

N -ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ**MERVE OKURER****YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI****DANIŞMAN
DOÇ. DR. İZZETTİN DEMİR****DÜZCE, 2023**

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

***N*-ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ**

Merve OKURER tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. İzzettin DEMİR
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. İzzettin DEMİR
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Banu PAZAR VAROL
Kocaeli Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Tuba TUNÇ
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 22/12/2023

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

22 Aralık 2023

Merve OKURER

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim sürecinde bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, manevi desteğini her zaman hissettiğim, düşüncelerine önem verdiğim ve kendime örnek edindiğim, sadece akademik anlamda değil hayatımın birçok noktasında bana destek olan çok değerli hocam Doç. Dr. İzzettin DEMİR'e en içten duygularım ile teşekkür ederim.

Tez çalışma sürecinde bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, akademik anlamda her zaman yol gösteren, çalışmalarımı teşvik eden ve beni bir kardeşi gibi gören değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Tuba TUNÇ'a çok teşekkür ederim.

Eğitim hayatımda adımlarımı sağlam atmamda çok büyük emekleri olan ve şu anda da elini üzerimde hissettiğim çok değerli ilköğretim öğretmenim Ayşe AKPINAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışma süresince ve hayatımda hep beni desteklemiş olan çok değerli dostum Tuana ŞAHİNER'e en içten duygularımla teşekkür ederim. Her zaman yanımda olan, sıkıntılarımı, mutluluğumu ve nice duygularımı paylaştığım, yol arkadaşım canım babam Dursun OKURER ve annem Emine OKURER başta olmak üzere, ablam Hafize BAYRAM, abilerim Erdal OKURER ve Emreca OKURER, manevi ablam olarak gördüğüm Miyase OKURER'e en içten duygularım ile teşekkür ederim. Hayatımda varlığını, maddi ve manevi desteğini her zaman hissettiğim eniştem Hakan BAYRAM'a da çok teşekkür ederim.

22 Aralık 2023

Merve OKURER

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vi
SİMGELER	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
3. N -ESNEK KAPALI KÜMELER VE N -ESNEK SÜREKLİLİK..	10
4. YENİ N -ESNEK TOPOLOJİK ALT UZAYLAR	18
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	24
6. KAYNAKLAR.....	25
ÖZGEÇMİŞ.....	27

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Çizelge 2.1. (γ, Γ) 'nin tablosal gösterimi.....	4
Çizelge 2.2. $(\mu, \Gamma, 5)$ 'in tablosal gösterimi.....	5



SİMGELER

J	İndeks kümesi
$\mathfrak{U}, \mathfrak{A}$	Klasik dönüşümler
$\Theta, \Upsilon, \dots$	Klasik kümeler
$\mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$	N -esnek kümeler ailesi
$\Gamma, \Omega, \dots$	Parametre kümeleri
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
2^Θ	Θ 'nın kuvvet kümesi

ÖZET

N-ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Merve OKURER

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. İzzettin DEMİR

Aralık 2023, 26 sayfa

Bu tez çalışmasında, Riaz ve diğ. [1] tarafından verilen N -esnek kümelerin topolojik yapısı çalışılmaya devam edilmiştir. İlk olarak, Demir [2] tarafından önerilen N -esnek kümelerin tümleyen işlemi kullanılarak N -esnek kapalı kümeler yeniden tanımlanmış ve bu kümelerin temel özellikleri incelenmiştir. Daha sonra, bir N -esnek sürekli dönüşüm kavramı verilerek bu dönüşüm ve bir N -esnek kapalı küme arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca, N -esnek dönüşümler ailesi yardımıyla bir başlangıç N -esnek topolojisi elde edilmiştir. Bunun yanı sıra, yeni bir N -esnek topolojik alt uzay kavramı tanımlanmış ve bu kavramın önemli özellikleri çalışılmıştır. Son olarak, elde edilen sonuçların daha iyi anlaşılabilmesi için bazı örnekler gösterilmiştir.

Anahtar sözcükler: Esnek küme, N -esnek küme, N -esnek topoloji, N -esnek süreklilik, N -esnek kapanış, başlangıç N -esnek topoloji, N -esnek alt uzay.

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF N -SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Merve OKURER

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Doç. Dr. İzzettin DEMİR

December 2023, 26 pages

In this thesis, the topological structure of N -soft sets given by Riaz et al. [1] was further studied. Firstly, using the complement operation of N -soft sets proposed by Demir [2], N -soft closed sets were redefined and their basic properties were investigated. Then, the concept of an N -soft continuous mapping was introduced, and the relations between this mapping and an N -soft closed set were determined. Also, by a family of N -soft mappings, the initial N -soft topology was obtained. Furthermore, a new concept of N -soft topological subspace was established and some important properties of this concept were analyzed. Finally, to better understand the defined concepts, several examples were presented.

Keywords: Soft set, N -soft set, N -soft topology, N -soft continuity, N -soft closure, initial N -soft topology, N -soft subspace.

1. GİRİŞ

Hayatımızın birçok alanında, iyi, güzel, uzun gibi kişiden kişiye veya duruma göre değişiklik gösteren ve matematiksel anlamda tam olarak ifade edilemeyen çeşitli belirsiz kavramlar vardır. Klasik mantık ile belirsizlik içeren bu kavramların matematiksel olarak modellenmesi mümkün değildir. Bu kavramları matematiksel olarak modellemek ve bunlara sistematik çözümler üretmek için araştırmacılar her geçen gün yeni teoriler ortaya atmaktadır. Bu teorilerden bazıları olasılık teorisi, aralık matematiği, bulanık küme teorisi ve kaba küme teorisi. Her bir teorenin güçlü olduğu uygulamalar bulunmasının yanı sıra kendine özgü zorlukları da vardır.

Bu teoriler arasında en dikkat çeken Zadeh [3] tarafından ortaya atılan bulanık kümeler teorisi. Bu teoride Zadeh, doğruluk değerleri kümesini $[0,1]$ reel sayılar aralığına genelleştirmiştir. Böylece bulanık kümelerde bir elemanın bir kümeye ait olma değeri daha duyarlı bir şekilde ifade edilmiştir. Bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yardımı ile tanımlanır. Diğer teorilerde olduğu gibi bulanık kümeler teorisinin de bir zorluğu vardır. Molodtsov [4]'a göre üyelik fonksiyonu bireysel olarak belirlendiğinden her bir durum için bir üyelik fonksiyonu inşa etme zorluğuyla karşılaşılır. Bu nedenle, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç vardır. Buradan, Molodtsov [4] belirsizlik ve kararsızlık modelleri için yeni bir yaklaşım olan ve bulanık kümelerin sahip olduğu zorluklardan bağımsız bir esnek küme teorisi tanımlamıştır. Daha sonra bu teoriyi, Riemann integrali, Perron integrali ve ölçüm teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır. Bu da esnek küme teorisinin özellikle karar verme problemlerinde, tıp ve bilgisayar bilimlerinde hızlı bir şekilde yükselmesine sebep olmuştur [5–9].

Esnek küme teorisi ve uygulamaları ile ilgili matematiğin birçok alanında çalışmalar yapılmıştır. Maji ve diğ. [10, 11] karar verme problemlerine esnek kümeler teorisini uygulamış ve esnek kümelerde bazı işlemler tanımlamıştır. Chen ve diğ. [12] esnek kümelerde yeni bir parametre indirgeme kavramı vermiştir. Ayrıca, Aktaş ve Çağman [13] esnek grupları tanımlamış ve esnek kümeyi bulanık küme ve kaba küme ile karşılaştırmıştır. Ali ve diğ. [14] esnek kümelerin bazı cebirsel işlemlerini incelemiştir. Kharal ve Ahmad

[15] bir esnek kümenin bir esnek dönüşüm altındaki görüntüsünün ve ters görüntüsünün özelliklerini araştırmıştır. Sonrasında, Das ve Samanta [16] esnek reel sayıları tanımlamış ve ilgili özelliklerini incelemiştir. Bunun yanı sıra, esnek küme ve topoloji kavramını birleştirerek Shabir ve Naz [17] bir esnek topoloji fikrini ileri sürmüş ve esnek topolojinin bazı özelliklerini elde etmiştir. Bu amaç doğrultusunda, Aygünoğlu ve Aygün [18] bir esnek topoloji üzerinde esnek kompaktlık ve çarpım esnek topoloji gibi kavramları çalışmıştır. 2021 yılında Al-Shami [19] esnek ayırma aksiyomlarının ilk pratik uygulamasını vermiştir. Daha sonra, Al-Shami ve diğ. [20] esnek açık kümelerin bir genellemesi olan esnek kısmen açık kümeler yardımıyla esnek kompaktlık ve esnek bağlantılılık kavramlarını incelemiştir. Bu çalışmalardan etkilenen birçok araştırmacı esnek topoloji üzerine daha ileri çalışmalar gerçekleştirmeye devam etmiştir [21–25].

Esnek kümelerin kullanımı nesnelerin ikili değerlendirilmesine imkan tanımasına rağmen günlük hayatta, ikili olmayan ve sayılabilen veri yapısını içeren birçok karar verme problemiyle karşılaşmaktayız. Bu ikili olmayan değerlendirme genellikle yıldız sayısı, noktalar, dereceler veya herhangi bir genelleştirilmiş gösterim gibi çoklu değerlerle temsil edilebilen derecelendirme veya sıralama durumlarında ortaya çıkmaktadır. Bu durumdan esinlenen Fatimah ve diğ. [26], günlük yaşamdaki bazı problemlerde ortaya çıkan derecelendirmenin ve sıralamanın anlamını göstermek için esnek kümelerin genişletilmiş bir formu olarak bir N -esnek küme fikrini önermiştir. Bu kavramın ortaya çıkmasından itibaren araştırmacılar N -esnek kümeler üzerine birçok çalışma gerçekleştirmiştir. Riaz ve diğ. [1] N -esnek kümeler üzerinde bazı yeni işlemler çalışmış ve bir N -esnek topoloji tanımlamıştır. Dahası, Riaz ve diğ. [27] bir nütrosifik N -esnek küme kavramını vermiş ve bu kavramı bir karar verme problemine uygulamıştır. N -esnek kümelerin bir genellemesi olarak Akram ve diğ. [28, 29] bulanık N -esnek küme ve tereddütlü N -esnek küme tanımlarını ortaya atmış ve çeşitli uygulamalarını elde etmiştir. Daha sonra, Akram ve diğ. [30, 31] yeni bir karar verme karma modeli olarak sezgisel bulanık N -esnek kaba küme teorisini önermiş ve N -esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine çalışmıştır. Kamacı ve Petchimuthu [32] bir bipolar N -esnek küme kavramını vermiş ve bazı karar verme yaklaşımları kurmuştur. Liu ve diğ. [33] hem nütrosifik belirsiz kümeleri hem de N -esnek kümeleri genelleterek nütrosifik belirsiz N -esnek kümeleri tanıtmıştır.

Bu çalışmada, N -esnek kümelerin topolojik yapısı incelenmiştir. Öncelikle, Demir [2] tarafından verilen sonuçların ışığında, N -esnek kapalı kümeler tanımlanmış ve ilgili

özellikleri verilmiştir. Daha sonra, bir N -esnek sürekli dönüşüm kavramı tanımlanarak bu dönüşüm ile N -esnek kapalı kümeler arasındaki ilişkiler belirlenmiştir. Ayrıca, bir başlangıç N -esnek topolojinin varlığı gösterilmiş ve bundan faydalanarak N -esnek topolojik uzayların çarpımı araştırılmıştır. Son olarak, yeni bir N -esnek topolojik alt uzay kavramı verilmiş ve bunun bazı özellikleri karakterize edilmiştir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezin diğer kısımlarında kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu çalışma boyunca, Θ seçeneklerin (nesnelerin) bir kümesi ve Γ 'da Θ için uygun parametrelerin (özelliklerin) bir kümesi olsun.

Tanım 2.1. 2^Θ , Θ 'nın bir kuvvet kümesi olsun. $\gamma : \Gamma \rightarrow 2^\Theta$ bir dönüşüm olmak üzere (γ, Γ) ikilisine Θ üzerinde bir esnek küme denir.

Diğer bir deyişle, esnek küme Θ 'nın alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen bir ailesidir. Her $p \in \Gamma$ için $\gamma(p)$ değer kümesine esnek kümenin bir p -elemanı denir. Burada, $\gamma(p)$ kümesi boş küme veya Θ 'nın boş olmayan bir alt kümesidir. Bir (γ, Γ) esnek kümesi

$$(\gamma, \Gamma) = \{(p, \gamma(p)) : p \in \Gamma, \gamma(p) \in 2^\Theta\}$$

şeklinde ikililer yardımıyla gösterilir [4].

Örnek 2.2. $\Theta = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ arabaların bir kümesi ve $\Gamma = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} = \{\text{güzel}, \text{ucuz}, \text{manuel}, \text{benzinli}, \text{arkası çıkıntılı}\}$ ilgili özelliklerin bir kümesi olsun. Buradan, bir (γ, Γ) esnek kümesi bir kişinin satın almayı düşündüğü arabaların durumunu aşağıdaki gibi gösterebilir:

$$(\gamma, \Gamma) = \{(p_1, \{x_1, x_3, x_5\}), (p_2, \{x_1, x_4\}), (p_3, \{x_3, x_4, x_5\}), (p_4, \{x_2, x_4\}), (p_5, \{x_1, x_2, x_3\})\}.$$

(γ, Γ) esnek kümesi Çizelge 2.1'de gösterildiği gibi tablo şeklinde temsil edilebilir:

Çizelge 2.1. (γ, Γ) 'nın tablosal gösterimi

(γ, Γ)	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
x_1	1	1	0	0	1
x_2	0	0	0	1	1
x_3	1	0	1	0	1
x_4	0	1	1	1	0
x_5	1	0	1	0	0

Tanım 2.3. Θ nesnelerin bir kümesi ve Γ parametrelerin bir kümesi olsun. Ayrıca, $N = \{2, 3, \dots\}$ olmak üzere $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ sıralı derecelerin bir kümesi olsun. Her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için bir tek $\ell_{px}^\mu \in \mathcal{L}$ derecesi var olacak şekilde

$$\mu(p) = \{(x, \ell_{px}^\mu) : x \in \Theta \text{ ve } \ell_{px}^\mu \in \mathcal{L}, x\text{'in derecesidir}\}$$

şeklinde tanımlanan bir $\mu : \Gamma \rightarrow 2^{\Theta \times \mathcal{L}}$ dönüşümü var ise (μ, Γ, N) üçlüsüne Θ üzerinde bir N -esnek küme denir [26].

Not 2.4. $N = 2$ olması durumunda N -esnek kümeler ile esnek kümeler çakışır [26].

Bu makale boyunca, Θ üzerindeki tüm N -esnek kümeler ailesi $\mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.5. $\Theta = \{x_1, x_2, x_3\}$ cep telefonların bir kümesi ve $\Gamma = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} = \{\text{dizayn}, \text{donanım}, \text{performans}, \text{batarya süresi}, \text{kamera}\}$ ilgili özelliklerin bir kümesi olsun.

0 = özelliğe sahip olmama, 1 = düşük, 2 = orta, 3 = yüksek, 4 = en yüksek

olmak üzere $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sıralı derecelerin bir kümesi olsun. Uzmanlar tarafından özelliklerine göre cep telefonlarına atanan dereceler Çizelge 2.2’de verilir. Buradan, bir 5-esnek küme aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned} (\mu, \Gamma, 5) = \{ & \langle p_1, \{(x_1, 1), (x_2, 3), (x_3, 2)\} \rangle, \langle p_2, \{(x_1, 4), (x_2, 2), (x_3, 2)\} \rangle, \\ & \langle p_3, \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 4)\} \rangle, \langle p_4, \{(x_1, 2), (x_2, 3), (x_3, 1)\} \rangle, \\ & \langle p_5, \{(x_1, 3), (x_2, 2), (x_3, 3)\} \rangle \}. \end{aligned}$$

Çizelge 2.2. $(\mu, \Gamma, 5)$ ’in tablosal gösterimi

$(\mu, \Gamma, 5)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
x_1	1	4	0	2	3
x_2	3	2	1	3	2
x_3	2	2	4	1	3

Tanım 2.6. Θ nesnelerin bir kümesi, Γ parametrelerin bir kümesi ve $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ olsun. Bu durumda,

(i) Her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için $\Theta_0(p) = (x, 0)$ özelliğine sahip $\Theta_0 : \Gamma \rightarrow 2^{\Theta \times \{0\}}$ dönüşümü olmak üzere (Θ_0, Γ, N) üçlüsüne Θ üzerinde bir boş N -esnek küme denir.

(ii) Her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için $\Theta_{N-1}(p) = (x, N-1)$ özelliğine sahip $\Theta_{N-1} : \Gamma \rightarrow 2^{\Theta \times \{N-1\}}$ dönüşümü olmak üzere $(\Theta_{N-1}, \Gamma, N)$ üçlüsüne Θ üzerinde bir mutlak N -esnek küme denir [1].

Tanım 2.7. $(\mu, \Gamma, N), (\sigma, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ olsun. Bu durumda,

(i) Her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için

$$\ell_{px}^\mu \leq \ell_{px}^\sigma$$

sağlanıyorsa (μ, Γ, N) 'ye (σ, Γ, N) 'nin bir N -esnek alt kümesi denir. Bu durum, $(\mu, \Gamma, N) \sqsubseteq (\sigma, \Gamma, N)$ ile sembolize edilir.

(ii) Her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için

$$\ell_{px}^\mu = \ell_{px}^\sigma$$

sağlanıyorsa (μ, Γ, N) ve (σ, Γ, N) 'ye iki eşit N -esnek küme denir. Bu durum, $(\mu, \Gamma, N) = (\sigma, \Gamma, N)$ ile sembolize edilir.

(iii) (μ, Γ, N) ve (σ, Γ, N) 'nin toplamı $(\mu, \Gamma, N) \oplus (\sigma, \Gamma, N) = (\mu \oplus \sigma, \Gamma, N)$ N -esnek kümesidir. Burada,

$$\ell_{px}^{\mu \oplus \sigma} = \begin{cases} \ell_{px}^\mu + \ell_{px}^\sigma, & 0 \leq \ell_{px}^\mu + \ell_{px}^\sigma < N-1; \\ N-1, & \ell_{px}^\mu + \ell_{px}^\sigma \geq N-1 \end{cases}$$

olmak üzere her $p \in \Gamma$ için $(\mu \oplus \sigma)(p) = \{(x, \ell_{px}^{\mu \oplus \sigma}) : x \in \Theta\}$ olarak tanımlanır.

(iv) (μ, Γ, N) ve (σ, Γ, N) 'nin farkı $(\mu, \Gamma, N) \ominus (\sigma, \Gamma, N) = (\mu \ominus \sigma, \Gamma, N)$ N -esnek kümesidir.

Burada,

$$\ell_{px}^{\mu \ominus \sigma} = \begin{cases} \ell_{px}^\mu - \ell_{px}^\sigma, & \ell_{px}^\mu > \ell_{px}^\sigma; \\ 0, & \text{diğer,} \end{cases}$$

olmak üzere her $p \in \Gamma$ için $(\mu \ominus \sigma)(p) = \{(x, \ell_{px}^{\mu \ominus \sigma}) : x \in \Theta\}$ olarak tanımlanır [1].

Tanım 2.8. $(\mu, \Gamma, N_1) \in \mathcal{S}^{N_1}(\Theta, \Gamma)$ ve $(\sigma, \Gamma, N_2) \in \mathcal{S}^{N_2}(\Theta, \Gamma)$ olsun. Bu durumda,

(i) (μ, Γ, N_1) ve (σ, Γ, N_2) 'nin birleşimi $(\mu, \Gamma, N_1) \sqcup (\sigma, \Gamma, N_2) = (\mu \sqcup \sigma, \Gamma, \max\{N_1, N_2\})$ N -esnek kümesidir. Burada,

$$\ell_{px}^{\mu \sqcup \sigma} = \max\{\ell_{px}^\mu, \ell_{px}^\sigma\}$$

olmak üzere her $p \in \Gamma$ için $(\mu \sqcup \sigma)(p) = \{(x, \ell_{px}^{\mu \sqcup \sigma}) : x \in \Theta\}$ olarak tanımlanır.

(ii) (μ, Γ, N_1) ve (σ, Γ, N_2) nin kesişimi $(\mu, \Gamma, N_1) \cap (\sigma, \Gamma, N_2) = (\mu \sqcap \sigma, \Gamma, \min\{N_1, N_2\})$ N -esnek kümesidir. Burada, her $p \in \Gamma$ için

$$\ell_{px}^{\mu \sqcap \sigma} = \min\{\ell_{px}^{\mu}, \ell_{px}^{\sigma}\}$$

olmak üzere $(\mu \sqcap \sigma)(p) = \{(x, \ell_{px}^{\mu \sqcap \sigma}) : x \in \Theta\}$ olarak tanımlanır [26].

Tanım 2.9. Bir (μ, Γ, N) N -esnek kümesinin alt zayıf tümleyeni $(\mu, \Gamma, N)^b = (\mu^b, \Gamma, N)$ N -esnek kümesidir. Burada,

$$\ell_{px}^{\mu^b} = \begin{cases} 0, & \ell_{px}^{\mu} > 0; \\ N-1, & \ell_{px}^{\mu} = 0, \end{cases}$$

olmak üzere her $p \in \Gamma$ için $\mu^b(p) = \{(x, \ell_{px}^{\mu^b}) : x \in \Theta\}$ olarak tanımlanır [26].

Tanım 2.10. Bir (μ, Γ, N) N -esnek kümesinin tümleyeni $(\mu, \Gamma, N)^r = (\mu^r, \Gamma, N)$ N -esnek kümesidir. Burada,

$$\ell_{px}^{\mu^r} = N-1 - \ell_{px}^{\mu}$$

olmak üzere her $p \in \Gamma$ için $\mu^r(p) = \{(x, \ell_{px}^{\mu^r}) : x \in \Theta\}$ olarak tanımlanır [2].

Önerme 2.11. (μ, Γ, N) , (μ_1, Γ, N) ve (μ_2, Γ, N) Θ üzerinde N -esnek kümeler olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $((\mu, \Gamma, N)^r)^r = (\mu, \Gamma, N)$.
- (ii) $((\mu_1, \Gamma, N) \cap (\mu_2, \Gamma, N))^r = (\mu_1, \Gamma, N)^r \sqcup (\mu_2, \Gamma, N)^r$.
- (iii) $((\mu_1, \Gamma, N) \sqcup (\mu_2, \Gamma, N))^r = (\mu_1, \Gamma, N)^r \cap (\mu_2, \Gamma, N)^r$.
- (iv) $(\mu_1, \Gamma, N) \sqsubseteq (\mu_2, \Gamma, N)$ ise $(\mu_2, \Gamma, N)^r \sqsubseteq (\mu_1, \Gamma, N)^r$ [2].

Tanım 2.12. $\mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ ve $\mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ sırasıyla Γ ve Ω 'daki özelliklere sahip Θ ve Υ üzerindeki tüm N -esnek kümelerin ailesi olsun. $u : \Theta \rightarrow \Upsilon$ ve $\alpha : \Gamma \rightarrow \Omega$ iki dönüşüm olsun. Bu durumda, bir $u_\alpha : \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ dönüşümüne Θ 'dan Υ 'a bir N -esnek dönüşüm denir.

(i) $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ olsun. Bu durumda, $u_\alpha(\mu, \Gamma, N) = (u_\alpha(\mu), \Omega, N)$ aşağıdaki gibi

tanımlanan Υ üzerinde bir N -esnek kümedir:

$$\ell_{ky}^{u_a(\mu)} = \begin{cases} \max\{\ell_{px}^\mu : p \in a^{-1}(k), x \in u^{-1}(y)\}, & a^{-1}(k) \neq \emptyset, u^{-1}(y) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere her $k \in \Omega$ için

$$u_a(\mu)(k) = \{(y, \ell_{ky}^{u_a(\mu)}) : y \in \Upsilon\}$$

dir. $u_a(\mu, \Gamma, N)$ 'ye bir (μ, Γ, N) N -esnek kümesinin bir N -esnek görüntüsü denir.

(ii) $(\sigma, \Omega, N) \in \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ olsun. Bu durumda, $u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N) = (u_a^{-1}(\sigma), \Gamma, N)$ aşağıdaki gibi tanımlanan Θ üzerinde bir N -esnek kümedir:

$$\ell_{px}^{u_a^{-1}(\sigma)} = \ell_{a(p)u(x)}^\sigma$$

olmak üzere her $p \in \Gamma$ için

$$u_a^{-1}(\sigma)(p) = \{(x, \ell_{px}^{u_a^{-1}(\sigma)}) : x \in \Theta\}$$

dir. $u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)$ 'ye bir (σ, Ω, N) N -esnek kümesinin bir N -esnek ters görüntüsü denir [2].

Teorem 2.13. Bir $u_a : \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ N -esnek dönüşümü alınsın. Bu durumda, J bir indeks kümesi olmak üzere, (μ_1, Γ, N) , (μ_2, Γ, N) ve $(\mu_i, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ ($i \in J$) için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $u_a(\Theta_0, \Gamma, N) = (\Upsilon_0, \Omega, N)$.
- (ii) $u_a(\Theta_{N-1}, \Gamma, N) \subseteq (\Upsilon_{N-1}, \Omega, N)$.
- (iii) $(\mu_1, \Gamma, N) \subseteq (\mu_2, \Gamma, N)$ ise $u_a(\mu_1, \Gamma, N) \subseteq u_a(\mu_2, \Gamma, N)$.
- (iv) $u_a((\mu_1, \Gamma, N) \sqcup (\mu_2, \Gamma, N)) = u_a(\mu_1, \Gamma, N) \sqcup u_a(\mu_2, \Gamma, N)$.

Genel olarak, $u_a(\bigsqcup_{i \in J} (\mu_i, \Gamma, N)) = \bigsqcup_{i \in J} u_a(\mu_i, \Gamma, N)$ olur.

- (v) $u_a((\mu_1, \Gamma, N) \sqcap (\mu_2, \Gamma, N)) \subseteq u_a(\mu_1, \Gamma, N) \sqcap u_a(\mu_2, \Gamma, N)$.

Genel olarak, $u_a(\sqcap_{i \in J} (\mu_i, \Gamma, N)) \subseteq \sqcap_{i \in J} u_a(\mu_i, \Gamma, N)$ olur [2].

Teorem 2.14. Bir $u_a : \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ N -esnek dönüşümü alınsın. Bu durumda, J bir indeks kümesi olmak üzere, (σ_1, Ω, N) , (σ_2, Ω, N) ve $(\sigma_i, \Omega, N) \in \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ ($i \in J$) için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $u_a^{-1}(\Upsilon_0, \Omega, N) = (\Theta_0, \Gamma, N)$.
 - (ii) $u_a^{-1}(\Upsilon_{N-1}, \Omega, N) = (\Theta_{N-1}, \Gamma, N)$.
 - (iii) $(\sigma_1, \Omega, N) \sqsubseteq (\sigma_2, \Omega, N)$ ise $u_a^{-1}(\sigma_1, \Omega, N) \sqsubseteq u_a^{-1}(\sigma_2, \Omega, N)$.
 - (iv) $u_a^{-1}((\sigma_1, \Omega, N) \sqcup (\sigma_2, \Omega, N)) = u_a^{-1}(\sigma_1, \Omega, N) \sqcup u_a^{-1}(\sigma_2, \Omega, N)$.
- Genel olarak, $u_a^{-1}(\sqcup_{i \in J}(\sigma_i, \Omega, N)) = \sqcup_{i \in J} u_a^{-1}(\sigma_i, \Omega, N)$ olur.
- (v) $u_a^{-1}((\sigma_1, \Omega, N) \sqcap (\sigma_2, \Omega, N)) = u_a^{-1}(\sigma_1, \Omega, N) \sqcap u_a^{-1}(\sigma_2, \Omega, N)$.
- Genel olarak, $u_a^{-1}(\sqcap_{i \in J}(\sigma_i, \Omega, N)) = \sqcap_{i \in J} u_a^{-1}(\sigma_i, \Omega, N)$ olur [2].

Teorem 2.15. $u_a : \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ bir N -esnek dönüşüm olsun. Bu durumda, $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ ve $(\sigma, \Omega, N) \in \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $(\mu, \Gamma, N) \sqsubseteq u_a^{-1}(u_a(\mu, \Gamma, N))$.
- (ii) $u_a(u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)) \sqsubseteq (\sigma, \Omega, N)$ [2].

Tanım 2.16. τ , Θ üzerindeki N -esnek kümelerden oluşan bir aile olsun. Bu takdirde,

$$(Nst_1) (\Theta_0, \Gamma, N), (\Theta_{N-1}, \Gamma, N) \in \tau,$$

(Nst_2) τ 'dan alınan herhangi sayıdaki N -esnek kümelerin birleşimi τ 'ya aittir,

(Nst_3) τ 'dan alınan sonlu sayıdaki N -esnek kümelerin kesişimi τ 'ya aittir

özellikleri sağlanırsa τ ailesine Θ üzerinde bir N -esnek topoloji denir. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ dördlüsüne bir N -esnek topolojik uzay ve τ ailesinin üyelerine Θ 'da bir N -esnek açık küme denir. N -esnek açık kümelerin Tanım 2.9'a göre tanımlanan alt zayıf tümleyenlerine de N -esnek kapalı kümeler denir [1].

Tanım 2.17. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ bir N -esnek topolojik uzay ve $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ olsun. (μ, Γ, N) 'nin N -esnek içi (μ, Γ, N) 'nin tüm N -esnek açık alt kümelerinin birleşimidir ve $(\mu, \Gamma, N)^o$ ile gösterilir.

$(\mu, \Gamma, N)^o$ N -esnek kümesinin (μ, Γ, N) tarafından kapsanan en büyük N -esnek açık küme olduğu kolay bir şekilde görünür [1].

Tanım 2.18. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ bir N -esnek topolojik uzay ve $\mathcal{B}$, τ 'nın bir alt ailesi olsun. τ 'nın her bir elemanı $\mathcal{B}$ 'nin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ ailesine τ N -esnek topolojisi için bir N -esnek taban denir [1].

3. N -ESNEK KAPALI KÜMELER VE N -ESNEK SÜREKLİLİK

Riaz ve diğ. [1] N -esnek açık kümelerin alt zayıf tümleyenlerini alarak N -esnek kapalı kümeleri tanımladı. Diğer taraftan, bu tümleyen işlemi N -esnek kümelerde çift tümleyen kuralı için uygun olmadığından klasik anlamdaki kapanış operatörlerinin bazı özellikleri N -esnek anlamda çalışmamıştır. Bu nedenle, bu bölümde, Demir [2] tarafından verilen bir N -esnek açık kümenin tümleyen kavramı kullanılarak, Tanım 2.16'dakinden farklı bir şekilde N -esnek kapalı kümeler yeniden tanımlanacak ve ilgili özellikleri araştırılacaktır. Ayrıca, bir N -esnek sürekli dönüşüm ve bir başlangıç N -esnek topoloji kavramları verilecektir.

Tanım 3.1. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ bir N -esnek topolojik uzay ve $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ olsun. $(\mu, \Gamma, N)^r \in \tau$ ise (μ, Γ, N) 'ye Θ 'da bir N -esnek kapalı küme denir.

Teorem 3.2. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ bir N -esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

(Nsc_1) (Θ_0, Γ, N) , $(\Theta_{N-1}, \Gamma, N)$ N -esnek kapalı kümelerdir.

(Nsc_2) Herhangi iki N -esnek kapalı kümenin birleşimi bir N -esnek kapalı kümedir.

(Nsc_3) N -esnek kapalı kümelerden oluşan herhangi bir ailenin kesişimi bir N -esnek kapalı kümedir.

İspat. Bu özellikler De Morgan kurallarından ve N -esnek açık kümelerin $(Nst_1) - (Nst_3)$ özelliklerinden kolay bir şekilde gösterilir. $\square$

Tanım 3.3. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ bir N -esnek topolojik uzay ve $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ olsun. (μ, Γ, N) 'nin bir N -esnek kapanışı, (μ, Γ, N) 'yi içeren tüm N -esnek kapalı kümelerin kesişimidir ve $\overline{(\mu, \Gamma, N)}$ ile gösterilir. $\overline{(\mu, \Gamma, N)}$ N -esnek kümesinin (μ, Γ, N) 'yi içeren Θ üzerindeki en küçük N -esnek kapalı küme olduğu açıktır.

Teorem 3.4. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ bir N -esnek topolojik uzay ve $(\mu, \Gamma, N), (\sigma, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\overline{(\Theta_0, \Gamma, N)} = (\Theta_0, \Gamma, N)$ ve $\overline{(\Theta_{N-1}, \Gamma, N)} = (\Theta_{N-1}, \Gamma, N)$.

- (ii) $(\mu, \Gamma, N) \sqsubseteq \overline{(\mu, \Gamma, N)}$.
- (iii) (μ, Γ, N) bir N -esnek kapalı küme $\Leftrightarrow \overline{(\mu, \Gamma, N)} = (\mu, \Gamma, N)$.
- (iv) $\overline{\overline{(\mu, \Gamma, N)}} = \overline{(\mu, \Gamma, N)}$.
- (v) $(\mu, \Gamma, N) \sqsubseteq (\sigma, \Gamma, N)$ ise $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqsubseteq \overline{(\sigma, \Gamma, N)}$.
- (vi) $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqcup \overline{(\sigma, \Gamma, N)} = \overline{(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)}$.
- (vii) $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \cap \overline{(\sigma, \Gamma, N)} \sqsubseteq \overline{(\mu, \Gamma, N) \cap (\sigma, \Gamma, N)}$.

İspat. (i), (ii) ve (v) özellikleri N -esnek kapanış tanımından hemen gelir.

(iii) (μ, Γ, N) bir N -esnek kapalı küme olsun. $\overline{(\mu, \Gamma, N)}$, (μ, Γ, N) 'yi içeren Θ üzerindeki en küçük N -esnek kapalı küme olduğundan $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqsubseteq (\mu, \Gamma, N)$ olur. Böylece, (ii)'den $\overline{(\mu, \Gamma, N)} = (\mu, \Gamma, N)$ olduğu takip edilir. Tersine, $\overline{(\mu, \Gamma, N)} = (\mu, \Gamma, N)$ olsun. $\overline{(\mu, \Gamma, N)}$ bir N -esnek kapalı küme olduğundan (μ, Γ, N) bir N -esnek kapalı kümedir.

(iv) $\overline{(\mu, \Gamma, N)}$ 'nin bir N -esnek kapalı küme olduğu gerçeğinden takip edilir.

(vi) Özellik (v)'den $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqsubseteq \overline{(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)}$ ve $\overline{(\sigma, \Gamma, N)} \sqsubseteq \overline{(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)}$ bulunur. Buradan, $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqcup \overline{(\sigma, \Gamma, N)} \sqsubseteq \overline{(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)}$ elde edilir. Diğer yandan, $\overline{(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)}$, $(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)$ 'yi içeren en küçük N -esnek kapalı küme olduğundan ve $(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N) \sqsubseteq \overline{(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)}$ ifadesinden $\overline{(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)} \sqsubseteq \overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqcup \overline{(\sigma, \Gamma, N)}$ elde edilir. Böylece, (vi) eşitliği sağlanır.

(vii) N -esnek kapanış tanımından ve özellik (v)'den açıktır. □

Teorem 3.5. Aşağıdaki özelliklere sahip olacak şekilde her bir $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ N -esnek kümesini bir başka $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ N -esnek kümesine taşıyan bir operatör düşünölsün:

- (Nsc01) $(\mu, \Gamma, N) \sqsubseteq \overline{(\mu, \Gamma, N)}$,
- (Nsc02) $\overline{\overline{(\mu, \Gamma, N)}} = \overline{(\mu, \Gamma, N)}$,
- (Nsc03) $\overline{(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)} = \overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqcup \overline{(\sigma, \Gamma, N)}$,
- (Nsc04) $\overline{(\Theta_0, \Gamma, N)} = (\Theta_0, \Gamma, N)$.

Bu durumda,

$$\tau = \{ (\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma) : \overline{(\mu, \Gamma, N)}^r = (\mu, \Gamma, N)^r \}$$

ailesi Θ üzerinde bir N -esnek topolojidir ve her $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ için, $\overline{(\mu, \Gamma, N)}$ N -esnek kümesi $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ N -esnek topolojik uzayında (μ, Γ, N) 'nin bir N -esnek kapanışdır.

Bu operatöre bir N -esnek kapanış operatörü denir.

İspat. Teoremin ilk kısmını ispatlamak için N -esnek kapalı kümelerden oluşan bir $\mathcal{C} = \{(\mu, \Gamma, N) : \overline{(\mu, \Gamma, N)} = (\mu, \Gamma, N)\}$ ailesinin $(Nsc_1) - (Nsc_3)$ özelliklerine sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Her $(\mu, \Gamma, N) \sqsubseteq (\Theta_{N-1}, \Gamma, N)$ için $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqsubseteq (\Theta_{N-1}, \Gamma, N)$ olduğundan $\overline{(\Theta_{N-1}, \Gamma, N)} \sqsubseteq (\Theta_{N-1}, \Gamma, N)$ olur ve bu durum (Nsc_1) özelliği ile birlikte $\overline{(\Theta_{N-1}, \Gamma, N)} = (\Theta_{N-1}, \Gamma, N)$ olduğunu gösterir. (Nsc_4) yardımıyla $\overline{(\Theta_0, \Gamma, N)} = (\Theta_0, \Gamma, N)$ ve buradan $\mathcal{C}$ ailesi (Nsc_1) özelliğine sahiptir.

$(\mu, \Gamma, N), (\sigma, \Gamma, N) \in \mathcal{C}$ alınsın. (Nsc_3) gereğince

$$\overline{(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)} = \overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqcup \overline{(\sigma, \Gamma, N)} = (\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)$$

ve bu da $(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N) \in \mathcal{C}$ olduğunu gösterir. O halde, $\mathcal{C}$ ailesi (Nsc_2) özelliğine sahiptir.

(Nsc_3) özelliği gereğince

$$(\mu, \Gamma, N) \sqsubseteq (\sigma, \Gamma, N) \text{ ise } \overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqsubseteq \overline{(\sigma, \Gamma, N)} \quad (3.1)$$

ifadesine sahip olunduğu belirtilsin. Gerçekten, $(\mu, \Gamma, N) \sqsubseteq (\sigma, \Gamma, N)$ ise $(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N) = (\sigma, \Gamma, N)$ ve $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqcup \overline{(\sigma, \Gamma, N)} = \overline{(\mu, \Gamma, N) \sqcup (\sigma, \Gamma, N)} = \overline{(\sigma, \Gamma, N)}$ olur. Son eşitlikten, $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqsubseteq \overline{(\sigma, \Gamma, N)}$ elde edilir. Şimdi, $I \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere, $\mathcal{C}$ deki kümelerden oluşan bir $\{(\mu_i, \Gamma, N)\}_{i \in I}$ ailesi alınsın, yani $i \in I$ için $\overline{(\mu_i, \Gamma, N)} = (\mu_i, \Gamma, N)$ olsun. $\bigcap_{i \in I} (\mu_i, \Gamma, N) \sqsubseteq (\mu_i, \Gamma, N)$ olduğundan ve (3.1) yardımıyla $\overline{\bigcap_{i \in I} (\mu_i, \Gamma, N)} \sqsubseteq \overline{(\mu_i, \Gamma, N)} = (\mu_i, \Gamma, N)$ bulunur. Buradan, $\overline{\bigcap_{i \in I} (\mu_i, \Gamma, N)} \sqsubseteq \bigcap_{i \in I} (\mu_i, \Gamma, N)$ elde edilir. Özellik (Nsc_1) ile birlikte son içermeye ifadesinden $\overline{\bigcap_{i \in I} (\mu_i, \Gamma, N)} = \bigcap_{i \in I} (\mu_i, \Gamma, N)$ sağlanır. Böylece, $\mathcal{C}$ ailesi (Nsc_3) özelliğine de sahiptir.

$(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ N -esnek topoloji uzayındaki bir (μ, Γ, N) N -esnek kümesinin N -esnek kapanışı $c((\mu, \Gamma, N))$ ile sembolize edilsin. Bu durumda, her $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ için $c((\mu, \Gamma, N)) = \overline{(\mu, \Gamma, N)}$ olduğu gösterilsin. Bunun için, (Nsc_2) özelliğinden, her $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ için $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \in \mathcal{C}$ ve buradan $c((\mu, \Gamma, N)) \sqsubseteq \overline{(\mu, \Gamma, N)}$ elde edilir. Diğer yandan, (μ, Γ, N) 'yi içeren Θ üzerindeki her (η, Γ, N) N -esnek kapalı kümesi için (3.1)'den, $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \sqsubseteq \overline{(\eta, \Gamma, N)} = (\eta, \Gamma, N)$ sağlanır. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \overline{(\mu, \Gamma, N)} &\sqsubseteq \bigcap \{(\eta, \Gamma, N) : (\eta, \Gamma, N) \text{ } N\text{-esnek kapalı küme ve } (\mu, \Gamma, N) \sqsubseteq (\eta, \Gamma, N)\} \\ &= c((\mu, \Gamma, N)). \end{aligned}$$

Bu ise $c((\mu, \Gamma, N)) = \overline{(\mu, \Gamma, N)}$ olduğunu ispatlar. $\square$

Teorem 3.6. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ bir N -esnek topolojik uzay ve $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ olsun. Bu durumda,

$$(i) ((\mu, \Gamma, N)^o)^r = \overline{(\mu, \Gamma, N)^r}.$$

$$(ii) (\overline{(\mu, \Gamma, N)})^r = ((\mu, \Gamma, N)^r)^o.$$

İspat. Önerme 2.11 (iv) ve Teorem 3.4 (v)'den açıktır. $\square$

Tanım 3.7. $(\Theta, \Gamma, N, \tau_1)$, $(\Upsilon, \Omega, N, \tau_2)$ iki N -esnek topolojik uzay ve $u_\alpha : (\Theta, \Gamma, N, \tau_1) \rightarrow (\Upsilon, \Omega, N, \tau_2)$ bir N -esnek dönüşüm olsun. Her $(\sigma, \Omega, N) \in \tau_2$ için $u_\alpha^{-1}(\sigma, \Omega, N) \in \tau_1$ ise u_α 'ya bir N -esnek sürekli dönüşüm denir.

Örnek 3.8. $\Theta = \Gamma = \{0, 1, 2\}$ olsun. Γ parametreler kümesine sahip Θ üzerinde aşağıdaki $(\mu_1, \Gamma, 3)$ ve $(\sigma_1, \Gamma, 3)$ 3-esnek kümeleri düşünölsün: Her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için,

$$\ell_{px}^{\mu_1} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq p; \\ x - p, & p \leq x \leq 2, \end{cases} \quad \ell_{px}^{\sigma_1} = \begin{cases} p - x, & 0 \leq x \leq p; \\ 0, & p \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Bu durumda, $\tau_1 = \{(\Theta_0, \Gamma, 3), (\Theta_2, \Gamma, 3), (\mu_1, \Gamma, 3), (\sigma_1, \Gamma, 3), (\mu_1, \Gamma, 3) \sqcup (\sigma_1, \Gamma, 3)\}$ ailesi Θ üzerinde bir 3-esnek topolojidir.

Diğer yandan, $\Upsilon = \Omega = \{a, b, c\}$ olsun ve

$$\begin{aligned} (\mu_2, \Omega, 3) &= \{\langle a, \{(a, 0), (b, 1), (c, 2)\} \rangle, \langle b, \{(a, 0), (b, 0), (c, 1)\} \rangle, \langle c, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0)\} \rangle\}, \\ (\sigma_2, \Omega, 3) &= \{\langle a, \{(a, 0), (b, 1), (c, 2)\} \rangle, \langle b, \{(a, 1), (b, 0), (c, 1)\} \rangle, \langle c, \{(a, 2), (b, 1), (c, 0)\} \rangle\} \end{aligned}$$

olacak şekilde Ω parametreler kümesine sahip Υ üzerinde $(\mu_2, \Omega, 3)$ ve $(\sigma_2, \Omega, 3)$ 3-esnek kümeleri alınsın. Buradan, $\tau_2 = \{(\Upsilon_0, \Omega, 3), (\Upsilon_2, \Omega, 3), (\mu_2, \Omega, 3), (\sigma_2, \Omega, 3)\}$ ailesi Υ üzerinde bir 3-esnek topolojidir. Şimdi,

$$\begin{aligned} u(0) &= a, & u(1) &= b, & u(2) &= c, \\ \alpha(0) &= a, & \alpha(1) &= b, & \alpha(2) &= c \end{aligned}$$

yardımı ile bir $u_\alpha : (\Theta, \Gamma, 3, \tau_1) \rightarrow (\Upsilon, \Omega, 3, \tau_2)$ 3-esnek dönüşümü tanımlansın. Böylece, $u_\alpha^{-1}(\mu_2, \Omega, 3) = (\mu_1, \Gamma, 3) \in \tau_1$ ve $u_\alpha^{-1}(\sigma_2, \Omega, 3) = (\mu_1, \Gamma, 3) \sqcup (\sigma_1, \Gamma, 3) \in \tau_1$ olduğundan u_α 3-esnek dönüşümü bir 3-esnek süreklidir.

Önerme 3.9. $(u_1)_{a_1} : (\Theta, \Gamma, N, \tau_1) \rightarrow (\Upsilon, \Omega, N, \tau_2)$ ve $(u_2)_{a_2} : (\Upsilon, \Omega, N, \tau_2) \rightarrow (\Xi, \Delta, N, \tau_3)$ iki N -esnek sürekli dönüşüm ise $u_2 \circ u_1 : \Theta \rightarrow \Xi$ ve $a_2 \circ a_1 : \Gamma \rightarrow \Delta$ olmak üzere $(u_2)_{a_2} \circ (u_1)_{a_1} = (u_2 \circ u_1)_{(a_2 \circ a_1)} : (\Theta, \Gamma, N, \tau_1) \rightarrow (\Xi, \Delta, N, \tau_3)$ bileşkesi de bir N -esnek sürekli dönüşümdür.

İspat. Her $(\eta, \Delta, N) \in \mathcal{S}^N(\Xi, \Delta)$ için $(u_2 \circ u_1)_{(a_2 \circ a_1)}^{-1}(\eta, \Delta, N) = (u_1)_{a_1}^{-1}((u_2)_{a_2}^{-1}(\eta, \Delta, N))$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Buradan, her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için

$$\ell_{px}^{(u_2 \circ u_1)_{(a_2 \circ a_1)}^{-1}(\eta)} = \ell_{a_2(a_1(p))u_2(u_1(x))}^\eta \quad \text{ve} \quad \ell_{px}^{(u_1)_{a_1}^{-1}((u_2)_{a_2}^{-1}(\eta))} = \ell_{a_1(p)u_1(x)}^{(u_2)_{a_2}^{-1}(\eta)} = \ell_{a_2(a_1(p))u_2(u_1(x))}^\eta$$

olduğundan istenilen eşitlik sağlanır. $\square$

Önerme 3.10. Bir $u_a : \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ N -esnek dönüşümü alınsın ve $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ ve $(\sigma, \Omega, N) \in \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

- (i) $(u_a(\mu, \Gamma, N))^r \subseteq u_a(\mu, \Gamma, N)^r$.
- (ii) $(u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N))^r = u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)^r$.

İspat. Tanım 2.10'dan ve Teorem 2.13'den kolay bir şekilde takip edilir. $\square$

Teorem 3.11. $(\Theta, \Gamma, N, \tau_1)$ ve $(\Upsilon, \Omega, N, \tau_2)$ iki N -esnek topolojik uzay ve $u_a : (\Theta, \Gamma, N, \tau_1) \rightarrow (\Upsilon, \Omega, N, \tau_2)$ bir N -esnek dönüşüm olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) u_a , N -esnek süreklidir.
- (ii) Υ üzerindeki her (σ, Ω, N) N -esnek kapalı kümesi için $u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N) \subseteq \Theta$ üzerinde bir N -esnek kapalı kümedir.
- (iii) Her $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ için $u_a(\overline{(\mu, \Gamma, N)}) \subseteq \overline{u_a(\mu, \Gamma, N)}$.
- (iv) Her $(\sigma, \Omega, N) \in \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ için $\overline{u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)} \subseteq u_a^{-1}(\overline{(\sigma, \Omega, N)})$.
- (v) Her $(\sigma, \Omega, N) \in \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ için $u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)^o \subseteq (u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N))^o$.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) olduğu ispatlansın. $u_a^{-1}(\overline{u_a(\mu, \Gamma, N)})$ N -esnek kümesi, (μ, Γ, N) 'yi içeren bir N -esnek kapalı kümedir ve dolayısıyla $\overline{(\mu, \Gamma, N)} \subseteq u_a^{-1}(\overline{u_a(\mu, \Gamma, N)})$. Bu ise

$$u_a(\overline{(\mu, \Gamma, N)}) \subseteq u_a(u_a^{-1}(\overline{u_a(\mu, \Gamma, N)})) \subseteq \overline{u_a(\mu, \Gamma, N)}$$

olduğunu ifade eder.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) olduğunu ispatlamak için $(\mu, \Gamma, N) = u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)$ N -esnek kümesi (iii)'ye

uygulansın. Buradan,

$$u_a(\overline{u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)}) \subseteq \overline{u_a(u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N))} \subseteq \overline{(\sigma, \Omega, N)}$$

içermesi elde edilir ve dolayısıyla $\overline{u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)} \subseteq u_a^{-1}(\overline{(\sigma, \Omega, N)})$ bulunur.

(iv) $\Rightarrow$ (v) olduğunu ispatlamak için $(\sigma, \Omega, N)^r$ N -esnek kümesi (iv)'ye uygulansın. Bu takdirde, $\overline{u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)^r} \subseteq u_a^{-1}(\overline{(\sigma, \Omega, N)^r})$ elde edilir ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)^o &= u_a^{-1}(\overline{(\sigma, \Omega, N)^r})^r = (u_a^{-1}(\overline{(\sigma, \Omega, N)^r}))^r \\ &\subseteq (\overline{u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)^r})^r = \left(\overline{(u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N))^r} \right)^r \\ &= (u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N))^o \end{aligned}$$

sağlanır.

Teoremin ispatını tamamlamak için (v) $\Rightarrow$ (i) olduğunu göstermek kalır. Her $(\sigma, \Omega, N) \in \tau_2$ için $(\sigma, \Omega, N) = (\sigma, \Omega, N)^o$ bulunur ve (v)'den $u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N) \subseteq (u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N))^o$ takip edilir. Böylece, $(u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N))^o = u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N)$, yani $u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N) \in \tau_1$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.12. $u_a : (\Theta, \Gamma, N, \tau_1) \rightarrow (\Upsilon, \Omega, N, \tau_2)$ bir N -esnek dönüşüm ve $\mathcal{B}$ ailesi τ_2 için bir N -esnek taban olsun. Bu durumda, u_a 'nın bir N -esnek sürekli dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $(\sigma, \Omega, N) \in \mathcal{B}$ için $u_a^{-1}(\sigma, \Omega, N) \in \tau_1$ olmasıdır.

İspat. N -esnek taban tanımından ve Teorem 2.14 (iv)'den hemen takip edilir. $\square$

Tanım 3.13. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ bir N -esnek topolojik uzay ve $\mathcal{S}$, τ 'nın bir alt ailesi olsun. $\mathcal{S}$ 'daki N -esnek kümelerin sonlu arakesitlerinden oluşan bir aile τ için bir N -esnek taban oluyorsa $\mathcal{S}$ ailesine τ için bir N -esnek alt taban denir.

Teorem 3.14. $(\Theta_0, \Gamma, N), (\Theta_{N-1}, \Gamma, N) \in \mathcal{S}$ olacak şekilde Θ üzerindeki N -esnek kümelerden oluşan bir $\mathcal{S}$ ailesi alınsın. Bu durumda, aşağıdaki τ ailesi Θ üzerinde bir N -esnek topolojidir:

$$\tau = \left\{ \bigsqcup_{i \in J} \left(\bigcap_{m \in \Lambda_i} (\mu_i^m, \Gamma, N) \right) : (\mu_i^m, \Gamma, N) \in \mathcal{S}, J \text{ keyfi}, \Lambda_i \text{ sonlu indeks kümesi} \right\}.$$

İspat. İspat açıktır. $\square$

Tanım 3.15. $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ ve $(\sigma, \Omega, N) \in \mathcal{S}^N(\Upsilon, \Omega)$ olsun. $(\mu, \Gamma, N) \times (\sigma, \Omega, N)$ N -esnek çarpımı bir $\Gamma \times \Omega$ parametre kümesine sahip $\Theta \times \Upsilon$ üzerindeki bir $(\mu \times \sigma, \Gamma \times \Omega, N)$

N -esnek kümesidir. Burada, her $(p, k) \in \Gamma \times \Omega$ ve her $(x, y) \in \Theta \times \Upsilon$ için

$$\ell_{(p,k)(x,y)}^{\mu \times \sigma} = \min\{\ell_{px}^{\mu}, \ell_{ky}^{\sigma}\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.16. $\Theta_1 = \{x_1, x'_1\}$, $\Theta_2 = \{x_2, x'_2\}$, $\Gamma_1 = \{p_1, p'_1\}$ ve $\Gamma_2 = \{p_2, p'_2\}$ olsun. Sırasıyla Γ_1 ve Γ_2 parametreler kümesine sahip Θ_1 ve Θ_2 üzerinde aşağıdaki gibi iki 5-esnek küme düşünölsün:

$$(\mu, \Gamma_1, 5) = \{\langle p_1, \{(x_1, 2), (x'_1, 4)\} \rangle, \langle p'_1, \{(x_1, 3), (x'_1, 3)\} \rangle\}$$

ve

$$(\sigma, \Gamma_2, 5) = \{\langle p_2, \{(x_2, 0), (x'_2, 1)\} \rangle, \langle p'_2, \{(x_2, 1), (x'_2, 1)\} \rangle\}.$$

Bu takdirde,

$$\begin{aligned} (\mu \times \sigma, \Gamma_1 \times \Gamma_2, 5) = & \{ \langle (p_1, p_2), \{((x_1, x_2), 0), ((x_1, x'_2), 1), ((x'_1, x_2), 0), ((x'_1, x'_2), 1)\} \rangle, \\ & \langle (p_1, p'_2), \{((x_1, x_2), 1), ((x_1, x'_2), 1), ((x'_1, x_2), 1), ((x'_1, x'_2), 1)\} \rangle, \\ & \langle (p'_1, p_2), \{((x_1, x_2), 0), ((x_1, x'_2), 1), ((x'_1, x_2), 0), ((x'_1, x'_2), 1)\} \rangle, \\ & \langle (p'_1, p'_2), \{((x_1, x_2), 1), ((x_1, x'_2), 1), ((x'_1, x_2), 1), ((x'_1, x'_2), 1)\} \rangle \}. \end{aligned}$$

Not 3.17. $i \in \{1, 2\}$ olmak üzere $u_i^p : \Theta_1 \times \Theta_2 \rightarrow \Theta_i$ ve $\alpha_i^p : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_i$ izdüşüm dönüşömleri alınsın. $(\mu, \Gamma_1, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta_1, \Gamma_1)$ ve $(\sigma, \Gamma_2, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta_2, \Gamma_2)$ olsun. Genel olarak, $(u_1^p)_{\alpha_1^p}(\mu \times \sigma, \Gamma_1 \times \Gamma_2, N)$ ve $(u_2^p)_{\alpha_2^p}(\mu \times \sigma, \Gamma_1 \times \Gamma_2, N)$ N -esnek kümeleri sırasıyla (μ, Γ_1, N) ve (σ, Γ_2, N) N -esnek kümelerine eşit olmak zorunda değildir. Gerçekten, Örnek 3.16 da, $(u_1^p)_{\alpha_1^p}(\mu \times \sigma) = 1 \neq 2 = \ell_{p_1 x_1}^{\mu}$ olması sebebiyle $(u_1^p)_{\alpha_1^p}(\mu \times \sigma, \Gamma_1 \times \Gamma_2, 5) \neq (\mu, \Gamma_1, 5)$ bulunur. Diğer yanda,

$$\begin{aligned} (u_1^p)_{\alpha_1^p}^{-1}(\mu, \Gamma_1, N) &= (\mu \times (\Theta_2)_{N-1}, \Gamma_1 \times \Gamma_2, N), \\ (u_2^p)_{\alpha_2^p}^{-1}(\sigma, \Gamma_2, N) &= ((\Theta_1)_{N-1} \times \sigma, \Gamma_1 \times \Gamma_2, N) \end{aligned}$$

olduğu kolay bir şekilde görölür.

Tanım 3.18. $\{(\Upsilon_i, \Omega_i, N, \tau_i)\}_{i \in J}$, N -esnek topolojik uzaylardan oluşan bir aile ve her bir $i \in J$ için $(u_i)_{\alpha_i} : \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma) \rightarrow (\Upsilon_i, \Omega_i, N, \tau_i)$ bir N -esnek dönüşüm olsun. Bu durumda, $\mathcal{S} = \{(u_i)_{\alpha_i}^{-1}(\sigma, \Omega_i, N) : (\sigma, \Omega_i, N) \in \tau_i, i \in J\}$ N -esnek alt tabanından üretilen τ N -esnek topolojisine $\{(u_i)_{\alpha_i}\}_{i \in J}$ N -esnek dönüşümleri ve $\{(\Upsilon_i, \Omega_i, N, \tau_i)\}_{i \in J}$ N -esnek topolojik uzayları tarafından üretilen Θ üzerinde bir başlangıç N -esnek topoloji denir.

Not 3.19. $\{(u_i)_{\alpha_i} : \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma) \rightarrow (\Upsilon_i, \Omega_i, N, \tau_i)\}_{i \in J}$ ailesi ile üretilen Θ üzerindeki bir başlangıç N -esnek topolojisinin her bir $i \in J$ için $(u_i)_{\alpha_i}$ N -esnek dönüşümlerini N -esnek sürekli yapan Θ üzerindeki en kaba N -esnek topoloji olduğu açıktır.

Tanım 3.20. $\{(\Theta_i, \Gamma_i, N, \tau_i)\}_{i \in J}$, N -esnek topolojik uzaylardan oluşan bir aile olsun. Bu durumda, $u_i^p : \prod_{i \in J} \Theta_i \rightarrow \Theta_i$ ve $\alpha_i^p : \prod_{i \in J} \Gamma_i \rightarrow \Gamma_i$ izdüşüm dönüşümleri olmak üzere, $\{(u_i^p)_{\alpha_i^p}\}_{i \in J}$ ailesi ile üretilen $\Theta = \prod_{i \in J} \Theta_i$ üzerindeki başlangıç N -esnek topolojisine Θ üzerinde bir çarpım N -esnek topoloji denir.

Teorem 3.21. $\{(\Theta_i, \Gamma_i, N, \tau_i)\}_{i \in J}$, N -esnek topolojik uzaylardan oluşan bir aile ve τ^p , $\Theta = \prod_{i \in J} \Theta_i$ üzerinde bir çarpım N -esnek topoloji olsun. Bir $(\Upsilon, \Omega, N, \tau)$ N -esnek topolojik uzayı düşünölsün ve bir $u_\alpha : (\Upsilon, \Omega, N, \tau) \rightarrow (\Theta, \Gamma, N, \tau^p)$ N -esnek dönüşümü alınsın. Bu takdirde, u_α 'nın N -esnek sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $i \in J$ için $(u_i^p)_{\alpha_i^p} \circ u_\alpha : (\Upsilon, \Omega, N, \tau) \rightarrow (\Theta_i, \Gamma_i, N, \tau_i)$ N -esnek dönüşümünün N -esnek sürekli olmasıdır.

İspat. Not 3.19'dan ve çarpım N -esnek topoloji tanımından kolay bir şekilde ispatlanır. $\square$

Teorem 3.22. $\{(\Theta_i, \Gamma_i, N, \tau_i)\}_{i \in J}$, $\{(\Upsilon_i, \Omega_i, N, \tau'_i)\}_{i \in J}$ iki N -esnek topolojik uzaylar ailesi ve $(\Theta, \Gamma, N, \tau_1^p)$, $(\Upsilon, \Omega, N, \tau_2^p)$ sırasıyla onların çarpım N -esnek topolojik uzayları olsun. Her $i \in J$ için $(u_i)_{\alpha_i} : (\Theta_i, \Gamma_i, N, \tau_i) \rightarrow (\Upsilon_i, \Omega_i, N, \tau'_i)$ N -esnek dönüşümü alınsın. Bu takdirde, her $i \in J$ için, $(u_i)_{\alpha_i}$ N -esnek dönüşümü N -esnek sürekli ise $(u^p)_{\alpha^p} = \prod_{i \in J} (u_i)_{\alpha_i} : (\Theta, \Gamma, N, \tau_1^p) \rightarrow (\Upsilon, \Omega, N, \tau_2^p)$ çarpım N -esnek dönüşümü N -esnek sürekli dir.

İspat. Bir çarpım N -esnek dönüşümü aşğıdaki gibi tanımlansın: Her bir $x \in \Theta = \prod_{i \in J} \Theta_i$ için, $(u^p(x))_i = u_i(u_i^p(x))$, yani her bir $x \in \Theta$ için $u^p(x)$, $\Upsilon = \prod_{i \in J} \Upsilon_i$ 'de bir noktadır ve bu noktanın her $i \in J$ için i 'inci bileşeni $u_i(u_i^p(x))$ şeklindedir. Benzer şekilde, her bir $s \in \Gamma = \prod_{i \in J} \Gamma_i$ için, $(\alpha^p(s))_i = \alpha_i(\alpha_i^p(s))$, yani her bir $s \in \Gamma$ için $\alpha^p(s)$, $\Omega = \prod_{i \in J} \Omega_i$ 'de bir noktadır ve bu noktanın her $i \in J$ için i 'inci bileşeni $\alpha_i(\alpha_i^p(s))$ şeklindedir. Böylece, çarpım N -esnek dönüşümünün N -esnek sürekli olduğu Önerme 3.9'dan ve Teorem 3.21'den takip edilir. $\square$

4. YENİ N -ESNEK TOPOLOJİK ALT UZAYLAR

Klasik alt uzaylarda kapalı kümeler için korunan bazı temel sonuçlar, Riaz ve diğ. [1] tarafından önerilen N -esnek topolojik alt uzaylarda sağlanmamaktadır. Bu nedenle, yeni bir N -esnek topolojik alt uzay kavramı verilerek ilgili temel özellikleri çalışılacak ve örnekler yardımı ile bu özellikler desteklenecektir.

Tanım 4.1. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ bir N -esnek topolojik uzay ve $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ olsun. Bu durumda, $\tau_\mu = \{(\mu, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N) : (\sigma, \Gamma, N) \in \tau\}$ olmak üzere, $((\mu, \Gamma, N), \tau_\mu)$ ikilisine $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ 'nin bir N -esnek topolojik alt uzayı denir.

τ_μ ailesinin $(\Theta_0, \Gamma, N), (\mu, \Gamma, N) \in \tau_\mu$ ile birlikte sonlu kesişimler ve keyfi birleşimler altında kapalı olduğuna dikkat edilsin. Buradan, τ_μ ailesi bir N -esnek topolojidir ve bu topoloji N -esnek alt uzay topolojisi olarak adlandırılır [1].

Tanım 4.2. Bir $((\mu, \Gamma, N), \tau_\mu)$ N -esnek topolojik alt uzayının her bir üyesine (μ, Γ, N) 'de bir N -esnek açık küme denir. $(\varsigma, \Gamma, N) \sqsubseteq (\mu, \Gamma, N)$ ve $(\mu, \Gamma, N) \ominus (\varsigma, \Gamma, N) \in \tau_\mu$ ise (ς, Γ, N) N -esnek kümesine (μ, Γ, N) 'de bir N -esnek kapalı küme denir.

Klasik anlamdaki bir (X, τ) topolojik uzayında Θ 'nın bir Λ alt kümesi verilsin. Bu durumda, τ_Λ alt uzay topolojisindeki bir kümenin kapalı olması için gerek ve yeter koşulun bu kümenin Θ 'daki bir kapalı kümeyle Λ 'nın kesişimine eşit olması gerektiği bilinir. Fakat, N -esnek topolojik alt uzaylar için benzer bir durum düşünüldüğünde, aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi bu durum her zaman geçerli değildir.

Örnek 4.3. $\Theta = \{x_1, x_2\}$ ve $\Gamma = \{p_1, p_2\}$ olsun.

$$\begin{aligned}(\mu_1, \Gamma, 5) &= \{\langle p_1, \{(x_1, 1), (x_2, 3)\} \rangle, \langle p_2, \{(x_1, 3), (x_2, 2)\} \rangle\}, \\(\mu_2, \Gamma, 5) &= \{\langle p_1, \{(x_1, 1), (x_2, 2)\} \rangle, \langle p_2, \{(x_1, 2), (x_2, 1)\} \rangle\}\end{aligned}$$

olmak üzere $(\mu_1, \Gamma, 5), (\mu_2, \Gamma, 5) \in \mathcal{S}^5(\Theta, \Gamma)$ alınsın. Bu takdirde,

$$\tau = \{(\Theta_4, \Gamma, 5), (\Theta_0, \Gamma, 5), (\mu_1, \Gamma, 5), (\mu_2, \Gamma, 5)\}$$

ailesi Θ üzerinde bir 5-esnek topolojidir.

$$(\mu, \Gamma, 5) = \{\langle p_1, \{(x_1, 2), (x_2, 2)\} \rangle, \langle p_2, \{(x_1, 3), (x_2, 1)\} \rangle\}$$

olacak şekilde $(\Theta_4, P, 5)$ 'in bir $(\mu, \Gamma, 5)$ 5-esnek alt kümesi düşünölsün. Buradan,

$$\tau_\mu = \{(\mu, \Gamma, 5), (\Theta_0, \Gamma, 5), \{\langle p_1, \{(x_1, 1), (x_2, 2)\} \rangle, \langle p_2, \{(x_1, 3), (x_2, 1)\} \rangle\}, (\mu_2, \Gamma, 5)\}$$

olmak üzere bir $((\mu, \Gamma, 5), \tau_\mu)$ 5-esnek topolojik alt uzayı elde edilir. Diğer yandan, $(\varsigma, \Gamma, 5) = \{\langle p_1, \{(x_1, 1), (x_2, 0)\} \rangle, \langle p_2, \{(x_1, 0), (x_2, 0)\} \rangle\}$ 5-esnek kümesi $(\mu, \Gamma, 5)$ 'de bir 5-esnek kapalı küme olmasına rağmen $(\mu, \Gamma, 5)$ ile kesişimi $(\varsigma, \Gamma, 5)$ 'e eşit olan Θ 'da bir 5-esnek kapalı küme yoktur.

Dolayısıyla, bu eksikliği giderebilmek için daha güçlü bir N -esnek topolojik alt uzay kavramı tanımlanır.

Tanım 4.4. $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ bir N -esnek topolojik uzay ve $(\mu, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ olsun.

$\tau_\mu = \{(\mu, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N) : (\sigma, \Gamma, N) \in \tau\}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $((\mu, \Gamma, N), \tau_\mu)$ ikilisine $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ 'nin bir güçlü N -esnek topolojik alt uzayı denir:

(s_1) $\mathcal{K}$ ailesi Θ 'daki N -esnek kapalı kümelerden oluşmak üzere, her $(\eta, \Gamma, N) \in \tau_\mu$ için $(\mu, \Gamma, N) \ominus (\eta, \Gamma, N) = (\mu, \Gamma, N) \sqcap (\varsigma_\eta, \Gamma, N)$ olacak şekilde bir $(\varsigma_\eta, \Gamma, N) \in \mathcal{K}$ vardır.

(s_2) Her $(\xi, \Gamma, N) \in \mathcal{K}$ için $(\mu, \Gamma, N) \ominus ((\mu, \Gamma, N) \sqcap (\xi, \Gamma, N)) = (\mu, \Gamma, N) \sqcap (\sigma_\xi, \Gamma, N)$ olacak şekilde bir $(\sigma_\xi, \Gamma, N) \in \tau$ vardır.

Örnek 4.5. $(\Theta, \Gamma, 5, \tau)$, Örnek 4.3'de tanımlanan bir 5-esnek topolojik uzay olsun.

$(\Theta_4, \Gamma, 5)$ 'in aşağıdaki gibi bir $(\mu, \Gamma, 5)$ 5-esnek alt kümesi tanımlansın:

$$(\mu, \Gamma, 5) = \{\langle p_1, \{(x_1, 4), (x_2, 0)\} \rangle, \langle p_2, \{(x_1, 0), (x_2, 4)\} \rangle\}.$$

Buradan,

$$\tau_\mu = \{(\mu, \Gamma, 5), (\Theta_0, \Gamma, 5), \{\langle p_1, \{(x_1, 1), (x_2, 0)\} \rangle, \langle p_2, \{(x_1, 0), (x_2, 2)\} \rangle\}, \\ \{\langle p_1, \{(x_1, 1), (x_2, 0)\} \rangle, \langle p_2, \{(x_1, 0), (x_2, 1)\} \rangle\}\}$$

olacak şekilde $(\Theta, \Gamma, 5, \tau)$ 'nin bir $((\mu, \Gamma, 5), \tau_\mu)$ güçlü 5-esnek topolojik alt uzayı elde edilir.

Örnek 4.6. Θ nesnelerin bir kümesi, Γ parametrelerin bir kümesi ve $N > 1$ olsun. $\alpha \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ile birlikte her $p \in \Gamma$ ve $x \in \Theta$ için

$$\ell_{px}^{\mu^\alpha} = \alpha$$

olacak şekilde bir (μ^α, Γ, N) N -esnek kümesi tanımlansın. Bu durumda,

$$\tau = \{(\mu^\alpha, \Gamma, N) : \alpha \in \{0, 1, \dots, N-1\}\}$$

ailesi Θ üzerinde bir N -esnek topolojidir. Şimdi, aşağıdaki gibi bir (σ, Γ, N) N -esnek kümesi düşünölsün: Λ, Θ 'nın boştan farklı klasik bir alt kümesi olmak üzere, $t \in \{1, \dots, N-1\}$ ile birlikte her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için,

$$\ell_{px}^\sigma = \begin{cases} 0, & x \notin \Lambda; \\ t, & x \in \Lambda. \end{cases}$$

Bu takdirde, $((\sigma, \Gamma, N), \tau_\sigma)$, $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ N -esnek topolojik uzayın bir güçlü N -esnek topolojik alt uzayıdır. Gerçekten de, $(\eta, \Gamma, N) \in \tau_\sigma$ olsun. Buradan, $h \in \{0, 1, \dots, t\}$ ile birlikte her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için

$$\ell_{px}^\eta = \begin{cases} 0, & x \notin \Lambda; \\ h, & x \in \Lambda \end{cases}$$

olur. O halde, $(\sigma, \Gamma, N) \ominus (\eta, \Gamma, N) = (\mu^{t-h}, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N)$ sebebiyle ve $(\mu^{t-h}, \Gamma, N)^r = (\mu^{N-1-(t-h)}, \Gamma, N) \in \tau$ olduğu gerçeğinden (s_1) özelliğinin sağlandığı takip edilir.

Şimdi, $(\xi, \Gamma, N) \in \mathcal{K}$ olsun. Bu durumda, $(\xi, \Gamma, N) \in \tau$ elde edilir ve dolayısıyla $(\xi, \Gamma, N) = (\mu^\alpha, \Gamma, N)$ sağlayan bir $\alpha \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ bulunur. $((\sigma, \Gamma, N) \ominus ((\xi, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N)))$ N -esnek kümesi, her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için,

$$\ell_{px}^{\sigma \ominus (\xi \sqcap \sigma)} = \begin{cases} 0, & x \notin \Lambda; \\ t - \min\{\alpha, t\}, & x \in \Lambda \end{cases}$$

ile tanımlanır. $\min\{\alpha, t\} = t$ ise $((\sigma, \Gamma, N) \ominus ((\xi, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N))) = (\sigma, \Gamma, N) \sqcap (\mu^0, \Gamma, N)$ olacak şekilde bir $(\mu^0, \Gamma, N) \in \tau$ vardır. $\min\{\alpha, t\} = \alpha$ ise $((\sigma, \Gamma, N) \ominus ((\xi, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N))) =$

$(\sigma, \Gamma, N) \sqcap (\mu^{t-\alpha}, \Gamma, N)$ olacak şekilde yine bir $(\mu^{t-\alpha}, \Gamma, N) \in \tau$ vardır. Böylece, (s_2) özelliği de sağlanır.

Teorem 4.7. $((\mu, \Gamma, N), \tau_\mu), (\Theta, \Gamma, N, \tau)$ N -esnek topolojik uzayın bir güçlü N -esnek topolojik alt uzayı olsun. Bir $(\varsigma, \Gamma, N) \sqsubseteq (\mu, \Gamma, N)$ N -esnek kümesinin (μ, Γ, N) 'de N -esnek kapalı olması için gerek ve yeter koşul $(\varsigma, \Gamma, N) = (\mu, \Gamma, N) \sqcap (\xi, \Gamma, N)$ olacak şekilde Θ 'da bir (ξ, Γ, N) N -esnek kapalı kümesi olmasıdır.

İspat. Gerek ve yeter koşul, sırasıyla (s_1) ve (s_2) özellikleri kullanılarak kolay bir şekilde gösterilir. $\square$

Yardımcı Teorem 4.8. $(\mu, \Gamma, N), (\sigma, \Gamma, N), (\eta, \Gamma, N) \in \mathcal{S}^N(\Theta, \Gamma)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & ((\mu, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N)) \ominus ((\eta, \Gamma, N) \sqcap ((\mu, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N))) \\ &= ((\mu, \Gamma, N) \ominus ((\eta, \Gamma, N) \sqcap (\mu, \Gamma, N))) \sqcap ((\sigma, \Gamma, N) \ominus ((\eta, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N))). \end{aligned}$$

İspat. $p \in \Gamma$ ve $x \in \Theta$ olsun. $\ell_{px}^\sigma \leq \ell_{px}^\mu$ alınsın. Buradan, aşağıdaki 3 durum düşünölsün:

Durum 1. $\ell_{px}^\sigma \leq \ell_{px}^\eta \leq \ell_{px}^\mu$ olsun. Dolayısıyla, yukarıdaki eşitliğin sol tarafı $\ell_{px}^\sigma - \ell_{px}^\sigma = 0$ ve sağ tarafı $\min\{(\ell_{px}^\mu - \ell_{px}^\eta), (\ell_{px}^\sigma - \ell_{px}^\sigma)\} = 0$ olur.

Durum 2. $\ell_{px}^\eta \leq \ell_{px}^\sigma \leq \ell_{px}^\mu$ olsun. Bu takdirde, yukarıdaki eşitliğin sol tarafı $\ell_{px}^\sigma - \ell_{px}^\eta$ ve sağ tarafı $\min\{(\ell_{px}^\mu - \ell_{px}^\eta), (\ell_{px}^\sigma - \ell_{px}^\eta)\} = \ell_{px}^\sigma - \ell_{px}^\eta$ bulunur.

Durum 3. $\ell_{px}^\sigma \leq \ell_{px}^\mu \leq \ell_{px}^\eta$ olsun. O halde, yukarıdaki eşitliğin sol tarafı $\ell_{px}^\sigma - \ell_{px}^\sigma = 0$ ve sağ tarafı $\min\{(\ell_{px}^\mu - \ell_{px}^\sigma), (\ell_{px}^\sigma - \ell_{px}^\sigma)\} = 0$ elde edilir.

$\ell_{px}^\mu \leq \ell_{px}^\sigma$ ise aynı süreç tekrar edilerek ispat sonlandırılır. $\square$

Önerme 4.9. $((\mu_1, \Gamma, N), \tau_{\mu_1})$ ve $((\mu_2, \Gamma, N), \tau_{\mu_2}), (\Theta, \Gamma, N, \tau)$ N -esnek topolojik uzayın iki güçlü N -esnek topolojik alt uzayı olsun. Bu durumda, $((\mu_1 \sqcap \mu_2, \Gamma, N), \tau_{\mu_1 \sqcap \mu_2}), (\Theta, \Gamma, N, \tau)$ N -esnek topolojik uzayın bir güçlü N -esnek topolojik alt uzayıdır.

İspat.

$$\tau_{\mu_1 \sqcap \mu_2} = \{((\mu_1 \sqcap \mu_2), \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N) : (\sigma, \Gamma, N) \in \tau\}$$

ailesinin (s_1) ve (s_2) özelliklerine sahip olduğu gösterilsin.

(s_1) $(\eta, \Gamma, N) \in \tau_{\mu_1 \sqcap \mu_2}$ olsun. Bu durumda, $(\eta, \Gamma, N) = ((\mu_1 \sqcap \mu_2), \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N)$ olacak şekilde bir $(\sigma, \Gamma, N) \in \tau$ vardır. (ξ_1, Γ, N) ve (ξ_2, Γ, N) Θ 'da N -esnek kapalı kümeler olmak

üzere, Teorem 4.7 ve Yardımcı Teorem 4.8'den,

$$\begin{aligned}
& ((\mu_1 \sqcap \mu_2), \Gamma, N) \ominus (((\mu_1 \sqcap \mu_2), \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N)) \\
&= ((\mu_1, \Gamma, N) \ominus ((\mu_1, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N))) \sqcap ((\mu_2, \Gamma, N) \ominus ((\mu_2, \Gamma, N) \sqcap (\sigma, \Gamma, N))) \\
&= ((\mu_1, \Gamma, N) \sqcap (\xi_1, \Gamma, N)) \sqcap ((\mu_2, \Gamma, N) \sqcap (\xi_2, \Gamma, N)) \\
&= ((\mu_1, \Gamma, N) \sqcap (\mu_2, \Gamma, N)) \sqcap ((\xi_1, \Gamma, N) \sqcap (\xi_2, \Gamma, N)) \\
&= ((\mu_1 \sqcap \mu_2), \Gamma, N) \sqcap ((\xi_1 \sqcap \xi_2), \Gamma, N)
\end{aligned}$$

takip edilir. (Nsc_3) koşulu gereğince ve $((\xi_1 \sqcap \xi_2), \Gamma, N)$, Θ 'da bir N -esnek kapalı küme olduğundan (s_1) özelliği sağlanır.

(s_2) $(\xi, \Gamma, N) \in \mathcal{K}$ olsun. (σ_1, Γ, N) ve (σ_2, Γ, N) Θ 'da iki N -esnek açık küme olmak üzere, Teorem 4.7 ve Yardımcı Teorem 4.8 kullanılarak

$$\begin{aligned}
& ((\mu_1 \sqcap \mu_2), \Gamma, N) \ominus (((\mu_1 \sqcap \mu_2), \Gamma, N) \sqcap (\xi, \Gamma, N)) \\
&= ((\mu_1, \Gamma, N) \ominus ((\mu_1, \Gamma, N) \sqcap (\xi, \Gamma, N))) \sqcap ((\mu_2, \Gamma, N) \ominus ((\mu_2, \Gamma, N) \sqcap (\xi, \Gamma, N))) \\
&= ((\mu_1, \Gamma, N) \sqcap (\sigma_1, \Gamma, N)) \sqcap ((\mu_2, \Gamma, N) \sqcap (\sigma_2, \Gamma, N)) \\
&= ((\mu_1, \Gamma, N) \sqcap (\mu_2, \Gamma, N)) \sqcap ((\sigma_1, \Gamma, N) \sqcap (\sigma_2, \Gamma, N)) \\
&= ((\mu_1 \sqcap \mu_2), \Gamma, N) \sqcap ((\sigma_1 \sqcap \sigma_2), \Gamma, N)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (Nst_3) koşulu yardımı ile $((\sigma_1 \sqcap \sigma_2), \Gamma, N) \in \tau$ olur. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Sonraki örnek, $((\mu_1, \Gamma, N), \tau_{\mu_1})$ ve $((\mu_2, \Gamma, N), \tau_{\mu_2})$, $(\Theta, \Gamma, N, \tau)$ N -esnek topolojik uzayın iki güçlü N -esnek topolojik alt uzayı ise $((\mu_1 \sqcup \mu_2, \Gamma, N), \tau_{\mu_1 \sqcup \mu_2})$ 'nin her zaman bir güçlü N -esnek topolojik alt uzay olmadığını gösterir.

Örnek 4.10. $\Theta = \mathbb{Z}$ ve Γ keyfi parametreler kümesi olsun. Örnek 4.6'dan, $\tau = \{(\mu^\alpha, \Gamma, 6) : \alpha \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}\}$ olmak üzere, $(\Theta, \Gamma, 6, \tau)$ ailesinin bir 6-esnek topolojik uzay olduğu takip edilir. Her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için

$$\ell_{px}^{\sigma_1} = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z}^-; \\ 3, & x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \end{cases} \quad \ell_{px}^{\sigma_2} = \begin{cases} 4, & x \in \mathbb{Z}^-; \\ 0, & x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \end{cases}$$

kuralı yardımıyla $(\sigma_1, \Gamma, 6), (\sigma_2, \Gamma, 6) \in \mathcal{S}^6(\Theta, \Gamma)$ düşünölsün. Bu durumda, Örnek 4.6 gereğince, $((\sigma_1, \Gamma, 6), \tau_{\sigma_1})$ ve $((\sigma_2, \Gamma, 6), \tau_{\sigma_2})$ 'nin $(\Theta, \Gamma, 6, \tau)$ 'nun iki güçlü 6-esnek topolojik alt uzayı olduğu bilinir. Diğer yandan, $((\sigma_1 \sqcup \sigma_2, \Gamma, 6), \tau_{\sigma_1 \sqcup \sigma_2}), (\Theta, \Gamma, 6, \tau)$ 'nun bir güçlü 6-esnek topolojik alt uzayı değildir. Gerçekten, her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için $\ell_{px}^\xi = 1$ olacak şekilde Θ 'da bir $(\xi, \Gamma, 6)$ 6-esnek kapalı kümesi alınsın. Buradan, her $p \in \Gamma$ ve her $x \in \Theta$ için

$$\ell_{px}^{(\sigma_1 \sqcup \sigma_2) \Theta (\xi \cap (\sigma_1 \sqcup \sigma_2))} = \ell_{px}^{(\sigma_1 \sqcup \sigma_2) \Theta \xi} = \begin{cases} 3, & x \in \mathbb{Z}^-; \\ 2, & x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece, (s_2) özelliğinin sağlanmadığı görülür.

Teorem 4.11. $((\mu, \Gamma, N), \tau_\mu), (\Theta, \Gamma, N, \tau)$ N -esnek topolojik uzayın bir güçlü N -esnek topolojik alt uzayı ve $(\varsigma, \Gamma, N) \sqsubseteq (\mu, \Gamma, N)$ olsun. Bu takdirde, (ς, Γ, N) N -esnek kümesinin (μ, Γ, N) 'deki N -esnek kapanışı $\overline{(\varsigma, \Gamma, N)} \cap (\mu, \Gamma, N)$ N -esnek kümesine eşittir.

İspat. Teorem 4.7'den kolay bir şekilde ispatlanır. □

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Kapalı kümeler, bir küme üzerinde kurulan topolojinin temel konularını oluşturduğundan genel topolojide çok önemli bir yer tutar. Ayrıca, ayırma aksiyomları, kompaktlık ve bağlantılılık gibi birçok topolojik özelliklerin çalışılmasında kapalı kümeler önemli katkılar sağlar. Diğer yandan, sürekli dönüşümler, sadece genel topolojinin değil aynı zamanda matematiğin diğer dallarında da çok etkili bir araştırma konusudur. Özel olarak, topoloji alanındaki pek çok araştırmacı, hangi topolojik özelliklerin bu dönüşümler altında korunduğu ile ilgilenmektedir. Bundan dolayı, birçok matematikçi tarafından, hem sürekli dönüşümlerin hem de kapalı kümelerin daha güçlü ve daha zayıf formları keşfedilmekte ve çalışılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, [2]'deki tümleyen tanımı kullanılarak yeni bir N -esnek kapalı küme tanımlanmış ve bazı temel sonuçları belirlenmiştir. Ayrıca, bir N -esnek sürekli dönüşüm kavramı verilmiş ve bu dönüşümler ile N -esnek kapalı kümeler arasındaki ilişkiler karakterize edilmiştir. Bunun yanı sıra, bir başlangıç N -esnek topoloji tanımlanmıştır. Daha sonra, klasik alt uzaylarda kapalı kümeler için korunan bazı temel sonuçlar Tanım 4.1 sebebiyle N -esnek küme teorisinde sağlanmadığından farklı bir N -esnek topolojik alt uzay kavramı ileri sürülmüştür. Son olarak, örnekler ile önerilen sonuçların kullanılabilirliği gösterilmiştir.

Sonraki çalışmalarda, N -esnek kapalı kümeler ailesi ve N -esnek sürekli dönüşümler yardımıyla ayırma aksiyomları, kompaktlık, bağlantılılık ve parakompaktlık gibi daha ileri topolojik kavramlar incelenebilir. Ayrıca, verilen sonuçlar, bulanık N -esnek kümeler, bipolar N -esnek kümeler, tereddütlü N -esnek kümeler, nötrosofik N -esnek kümeler ve kompleks bulanık N -esnek kümeler gibi başka N -esnek modellere genelleştirilebilir. Dahası, bu başka N -esnek modeller üzerinde verilen sonuçlara uygun olarak topolojik yapılar elde edilebilir ve karar verme metodları geliştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] M. Riaz, N. Çağman, I. Zareef, ve M. Aslam, “N-soft topology and its applications to multi-criteria group decision making”, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, c. 36, sayı 6, ss. 6521–6536, 2019.
- [2] I. Demir, “N-soft mappings with application in medical diagnosis”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 44, sayı 8, ss. 7343–7358, 2021.
- [3] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, c. 8, sayı 3, ss. 338–353, 1965.
- [4] D. Molodtsov, “Soft set theory—first results”, *Computers and Mathematics with Applications*, c. 37, sayı 4-5, ss. 19–31, 1999.
- [5] T. Al-Shami, “Compactness on soft topological ordered spaces and its application on the information system”, *Journal of Mathematics*, c. 2021, ss. 1–12, 2021.
- [6] T. M. Al-shami, “Soft somewhat open sets: soft separation axioms and medical application to nutrition”, *Computational and Applied Mathematics*, c. 41, sayı 5, p. 216, 2022.
- [7] O. Dalkılıç, “A novel approach to soft set theory in decision-making under uncertainty”, *International Journal of Computer Mathematics*, c. 98, sayı 10, ss. 1935–1945, 2021.
- [8] M. K. Bably ve A. F. A. E. Atik, “Soft beta-rough sets and their application to determine covid-19”, *Turkish Journal of Mathematics*, c. 45, sayı 3, ss. 1133–1148, 2021.
- [9] J. Yang ve Y. Yao, “Semantics of soft sets and three-way decision with soft sets”, *Knowledge-Based Systems*, c. 194, p. 105 538, 2020.
- [10] P. Maji, A. R. Roy, ve R. Biswas, “An application of soft sets in a decision making problem”, *Computers and Mathematics with Applications*, c. 44, sayı 8-9, ss. 1077–1083, 2002.
- [11] P. K. Maji, R. Biswas, ve A. R. Roy, “Soft set theory”, *Computers and Mathematics with Applications*, c. 45, sayı 4-5, ss. 555–562, 2003.
- [12] D. Chen, E. Tsang, D. S. Yeung, ve X. Wang, “The parameterization reduction of soft sets and its applications”, *Computers and Mathematics with Applications*, c. 49, sayı 5-6, ss. 757–763, 2005.
- [13] H. Aktaş ve N. Çağman, “Soft sets and soft groups”, *Information Sciences*, c. 177, sayı 13, ss. 2726–2735, 2007.
- [14] M. I. Ali, F. Feng, X. Liu, W. K. Min, ve M. Shabir, “On some new operations in soft set theory”, *Computers and Mathematics with Applications*, c. 57, sayı 9, ss. 1547–1553, 2009.
- [15] A. Kharal ve B. Ahmad, “Mappings on soft classes”, *New Mathematics and Natural Computation*, c. 7, sayı 03, ss. 471–481, 2011.

- [16] S. Das ve S. Samanta, “Soft real sets, soft real numbers and their properties”, *Journal of Fuzzy Mathematics*, c. 20, sayı 3, ss. 551–576, 2012.
- [17] M. Shabir ve M. Naz, “On soft topological spaces”, *Computers and Mathematics with Applications*, c. 61, sayı 7, ss. 1786–1799, 2011.
- [18] A. Aygünoğlu ve H. Aygün, “Some notes on soft topological spaces”, *Neural Computing and Applications*, c. 21, ss. 113–119, 2012.
- [19] T. Al-Shami, “On soft separation axioms and their applications on decision-making problem”, *Mathematical Problems in Engineering*, c. 2021, ss. 1–12, 2021.
- [20] T. M. Al-shami, A. Mhemdi, R. Abu-Gdairi, ve M. E. El-Shafei, “Compactness and connectedness via the class of soft somewhat open sets”, *AIMS Mathematics*, c. 8, ss. 815–840, 2022.
- [21] S. Al Ghour, “Weaker forms of soft regular and soft T_2 soft topological spaces”, *Mathematics*, c. 9, sayı 17, p. 2153, 2021.
- [22] A. Azzam, Z. A. Ameen, T. M. Al-shami, ve M. E. El-Shafei, “Generating soft topologies via soft set operators”, *Symmetry*, c. 14, sayı 5, p. 914, 2022.
- [23] N. Demirtaş ve O. Dalkılıç, “Decompositions of soft alpha-continuity and soft A-continuity”, *Journal of New Theory*, sayı 31, ss. 86–94, 2020.
- [24] A. C. Güler ve G. Kale, “Regularity and normality on soft ideal topological spaces”, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, c. 9, sayı 3, ss. 373–383, 2015.
- [25] E. Turanlı, I. Demir, ve O. B. Ozbakir, “Some types of soft paracompactness via soft ideals”, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, c. 10, sayı 2, ss. 197–211, 2019.
- [26] F. Fatimah, D. Rosadi, R. F. Hakim, ve J. C. R. Alcantud, “N-soft sets and their decision making algorithms”, *Soft Computing*, c. 22, ss. 3829–3842, 2018.
- [27] M. Riaz, K. Naeem, I. Zareef, ve D. Afzal, “Neutrosophic N-soft sets with TOPSIS method for multiple attribute decision making”, *Neutrosophic Sets and Systems*, c. 32, p. 145, 2020.
- [28] M. Akram, A. Adeel, ve J. C. R. Alcantud, “Fuzzy N-soft sets: A novel model with applications”, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, c. 35, sayı 4, ss. 4757–4771, 2018.
- [29] ———, “Group decision-making methods based on hesitant N-soft sets”, *Expert Systems with Applications*, c. 115, ss. 95–105, 2019.
- [30] M. Akram, G. Ali, ve J. C. R. Alcantud, “New decision-making hybrid model: Intuitionistic fuzzy N-soft rough sets”, *Soft Computing*, c. 23, ss. 9853–9868, 2019.
- [31] M. Akram, G. Ali, J. C. Alcantud, ve F. Fatimah, “Parameter reductions in N-soft sets and their applications in decision-making”, *Expert Systems*, c. 38, sayı 1, e12601, 2021.
- [32] H. Kamacı ve S. Petchimuthu, “Bipolar N-soft set theory with applications”, *Soft Computing*, c. 24, ss. 16 727–16 743, 2020.
- [33] J. Liu, Y. Chen, Z. Chen, ve Y. Zhang, “Multi-attribute decision making method based on neutrosophic vague N-soft sets”, *Symmetry*, c. 12, sayı 5, p. 853, 2020.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Merve OKURER

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik 3,89 / 4,00	Düzce Üniversitesi	2023
Lisans	Matematik *Bölüm Birinciliği* 3,61 / 4,00	Düzce Üniversitesi	2020
Lise	Sayısal	Şehit Er Mücahit Okur Anadolu İmam Hatip Lisesi	2015

YAYINLAR

İ. Demir ve M. Okurer, “A new approach to N -soft topological structures”, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, c. 53, sayı 6, ss. 1789-1805, 2023.

İ. Demir, M. Saldamlı ve M.Okurer, “Bipolar fuzzy soft filter and its application to multi-criteria group decision-making”, submitted for publication, 2023.