

D. B. ULUDAĞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUĞLA

T.C.

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TOPOLOJİK İYİ SIRALILIK KAVRAMI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLAN BAŞAK ULUDAĞ

HAZİRAN 2021

MUĞLA

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TOPOLOJİK İYİ SIRALILIK KAVRAMI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLAN BAŞAK ULUDAĞ

HAZİRAN 2021

MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

Dilan Başak ULUDAĞ tarafından hazırlanan **TOPOLOJİK İYİ SIRALILIK KAVRAMI ÜZERİNE** başlıklı tezinin, 30/06/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JÜRİSİ

Prof. Dr. Bekir TANAY (**Başkan**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Mustafa Burç KANDEMİR (**Danışman**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Cihangir ALACA (**Üye**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı
Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

İmza:

Matematik Bölüm Başkanı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Mustafa Burç KANDEMİR

İmza:

Danışman, Matematik Anabilim Dalı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 30/06/2021

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini, akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Dilan Başak ULUDAĞ

30/06/2021

ÖZET

TOPOLOJİK İYİ SIRALILIK KAVRAMI ÜZERİNE

Dilan Başak ULUDAĞ

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa Burç KANDEMİR

Haziran 2021, 45 sayfa

Topolojinin genel tanımını standart Öklid topolojisinin karakteristiklerine dayandığından, reel sayılardaki sıralama ile topolojisi arasındaki ilişkiler zaman içinde genelleştirilmiş ve birçok yönden incelenmiştir. Kısmi sıralı kümelerin, üzerindeki topoloji ile uyumluluğu birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Öte yandan; iyi sıralılık, küme teorisinin önemli bir kavramıdır. Ancak, topoloji ile iyi sıralılık kavramları arasında doğrudan bir ilişki yoktur. Bu çalışmada, küme teorisindeki iyi sıralılığın topolojik genellemesi olarak gördüğümüz topolojik iyi sıralılık kavramı tanımlanmış ve temel özellikleri araştırılmış, graflar ile topolojik iyi sıralı uzaylar arasındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kısmi sıralı küme, iyi sıralı küme, minimum eleman, topoloji, topolojik iyi sıralı uzay, üst sınır grafi, insidans topoloji.

ABSTRACT
ON THE CONCEPT OF TOPOLOGICAL WELL-ORDERED SPACES

Dilan Başak ULUDAĞ

Master of Science (M.Sc.)

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Mustafa Burç KANDEMİR

June 2021, 45 pages

Since the general definition of a topology is based on the characteristics of the standard Euclidean topology, the relationships between the ordering on real numbers and its topology have been generalized over time and studied from many aspects. The compatibility of partially ordered sets with the topology on it has been studied by many researchers. Well-orderness, on the other hand, is an important concept of set theory. However, there is no direct relationship between topology and the concept of well-orderness. In this study, we define the concept of topological well-orderness, which we regard as a topological generalization of well-orderness in set theory, and investigate its basic properties. In addition, the relationship between graphs and topological well-ordered spaces is examined.

Keywords: Poset, well-ordered set, minimum element, topology, topological well-ordered space, upper bound graph, incidence topology.

ÖNSÖZ

Bu tezin ortaya çıkması sürecindeki değerli desteklerinden dolayı danışman hocam Doç. Dr. Mustafa Burç KANDEMİR'e teşekkür ederim.

Bu süreçte beni sürekli cesaretlendiren, destekleyen ve her ihtiyacım olduğunda yanımda olup bana yol gösteren abim Cemil ULUDAĞ'a, hayatım boyunca beni destekleyen, bana inanan ve yaşadığım tüm olumsuzluklara rağmen daha iyisini başaracağım konusunda beni yüreklendiren sevgili babam Yusuf ULUDAĞ'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam	1
2. ÖN BİLGİLER	5
2.1. Temel Kavramlar	5
2.1.1. Küme Teorisi	5
2.1.2. Topolojik Kavramlar	12
3. KAYNAK ÖZETLERİ	20
3.1. Sıralama ve Topoloji	20
4. BULGULAR VE DEĞERLENDİRMELER	23
4.1. Topolojik İyi Sıralı Uzaylar	23
4.2. Tis Uzayların Graf Teoriye Uygulanması	35
5. SONUÇLAR	41
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1	(X, \leq) ve (X, \leq_d) posetlerinin Hasse diyagramı.....	7
Şekil 2	(X, \leq) posetinin Hasse diyagramı	25
Şekil 3	(X, \leq) posetinin Hasse diyagramı	26
Şekil 4	(X, \leq) posetinin Hasse diyagramı	31
Şekil 5	$G = (V, E)$ tam grafi	36
Şekil 6	S_5 yıldız grafi	37
Şekil 7	$P = (X, \leq)$ posetinin Hasse diyagramı	38
Şekil 8	$UB(P)$ üst sınır grafi	38
Şekil 9	S_4 yıldız grafi	40

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

\emptyset	Boş küme
\wedge	Ve
\vee	Veya
$X \setminus A$	X kümesinin A kümesinden farkı
A'	A kümesinin tümleyeni
$X \times Y$	X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı
(x, y)	Sıralı ikili
xRy	R bağıntısına göre x elemanı y elemanına bağlı
\leq	Kısmi sıralama bağıntısı
\leq_c	Çarpım sıralama bağıntısı
\leq_d	\leq bağıntısının duali
\leq_s	Sözlük sıralama bağıntısı
(X, \leq)	Kısmi sıralı küme (poset)
$M(X)$	X 'in maksimal elemanları kümesi
$m(X)$	X 'in minimal elemanları kümesi
$eküs(X)$	X kümesinin en küçük üst sınırı
$ebas(X)$	X kümesinin en büyük alt sınırı
$min(X)$	X kümesinin minimumu
$\uparrow x$	x 'e eşit veya x 'ten büyük olan elemanların kümesi
$\downarrow x$	x 'e eşit veya x 'ten küçük olan elemanların kümesi
$\uparrow A$	Up-set
$\downarrow A$	Down-set
$\mathcal{P}(X)$	X kümesinin kuvvet kümesi
(X, τ)	Topolojik uzay
(A, τ_A)	Alt uzay
(X^*, τ^*)	Kapalı genişleme (Closed extension) uzayı
\bar{A}	A kümesinin kapanışı

$\tau_{\mathcal{C}}$	Çarpım topolojisi
τ_F	Fort topolojisi
τ_{Ft}	Fortissimo topolojisi
τ_k	Kutu topolojisi
$\tau(\leq^{\uparrow})$	$\mathcal{B} = \{\uparrow x \mid x \in X\}$ ailesi tarafından üretilen Alexandroff topoloji
$\tau(\leq^{\downarrow})$	$\mathcal{B} = \{\downarrow x \mid x \in X\}$ ailesi tarafından üretilen Alexandroff topoloji
$\sigma(X)$	X üzerindeki Scott topoloji
$G = (V, E)$	G grafi
V	Grafın tepeler kümesi
E	Grafın ayrıtlar kümesi
$d(x)$	x tepesinin derecesi
τ_G	İnsidans (Incidence) topoloji
S_n	n -yıldız grafi
ACC	Artan zincir koşulu
DCC	Azalan zincir koşulu

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

İnsanoğlu, iki olgu arasında seçim yapacaksa, her zaman daha üstün olanı tercih eder ve bu olguları, üstün olandan üstün olmayana doğru sıralayarak veya kıyaslayarak yapar. Dolayısıyla, iki olguyu kıyaslamak (sıralamak, karşılaştırmak) neredeyse ilk insanlara kadar uzanır. Sıralamanın kökenleri mantığa, düşünce yasalarına ve matematiğe dayanmaktadır. Sıralama bağıntısı (veya kısmi sıralama bağıntısı) kavramı, iki durumun veya iki şeyin karşılaştırmasını matematiksel bir çerçeveye sokar. Sıralama, matematiğin hemen her yerinde bulunur. Bununla birlikte, insanlık tarihi boyunca sıralama yapılmasına rağmen, kısmi sıralama kavramından 19. yüzyıldan önce bahsedilmemiştir. Bu bağlamda, George Boole'un çalışmaları büyük önem taşımaktadır. Ayrıca; Charles Sanders Peirce, Richard Dedekind ve Ernst Schröder'in çalışmaları da sıralama teorisi kavramlarını ele almaktadır. Elbette ki, sıralama teorisi hakkında daha ayrıntılı materyaller de bulunmaktadır. Bir sıralama bağıntısı (veya kısmi sıralama bağıntısı) yansıma, geçişme ve ters simetri özelliklerini sağlayan bir bağıntıdır. Formal olarak, X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, $X \times X = \{(x,y) \mid x,y \in X\}$ kümesine X kümesinin kendisiyle *kartezyen çarpımı* ve $X \times X$ 'in herhangi bir β alt kümesine X üzerinde bir *bağıntı* denir. β , X üzerinde bir bağıntı olmak üzere;

- Her $x \in X$ için $(x,x) \in \beta$,
- Her $x,y,z \in X$ için $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ iken, $(x,z) \in \beta$,
- Her $x,y \in X$ için $(x,y) \in \beta$ ve $(y,x) \in \beta$ iken, $x = y$

şartları sağlanıyorsa, β 'ya X kümesi üzerinde *kısmi sıralama bağıntısı* denir. Üzerinde bir β kısmi sıralama bağıntısı olan X kümesine *kısmi sıralı küme* (veya kısaca *poset*) denir ve (X,β) ikilisi ile gösterilir. Genellikle β sembolü yerine \leq sembolü kullanılır ve kısmi sıralı küme (X,\leq) ikilisi ile gösterilir. Eğer $(x,y) \in \leq$ ise, buna x , y 'den önce gelir veya x , y 'den küçük eşittir denir ve $x \leq y$ sembolü ile gösterilir. Eğer $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise, x ile y 'ye *karşılaştırılabilir* (*kıyaslanabilir*) *elemanlar* denir. Bir kısmi sıralı küme içinde tüm

elemanlardan küçük eşit olan elemana *minimum eleman*, tüm elemanlar bir elemandan küçükse de bu elemana *maksimum eleman* denir. Bir kısmi sıralı kümenin boş kümeden farklı her alt kümesinin minimum elemanı varsa, bu kümeye *iyi sıralı küme* ve kısmi sıralama bağıntısına ise, *iyi sıralama bağıntısı* denir. İyi sıralı küme kavramı, Zermelo'nun *İyi Sıralama Teoremi* adı verilen teoremiyle, küme teorisinin yapı taşlarından biri haline gelmiştir.

Teorem 1.1.1 (Zermelo' nun Teoremi (İyi Sıralama Teoremi)). Her küme iyi sıralanabilir.

Georg Cantor, iyi sıralama teoremini "düşüncenin temel ilkesi" olarak değerlendirmiştir (Cantor, 1883). Ancak, \mathbb{R} reel sayılar kümesinin iyi sıralanmasını görselleştirmek zor, hatta imkansız olarak kabul edilir ve böyle bir görselleştirmenin Seçme Aksiyomu'nu içermesi gerekir. 1904'te G. König, böyle bir iyi sıralamanın olmayacağını kanıtladığını iddia etse de sadece birkaç hafta sonra Felix Hausdorff, König'in kanıtında yanlışlık olduğunu tespit etmiştir. Bu sebeple, İyi Sıralama Teoremi'nin Seçme Aksiyomu'na eş değer olduğu ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte, Hausdorff Büyüklük İlkesi ve Zorn Lemma'sı ile eş değer olduğu bilinen bir gerçektir (Birkhoff, 1979; Davey vd., 2002; Harzheim, 2005).

Diğer taraftan; topoloji, matematiğin önemli alt dallarından biridir. Topoloji, iyi tanımlanmış bir matematik disiplini olarak 20. yy. başlarında ortaya çıkmıştır; ancak bazı özel sonuçları birkaç yüzyıl öncesine dayanır. Örneğin, bu özel sonuçlardan belki de topolojinin ilk önemli uygulaması Leonhard Euler'in Königsberg Köprüsü üzerine yayınlamış olduğu çalışmasıdır. Bu çalışmada, topolojide çok önemli bir yere sahip olan ve *çok yüzlü formülü* olarak anılan; V , çok yüzünün köşelerinin sayısı, E , çok yüzünün kenarlarının sayısı ve F , çok yüzünün yüzlerinin sayısı olmak üzere; $V - E + F = 2$ formülünü elde etmiştir. Bazı otoriteler bu analizi topolojinin doğuşuna işaret eden ilk teorem olarak görürler.

Bir topoloji, bir kümenin belirli özelliklerini sağlayan bazı alt kümelerinden oluşan ve kümenin elemanlarının uzamsal (uzaysal) olarak birbirleriyle nasıl bir ilişkide olduğunu ifade eden matematiksel yapıdır. Formal olarak, $X \neq \emptyset$ bir küme ve τ , X kümesinin bazı alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere;

- \emptyset ve X , τ 'nun elemanıdır,
- τ 'nun elemanlarının keyfi sayıdaki birleşimi τ 'nun elemanıdır,
- τ 'nun sonlu sayıdaki elemanlarının kesişimi τ 'nun elemanıdır

şartlarını sağlıyorsa, τ 'ya X kümesi üzerinde bir *topoloji* ve (X, τ) ikilisine de *topolojik uzay* denir. τ 'nın her bir elemanına ise *açık küme* denir.

Genelde, herhangi bir (X, τ) topolojik uzayında, açıkça, açık kümelerin keyfi kesişimi açık olmak zorunda değildir. Topolojik uzaylarda açık kümelerin keyfi kesişiminin açık olduğu durumlar ilk defa Alexandroff (1937) tarafından çalışılmıştır. Bu şekilde tanımlanan, yani, keyfi sayıdaki açık kümenin kesişiminin bir açık küme olduğu topolojik uzaylara, *Alexandroff uzaylar* denir. Alexandroff bir (X, \leq) poseti üzerinde $\mathcal{B} = \{\uparrow x \mid x \in X\}$ veya $\mathcal{B}' = \{\downarrow x \mid x \in X\}$ ailesini alt baz kabul eden bir Alexandroff uzay örneği vermiştir. Böylece, topolojik uzaylar ve kısmi sıralı kümeler arasında direkt bir ilişki kurulmuştur.

Birçok bilim insanı, topoloji ile sıralama arasındaki temel ilişkileri incelemiştir. \mathbb{R} üzerindeki alışılmış sıralama bağıntısı kullanılarak *sıra topolojisi* tanımlanmıştır (Munkres, 2000). Daha sonra, bu kavram tüm tam sıralı kümeler üzerine genişletilmiştir.

(X, τ) bir topolojik uzay ve \leq, X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer $\leq, X \times X$ çarpım uzayında kapalı küme ise (X, τ, \leq) uzayına *kısmi sıralı uzay* (veya kısaca *po-uzay*) denir. Po-uzayları, teorik bilgisayar biliminde, (yüksek boyutlu) otomata teorisinde ve eş zamanlı çalışan sistemlerde sıklıkla kullanılmaktadır (Fajstrup vd., 2006).

Kısmi sıralı kümeler ile topolojik uzaylar arasında kurulan güçlü ilişkilerden bir tanesi de Scott uzaylarıdır. İlk olarak, B. J. Day ve G. M. Kelly tarafından, çok özel bir poset olan, *yönlendirilmiş tam kısmi sıralı küme* veya kısaca *DCPO* üzerinde tanımlanan topolojinin, tüm genellemelerini yaparak ve uygulanabilirliğini göstererek yeniden tanımlayan D. Scott olmuştur (2003). Scott topoloji ismi ilk defa Isbell (1975) tarafından kullanılmıştır. Scott topoloji de, po-uzayları gibi, teorik bilgisayar bilimi ve topolojik kafes teorisinde oldukça kullanışlı kavramlardır.

Engelking vd. (1968), tam sıralanmış bir topolojik uzay üzerinde kapalı kümelerin minimumlarının varlıkları üzerinden topolojik iyi sıralı uzay kavramını tanıtmışlardır. Formal olarak, \leq, X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı olmak üzere; X üzerindeki τ alışılmış sıra topolojisiyle birlikte (X, τ, \leq) üçlüsüne tam sıralı uzay denir. (X, τ, \leq) tam sıralı uzay ve A, X 'in bir alt uzayı olmak üzere; A 'nın boş kümeden farklı her kapalı alt kümesinin bir minimum elemanı varsa A alt uzayına *topolojik iyi sıralı uzay* denir. Artico ve Marconi (2001) ve Gutev (2002, 2004), Engelking vd.'nin tanımını kullanarak seçme kavramı ile topolojik iyi sıralılık kavramı arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir.

Engelking vd. tarafından tanımlanan topolojik iyi sıralılık kavramı çok dar bir kalıba sahiptir. Bu çalışmada; Engelking vd. tarafından verilen topolojik iyi sıralılık kavramından bağımsız bir şekilde ve farklı bir perspektife sahip olan, keyfi bir topolojik uzay ve üzerinde verilen kısmi sıralama bağıntısıyla çok daha geniş kapsama sahip olan topolojik iyi

sıralılık kavramı tanımlanacaktır. Tanımı gereği, iyi sıralılık kavramından biraz farklıdır. Bu sebeple, topolojik iyi sıralı uzayların iyi sıralı kümelerden farklı olduğu, hatta özel bir genişlemesi olduğu kabul edilecektir. Bazı temel tanımlar yapıldıktan sonra, topolojik iyi sıralı uzayların temel özellikleri tartışılacaktır. Daha sonra, iyi sıralılık kavramı ile topolojik iyi sıralılık arasındaki ilişkiler incelenecektir. Bunlarla birlikte, üzerinde keyfi bir topoloji tanımlanmış poseti topolojik iyi sıralı yapmak için iki temel yol tanımlanacaktır. Ayrıca, Alexandroff, Fort, Fortissimo uzaylar gibi özel uzaylar ile topolojik iyi sıralılık arasındaki ilişkiler verilecektir. Daha sonra, bazsal iyi sıralılık kavramı tanımlanacak ve bazı temel özellikleri incelenecektir.

Graf teorisi, tepeler ve ayrıklardan oluşan matematiksel yapıları inceleyen matematiğin bir alt dalıdır. Temelleri, daha önce de belirtildiği gibi, Leonhard Euler'in Königsberg Köprüsü problemini ele aldığı makalesine dayanır. Graf teorsinin, topoloji ve kısmi sıralı kümeler ile direkt olarak ilişkisi bulunmaktadır. Bu çalışmanın son kısmında, topolojik iyi sıralı uzayların graf teorisine bazı uygulamaları verilecektir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmamız boyunca gerek duyacağımız temel kavramlar ve teoremler ile ilgili kısa bir literatür özeti verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümdeki ilgili tanım ve teoremler Çoker, Özer ve Taş (2010), Davey ve Priestly (2002), Koçak (2011), Mucuk (2011), Munkres (2000), Seebach ve Steen (1995), Taylor (1999) ve Yüksel (2006) kaynaklarından alınmıştır.

2.1.1. Küme Teorisi

Belirli bir kurala göre verilmiş nesnelere topluluğuna veya listesine *küme* ve bu nesnelere de *kümenin elemanları* denir. Kümeler genellikle A, B, X gibi büyük harflerle, kümenin elemanları da a, b, x gibi küçük harflerle gösterilir. x 'in bir X kümesinin elemanı olduğu $x \in X$ ile, elemanı olmadığıysa $x \notin X$ gösterimiyle belirtilir. Hiçbir elemanı olmayan kümeye *boş küme* denir ve \emptyset sembolüyle gösterilir.

X ve Y iki küme olmak üzere, X 'in her elemanı aynı zamanda Y 'ye aitse, X kümesine *Y 'nin bir alt kümesi* denir ve $X \subseteq Y$ gösterimi kullanılır. Elemanları kümeler olan kümelere, kümelerin bir *kolleksiyonu* veya *ailesi* denir ve genellikle \mathcal{A}, \mathcal{B} gibi süslü büyük harflerle gösterilir. Bir X kümesinin bütün alt kümelerinin kolleksiyonuna *X 'in kuvvet kümesi* denir ve $\mathcal{P}(X)$ ile gösterilir.

X bir küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere, X 'in A kümesinde bulunmayan elemanlarının kümesine *A 'nın X 'e göre tümleyeni* denir ve A' ile gösterilir. X ve Y iki küme olmak üzere hem X hem de Y kümesinin içinde bulunan elemanların oluşturduğu kümeye *X ve Y 'nin kesişimi* denir ve $X \cap Y$ ile gösterilir. X kümesi veya Y kümesi içinde bulunan elemanlardan oluşan kümeye *X ve Y 'nin birleşimi* denir ve $X \cup Y$ ile gösterilir. Bir X kümesi içinde bulunmasına karşın Y kümesi içinde bulunmayan elemanların oluşturduğu kümeye *X 'in*

Y 'den farkı denir ve $X \setminus Y$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.1. X ve Y kümeleri verilsin. $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere bütün (x, y) sıralı ikililerinin kümesine X ve Y 'nin *kartezien çarpımı* denir ve

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. X ve Y kümeleri verilmiş olsun. $X \times Y$ kümesinin herhangi bir alt kümesine X 'ten Y 'ye bir *bağıntı* denir. R , X 'ten Y 'ye bir bağıntı olsun. Eğer x ile y bağlı ise xRy şeklinde yazılır. X 'ten Y 'ye bir R bağıntısı

$$R = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

ya da

$$(x, y) \in R \iff xRy$$

yazılarak belirtilir.

Özel olarak, $X \times X$ 'in bir alt kümesine X üzerinde bir *bağıntı* denir.

Tanım 2.1.3. R , X kümesi üzerinde bir bağıntı olsun.

- Her $x \in X$ için xRx şartı sağlanıyorsa, R 'ye *yansıyan bağıntı* denir.
- Her $x, y \in X$ için $xRy \implies yRx$ şartı sağlanıyorsa, R 'ye *simetrik bağıntı* denir.
- Her $x, y \in X$ için $(xRy \wedge yRx) \implies x = y$ şartı sağlanıyorsa, R 'ye *ters simetrik bağıntı* denir.
- Her $x, y, z \in X$ için $(xRy \wedge yRz) \implies xRz$ şartı sağlanıyorsa, R 'ye *geçişken bağıntı* denir.

Tanım 2.1.4. X kümesi üzerindeki bir R bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa, R bağıntısına *kısmi sıralama bağıntısı* ve X kümesine R bağıntısıyla birlikte *kısmi sıralı küme (poset)* denir. Genel olarak (X, \leq) ikilisi ile gösterilir.

Örnek 2.1.5. \mathbb{R} gerçel sayılar kümesi üzerinde alışılmış \leq bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.1.6. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme olsun. $x, y \in X$ için $x \leq y$ ya da $y \leq x$ ise, x ve y elemanlarına *karşılaştırılabilir elemanlar* denir.

Uyarı 2.1.7. (X, \leq) kısmi sıralı küme ve $x, y \in X$ olmak üzere; $x \leq y$ fakat $x \neq y$ ise, $x < y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.8. (X, \leq) kısmi sıralı küme ve $x, y \in X$ için $x < y$ olsun. $x < z < y$ olacak şekilde bir $z \in X$ elemanı yoksa; y , x 'i *örter* denir.

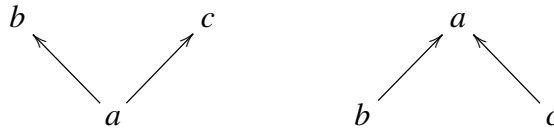
Tanım 2.1.9. X sonlu bir kısmi sıralı küme olsun. X 'in her bir elemanını düzlem üzerindeki noktalar olarak alıp y , x 'i örttüğünde x 'ten y 'ye bir doğru parçası çizilerek oluşturulan şekle *Hasse diyagramı* denir.

Tanım 2.1.10. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme olsun. X kümesi üzerinde

$$x \leq_d y \iff y \leq x$$

kuralı ile tanımlanan \leq_d kısmi sıralama bağıntısına, \leq bağıntısının *duali* denir.

Örnek 2.1.11. X kümesi üzerindeki \leq kısmi sıralama bağıntısı ve bu bağıntıya karşılık gelen \leq_d dual bağıntısının Hasse diyagramı Şekil 1'deki gibidir.



Şekil 1 (X, \leq) ve (X, \leq_d) posetlerinin Hasse diyagramı

Tanım 2.1.12. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in X$ için $x < y$, $y < x$ ya da $x = y$ oluyorsa, bu kısmi sıralama bağıntısına *tam sıralama bağıntısı* ve (X, \leq) sıralı ikilisine de *tam sıralı küme* denir.

Tanım 2.1.13. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme ve $m \in X$ olsun. X 'in m 'den daha büyük olan hiçbir elemanı yoksa, m 'ye X 'in *maksimal elemanı* denir.

Benzer şekilde (X, \leq) kısmi sıralı bir küme ve $n \in X$ olsun. X 'in n 'den daha küçük olan hiçbir elemanı yoksa, n 'ye X 'in *minimal elemanı* denir.

Tanım 2.1.14. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x \in X$ için $x \leq a$ olacak şekilde bir $a \in X$ varsa, a 'ya X kümesinin *en büyük elemanı* ya da *maksimum elemanı* denir.

Benzer şekilde her $x \in X$ için $b \leq x$ olacak şekilde bir $b \in X$ varsa, b 'ye X kümesinin *en küçük elemanı* ya da *minimum elemanı* denir.

Örnek 2.1.15. Bir $X \neq \emptyset$ kümesi için $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesi üzerindeki \subseteq bağıntısını ele alalım. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ kısmi sıralı kümesinin en küçük elemanı \emptyset ve en büyük elemanı X 'tir.

Tanım 2.1.16. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun.

(i) Her $x \in A$ için $x \leq a$ olacak şekilde bir $a \in X$ elemanına A 'nın bir *üst sınırı* denir.

(ii) Her $x \in A$ için $b \leq x$ olacak şekilde bir $b \in X$ elemanına A 'nın bir *alt sınırı* denir.

Örnek 2.1.17. \mathbb{R} kümesi üzerinde alışılmış \leq bağıntısı verilsin.

$A = [-1, 2)$ kümesinin bir üst sınırı $2 \in \mathbb{R} \setminus A$ veya 2'den büyük herhangi bir sayıdır. A 'nın bir alt sınırı da $-1 \in A$ veya -1 'den daha küçük olan herhangi bir sayıdır.

Tanım 2.1.18. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun.

(i) $a \in X$ elemanı, A 'nın üst sınırları kümesinin en küçük elemanı ise, a 'ya A 'nın *en küçük üst sınırı* denir ve $a = eküs(A)$ veya $a = sup(A)$ şeklinde gösterilir.

(ii) $b \in X$ elemanı, A 'nın alt sınırları kümesinin en büyük elemanı ise, b 'ye A 'nın *en büyük alt sınırı* denir ve $b = ebas(A)$ veya $b = inf(A)$ şeklinde gösterilir

Örnek 2.1.19. (\mathbb{R}, \leq) kısmi sıralı kümesinin $A = [-1, 2)$ alt kümesini ele alalım. $eküs(A) = 2$ ve $ebas(A) = -1$ 'dir.

Tanım 2.1.20. (X, \leq) kısmi sıralı küme ve $A \subseteq X$ boş kümeden farklı olsun. Her $x, y \in A$ için $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa; A 'ya *yönlendirilmiş küme* denir. X 'in yönlendirilmiş her alt kümesinin eküsü varsa; X kümesine *DCPO* denir.

Örnek 2.1.21. \mathbb{N} doğal sayılar kümesi, \leq alışılmış sıralama bağıntısı ve $A \subseteq \mathbb{N}$ boş kümeden farklı olsun. Her $x, y \in A$ için, $z = \max(x, y) \in A$ ve $x \leq z$, $y \leq z$ olduğundan A yönlendirilmiş kümedir. Ancak \mathbb{N} doğal sayılar kümesinin eküsü olmadığından DCPO değildir.

Tanım 2.1.22. (X, \leq) tam sıralı bir küme, $a, b \in X$ ve $a < b$ olsun.

$(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$ olmak üzere, (a, b) kümesine X 'te bir *açık aralık* denir.

$[a, b) = \{x \in X \mid a \leq x < b\}$ ve $(a, b] = \{x \in X \mid a < x \leq b\}$ kümelerine *yarı açık aralık* ve $[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$ kümesine de *kapalı aralık* denir.

Tanım 2.1.23. (X, \leq_X) ve (Y, \leq_Y) iki kısmi sıralı küme olsun. $X \times Y$ üzerindeki \leq_s bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$(x_1, y_1) \leq_s (x_2, y_2) \iff (x_1 <_X x_2) \text{ ya da } (x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 \leq_Y y_2)$$

\leq_s bağıntısına *sözlük sıralama bağıntısı* denir.

Örnek 2.1.24. $X = \{1, 2, 3\}$ ve \leq alışılmış sıralama bağıntısı olsun. $X \times X$ üzerindeki sözlük sıralama bağıntısına göre $(2, 1) \leq_s (1, 2)$ olur.

Tanım 2.1.25. (X, \leq_X) ve (Y, \leq_Y) iki kısmi sıralı küme olsun. $X \times Y$ üzerindeki \leq_c bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$(x_1, y_1) \leq_c (x_2, y_2) \iff (x_1 \leq_X x_2) \text{ ve } (y_1 \leq_Y y_2)$$

\leq_c bağıntısına *çarpım sıralama bağıntısı* denir.

Örnek 2.1.26. $X = \{1, 2, 3\}$ ve \leq alışılmış sıralama bağıntısı olsun. $X \times X$ üzerindeki çarpım sıralama bağıntısına göre $(1, 1) \leq_c (2, 2)$ 'dir ancak $(2, 1)$ ve $(1, 2)$ elemanları karşılaştırılmaz elemanlardır.

Tanım 2.1.27. (X, \leq) tam sıralı bir küme olsun. X 'in boş kümeden farklı her alt kümesinin bir en küçük elemanı varsa, X 'e *iyi sıralı küme* denir. Buradaki sıralama bağıntısına da *iyi sıralama bağıntısı* denir.

Teorem 2.1.28 (İyi Sıralama Teoremi). Her küme iyi sıralanabilir.

Sonuç 2.1.29. Sayılamaz iyi sıralı bir küme vardır.

Tanım 2.1.30. X ve Y boş kümeden farklı iki küme olsun. X 'in her x elemanını Y 'nin yalnız bir y elemanına karşılık getiren bir f bağıntısına X 'ten Y 'ye bir *fonksiyon* denir ve $f : X \rightarrow Y$ ile gösterilir. X kümesine fonksiyonun *tanım kümesi*, Y kümesine de fonksiyonun *değer kümesi* denir.

Tanım 2.1.31. $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. X 'in farklı herhangi iki elemanının görüntüleri de farklıysa, f 'ye *birebir (1-1) fonksiyon* denir. Yani;

$$f : X \rightarrow Y \text{ birebirdir} \iff \forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$$

Tanım 2.1.32. $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her bir $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, f 'ye *örtten fonksiyon* denir. Yani;

$$f : X \rightarrow Y \text{ örtendir} \iff \forall y \in Y, \exists x \in X (f(x) = y)$$

Örnek 2.1.33. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu örtendir ancak 1-1 değildir.

Tanım 2.1.34. $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

- (i) Bir $A \subseteq X$ alt kümesi için, Y 'nin $f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ şeklinde tanımlanan alt kümesine A 'nın *f altındaki görüntüsü* denir.
- (ii) Bir $B \subseteq Y$ alt kümesi için, X 'in $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ şeklinde tanımlanan alt kümesine B 'nin *f altındaki ters görüntüsü* denir.

Tanım 2.1.35. $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $g(x) = f(x)$ özelliğini sağlayan $g : A \rightarrow Y$ fonksiyonuna f 'nin A 'ya kısıtlanmış denir ve genellikle f_A ile gösterilir.

Tanım 2.1.36. X, Y kısmi sıralı kümeler ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ oluyorsa, f 'ye *sıra korur fonksiyon* ya da *artan fonksiyon* denir. Her $x, y \in X$ için $x < y \implies f(x) < f(y)$ oluyorsa, f 'ye *sıkı artan fonksiyon* denir.

Tanım 2.1.37. X, Y kısmi sıralı kümeler ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f birebir, örten ve her $x, y \in X$ için $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ koşullarını sağlıyorsa, f 'ye *sırasal eşyapı dönüşümü* denir.

Teorem 2.1.38. $f : A \rightarrow B$ bir sırasal eşyapı dönüşümü ise,

$$x < y \iff f(x) < f(y)$$

dir.

Tanım 2.1.39. X kısmi sıralı küme, $A \subseteq X$ ve $y \in X$ olsun. Her $x \in A$ ve $y \leq x$ için $y \in A$ oluyorsa, A 'ya *down-set* (*aşağı küme*) denir.

Bir $x \in X$ için down-set $\downarrow x = \{y \in X \mid y \leq x\}$ şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde bir $A \subseteq X$ için down-set $\downarrow A = \{y \in X \mid (\exists x \in A) y \leq x\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.40. X kısmi sıralı küme, $A \subseteq X$ ve $y \in X$ olsun. Her $x \in A$ ve $x \leq y$ için $y \in A$ oluyorsa, *up-set* (*yukarı küme*) denir.

Bir $x \in X$ için up-set $\uparrow x = \{y \in X \mid x \leq y\}$ şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde bir $A \subseteq X$ için up-set $\uparrow A = \{y \in X \mid (\exists x \in A) x \leq y\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.41. X kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere;

- (i) A down-settir,
- (ii) Her $x, y \in A$ için, $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak şekilde $z \in A$ vardır

koşulları sağlanıyorsa, A kümesine *sıra ideali* denir.

Örnek 2.1.42. \mathbb{R} gerçel sayılar kümesi üzerinde alışılmış sıralama bağıntısı tanımlansın. $A = [3, -\infty)$ ve $B = (-\infty, 0]$ alt kümeler olmak üzere, A kümesi up-set ve B kümesi down-settir.

Tanım 2.1.43. X kısmi sıralı küme ve her $i \in I$ için $x_i \in X$ olsun.

Her $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ artan zinciri için, $x_k = x_{k+1} = \dots$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa, X kümesi *artan zincir koşulunu (ACC) sağlıyor* denir.

Tanım 2.1.44. X kısmi sıralı küme ve her $i \in I$ için $x_i \in X$ olsun.

Her $\dots \leq x_n \leq \dots \leq x_2 \leq x_1$ azalan zinciri için, $x_k = x_{k+1} = \dots$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa, X kümesi *azalan zincir koşulunu (DCC) sağlıyor* denir.

2.1.2. Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.45. X boş kümeden farklı bir küme ve $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun.

- (i) X ve \emptyset kümeleri τ 'ya aittir,
- (ii) τ 'nın herhangi bir alt kolleksiyonuna ait kümelerin birleşimi yine τ 'ya aittir,
- (iii) τ 'ya ait sonlu çokluktaki elemanların kesişimi τ 'ya aittir

özellikleri sağlanıyorsa, τ 'ya X üzerinde bir *topoloji*, (X, τ) sıralı ikilisine de *topolojik uzay* denir. Eğer bir karışıklık meydana gelmeyecekse, X 'in kendisine bir topolojik uzay diyeceğiz.

Örnek 2.1.46. $X = \{a, b, c, d, e\}$ ve $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ olmak üzere (X, τ) bir topolojik uzaydır.

Tanım 2.1.47. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A üzerindeki $\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$ topolojisine *alt uzay topolojisi* denir. (A, τ_A) uzayına da (X, τ) uzayının bir *alt uzayı* denir. Eğer bir karışıklık meydana gelmeyecekse, A 'nın kendisine X 'in bir alt uzayı diyeceğiz.

Örnek 2.1.48. $X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}\}$ olsun. $A = \{a, b, d\}$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi $\tau_A = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ olur.

Tanım 2.1.49. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ 'nin elemanlarına (X, τ) uzayının açık kümeleri denir.

Tanım 2.1.50. (X, τ) bir topolojik uzay ve $K \subseteq X$ olsun. $X \setminus K$ kümesi (X, τ) uzayında açıksa, K 'ya (X, τ) uzayının *kapalı kümesi* denir.

Örnek 2.1.51. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ olmak üzere (X, τ) uzayının kapalı kümeleri $\emptyset, X, \{a\}, \{b, e, f\}, \{a, b, e, f\}, \{b, c, d, e, f\}$ kümeleridir.

Tanım 2.1.52. (X, τ) bir topolojik uzay ve A, X 'in bir alt kümesi olsun. A 'yı kapsayan tüm kapalı kümelerin ara kesitine A 'nın *kapanışı* denir ve \bar{A} ile gösterilir.

Örnek 2.1.53. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ topolojisi verilsin. Buna göre $A = \{b, c, d\}$ ve $B = \{a, b\}$ kümelerinin kapanışları sırasıyla $\bar{A} = \{b, c, d, e\}$ ve $\bar{B} = \{a, b, e\}$ 'dir.

Tanım 2.1.54. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\bar{A} = X$ ise, A 'ya (X, τ) uzayının *yoğun alt kümesi* denir.

Örnek 2.1.55. $X \neq \emptyset$ ve $\tau = \{\emptyset, X\}$ kaba topolojik uzay olsun. Boş kümeden farklı bir A alt kümesi için $\bar{A} = X$ olduğundan, A kümesi X 'in yoğun bir alt kümesidir.

Tanım 2.1.56. (X, τ) bir topolojik uzay ve \mathcal{B} açık kümelerin bir koleksiyonu olsun.

(i) $\mathcal{B} \subseteq \tau$,

(ii) τ 'nin her elemanı \mathcal{B} 'ye ait bir takım elemanların birleşimi olarak yazılabilir

şartları sağlanıyorsa, \mathcal{B} 'ye τ topolojisinin bir *bazı* denir.

Örnek 2.1.57. $X = \{a, b, c, d, e\}$ ve

$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$ olmak üzere (X, τ) uzayı ve $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, X\}$ koleksiyonu verilsin.

(i) $\mathcal{B} \subseteq \tau$

(ii)

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}, \quad \{a, b, c\} = \{b\} \cup \{a, c\}$$

$$\{a, b, d\} = \{a\} \cup \{b, d\}, \quad \{a, b, c, d\} = \{a, c\} \cup \{b, d\}$$

olduğundan, \mathcal{B} koleksiyonu τ 'nun bir bazıdır.

Teorem 2.1.58. X boş olmayan bir küme ve \mathcal{B} , X 'in alt kümelerinden oluşan bir koleksiyon olsun.

(i) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B,$

(ii) Her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_1 \cap B_2$ kümesi \mathcal{B} 'ye ait bir takım kümelerin birleşimidir

şartları sağlanıyorsa, \mathcal{B} , X üzerinde tek bir topolojinin bazıdır.

Tanım 2.1.59. (X, τ) bir topolojik uzay ve X 'in bazı açık alt kümelerinin bir koleksiyonu \mathcal{A} olsun. Eğer \mathcal{A} 'ya ait kümelerin sonlu ara kesitlerinden elde edilen \mathcal{B} sınıfı τ için bir baz ise, \mathcal{A} 'ya τ topolojisi için bir *alt baz* denir.

Tanım 2.1.60. (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer $U \cup V = X$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde boş kümeden farklı U ve V açık kümeleri varsa, X uzayına *bağlantısız* aksi halde *bağlantılı* denir.

Teorem 2.1.61. (X, τ) topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) (X, τ) uzayı bağlantısızdır.

(ii) X 'in boş küme ve kendisinden farklı hem açık hem de kapalı olan bir alt kümesi vardır.

Tanım 2.1.62. (X, τ) bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. $f(0) = x$ ve $f(1) = y$ olacak şekilde sürekli bir $f : [0, 1] \rightarrow X$ fonksiyonuna X üzerinde x 'ten y 'ye bir yol denir. $f : [0, 1] \rightarrow X$, x 'ten y 'ye bir yol ise, $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow X$, y 'den x 'e bir yoldur.

Tanım 2.1.63. f, X üzerinde x 'ten y 'ye bir yol ve g, X üzerinde y 'den z 'ye bir yol olsun. $f : [0, 1] \rightarrow X$ olmak üzere,

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, 1/2] \\ g(2t - 1), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

fonksiyonu x 'ten z 'ye bir yoldur ve bu yola f ve g yollarının çarpımı denir.

Tanım 2.1.64. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x, y \in X$ ikilisi için x 'ten y 'ye bir yol varsa, X uzayına yol bağlantılı denir.

Tanım 2.1.65. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için $x \in U$ ve $y \notin U$ veya $y \in U$ ve $x \notin U$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa, bu uzaya bir T_0 -uzay denir.

Örnek 2.1.66. $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ olsun.

(i) $a \in X$ için $a \in \{a\}$ ve $b, c \notin \{a\}$

(ii) $b \in X$ için $b \in \{b\}$ ve $c \notin \{b\}$

olduğundan (X, τ) uzayı T_0 'dir.

Tanım 2.1.67. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için $x \in U$, $y \notin U$ ve $y \in V$, $x \notin V$ olacak şekilde bir $U, V \in \tau$ varsa, bu uzaya bir T_1 -uzay denir.

Örnek 2.1.68. (X, τ_a) topolojik uzay ve $\tau_a = \{a \in U \mid U \subseteq X\} \cup \{\emptyset\}$ olmak üzere $x \neq a$ olsun. $U \in \tau_a$ ve $x \in U$ ise τ_a 'nın tanımı gereği $a \in U$ 'dur. O halde $x \in U$, $a \notin U$ olacak şekilde hiçbir $U \in \tau_a$ yoktur. Böylece (X, τ_a) uzayı T_1 değildir.

Teorem 2.1.69. Sonlu bir topolojik uzay T_1 'dir ancak ve ancak ayrıktır.

Tanım 2.1.70. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde bir $U, V \in \tau$ varsa, bu uzaya bir T_2 -uzay veya Hausdorff uzayı denir.

Örnek 2.1.71. $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzay, $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Keyfi $x, y \in X$ elemanları için $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{P}(X)$ 'tir. $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$ ve $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ olduğundan, $(X, \mathcal{P}(X))$ uzayı Hausdorff uzayıdır.

Tanım 2.1.72. X boş kümeden farklı bir küme, $\{(Y_i, \sigma_i) \mid i \in I\}$ topolojik uzayların bir koleksiyonu ve her $i \in I$ için $f_i : X \rightarrow Y_i$ sürekli fonksiyonu verilsin.

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(U) \mid U \in \sigma_i\}$$

koleksiyonunu alt baz kabul eden topolojiye, X üzerindeki *başlangıç topolojisi* denir.

Tanım 2.1.73. Her $i \in I$ için (X_i, τ_i) topolojik uzay, Y boş kümeden farklı bir küme ve her $i \in I$ için $f_i : X_i \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon olsun. Y üzerinde tanımlanan

$$\sigma = \{U \subseteq Y \mid f_i^{-1}(U) \in \tau_i, \forall i \in I\}$$

topolojisine, f_i fonksiyonlarına göre Y üzerindeki *bitiş topolojisi* denir.

Örnek 2.1.74. $X_1 = X_2 = \{a, b, c\}$ olmak üzere X_1 üzerinde, $\tau_1 = \{\emptyset, X_1, \{a, b\}, \{c\}\}$ topolojisi ve X_2 üzerinde de $\tau_2 = \{\emptyset, X_2, \{a\}, \{b, c\}\}$ topolojisi verilsin. $Y = \{1, 2, 3\}$ olsun. $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ fonksiyonu $f_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ ve $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ fonksiyonu ise, $f_2 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ olarak tanımlansın. f_1 ve f_2 fonksiyonlarına göre Y üzerindeki *bitiş topolojisi* $\sigma = \{U \subseteq Y \mid f_1^{-1}(U) \in \tau_1 \text{ ve } f_2^{-1}(U) \in \tau_2\}$ olduğundan, $\sigma = \{\emptyset, Y, \{1, 2\}, \{3\}\}$ olur.

Tanım 2.1.75. X ve Y topolojik uzay, $f : X \rightarrow Y$ örten fonksiyon olsun.

$$U \subseteq Y \text{ alt kümesi } Y \text{ 'de açıktır} \iff f^{-1}(U) \subseteq X \text{ alt kümesi } X \text{ 'te açıktır}$$

koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonuna *bölüm dönüşümü* denir.

Tanım 2.1.76. X bir uzay, A bir küme ve $f : X \rightarrow A$ örten bir fonksiyon olmak üzere; f fonksiyonu bölüm dönüşümü olacak şekilde A üzerinde bir τ topolojisi vardır. Bu topolojiye f tarafından üretilen *bölüm topolojisi* denir.

Tanım 2.1.77. $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ topolojik uzayların keyfi bir koleksiyonu ve $X = \prod_{i \in I} X_i$ olmak üzere, $\pi_i : X \rightarrow X_i, x \mapsto x_i$ izdüşüm fonksiyonlarına göre X üzerindeki başlangıç topolojisine *keyfi çarpım topolojisi* denir.

Tanım 2.1.78. $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ topolojik uzayların bir koleksiyonu ve $X = \prod_{i \in I} X_i$ olmak üzere; $\mathcal{B} = \{\prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \tau_i\}$ koleksiyonunu baz kabul eden X üzerindeki topolojiye *kutu topolojisi* denir.

Tanım 2.1.79. (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her bir $U \in \tau_2$ için $f^{-1}(U) \in \tau_1$ ise, f fonksiyonuna *sürekli fonksiyon* denir.

Örnek 2.1.80. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere; sabit bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu süreklidir. Gerçekten f fonksiyonu sabit ise, her $x \in X$ için $f(x) = c$ olacak şekilde bir $c \in Y$ vardır. Eğer $U \subseteq Y$ alt kümesi Y 'de açık bir küme ise;

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} X, & c \in U \\ \emptyset, & c \notin U \end{cases}$$

ters görüntüsü X 'te açıktır.

Tanım 2.1.81. $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ bir fonksiyon olsun.

- X 'in açık her U alt kümesinin f altındaki görüntüsü olan $f(U)$ kümesi Y 'nin açık bir alt kümesi ise, f 'ye *açık fonksiyon* denir.
- X 'in kapalı her K alt kümesinin f altındaki görüntüsü olan $f(K)$ kümesi Y 'nin kapalı bir alt kümesi ise, f 'ye *kapalı fonksiyon* denir.

Örnek 2.1.82. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ ve $Y = \{x, y, z, w\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, Y, \{y\}, \{y, w\}, \{y, z, w\}\}$ olsun.

$f(a) = f(b) = y, f(c) = w, f(d) = z$ şeklinde tanımlı $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ fonksiyonu verilsin.

•

$$f(\emptyset) = \emptyset \in \tau_2, f(X) = \{y, z, v\} \in \tau_2, f(\{a\}) = \{y\} \in \tau_2$$

$$f(\{a, b\}) = \{y\} \in \tau_2, f(\{a, b, c\}) = \{y, w\} \in \tau_2$$

olduğundan f fonksiyonu açıktır.

- (X, τ_1) uzayının kapalı kümelerinin koleksiyonu $K_1 = \{\emptyset, X, \{d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$, (Y, τ_2) uzayının kapalı kümelerinin koleksiyonu $K_2 = \{\emptyset, Y, \{x\}, \{x, z\}, \{x, z, w\}\}$ olur. $\{d\} \in K_1$ ve $f(\{d\}) = \{z\} \notin K_2$ olduğundan f kapalı fonksiyon değildir.

Tanım 2.1.83. $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ birebir, örten bir fonksiyon olsun. f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de sürekli ise, f 'ye bir *homeomorfizm*, X ve Y uzaylarına da *homeomorfik* denir.

Örnek 2.1.84. $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere;

$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ ve $\tau_2 = \{\emptyset, Y, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$ olsun. f fonksiyonu $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$, $f(e) = 5$ şeklinde tanımlansın.

(i) f birebir ve örtendir.

(ii)

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_1, f^{-1}(\{1\}) = \{a\} \in \tau_1, f^{-1}(\{1, 3, 4\}) = \{a, c, d\} \in \tau_1$$

$$f^{-1}(Y) = X \in \tau_1, f^{-1}(\{3, 4\}) = \{c, d\} \in \tau_1, f^{-1}(\{2, 3, 4, 5\}) = \{b, c, d, e\} \in \tau_1$$

olduğundan, f fonksiyonu sürekli dir.

(iii) f 'nin ters fonksiyonu $f^{-1}(1) = a$, $f^{-1}(2) = b$, $f^{-1}(3) = c$, $f^{-1}(4) = d$, $f^{-1}(5) = e$ şeklinde tanımlanan $f^{-1}: Y \rightarrow X$ fonksiyonudur.

$$(f^{-1})^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_2, (f^{-1})^{-1}(X) = Y \in \tau_2$$

$$(f^{-1})^{-1}(\{a\}) = \{1\} \in \tau_2, (f^{-1})^{-1}(\{a, c, d\}) = \{1, 3, 4\} \in \tau_2$$

$$(f^{-1})^{-1}(\{c, d\}) = \{3, 4\} \in \tau_2, (f^{-1})^{-1}(\{b, c, d, e\}) = \{2, 3, 4, 5\} \in \tau_2$$

olduğundan, f^{-1} fonksiyonu sürekli dir.

(i), (ii) ve (iii)'den X ve Y uzayları homeomorfiktir.

Tanım 2.1.85. (X, τ) topolojik uzayında açık kümelerin keyfi kesişimleri yine açık küme ise, bu uzaya *Alexandroff uzay* denir.

Örnek 2.1.86. X bir küme ve $\mathcal{P}(X)$, X 'in kuvvet kümesi olmak üzere; $(X, \mathcal{P}(X))$ topolojik uzayı bir Alexandroff uzaydır.

Teorem 2.1.87. Her sonlu uzay Alexandroff uzaydır.

Teorem 2.1.88. Bir Alexandroff uzay T_1 'dir ancak ve ancak ayrık uzaydır.

Tanım 2.1.89. Bir topolojik uzayda açıkların sayılabilir kesişimleri de açıksa, bu uzaya *P-uzay* denir.

Tanım 2.1.90. X sonsuz bir küme, $x_0 \in X$ belirli bir eleman olsun.

$$\tau_F = \{U \subseteq X \mid x_0 \notin U\} \cup \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ sonlu}\}$$

ile tanımlanan topolojiye *Fort topolojisi*, (X, τ_F) uzayına da *Fort uzayı* denir.

Tanım 2.1.91. X sayılamaz bir küme, $x_0 \in X$ belirli bir eleman olsun.

$$\tau_{Ft} = \{U \subseteq X \mid x_0 \notin U\} \cup \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ sayılabilir}\}$$

ile tanımlanan topolojiye *Fortissimo topolojisi*, (X, τ_{Ft}) uzayına da *Fortissimo uzayı* denir.

3. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde, sıralama ve topoloji kavramları ile ilişkili tanım ve teoremlerin kısa bir literatür özeti verilecektir.

3.1. Sıralama ve Topoloji

Bu bölümdeki ilgili tanım ve teoremler Al-Hanafi(2008), El Atrash(2005), Engelking, Heath ve Michael (1968), Gierz, Hofmann, Keimel, Lawson, Mislove ve Scott (2003), Gutev ve Nogura (2004), Munkres (2000) ve Raussen (2000) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 3.1.1. X en az iki elemanlı bir tam sıralı küme olsun. \mathcal{B} , aşağıda verilen tipteki tüm kümelerin koleksiyonu olsun.

- (i) $(a, b) \subseteq X$
- (ii) X kümesinin a_0 gibi bir en küçük elemanı varsa, $[a_0, b) \subseteq X$
- (iii) X kümesinin b_0 gibi bir en büyük elemanı varsa, $(a, b_0] \subseteq X$

\mathcal{B} koleksiyonu X üzerinde bir topolojinin bazıdır ve bu topolojiye *sıralama topolojisi* denir.

X kümesinin bir en küçük elemanı yoksa (ii) tipindeki kümelerin olmadığı ve X kümesinin bir en büyük elemanı yoksa (iii) tipindeki kümelerin olmadığı açıktır.

Örnek 3.1.2. \mathbb{N} doğal sayılar kümesi üzerinde alışılmış sıralama bağıntısını ele alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > n - 1\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x < n + 1\}$ kümesi açık olduğundan \mathbb{N} kümesi üzerindeki sıralama topolojisi ayrık topolojidir.

Teorem 3.1.3. (X, \leq) kısmi sıralı küme olsun. Sırasıyla $\mathcal{B} = \{\uparrow x \mid x \in X\}$ ve $\mathcal{B}' = \{\downarrow x \mid x \in X\}$ ailesi tarafından üretilen $\tau(\leq^\uparrow)$ ve $\tau(\leq^\downarrow)$ topolojileri Alexandroff topolojidir. $\mathcal{B} = \{\uparrow x \mid x \in X\}$ ailesi tarafından üretilen $\tau(\leq^\uparrow)$ Alexandroff topolojinin kapalı kümeleri $\downarrow A$ şeklindeki kümelerken $\mathcal{B}' = \{\downarrow x \mid x \in X\}$ tarafından üretilen $\tau(\leq^\downarrow)$ Alexandroff topolojinin kapalı kümeleri $\uparrow A$ tipindeki kümelerdir.

Tanım 3.1.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$x \leq_\tau y \iff \forall U \in \tau, (x \in U \implies y \in U)$$

şeklinde tanımlanan \leq_τ sıralama bağıntısına *Alexandroff özelleşmiş sıralaması* denir.

Tanım 3.1.5. $(X, \tau(\leq^\uparrow))$ T_0 -Alexandroff uzay olsun. X , ACC koşulunu sağlayan bir kısmi sıralı küme ise, bu uzaya *Artinian T_0 -Alexandroff uzay* denir.

Teorem 3.1.6. $(X, \tau(\leq^\uparrow))$ Artinian T_0 -Alexandroff uzay olsun. A 'nın X kümesinin yoğun bir alt kümesi olması için gerek ve yeter koşul $M(X) \subseteq A$ olmasıdır.

Tanım 3.1.7. $(X, \tau(\leq^\uparrow))$ T_0 -Alexandroff uzay olsun. X , DCC koşulunu sağlayan bir kısmi sıralı küme ise, bu uzaya *Noetherian T_0 -Alexandroff uzay* denir.

Teorem 3.1.8. $(X, \tau(\leq^\uparrow))$ T_0 -Alexandroff uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

(i) A açıktır $\iff A = \uparrow A$

(ii) A kapalıdır $\iff A = \downarrow A$

Teorem 3.1.9. $(X, \tau(\leq^\uparrow))$ Noetherian T_0 -Alexandroff uzay ve $m(X)$, X 'in minimal elemanlarının kümesi olsun. $A \subseteq X$ alt kümesi kapalı ise, her $x \in A$ için $\downarrow x \cap m(X) \subseteq A$ 'dır.

Tanım 3.1.10. (X, \leq) bir DCPO ve $U \subseteq X$ olsun.

(i) U kümesi bir up-settir,

(ii) Her $D \subseteq X$ yönlendirilmiş kümesi için $eküs(D)$ var ve $eküs(D) \in U$ ise,
 $D \cap U \neq \emptyset$ 'dir

koşullarını sağlayan U kümesine *Scott açık küme* denir. X 'in tüm Scott açık kümelerinin ailesi X 'te bir topoloji oluşturur, bu topolojiye *Scott topoloji* denir ve $\sigma(X)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.11. (X, \leq) tam sıralı küme ve τ alışılmış sıralama topolojisi olmak üzere; X 'e *tam sıralı uzay* denir.

Tanım 3.1.12. (X, τ) tam sıralı uzay ve $A \subseteq X$ olsun. (A, τ_A) alt uzayında boş kümeden farklı her kapalı kümenin minimumu varsa; (A, τ_A) alt uzayına *topolojik iyi sıralı alt uzay* denir.

Tanım 3.1.13. (X, \leq) kısmi sıralı küme ve (X, τ) topolojik uzay olsun. \leq kısmi sıralama bağıntısı $X \times X$ çarpım uzayında kapalıysa, \leq bağıntısına *kapalı sıralama* ve (X, τ, \leq) uzayına *po-uzay* denir.

4. BULGULAR VE DEĞERLENDİRMELER

Bu bölümün 1. kısmında; yeni bir topolojik iyi sıralılık tanımı yapılarak var olan topolojik iyi sıralılık tanımı genişletilmiş, yarı topolojik iyi sıralı uzay, bazsal iyi sıralı uzay ve topolojik iyi sıralılaştırma kavramları tanımlanmıştır. Kısmi sıralı kümeler ve topolojik uzaylar arasında doğrudan bir ilişki kurulmuş ve temel özellikleri araştırılmıştır. Bu bölümün 2. kısmında ise, topolojik iyi sıralı uzaylarla graflar arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir.

4.1. Topolojik İyi Sıralı Uzaylar

Tanım 4.1.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve \leq , X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Boş küme ve evrensel kümeden farklı her açık kümenin bir minimum elemanı varsa, (X, τ, \leq) üçlüsüne *yarı topolojik iyi sıralı uzay* veya kısaca *y-tis* denir.

Örnek 4.1.2. $X = \{0, 1\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ olsun. Herhangi bir kısmi sıralama bağıntısıyla birlikte (X, τ, \leq) Sierpinski uzayı *y-tis*'tir.

Örnek 4.1.3. Reel sayılar kümesi, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{0\}\}$ topolojisi ve alışılmış sıralama bağıntısı ile birlikte *y-tis*'tir.

Örnek 4.1.4. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayı, alışılmış sıralama bağıntısıyla birlikte *y-tis* değildir.

Teorem 4.1.5. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme olsun. X üzerinde (X, τ, \leq) *y-tis* olacak şekilde bir τ topolojisi vardır.

Kanıt. X üzerinde $\tau = \{\emptyset, X\}$ kaba topolojiyi ele alalım. (X, τ, \leq) uzayının **y-tis** olduğu açıktır. \square

Tanım 4.1.6. (X, τ) bir topolojik uzay ve \leq , X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Boş kümeden farklı her açık kümenin bir minimum elemanı varsa, (X, τ, \leq) üçlüsüne *topolojik iyi sıralı uzay* veya kısaca **tis** denir.

Örnek 4.1.7. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ ve $\leq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (b, c), (a, d)\}$ olmak üzere, (X, τ, \leq) topolojik iyi sıralı uzaydır.

Örnek 4.1.8. Doğal sayılar kümesi üzerinde $\tau = \{\{1, 2, \dots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisi ve alışılmış sıralama bağıntısı tanımlansın. Bu durumda (\mathbb{N}, τ, \leq) **tis**'tir.

Örnek 4.1.9. (X, \leq) keyfi bir kısmi sıralı küme, $a \in X$ ve $\tau_a = \{U \subseteq X \mid a \in U \vee U = \emptyset\}$ olsun. $\min\{X\} = a$ ise, (X, τ_a, \leq) uzayı **tis**'tir.

Tanım 2.1.27'de de belirtildiği gibi iyi sıralı küme, her alt kümesinin bir minimumu olan tam sıralı bir kümedir. Ancak verilen örneklerden de görülebileceği üzere, bir uzayın **tis** olması için verilen kümenin tam sıralı olmasına gerek yoktur.

Biliyoruz ki; \mathbb{R} reel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış sıralama bağıntısına göre oluşturulan sıralama topolojisi, alışılmış topolojidir. Dikkat edilmelidir ki, $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayı ne **tis** ne de **y-tis**'tir. Dolayısıyla, bir kısmi sıralı küme, üzerindeki kısmi sıralama bağıntısına göre oluşturulmuş sıralama topolojisiyle birlikte **tis** ya da **y-tis** olmayabilir. Ancak aşağıdaki örnek, sıralı bir kümenin, üzerinde tanımlanan sıralama topolojisiyle birlikte **tis** olduğunu gösterir.

Örnek 4.1.10. \mathbb{Z}^+ pozitif tamsayılar kümesi üzerinde alışılmış sıralama bağıntısını alalım. \mathbb{Z}^+ üzerindeki sıralama topolojisi ayrık topolojidir. Dolayısıyla bu uzay **tis**'tir.

Teorem 4.1.11. Herhangi bir (X, τ, \leq) uzayı **tis** ise, her bir U açık kümesi DCC koşulunu sağlar.

Kanıt. Bir uzay **tis** ise, boş kümeden farklı her bir U açığının minimum elemanı vardır. Dolayısıyla her bir açık küme DCC koşulunu sağlar. \square

Teorem 4.1.12. (X, \leq) kısmi sıralı küme ve (X, τ) topolojik uzay olsun. Boş kümeden farklı her $U \in \tau$ açık kümesinin maksimum elemanı varsa, (X, τ, \leq_d) *tis*'tir.

Kanıt. Tanım 2.1.10'dan aşıkardır. □

Tanım 4.1.1 ve Tanım 4.1.6'dan aşağıdaki teorem elde edilir.

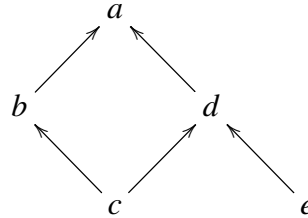
Teorem 4.1.13. (X, τ, \leq) *tis* ise, *y-tis*'tir.

Uyarı 4.1.14. Teoremin tersi doğru değildir.

Örnek 4.1.15. Reel sayılar kümesi üzerinde alışılmış sıralama bağıntısını ve $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{0\}\}$ topolojisini ele alalım. (\mathbb{R}, τ, \leq) *y-tis*'tir, fakat *tis* değildir.

Uyarı 4.1.16. *Y-tis* veya *tis* olmayan bir uzayın alt uzayı *y-tis* veya *tis* olabilir.

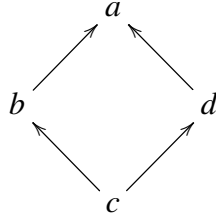
Örnek 4.1.17. $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, d, e\}\}$ ve X kümesi üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı da Şekil 2'deki gibi olsun.



Şekil 2 (X, \leq) posetinin Hasse diyagramı

(X, τ, \leq) uzayı *y-tis* değildir; ancak $A = \{c, d\}$ alt kümesini alırsak $\tau_A = \{\emptyset, A, \{c\}\}$ alt uzay topolojisiyle birlikte (A, τ_A, \leq_A) *tis*'tir. Ayrıca $B = \{c, e\}$ alt kümesi, $\tau_B = \{\emptyset, B, \{c\}\}$ alt uzay topolojisiyle birlikte (B, τ_B, \leq_B) *y-tis*'tir.

Topolojik iyi sıralı bir uzayın alt uzayı topolojik iyi sıralı olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.



Şekil 3 (X, \leq) posetinin Hasse diyagramı

Örnek 4.1.18. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{b, c, d\}\}$ ve X kümesi üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı Şekil 3'deki gibi olsun.

(X, τ, \leq) uzayının *tis* olduğu açıktır. Ancak $A = \{b, d\}$ alt kümesi ve $\tau_A = \{\emptyset, A\}$ alt uzay topolojisiyle birlikte (A, τ_A, \leq_A) uzayı *tis* değildir.

Teorem 4.1.19. (X, τ, \leq) uzayı *tis* ve $A \subseteq X$ açık ise, (A, τ_A, \leq_A) *tis*'tir.

Kanıt. $U \in \tau_A$ olsun. Bu durumda $U = A \cap V$ olacak şekilde bir $V \in \tau$ vardır. $A \in \tau$ olduğundan, $A \cap V = U \in \tau$ olur. (X, τ, \leq) *tis* olduğundan, U 'nun minimum elemanı vardır. Dolayısıyla (A, τ_A, \leq_A) *tis*'tir. \square

Teorem 4.1.20. (X, τ, \leq) *tis* ve $A \subseteq X$, X 'in boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. A down-set ise, (A, τ_A, \leq_A) *tis*'tir.

Kanıt. $U \in \tau_A$ ve $a \in U$ olsun. $U \in \tau_A$ olduğundan, $U = A \cap V$ olacak şekilde bir $V \in \tau$ vardır. Dolayısıyla $a \in A$ ve $a \in V$ 'dir. (X, τ, \leq) *tis* olduğundan, V 'nin $m \leq a$ olacak şekilde bir m minimum elemanı vardır. A down-set olduğundan, $m \in A$ 'dır. Böylece $m \in A \cap V$ olur. $U \subseteq V$ olduğundan m , U 'nun minimum elemanıdır. Dolayısıyla (A, τ_A, \leq_A) *tis*'tir. \square

Teorem 4.1.20'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.21. (X, τ, \leq) *tis* ve A , X 'in boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. A sıra ideali ise, (A, τ_A, \leq_A) *tis*'tir.

Teorem 4.1.22. (X, \leq) minimum elemana sahip kısmi sıralı küme ve (X, τ) topolojik uzay olsun. Boş kümeden farklı her $U \in \tau$ açığı down-set ise, (X, τ, \leq) *tis*'tir.

Kanıt. $\emptyset \neq U \in \tau$ down-set olsun. X kümesinin minimumu olduğundan, Tanım 2.1.39'dan U 'nun minimum elemanı vardır ve $\min U = \min X$ 'tir. Dolayısıyla (X, τ, \leq) *tis*'tir. \square

Teorem 4.1.23. (X, \leq) kısmi sıralı küme, τ_1 ve τ_2 de X üzerinde iki topoloji olsun. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ve (X, τ_2, \leq) *tis* ise, (X, τ_1, \leq) *tis*'tir.

Kanıt. Aşıkardır. \square

Teorem 4.1.24. (X, \leq) ve (Y, \leq') kısmi sıralı iki küme, (X, τ) ve (Y, τ') topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli ve sıra korur bir fonksiyon olsun. (X, τ, \leq) topolojik iyi sıralı uzay ise, $(f(X), \tau'_{f(X)}, \leq'_{f(X)})$ topolojik iyi sıralı uzaydır.

Kanıt. $U, (f(X), \tau'_{f(X)})$ uzayının boş kümeden farklı bir açık kümesi olsun. f sürekli ve (X, τ, \leq) *tis* olduğundan, $f^{-1}(U) \in \tau$ ve her $x \in f^{-1}(U)$ için $m \leq x$ olacak şekilde bir $m \in f^{-1}(U)$ elemanı vardır. f sıra korur olduğundan, $f(m) \leq' f(x)$ ve $f(m), f(x) \in U$ olur. $f(x)$ keyfi olduğundan, $f(m), U$ 'nun minimum elemanıdır. $U \in \tau'_{f(X)}$ keyfi ve U 'nun minimumu olduğundan, $(f(X), \tau'_{f(X)}, \leq'_{f(X)})$ *tis*'tir. \square

Sonuç 4.1.25. (X, \leq_1) ve (Y, \leq_2) kısmi sıralı iki küme, (X, τ_1) ve (Y, τ_2) topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli, örten ve sıra korur bir fonksiyon olsun. (X, τ_1, \leq_1) topolojik iyi sıralı uzay ise, (Y, τ_2, \leq_2) topolojik iyi sıralı uzaydır.

Teorem 4.1.26. (X, \leq_1) ve (Y, \leq_2) kısmi sıralı iki küme, (X, τ_1) ve (Y, τ_2) topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ sırasal eşyapı dönüşümü ve açık fonksiyon olsun. (Y, τ_2, \leq_2) topolojik iyi sıralı uzay ise, (X, τ_1, \leq_1) topolojik iyi sıralı uzaydır.

Kanıt. U , (X, τ_1, \leq_1) uzayının boş kümeden farklı bir açık kümesi olsun. f açık olduğundan, $f(U)$, Y 'de açıktır. (Y, τ_2, \leq_2) *tis* olduğundan, her $y \in f(U)$ için $m \leq_2 y$ olacak şekilde bir $m \in f(U)$ vardır. f sırasal eşyapı dönüşümü olduğundan, $m_0 \leq_1 x$, $f(m_0) = m$ ve $f(x) = y$ olacak şekilde $m_0, x \in U$ vardır. m_0, U 'nun minimum elemanıdır. Dolayısıyla (X, τ_1, \leq_1) *tis*'tir. \square

Teorem 4.1.27. $f : (X, \tau, \leq_1) \rightarrow (Y, \sigma, \leq_2)$ bölüm dönüşümü ve sıra korur fonksiyon olsun. (X, τ, \leq_1) *tis* ise, (Y, σ, \leq_2) bölüm uzayı *tis*'tir.

Kanıt. f bölüm dönüşümü olduğundan, Tanım 2.1.75'ten $\sigma = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \tau\}$ 'dur. Boş kümeden farklı bir $U \in \sigma$ için, $f^{-1}(U) = V$ olacak şekilde bir $V \in \tau$ vardır. (X, τ, \leq_1) *tis* olduğundan, her $x \in V$ için $x_0 \leq_1 x$ olacak şekilde $x_0 \in V$ vardır. f sıra korur fonksiyon olduğundan, $f(x_0) \in U$ ve her $f(x) \in U$ için $f(x_0) \leq_2 f(x)$ 'tir. f örten olduğundan, $U = \bigcup_{x \in X} f(x)$ 'tir ve $f(x_0), U$ 'nun minimum elemanıdır. Dolayısıyla (Y, σ, \leq_2) *tis*'tir. \square

Teorem 4.1.28. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme olsun. $(X, \mathcal{P}(X), \leq)$ ayrık uzayının *tis* olması için gerek ve yeter koşul X kümesinin iyi sıralı olmasıdır.

Kanıt. X kümesinin her alt kümesi, $\mathcal{P}(X)$ topolojisinin bir elemanı olduğundan; aşıkardır. \square

Teorem 4.1.29. (X, \leq) kısmi sıralı küme ve $(X, \tau(\leq^\downarrow))$ Alexandroff uzay olsun. X 'in minimum elemanının olması için gerek ve yeter koşul $(X, \tau(\leq^\downarrow), \leq)$ uzayının *tis* olmasıdır.

Kanıt. X 'in minimum elemanı x_0 olsun. O zaman her $x \in X$ için $x_0 \in \downarrow x$ 'tir. Bunun sonucu olarak; x_0 , boş kümeden farklı tüm açık kümelerin elemanıdır. Dolayısıyla, $(X, \tau(\leq^\downarrow), \leq)$ *tis*'tir. Diğer taraftan; $(X, \tau(\leq^\downarrow), \leq)$ *tis* ise, $X \in \tau(\leq^\downarrow)$ olduğundan, X kümesinin bir minimum elemanı vardır. \square

İyi Sıralama Teoremi 2.1.28'den, her kümenin iyi sıralanabileceğini biliyoruz. Bu bakış açısıyla; her topolojik uzayın, topolojik iyi sıralı yapılabileceğini göstereceğiz. Bunun için ispatı aşıkâr olan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.30. (X, \leq) bir kısmi sıralı küme ve τ , X üzerinde bir topoloji olsun. X iyi sıralı bir küme ise, (X, τ, \leq) uzayı topolojik iyi sıralıdır.

Kanıt. τ , X üzerinde bir topoloji olmak üzere; $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ 'tir. Teorem 4.1.23 ve Teorem 4.1.28'den, aşıkardır. \square

Dikkat edecek olursak, Teorem 4.1.30'dan her iyi sıralı küme, bir topoloji ile birlikte *tis*'tir.

Teorem 4.1.30 ve Teorem 2.1.28 İyi Sıralama Teoremi'nden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.31. Her kısmi sıralı küme, üzerinde bir topolojiyle birlikte topolojik iyi sıralı yapılabilir.

Örnek 4.1.32. \mathbb{Z} tam sayılar kümesi üzerinde keyfi bir topoloji alalım. Alışılmış sıralama bağıntısına göre \mathbb{Z} 'nin minimum elemanı olmadığından (\mathbb{Z}, τ, \leq) *tis* değildir. \mathbb{Z} üzerinde \leq_Z kısmi sıralama bağıntısını aşağıdaki biçimde tanımlayalım.

$$x \leq_Z y \iff (|x| < |y|) \text{ ya da } (|x| = |y| \text{ ve } x \leq y)$$

\leq_Z sıralama bağıntısına göre $0 \leq_Z -1 \leq_Z 1 \leq_Z -2 \leq_Z 2 \leq_Z \dots$ elde edilir. Dolayısıyla (\mathbb{Z}, \leq_Z) iyi sıralıdır. Teorem 4.1.30'dan $(\mathbb{Z}, \tau, \leq_Z)$ *tis*'tir.

Teorem 4.1.30, Sonuç 4.1.31 ve Örnek 4.1.32'den *tis* uzay elde etmeye, uzayın *topolojik iyi sıralılaştırması* (*tisleştirme*) denir.

Uyarı 4.1.33. (X, \leq) kısmi sıralı küme ve (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $m \in X$, X 'in minimum elemanıysa, τ topolojisinden türetilen

$$\tau' = \{U \cup \{m\} \mid U \in \tau\} \cup \{\emptyset\}$$

topolojisiyle birlikte (X, τ', \leq) uzayı *tis*'tir.

Daha genel olarak, farz edelim ki X kümesinin bir minimum elemanı olmasın. Her $x \in X$ için $* \leq x$ olacak şekilde yeni bir $X^* = X \cup \{*\}$ kümesi tanımlayalım. Buradan,

$$\tau^* = \{U \cup \{*\} \mid U \in \tau\} \cup \{\emptyset\}$$

kapalı genişleme topolojisini (ingilizcesi: closed extention topology) elde ederiz (Seebach ve Steen, 1995). Böylece (X^*, τ^*, \leq^*) uzayı, (X, τ, \leq) uzayından türetilmiş bir *tis*'tir.

Tanım 4.1.34. (X, \leq) kısmi sıralı küme ve (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Uyarı 4.1.33'te elde edilen topolojik iyi sıralı (X^*, τ^*, \leq^*) uzayına, (X, τ, \leq) uzayının *tek nokta tisleştirilmesi* denir.

Örnek 4.1.35. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzay ve \leq de, \mathbb{R} üzerindeki alışılmış sıralama bağıntısı olsun. $\mathbb{R}^{-\infty} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ kümesini tanımlayalım. $\mathcal{U}^{-\infty}$, \mathcal{U} topolojisindeki her açığın $-\infty$ elemanı ile birleştirilmesiyle oluşturulur.

$$\mathcal{U}^{-\infty} = \{U \cup \{-\infty\} \mid U \in \mathcal{U}\} \cup \{\emptyset\}$$

Buradan $(\mathbb{R}^{-\infty}, \mathcal{U}^{-\infty}, \leq^{-\infty})$ uzayı *tis*'tir ve $(\mathbb{R}, \mathcal{U}, \leq)$ uzayının tek nokta *tisleştirilmesi*dir.

Dikkat edilmelidir ki Örnek 4.1.35'ten *tisleştirilen* uzay T_0 değildir çünkü, $-\infty$ elemanını diğer elemanlardan ayıramayız.

Teorem 4.1.36. Tek nokta *tisleştirilmesi* ile *tisleştirilen* uzaylar bağlantılıdır.

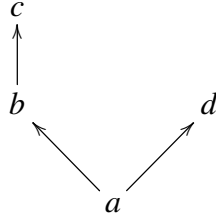
Kanıt. (X, τ, \leq) uzayının tek nokta *tisleştirilmesi* (X^*, τ^*, \leq^*) olsun. Her $\emptyset \neq U \in \tau^*$ açığı için $* \in U$ olduğundan, $* \notin X \setminus U$ 'dur. X 'in boş küme ve kendisinden başka hem açık hem de kapalı bir alt kümesi olmadığından, Teorem 2.1.61'den (X^*, τ^*, \leq^*) bağlantılı uzaydır. \square

Uyarı 4.1.37. *Tis* uzaylar bağlantılı olmayabilir.

Örnek 4.1.38. (X, \leq) kısmi sıralı kümesinin Hasse diyagramı Şekil 4'teki gibi olsun.

$\tau = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{d\}\}$ olmak üzere (X, τ, \leq) uzayı *tis*'tir. $\{d\}$ kümesi bu uzayda hem açık hem de kapalı olduğundan, Teorem 2.1.61'den (X, τ, \leq) bağlantısız uzaydır.

Teorem 4.1.39. (X, τ, \leq) *tis* ve boş kümeden farklı her açık kümenin minimum elemanı x_0 ise, (X, τ, \leq) uzayı bağlantılıdır.



Şekil 4 (X, \leq) posetinin Hasse diyagramı

Kanıt. (X, τ, \leq) *tis* olsun. Boş kümeden farklı her $U \in \tau$ için $\min U = x_0$ olduğundan X 'in $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde bir açık ayrışımı yoktur. Dolayısıyla (X, τ, \leq) bağlantılı uzaydır. \square

Teorem 4.1.40. Tek nokta *tis*leştirilmesi ile *tis*leştirilen uzaylar yol bağlantılıdır.

Kanıt. (X, τ, \leq) uzayının tek nokta *tis*leştirilmesi (X^*, τ^*, \leq^*) olsun. Her $x \in X$ ve $*$ $\in X^* \setminus X$ noktaları için $\alpha_x : I \rightarrow X^*$ olmak üzere;

$$\alpha_x(t) = \begin{cases} x, & t = 0 \\ *, & t \in (0, 1] \end{cases}$$

fonksiyonu, X^* üzerinde x 'ten $*$ 'a bir yoldur. Ayrıca bir $x \in X$ için, Tanım 2.1.62'den $*$ 'dan x 'e, α_x^{-1} yolu vardır. Keyfi $x, y \in X^*$ için, Tanım 2.1.63'ten α_x ve α_y^{-1} yollarının çarpımı x 'ten y 'ye bir yoldur. Dolayısıyla (X^*, τ^*, \leq^*) yol bağlantılıdır. \square

Biliyoruz ki her sonlu T_1 uzayı ayrık uzaydır. Bu argümanı kullanarak aşağıdaki teoremi elde edebiliriz.

Teorem 4.1.41. (X, τ, \leq) sonlu T_1 uzayı *tis* ise, X iyi sıralı kümedir.

Kanıt. Teorem 4.1.28'den, aşıkardır. \square

Teorem 4.1.42. (X, \leq) kısmi sıralı küme, $x_0 \in X$ ve τ topolojisi

$$\tau = \{U \subseteq X \mid x_0 \notin U\} \cup \{X\}$$

olarak tanımlansın. (X, τ, \leq) uzayı *tis* ve her $x \in X$ için $x_0 \leq x$ ya da $x \leq x_0$ ise, X kümesi iyi sıralıdır.

Kanıt. A, X 'in boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $x_0 \notin A$ ise, $A \in \tau$ 'dur. (X, τ, \leq) *tis* olduğundan, A 'nın minimum elemanı vardır.

$x_0 \in A$ olsun. O zaman $A \setminus \{x_0\} \in \tau$ 'dur. (X, τ, \leq) *tis* olduğundan, $A \setminus \{x_0\}$ 'ın minimum elemanı vardır. $\min(A \setminus \{x_0\}) = a$ olsun. Hipoteze göre, her $x \in X$ için $x_0 \leq x$ ya da $x \leq x_0$ olduğundan, $x_0 \leq a$ ya da $a \leq x_0$ 'dır. Böylece $\min A = a$ ya da $\min A = x_0$ 'dır. Dolayısıyla A 'nın minimum elemanı vardır.

Sonuç olarak, X 'in boş kümeden farklı bir keyfi alt kümesinin minimum elemanı olduğundan, X iyi sıralı kümedir. \square

Fort uzayı ve Fortissimo uzayı kavramları Tanım 2.1.90 ve Tanım 2.1.91'de verilmiştir. Teorem 4.1.42'deki argüman ile Fort ve Fortissimo uzaylarının tanımlarından aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.1.43. (X, \leq) kısmi sıralı küme, τ_F ve τ_{Ft} , sırasıyla X üzerindeki Fort topolojisi ve Fortissimo topolojisi olsun.

$$\tau_F = \{U \subseteq X \mid x_0 \notin U\} \cup \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ sonlu}\}$$

$$\tau_{Ft} = \{U \subseteq X \mid x_0 \notin U\} \cup \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ sayılabilir}\}$$

- (i) (X, τ_F, \leq) *tis* ve her $x \in X$ için ya $x_0 \leq x$ ya da $x \leq x_0$ ise, X kümesi iyi sıralıdır.
- (ii) (X, τ_{Ft}, \leq) *tis* ve her $x \in X$ için ya $x_0 \leq x$ ya da $x \leq x_0$ ise, X kümesi iyi sıralıdır.

Teorem 4.1.44. (X, τ, \leq) T_1 -Alexandroff uzayı *tis* ise, X kümesi iyi sıralıdır.

Kanıt. Teorem 2.1.88'den X ayrık uzaydır. X uzayı *tis* olduğundan; Teorem 4.1.28'den, X kümesi iyi sıralıdır. \square

Teorem 4.1.45. (X, τ, \leq) uzayı T_1 , P-uzay, *tis* ve X sayılabilir küme ise; X iyi sıralıdır.

Kanıt. (X, τ, \leq) , P-uzay olduğundan açıkların sayılabilir kesişimleri açıktır. Ayrıca, X kümesi sayılabilir olduğundan, (X, τ, \leq) Alexandroff uzay olur. (X, τ, \leq) uzayı T_1 ve *tis* olduğundan; Teorem 2.1.88'den, X kümesi iyi sıralıdır. \square

Teorem 4.1.46. $(X, \tau(\leq^\uparrow), \leq)$ Artinian T_0 -Alexandroff uzay olsun.

$$DB\tau = \{U \subseteq X \mid U, (X, \tau(\leq^\uparrow), \leq) \text{ uzayının yoğun bir alt kümesidir}\} \cup \{\emptyset\}$$

topolojisini tanımlayalım. $(X, DB\tau, \leq)$ *tis* ise;

- (i) X 'in maksimal elemanlarının kümesi $M(X)$ olmak üzere, $M(X)$ 'in eleman sayısı 1'dir.
- (ii) X kümesi iyi sıralıdır.

Kanıt. (i) Teorem 3.1.6'dan $DB\tau$ topolojisi;

$$DB\tau = \{U \subseteq X \mid M(X) \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}$$

şeklinde yazılabilir. $M(X) \subseteq M(X)$ olduğundan, $M(X) \in DB\tau$ olur. $(X, DB\tau, \leq)$ uzayı *tis* olduğundan, $\min(M(X)) = M$ olacak şekilde $M \in M(X)$ vardır.

$M' \in M(X)$ olsun. $\min(M(X)) = M$ olduğundan, $M \leq M'$ olur. Dolayısıyla $M = M'$ bulunur. M' keyfi ve $M \leq M'$ olduğundan, $M(X)$ tek elemanlı bir kümedir ve $M(X) = \{M\}$ olur.

- (ii) (i)'den $M(X) = \{M\}$ olduğunu biliyoruz. Bu bilgiye göre $DB\tau$ topolojisini tekrar yazarsak;

$$\begin{aligned} DB\tau &= \{U \subseteq X \mid M(X) \subseteq U\} \cup \{\emptyset\} \\ &= \{U \subseteq X \mid \{M\} \subseteq U\} \cup \{\emptyset\} \\ &= \{U = P \cup \{M\} \mid P \in \mathcal{P}(X \setminus \{M\})\} \cup \{\emptyset\} \end{aligned}$$

X 'in boş kümeden farklı bir $U = P \cup \{M\}$ alt kümesini alalım. $(X, DB\tau, \leq)$ uzayı *tis* olduğundan, U 'nun minimum elemanı vardır. $\min U = m$ olsun. $m \in P \cup \{M\}$ olduğundan, $\min P = m$ olduğu açıktır. Bu nedenle, $X \setminus \{M\}$ 'nin keyfi alt kümelerinin

minimum elemanı vardır. Yani, $X \setminus \{M\}$ kümesi iyi sıralıdır. $(X \setminus \{M\}) \cup M(X) = X$ olduğundan, X kümesi iyi sıralıdır.

□

Teorem 4.1.47. $(X, \tau(\leq^\uparrow))$ Noetherian T_0 -Alexandroff uzay olsun. $(X, \tau(\leq^\uparrow), \leq)$ *tis* ise, X 'in her kapalı alt kümesinin bir minimum elemanı vardır ve bu minimum eleman X 'in minimum elemanıdır.

Kanıt. (X, τ, \leq) *tis* olduğundan; Tanım 4.1.6'dan, $x_0 \in X$ minimum elemanı vardır. $m(X) = x_0$ 'dır. Diğer taraftan, $(X, \tau(\leq^\uparrow), \leq)$ Noetherian T_0 -Alexandroff uzay olduğundan, Teorem 3.1.9'dan, X 'in her kapalı A alt kümesindeki her $x \in A$ için $\downarrow x \cap x_0 = \{x_0\} \subseteq A$ olur. x_0 , X 'in minimum elemanı olduğundan, A 'nın minimum elemanı vardır ve x_0 'dır.

□

Tanım 4.1.48. (X, \leq) kısmi sıralı bir küme, (X, τ) topolojik uzay ve \mathcal{B} , τ 'nun bir bazı olsun. \mathcal{B} 'nin her elemanının bir minimum elemanı varsa, (X, τ, \leq) uzayına *bazsal iyi sıralı* ya da kısaca *bis* denir.

Örnek 4.1.49. \mathbb{R} reel sayılar kümesi üzerinde alışılmış sıralama bağıntısını ve \mathcal{U}_l alt limit topolojisini ele alalım. $\mathcal{B}_l = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, \mathcal{U}_l topolojisinin bir bazıdır. Her baz elemanının bir minimumu olduğundan, $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_l, \leq)$ *bis*'tir.

Örnek 4.1.50. (X, \leq) kısmi sıralı küme, $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık topolojik uzay olsun. $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ ve $\min\{x\} = x$ olduğundan, $(X, \mathcal{P}(X), \leq)$ *bis*'tir.

Teorem 3.1.3'ten, $(X, \tau(\leq^\uparrow), \leq)$ Alexandroff uzayının *bis* olduğu açıktır.

Teorem 4.1.51. (X, \leq) kısmi sıralı kümesinin minimum elemanı varsa, $(X, \tau(\leq^\downarrow), \leq)$ uzayı *bis*'tir.

Kanıt. Teorem 3.1.3'ten aşıkardır.

□

Teorem 4.1.52. (X, τ, \leq) uzayı *tis* ise, *bis*'tir.

Kanıt. Tanım 2.1.56'dan $\mathcal{B} \subseteq \tau$ 'dur. O zaman her $B \in \mathcal{B}$ için $B \in \tau$ 'dur. (X, τ, \leq) *tis* olduğundan, B 'nin minimum elemanı vardır. Dolayısıyla (X, τ, \leq) *bis*'tir. \square

Uyarı 4.1.53. Teorem 4.1.52'nin tersi doğru değildir. Örneğin $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_l, \leq)$ *bis*'tir. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $(a, b) \in \mathcal{U}_l$ 'dir. Ancak (a, b) açık aralığının minimumu olmadığından, $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_l, \leq)$ *tis* değildir.

Teorem 4.1.54. (X, τ_1, \leq_1) ve (Y, τ_2, \leq_2) uzayları *tis* olsun. τ_B , $X \times Y$ üzerindeki kutu topolojisi olmak üzere; $X \times Y$ üzerindeki sözlük sıralaması ya da çarpım sıralamasıyla birlikte $(X \times Y, \tau_B, \leq)$ *bis*'tir.

Kanıt. Aşıkardır. \square

Sonuç 4.1.55. Her $i \in I$ için (X_i, τ_i, \leq_i) *tis* ve τ_B , $\prod_{i \in I} X_i$ üzerindeki kutu topolojisi olsun. $(\prod_{i \in I} X_i, \tau_B, \leq)$ uzayı sözlük sıralaması ya da çarpım sıralamasıyla birlikte *bis*'tir.

Teorem 4.1.56. Her $i \in I$ için (X_i, τ_i, \leq_i) *tis* ve τ_C , $\prod_{i \in I} X_i$ üzerindeki çarpım topolojisi olsun. $(\prod_{i \in I} X_i, \tau_C, \leq)$ uzayı sözlük sıralaması ya da çarpım sıralamasıyla birlikte *bis*'tir.

Kanıt. Aşıkardır. \square

4.2. Tis Uzayların Graf Teoriye Uygulanması

Bu bölümdeki ilgili tanım ve teoremler Chartrand ve Zhang (2012), Harary (2018), Kilicman ve Abdulkalek (2018) kaynaklarından alınmıştır.

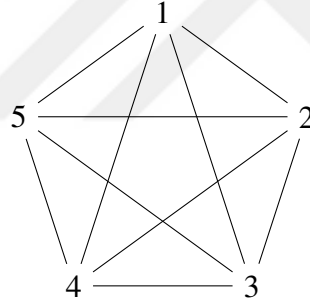
Tanım 4.2.1. V bir küme ve $E \subseteq \{\{x,y\} \mid x,y \in V \text{ ve } x \neq y\}$ olmak üzere, $G = (V,E)$ sıralı ikilisine *graf* denir. V kümesine grafin *tepelere kümesi* ve E 'ye *ayrıntlar kümesi* denir. Sembolik olarak $\{x,y\} \in E$ ayrıtı xy şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 4.2.2. $G = (V,E)$ bir graf olmak üzere, $xy \in E$ olsun. x ve y 'ye *bitişik (komşu) tepeler* denir. Herhangi bir tepeyle komşu olmayan tepelere *izole tepe* denir.

Tanım 4.2.3. $G = (V,E)$ bir graf ve $x \in V$ olmak üzere, x 'in komşu olduğu tepelerin toplam sayısına x 'in *derecesi* denir ve $d(x)$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.4. Bir grafin tüm tepelerin derecesi k ise, bu grafa *k -regüler graf*; herhangi iki tepesi bitişik olan graflara ise *tam graf* denir. n tepeli bir tam grafin tüm tepe dereceleri $n - 1$ 'dir.

Örnek 4.2.5. $V = \{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere, $G = (V,E)$ tam grafi Şekil 5'teki gibidir.

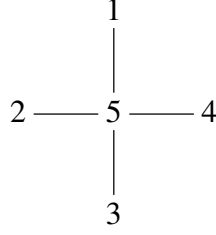


Şekil 5 $G = (V,E)$ tam grafi

Ayrıca her $x \in V$ için $d(x) = 4$ olduğundan, G grafi 4-regülerdir.

Tanım 4.2.6. n tepeli bir grafta sadece tek bir tepenin derecesi $n - 1$ ve geri kalan tepelerin derecesi 1 ise, bu grafa *n -yıldız* denir ve genellikle S_n ile gösterilir.

Örnek 4.2.7. $V = \{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere, S_5 yıldız grafi Şekil 6'daki gibidir.



Şekil 6 S_5 yıldız grafi

Tanım 4.2.8. $G = (V, E)$ bir graf ve $x_0, x_1, \dots, x_i \in V$ olmak üzere;

$$P = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{i-1}x_i\} \subseteq E$$

alt kümesi bulunabiliyorsa, P 'ye x_0 'dan x_i 'ye bir yol denir ve i 'ye P yolunun uzunluğu denir.

Tanım 4.2.9. Bir G grafında herhangi iki tepe arasında en az bir yol varsa, G 'ye bağlantılı graf denir.

Uyarı 4.2.10. (X, \leq) kısmi sıralı küme ve $x, y \in X$ olsun. y 'nin, x 'i örttüğü durumda x ile y arasında bir ayrıt oluşturularak elde edilen $G = (X, E)$ grafını, (X, \leq) kısmi sıralı kümesine karşılık gelen graf olarak adlandıracağız. Diğer bir deyişle; y, x 'i örtüyorsa $xy \in E$ 'dir.

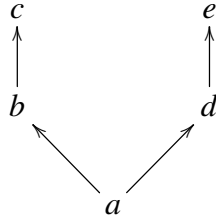
Tanım 4.2.11. (X, \leq) kısmi sıralı kümesine karşılık gelen G grafı bağlantılı graf ise, (X, \leq) kümesine yol bağlantılı poset denir.

Tanım 4.2.12. $G = (V, E)$ bir graf ve $S \subseteq V$ olsun. $V \setminus S$ 'deki her tepe S 'deki en az bir tepeye bitişik ise, S 'ye baskın küme denir. Eleman sayısı en az olan baskın kümenin eleman sayısına da G grafının baskınlık sayısı denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir.

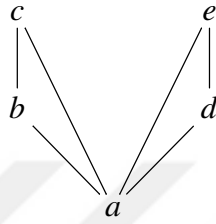
Tanım 4.2.13. $P = (X, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun.

$$xy \in E \iff x, y \leq z \text{ olacak şekilde } z \in X \text{ vardır}$$

koşulunu sağlayan $UB(P)$ grafına üst sınır grafi (ingilizcesi: upper bound graf) denir.



Şekil 7 $P = (X, \leq)$ posetinin Hasse diyagramı



Şekil 8 $UB(P)$ üst sınır grafi

Örnek 4.2.14. $P = (X, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin Hasse diyagramı Şekil 7'deki gibi olsun. Buradan elde edilen $UB(P)$ grafi Şekil 8'deki gibidir.

Tanım 4.2.15. $G = (V, E)$ izole tepesi olmayan bir graf ve bir $e \in E$ için, e ayrıtının uç tepelerinin kümesi I_e olsun. $S_G = \{I_e | e \in E\}$ ailesini V kümesi üzerinde alt baz kabul eden τ_G topolojisine *insidans (incidence) topoloji* denir.

Teorem 4.2.16. $\tau_G, G = (V, E)$ grafından üretilmiş topoloji olsun. Bir $x \in V$ için $d(x) \geq 2$ ise, $\{x\} \in \tau_G$ 'dir.

Teorem 4.2.17. (X, τ, \leq) *tis* olsun. Boş kümeden farklı her U açığı yol bağlantılı posettir.

Kanıt. (X, τ, \leq) *tis* olduğundan, $\emptyset \neq U \in \tau$ için $\min U = m$ olacak şekilde $m \in U$ vardır. Keyfi $x, y \in U$ için $m \leq x$ ve $m \leq y$ 'dir. Dolayısıyla $G = (U, E)$ grafında $mx, my \in E$ 'dir. Buradan x ve y arasında $P = \{xm, my\}$ yolu vardır. G bağlantılı graf olduğundan dolayı, U kısmi sıralı kümesi yol bağlantılıdır. \square

Teorem 4.2.18. (X, τ, \leq) sonlu uzayı *tis* olsun. Keyfi boş kümeden farklı $U \in \tau$ için $\min U = m_u$ olmak üzere, $UB(U)$ grafında $d(m_u) = |U| - 1$ 'dir.

Kanıt. (X, τ, \leq) *tis*, $\emptyset \neq U \in \tau$ ve $\min U = m_u$ olsun. $x \neq m_u$ koşulunu sağlayan her $x \in U$ için, x ile m_u arasında bir ayrıt vardır. Dolayısıyla $d(m_u) = |U| - 1$ 'dir. \square

Teorem 4.2.19. (X, τ, \leq) sonlu topolojik uzay olsun. Her $\emptyset \neq U \in \tau$ için $UB(U)$ grafi tam graf oluyorsa, (X, τ, \leq) *tis*'tir.

Kanıt. $UB(U)$ tam graf ise, Tanım 4.2.13'ten, keyfi $x, y \in U$ için ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ olur. Her elemanı karşılaştırılabilir olduğundan, U zincirdir. Sonlu U zincirinin minimum elemanı vardır. Dolayısıyla (X, τ, \leq) *tis*'tir. \square

Teorem 4.2.20. (X, τ, \leq) sonlu topolojik uzay olsun. Her $\emptyset \neq U \in \tau$ için $UB(U)$ grafi $(|U| - 1)$ -regüler oluyorsa, (X, τ, \leq) *tis*'tir.

Kanıt. n tepeli bir graf $n - 1$ -regüler ise, tam graftır. Dolayısıyla $UB(U)$ grafi tam graftır. Teorem 4.2.19'dan, (X, τ, \leq) *tis*'tir. \square

Teorem 4.2.21. (X, τ, \leq) sonlu uzayı *tis* olsun ve keyfi boş kümeden farklı $U \in \tau$ verilsin. $x \neq y$ koşulunu sağlayan her $x, y \in U$ için $UB(U)$ grafında x ile y tepeleri arasındaki en kısa yolun uzunluğu ya 1 ya da 2'dir.

Kanıt. $x \neq y$ koşulunu sağlayan her $x, y \in U$ için $x \leq y$ ya da $y \leq x$ ise, $UB(U)$ grafında x ile y arasında bir ayrıt vardır. Dolayısıyla xy yolunun uzunluğu 1'dir. x ile y karşılaştırılmaz olsun. (X, τ, \leq) *tis* olduğundan, $\min U = m$ olacak şekilde $m \in U$ vardır ve $m \leq x$, $m \leq y$ olur. $UB(U)$ grafında m ile x ve m ile y arasında ayrıt vardır. $P = \{xm, my\}$, x 'ten y 'ye uzunluğu 2 olan bir yoldur. \square

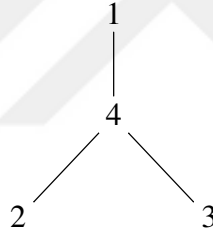
Teorem 4.2.22. (X, τ, \leq) sonlu uzayı *tis* olsun. Her $\emptyset \neq U \in \tau$ için $UB(U)$ grafının bas-kınlık sayısı 1'dir.

Kanıt. (X, τ, \leq) sonlu uzayı *tis* olduğundan, $\emptyset \neq U \in \tau$ için $\min U = m$ olacak şekilde $m \in U$ vardır. $x \neq m$ koşulunu sağlayan her $a \in U$ için $a \leq m$ ve $m \leq a$ olduğundan, a ile m arasında bir ayrıt vardır. Dolayısıyla $S = \{m\}$ kümesi $UB(U)$ grafının baskın kümesidir ve bu grafın baskınlık sayısı 1'dir. \square

Teorem 4.2.23. S_n bir yıldız graf ve bu grafı üst sınır grafı kabul eden kısmi sıralı küme (X, \leq) olsun. Bu durumda (X, τ_G, \leq) *tis*'tir.

Kanıt. S_n yıldız grafında Tanım 4.2.6'dan, $d(x_0) = n - 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır. Tanım 2.1.59 ve Tanım 4.2.15'ten $\mathcal{B}_G = \{x_0\} \cup \{\{x_0, x\} \mid x_0 \neq x, x \in X\}$ ailesi τ_G topolojisinin bazıdır. Her $B \in \mathcal{B}_G$ için $\min B = \min X = x_0$ olduğundan, boş kümeden farklı her $U \in \tau_G$ için $\min U = x_0$ 'dır. Dolayısıyla (X, τ_G, \leq) *tis*'tir. \square

Örnek 4.2.24. Şekil 9'da verilen S_4 yıldız grafını üst sınır grafı kabul eden kısmi sıralı küme (X, \leq) olsun. Buradan $\leq = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ bulunur.



Şekil 9 S_4 yıldız grafı

$d(4) = 3$ ve her $x \in X \setminus \{4\}$ için $d(x) = 1$ olduğundan,

$$\mathcal{B}_G = \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

$$\tau_G = \{\emptyset, X, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

olur. Boş kümeden farklı her $U \in \tau_G$ açığının minimumu olduğundan, (X, τ_G, \leq) *tis*'tir.

5. SONUÇLAR

Tez çalışmasının 2. bölümünde, Çoker, Özer ve Taş (2010), Davey ve Priestly (2002), Koçak (2011), Mucuk (2011), Munkres (2000), Seebach ve Steen (1995), Taylor (1999) ve Yüksel (2006) kaynakları kullanılarak küme teorisi ve topolojik kavramlar hakkında genel tanım ve teoremler verilmiştir. Özel olarak kısmi sıralı küme, iyi sıralı küme, minimum eleman, sıra korur fonksiyon, down-set, up-set kavramlarından ve İyi Sıralama Teoremi'nden; bağlantılı uzay, yol bağlantılı uzay, bölüm topolojisi vb. kavramlardan bahsedilmiş; Alexandroff uzayı, P-uzayı, Fort uzayı ve Fortissimo uzayı gibi bazı özel topolojik uzayların tanımları verilmiştir.

Tez çalışmasının 3. bölümünde, Al-Hanafi(2008), El Atrash(2005), Engelking, Heath ve Michael (1968), Gierz, Hofmann, Keimel, Lawson, Mislove ve Scott (2003), Gutev ve Nogura (2004), Munkres (2000) ve Raussen (2000) kaynakları kullanılarak sıralama ile ilişki kuran bazı özel topolojilerin ve uzayların tanımlarına değinilmiş ve ilgili teoremlere yer verilmiştir. Sıralama topolojisi, Alexandroff özelleşmiş sıralaması ile tanımlanan Alexandroff topoloji, Scott topoloji, topolojik iyi sıralı uzay ve po-uzay kavramlarından bahsedilmiştir.

Tez çalışmasının 4. bölümünün 1. kısmında, yeni bir topolojik iyi sıralı uzay (*tis*) kavramı tanımlanarak var olan topolojik iyi sıralı uzay kavramı genişletilmiştir. Bu kısımda yarı topolojik iyi sıralı uzay (*y-tis*), bazsal iyi sıralı uzay (*bis*), *tis*leştirme ve tek nokta *tis*leştirmesi kavramları da tanımlanmıştır. Bir uzayın *tis* olması için gereken koşullar ve *tis* uzayların sağladığı özellikler incelenmiştir. Ayrıca *tis* uzaylar ve iyi sıralı kümeler arasında bağlantı kurulmuştur. Artinian T_0 -Alexandroff uzay üzerinden $DB\tau$ topolojisi tanımlanmış ve bu topolojiye göre *tis* olan uzaylarla ilgili özelliklere yer verilmiştir.

Tez çalışmasının 4. bölümünün 2. kısmında ise, *tis* uzaylar ve graf teori ile ilişki kurulmuştur. Yol bağlantılı posetlerle *tis* uzaylar arasındaki ilişki gösterilmiş, üst sınır graflar ve *tis* uzaylar arasındaki ilişki incelenmiş ve *tis* uzayların üst sınır graflarının sağladığı bazı özellikler gösterilmiştir.

Her kısmi sıralı küme ile bu kümenin sıra kompleksi adı verilen bir soyut simleks kompleks ilişkilendirilebilir (Wachs, 2007). Dolayısıyla, ileriki çalışmalarda *tis* uzaylar ve sıra kompleksi arasındaki ilişkiler incelenebilir. Ayrıca yönlü graflar ve *tis* uzaylar arasındaki

ilişkiler üzerine çalışmalar yapılabilir. Yönsüz bir grafin tepeleri arasında, tepe dereceleri ve komşuluklar dikkate alınarak sıra belirlenebilir ve tepe kümesi kısmi sıralı bir küme haline getirilebilir. Buradan yola çıkararak insidans topoloji ve *ti*s arasındaki bağlantı incelenebilir.



KAYNAKLAR

Al-Hanafi, W.M. (2008) *Scott Topology and its Relation to the Alexandroff Topology*, M.Sc. Degree, The Islamic University, 59s.

Alexandroff, P. (1937) *Diskrete Räume*, Mat. Sb. (N.S), 2 (44)-3: 501-518.

Artico, G. ve Marconi, U. (2001) *Selections and topologically well-ordered spaces*, Topology and its Applications, 115 (3): 299-303.

Cantor, G. (1883) *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, 21: 545-591.

Chartrand, G. ve Zhang, P. (2012) *A First Course in Graph Theory*, Dover Publications, New York, 450s.

Çoker, D., Özer, O. ve Taş, K. (2010) *Soyut Matematik*, 7. Baskı, Bilim Yayıncılık, Ankara, 317s.

Davey, B.A. ve Priestley, H.A. (2002) *Introduction to Lattices and Order*, 4. Baskı, Cambridge University Press, Cambridge, 298s.

El Atrash, M. ve Mandy, H. (2005) *On T_0 -Alexandroff spaces*, Journal of The Islamic University, 13 (2): 9-46.

Engelking, R., Heath, R.W. ve Michael E. (1968) *Topological Well-Ordering and Continuous Selections*, Inventiones Mathematicae, 6: 150-158.

Fajstrup, L., Raussen, M. ve Goubault, E. (2006) *Algebraic topology and concurrency*, Theoretical Computer Science, 357: 241-278.

Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M. ve Scott, D.S.(2003) *Continuous Lattices and Domains*, Cambridge University Press, New York, 591s.

Gutev, V. (2002) *Fell-Continuous Selections and Topologically Well-Orderable Spaces II*, 9th Prague Topological Symposium, 19-25 August, Prague, Czech Republic, 147-153

Gutev, V. ve Nogura, T. (2004) *Fell-Continuous Selections and Topologically Well-Orderable*

Spaces, *Mathematika*, 51 (1-2): 163-169.

Harary, F. (2018) *Graph Theory*, CRC Press, Boca Raton, 288s.

Kilicman, A. ve Abdulkalek, K. (2018), *Topological Spaces Associated With Simple Graphs*, *Journal of Mathematical Analysis*, 9 (4): 44-52.

Koçak, M. (2011) *Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar*, Kampüs Yayıncılık, Eskişehir, 507s.

Mucuk, O. (2010) *Topoloji ve Kategori*, 2. Baskı, Nobel Yayın, Ankara, 462s.

Munkres, J.R.(2000) *Topology*, 2. Baskı, Prentice Hall Press, ABD, 537s.

Rausen, M. (2000) *On The Classification of Dipaths in Geometric Models for Concurrency*, *Math. Struct. in Comp. Science*, 10: 427-457.

Seebach, J.A. ve Jr. Steen, L.A. (1995) *Counterexamples in Topology*, Dover Publications, New York, 244s.

Taylor, P. (1999) *Practical Foundations of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 572s.

Wachs, M.L. (2007) *Poset Topology: Tools and Applications*, 497-615, Miller, E., Reiner, V. ve Sturmfels, B. (editörler), *Geometric Combinatorics, Volume 13*, IAS/Park City Mathematics Series, 691s.

Yüksel, Ş. (2006) *Genel Topoloji*, Genişletilmiş 5. Baskı, Eğitim Kitabevi Yayınları, İstanbul, 485s.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad: D***n B***k U***Ğ

Doğum Yeri ve Tarihi: A*** , 2*.0*.19**

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum / Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Ortaca Lisesi	20**
Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	20**

Yabancı Dil(ler)

İngilizce	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma			x
Konuşma			x
Anlama			x
Okuma			x

Sertifika ve Sempozyumlar

1. Pedagojik Formasyon Sertifikası, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, 2019
2. Fen Bilimleri XII. Araştırma E-Sempozyumu, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, 28 Haziran 2021, Topolojik İyi Sıralılık Kavramı Üzerine