

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARI SONSUZ ARALIK ÜZERİNDE LİNEER
OLMAYAN KESİRLİ SINIR DEĞER
PROBLEMLERİ

İREM ÇAM

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fulya YÖRÜK DEREN
İkinci Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Tuğba ŞENLİK ÇERDİK

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Yüksek Lisans Programı

Bornova-İzmir

2023

15/12/2023

İREM ÇAM tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan "**YARI SONSUZ ARALIK ÜZERİNDE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ**" başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **15.12.2023** tarihinde yapılan tez savunma sınavında oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Doç. Dr. Fulya YÖRÜK DEREN

Raportör Üye : Prof. Dr. İlkay KARACA

Üye : Doç. Dr. Nüket Aykut Hamal

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tuğba ŞENLİK ÇERDİK

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Setenay AKDUMAN

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “YARI SONSUZ ARALIK ÜZERİNDE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

15/12/2023

İREM ÇAM

ÖZET

YARI SONSUZ ARALIK ÜZERİNDE LİNEER OLMAYAN
KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

ÇAM, İrem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fulya YÖRÜK DEREN

İkinci Danışmanı: Dr.Öğr. Üyesi Tuğba ŞENLİK ÇERDİK

Aralık 2023, 51 sayfa

Bu tez temelde 4 bölümden meydana gelmektedir.

Birinci bölümde, motivasyon kaynağı olan problemler verilerek tez boyunca çalışılacak problem tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, ilk olarak kesirli hesap tekniği ile ilgili gerekli kavramlar tanıtılmıştır. Daha sonra ise temel analiz ve fonksiyonel analiz konularından bazılarına değinilmiştir.

Üçüncü bölümde, Riemann-Liouville kesirli hesap içeren sınır değer problemi için sabit nokta teoremleri kullanılarak pozitif çözümlerine bakılmıştır. Bununla birlikte bu teoremin geçerliliğini gösteren bir örnek sunulmuştur.

Son bölümde ise yapılan bu çalışmalarda elde edilen bilgiler doğrultusunda ulaşılan sonuç sunulmuştur.

Anahtar sözcükler: Riemann-Liouville kesirli türevi, Pozitif çözümler, Guo-Krasnoselskii ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi, Riemann-Liouville kesirli integrali.

ABSTRACT**Nonlinear Fractional Boundary Value Problems On A Semi-Infinite Interval**

MSc. in Mathematics Department

Supervisor: Doç. Dr. Fulya YÖRÜK DEREN

Cosupervisor: Dr. Öğr. Üyesi Tuğba ŞENLİK ÇERDİK

December 2023, 51 pages

This thesis basically includes four chapters.

In the first chapter, motivating problems are given and the problem that will be examined throughout the thesis is presented.

In the second chapter, firstly the necessary concepts related to fractional calculus technique are introduced. Then, some of the basic calculus and functional analysis topics are presented.

In the third chapter, it is proved that the Riemann-Liouville boundary value problem involving fractional calculus has at least one positive solution with the help of Guo-Krasnoselskii fixed point theorem and at least three positive solutions with the help of Leggett-Williams fixed point theorem. An example is also presented to demonstrate the validity of this theorem.

In the fourth section, the conclusion obtained in these studies is presented.

Keywords: Riemann-Liouville fractional derivative, positive solutions, Guo-Krasnoselskii and Leggett-Williams fixed point theorems, Riemann-Liouville fractional integral.

ÖNSÖZ

Kesirli hesap, 17.yüzyıldan bu yana Leibniz, Euler, Liouville ve diğer pek çok kişinin öncü çalışmaları aracılığıyla geliştirilmiştir. Kesirli hesap teorisinin hızlı gelişmesi bu tür yapıların fizik, mekanik, kimya, mühendislik vb. alanlarda uygulamalarından kaynaklanmaktadır. Fakat sonsuz aralık üzerinde kesirli sınır değer problemi ile ilgili çalışmalar sonlu aralığa göre daha zordur. Bu nedenle bu tezde doğrusal olmayan sonsuz aralık üzerinde Riemann-Liouville kesirli integral operatörünü içeren bir SDP'nin pozitif çözümleri için varlık sonuçları incelenmiştir. Kesirli hesap tekniği, kesirli sınır değer probleminin ve sabit nokta teorisi ile ilgili önemli çalışmaların yer aldığı kitaplar, makaleler, bildiriler bu tezin başarılı olarak bitirilmesi için yararlanılmıştır.

Çoklu noktalı kesirli sınır değer problemleri ilgi çeken bir konudur. Bu nedenle "YARI SONSUZ ARALIK ÜZERİNDE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ" adlı tez konusu seçilmiştir.

İzmir

İrem ÇAM

15/12/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK BEYANNAMESİ	3
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Taraması	1
2 GENEL KAVRAMLAR	4
3 RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEM- LERİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ	8
3.1 Riemann-Liouville Kesirli Sınır Değer Probleminin Çözümü	9
3.2 Sabit Nokta Teoremleri Ve Uygulamaları	18
3.2.1 Guo-Krasnoselskii Sabit Nokta Teoreminin Uygulaması	18
3.2.2 Leggett-Williams Sabit Nokta Teoreminin Uygulaması	21
4 SONUÇ	26
TEŞEKKÜR	28
5 ÖZGEÇMİŞ	30
KAYNAKÇA	32

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
Σ	Toplam sembolü
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\in$	Elemanıdır
$\ x\ $	x fonksiyonunun normu
$\int$	İntegral sembolü
∞	Sonsuz
$\mathcal{C}[\alpha, \beta]$	$[\alpha, \beta]$ aralığındaki reel değerli sürekli fonksiyonlar kümesi
$K(t, \varsigma)$	Green fonksiyonu
$\mathcal{C}^1([\alpha, \beta])$	$[\alpha, \beta]$ aralığındaki sürekli türevelere sahip olan fonksiyonlar kümesi
f'	f fonksiyonunun türevi
$L^1([\alpha, \beta])$	$[\alpha, \beta]$ aralığındaki integrallenebilir fonksiyonlar kümesi

Kısaltmalar

Açıklama

KSDP

Kesirli sınır değeri problemi

SDP

Sınır değeri problemi



1 GİRİŞ

1.1 Literatür Taraması

Kesirli hesaplar, ilk olarak 1695 yılında L'Hospital'ın Leibnitz'e yazdığı mektupta bahsedilmiştir. 17. yüzyıldan bu yana Leibniz, Euler, Lagrange, Able, Liouville ve diğer pek çok kişinin öncü çalışmaları aracılığıyla geliştirilen kesirli hesap, türev ve integralin kesirli mertebeye genelleştirilmesi ile ilgilenmektedir. Türev ve integrallerin matematiksel uygulamalarının yanında, viskoelastisite, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya, kesirli multipoller, nöron modelleme, fizik, kimya ve biyolojik bilimlerdeki ilgili alanlarında da uygulamaları vardır. Kesirli diferansiyel denklemler son zamanlarda büyük ilgi görmektedir. Bu ilgi hem kesirli hesap teorisinin yoğun gelişmesinden hem de bu tür yapıların disiplinlerarası uygulamalarından kaynaklanmaktadır.

Tamsayı mertebeli diferansiyel ve integral operatörlerin aksine, kesirli dereceli diferansiyel operatörler doğası gereği yerel değildir. Kesirli türevler, çeşitli malzeme ve süreçlerin hafıza ve kalıtsal özelliklerinin tanımlanması için mükemmel bir araç sağlar. Bu, kesirli diferansiyel denklemlerin klasik tam sayı mertebeli modellere kıyasla temel avantajıdır. Ayrıca doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler için SDP'lerin analizi hala başlangıç aşamasındadır ve bu alanın birçok yönünün araştırılması gerekmektedir. Özellikle, sonsuz aralıkta m-noktalı KSDP için pozitif çözümlerin varlığı literatürde nispeten az çalışılmıştır. Sonsuz aralık üzerinde KSDP'leri çalışmak, sonsuz aralık kompakt olmadığından dolayı sonlu aralığa göre daha zordur. Çünkü Arzela Ascoli teoremi $[0, \infty)$ üzerinde kullanılamamaktadır. Bu çalışmada, ele alınan operatörün tamamen sürekli olduğunu göstermek için uygun bir kompaktlık kriteri oluşturularak ana zorluğun üstesinden gelinmiştir.

Koni üzerinde sabit nokta teoremleri, monoton iteratif yöntemi vb. metotlar kullanılarak doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığını ele alan makaleler literatürde mevcuttur. (Liang, S. and Zhang, J., 2011) (Cabada, A., Dimitrijevic, S., Tomovic, T. and Aleksic, S. 2017) Bu tez çalışmasında da sabit nokta teorisi yardımıyla yarı sonsuz aralık üzerinde doğrusal olmayan KSDP'nin pozitif çözümlerinin varlığı gösterilmiştir.

Literatürde Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Hadamard

ve Caputo-Fabrizio kesirli türevleri gibi türevlerin birkaç farklı tanımı önerilmiştir. (Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E. and Trujillo, J.J., 2017) (Ahmad, B., Alsaedi, A., Ntouyas, S.K. and Tariboon, J.) (Caputo, M and Fabrizio, M., 2015) Riemann-Liouville tipi kesirli türev ve integral ile ilgili temel kitaplar (Miller, K.S. and Ross, B., 1993), (Samko, S.G, Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. 1993), (Kilbas, A.A., 1999) dır. Koni üzerinde Guo-Krasnoselskii ve Legett-Williams sabit nokta teoremi, üst ve alt çözüm tekniği, monoton iteratif yöntemi, topolojik derece yöntemi gibi birçok farklı yöntem, KSDP'lerin çözümlerinin varlık sonuçlarını elde etmek için kullanılmaktadır. (Cabada, A. and Wang, G. 2012), (Cabada, A., Dimitrijevic, S., Tomovic, T. and Aleksic, S. 2017), (Abbas, H., Belmekki, M. and Cabada, A. 2021), (Cabada, A. and Wanassi, O.K., 2021), (Neamprem, K., Muensawat, T., Ntouyas, S.K. and Tariboon, J., 2017), (Miller, K.S. and Ross, B., 1993), (Hao, X., Zhang, L. and Liu, L. 2019), (Li, Y. and Qi, A. 2016), (Han, W. and Jiang, J. 2021). Literatürde kesirli mertebeden SDP'lerin çözümleri ile ilgili çalışmalar bulunmaktadır.

Zhao ve Ge makalelerinde (Ge, W. and Zhao, X., 2008)

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha} \varphi(t) + f(t, \varphi(t)) &= 0, \quad t \in (0, \infty), \quad \alpha \in (1, 2), \\ \varphi(0) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D_{0+}^{\alpha-1} \varphi(t) = \beta \varphi(\xi) \end{aligned}$$

KSDP'yi ele almışlardır. Burada $\xi \in (0, \infty)$ ve D_{0+}^{α} Riemann-Liouville kesirli türevidir. Bu çalışmada Leray-Schauder nonlinear alternative teoremi kullanılmıştır. Buna ek olarak, bir pozitif çözüm elde edilmiştir.

Li, Liu, Jia ve Zhang (Li X., Liu X., Jia M. and Zhang L., 2017)

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\delta} \varphi(t) + q(t)f(t, \varphi(t)) &= 0 \quad t \in (0, \infty), \\ \varphi(0) &= D_{0+}^{\delta-1} \varphi(+\infty) = 0, \\ D_{0+}^{\delta-2} \varphi(0) &= \sum_{i=1}^{\infty} g(\xi_i) D_{0+}^{\delta-1} \varphi(\xi_i) + \lambda \end{aligned}$$

KSDP'yi ele almışlardır. Burada D_{0+}^{δ} Riemann-Liouville kesirli türevidir. $2 < \delta < 3$, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_i < \dots < +\infty$, $i = 1, 2, \dots$, için $g(\xi_i) \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} g(\xi_i)$ yakınsaktır. Bu çalışmada, pozitif çözümlerin varlık sonuçları araştırılmıştır.

Liang ve Zhang makalelerinde (Liang, S. and Zhang, J., 2011)

$$D_{0+}^{\alpha} \wp(t) + a(t)f(t, \wp(t)) = 0, \quad t \in (0, \infty), \quad \alpha \in (2, 3),$$

$$\wp(0) = u'(0) = 0, \quad D_{0+}^{\alpha-1} \wp(\infty) = \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i \wp(\xi_i)$$

KSDP'yi ele almışlardır. Burada D_{0+}^{α} bir Riemann-Liouville kesirli türevidir. $i = 1, 2, \dots, m-2$, $\beta_i \geq 0$, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < +\infty$ dir ve $0 < \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i \xi_i^{\alpha-1} < \Gamma(\alpha)$ eşitsizliği vardır. Burada Legget-Williams sabit nokta teoremi kullanılarak en az üç pozitif çözümün olduğu gösterilmiştir.

Wang ve Liu (Wang, W. and Liu, X., 2021)

$$D_{0+}^{\alpha} x(t) + \mu(f(t, x(t)) + q(t)g(x(t))) = 0, \quad 0 < t < \infty,$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

$$D_{0+}^{\alpha-1} x(\infty) = \beta \int_0^{\eta} x(s)ds + \lambda$$

KSDP'yi ele almışlardır. Burada D_{0+}^{α} Riemann-Liouville kesirli türevidir. $2 < \alpha < 3$, $\beta, \eta > 0$ ve $\Gamma(\alpha + 1) > \beta \eta^{\alpha}$; $\mu, \lambda > 0$ 'dır. Bu çalışmada SDP'nin tek pozitif çözümünün varlığı araştırılmıştır.

Literatürde değinilen makaleler göz önüne alınarak bu tezde aşağıdaki

$$D_{0+}^{\alpha} \wp(t) + a(t)f(t, \wp(t)) = 0, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\wp(0) = u'(0) = 0,$$

$$D_{0+}^{\alpha-1} \wp(\infty) = \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) D_{0+}^{\beta_i} \wp(t) dt + \beta I_{0+}^q \wp(\eta)$$

Riemann-Liouville KSDP incelenecektir. Bu çalışmada problemin pozitif çözümlerinin varlığı için gerekli koşullar sunulacak ve problemin en az bir ve üç pozitif çözümünün varlığı araştırılacaktır. Bu tezin amacı lineer olmayan KSDP için sınırsız çözümlerin varlığının araştırılmasıdır.

2 GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca gerekli olacak ön bilgiler sunulmuştur. İlk önce Gamma fonksiyonu, Riemann-Liouville kesirli integrali ve türevinin tanımı ve özellikleri ifade edilmiştir. Daha sonra ise fonksiyonel analizden bazı kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.0.1. *Euler Gamma Fonksiyonu, $\Gamma(w)$, ikinci tip Euler integrali*

$$\Gamma(w) = \int_0^{+\infty} x^{w-1} e^{-x} dx, \quad (\Re(w)) > 0$$

ile tanımlanır. Bu integral her $w \in \mathbb{C}$ için yakınsaktır.

$$(i) \quad \Gamma(w+1) = w\Gamma(w), \quad (\Re(w) > 0)$$

$$(ii) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$(iii) \quad \Gamma(m) = m!, \quad m \in \mathbb{N}$$

özellikleri sağlanır.

Tanım 2.0.2. (Kilbas, A.A., 1999) $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ için $\mathbb{R}$ reel sayı ekseninde $\kappa = [\alpha, \beta]$ gibi sonlu bir aralık olsun. $\vartheta \in \mathbb{C}$ mertebeden $D_{\beta-}^{\vartheta} f$ soldan ve $D_{\alpha+}^{\vartheta} f$ sağdan Riemann-Liouville kesirli türevleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$(D_{\alpha+}^{\vartheta} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\vartheta)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_{\alpha}^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\vartheta-n+1}}, \quad (x > \alpha);$$

$$(D_{\beta-}^{\vartheta} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\vartheta)} \left(\frac{-d}{dx}\right)^n \int_x^{\beta} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\vartheta-n+1}}, \quad (x < \beta).$$

Burada $\Gamma(\vartheta)$ fonksiyonu Tanım 2.0.1 de tanımlanmıştır.

Tanım 2.0.3. (Kilbas, A.A., 1999) $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ için $\mathbb{R}$ üzerinde $\kappa = [\alpha, \beta]$ gibi sonlu bir aralık olsun. $\vartheta \in \mathbb{C}$ mertebeden $I_{\beta-}^{\vartheta} f$ soldan ve $I_{\alpha+}^{\vartheta} f$ sağdan Riemann-Liouville kesirli integralleri sırayla aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$(I_{\alpha+}^{\vartheta} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_{\alpha}^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\vartheta}} \quad (x > \alpha),$$

$$(I_{\beta-}^{\vartheta} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_x^{\beta} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\vartheta}} \quad (x < \beta).$$

Burada $\Gamma(\vartheta)$ fonksiyonu Tanım 2.0.1 de tanımlanmıştır.

Önerme 2.0.1. (Kilbas, A.A., 1999) $\vartheta > 0$ olsun. O zaman $D_{0+}^{\vartheta} \wp(t) = 0$ Riemann-Liouville kesirli diferansiyel denkleminin çözümü

$$\wp(t) = c_1 t^{\vartheta-1} + c_2 t^{\vartheta-2} + \dots + c_m t^{\vartheta-m}$$

şeklindedir. Burada $c_i \in \mathbb{R}$, $m = [\vartheta] + 1$ biçiminde hesaplanır.

Önerme 2.0.2. (Kilbas, A.A., 1999) $\vartheta > 0$ olsun. O zaman

$$I_{0+}^{\vartheta} D_{0+}^{\vartheta} \wp(t) = \wp(t) + c_1 t^{\vartheta-1} + c_2 t^{\vartheta-2} + \dots + c_m t^{\vartheta-m}$$

şeklindedir. Burada $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, $m = [\vartheta] + 1$ biçiminde hesaplanır.

Tanım 2.0.4. (Lang, S., 1993) E_1 ve E_2 herhangi iki küme olmak üzere, bir H kuralı üzerinde $D \subset E_1$ in her u elemanına tek bir $v \in E_2$ karşılık geliyorsa $E_1 \rightarrow E_2$ kümesine H operatörü verilmiştir ve D , H 'nin tanım bölgesidir denir. $H: D \subset E_1 \rightarrow E_2$ ve $H: u \rightarrow v$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $E_1 = E_2$ durumunda H ye E_1 içerisinde bir operatördür denir.

Tanım 2.0.5. (Soykan, Y., 2012) (J, d) bir metrik uzay olsun. Bir $K \subset J$ kümesindeki her $\{\wp_n\}$ dizisi K nin bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse K ye bir kompakt küme denir.

Tanım 2.0.6. (Lang, S., 1993) Bir dönüşüm her sınırlı kümeleri prekompakt kümelere dönüştüren bir dönüşüm ise buna kompakt dönüşüm adı verilir.

Tanım 2.0.7. Bir dönüşüm hem kompakt hem de sürekliyse bu dönüşüme tamamen sürekli dönüşüm adı verilir.

Tanım 2.0.8. (Lang, S., 1993) (E_1, ρ) ve (E_2, ρ_1) iki metrik uzay olsun. $H: M \subset E_1 \rightarrow E_2$ verilsin. Şayet $u_0 \in M$ için $\varepsilon > 0$ olduğunda,

$$\forall \wp \in M, \rho(u, u_0) < \delta \Rightarrow \rho_1(Hu, Hu_0) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise H ye u_0 noktasında sürekli operatör adı verilir. Eğer H operatörü M nin her noktasında sürekli ise H ye M üzerinde sürekli operatör denir.

Tanım 2.0.9. (E_1, ρ) ve (E_2, ρ_1) iki metrik uzay olsun. $H: M \subset E_1 \rightarrow E_2$ operatörü verilsin. Eğer H operatörü M de kompakt ve sürekli operatör ise H operatörü tamamen sürekli operatör denir.

Tanım 2.0.10. $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}[a, b]$ bir küme olsun.

(i) $\forall \wp \in \mathcal{F}, \forall t \in [a, b]$ için $|\wp(t)| \leq a$ olacak şekilde bir a sayısı varsa $\mathcal{F}$ kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sınırlı fonksiyonlar denir.

(ii) $\varepsilon > 0$ olsun, $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ ve $\forall \wp \in \mathcal{F}$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $|\wp(t_1) - \wp(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $\mathcal{F}$ fonksiyonları, aynı dereceden sürekli fonksiyonlardır.

Önerme 2.0.3. (Lang, S., 1993) E bir Banach uzayı, $U \subset E$ bir sınırlı küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa U, E 'de prekompakttır.

(i) Herhangi bir $\wp(t) \in U$ için, $\frac{\wp(t)}{1+t^{\alpha-1}}, [0, \infty)$ nin herhangi kompakt aralığı üzerinde aynı dereceden sürekli dir.

(ii) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\left| \frac{\wp(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} - \frac{\wp(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}} \right| < \varepsilon \quad t_1, t_2 \geq H, \quad \wp \in U \quad (1)$$

olacak şekilde bir $H = H(\varepsilon) > 0$ sabiti vardır.

Tanım 2.0.11. $(E, ||.||)$ reel Banach uzayı olsun. $\mathbb{P} \subset E$ için aşağıdaki özellikler sağlansın. O halde boştan farklı, kapalı ve konveks $\mathbb{P}$ kümesine koni denir.

$$(i) \wp \in \mathbb{P} \Rightarrow \delta \wp \in \mathbb{P}, \forall \delta \geq 0$$

$$(ii) \wp \in \mathbb{P}, \wp \neq 0 \Rightarrow -\wp \notin \mathbb{P}$$

Tanım 2.0.12. (Guo, D. and Lakshmikantham, V.,1988) E , Banach uzayı ve $\mathbb{P}$ ise E üzerinde bir koni olarak verilsin. $\sigma : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm, $\forall t \in [0, 1]$ ve $\forall \varphi, v \in \mathbb{P}$ için şu koşulu sağlıyorsa:

$$\sigma(t\varphi + (1-t)v) \geq t\sigma(\varphi) + (1-t)\sigma(v)$$

Bu durumda, σ dönüşümüne $\mathbb{P}$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir konveks fonksiyonel denir.

Tanım 2.0.13. (Guo, D. and Lakshmikantham, V.,1988) E , Banach uzayı olsun. $\mathbb{P}$ ise E üzerinde bir koni olarak verilsin.. $\sigma : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm, $\forall t \in [0, 1]$ ve $\forall \varphi, v \in \mathbb{P}$ için şu koşulu sağlıyorsa:

$$\sigma(t\varphi + (1-t)v) \leq t\sigma(\varphi) + (1-t)\sigma(v)$$

Bu durumda, σ dönüşümüne $\mathbb{P}$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir konveks fonksiyonel denir.

Teorem 2.0.1. (Aulbach, B. and Neidhart, L., 2004)(Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi)

$\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ sınırlı ölçülebilir küme ve $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olmak üzere $\forall t \in \mathcal{A}$ için $|f_n(t)| \leq g(t)$ ve $f_n(t) \rightarrow f(t)$ olacak şekilde Lebesgue integrallenebilir g fonksiyonu varsa o zaman f fonksiyonu integrallenebilir ve aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}} f_n(t) dt = \int_{\mathcal{A}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \int_{\mathcal{A}} f(t) dt.$$

3 RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, tezin giriş bölümünde belirtilen problemler dikkate alınarak Riemann-Liouville tipi KSDP'nin pozitif çözümlerinin varlığı sonsuz aralık üzerinde incelenmiştir.

Aşağıda doğrusal olmayan Riemann-Liouville KSDP verilsin.

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} \wp(t) + a(t)f(t, \wp(t)) = 0, & 0 < t < \infty, \\ \wp(0) = \wp'(0) = 0, & D_{0+}^{\alpha-1} \wp(\infty) = \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) D_{0+}^{\beta_i} \wp(t) dt + \beta I_{0+}^q \wp(\eta). \end{cases} \quad (2)$$

Burada $2 < \alpha \leq 3$, $\eta, \beta, q \in (0, \infty)$, $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m-2} < \infty$, $i \in \{1, 2, \dots, m-2\}$ için $0 < \beta_i \leq \alpha - 1$, $b_i \in \mathcal{C}([0, +\infty), [0, +\infty))$, $D_{0+}^{(\cdot)}$ Riemann-Liouville kesirli türevi, $I_{0+}^{(\cdot)}$ Riemann-Liouville kesirli integrali, $f \in \mathcal{C}([0, +\infty) \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ ve herhangi bir $t \in [0, \infty)$ için $f(t, 0) \neq 0$ dir.

Aşağıdakiler koşullar sağlansın :

(C1) $\omega \in \mathcal{C}([0, \infty), [0, \infty))$ bir azalmayan fonksiyon olmak üzere, $[0, \infty) \times [0, \infty)$ üzerinde $f(t, (1 + t^{\alpha-1})\wp) \leq \omega(|\wp|)$ 'dır.

(C2) $k > 1$ olmak üzere $0 < b < c$ için $0 < \gamma(b, c) = \min_{t \in [\eta, k\eta], \wp \in [b, c]} f(t, \wp(t))$.

(C3) $a : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ aralığının herhangi bir alt aralığında sıfıra eşit değildir ve

$$0 < \int_0^{\infty} a(\varsigma) d\varsigma < \infty$$

dir.

3.1 Riemann-Liouville Kesirli Sınır Değer Probleminin Çözümü

(2) *SDP'nin çözümü için aşağıdaki önermeler sunulmuştur. Problemin pozitif çözümlerini elde etmek için sonsuz aralık üzerinde doğrusal olmayan kesirli sınır değer problemlerine karşılık gelen doğrusal KSDP'nin çözümü bulunacaktır.*

Önerme 3.1.1. *$h \in \mathcal{C}[0, +\infty)$ ve $\int_0^\infty h(\varsigma) d\varsigma < \infty$ için,*

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha \wp(t) + h(t) = 0, & 0 < t < \infty, \quad 2 < \alpha \leq 3, \\ \wp(0) = \wp'(0) = 0, \\ D_{0+}^{\alpha-1} \wp(\infty) = \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) D_{0+}^{\beta_i} \wp(t) dt + \beta I_{0+}^q \wp(\eta) \end{cases}$$

KSDP'nin bir çözümü vardır. Bu çözüm

$$\wp(t) = \int_0^\infty K(t, \varsigma) h(\varsigma) d\varsigma, \quad t \in [0, \infty)$$

ile gösterilir. Burada

$$K(t, \varsigma) = k_1(t, \varsigma) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) h_i(t, \varsigma) dt + \frac{\beta t^{\alpha-1}}{\Delta} k_2(\eta, \varsigma) \quad (3)$$

ve

$$k_1(t, \varsigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t < \infty, \\ t^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s < \infty \end{cases} \quad (4)$$

$$k_2(\eta, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+q)} \begin{cases} \eta^{\alpha+q-1} - (\eta-s)^{\alpha+q-1}, & 0 \leq s \leq \eta < \infty, \\ \eta^{\alpha+q-1}, & 0 \leq \eta \leq s < \infty, \end{cases} \quad (5)$$

ve $i = \{1, 2, \dots, m-2\}$ olmak üzere

$$h_i(t, \varsigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \begin{cases} t^{\alpha-\beta_i-1} - (t-s)^{\alpha-\beta_i-1}, & 0 \leq s \leq t < \infty, \\ t^{\alpha-\beta_i-1}, & 0 \leq t \leq s < \infty, \end{cases} \quad (6)$$

şeklinde gösterilir.

İspat. $D_{0+}^{\alpha}\wp(t) + h(t) = 0$ denkleminde Riemann-Liouville kesirli integrali uygulansın. Önerme 2.0.2'den

$$\wp(t) = -I_{0+}^{\alpha}h(t) + c_1t^{\alpha-1} + c_2t^{\alpha-2} + \frac{c_3}{t^{3-\alpha}}$$

bulunur. Şimdi de (2) SDP'nin $\wp(0) = 0$ koşulu kullanıldığında

$$0 = \wp(0) = -I_{0+}^{\alpha}h(0) + c_10^{\alpha-1} + c_20^{\alpha-2} + c_3t^{\alpha-3}$$

bulunur. Burada $(\alpha - 3) \in (-1, 0]$ 'dır. O zaman

$$0 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^0 (0-s)^{\alpha-1}h(\varsigma)d\varsigma + c_10^{\alpha-1} + c_20^{\alpha-2} + \frac{c_3}{t^{3-\alpha}}$$

eşitliğinden $0 = \frac{c_3}{t^{3-\alpha}}$ bulunur. Bunun için $c_3 = 0$ olmalıdır. Diğer taraftan

$$\wp(t) = -I_{0+}^{\alpha}h(t) + c_1t^{\alpha-1} + c_2t^{\alpha-2}$$

eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır;

$$\wp'(t) = -I_{0+}^{\alpha-1}h(t) + c_1(\alpha-1)t^{\alpha-2} + c_2(\alpha-2)t^{\alpha-3}$$

bulunur. $\wp'(0) = 0$ koşulu kullanılırsa

$$\wp'(0) = -I_{0+}^{\alpha-1}h(0) + c_1(\alpha-1)0^{\alpha-2} + \frac{c_2(\alpha-2)}{t^{\alpha-3}} = 0$$

eşitliğinden $0 = \frac{c_2(\alpha-2)}{t^{\alpha-3}}$ elde edilir. Bunun için $c_2 = 0$ olmalıdır. O halde

$$\wp(t) = -I_{0+}^{\alpha}h(t) + c_1t^{\alpha-1} \quad (7)$$

formundadır. Ayrıca Tanım 2.0.2 kullanılarak

$$D_{0+}^{\alpha-1}\wp(t) = D_{0+}^{\alpha-1}[-I_{0+}^{\alpha}h(t) + c_1t^{\alpha-1}]$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$D_{0+}^{\alpha-1}\wp(t) = -I_{0+}^1h(t) + c_1\Gamma(\alpha) \quad (8)$$

yazılır. $t = \infty$, (8) denkleminde yerine yazılırsa

$$D_{0+}^{\alpha-1}\wp(\infty) = -\int_0^{+\infty} h(\varsigma)d\varsigma + c_1\Gamma(\alpha)$$

olur.

Şimdi $\sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) D_{0+}^{\beta_i} \wp(t) dt$ ifadesinin eşiti bulunsun. (7) eşitliğinde her iki taraftan β_i mertebeden kesirli türevi alınır

$$D_{0+}^{\beta_i} \wp(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1} h(\varsigma) d\varsigma + \frac{c_1 \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} t^{\alpha-\beta_i-1} \quad (9)$$

elde edilir. (9) eşitliği $b_i(t)$ ile çarpılıp 0'dan a_i 'ye integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_0^{a_i} b_i(t) D_{0+}^{\beta_i} \wp(t) dt &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1} h(\varsigma) d\varsigma dt \\ &\quad + \frac{c_1 \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt \end{aligned}$$

dır. Bu eşitlikte her iki tarafın sigma toplamına geçilirse

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) D_{0+}^{\beta_i} \wp(t) dt &= \sum_{i=1}^{m-2} \left[-\frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1} h(\varsigma) d\varsigma dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_1 \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak $\beta I_{0+}^q \wp(\eta)$ ifadesinin eşiti bulunsun. (7) de $t = \eta$ alınarak her iki tarafın I_{0+}^q kesirli integrali alınıp ilgili eşitlik düzenlenirse

$$\beta I_{0+}^q \wp(\eta) = \frac{\beta c_1 \Gamma(\alpha) \eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha + q)} - \beta I_{0+}^{\alpha+q} h(\eta)$$

elde edilir.

(2) probleminin bir koşulu olan $D_{0+}^{\alpha-1} \wp(\infty) = \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) D_{0+}^{\beta_i} \wp(t) dt + \beta I_{0+}^q \wp(\eta)$ ifadesinde bulunan eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -\int_0^{+\infty} h(\varsigma) d\varsigma + c_1 \Gamma(\alpha) &= \sum_{i=1}^{m-2} \left[-\frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1} h(\varsigma) d\varsigma dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_1 \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt \right] + \frac{\beta c_1 \Gamma(\alpha) \eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha + q)} - \beta I_{0+}^{\alpha+q} h(\eta) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$c_1 = \frac{-\sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-\beta_i-1} h(\varsigma) d\varsigma dt}{\Gamma(\alpha) - \sum_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt - \frac{\beta\Gamma(\alpha)\eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha+q)}} \\ + \frac{-\beta I^{\alpha+q} h(\eta) + \int_0^\infty h(\varsigma) d\varsigma}{\Gamma(\alpha) - \sum_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt - \frac{\beta\Gamma(\alpha)\eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha+q)}}$$

olur. c_1 , (7) de yerine konulursa

$$\wp(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-1} h(\varsigma) d\varsigma \\ + \left(\frac{t^{\alpha-1} [1 - \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt + \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt}{\Gamma(\alpha) [1 - \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt - \frac{\beta\eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha+q)}]} \right. \\ \left. + \frac{\frac{\beta\eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha+q)} - \frac{\beta\eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha+q)}}{\Gamma(\alpha) [1 - \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt - \frac{\beta\eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha+q)}]} \right) \times \left(\int_0^\infty h(\varsigma) d\varsigma \right) \\ + \frac{t^{\alpha-1} (-\sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-\beta_i-1} h(\varsigma) d\varsigma dt - \beta I^{\alpha+q} h(\eta))}{\Gamma(\alpha) [1 - \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt - \frac{\beta\eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha+q)}]}$$

şeklinde düzenlenir. Burada

$$\Delta = \Gamma(\alpha) [1 - \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt - \frac{\beta\eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha+q)}]$$

formunda tanımlansın. O halde

$$\wp(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(\varsigma) d\varsigma + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty h(\varsigma) d\varsigma \\ + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt \right) \int_0^\infty h(\varsigma) d\varsigma \\ + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \frac{\beta\eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha+q)} \int_0^\infty h(\varsigma) d\varsigma \\ - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-\beta_i-1} h(\varsigma) d\varsigma dt \\ - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \beta I_{0+}^{\alpha+q} h(\eta)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty k_1(t, \varsigma) h(\varsigma) d\varsigma + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^{a_i} \left(\int_0^\infty b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} h(\varsigma) d\varsigma \right) dt \\
&\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) \int_0^t (t - \varsigma)^{\alpha-\beta_i-1} h(\varsigma) d\varsigma dt \\
&\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \frac{\beta \eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha + q)} \int_0^\infty h(\varsigma) d\varsigma - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha + q)} \int_0^\eta (\eta - \varsigma)^{\alpha+q-1} h(\varsigma) d\varsigma \\
&= \int_0^\infty k_1(t, \varsigma) h(\varsigma) d\varsigma \\
&\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) \left[\int_0^t (t^{\alpha-\beta_i-1} - (t - \varsigma)^{\alpha-\beta_i-1}) h(\varsigma) d\varsigma \right. \\
&\quad \left. + \int_t^\infty t^{\alpha-\beta_i-1} h(\varsigma) d\varsigma \right] dt + \frac{\beta t^{\alpha-1}}{\Delta} \frac{\eta^{\alpha+q-1}}{\Gamma(\alpha + q)} \int_0^\infty h(\varsigma) d\varsigma \\
&\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha + q)} \int_0^\eta (\eta - \varsigma)^{\alpha+q-1} h(\varsigma) d\varsigma \\
&= \int_0^\infty k_1(t, \varsigma) h(\varsigma) d\varsigma + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) \int_0^\infty h_i(t, \varsigma) h(\varsigma) d\varsigma dt \\
&\quad + \frac{t^{\alpha-1} \beta}{\Delta \Gamma(\alpha + q)} \left[\int_0^\eta (\eta^{\alpha+q-1} - (\eta - \varsigma)^{\alpha+q-1}) h(\varsigma) d\varsigma + \int_\eta^\infty \eta^{\alpha+q-1} h(\varsigma) d\varsigma \right] \\
&= \int_0^\infty k_1(t, \varsigma) h(\varsigma) d\varsigma + \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) h_i(t, \varsigma) h(\varsigma) dt d\varsigma \\
&\quad + \frac{t^{\alpha-1} \beta}{\Delta} \int_0^\infty k_2(\eta, \varsigma) h(\varsigma) d\varsigma \\
&= \int_0^\infty \left[k_1(t, \varsigma) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) h_i(t, \varsigma) dt + \frac{t^{\alpha-1} \beta}{\Delta} k_2(\eta, \varsigma) \right] h(\varsigma) d\varsigma \\
&= \int_0^\infty K(t, \varsigma) h(\varsigma) d\varsigma
\end{aligned}$$

'dır. Burada, $K(t, \varsigma)$, $k_1(t, \varsigma)$, $k_2(\eta, \varsigma)$, $h_i(t, \varsigma)$ ve sırasıyla (3),(4),(5),(6) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

Önerme 3.1.2. (3) ile tanımlanan $K(t, \varsigma)$ fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri sağlar:

(i) $\forall (t, \varsigma) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ için $K(t, \varsigma)$ fonksiyonu sürekli ve $K(t, \varsigma) \geq 0$ dır.

(ii) $\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt + \frac{1}{\Delta} \beta \eta^{\alpha+q-1}$ olmak üzere

$\forall (t, \varsigma) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ için $\frac{K(t, \varsigma)}{1+t^{\alpha-1}} \leq \mu$ eşitsizliği mevcuttur.

(iii) $k > 1$ olmak üzere $\forall \varsigma \in [0, \infty)$ için $\min_{t \in [\eta, k\eta]} \frac{K(t, \varsigma)}{1+t^{\alpha-1}} \geq \frac{\eta^{\alpha-1}}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1})} \beta k_2(\eta, \varsigma)$ dır.

İspat. $K(t, \varsigma)$ (3) ile tanımlansın. (i) için ispat açıktır. Önerme 3.1.2 nin (ii) nin ispatı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\frac{K(t, \varsigma)}{1 + t^{\alpha-1}} &= \frac{k_1(t, \varsigma)}{1 + t^{\alpha-1}} + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta(1 + t^{\alpha-1})} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) h_i(t, \varsigma) dt + \frac{t^{\alpha-1} \beta}{\Delta(1 + t^{\alpha-1})} k_2(\eta, \varsigma) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) h_i(t, \varsigma) dt + \frac{1}{\Delta} \beta k_2(\eta, \varsigma) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt + \frac{1}{\Delta} \beta k_2(\eta, \varsigma) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha-\beta_i-1} dt + \frac{1}{\Delta} \beta \eta^{\alpha+q-1} \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Önerme 3.1.2 nin (iii) nin ispatına bakılacak olursa

$$\begin{aligned}
\min_{t \in [\eta, k\eta]} \frac{K(t, \varsigma)}{1 + t^{\alpha-1}} &= \min_{t \in [\eta, k\eta]} \left[\frac{k_1(t, \varsigma)}{1 + t^{\alpha-1}} + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta(1 + t^{\alpha-1})} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) h_i(t, \varsigma) dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta(1 + t^{\alpha-1})} \beta k_2(\eta, \varsigma) \right] \\
&\geq \frac{\eta^{\alpha-1}}{\Delta(1 + \eta^{\alpha-1})} \beta k_2(\eta, \varsigma)
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi, sabit nokta teoremlerinin uygulamasında ve (2) probleminin pozitif çözümlerinin varlığını elde etmede gerekli olan Banach uzayı ve koni tanımlansın.

$$||\wp||_E = \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{|\wp(t)|}{1 + t^{\alpha-1}}$$

ile normlanmış

$$E = \{\wp \in \mathcal{C}[0, \infty) : \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{|\wp(t)|}{1 + t^{\alpha-1}}\}$$

uzayı bir Banach uzayıdır. $\mathbb{P}$ konisi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mathbb{P} = \left\{ \wp \in E : \wp(t) \geq 0, \forall t \in [0, \infty) \right\}.$$

(2) probleminin çözümlerini elde edebilmek için $\mathbb{P}$ konisi için de

$$H\wp(t) = \int_0^\infty K(t, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \quad (10)$$

ile verilen H operatörü tanımlansın. Burada (2) probleminin çözümünün bulunması $\mathbb{P}$ içinde (10) ile verilen H operatörünün sabit noktasının elde edilmesine eş değerdir.

Önerme 3.1.3. $(C_1) - (C_3)$ koşulları sağlansın. O zaman Önerme 3.1.2' den yararlanarak $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ operatörü tamamen süreklidir.

İspat. Her $\wp \in \mathbb{P}$ için $(H\wp(t))$ nin pozitif olduğu açıktır. H nin tamamen sürekli operatör olduğu 4 adımda gösterilecektir.

Adım 1: $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ sürekli bir operatördür.

$\mathbb{P}$ de $n \rightarrow +\infty$ olurken $\wp_n \rightarrow \wp$ dizisi var olsun. Yakınsak dizilerin sınırlı olmasından dolayı $\max\{\|\wp\|_E, \sup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \|\wp_n\|_E\} < r_0$ olacak şekilde bir r_0 reel sayısı vardır. Her $(t, \varsigma) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{K(t, \varsigma)}{1+t^{\alpha-1}} a(\varsigma) |f(\varsigma, \wp_n(\varsigma)) - f(\varsigma, \wp(\varsigma))| d\varsigma \\ & \leq \mu \int_0^\infty a(\varsigma) (f(\varsigma, \wp_n(\varsigma)) + f(\varsigma, \wp(\varsigma))) d\varsigma \\ & = \mu \int_0^\infty a(\varsigma) \left(f(\varsigma, \frac{\wp_n(\varsigma)(1+\varsigma^{\alpha+1})}{1+\varsigma^{\alpha+1}}) + f(\varsigma, \frac{\wp(\varsigma)(1+\varsigma^{\alpha+1})}{1+\varsigma^{\alpha+1}}) \right) d\varsigma \\ & = \mu 2\omega(r_0) \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma \\ & < \infty \end{aligned}$$

olması nedeniyle ve Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi kullanılarak $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|H\wp_n - H\wp\| = \sup_{t \in [0, \infty)} \int_0^\infty \frac{K(t, \varsigma)}{1+t^{\alpha-1}} |f(\varsigma, \wp_n(\varsigma)) - f(\varsigma, \wp(\varsigma))| d\varsigma \rightarrow 0$$

elde edilir. Öyleyse, $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ dizisel süreklidir, yani süreklidir.

Adım 2: $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ düzgün sınırlıdır, gösterilsin.

ϕ , $\mathbb{P}$ nin sınırlı bir alt kümesi olsun. $\forall \wp \in \phi$ için $\|\wp\| \leq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ reel sayısı vardır. $\forall t \in [0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} \|H\wp\|_E &= \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{1}{1+t^{\alpha-1}} \int_0^\infty K(t, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\ &\leq \mu \int_0^\infty a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\ &= \mu \int_0^\infty a(\varsigma) f(\varsigma, \frac{\wp(\varsigma)(1+\varsigma^{\alpha-1})}{(1+\varsigma^{\alpha-1})}) d\varsigma \\ &\leq \mu \int_0^\infty a(\varsigma) \omega\left(\frac{|\wp(\varsigma)|}{1+\varsigma^{\alpha-1}}\right) d\varsigma \\ &\leq \mu \omega(r) \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse $H\phi$ düzgün sınırlıdır denir.

Adım 3: $S > 0$, $t_1, t_2 \in [0, S]$, $t_1 < t_2$ ve $\forall \wp \in \phi$ için $H\phi$, $[0, \infty)$ üzerinde aynı dereceden süreklidir, gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{H\wp(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{H\wp(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| &= \left| \int_0^\infty \frac{K(t_2, \varsigma)}{1+t_2^{\alpha-1}} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty \frac{K(t_1, \varsigma)}{1+t_1^{\alpha-1}} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right| \\
&\leq \left| \int_0^\infty \frac{k_1(t_2, \varsigma)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{k_1(t_1, \varsigma)}{1+t_1^{\alpha-1}} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right| \\
&\quad + \left| \int_0^\infty \left[\left(\frac{t_2^{\alpha-1}}{\Delta(1+t_2^{\alpha-1})} - \frac{t_1^{\alpha-1}}{\Delta(1+t_1^{\alpha-1})} \right) \right. \right. \\
&\quad \times \left. \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) h_i(t, \varsigma) dt \right] a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \left| \right. \\
&\quad + \left| \int_0^\infty \left(\frac{t_2^{\alpha-1}}{\Delta(1+t_2^{\alpha-1})} - \frac{t_1^{\alpha-1}}{\Delta(1+t_1^{\alpha-1})} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\beta k_2(\eta, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right) \right| \\
&\leq \int_0^\infty \left| \frac{k_1(t_2, \varsigma)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{k_1(t_1, \varsigma)}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\quad + \int_0^\infty \left| \frac{k_1(t_2, \varsigma)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{k_1(t_1, \varsigma)}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\quad + \int_0^\infty \left| \frac{t_2^{\alpha-1}}{\Delta(1+t_2^{\alpha-1})} - \frac{t_1^{\alpha-1}}{\Delta(1+t_1^{\alpha-1})} \right| \\
&\quad \times \left(\sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) h_i(t, \varsigma) dt \right) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\quad + \int_0^\infty \left| \frac{t_2^{\alpha-1}}{\Delta(1+t_2^{\alpha-1})} - \frac{t_1^{\alpha-1}}{\Delta(1+t_1^{\alpha-1})} \right| \beta k_2(\eta, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&= \int_0^\infty \left| \frac{k_1(t_2, \varsigma)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{k_1(t_1, \varsigma)}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}}{(1+t_2^{\alpha-1})(1+t_1^{\alpha-1})} k_1(t_1, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}}{\Delta(1+t_2^{\alpha-1})(1+t_1^{\alpha-1})} \\
&\quad \times \left(\sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) h_i(t, \varsigma) dt \right) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}}{(1+t_2^{\alpha-1})(1+t_1^{\alpha-1})} \frac{\beta}{\Delta} k_2(\eta, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \omega(r) \int_0^\infty \left[\left| \frac{k_1(t_2, \varsigma)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{k_1(t_1, \varsigma)}{1+t_2^{\alpha-1}} \right| \right. \\
&\quad + \frac{t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}}{(1+t_2^{\alpha-1})(1+t_2^{\alpha-1})} k_1(t_1, \varsigma) \\
&\quad + \frac{t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}}{\Delta(1+t_2^{\alpha-1})(1+t_2^{\alpha-1})} \sum_{i=1}^{m-2} \int_0^{a_i} b_i(t) h_i(t, \varsigma) dt \\
&\quad \left. + \frac{t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}}{(1+t_2^{\alpha-1})(1+t_1^{\alpha-1})} \frac{\beta}{\Delta} k_2(\eta, \varsigma) \right] a(\varsigma) d\varsigma
\end{aligned}$$

$\rightarrow 0$ ($t_1 \rightarrow t_2$)

Öyleyse, $H\phi$, $[0, \infty)$ üzerinde aynı dereceden süreklidir.

Adım 4: $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ operatörü sonsuzda aynı dereceden yakınsak olduğu incelensin. Herhangi bir $\wp \in \phi$ için,

$$\int_0^\infty a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \leq \omega(r) \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma < \infty$$

ve

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{(H\wp)(t)}{1+t^{\alpha-1}} \right| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1+t^{\alpha-1}} \int_0^\infty K(t, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right| \\
&\leq \int_0^\infty \mu a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\leq \mu \omega(r) \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse, $H\phi$, $[0, \infty)$ üzerinde aynı dereceden yakınsaktır.

Sonuç olarak, $H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ operatörünün tamamen sürekli olduğu gösterilmiştir.

3.2 Sabit Nokta Teoremleri Ve Uygulamaları

3.2.1 Guo-Krasnoselskii Sabit Nokta Teoreminin Uygulaması

Bu bölümde, Guo-Krasnoselskii sabit nokta teoremi ifade edilerek (2) KSDP'nin en az bir pozitif çözüme sahip olduğu gösterilecektir. Burada kolaylık için aşağıdaki kısaltmalar tanımlanmıştır.

$$M = \mu \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma \quad (11)$$

$$m = \frac{\eta^{2\alpha+q-2}}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1})} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+q)} \int_\eta^{k\eta} a(\varsigma) d\varsigma \quad (12)$$

Teorem 3.2.1. *(Guo-Krasnoselskii Sabit Nokta Teoremi) (Guo, D. and Lakshmikantham, V., 1988) (Krasnoselskii, M., 1964) E, Banach uzayı ve $\mathbb{P} \subset E$ ise koni olsun. Ω_1 ve Ω_2 , $\mathbb{P}$ konisinin açık alt kümeleri olsun; burada $0 \in \Omega_1$ ve $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Ayrıca, $H : \mathbb{P} \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow \mathbb{P}$ operatörü, aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde tamamen sürekli bir operatör olsun.*

- (i) $\|H\varphi\| \geq \|\varphi\|$, $\forall \varphi \in \mathbb{P} \cap \partial\Omega_1$, ve $\|H\varphi\| \leq \|\varphi\|$, $\forall \varphi \in \mathbb{P} \cap \partial\Omega_2$; veya
- (ii) $\|H\varphi\| \leq \|\varphi\|$, $\forall \varphi \in \mathbb{P} \cap \partial\Omega_1$, ve $\|H\varphi\| \geq \|\varphi\|$, $\forall \varphi \in \mathbb{P} \cap \partial\Omega_2$.

O halde H 'nin, $\mathbb{P} \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ kümesinde en az bir sabit noktasına sahiptir.

Teorem 3.2.2. $(C_1) - (C_3)$ koşulları sağlansın. $r_2 > r_1 > 0$, $\rho_1 \in (m^{-1}, \infty)$, $\rho_2 \in (0, M^{-1})$ alalım. Ayrıca f fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin.

$$(A_1) \quad \forall (t, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, r_1] \text{ için } f(t, (1+t^{\alpha-1})\varphi) \geq \rho_1 r_1,$$

$$(A_2) \quad \forall (t, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, r_2] \text{ için } f(t, (1+t^{\alpha-1})\varphi) \leq \rho_2 r_2.$$

O zaman (2) SDP'nin $r_1 \leq \|\varphi\|_E \leq r_2$ eşitsizliğini gerçekleyen en az bir pozitif φ çözümü vardır.

İspat. Herhangi bir $\varphi \in \mathbb{P} \cap \partial\phi_1$ için $\phi_1 = \{\varphi \in E : \|\varphi\|_E < r_1\}$ kümesi alınsın. Buradan $\forall t \in [0, \infty)$ için $0 \leq \frac{\varphi(t)}{1+t^{\alpha-1}} \leq r_1$ 'dir.

Kabul edelim ki (A_1) koşulu sağlansın. O halde $\forall (t, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, r_1]$ için $f(t, (1+t^{\alpha-1})\varphi) \geq \rho_1 r_1$ eşitsizliğini sağlayan öyle bir r_1 sayısı vardır. (A_1)

koşulundan

$$\begin{aligned}
\|H\wp\| &= \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{1}{1+t^{\alpha-1}} \left| \int_0^\infty K(t, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right| \\
&\geq \min_{t \in [\eta, k\eta]} \int_0^\infty \frac{K(t, \varsigma)}{1+t^{\alpha-1}} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\geq \int_0^\infty \min_{t \in [\eta, k\eta]} \frac{K(t, \varsigma)}{1+t^{\alpha-1}} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\geq \int_0^\infty \frac{\eta^{\alpha-1} \beta}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1})} k_2(\eta, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\geq \frac{\beta \eta^{\alpha-1}}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1}) \Gamma(\alpha+q)} \int_\eta^{k\eta} \eta^{\alpha+q-1} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\geq \frac{\eta^{2\alpha+q-2}}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1})} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+q)} \rho_1 r_1 \int_\eta^{k\eta} a(\varsigma) d\varsigma \\
&\geq r_1 = \|\wp\|_E.
\end{aligned} \tag{13}$$

Şimdi herhangi bir $\wp \in \mathbb{P} \cap \partial\phi_2$ için $\phi_2 = \{\wp \in E : \|\wp\|_E < r_2\}$ kümesi alınsın.

$\forall t \in [0, \infty)$ için $0 \leq \frac{\wp(t)}{1+t^{\alpha-1}} \leq r_2$ 'dir.

(A_2) koşulundan $\forall(t, \wp) \in [0, \infty) \times [0, r_2]$ için $f(t, (1+t^{\alpha-1})\wp) \leq \rho_2 r_2$ eşitsizliğini sağlayan öyle bir r_2 sayısı vardır. (A_2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|H\wp\|_E &= \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{1}{1+t^{\alpha-1}} \left| \int_0^\infty K(t, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right| \\
&\leq \mu \int_0^\infty a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\leq \mu \rho_2 r_2 \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma \\
&\leq r_2 = \|\wp\|_E
\end{aligned} \tag{14}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (13) ve (14) ile Teorem 3.2.1'den yararlanarak H operatörünün $\mathbb{P} \cap (\overline{\phi_2} \setminus \phi_1)$ de sabit bir noktası vardır. O zaman (2) KSDP'nin $r_1 \leq \|\wp\| \leq r_2$ eşitsizliğini gerçekleyen en az bir pozitif $\wp$ çözümü vardır.

Teorem 3.2.3. $(C_1) - (C_3)$ koşulları sağlansın. $r_2 > r_1 > 0$, $\rho_1 \in (m^{-1}, \infty)$, $\rho_2 \in (0, M^{-1})$ alınsın. O zaman f fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin.

(A_3) $\forall(t, \wp) \in [0, \infty) \times [0, r_1]$ için $f(t, (1+t^{\alpha-1})\wp) \leq \rho_2 r_1$ sağlanır.

(A_4) $\forall(t, \wp) \in [0, \infty) \times [0, r_2]$ için $f(t, (1+t^{\alpha-1})\wp) \geq \rho_1 r_2$ sağlanır.

O zaman (2) SDP'nin $r_1 \leq \|\wp\|_E \leq r_2$ eşitsizliğini gerçekleyen en az bir pozitif $\wp$ çözümü vardır.

İspat. Herhangi bir $\wp \in \mathbb{P} \cap \partial\phi_1$ için $\phi_1 = \{\wp \in E : \|\wp\|_E < r_1\}$ kümesini alalım. $\forall t \in [0, \infty)$ için $0 \leq \frac{\wp(t)}{1+t^{\alpha-1}} \leq r_1$ bulunur.

(A_3) koşulundan $\forall(t, \wp) \in [0, \infty) \times [0, r_1]$ için $f(t, (1+t^{\alpha-1})\wp) \leq \rho_2 r_1$ eşitsizliğini sağlayan öyle bir r_1 sayısı vardır. O halde

$$\begin{aligned} \|H\wp\|_E &= \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{1}{1+t^{\alpha-1}} \left[\left| \int_0^\infty K(t, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right| \right] \\ &\leq \int_0^\infty \mu a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\ &\leq \mu \rho_2 r_1 \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma \\ &\leq r_1 = \|\wp\|_E. \end{aligned} \tag{15}$$

Şimdi herhangi bir $\wp \in \mathbb{P} \cap \partial\phi_2$ için $\phi_2 = \{\wp \in E : \|\wp\|_E < r_2\}$ kümesi alınsın. O zaman (A_4) koşulundan $\forall(t, \wp) \in [0, \infty) \times [0, r_2]$ için $f(t, (1+t^{\alpha-1})\wp) \geq \rho_1 r_2$ eşitsizliğini sağlayan öyle bir r_2 sayısı vardır. O halde

$$\begin{aligned} \|H\wp\| &= \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{1}{1+t^{\alpha-1}} \left| \int_0^\infty K(t, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right| \\ &\geq \min_{t \in [\eta, k\eta]} \int_0^\infty \frac{K(t, \varsigma)}{1+t^{\alpha-1}} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\ &\geq \int_0^\infty \min_{t \in [\eta, k\eta]} \frac{K(t, \varsigma)}{1+t^{\alpha-1}} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\ &\geq \int_0^\infty \frac{\eta^{\alpha-1} \beta}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1})} k_2(\eta, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\ &\geq \frac{\beta \eta^{\alpha-1}}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1}) \Gamma(\alpha+q)} \int_\eta^{k\eta} \eta^{\alpha+q-1} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\ &\geq \frac{\eta^{2\alpha+q-2}}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1})} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+q)} \rho_1 r_2 \int_\eta^{k\eta} a(\varsigma) d\varsigma \\ &\geq r_2 = \|\wp\|_E \end{aligned} \tag{16}$$

(15) ve (16) ile Teorem 3.2.1'i kullanarak H operatörünün $\mathbb{P} \cap (\overline{\phi_2} \setminus \phi_1)$ de sabit bir noktası vardır. O zaman (2) KSDP'nin $r_1 \leq \|\wp\| \leq r_2$ eşitsizliğini gerçekleyen en az bir pozitif $\wp$ çözümü vardır.

3.2.2 Leggett-Williams Sabit Nokta Teoreminin Uygulaması

Bu bölümde (2) KSDP'nin en az üç pozitif çözümünün olduğunu göstermek için Leggett-Williams sabit nokta teoremi verilecektir. Sonradan kullanılmak üzere

$$\Omega = \frac{\eta^{2\alpha+q-2}}{1+\eta^{\alpha-1}}\beta \int_{\eta}^{k\eta} a(\varsigma)d\varsigma$$

$$\Lambda = \Delta\mu\Gamma(\alpha+q) \int_0^{\infty} a(\varsigma)d\varsigma$$

sabitleri tanımlansın.

Teorem 3.2.4. *(Leggett, R.W. and Williams, L.R., 1980) E Banach uzayı, $\mathbb{P}$ ise bu uzayda bir koni olsun.*

$$\mathbb{P}_c := \{\wp \in \mathbb{P} : \|\wp\| < c\}, \mathbb{P}(\theta, a, b) := \{\wp \in \mathbb{P} : \theta(\wp) \geq a, \|\wp\| \leq b\} \quad (17)$$

şeklinde tanımlansın. $H : \overline{\mathbb{P}_c} \rightarrow \overline{\mathbb{P}_c}$ operatörü tamamen sürekli bir operatör ve $\theta, \mathbb{P}$ konisinde sürekli, negatif olmayan, konkav bir fonksiyonel olmak üzere $\wp \in \overline{\mathbb{P}_c}$ için $\theta(\wp) \leq \|\wp\|$ olsun. Eğer

(i) $\{\wp \in \mathbb{P}(\theta, b, d) : \theta(\wp) > b\} \neq \emptyset$ ve $\forall \wp \in \mathbb{P}(\theta, b, d)$ için $\theta(H\wp) > b$;

(ii) $\wp \in \overline{\mathbb{P}_a}$ için $\|H\wp\| < a$;

(iii) $\wp \in \mathbb{P}(\theta, b, c)$ ve $\|H\wp\| > d$ ise $\theta(H\wp) > b$

koşullarını sağlayan $0 < a < b < d \leq c$ sayıları varsa H operatörünün $\overline{\mathbb{P}_c}$ içinde

$$\|\wp_1\| < a, \quad b < \theta(\wp_2) \quad \text{ve} \quad a < \|\wp_3\|, \quad \theta(\wp_3) < b$$

eşitsizliklerini gerçekleyen en az üç $\wp_1, \wp_2, \wp_3$ sabit noktası vardır.

Teorem 3.2.5. $(C_1) - (C_3)$ koşullarının sağlandığı kabul edilsin.

$0 < a < b < \frac{d\gamma(b,c)\Omega}{\omega(c)\Lambda} < d \leq c$ negatif olmayan sayılar olmak üzere

$(A_5) \forall (t, \wp) \in [0, \infty) \times [0, c]$ için $f(t, (1+t^{\alpha-1})\wp) \leq \frac{c}{M}$;

$(A_6) \forall (t, \wp) \in [\eta, k\eta] \times [b, d]$ için $f(t, (1+t^{\alpha-1})\wp) > \frac{b}{m}$;

$(A_7) \forall (t, \wp) \in [0, \infty) \times [0, a]$ için $f(t, (1+t^{\alpha-1})\wp) < \frac{a}{M}$

koşulları sağlansın. O zaman (2) SDP'nin

$\|\wp_1\| < a, \quad b < \theta(\wp_2) \quad \text{ve} \quad a < \|\wp_3\|, \quad \theta(\wp_3) < b$

olacak şekilde $\overline{\mathbb{P}_c}$ konisine ait en az üç pozitif $\wp_1, \wp_2, \wp_3$ çözümü vardır.

Burada M ve m sırasıyla (11), (12) ile belirtilmiştir.

İspat. $\theta : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$ sürekli, negatif olmayan, konkav fonksiyoneli

$$\theta(\wp) = \min_{\eta \leq t \leq k\eta} \frac{\wp(t)}{1+t^{\alpha-1}}$$

şeklinde tanımlansın. $\wp \in \mathbb{P}$ için $\theta(\wp) \leq \|\wp\|_E$ olduğu açıktır. İlk olarak $H : \overline{\mathbb{P}_c} \rightarrow \overline{P_c}$ olduğu gösterilsin. $\wp \in \overline{\mathbb{P}_c}$ alınsın. (A_5) kullanılarak

$$\begin{aligned} \|H\wp\|_E &= \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{1}{1+t^{\alpha-1}} \left| \int_0^\infty K(t, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right| \\ &< \mu \frac{c}{M} \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma \\ &= c \end{aligned}$$

bulunur. O halde Önerme 3.1.3 dikkate alındığında $H : \overline{\mathbb{P}_c} \rightarrow \overline{\mathbb{P}_c}$ operatörü tamamen sürekli bir operatördür. Şimdi, $\{\wp \in \mathbb{P}(\theta, b, c) : \theta(\wp) > b\} \neq \emptyset$ ve $\forall \wp \in \mathbb{P}(\theta, b, d)$ için $\theta(H\wp) > b$ olduğu gösterilsin.

$\wp^*(t) = \frac{b+c}{2}(1+t^{\alpha-1}), t \in [0, \infty)$ alınsın. Açıkça görülür ki $\wp^* \in \mathbb{P}$ ve $\|\wp^*\| = \frac{b+c}{2}$ dir. $\theta(\wp)$ nun tanımından $\theta(\wp^*) = \frac{b+c}{2} > b$ olması nedeniyle $\{\wp \in \mathbb{P}(\theta, b, d) : \theta(\wp^*) > b\} \neq \emptyset$ olur.

$\wp \in \mathbb{P}(\theta, b, d)$ alınsın. O halde, $\forall t \in [\eta, k\eta]$ için $b \leq \frac{\wp(t)}{1+t^{\alpha-1}} \leq d$ olur. O zaman

(A₆) koşulu kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\theta(H_{\wp}) &= \min_{\eta \leq t \leq k\eta} \frac{H_{\wp}(t)}{1+t^{\alpha-1}} \\
&\geq \min_{\eta \leq t \leq k\eta} \int_0^\infty \frac{K(t, \varsigma)}{1+t^{\alpha-1}} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\geq \frac{\eta^{\alpha-1}}{\Delta(1+\eta^{\alpha+1})} \beta \int_0^\infty k_2(\eta, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\geq \frac{\eta^{\alpha-1}}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1})} \beta \int_\eta^{k\eta} k_2(\eta, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&> \frac{\eta^{2\alpha+q-2}}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1})} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+q)} \frac{b}{m} \int_\eta^{k\eta} a(\varsigma) d\varsigma \\
&= b
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.4 (i) koşulu sağlanır. Diğer yandan, $\wp \in \overline{\mathbb{P}_a}$ için $\|H_{\wp}\|_E < a$ olduğu gösterilsin. $\wp \in \overline{\mathbb{P}_a}$ alınsın. (A₇) gereği ,

$$\begin{aligned}
\|H_{\wp}\|_E &= \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{1}{1+t^{\alpha-1}} \left| \int_0^\infty K(t, \varsigma) a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \right| \\
&< \mu \frac{a}{M} \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma \\
&= a
\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle, Teorem 3.2.4 nin (ii) koşulu sağlanır. Son olarak $\theta(H_{\wp}) > b$ olduğu gösterilsin. O halde $t \in [\eta, k\eta]$, $\wp \in \mathbb{P}(\theta, b, c)$ ve $\|H_{\wp}\| > d$ ise

$$\begin{aligned}
\theta(H_{\wp}) &\geq \frac{\eta^{2\alpha+q-2}}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1})} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+q)} \int_\eta^{k\eta} a(\varsigma) f(\varsigma, \wp(\varsigma)) d\varsigma \\
&\geq \frac{\eta^{2\alpha+q-1}}{\Delta(1+\eta^{\alpha-1})} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+q)} \gamma(b, c) \int_\eta^{k\eta} a(\varsigma) d\varsigma \\
&= \frac{\omega(c) \mu \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma}{\Delta \omega(c) \mu \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma} \frac{\eta^{2\alpha+q-2}}{1+\eta^{\alpha-1}} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+q)} \gamma(b, c) \int_\eta^{k\eta} a(\varsigma) d\varsigma \\
&\geq \frac{\|H_{\wp}\|}{\Delta \omega(c) \mu \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma} \frac{\eta^{2\alpha+q-2}}{1+\eta^{\alpha-1}} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+q)} \gamma(b, c) \int_\eta^{k\eta} a(\varsigma) d\varsigma \\
&\geq \frac{d \gamma(b, c) \Omega}{\omega(c) \Lambda} \\
&> b
\end{aligned}$$

elde edilir. O zaman Teorem 3.2.4 nin (iii) şıkkı sağlanır. Leggett-Williams sabit nokta teoreminin tüm koşulları gerçekleştiğinden (2) SDP'nin en az üç pozitif çözümü vardır.

Örnek 3.2.1.

$$F(t, \wp) = f(t, (1 + t^{5/2})\wp) = \begin{cases} \wp, & \wp \in [0, 0.1] \\ \frac{1}{10} + 2499(\wp - \frac{1}{10}), & \wp \in [0.1, 0.2] \\ 250 + \frac{89750(\wp - 0.2)}{49999.8}, & \wp \in [0.2, 50000] \\ 90000, & \wp \in [50000, +\infty) \end{cases}$$

iken

$$\begin{cases} D_{0+}^{\frac{7}{2}}\wp(t) + a(t)f(t, \wp(t)) = 0, & 0 < t < \infty, \\ \wp(0) = \wp'(0) = 0, & D_{0+}^{\frac{7}{2}-1}\wp(\infty) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t} D_{0+}^{\frac{3}{2}}\wp(t)dt + \frac{1}{2}I_{0+}^{\frac{3}{2}}\wp(1). \end{cases}$$

KSDP göz önüne alınsın. Burada,

$$m = 3, \alpha = \frac{7}{2}, q = \frac{3}{2}, \eta = 1, \beta_i = \frac{3}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}, b_i(t) = e^{-t}, k = 2,$$

$$a(t) = e^{-t}, a = 1$$

olduğu görülür.

Basit hesaplamalar ile,

$$\Delta = \Gamma(\alpha) \left[1 - \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^{a_i} b_i(t) t^{\alpha - \beta_i - 1} dt - \frac{\beta \eta^{\alpha + q - 1}}{\Gamma(\alpha + q)} \right] \approx 2.954335,$$

$$M = \mu \int_0^\infty a(\varsigma) d\varsigma \approx 0.500672,$$

$$m = \frac{\eta^{2\alpha + q - 2}}{\Delta(1 + \eta^{\alpha - 1})} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha + q)} \int_\eta^{k\eta} a(\varsigma) d\varsigma \approx 0.000819583.$$

bulunur.

Şimdi, Teorem 3.2.5'nin koşullarının sağlandığı görülsün. Eğer $a = 0.1$ alınırsa,

$$f(t, (1 + t^{\frac{5}{2}})\wp) < 0.1 < \frac{a}{M} \approx 0.19973156, \quad (t, \wp) \in [0, \infty) \times [0, a]$$

bulunur. Böylece Teorem 3.2.5'nin (A_7) koşulu gerçekleşmiş olur. $b = 0.2$ alınırsa,

$$f(t, (1 + t^{\frac{5}{2}})\wp) \geq 250 > \frac{b}{m} \approx 244.027429, \quad (t, \wp) \in [\eta, k\eta] \times [b, d]$$

bulunur. Böylece Teorem 3.2.5'nin (A_6) koşulu gerçekleşmiş olur. Son olarak $c = 50000$ alınsın.

$$f(t, (1 + t^{\frac{5}{2}})\wp) \leq 90000 < \frac{c}{M} \approx 99865, \quad (t, \wp) \in [0, \infty) \times [0, c]$$

bulunur. Böylece Teorem 3.2.5'nin (A_5) koşulu gerçekleşmiş olur. Yani, Teorem 3.2.5'nin tüm koşullarını sağlayan $a = 0.1$, $b = 0.2$, $c = 50000$ sayıları vardır ki $0 < a < b^{\frac{d\gamma(b,c)\Omega}{\omega(c)\Lambda}} < d \leq c$ eşitsizliği gerçekleşir. O halde (2) SDP'nin üç pozitif $\wp_1$, $\wp_2$ ve $\wp_3$ çözümü için

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \frac{|\wp_1(t)|}{1 + t^{5/2}} < 0.1, \quad 0.2 < \min_{t \in [\eta, k\eta]} \frac{\wp_2(t)}{1 + t^{5/2}}$$

ve

$$0.1 < \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{|\wp_3(t)|}{1 + t^{5/2}}, \quad \text{ile} \quad \min_{t \in [\eta, k\eta]} \frac{\wp_3(t)}{1 + t^{5/2}} < 0.2$$

eşitsizlikleri sağlanır.



4 SONUÇ

Bu tez çalışmasında yarı sonsuz aralık üzerinde lineer olmayan KSDP'nin çözümlerinin varlığı ile ilgili bazı çıktılar sunulmuştur. İlk olarak ele alınan problemin çözümlerini elde etme aşamasında kullanılmak üzere ön hazırlık yapılmış ve bazı eşitsizliklere ulaşılmıştır. Ayrıca sabit nokta teoremlerini uygulayabilmek için gerekli olan alt ve üst sınırlar verilmiştir. Bu aşamada problemin çözümlerini elde etmek için uygun operatör tanıtılmış ve pozitif çözümler bu operatörün sabit noktalarına denk olmuştur. Koni üzerindeki bir ve üç pozitif çözümünün varlığı incelenmiştir. Bu araştırmanın KSDP üzerinde çalışılmasının ana nedeni, adi SDP'nin genişlemesi olmasıdır. Böylelikle literatürdeki bazı çalışmalar genelleştirilmiş olacaktır.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans sürecimde benden desteğini, tecrübesini ve bilgisini esirgemeyen, akademik kariyer yolculuğumda motivasyon kaynağım olan sayın danışmanım Doç. Dr. Fulya YÖRÜK DEREN'e ve bu tez çalışması boyunca bilgisini ve yardımlarını eksik etmeyen sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Tuğba ŞENLİK ÇERDİK'e teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca 2210-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında bana burs veren TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı'na teşekkürü borç bilirim.

Eğitim hayatım boyunca bana destek olan ve kariyer yolculuğumda hep arkamda duran aileme sonsuz teşekkürler.

15/12/2023

İrem ÇAM

5 ÖZGEÇMİŞ

Liseyi Emlakbank Süleyman Demirel Anadolu Lisesi'nde okudu. 2015'te kazandığı Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2021 yılında mezun oldu. Pedagojik Formasyon Programını 2020 yılında başarıyla tamamladı. Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Matematik bölümünde yüksek lisans programına 2021 yılında başlamıştır. 2023 yılında girdiği İstanbul Arel Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak görevine devam etmektedir.



KAYNAKÇA

- Abbas, H., Belmekki, M. and Cabada, A.** 2021, Positive solutions for fractional boundary value problems with integral boundary conditions and parameter dependence. *Comput Appl Math.* 2021;40(5):1-14.
- Agarwal, R.P., Bohner, M. and Rehak, P.,** 2003, Half-Linear Dynamic Equations, Nonlinear Analysis and Applications: To V. Lakshmikantham on His 80th Birthday, vol. 1, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, pp. 1–57.
- Ahmad, B., Alsaedi, A., Ntouyas, S.K. and Tariboon, J.,** 2017, Hadamard-Type Fractional Differential Equations, Inclusions and Inequalities. Cham:Springer; 2017.
- Aulbach, B. and Neidhart, L.,** 2004, Integration on measure chains, in: Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations, CRC, Boca Raton, FL, pp. 239–252
- Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E. and Trujillo, JJ.,** 2017, Fractional Calculus. Models and Numerical Methods. 2nd ed., Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, 5. Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.; 2017.
- Borisut, P., Kumam, P., Ahmed, I. and Sitthithakerngkiet K.** 2020, Positive solution for nonlinear fractional differential equation with nonlocal multi-point condition. *Fixed Point Theory.* 2020;21(2):427-440.
- Cabada, A., Dimitrijevic, S., Tomovic, T. and Aleksic S.,** 2017, The existence of a positive solution for nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions. *Math Methods Appl Sci.* 2017;40(6):1880-1891.
- Cabada, A. and Wang, G.,** 2012, Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions. *J Math Anal. Appl.* 2012;389(1):403-411.
- Cabada, A. and Wanassi O.K.** 2021, Existence and uniqueness of positive solutions for nonlinear fractional mixed problems. *Georgian Math J.* 2021;28(6):843-858.

- Cabada, A. and Wang, G.**, 2012, Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions. *J Math Anal. Appl.* 2012;389(1):403-411.
- Caputo, M and Fabrizio, M.**, 2015, A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr Fract Differ Appl.* 2015;1(2):73-85.
- Ge, W. and Zhao, X.**, 2008, Unbounded Solutions for a Fractional Boundary Value Problems on the Infinite Interval, *Acta Appl. Math.*, 109:495-505.
- Guo, D. and Lakshmikantham, V.**, 1988, *Nonlinear Problems in Abstract cones*, Academic Pres, San Diego.
- Han, W. and Jiang, J.**, 2021, Existence and multiplicity of positive solutions for a system of nonlinear fractional multi-point boundary value problems with p-Laplacian operator. *J Appl Anal Comput.* 2021;11(1):351-366.
- Hao, X., Zhang, L. and Liu L.**, 2019, Positive solutions of higher order fractional integral boundary value problem with a parameter. *Nonlin Anal: Modell Control.* 2019;24(2):210-223.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J.**, 1999, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, 204:69-79p.
- Krasnoselskii, M.**, 1964, *Positive solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningen.
- Lang, S.**, 1993, *Graduate texts in mathematics: vol. 142. Real and functional analysis.*(3rd ed.). (p.xiv+580). New York: Springer-Verlag.
- Leggett, R.W., Williams, L.R.**, 1980, A fixed point theorem with application to an infectious disease model. *J. Math. Anal. Appl.* 76, 91-97 (1980)
- Li, Y. and Qi, A.**, 2016, Positive solutions for multi-point boundary value problems of fractional differential equations with p-Laplacian. *Math Methods Appl Sci.* 2016;39(6):1425-1434.
- Liang, S. and Zhang, J.**, 2011, Existence of three positive solutions of m-point boundary value problems for some nonlinear fractional differential

equations on an infinite interval, *Computers and Mathematics with Applications*, 3343-3354p.

X. Li, X. Liu, M. Jia and L. Zhang, 2017, The positive solutions of infinite-point boundary value problem of fractional differential equations on the infinite interval, *Adv. Differ. Equ.*, 2017.

Miller, K.S. and Ross, B. 1993, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: John Wiley; 1993.

Neamprem, K., Muensawat, T., Ntouyas, S.K. and Tariboon, J., 2017, Positive solutions for fractional differential systems with nonlocal Riemann–liouville fractional integral boundary conditions. *Positivity*. 2017;21(3):825-845.

Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. 1993, *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*. Yverdon: Gordon and Breach.

Soykan, Y., 2012, *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Akademik Yayıncılık, 2012.

Wang, W. and Liu, X., 2021 Properties and unique positive solution for fractional boundary value problem with two parameters on the half-line. *J. Appl. Anal. Comput.* 2021, 11, 2491–2507.

