileri çakışır.

$D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı eğrinin tanjant küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\psi_{\bar{T}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{T}_2}(v,t)$ regle yüzeylerin kesişimi için kullanacağımız $\Delta_{\bar{T}}(u,v)$, $\delta^1_{\bar{T}}(u,v)$, $\delta^2_{\bar{T}}(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları;

$$\Delta_{\bar{T}}(u,v) = \|T_1(u) \times T_2(v)\|^2, \tag{5.7}$$

$$\delta^1_{\bar{T}}(u,v) = \left\|T_1(u) \times [C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)]\right\|^2, \tag{5.8}$$

$$\delta^2_{\bar{T}}(u,v) = \left\|T_2(v) \times [C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)]\right\|^2. \tag{5.9}$$

şeklinde olsun. Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.3. Teorem

Birim dual küre üzerindeki iki farklı eğrinin tanjant küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\psi_{\bar{T}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{T}_2}(v,t)$ regle yüzeylerin parametre eğrileri, sırasıyla, $l_{\bar{T}_1}(u)$ ve $l_{\bar{T}_2}(v)$ olsun. Bu durumda $l_{\bar{T}_1}(u)$ ve $l_{\bar{T}_2}(v)$ parametre eğrilerinin kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\Delta_{\bar{T}}(u,v) = \delta^1_{\bar{T}}(u,v) = \delta^2_{\bar{T}}(u,v) = 0$$

olmasıdır.

İspat

$\mu_{\bar{T}}(u,v) = 0$ ‘ ın her çözümü $C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v), T_1(u)$ ve $T_2(v)$ vektörleri için lineer bağımlı olduğundan

$$m_1 T_1(u) + m_2 T_2(v) + m_3\left[C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)\right] = 0 \tag{5.10}$$

eşitliği sıfırdan farklı her bir m_1, m_2, m_3 skalerleri için sağlanır. $m_3 \neq 0$ olduğunda Eş. (5.6) sağlanır ve $l_{\bar{T}_1}(u)$ ve $l_{\bar{T}_2}(v)$ parametre eğrileri çakışır. $m_3 = 0$ alınırsa $m_1 \neq 0$ ve $m_2 \neq 0$ için Eş. (5.10) kullanılarak

$$T_1(u) = -\frac{m_1}{m_2} T_2(v)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $T_1(u)$ ve $T_2(v)$ tanjant vektörlerinin paralel olduğu görülür. Buradan Eş. (5.7) den $\Delta_{\bar{T}}(u,v)$ fonksiyonun çözüm kümesidir. Dolayısıyla $\Delta_{\bar{T}}(u,v)$‘ın çözüm kümesi $\mu_{\bar{T}}(u,v) = 0$ ‘ın çözüm kümesinde kapsanır.$l_{\bar{T}_1}(u)$ ve $l_{\bar{T}_2}(v)$ parametre eğrilerinin çakışması için gerekli ve yeterli şart birbirlerine paralel olmaları gerekir. Yani $\Delta_{\bar{T}}(u,v) = 0$ olmalı ayrıca ve $[C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)]$ vektörünün, sırasıyla, $T_1(u)$ ve $T_2(v)$ vektörlerine paralel olması gerekir. $T_1(u)$ tanjant vektörünün $[C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)]$ vektörüne paralel olması durumu

$$\delta_{\bar{T}}^1(u,v) = \left\|T_1(u) \times \left[C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)\right]\right\|^2 = 0,$$

$T_2(v)$ tanjant vektörünün $[C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)]$ vektörüne paralel olması durumu

$$\delta_{\bar{T}}^2(u,v) = \left\|T_2(u) \times \left[C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)\right]\right\|^2 = 0$$

eşitliği yazılır. Böylece $l_{\bar{T}_1}(u)$ ve $l_{\bar{T}_2}(v)$ parametre eğrileri çakışır.

5.2. Birim Dual Küre Üzerindeki İki Farklı Eğrinin Aslinormal Küresel Gösterge Eğrilerine Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Arakesiti

Birim dual küre $D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı eğrinin aslinormal küresel gösterge eğrileri, sırasıyla, $\overline{N}_1 = N_1 + \varepsilon N_1^*$ ve $\overline{N}_2 = N_2 + \varepsilon N_2^*$ olmak üzere E. Study dönüşümü yardımıyla bu eğrilere $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_{\overline{N}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\overline{N}_2}(v,t)$ yüzeyleri olsunlar. Bu regle yüzeyler

$$\psi_{\overline{N}_1}(u,s) = N_1(u) \times N_1^*(u) + sN_1(u), \tag{5.11}$$

$$\psi_{\overline{N}_2}(v,t) = N_2(v) \times N_2^*(v) + sN_2(v) \tag{5.12}$$

eşitlikleriyle tanımlı olsunlar. Burada

$$C_{\overline{N}_1}(u) = N_1(u) \times N_1^*(u), \tag{5.13}$$

$$C_{\overline{N}_2}(v) = N_2(v) \times N_2^*(v) \tag{5.14}$$

,sırasıyla, $\psi_{\overline{N}_1}$ ve $\psi_{\overline{N}_2}$ regle yüzeylerinin dayanak eğrileridir.

$\psi_{\overline{N}_1}$ yüzeyinin sabit bir s_0 parametresi için u- parametre eğrisini

$$l_{\overline{N}_1}(u) = \psi_{\overline{N}_1}(\mathrm{u}, \mathrm{s}_0),$$

$\psi_{\overline{N}_2}$ yüzeyinin sabit bir t_0 parametresi için v- parametre eğrisini

$$l_{\overline{N}_2}(v) = \psi_{\overline{N}_2}(\mathrm{v}, \mathrm{t}_0)$$

ile gösterelim.

5.4. Teorem

Birim dual küre üzerindeki iki farklı eğrinin aslinormal küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki farklı regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_{\overline{N}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\overline{N}_2}(v,t)$ olsun. Bu durumda

$$\mu_{\bar{N}}(u,v) = det\left\{N_1(u), N_2(v), \left(C_{\bar{N}_1}(u) - C_{\bar{N}_2}(v)\right)\right\} = 0 \tag{5.15}$$

ise $l_{\bar{N}_1}(u)$ ve $l_{\bar{N}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir.

İspat

Teoreminin ispatı benzer şekilde 5.1. Teoreminden yararlanılarak yapılabilir.

5.5. Sonuç

$\mu_{\bar{N}}(u,v) = 0$ koşuluyla $C_{\bar{N}_1}(u) = C_{\bar{N}_2}(v)$ eşit olduğu zaman taban eğrileri çakışır.

$D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı eğrinin aslinormal küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\psi_{\bar{N}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{N}_2}(v,t)$ regle yüzeylerinin kesişimi için kullanacağımız $\Delta_{\bar{N}}(u,v)$, $\delta^1_{\bar{N}}(u,v)$, $\delta^2_{\bar{N}}(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları;

$$\Delta_{\bar{N}}(u,v) = \|N_1(u) \times N_2(v)\|^2, \tag{5.16}$$

$$\delta^1_{\bar{N}}(u,v) = \left\|N_1(u) \times \left[C_{\bar{N}_1}(u) - C_{\bar{N}_2}(v)\right]\right\|^2, \tag{5.17}$$

$$\delta^2_{\bar{N}}(u,v) = \left\|N_2(v) \times \left[C_{\bar{N}_1}(u) - C_{\bar{N}_2}(v)\right]\right\|^2 \tag{5.18}$$

şeklinde olsun. Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.6. Teorem

Birim dual küre üzerindeki iki farklı eğrinin aslinormal küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\psi_{\bar{N}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{N}_2}(v,t)$ regle yüzeylerin parametre eğrileri, sırasıyla, $l_{\bar{N}_1}(u)$ ve $l_{\bar{N}_2}(v)$ olsun. Bu durumda $l_{\bar{N}_1}(u)$ ve $l_{\bar{N}_2}(v)$ parametre eğrilerinin kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\Delta_{\bar{N}}(u,v) = \delta^1_{\bar{N}}(u,v) = \delta^2_{\bar{N}}(u,v) = 0$$

olmasıdır.

İspat

Teoreminin ispatı benzer şekilde 5.3. Teoreminden yararlanılarak yapılabilir.

5.3. Birim Dual Küre Üzerindeki İki Farklı Eğrinin Binormal Küresel Gösterge Eğrilere Karşılık Gelen Regle Yüzeyin Arakesiti

Birim dual küre $D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı eğrinin binormal küresel gösterge eğrileri, sırasıyla, $\bar{B}_1 = B_1 + \varepsilon B_1^*$ ve $\bar{B}_2 = B_2 + \varepsilon B_2^*$ olmak üzere E. Study dönüşümü yardımıyla bu eğrilere $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_{\bar{B}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{B}_2}(v,t)$ yüzeyleri olsunlar. Bu regle yüzeyler

$$\psi_{\bar{B}_1}(u,s) = B_1(u) \times B_1^*(u) + sB_1(u), \tag{5.19}$$

$$\psi_{\bar{B}_2}(v,t) = B_2(v) \times B_2^*(v) + sB_2(v) \tag{5.20}$$

olsun. Burada

$$C_{\bar{B}_1}(u) = B_1(u) \times B_1^*(u), \tag{5.21}$$

$$C_{\bar{B}_2}(v) = B_2(v) \times B_2^*(v) \tag{5.22}$$

,sırasıyla, $\psi_{\bar{B}_1}$ ve $\psi_{\bar{B}_2}$ regle yüzeylerinin dayanak eğrileridir.

$\psi_{\bar{B}_1}$ yüzeyinin sabit bir s_0 parametresi için u- parametre eğrisini

$$l_{\bar{B}_1}(u) = \psi_{\bar{B}_1}(\mathrm{u}, \mathrm{s}_0),$$

$\psi_{\bar{B}_2}$ yüzeyinin sabit bir t_0 parametresi için v- parametre eğrisini

$$l_{\bar{B}_2}(v) = \psi_{\bar{B}_2}(\mathrm{v}, \mathrm{t}_0)$$

ile alalım.

5.7. Teorem

Birim dual küre üzerindeki iki farklı eğrinin binormal küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki farklı regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_{B_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{B}_2}(v,t)$ olsun. Bu durumda

$$\mu_{\bar{B}}(u,v) = det\left\{B_1(u), B_2(v), \left(C_{\bar{B}_1}(u) - C_{\bar{B}_2}(v)\right)\right\} = 0 \tag{5.23}$$

ise $l_{\bar{B}_1}(u)$ ve $l_{\bar{B}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir.

İspat

Teoreminin ispatı benzer şekilde 5.1. Teoreminden yararlanılarak yapılabilir.

5.8. Sonuç

$\mu_{\bar{B}}(u,v) = 0$ koşuluyla $C_{\bar{B}_1}(u) = C_{\bar{B}_2}(v)$ eşit olduğu zaman taban eğrileri çakışır.

$D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı eğrinin binormal küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\psi_{\bar{B}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{B}_2}(v,t)$ regle yüzeylerinin kesişimi için kullanacağımız $\Delta_{\bar{B}}(u,v)$, $\delta^1_{\bar{B}}(u,v)$, $\delta^2_{\bar{B}}(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları;

$$\Delta_{\bar{B}}(u,v) = \|B_1(u) \times B_2(v)\|^2, \tag{5.24}$$

$$\delta^1_{\bar{B}}(u,v) = \left\|B_1(u) \times \left[C_{\bar{B}_1}(u) - C_{\bar{B}_2}(v)\right]\right\|^2, \tag{5.25}$$

$$\delta^2_{\bar{B}}(u,v) = \left\|B_2(v) \times \left[C_{\bar{B}_1}(u) - C_{\bar{B}_2}(v)\right]\right\|^2 \tag{5.26}$$

şeklinde olsun.

5.9. Teorem

Birim dual küre üzerindeki iki farklı eğrinin binormal küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\psi_{\bar{B}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{B}_2}(v,t)$ regle yüzeylerin parametre eğrileri, sırasıyla, $l_{\bar{B}_1}(u)$

ve $l_{\bar{B}_2}(v)$ olsun. Bu durumda $l_{\bar{B}_1}(u)$ ve $l_{\bar{B}_2}(v)$ parametre eğrilerinin kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\Delta_{\bar{B}}(u,v) = \delta_{\bar{B}}^1(u,v) = \delta_{\bar{B}}^2(u,v) = 0$$

olmasıdır.

İspat

Teoreminin ispatı benzer şekilde 5.3. Teoreminden yararlanılarak yapılabilir.

5.4. Birim Dual Küre Üzerindeki İki Farklı Eğrinin Pol Küresel Gösterge Eğrilere Karşılık Gelen Regle Yüzeyin Arakesiti

Birim dual küre $D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı eğrinin Pol küresel gösterge eğrileri, sırasıyla, $\bar{C}_1 = C_1 + \varepsilon C_1^*$ ve $\bar{C}_2 = C_2 + \varepsilon C_2^*$ olmak üzere E. Study dönüşümü yardımıyla bu eğrilere $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_{\bar{C}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{C}_2}(v,t)$ yüzeyleri olsunlar. Bu regle yüzeyler

$$\psi_{\bar{C}_1}(u,s) = C_1(u) \times C_1^*(u) + sC_1(u), \tag{5.27}$$

$$\psi_{\bar{C}_2}(v,t) = C_2(v) \times C_2^*(v) + sC_2(v) \tag{5.28}$$

eşitlikleriyle tanımlı olsunlar. Burada

$$C_{\bar{C}_1}(u) = C_1(u) \times C_1^*(u), \tag{5.29}$$

$$C_{\bar{C}_2}(v) = C_2(v) \times C_2^*(v) \tag{5.30}$$

,sırasıyla, $\psi_{\bar{C}_1}$ ve $\psi_{\bar{C}_2}$ regle yüzeylerinin dayanak eğrileridir.
$\psi_{\bar{C}_1}$ yüzeyinin sabit bir s_0 parametresi için u- parametre eğrisini

$$l_{\bar{C}_1}(u) = \psi_{\bar{C}_1}(\mathrm{u}, \mathrm{s}_0),$$

$\psi_{\bar{C}_2}$ yüzeyinin sabit bir t_0 parametresi için v- parametre eğrisini

$l_{\bar{C}_2}(v) = \psi_{\bar{C}_2}(\mathrm{v}, \mathrm{t}_0)$

ile gösterelim.

5.10. Teorem

Birim dual küre üzerindeki iki farklı eğrinin Pol küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen iki farklı regle yüzeyler, sırasıyla, $\psi_{C_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{C}_2}(v,t)$ olsun. Bu durumda

$$\mu_{\bar{C}}(u,v) = det\left\{C_1(u), C_2(v), \left(C_{\bar{C}_1}(u) - C_{\bar{C}_2}(v)\right)\right\} = 0 \qquad (5.31)$$

ise $l_{\bar{C}_1}(u)$ ve $l_{\bar{C}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir.

İspat

Teoreminin ispatı benzer şekilde 5.1. Teoreminden yararlanılarak yapılabilir.

5.11. Sonuç

$\mu_{\bar{C}}(u,v) = 0$ koşuluyla $C_{\bar{C}_1}(u) = C_{\bar{C}_2}(v)$ eşit olduğu zaman taban eğrileri çakışır.

$D\mathbb{S}^2$ üzerinde aldığımız iki ayrı eğrinin Pol küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\psi_{\bar{C}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{C}_2}(v,t)$ regle yüzeylerinin kesişimi için kullanacağımız $\Delta_{\bar{C}}(u,v)$, $\delta^1_{\bar{C}}(u,v)$, $\delta^2_{\bar{C}}(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları;

$$\Delta_{\bar{C}}(u,v) = \|C_1(u) \times C_2(v)\|^2, \qquad (5.32)$$

$$\delta^1_{\bar{C}}(u,v) = \left\|C_1(u) \times \left[C_{\bar{C}_1}(u) - C_{\bar{C}_2}(v)\right]\right\|^2, \qquad (5.33)$$

$$\delta^2_{\bar{C}}(u,v) = \left\|C_2(v) \times \left[C_{\bar{C}_1}(u) - C_{\bar{C}_2}(v)\right]\right\|.^2 \qquad (5.34)$$

şeklinde olsun. Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.12. Teorem

Birim dual küre üzerindeki iki farklı eğrinin Pol küresel gösterge eğrilerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\psi_{\bar{C}_1}(u,s)$ ve $\psi_{\bar{C}_2}(v,t)$ regle yüzeylerin parametre eğrileri, sırasıyla, $l_{\bar{C}_1}(u)$ ve $l_{\bar{C}_2}(v)$ olsun. Bu durumda $l_{\bar{C}_1}(u)$ ve $l_{\bar{C}_2}(v)$ parametre eğrilerinin kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\Delta_{\bar{C}}(u,v) = \delta_{\bar{C}}^1(u,v) = \delta_{\bar{C}}^2(u,v) = 0$$

olmasıdır.

İspat

Teoreminin ispatı benzer şekilde 5.3. Teoreminden yararlanılarak yapılabilir.

Örnek

Birim dual küre üzerinde birim hızlı $\bar{\alpha}_1(u) = (\cos u\,, \sin u\,, 0) + \varepsilon(-\sin u\,, \cos u\,, u^4)$ ve $\bar{\alpha}_2(v) = (\sin v\,, \cos v\,, 0) + \varepsilon(-\cos v, \sin v, v^4)$ eğrilerini alalım.

İlk olarak bu eğrilerin dual tanjant küresel gösterge eğrilerini hesaplayalım. Daha sonra dual tanjant küresel gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeyleri ifade edelim. Son olarak bu regle yüzeylerin arakesitlerini belirtelim.

$\bar{\alpha}_1$ dual eğrisinin dual tanjant küresel gösterge eğrisi:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= \dot{\bar{\alpha}}_1 \\ &= T_1 + \varepsilon T_1^* \\ &= (-\sin u\,, \cos u, 0) + \varepsilon(-\cos u, -\sin u, 4u^3) \end{aligned}$$

dir. Burada $T_1(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$ ve $T_1^*(u) = (-\cos u, -\sin u, 4u^3)$ $\bar{\alpha}_1$ dual tanjant küresel gösterge eğrisinin reel ve dual bileşenleridir.

$\bar{\alpha}_2$ dual eğrisinin dual tanjant küresel gösterge eğrisi:

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 &= \dot{\bar{\alpha}}_2 \\ &= T_2 + \varepsilon T_2^* \\ &= (\cos v, -\sin v, 0) + \varepsilon(\sin v, \cos v, 4v^3) \end{aligned}$$

dir. Burada $T_2(v) = (\cos v, -\sin v, 0)$ ve $T_2^*(v) = (\sin v, \cos v, 4v^3)$ $\bar{\alpha}_2$ dual tanjant küresel gösterge eğrisinin reel ve dual bileşenleridir.

$\bar{T}_1(u)$ dual tanjant küresel gösterge eğrisine karşılık gelen regle yüzey

$$\psi_{\bar{T}_1}(u,s) = (4u^3 \cos u, 4u^3 \sin u, 1) + s(-\sin u, \cos u, 0)$$

dır. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi $C_{\bar{T}_1}(u) = (4u^3 \cos u, 4u^3 \sin u, 1)$ dir.

$\bar{T}_2(v)$ dual tanjant küresel gösterge eğrisine karşılık gelen regle yüzey

$$\psi_{\bar{T}_2}(v,t) = (-4v^3 \sin v, -4v^3 \cos v, 1) + t(\cos v, -\sin v, 0)$$

dır. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi $C_{\bar{T}_2}(v) = (-4v^3 \sin v, -4v^3 \cos v, 1)$ dir.

Şimdi birim dual küre yüzeyi üzerinde aldığımız iki dual tanjant küresel gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitini inceleyelim:

$\psi_{\bar{T}_1}(u,s) = \psi_{\bar{T}_2}(v,t)$ olsun. Buradan eşitlik düzenlenirse

$$4(u^3 \cos u + v^3 \sin v, u^3 \sin u + v^3 \cos v, 0) = -s(-\sin u, \cos u, 0) + t(\cos v, -\sin v, 0)$$

yazılabilir. Burada $\{C_{\bar{T}_1}(u) - C_{\bar{T}_2}(v)\}$ fark vektörü $T_1(u)$ ve $T_2(v)$ tanjant vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilmiş olur. Bu üç vektör lineer bağımlı olduğundan $\mu_{\bar{T}}(u,v) = 0$ olur. Dolayısıyla $\mu_{\bar{T}}(u,v) = 0$ olduğundan $l_{\bar{T}_1}(u)$ ve $l_{\bar{T}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir.

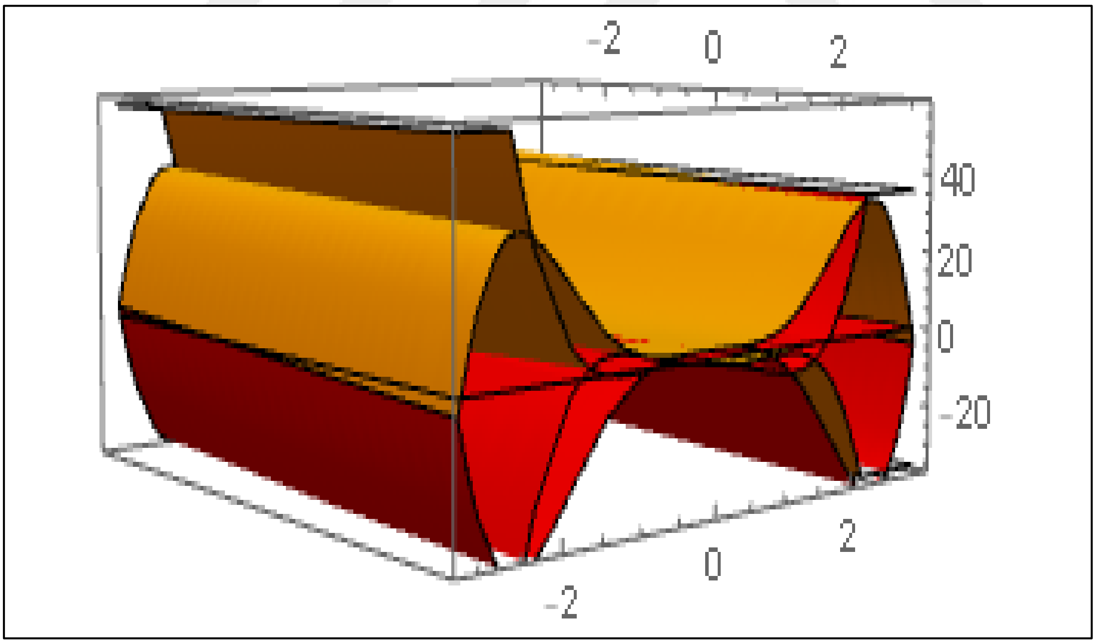
Ayrıca $\Delta_{\bar{T}}(u,v)$, $\delta_{\bar{T}}^1(u,v)$ ve $\delta_{\bar{T}}^2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları sırasıyla aşağıda hesaplayalım:

$$\Delta_{\bar{T}}(u,v) = (\cos(u+v))^2,$$

$$\delta_{\bar{T}}^1(u,v) = 16(u^3 + v^3 \sin(u+v))^2,$$

$$\delta_{\bar{T}}^2(u,v) = 16(v^3 + u^3 \sin(u+v))^2.$$

olur. $\mu_{\bar{T}}(u,v) = 0$ denkleminin $(u,v) = (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ çözümü için $\Delta_{\bar{T}}(u,v) = \delta_{\bar{T}}^1(u,v) = \delta_{\bar{T}}^2(u,v) = 0$ olup $l_{\bar{T}_1}(u)$ ve $l_{\bar{T}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir. Sonuç olarak; $\psi_{\bar{T}_1}$ ve $\psi_{\bar{T}_2}$ regle yüzeyleri kesişir.



Şekil 5.1. $D\mathbb{S}^2$ de $\bar{T}_1(u)$ ve $\bar{T}_2(v)$ eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin arakesiti

İkinci olarak bu eğrilerin dual aslinormal küresel gösterge eğrilerini hesaplıyalım. Daha sonra dual aslinormal küresel gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeyleri ifade edelim. Son olarak bu regle yüzeylerin arakesitlerini belirtelim.

$\bar{\alpha}_1$ dual eğrisinin dual aslinormal küresel gösterge eğrisi:

$$\bar{N}_1 = (-\cos u\,, -\sin u\,, 0) + \varepsilon(\sin u, -\cos u\,, 12u^2)$$

dir. Burada $N_1(u) = (-\cos u\,, -\sin u\,, 0)$ ve $N_1^*(u) = (\sin u, -\cos u\,, 12u^2)$ $\bar{\alpha}_1$ dual aslinormal küresel gösterge eğrisinin reel ve dual bileşenleridir.

$\bar{\alpha}_2$ dual eğrisinin dual aslinormal küresel gösterge eğrisi:

$$\bar{N}_2 = (-\sin v\,, -\cos v\,, 0) + \varepsilon(\cos v\,, -\sin v\,, 12v^2)$$

dır. Burada $N_2(v) = (-\sin v\,, -\cos v\,, 0)$ ve $N_2^*(v) = (\cos v\,, -\sin v\,, 12v^2)$ $\bar{\alpha}_2$ dual aslinormal küresel gösterge eğrisinin reel ve dual bileşenleridir.

$\bar{N}_1(u)$ dual aslinormal küresel gösterge eğrisine karşılık gelen regle yüzey

$$\psi_{\bar{N}_1}(u, s) = (-12u^2 \sin u\,, 12u^2 \cos u, 1) + s(-\cos u\,, -\sin u\,, 0)$$

dır. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi $C_{\bar{N}_1}(u) = (-12u^2 \sin u\,, 12u^2 \cos u, 1)$ dir.

$\bar{N}_2(v)$ dual aslinormal küresel gösterge eğrisine karşılık gelen regle yüzey

$$\psi_{\bar{N}_2}(v, t) = (-12v^2 \cos v\,, 12v^2 \sin v\,, 1) + t(-\sin v\,, -\cos v\,, 0)$$

dır. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi $C_{\bar{N}_2}(v) = (-12v^2 \cos v\,, 12v^2 \sin v\,, 1)$ dir.

Şimdi birim dual küre yüzeyi üzerinde aldığımız iki dual aslinormal küresel gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitini inceleyelim:

$$12(-u^2 \sin u + v^2 \cos v\,, u^2 \cos u - v^2 \sin v\,, 0) = -s(-\sin u, \cos u\,, 0) + t(\cos v\,, -\sin v\,, 0)$$

yazılabilir. Burada $\{C_{\bar{N}_1}(u) - C_{\bar{N}_2}(v)\}$ fark vektörü $N_1(u)$ ve $N_2(v)$ aslinormal vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilmiş olur. Bu üç vektör lineer bağımlı olduğundan $\mu_{\bar{N}}(u,v) = 0$ olur. Dolayısıyla $\mu_{\bar{N}}(u,v) = 0$ olduğundan $l_{\bar{N}_1}(u)$ ve $l_{\bar{N}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir.

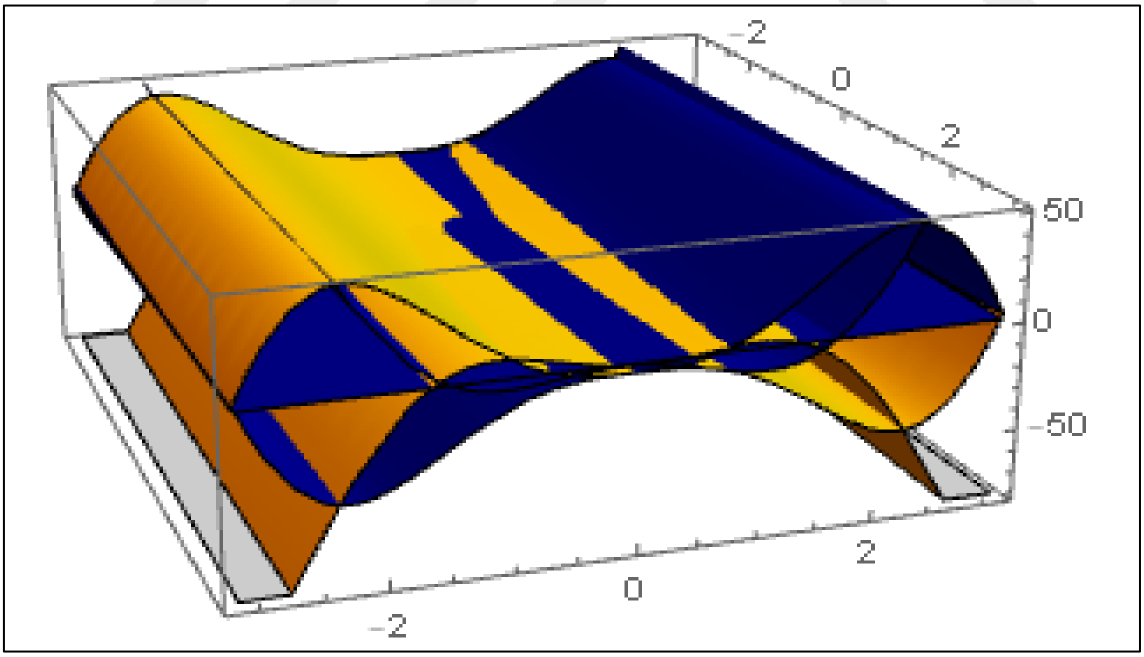
Ayrıca $\Delta_{\bar{N}}(u,v)$, $\delta_{\bar{N}}^1(u,v)$ ve $\delta_{\bar{N}}^2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları, sırasıyla,

$$\Delta_{\bar{N}}(u,v) = (\cos(u+v))^2,$$

$$\delta_{\bar{N}}^1(u,v) = 144(v^2\sin(u+v) - u^2),^2$$

$$\delta_{\bar{N}}^2(u,v) = 144(v^2 - u^2\sin(u+v))^2.$$

olur. $\mu_{\bar{N}}(u,v) = 0$ denkleminin $(u,v) = (\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ çözümü için $\Delta_{\bar{N}}(u,v) = \delta_{\bar{N}}^1(u,v) = \delta_{\bar{N}}^2(u,v) = 0$ olup $l_{\bar{N}_1}(u)$ ve $l_{\bar{N}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir. Sonuç olarak; $\psi_{\bar{N}_1}$ ve $\psi_{\bar{N}_2}$ regle yüzeyleri kesişir.



Şekil 5.2. $D\mathbb{S}^2$ de $\bar{N}_1(u)$ ve $\bar{N}_2(v)$ eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin arakesiti

Üçüncü olarak bu eğrilerin dual binormal küresel gösterge eğrilerini hesaplıyalım. Daha sonra dual binormal küresel gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeyleri ifade edelim.

Son olarak bu regle yüzeylerin arakesitlerini belirtelim.

$\bar{\alpha}_1$ dual eğrisinin dual binormal küresel gösterge eğrisi:

$$\bar{B}_1(u) = (0,0,1) + \varepsilon(4u^3 \sin u + 12u^2 \cos u\,, -4u^3 \cos u + 12u^2 \sin u\,, 0)$$

dir. Burada $B_1(u) = (0,0,1)$ ve $B_1^*(u) = (4u^3 \sin u + 12u^2 \cos u\,, -4u^3 \cos u + 12u^2 \sin u\,, 0)$ $\bar{B}_1(u)$ dual binormal küresel gösterge eğrisinin reel ve dual bileşenleridir.

$\bar{\alpha}_2$ dual eğrisinin dual binormal küresel gösterge eğrisi:

$$\bar{B}_2(v) = (0,0,1) + \varepsilon(4v^3 \cos v - 12v^2 \sin v\,, -4v^3 \sin v - 12v^2 \cos v\,, 0)$$

dir. Burada $B_2(v) = (0,0,1)$ ve $B_2^*(v) = (4v^3 \cos v - 12v^2 \sin v\,, -4v^3 \sin v - 12v^2 \cos v\,, 0)$ $\bar{\beta}_2(v)$ dual binormal küresel gösterge eğrisinin reel ve dual bileşenleridir.

$\bar{B}_1(u)$ dual binormal küresel gösterge eğrisine karşılık gelen regle yüzey

$$\psi_{\bar{B}_1}(u,s) = (4u^3 \cos u - 12u^2 \sin u\,, 4u^3 \sin u + 12u^2 \cos u\,, 0) + s(0,0,1)$$

dır. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi $C_{\bar{B}_1}(u) = (4u^3 \cos u - 12u^2 \sin u\,, 4u^3 \sin u + 12u^2 \cos u\,, 0)$ dir.

$\bar{B}_2(v)$ dual binormal küresel gösterge eğrisine karşılık gelen regle yüzey

$$\psi_{\bar{B}_2}(v,t) = (-4v^3 \sin v - 12v^2 \cos v, -4v^3 \cos v + 12v^2 \sin v\,, 0) + t(0,0,-1)$$

dır. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi $C_{\bar{B}_2}(v) = (-4v^3 \sin v - 12v^2 \cos v, -4v^3 \cos v + 12v^2 \sin v\,, 0)$ dır.

Şimdi birim dual küre yüzeyi üzerinde aldığımız iki dual binormal küresel gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitini inceleyelim:

$\psi_{\bar{B}_1}(u,s) = \psi_{\bar{B}_2}(v,t)$ olsun. Buradan eşitlik düzenlenirse

$$(\{u^3\cos u - 3u^2\sin u + v^3\sin v + 3v^2\cos v\}, \{u^3\sin u + 3u^2\cos u + v^3\cos v - 3v^2\sin v\}, 0) = -s(0,0,1) + t(0,0,-1)$$

yazılabilir. Burada $\{C_{\bar{B}_1}(u) - C_{\bar{B}_2}(v)\}$ fark vektörü $B_1(u)$ ve $B_2(v)$ binormal vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilmiş olur. Bu üç vektör lineer bağımlı olduğundan $\mu_{\bar{B}}(u,v) = 0$ olur. Dolayısıyla $\mu_{\bar{B}}(u,v) = 0$ olduğundan $l_{\bar{B}_1}(u)$ ve $l_{\bar{B}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir.

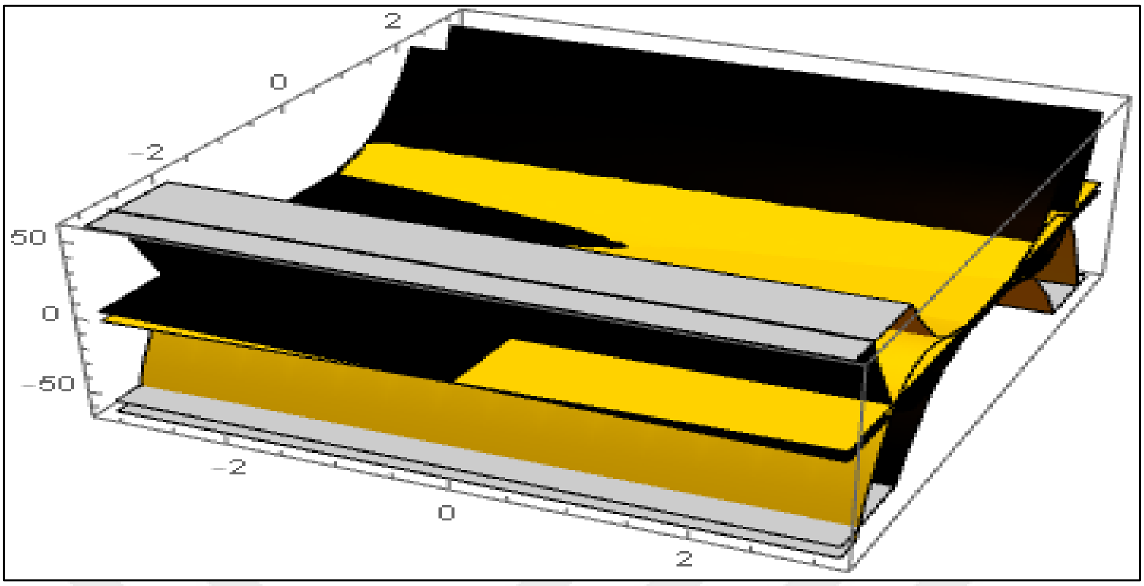
Ayrıca $\Delta_{\bar{B}}(u,v)$, $\delta_{\bar{B}}^1(u,v)$ ve $\delta_{\bar{B}}^2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları, sırasıyla,

$$\Delta_{\bar{B}}(u,v) = 0,$$

$$\delta_{\bar{B}}^1(u,v) = 16\{[3(-u^2\cos u + v^2\sin v) - (u^3\sin u + v^3\cos v)]^2 + [3(-u^2\sin u + v^2\cos v) + (u^3\cos u + v^3\sin v)]^2\},$$

$$\delta_{\bar{B}}^2(u,v) = 16\{[3(u^2\cos u - v^2\sin v) + (u^3\sin u + v^3\cos v)]^2 + [3(u^2\sin u - v^2\cos v) - (u^3\cos u + v^3\sin v)]^2\}$$

olur. $\mu_{\bar{B}}(u,v) = 0$ denkleminin $(u,v) = (0,0)$ çözümü için $\Delta_{\bar{B}}(u,v) = \delta_{\bar{B}}^1(u,v) = \delta_{\bar{B}}^2(u,v) = 0$ olup $l_{\bar{B}_1}(u)$ ve $l_{\bar{B}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir. Sonuç olarak; $\psi_{\bar{B}_1}$ ve $\psi_{\bar{B}_2}$ regle yüzeyleri kesişir.



Şekil 5.3. $D\mathbb{S}^2$ de $\bar{B}_1(u)$ ve $\bar{B}_2(v)$ eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin arakesiti

Son olarak bu eğrilerin dual Pol küresel gösterge eğrilerini hesaplıyalım. Daha sonra dual Pol küresel gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeyleri ifadelim. Son olarak bu regle yüzeylerin arakesitlerini belirtelim.

$\bar{\alpha}_1$ dual eğrisinin dual Pol küresel gösterge eğrisi:

$$\bar{C}_1(u) = (0,0,1) + \varepsilon(12u^2 \cos u - 24u \sin u\, , 12u^2 \sin u + 24u \cos u\, , 0)$$

dir. Burada $C_1(u) = (0,0,1)$ ve $C_1^*(u) = (12u^2 \cos u - 24u \sin u\, , 12u^2 \sin u + 24u \cos u\, , 0)$ $\bar{C}_1(u)$ dual Pol küresel gösterge eğrisinin reel ve dual bileşenleridir.

$\bar{\alpha}_2$ dual eğrisinin dual Pol küresel gösterge eğrisi:

$$\bar{C}_2(v) = (0,0,-1) + \varepsilon(-12v^2 \sin v - 24v \cos v\, , -12v^2 \cos v + 24v \sin v\, , 0)$$

dir. Burada $C_2(v) = (0,0,-1)$ ve $C_2^*(v) = (-12v^2 \sin v - 24v \cos v\, , -12v^2 \cos v + 24v \sin v\, , 0)$ ve $\bar{C}_2(v)$ dual Pol küresel gösterge eğrisinin reel ve dual bileşenleridir.

$\bar{C}_1(u)$ dual Pol küresel gösterge eğrisine karşılık gelen regle yüzey

$$\psi_{\bar{C}_1}(u,s) = (-12u^2 \sin u - 24u \cos u\, , 12u^2 \cos u - 24u \sin u\, , 0) + s(0,0,1)$$

dır. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi $C_{\bar{C}_1}(u) = (-12u^2 \sin u - 24u \cos u\, , 12u^2 \cos u - 24u \sin u\, , 0)$ dir.

$\bar{C}_2(v)$ dual Pol küresel gösterge eğrisine karşılık gelen regle yüzey

$$\psi_{\bar{C}_2}(v,t) = (-12v^2 \cos v + 24v \sin v\, , 12v^2 \sin v + 24v \cos v\, , 0) + t(0,0,-1)$$

dır. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi $C_{\bar{C}_2}(v) = (-12v^2 \cos v + 24v \sin v\, , 12v^2 \sin v + 24v \cos v\, , 0)$ dir.

Şimdi birim dual küre yüzeyi üzerinde aldığımız iki dual Pol küresel gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitini inceleyelim:

$\psi_{\bar{C}_1}(u,s) = \psi_{\bar{C}_2}(v,t)$ olsun. Buradan eşitlik düzenlenirse

$$12(\{-u^2 \sin u - 2u \cos u + v^2 \cos v - 2v \sin v\}, \{u^2 \cos u - 2u \sin u - v^2 \sin v - 2v \cos v\}, 0\ ) = -s(0,0,1) + t(0,0,-1)$$

yazılabilir. Burada $\{C_{\bar{C}_1}(u) - C_{\bar{C}_2}(v)\}$ fark vektörü $C_1(u)$ ve $C_2(v)$ Pol vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilmiş olur. Bu üç vektör lineer bağımlı olduğundan $\mu_{\bar{C}}(u,v) = 0$ olur. Dolayısıyla $\mu_{\bar{C}}(u,v) = 0$ olduğundan $l_{\bar{C}_1}(u)$ ve $l_{\bar{C}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir.

Ayrıca $\Delta_{\bar{C}}(u,v)$, $\delta_{\bar{C}}^1(u,v)$ ve $\delta_{\bar{C}}^2(u,v)$ iki değişkenli fonksiyonları, sırasıyla,

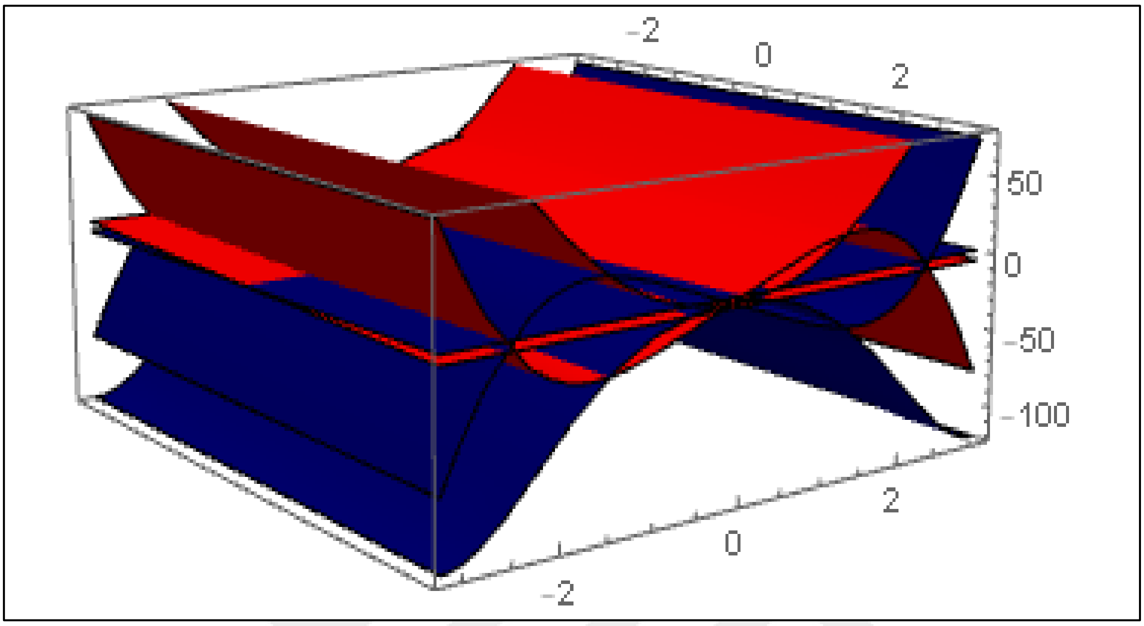
$$\Delta_{\bar{C}}(u,v) = 0,$$

$$\delta_{\bar{C}}^1(u,v) = 144\{[(-u^2 \cos u + v^2 \sin v) + 2(u \sin u + v \cos v)]^2 + [(-u^2 \sin u + v^2 \cos v) - 2(u \cos u + v \sin v)]^2\},$$

$$\delta_{\bar{C}}^2(u,v) = 144\{[(u^2 \cos u - v^2 \sin v) - 2(u \sin u + v \cos v)]^2 + [(u^2 \sin u - v^2 \cos v) + 2(u \cos u + v \sin v)]^2\}$$

olur. $\mu_{\bar{C}}(u,v) = 0$ denkleminin $(u,v) = (0,0)$ çözümü için $\Delta_{\bar{C}}(u,v) = \delta_{\bar{C}}^1(u,v) =$

$\delta^2_{\bar{C}}(u,v) = 0$ olup $l_{\bar{C}_1}(u)$ ve $l_{\bar{C}_2}(v)$ parametre eğrileri kesişir. Sonuç olarak; $\psi_{\bar{C}_1}$ ve $\psi_{\bar{C}_2}$ regle yüzeyleri kesişir.



Şekil 5.4. $D\mathbb{S}^2$ de $\bar{C}_1(u)$ ve $\bar{C}_2(v)$ eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin arakesiti

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalşmasında, ilk olarak, birim dual küre üzerinde alınan iki farklı dual eğriye $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitleri çok değişkenli fonksiyonlar yardımıyla incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar örnekler ile desteklenmiştir.

Daha sonra, sırasıyla ilk olarak birim dual Lorentz küre üzerinde alınan iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki farklı timelike regle yüzeyin arakesitleri teoremler yardımıyla incelenmiştir. İkinci olarak, birim dual Lorentz küre üzerinde alınan iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki spacelike regle yüzeyin arakesitleri teoremler yardımıyla incelenmiştir. Üçüncü olarak, birim dual Lorentz küre üzerinde alınan iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen bir timelike bir spacelike regle yüzeyin arakesitleri teoremler yardımıyla incelenmiştir. İkinci olarak hiperbolik birim küre üzerindeki iki farklı eğriye $\mathbb{R}_1^3$ de karşılık gelen iki timelike regle yüzeyin arakesitleri teoremler yardımıyla incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar örnekler ile irdelenmiştir.

Çalışmanın devamında sırasıyla ilk olarak, birim dual küre üzerinde alınan iki farklı eğrinin tanjant küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitleri çok değişkenli fonksiyonlar yardımıyla incelenmiştir. İkinci olarak, birim dual küre üzerinde alınan iki farklı eğrinin aslinormal küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitleri çok değişkenli fonksiyonlar yardımıyla incelenmiştir. Üçüncü olarak, birim dual küre üzerinde alınan iki farklı eğrinin binormal küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitleri çok değişkenli fonksiyonlar yardımıyla incelenmiştir. Son olarak, birim dual küre üzerinde alınan iki farklı eğrinin Pol küresel gösterge eğrisine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen regle yüzeylerin arakesitleri çok değişkenli fonksiyonlar yardımıyla incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar örnekler ile araştırılmıştır.

Bu tez çalışmasındaki yöntemler kullanılarak diğer Öklidyen olmayan geometrilerde regle yüzeylerin arakesitleri ve özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H. H. (2000). *Diferensiyel Geometri*. Ankara: Erten Matbaası, 139-155.

2. Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferensiyel Geometri*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım, 114-140.

3. Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.

4. O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry*. New York: Academic Press.

5. Ye, X. ve Maekawa, T. (1999). Differential geometry of intersection curves of two surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 16, 767-788.

6. Uyar Düldül, B. ve Çalışkan, M. (2013). On the geodesic torsion of a tangential intersection curve of two surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae,* 2, 177-189.

7. Aléssio, O. ve Guadalupe, I. V. (2007). Determination of a transversal intersection curve of two spacelike surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space $\mathbb{L}^3$. *Hadronic Journal*, 30(3), 315-342.

8. Karaahmetoğlu, S. ve Aydemir, I. (2016). On the transversal intersection curve of spacelike and timelike surfaces in Minkowski 3-space. *Journal of Science and Arts.* 4, 345-356.

9. Izumiya, S. ve Takeuchi, N. (2003). Special curves and ruled surfaces. *Contributions to Algebra and Geometry*, 44, 203-212.

10. Bekar, M., Hathout, F. ve Yaylı, Y. (2018). Tangent bundle of pseudo-sphere and ruled surfaces in Minkowski 3-space. *General Letters in Mathematics*, 5(2), 58-70.

11. Orbay, K. ve Aydemir, İ. (2010). The ruled surfaces generated by Frenet vectors of curve in $\mathbb{R}_1^3$. *Cbu Journal of Science*, 6, 155-160.

12. Karaca, E. ve Çalışkan, M. (2020). Ruled surfaces and tangent bundle of unit 2-sphere of natural lift curves. *Gazi University Journal of Science*, 33(5), 751-759.

13. Yaylı, Y. ve Saraçoğlu, S. (2012). Different approaches to ruled surfaces. *SDU Journal of Science (E-Journal)*, 7, 56-68.

14. Karaca, E. ve Çalışkan, M. (2020). Ruled surfaces and tangent bundle of pseudo-sphere of natural lift curves. *Journal of Science&Arts*, 3(52), 573-586.

15. Heo, H-S., Kim, M-S. ve Elber, G. (1999). The intersection of two ruled surfaces. *Computer-Aided Design*, 31, 33-50.

16. Clifford, W. K. (1873). *Preliminary Sketch of Biquaternions*. Springer-Verlag, *The Proceedings of the London Mathematical Society*, 4, 381-395.

17. Study, E. (1901). *Geometry Der Dynamen*, Leipzig.

18. Uğurlu, H. H. ve Çalışkan, A. (1996). The Study mapping for directed spacelike and timelike lines in Minkowski space $\mathbb{R}_1^3$. *Mathematical and Computational Applications*, 1(2), 142-148.

19. Yaylı, Y., Çalışkan, A. ve Uğurlu, H. H. (2002). The E. Study maps of circle on dual hyperbolic and Lorentzian unit spheres $\mathbb{H}_0^2$ and $\mathbb{S}_1^2$. *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, 102A(1), 37–47.

20. Fischer, I. S. (1999). *Dual-Number Methods in Kinematics and Dynamics*. New York: CRC Press, Boca Raton, London, Washington DC.

21. Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi.* Ankara: Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1-45.

22. Güven Arslan, İ. (2010). *Dual Küresel Eğriler ve Regle Yüzeyler.* Doktora tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

.

Gazili olmak ayrıcalıktır