

**T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FARKLI KESİRLİ OPERATÖRLER İÇEREN HEPATİT C MODELİ
İÇİN DETERMİNİSTİK VE STOKASTİK YAKLAŞIMLAR**

YÜKSEK LİSANS

**İpek KORKMAZ
(213114010)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Seda İĞRET ARAZ

**Ocak-2024
SİİRT**

TEZ KABUL VE ONAYI

İpek KORKMAZ tarafından hazırlanan “Farklı Kesirli Operatörler İçeren Hepatit C Modeli için Deterministik ve Stokastik Yaklaşımlar” adlı tez çalışması 12/01/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Ali AKGÜL

Danışman

Doç. Dr. Seda İĞRET ARAZ

Üye

Doç. Dr. Mahmut MODANLI

İmza

.....

.....

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Harun BEKTAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimimin her aşamasında bilgi ve deneyimleriyle beni sürekli aydınlatan, hoşgörüsü, güler yüzü ve sabrı ile her daim desteğini üzerimde hissettiren değerli tez danışmanım ve hocam Doç. Dr. Seda İĞRET ARAZ'a, Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı hocalarına, hayatım boyunca koşulsuz sevgilerini esirgemeyen, maddi ve manevi her türlü desteklerini seferber eden canım aileme sonsuz teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında burs desteği sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İpek KORKMAZ
SİİRT-2024



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT.....	x
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	5
2.1. Bazı Kesirli Türev Ve İntegral Tanımları	5
2.2. Kesirli Türev İçeren Diferansiyel Denklemlerin Analitik Çözümleri	17
3. MATERYAL VE METOT	19
3.1. Stokastik Bir Diferansiyel Denklem İçin Newton Polinomlu Metot	19
3.2. Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Newton Polinomuna Dayalı Nümerik Metot	21
3.2.1. Caputo türevli kesirli diferansiyel denklemin nümerik çözümü	21
3.2.2. Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi için bir nümerik algoritma	25
3.2.3. Caputo-Fabrizio kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik algoritma ...	29
3.3. Stokastik Kesirli Diferansiyel Denklemler için Newton Polinomuna Dayalı Nümerik Metot	32
3.3.1. Stokastik Caputo türevli kesirli diferansiyel denkleminin nümerik çözümü	32
3.3.2. Stokastik Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi için bir nümerik algoritma	34
3.3.3. Stokastik Caputo-Fabrizio kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik algoritma	37
3.4. Parçalı Türevli Diferansiyel Denklemler için Newton Polinomuna Dayalı Nümerik Metot	39
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	45
4.1. Hepatit C Modeli Ve Bazı Özellikleri	45
4.1.1. Deterministik modelin denge noktaları	46
4.1.2. Deterministik modelin çözümlerinin pozitifliği	47
4.1.3. Temel çoğalma sayısı	49
4.2. Hepatit C Modeli İçin Newton Metodu ve Nümerik Çözümleri	50
4.2.1. Klasik türevli Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri	51
4.2.2. Stokastik Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri	53
4.2.3. Stokastik Hepatit C modeli için varlık-tekliğin incelenmesi	55

4.2.4. Kesirli türevlere sahip Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri	59
4.2.5. Stokastik kesirli Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri	69
4.2.6. Parçalı türeve sahip Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri	79
4.2.7. Parçalı ve stokastik türeve sahip Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri ..	84
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	93
6. KAYNAKLAR	94
ÖZGEÇMİŞ	97



ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1. Kuvvet yasası fonksiyonu için simülasyon	8
Şekil 2.2. Üstel fonksiyon için simülasyon	9
Şekil 2.3. $B(\alpha, \beta)$ fonksiyonunun farklı β değerleri için simülasyonu	10
Şekil 2.4. $B(x; \alpha, \beta)$ fonksiyonunun farklı α ve β değerleri için simülasyonu	11
Şekil 2.5. Farklı α değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonunun simülasyonu.....	12
Şekil 3.1. Caputo türevli kesirli diferansiyel denkleminin nümerik simülasyonu.....	25
Şekil 3.2. Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi için bir nümerik simülasyon.....	29
Şekil 3.3. Caputo-Fabrizio kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik simülasyonu	31
Şekil 3.4. $\alpha = 0,9$ ve $\sigma = 0,25$ için stokastik Caputo kesirli türevli Cauchy problemi için bir nümerik simülasyon	34
Şekil 3.5. $\alpha = 0,95$ ve $\sigma = 0,05$ için stokastik Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi için bir nümerik simülasyon	37
Şekil 3.6. $\alpha = 0,5$ ve $\sigma = 0,15$ için stokastik Caputo-Fabrizio kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik simülasyonu	39
Şekil 3.7. $\alpha = 0,85$ ve $\sigma = 0,1$ için kandaki hormonun zamana bağlı değişimini gösteren nümerik simülasyon.....	41
Şekil 3.8. $\alpha = 0,85$ ve $\sigma = 0,2$ için kandaki hormonun zamana bağlı değişimini gösteren nümerik simülasyon.....	44
Şekil 4.1. Enfekte olmamış hücrelerin sayısının Newton metotlu nümerik simülasyonu.....	52
Şekil 4.2. Enfekte olmuş hücrelerin sayısının Newton metotlu nümerik simülasyonu..	52
Şekil 4.3. Serbest virüslerin sayısının Newton metotlu nümerik simülasyonu	53
Şekil 4.4. $\sigma = 0,08$ için enfekte olmamış hücrelerin sayısının stokastik nümerik simülasyonu.....	54
Şekil 4.5. $\sigma = 0,14$ için enfekte olmuş hücrelerin sayısının stokastik nümerik simülasyonu.....	55
Şekil 4.6. $\sigma = 0,18$ için serbest virüslerin sayısının stokastik nümerik simülasyonu....	55
Şekil 4.7. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli nümerik simülasyonu.....	61
Şekil 4.8. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli nümerik simülasyonu.....	61
Şekil 4.9. Farklı kesirli mertebeden türevler için serbest virüslerin sayısının Caputo- Fabrizio kesirli türevli nümerik simülasyonu.....	62
Şekil 4.10. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli nümerik simülasyonu	64
Şekil 4.11. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli nümerik simülasyonu	65
Şekil 4.12. Farklı kesirli mertebeden türevler için serbest virüslerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli nümerik simülasyonu	65
Şekil 4.13. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Caputo kesirli türevli nümerik simülasyonu	67
Şekil 4.14. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Caputo kesirli türevli nümerik simülasyonu	68
Şekil 4.15. Farklı kesirli mertebeden türevler için serbest virüslerin sayısının Caputo kesirli türevli nümerik simülasyonu	68

Şekil 4.16. $\alpha = 0,8$ ve $\sigma = 0,08$ için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu	71
Şekil 4.17. $\alpha = 0,8$ ve $\sigma = 0,14$ için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu	72
Şekil 4.18. $\alpha = 0,8$ ve $\sigma = 0,18$ için serbest virüslerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu	72
Şekil 4.19. $\alpha = 0,95$ ve $\sigma = 0,09$ için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu	75
Şekil 4.20. $\alpha = 0,95$ ve $\sigma = 0,1$ için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu	75
Şekil 4.21. $\alpha = 0,95$ ve $\sigma = 0,15$ için serbest virüslerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu	76
Şekil 4.22. $\alpha = 0,9$ ve $\sigma = 0,09$ için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Caputo kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu	78
Şekil 4.23. $\alpha = 0,9$ ve $\sigma = 0,1$ için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Caputo kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu	78
Şekil 4.24. $\alpha = 0,9$ ve $\sigma = 0,1$ için serbest virüslerin sayısının Caputo kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu.....	79
Şekil 4.25. Enfekte olmamış hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu ...	82
Şekil 4.26. Enfekte olmuş hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu	83
Şekil 4.27. Serbest virüslerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu.....	83
Şekil 4.28. $\alpha = 0,9$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 0,15$; $\sigma_3 = 0,18$ değerleri için parçalı türeve sahip enfekte olmamış hücrelerin sayısını gösteren simülasyon	86
Şekil 4.29. $\alpha = 0,9$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 0,15$; $\sigma_3 = 0,18$ değerleri için parçalı türeve sahip enfekte olmuş hücrelerin sayısını gösteren simülasyon	86
Şekil 4.30. $\alpha = 0,9$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 0,15$; $\sigma_3 = 0,18$ değerleri için parçalı türeve sahip serbest virüslerin sayısını gösteren simülasyon.....	87
Şekil 4.31. Enfekte olmamış hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu ...	88
Şekil 4.32. Enfekte olmuş hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu	89
Şekil 4.33. Serbest virüslerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu.....	89
Şekil 4.34. Enfekte olmamış hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu ...	91
Şekil 4.35. Enfekte olmuş hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu	91
Şekil 4.36. Serbest virüslerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu.....	92

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

<u>Kısaltma</u>	<u>Açıklama</u>
AB	: Atangana-Baleanu kesirli türevi
C	: Caputo kesirli türevi
CF	: Caputo-Fabrizio kesirli türevi
RL	: Riemann-Liouville kesirli türevi

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
$AB(\alpha)$	: Normalizasyon fonksiyonu
$M(\alpha)$	: Normalizasyon fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	: Mittag-Leffler fonksiyonu
${}^{RL}_0 D_t^\alpha$	: Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}^{RL}_0 J_t^\alpha$	: Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}^{CFR}_0 D_t^\alpha$	: Riemann anlamında Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
${}^{CF}_0 D_t^\alpha$	: Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
${}^{CF}_0 I_t^\alpha$	: Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü
${}^C_0 D_t^\alpha$	: Caputo kesirli türev operatörü
${}^C_0 I_t^\alpha$	: Caputo kesirli integral operatörü
${}^{AB}_0 D_t^\alpha$	: Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü
${}^{AB}_0 I_t^\alpha$	: Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü
H	: Banach uzayı
$N(0, t - p)$	: 0 ortalaması veren, $t - p$ varyanslı normal dağılım
R_0	: Temel çoğalma sayısı
$Re(\alpha)$	: Kompleks sayı α 'nın gerçel kısmı
$Re(\beta)$	: Kompleks sayı β 'nın gerçel kısmı

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARKLI KESİRLİ OPERATÖRLER İÇEREN HEPATİT C MODELİ İÇİN DETERMİNİSTİK VE STOKASTİK YAKLAŞIMLAR

İpek KORKMAZ

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Seda İĞRET ARAZ

2024, 97+X Sayfa

Bu tez çalışmasında, deterministik ve stokastik Hepatit C modelinde klasik türevin Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu gibi kesirli türevler ile değiştirilmesi ile elde edilen versiyonlarını ele almaktadır. Deterministik model için modelin çözümlerinin pozitifliği, temel çoğalma sayısı ve Newton polinomuna dayalı bir nümerik metot sunulurken, stokastik model için çözümün var ve tek olduğu koşullar ve ayrıca bu model için ilgili nümerik metot türetilir. Dahası, deterministik ve stokastik modeli birlikte ele almaya olanak sağlayan ve yeni tanıtilan parçalı türev yardımıyla Hepatit C modeli yeniden inşa edilir. Bahsedilen modeller için bazı farklı senaryolar dikkate alınır ve bu senaryoların Matlab programı kullanılarak elde edilen nümerik simülasyonları grafiksel gösterimlerle sunulur.

Anahtar Kelimeler: Hepatit C modeli, kesirli türev ve integral, nümerik simülasyonlar, parçalı türev ve integral, stokastik

ABSTRACT

MS THESIS

DETERMINISTIC AND STOCHASTIC APPROACHES HEPATITIS C MODEL INCLUDING DIFFERENT FRACTIONAL OPERATORS

İpek KORKMAZ

**The Graduate School of Natural and Applied Science of Siirt University
The Degree of Master of Science in Mathematics**

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Seda İĞRET ARAZ

2024, 97+X Pages

This thesis discusses the versions obtained by replacing the classical derivative with fractional derivatives such as Caputo, Caputo-Fabrizio and Atangana-Baleanu in the deterministic and stochastic Hepatitis C model. For the deterministic model, a numerical method based on the Newton polynomial, the positivity of the solutions of the model, the basic reproduction number and is presented, while for the stochastic model, the conditions under which the solution exists and is unique, as well as the associated numerical method for this model, are derived. In addition, the Hepatitis C model is reconstructed using the newly introduced piecewise derivative, which allows the deterministic and stochastic models to be considered together. Some different scenarios are considered for the mentioned models and the numerical simulations of these scenarios obtained using the Matlab program are presented with graphical representations.

Keywords: Fractional derivative and integral, Hepatitis C model, numerical simulations, piecewise derivative and integral, stochastic

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerini içeren denklemler olarak bilinmektedirler. Diferansiyel denklemler teorisi, Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz'in kalkülüs çalışmaları sırasında 17. yüzyılda ortaya çıkmıştır. 17. yüzyılın sonlarına doğru diferansiyel denklemler ile ilgili analitik çözüm yöntemleri geliştirilmiş, 18. yüzyılda analitik yollarla çözülemeyen denklemler için sayısal yöntemler kullanılmıştır. 19. yüzyılda oldukça verimli sayısal metotlar önerilirken, 20. yüzyılda lineer olmayan diferansiyel denklemler için geometrik metotlar araştırılmıştır. Son yıllarda ise kaos ve fraktallar keşfedilmiş, birçok araştırmacının ilgi odağı haline gelmiştir. Sıvıların hareketi, kaos, katılardaki ısı yayılımı, bir popülasyondaki değişimi, elektrik devrelerindeki akımın akışı, bir virüsün yayılımı gibi problemleri yorumlamak ve analiz etmek için diferansiyel denklemler teorisinden faydalanılmaktadır (Boyce ve DiPrima, 2012). Günlük yaşam problemlerinin fiziksel bir süreçlerini ele alan diferansiyel denklemlere matematiksel model denir. Bu süreçleri anlamak ve tahmin etmek için birçok araştırmacı matematiksel modeller geliştirmiş ve süreci başarılı şekilde analiz etmişlerdir.

Matematiksel modeller oluşturulurken dikkat edilecek hususlar şunlardır:

- ❖ Bağımlı ve bağımsız değişkenleri iyi belirlemek gerekir. Matematiksel modeller, genellikle bir sürecin zamana bağlı değişimini incelediğinden, bağımsız değişken çoğunlukla zaman olarak alınır.
- ❖ Her bir değişken için birim uygun şekilde seçilmelidir. Örneğin, bir virüsün yayılımı için zaman gün olarak alınırken, fırlatılan bir roketin hızındaki değişim için zaman saat olarak seçilebilir.
- ❖ Modellenecek problem, Newton'un hareket kanunu gibi temel prensiplere ya da ele alınacak probleme uygun kabullere dayandırılacaksa, bu durum göz önünde bulundurulmalıdır.
- ❖ Değişkenler ve parametrelerin tanımları iyi belirlenmeli ve sürece uygun değerler kullanılmalıdır. Örneğin, yere düşen bir cismin herhangi bir andaki hızını araştırırken, yer çekimi ivmesi kullanılmalı ve bu değer 9.8 olarak alınmalıdır.
- ❖ Modelde yer alan tüm terimlerin fiziksel birimler aynı olmalı ve birbiri ile tutarlı olmalıdır.

- ❖ Ele alınan probleme göre, oluşturulacak olan matematiksel model bir veya birden fazla diferansiyel denklem içerebilir. Modelde yer alacak denklem sayısı, kullanılacak bağımlı değişkenlerin sayısına göre seçilmelidir.

Matematiksel model elde edildikten sonra, modelin çalışabilirliğini doğrulamak için

- ❖ Varsayımların mantığa uygun olup olmadığı
- ❖ Çözümlerin elde edilip edilmediği
- ❖ Çözümlerin var ve tek olup olmadığı
- ❖ Denklemlerin boyutsal olarak tutarlı olup olmadığı
- ❖ Modelin çıktılarının deneysel veri ile uyumlu olup olmadığının incelenmesi

dikkat edilmesi gereken bazı hususlar arasındadır (Nagle ve ark., 2013).

Matematiksel modellemeye örnek olarak, hormonların salgılanmasına yönelik bir matematiksel model sunalım.

Hormonların kana salgılanması durumu genellikle periyodiktir. 24 saatlik bir döngüde salgılanan bir hormonun neden olduğu kandaki hormon seviyesinin değişim hızını ifade eden başlangıç değer problemi aşağıdaki şekilde gösterilebilir (Nagle ve ark., 2013):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Burada belirtilen $x(t)$, t anında kanda bulunan hormon miktarını, β hormon salgılamadaki günlük değişim miktarını ve k , vücudun kandaki hormonu uzaklaştırdığı zaman hızını etkileyen bir sabittir. Burada $k > 0$ 'dır.

Şimdi sonraki bölümlerde matematiksel model olarak ele alacağımız hepatit C hastalığı ile ilgili bazı önemli hususlara değinelim. Transfüzyonla ilişkili hepatit vakalarının rapor edildiği 1970'li yıllardan kısa bir süre sonra yeni tip hepatitin varlığı anlaşılmıştır. Hepatit A ve Hepatit B virüsleri gibi bilinen hepatotropik virüslerin yeni tip hepatitten sorumlu olmadığı görülünce, bu yeni tip hepatite A-B olmayan Hepatit ismi verilmiştir. A-B olmayan Hepatit virüsü hakkında yıllar süren araştırmalar yapılmış ve ilk kez 1989 yılında Hepatit C virüsü olarak keşfedilmiştir (Feinstone ve ark., 1975; Choo ve ark., 1989; Kuo ve ark., 1989; Dietz ve Maasoumy, 2022). Hepatit C, karaciğerin temel hücresi olan hepatositlere saldırarak enfeksiyona yol açıp karaciğerin iltihaplanmasına

yol açan bir virüstür (Sadki ve ark., 2023). Hepatit C enfeksiyonu semptomlarının çoğu spesifik değildir diğer bir deyişle asemptomatik hastalık seyri görülür. Dolayısıyla bireyler bilmeden enfekte olabilirler. Görülen vakaların %80'inde akut Hepatit C, kronik Hepatit C enfeksiyonuna dönüşür (Maasoumy ve Wedemeyer, 2012; Dietz ve Maasoumy, 2022). Kronikleşen Hepatit, siroz gibi çeşitli karaciğer hastalığına yol açmaktadır. Bazı tahminler Dünya nüfusunun yaklaşık %1'inin Hepatit C virüsüyle enfekte olduğunu öne sürmektedir (Choo ve ark., 1989; Collaborators, 2017; Duncan ve ark., 2020). Parenteral yollardan bulaşan enfeksiyonun en önemli kaynaklarından biri kontamine kan ürünleridir. Günümüzde çeşitli önlemlerin alınması ve transfüzyon ilacıyla birlikte enfeksiyonlar, intravenöz ilaç kullanımı ve buna bağlı çeşitli iğne paylaşımından kaynaklanmaktadır (Larney ve ark., 2017). Son yıllarda Hepatit C virüsünün artmasıyla Dünya Sağlık Örgütü 2030 yılına kadar bu sorunlar için hedef belirlemiştir. Ancak Hepatit C virüsüne karşı bir aşının bulunmaması halinde bu hedefi gerçekleştirmek zorlayıcı olacaktır (Duncan ve ark., 2020).

Hastalığın yayılımını anlamak ve tedavi yöntemlerinin etkisini incelemek amacıyla literatürde Hepatit C ile ilgili matematiksel modellere rastlanır (Dayan ve ark. 2023). Bu çalışmalardan biri Vujovic ve ark. (2020) tarafından yapılmış olup, Vujovic ve ark. (2020) çalışmalarında izolasyon aşamalı iki stokastik Hepatit C modelinin stabilite özelliklerini oluşturup, global pozitif stokastik çözümün varlığını ve tekliğini kanıtlamışlardır. Dahası, stokastik modelin çıktılarını göstermek amacıyla, bu model için nümerik simülasyonlar sunmuşlardır.

Lestari ve ark. (2023) çalışmalarında, Hepatit C'nin yan etkiyi en aza indiren ve kontrol değişkenleri yeni bir enfeksiyonu ve virüs üretimini engellemek için kullanılan ilaç tedavisini temsil eden bir stokastik diferansiyel denklem için optimal kontrolü problemini ele almışlardır.

Bu tez çalışmasında ise Lestari ve ark. (2022) tarafından klasik türeve sahip bir Hepatit C matematiksel modeli kesirli ve parçalı diferansiyel operatörler ile yeniden incelenecek ve bu operatörler altında modelin farklı kalıpları sunulacaktır.

Bu tez çalışması aşağıda verilen şekilde düzenlenmiştir.

2. bölümde, tez çalışmasında kullanılan bazı özel fonksiyonların ve kesirli diferansiyel operatörlerin tanımları ve özellikleri sunulmuştur.

3. bölümde, farklı kesirli türevli, stokastik kesirli ve stokastik parçalı türevli diferansiyel denklemler için Newton polinomlu nümerik metot verilmiştir. Kullanılan denklemler için simülasyonlar sunulmuştur.

4. bölümde, bir Hepatit C modeli ve bu modelin parametreleri açıklanmıştır. Deterministik modelin çözümlerinin pozitifliği araştırılmış, denge noktaları ve temel çoğalma sayısı hesaplanmıştır. Stokastik modelin varlığı ve tekliği araştırılmıştır. Deterministik ve stokastik modelin kesirli diferansiyel operatörleriyle çözümü için Newton polinomlu nümerik metot kullanılmıştır. Dahası, deterministik ve stokastik modeli birlikte ele almaya olanak sağlayan parçalı türev ile birlikte Hepatit C modeli yeniden inşa edilmiş ve elde edilen nümerik simülasyonlar sunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu başlık altında, daha sonraki bölümlerde değinilecek olan bazı özel fonksiyonlarla birlikte kesirli türevlerin ve kesirli integrallerin tanımları sunulacaktır. Şimdi kesirli türev teorisinin ortaya çıkışı hakkında bilgi sunalım.

2.1. Bazı Kesirli Türev Ve İntegral Tanımları

Kesirli diferansiyel ve integral operatörlerine dayalı kuvvet yasası, matematiksel olarak bilim teknoloji ve mühendislik gibi birçok alanda uygulanabilir. Bu başlık altında kuvvet yasası çekirdeğine dayanan kesirli türevlerin nasıl ortaya çıktığından söz edeceğiz. Literatürde yer alan bazı çalışmalarda kesirli integralin tekrarlanan Cauchy formülünden geldiği vurgulanmaktadır (Gorenflo ve Mainardi, 1998; Atangana ve Hammouch, 2019). Bunu sunmak için iyi bilinen Cauchy formülü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \dots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x) dx_n \dots dx dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-l)^{n-1} f(l) dl. \quad (2.1)$$

Burada f fonksiyonu sürekli ve orijinde sıfırdır. (2.1) formülünde tekrar sayısının 1'den büyük olduğu açıktır. Kesirli hesaplama çerçevesinde tam sayının yerini kesirli sayının aldığına inanılmaktadır. Fakat burada kesirli sayının $n-1 \leq \alpha < n$ aralığında olduğu söylenebilir (Atangana ve Hammouch, 2019).

Eğer kesirli integral Cauchy formülünden elde ediliyorsa, kesirli derece tamsayı olduğunda Cauchy formülünün tekrar elde edilmesi beklenir. Yani α, n olamayacağı ama $n-1$ olabileceğinde ilk Cauchy integralinin elde edilmesi beklenmektedir. Yine de, tamsayıyı kesirli sayıyla değiştirerek şunu elde ederiz (Atangana ve Hammouch, 2019):

$${}^{RL}J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-l)^{\alpha-1} f(l) dl. \quad (2.2)$$

Burada $n-1 \leq \alpha < n$ 'dir. α, n olamayacağından en azından $\alpha, n-1$ olabilir. O halde, eğer $\alpha, n-1$ ise aşağıda verilen Cauchy formülü elde edilir:

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \dots \int_{x_0}^{x_{n-2}} f(x) dx_n \dots dx dx_2 = \frac{1}{\Gamma(n-2)!} \int_{x_0}^x (x-l)^{n-2} dl. \quad (2.3)$$

(2.3) denkleminde n integrali için Cauchy formülü elde edilemediği fakat $n - 1$ integrali için sağladığı görülmüştür. Dolayısıyla bu durum hatalı yorumlamaya neden olabilir. Normalde, kesirli integralin Cauchy formülünden n defa tekrarlanan integralden elde edilmesi durumunda $\alpha = n$ olması gerekir. Bu nedenle, Cauchy formülüne uygun olarak bir f fonksiyonun kesirli integrali aşağıdaki şekilde verilmektedir (Atangana ve Hammouch, 2019):

$${}^{RL}J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-l)^{\alpha-1} f(l) dl. \quad (2.4)$$

Burada $n \leq \alpha < n + 1$ 'dir. Bu durumda $\alpha = n$ iken Cauchy formülü elde edilir. Dolayısıyla (2.4) denklemi ile birlikte kuvvet yasasına dayalı kesirli türevin durumu aşağıdaki şekildedir:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-l)^{n-\alpha-1} f(l) dl. \quad (2.5)$$

Şimdi kesirli türev tanımlarında karşımıza çıkabilecek bazı özel fonksiyonların tanımlarını vereceğiz ve sonrasında kesirli türev ve integral tanımlarına değineceğiz.

Tanım 2.1. Euler tarafından tanımlanan Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx; \quad n > 0 \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Podlubny, 1998).

n 'nin pozitif olan değerleri için bu belirli integral yakınsak olur. (2.6) formülünde $n = 1$ olarak alındığında

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx \quad (2.7)$$

eşitliği elde edilir. Yine (2.6) denkleminde n yerine $n + 1$ yazıldığında;

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \quad (2.8)$$

eşitliği elde edilir. (2.8) integrali için kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$u = x^n, \quad du = nx^{n-1}dx, \quad dv = e^{-x}dx, \quad v = -e^{-x} \quad (2.9)$$

olur. Bulunan değerler

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2.10)$$

formülünde yerlerine yazıldığında elde edilen sonuç

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (2.11)$$

olur ve

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (2.12)$$

eşitliği elde edilir. (2.12) eşitliğinde eşitliğin her iki tarafı n ile bölündüğünde

$$\frac{\Gamma(n+1)}{n} = \Gamma(n) \quad (2.13)$$

eşitliği elde edilir. Eğer n değeri

$$-1 < n < 0 \quad (2.14)$$

aralığında olursa, $n+1$ pozitif olur. Dolayısıyla $\Gamma(n)$ hesaplanabilir. Bu hesaplama (2.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ için } \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\ n = 2 \text{ için } \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1 = 2! \\ n = 3 \text{ için } \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2.1 = 3! \\ n = 4 \text{ için } \Gamma(5) &= 4\Gamma(4) = 4.3.2.1 = 4! \end{aligned} \quad (2.15)$$

şeklinde devam edildiğinde

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (2.16)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $n = 0$ yazılırsa

$$0! = \Gamma(1) = 1$$

(2.17)

bulunur.

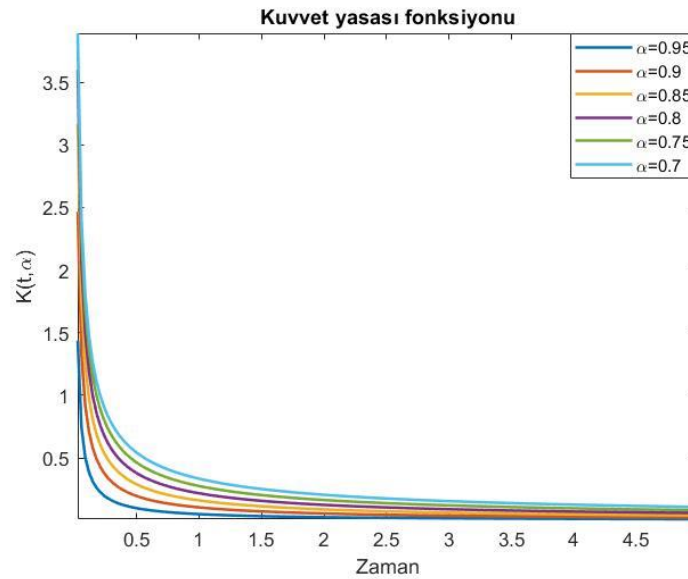
Gamma fonksiyonu, kesirli türev ve integral teorisinde kullanılan kuvvet yasası fonksiyonunda kullanılmaktadır. Bu fonksiyon aşağıdaki verilmiştir:

$$K(t, \alpha) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}.$$

(2.18)

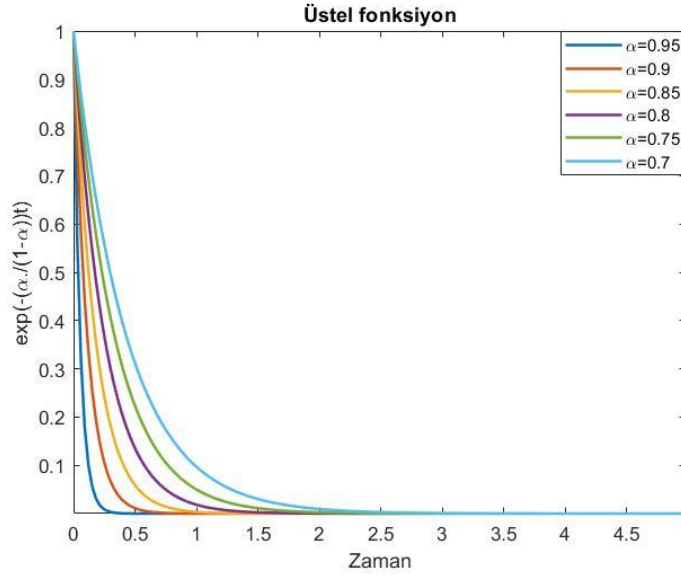
İlk olarak ekonomide kullanılmış olan kuvvet yasası davranışı gösteren bu fonksiyon, daha sonralarda birçok bilim ve mühendislik alanında kullanılmıştır. Negatif bir sabit üslü dağılımlar için kullanılan davranış, zamanla gelişerek Gauss dağılımından daha yavaş bozunan dağılımları içerecek şekilde gelişmiştir. Çekirdekler, bir sistemin fiziksel problemlerini simüle etmek için veri ve algoritmaları kullanmaya odaklanan çeşitli alanlarda önemli bir rol oynamaktadır (Ghoshdastidar ve Dukkipati, 2013). Bu yüzden, araştırmacılar tarafından çeşitli çekirdekler kullanılıp incelenmiş ve günlük yaşam problemlerine en uygun olanları bir matematiksel araç olarak kullanılmıştır. Örneğin, kuvvet yasası fonksiyonu, Riemann, Liouville ve Caputo tarafından kullanılıp incelenmiş ve sonrasında bu fonksiyon kesirli türev ve integral kavramları için bir çekirdek olarak kullanılmaya başlanmıştır (Denk, 2022).

$K(t, \alpha)$ fonksiyonunun t değişkeni ve kesirli türevde mertebeyi gösteren α değişkenine göre grafiği Şekil 2.1’de verilmiştir.



Şekil 2.1. Kuvvet yasası fonksiyonu için simülasyon

Caputo-Fabrizio kesirli türevi ise üstel fonksiyonlu çekirdek içermektedir. Bu fonksiyon için simülasyon Şekil 2.2’de verilmiştir.



Şekil 2.2. Üstel fonksiyon için simülasyon

Tanım 2.2. Beta fonksiyonu Euler integralinin ilk hali olarak da bilinir ve Gamma fonksiyonu ile ilişkilendirilebildiğinden dolayı önemli bir fonksiyondur. Beta fonksiyonu

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad (2.19)$$

eşitliği ile tanımlanır (Podlubny, 1998). Bu tanıma eşdeğer olarak,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}} du \quad (2.20)$$

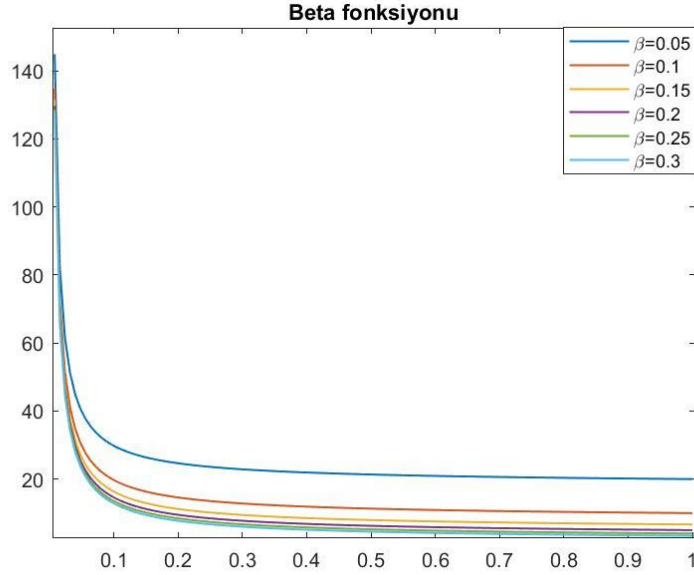
$$B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1}(\theta) \cos^{2\beta-1}(\theta) d\theta, \text{ Re}(\alpha) > 0, \text{ Re}(\beta) > 0 \quad (2.21)$$

eşitlikleri yazılabilir (Podlubny, 1998; Bell, 2004). Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden gösterimi aşağıdaki gibidir (Bell, 2004):

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

(2.22)

Beta fonksiyonunun farklı β değerleri için simülasyonu Şekil 2.3'te verilmiştir.



Şekil 2.3. $B(\alpha, \beta)$ fonksiyonunun farklı β değerleri için simülasyonu

Ayrıca tamamlanmamış beta fonksiyonunun tanımı,

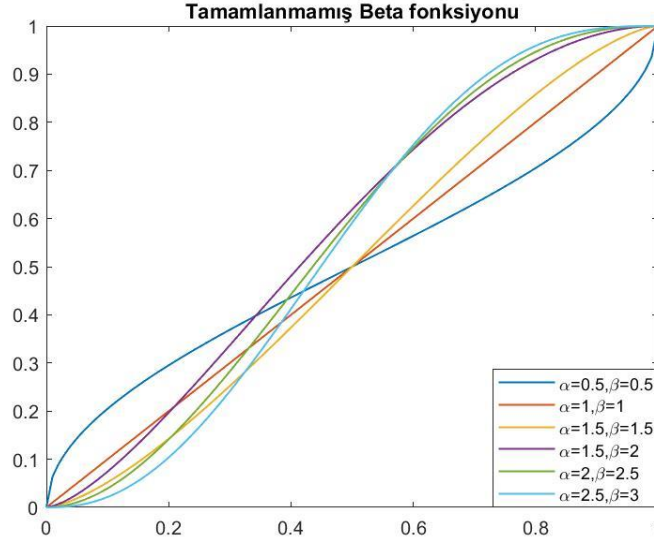
$$B(x; \alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

(2.23)

şeklindedir (Podlubny, 1998). Özel olarak $x = 1$ için Beta fonksiyonu elde edilir.

Beta fonksiyonu özellikle fraktal-kesirli türevlere sahip fonksiyonların integralini hesaplamada kullanılmaktadır.

Tamamlanmamış beta fonksiyonunun farklı α ve β değerleri için simülasyonu Şekil 2.4'te verilmiştir.



Şekil 2.4. $B(x; \alpha, \beta)$ fonksiyonunun farklı α ve β değerleri için simülasyonu

Tanım 2.3. Brownian hareketi

İskoçyalı Robert Brown, bir sıvıdaki polen parçacıklarının mikroskopik seviyedeki hareketlerinin düzensiz, hızlı ve zikzak benzeri hareketler sergilediğini fark etmiştir. Sonraki yapılan çalışmalarda parçacığın bu şekildeki düzensiz hareketine, daha küçük olan ve rassal şekilde hareket halinde olan sıvı molekülleriyle polen parçacığı arasındaki çarpışmaların neden olduğu görülmüştür. Bu hareket Brownian hareketi ile adlandırılmıştır (Topuz, 2021).

Tanım 2.4. Stokastik bir süreç olan Brownian hareketi $\{B(t)\}$ (Wiener süreci), aşağıda verilen özellikleri sağlar (Klebaner, 2006; Önalın, 2010; Topuz, 2021):

- $B(0) = 0$ ve $B(t)$, $t \geq 0$ t 'nin sürekli bir fonksiyonudur.
- $0 \leq p \leq t$ için $B(t) - B(p) \sim N(0, t - p)$ şeklindedir.
- Bütün $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ ler için $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_k) - B(t_{k-1})$ bağımsızdırlar.

Tanım 2.5. Mittag-Leffler fonksiyonu kesirli analizlerde yaygın olarak kullanılan bir fonksiyondur. Mittag-Leffler, e^z üstel fonksiyonunun bir parametrelili genellemesini aşağıda vermiştir (Mittag-Leffler, 1903):

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (2.24)$$

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımı;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (2.25)$$

şeklinde dir. Bu tanımın bazı değ erleri için;

$\alpha = 1, \beta = 1$ için

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \quad (2.26)$$

$\alpha = 1, \beta = 2$ için

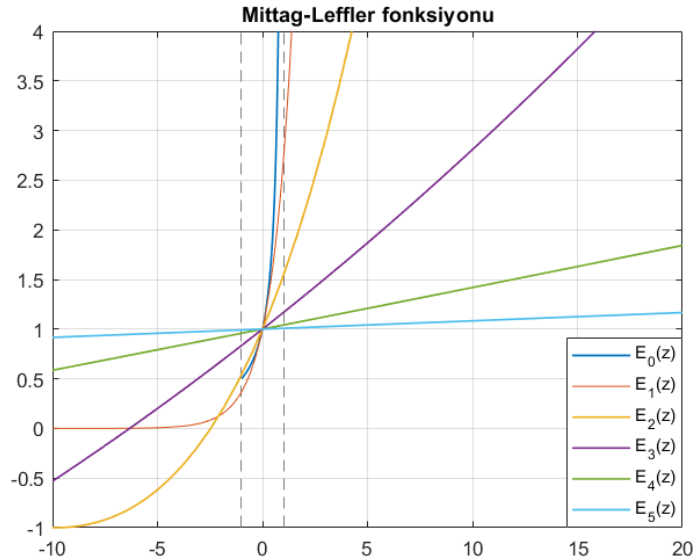
$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \quad (2.27)$$

$\alpha = 1, \beta = 3$ için

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (2.28)$$

elde edilir.

$\beta = 1$ ve farklı α değ erleri için $E_{\alpha,\beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonunun grafiği Ş ekil 2.5'te verilmiştir (Denk, 2022).



Ş ekil 2.5. Farklı α değ erleri için Mittag-Leffler fonksiyonunun simülasyonu

Tanım 2.6. $y(t)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olsun. Bu fonksiyon için Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevinin tanımı

$${}^{RL}_0D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-l)^{-\alpha} f(l) dl \quad (2.29)$$

$${}_0^CD_t^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t y'(\tau) (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \quad (2.30)$$

şeklinde olup, burada $0 < \alpha \leq 1$ dir (Atangana ve İğret Araz, 2021a).

Tanım 2.7. $y(t)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olsun. Bu fonksiyon için Caputo-Fabrizio kesirli türevi

$${}_0^{CF}D_t^\alpha y(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t y'(\tau) \exp \left[-\alpha \frac{(t-\tau)}{1-\alpha} \right] d\tau \quad (2.31)$$

şeklinde olup, buradaki $M(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur. Bu normalizasyon fonksiyonu için $M(0) = M(1) = 1$ dir (Caputo ve Fabrizio, 2015).

Tanım 2.8. $y(t)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olsun. Bu fonksiyonun Atangana-Baleanu kesirli türevi

$${}^{ABC}_0D_t^\alpha y(t) = \frac{AB(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t y'(\tau) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau \quad (2.32)$$

şeklinde olup, burada $AB(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur ve

$$AB(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \text{ ve } AB(0) = AB(1) = 1 \quad (2.33)$$

şeklinde tanımlanır (Atangana ve Baleanu, 2016).

Tanım 2.9. Kuvvet çekirdeği içeren Caputo kesirli integral tanımı,

$${}_0^CI_t^\alpha y(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t y(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.34)$$

şeklinde tanımlanır (Atangana ve İğret Araz, 2021a). $\gamma(t) = 0$ için Riemann- Liouville kesirli integral tanımı elde edilir (Atangana, 2021).

Tanım 2.10. Üstel bozunma çekirdeği içeren Caputo-Fabrizio kesirli integral tanımı,

$${}^C I_t^\alpha y(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} y(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t y(\tau) d\tau \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlanır (Caputo ve Fabrizio, 2015).

Tanım 2.11. Mittag-Leffler çekirdeği içeren Atangana-Baleanu kesirli integral tanımı,

$${}^{AB} I_t^\alpha y(t) = \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} y(t) + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t y(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.36)$$

şeklinde tanımlanır (Atangana ve Baleanu, 2016).

Şimdi Atangana ve İğret Araz (2021b) tarafından tanıtılan ve farklı aralıklarda farklı türevler kullanımını öneren bazı parçalı diferansiyel operatörlerin tanımlarını verelim. Burada, parçalı türev kavramının, Caputo kesirli türevinin farklı aralıklarda farklı türev mertebeleri için parçalı olarak sunulduğu Wu ve ark. (2019) çalışmasında sunulan kısa geçmiş (short memory) kavramından farklı olduğunu vurgulamakta fayda vardır. Yeni bir türev tanımından ziyade gerçekten kısa geçmişi anlatan bu kavram ile parçalı türev kavramı arasındaki farklar Atangana ve ark. (2022c)'nin çalışmasında detaylı olarak ele alınmıştır.

Tanım 2.12. f fonksiyonu diferansiyellenebilir olsun. Klasik ve kuvvet yasası çekirdeği içeren parçalı türev

$${}^{PC} D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} f'(t), 0 \leq t \leq t_1 \\ {}^C D_t^\alpha f(t), t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.37)$$

şeklinde gösterilir. Burada sunulan ${}^{PC} D_t^\alpha$, $0 \leq t \leq t_1$ aralığında klasik türevi ifade ederken, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında Caputo kesirli türevi içeren parçalı türevi ifade etmektedir. Ayrıca burada α değeri, $0 < \alpha \leq 1$ dir (Atangana ve İğret Araz, 2021b).

Tanım 2.13. f fonksiyonu $[0, t_1]$ aralığında diferansiyellenebilir, $[t_1, T]$ aralığında ise sürekli ama türevli olması gerekmeyen bir fonksiyon olsun. Klasik ve parçalı türevli Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}^{PRL}D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} f'(t), 0 \leq t \leq t_1 \\ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.38)$$

şeklinde gösterilir. Burada sunulan ${}^{PRL}D_t^\alpha$, $0 \leq t \leq t_1$ aralığındaki klasik türevi ifade ederken, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında ise Riemann-Liouville kesirli türev içeren parçalı türevi ifade etmektedir. Ayrıca burada α değeri, $0 < \alpha \leq 1$ dir (Atangana ve İğret Araz, 2021b).

Tanım 2.14. f fonksiyonu $[0, T]$ aralığında diferansiyellenebilir olsun. Klasik ve üstel bozunma çekirdeği içeren Caputo-Fabrizio parçalı türev

$${}^{PCF}D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} f'(t), 0 \leq t \leq t_1 \\ {}^{CF}D_t^\alpha f(t), t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.39)$$

ve

$${}^{PCF}D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} f'(t), 0 \leq t \leq t_1 \\ {}^{CFR}D_t^\alpha f(t), t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.40)$$

şeklinde gösterilir. Burada sunulan ${}^{PCF}D_t^\alpha$, $0 \leq t \leq t_1$ aralığında klasik türevi ifade ederken, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında Caputo Fabrizio kesirli türev içeren parçalı türevi ifade etmektedir. Ayrıca burada α değeri, $0 < \alpha \leq 1$ dir (Atangana ve İğret Araz, 2021b).

Tanım 2.15. Klasik ve Mittag-Leffler çekirdeği içeren parçalı türev

$${}^{PAB}D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} f'(t), 0 \leq t \leq t_1 \\ {}^{AB}D_t^\alpha f(t), t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.41)$$

şeklinde gösterilir. Burada sunulan ${}^{PAB}D_t^\alpha$, $0 \leq t \leq t_1$ aralığında klasik türevi ifade ederken, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında Atangana-Baleanu kesirli türevi içeren parçalı türevi ifade etmektedir. Ayrıca burada α değeri, $0 < \alpha \leq 1$ dir (Atangana ve İğret Araz, 2021b).

Tanım 2.16. f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun klasik ve kuvvet yasası çekirdeği içeren parçalı integrali

$${}^{PRL}I_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_0^{t_1} f(s)ds, 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}ds, t_1 \leq t \leq T \end{cases}$$

(2.42)

şeklinde gösterilir. Burada ${}^{PRL}I_t^\alpha$, $0 \leq t \leq t_1$ aralığında klasik integrali ifade ederken, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında kuvvet yasası çekirdeği ile integrallenmeyi ifade eder (Atangana ve İğret Araz, 2021b).

Tanım 2.17. f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun klasik ve üstel bozunma çekirdeğine karşılık gelen parçalı integrali

$${}^{PCF}I_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_0^{t_1} f(s)ds, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_1}^t f(s)ds, & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.43)$$

şeklinde gösterilir. Burada ${}^{PCF}I_t^\alpha$, $0 \leq t \leq t_1$ aralığında klasik integrali ifade ederken, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında Caputo-Fabrizio integrali ile integrallenmeyi ifade eder (Atangana ve İğret Araz, 2021b).

Tanım 2.18. f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun klasik ve Mittag-Leffler çekirdeğe karşılık gelen parçalı integrali

$${}^{PAB}I_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_0^{t_1} f(s)ds, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}ds, & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.44)$$

şeklinde gösterilir. Burada ${}^{PAB}I_t^\alpha$, $0 \leq t \leq t_1$ aralığında klasik integrali ifade ederken, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında Atangana-Baleanu integrali ile integrallenmeyi ifade eder (Atangana ve İğret Araz, 2021b).

Teorem 2.1. Varlık-Teklilik teoremi

$F(t, Y)$, Banach uzayında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, bir stokastik diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki koşullar altında var ve tektir (Steele, 2010):

- 1) (Lipschitz koşulu) Her $Y, \tilde{Y} \in H$ ve $k_i > 0$ için;

$$|F_i(t, Y) - F_i(t, \tilde{Y})|^2, |G_i(t, Y) - G_i(t, \tilde{Y})|^2 \leq k_i |Y - \tilde{Y}|^2, t \geq 0 \quad (2.45)$$

2) (Lineer büyüme koşulu) Her $Y \in H$ ve $\bar{k}_i > 0$ için;

$$|F_i(t, Y)|^2, |G_i(t, \tilde{Y})|^2 \leq \bar{k}_i(1 + |Y|^2), t \geq 0 \quad (2.46)$$

2.2. Kesirli Türev İçeren Diferansiyel Denklemlerin Analitik Çözümleri

Bu başlık altında, kesirli türev içeren diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini göstermek için bazı örnekler sunacağız.

Örnek 2.2.1. Caputo-Fabrizio kesirli türevine sahip aşağıdaki başlangıç problemini ele alalım:

$$\begin{cases} {}^{CF}D_t^\alpha y(t) = \sin(t), \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Bu problemi çözmek için denklemin her iki yanını integralleyelim:

$$y(t) = y_0 + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \sin(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t \sin(\tau) d\tau \quad (2.48)$$

olup, bu problem için tam çözüm

$$y(t) = y_0 + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \sin(t) - \frac{\alpha}{M(\alpha)} \cos(t) + 1 \quad (2.49)$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 2.2.2. Caputo kesirli türevine sahip aşağıdaki başlangıç problemini ele alalım:

$$\begin{cases} {}^CD_t^\alpha y(t) = t \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.50)$$

(2.50) denkleminin her iki tarafının Caputo integralini alırsak denklemin tam çözümü

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.51)$$

olup, (2.51) eşitliğindeki integralinin hesaplanmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y(t) = y(0) + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

(2.52)

Örnek 2.2.3. Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi

$$\begin{cases} {}^{ABC}_0D_t^\alpha y(t) = t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(2.53)

şeklinde olup, bu problemin Atangana-Baleanu kesirli integrali alınır

$$y(t) = y(0) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)}t + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

(2.54)

olduğu görülür. Bu problemin tam çözümü

$$y(t) = y(0) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)}t + \frac{\alpha}{AB(\alpha)} \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}$$

(2.55)

şeklindedir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, tamsayı ve kesirli mertebeden deterministik ve stokastik diferansiyel denklemleri çözmek için Newton polinomuna dayalı bir nümerik metodu sunacağız.

3.1. Stokastik Bir Diferansiyel Denklemler İçin Newton Polinomlu Metot

Öncelikle, basit bir popülasyon büyüme modelini kullanarak deterministik modelde stokastik modele geçişi sunalım. Bunun için aşağıdaki popülasyon büyüme modelini sunalım:

$$\frac{dy}{dt} = c(t)y(t). \quad (3.1)$$

Burada $y(t)$ fonksiyonunu popülasyon boyutu ve $c(t)$ ise büyüme oranını temsil etmektedir. $a(t)$ fonksiyonunun rassal etkilere sahip olduğu düşünüldüğünde, bu fonksiyon

$$c(t) = a(t) + \text{"gürültü"} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. Olasılık dağılımı olarak bilinen gürültü terimi eklendiği durumda, popülasyon büyüme modeli

$$\frac{dy}{dt} = (a(t) + \sigma \text{"gürültü"})y(t) \quad (3.3)$$

formuna dönüşür. (3.3) denkleminin her iki tarafı integrallenirse

$$\begin{aligned} y(t) - y(0) &= \int_0^t (a(s) + \sigma \text{"gürültü"})y(s)ds \\ &= \int_0^t a(s)y(s)ds + \int_0^t \sigma y(s) \text{"gürültü"} ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

Gürültü teriminin matematiksel yorumu Brownian hareketinin türevi yani $\frac{dB(t)}{dt}$ olarak bilindiğinden

$$y(t) - y(0) = \int_0^t a(s)y(s)ds + \int_0^t \sigma y(s)dB(s)$$

(3.5)

eşitliği elde edilir. Burada σ stokastik sabiti ve $dB(t)$ fonksiyonu ise Brownian hareketini (Wiener sürecini) ifade eder. Eğer bir $y(t)$ fonksiyonu (3.5) eşitliğini sağlıyorsa, bu fonksiyon

$$dy(t) = a(t)y(t)dt + \sigma y(t)dB(t) \quad (3.6)$$

diferansiyel denkleminin bir çözümüdür denir. Daha genel formda bir stokastik diferansiyel denklem aşağıdaki formda yazılabilir:

$$dy(t) = f(t, y(t))dt + \sigma y(t)dB(t). \quad (3.7)$$

Böyle bir diferansiyel denklem için nümerik çözümü (Atangana ve İğret Araz, 2022c) için (3.7) denkleminin her iki yanının integralini alalım:

$$y(t) - y(0) = \int_0^t f(\mu, y(\mu))d\mu + \int_0^t \sigma y(\mu)dB(\mu) \quad (3.8)$$

Yukarıdaki denklem, verilen $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ noktalarında yazılıp, bu denklemlerin farkı alınır, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\mu, y(\mu))d\mu + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma y(\mu)dB(\mu). \quad (3.9)$$

$f(\mu, y(\mu))$ fonksiyonu, Newton interpolasyon polinomu kullanılarak aşağıdaki şekilde yaklaşık olarak yazılabilir:

$$\begin{aligned} f(y, \mu) \cong P_k(\mu) &= f(y^{k-2}, t_{k-2}) + \left[\frac{f(y^{k-1}, t_{k-1}) - f(y^{k-2}, t_{k-2})}{h} \right] (\mu - t_{k-2}) \\ &+ \left[\frac{f(y^k, t_k) - 2f(y^{k-1}, t_{k-1}) + f(y^{k-2}, t_{k-2})}{2h^2} \right] (\mu - t_{k-2})(\mu - t_{k-1}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Yukarıda verilen bu yaklaşım, (3.9) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_{k+1} = y_k &+ f(y^{k-2}, t_{k-2}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\mu + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma y(\mu)dB(\mu) \\ &+ \left[\frac{f(y^{k-1}, t_{k-1}) - f(y^{k-2}, t_{k-2})}{h} \right] \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mu - t_{k-2})d\mu \\ &+ \left[\frac{f(y^k, t_k) - 2f(y^{k-1}, t_{k-1}) + f(y^{k-2}, t_{k-2})}{2h^2} \right] \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mu - t_{k-2})(\mu - t_{k-1})d\mu \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{f(y^k, t_k)}{2h^2} - \frac{2f(y^{k-1}, t_{k-1})}{2h^2} + \frac{f(y^{k-2}, t_{k-2})}{2h^2} \right] \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mu - t_{k-2})(\mu - t_{k-1}) d\mu. \quad (3.11)$$

Yukarıda verilen integraller

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mu - t_{k-2}) d\mu &= \frac{5}{2} h^2 \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mu - t_{k-2})(\mu - t_{k-1}) d\mu &= \frac{23}{6} h^3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde hesaplanır. Bu hesaplamalar (3.11) denkleminde yazılırsa, nümerik algoritma

$$\begin{aligned} y^{k+1} = y^k + h \left(\frac{5}{12} f(t_{k-2}, y^{k-2}) - \frac{4}{3} f(t_{k-1}, y^{k-1}) + \frac{23}{12} f(t_k, y^k) \right) \\ + \left(\sigma y(c_k) (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \right), k \geq 2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklinde olup, burada $c_k \in [t_k, t_{k+1}]$ dir. Ayrıca $\sigma = 0$ iken, bu denklemin çözümü klasik türevli nümerik çözümü gösterecektir. (3.13) algoritmasında $k = 2$ alındığında, y^0, y^1 ve y^2 değerlerinin hesaplanmasına ihtiyaç duyulduğu görülecektir. y^0 değerinin başlangıç koşulu olduğu aşikardır. Bununla birlikte, y^1 ve y^2 değerleri sırasıyla Euler ve Adams-Bashforth yöntemi ile aşağıdaki şekilde formüle edilir:

$$y^1 = y^0 + hf(t_0, y^0) + \sigma y(c_0) (B(t_1) - B(t_0)) \quad (3.14)$$

ve

$$y^2 = y^1 + \frac{h}{2} [3f(t_1, y^1) - f(t_0, y^0)] + \sigma y(c_1) (B(t_2) - B(t_1)). \quad (3.15)$$

3.2. Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Newton Polinomuna Dayalı Nümerik Metot

Bu alt bölümde, Newton polinomuyla inşa edilen bir metodu kesirli diferansiyel denklemlere uygulayarak elde edilen bu denklemler için nümerik yaklaşımlar sunacağız.

3.2.1. Caputo türevli kesirli diferansiyel denklemin nümerik çözümü

Bu alt başlık altında Newton polinomuna dayalı nümerik metot kullanacağız.

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha y(t) = f(y, t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}. \quad (3.16)$$

Yukarıda verilen denkleme Caputo integrali uygulandığında, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t f(y, \mu)(t - \mu)^{a-1} d\mu. \quad (3.17)$$

$t = t_{k+1}$ noktasında (3.17) eşitliğini yeniden yazalım:

$$y(t_{k+1}) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, \mu)(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu \quad (3.18)$$

elde edilir. Burada $f(y, \mu)$ fonksiyonu Newton polinomundan faydalanılarak aşağıdaki gibi yaklaşılabılır:

$$\begin{aligned} f(y, \mu) &\cong P_n(\mu) = f(y^{n-2}, t_{n-2}) + \left[\frac{f(y^{n-1}, t_{n-1})}{h} - \frac{f(y^{n-2}, t_{n-2})}{h} \right] (\mu - t_{n-2}) \\ &+ \left[\frac{f(y^n, t_n)}{2h^2} - \frac{2f(y^{n-1}, t_{n-1})}{2h^2} + \frac{f(y^{n-2}, t_{n-2})}{2h^2} \right] (\mu - t_{n-2})(\mu - t_{n-1}), n \geq 2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Bu polinom (3.18) denklemindeki integralde yerine konulduğunda, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} y^{k+1} &= y(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y^{n-2}, t_{n-2})(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu \\ &+ \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{f(y^{n-1}, t_{n-1})}{h} - \frac{f(y^{n-2}, t_{n-2})}{h} \right] (\mu - t_{n-2})(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu \\ &+ \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{f(y^n, t_n)}{2h^2} - \frac{2f(y^{n-1}, t_{n-1})}{2h^2} + \frac{f(y^{n-2}, t_{n-2})}{2h^2} \right] \\ &\quad \times (\mu - t_{n-2})(\mu - t_{n-1})(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu. \end{aligned} \quad (3.20)$$

(3.20)'de verilen integraller için aşağıdaki hesaplamalar yapılır:

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu &= \frac{h^\alpha}{\alpha} \left[\frac{(k-n+1)^\alpha}{-(k-n)^\alpha} \right] \\
\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\mu - t_{n-2})(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu &= \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \left[\frac{(k-n+1)^\alpha(k-n+3+2\alpha)}{-(k-n)^\alpha(k-n+3+3\alpha)} \right] \\
\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\mu - t_{n-2})(\mu - t_{n-1})(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu &= \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} \\
&\times \left[\frac{(k-n+1)^\alpha \left(2(k-n)^2 + (3\alpha+10)(k-n) \right)}{+2\alpha^2 + 9\alpha + 12} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(k-n)^\alpha \left(2(k-n)^2 + (5\alpha+10)(k-n) \right)}{+6\alpha^2 + 18\alpha + 12} \right].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Bu hesaplamalar, (3.20) denkleminde yerine yazıldığında aşağıda verilen nümerik algoritma elde edilir (Atangana ve İğret Araz, 2021a):

$$\begin{aligned}
y^{k+1} &= y(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+1)} \sum_{n=2}^k f(y^{n-2}, t_{n-2}) [(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha] \\
&+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+2)} \sum_{n=2}^k [f(y^{n-1}, t_{n-1}) - f(y^{n-2}, t_{n-2})] \\
&\quad \times \left[\frac{(k-n+1)^\alpha(k-n+3+2\alpha)}{-(k-n)^\alpha(k-n+3+3\alpha)} \right] \\
&+ \frac{h^\alpha}{2\Gamma(a+3)} \sum_{n=2}^k [f(y^n, t_n) - 2f(y^{n-1}, t_{n-1}) + f(y^{n-2}, t_{n-2})] \\
&\quad \times \left[\frac{(k-n+1)^\alpha \left(2(k-n)^2 + (3\alpha+10)(k-n) \right)}{+2\alpha^2 + 9\alpha + 12} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(k-n)^\alpha \left(2(k-n)^2 + (5\alpha+10)(k-n) \right)}{+6\alpha^2 + 18\alpha + 12} \right].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.2.1. Örnek:

Bu örnekte aşağıdaki Caputo kesirli türeve sahip diferansiyel denklemi ele alalım:

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha y(t) = y \sin(0.5t) \\ y(0) = 1 \end{cases}. \tag{3.23}$$

Yukarıdaki denkleme Caputo integrali uygulandığında, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t f(y, \mu)(t - \mu)^{a-1} d\mu. \quad (3.24)$$

$t = t_{k+1}$ noktasında, (3.24) denklemi

$$y(t_{k+1}) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} y \sin(0.5\mu)(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu \quad (3.25)$$

şeklinde yazılır. Burada $f(y, \mu)$ fonksiyonu iki adım Newton polinomu kullanılarak aşağıdaki şekilde yaklaşılabılır:

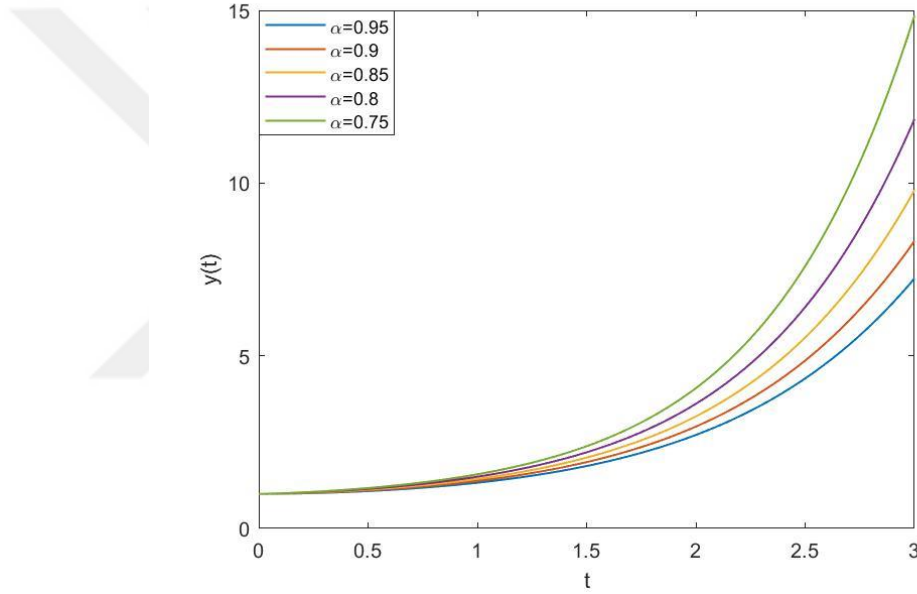
$$\begin{aligned} y^{k+1} = y(0) &+ \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} y^{n-2} \sin(0.5t_{n-2})(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu \\ &+ \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{y^{n-1} \sin(0.5t_{n-1})}{h} - \frac{y^{n-2} \sin(0.5t_{n-2})}{h} \right] \\ &\quad \times (\mu - t_{n-2})(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu \\ &+ \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{y^n \sin(0.5t_n)}{2h^2} - \frac{2y^{n-1} \sin(0.5t_{n-1})}{2h^2} + \frac{y^{n-2} \sin(0.5t_{n-2})}{2h^2} \right] \\ &\quad \times (\mu - t_{n-2})(\mu - t_{n-1})(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra, aşağıda verilen nümerik algoritma elde edilir:

$$\begin{aligned} y^{k+1} = 1 &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+1)} \sum_{n=2}^k y^{n-2} \sin(0.5t_{n-2}) [(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha] \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+2)} \sum_{n=2}^k [y^{n-1} \sin(0.5t_{n-1}) - y^{n-2} \sin(0.5t_{n-2})] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^\alpha}{2\Gamma(\alpha + 3)} \sum_{n=2}^k [y^n \sin(0.5t_n) - 2y^{n-1} \sin(0.5t_{n-1}) + y^{n-2} \sin(0.5t_{n-2})] \\
& \times \left[\begin{aligned} & (k-n+1)^\alpha \left(2(k-n)^2 + (3\alpha+10)(k-n) \right. \\ & \quad \left. + 2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \right) \\ & - (k-n)^\alpha \left(2(k-n)^2 + (5\alpha+10)(k-n) \right. \\ & \quad \left. + 6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \right) \end{aligned} \right].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Caputo türevine sahip başlangıç değer probleminin çözümü için nümerik simülasyon Şekil 3.1’de verilmiştir.



Şekil 3.1. Caputo türevli kesirli diferansiyel denkleminin nümerik simülasyonu

3.2.2. Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi için bir nümerik algoritma

Bu alt bölümde, Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemini çözmek için Newton polinomuna dayalı bir nümerik metodu kullanacağız.

$$\begin{cases} {}^{ABC}_0 D_t^\alpha y(t) = f(y, t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}. \tag{3.28}$$

Yukarıda verilen kesirli türev denklemine Atangana-Baleanu kesirli integrali uyguladığında, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$y(t) = y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} f(t, y) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)AB(\alpha)} \int_0^t f(y, \mu) (t-\mu)^{\alpha-1} d\mu.$$

(3.29)

$t = t_{k+1}$ noktasında yazıldığında, (3.29) denklemi

$$y(t_{k+1}) = y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} f(t_k, y_k) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)AB(\alpha)} \sum_{n=0}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, \mu) (t_{k+1} - \mu)^{\alpha-1} d\mu \quad (3.30)$$

şeklinde yeniden düzenlenir. Burada verilen $f(y, \mu)$ fonksiyonu iki adım Newton polinomu ile yaklaşık olarak çözülüp yukarıdaki integralde yerine konulduğunda denklem, aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} y^{k+1} = & y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} f(t_k, y_k) \\ & + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y^{n-2}, t_{n-2}) (t_{k+1} - \mu)^{\alpha-1} d\mu \\ & + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{f(y^{n-1}, t_{n-1})}{\Delta t} - \frac{f(y^{n-2}, t_{n-2})}{\Delta t} \right] \\ & \quad \times (\mu - t_{n-2}) (t_{k+1} - \mu)^{\alpha-1} d\mu \\ & + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{f(y^n, t_n)}{2(\Delta t)^2} - \frac{2f(y^{n-1}, t_{n-1})}{2(\Delta t)^2} + \frac{f(y^{n-2}, t_{n-2})}{2(\Delta t)^2} \right] \\ & \quad \times (\mu - t_{n-2})(\mu - t_{n-1}) (t_{k+1} - \mu)^{\alpha-1} d\mu. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Yukarıda verilen integraller için (3.21) de yapılan hesaplamalar (3.31) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki nümerik algoritma elde edilir (Atangana ve İğret Araz, 2021a):

$$\begin{aligned} y^{k+1} = & y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} f(t_k, y^k) \\ & + \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k f(y^{n-2}, t_{n-2}) [(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha] \\ & + \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k [f(y^{n-1}, t_{n-1}) - f(y^{n-2}, t_{n-2})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha h^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k [f(y^n, t_n) - 2f(y^{n-1}, t_{n-1}) + f(y^{n-2}, t_{n-2})] \\
& \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \left(\begin{matrix} 2(k-n)^2 + (3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \end{matrix} \right) \\ -(k-n)^\alpha \left(\begin{matrix} 2(k-n)^2 + (5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \end{matrix} \right) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

3.2.2. Örnek:

Aşağıdaki Atangana-Baleanu kesirli türeve sahip diferansiyel denklemi ele alalım:

$$\begin{cases} {}^{AB}_0 D_t^\alpha y(t) = 0.5ye^{-t} \\ y(0) = 0.1 \end{cases}. \tag{3.33}$$

Yukarıda verilen denkleme Atangana-Baleanu integrali uygulandığında, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$y(t) = y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} f(y, t) + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(y, \mu) (t-\mu)^{\alpha-1} d\mu. \tag{3.34}$$

$t = t_{k+1}$ noktasında, (3.27) denklemi

$$\begin{aligned}
y(t_{k+1}) &= y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} 0.5y(t_k)e^{-t_k} \\
&+ \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} 0.5y(\mu)e^{-\mu} (t_{k+1}-\mu)^{\alpha-1} d\mu
\end{aligned} \tag{3.35}$$

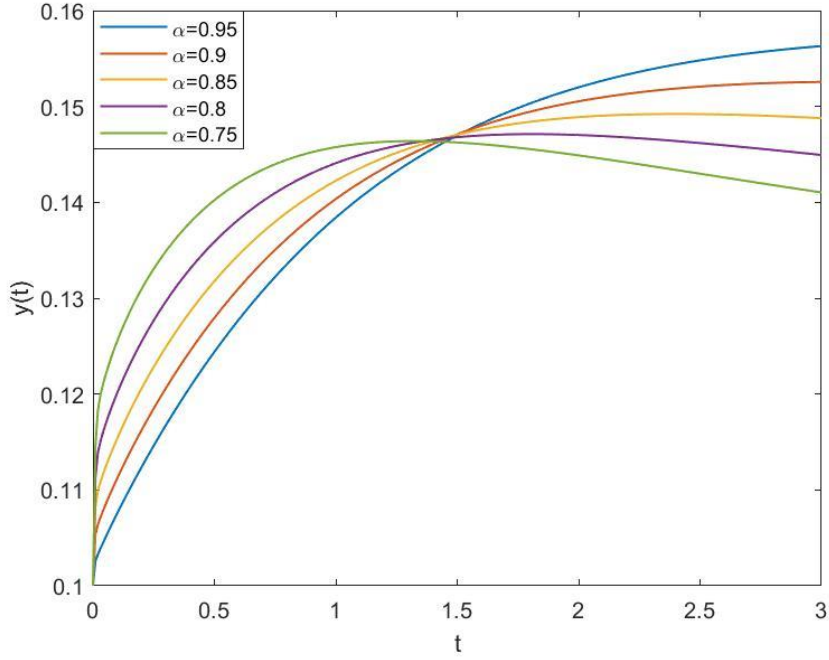
şeklinde yeniden yazılır. Burada $f(y, \mu)$ fonksiyonuna iki adım Newton polinomu uygulandığında aşağıdaki şekilde yaklaştırılabilir:

$$\begin{aligned}
y^{k+1} = & y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} 0.5y^k e^{-t_k} \\
& + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(a)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} 0.5y^{n-2}(t_{n-2})e^{-t_{n-2}}(t_{k+1}-\mu)^{a-1}d\mu \\
& + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(a)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{0.5y^{n-1}e^{-t_{n-1}}}{h} - \frac{0.5y^{n-2}e^{-t_{n-2}}}{h} \right] \\
& \quad \times (\mu - t_{n-2})(t_{k+1} - \mu)^{a-1}d\mu \\
& + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(a)} \sum_{n=2}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{0.5y^ne^{-t_n}}{2h^2} - \frac{0.5y^{n-1}e^{-t_{n-1}}}{2h^2} + \frac{0.5y^{n-2}e^{-t_{n-2}}}{2h^2} \right] \\
& \quad \times (\mu - t_{n-2})(\mu - t_{n-1})(t_{k+1} - \mu)^{a-1}d\mu.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Gerekli düzenlemeler yapıldığında aşağıda verilen nümerik algoritma elde edilir:

$$\begin{aligned}
y^{k+1} = & 0.1 + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} 0.5y^k e^{-t_k} \\
& + \frac{\alpha h^\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(a+1)} \sum_{n=2}^k 0.5y^{n-2}e^{-t_{n-2}}[(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha] \\
& + \frac{\alpha h^\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(a+2)} \sum_{n=2}^k [0.5y^{n-1}e^{-t_{n-1}} - 0.5y^{n-2}e^{-t_{n-2}}] \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha(k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha(k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha h^\alpha}{2AB(\alpha)\Gamma(a+3)} \sum_{n=2}^k [0.5y^ne^{-t_n} - 2 \times 0.5y^{n-1}e^{-t_{n-1}} + 0.5y^{n-2}e^{-t_{n-2}}] \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \left(\begin{matrix} 2(k-n)^2 + (3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \end{matrix} \right) \\ -(k-n)^\alpha \left(\begin{matrix} 2(k-n)^2 + (5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \end{matrix} \right) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Atangana-Baleanu türevine sahip başlangıç değer probleminin çözümü için nümerik simülasyon Şekil 3.2’de verilmiştir.



Şekil 3.2. Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi için bir nümerik simülasyon

3.2.3. Caputo-Fabrizio kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik algoritma

Bu alt başlıkta, aşağıda verilen Caputo-Fabrizio kesirli türevli genel bir adi diferansiyel denklemi çözecek bir nümerik algoritma sunalım. Bu problem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} {}^{CF}_0D_t^\alpha(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Bu denklemin her iki tarafına Caputo-Fabrizio kesirli integrali uygulayalım:

$$y(t) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t, y(t)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t f(\mu, y(\mu)) d\mu. \quad (3.39)$$

Yukarıda verilen denklemde, $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}$ noktalarını yazıldıktan sonra bu iki denklemin farkı alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) - y(t_k) &= \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))] \\ &\quad + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\mu, y(\mu)) d\mu. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Newton interpolasyon polinomu yöntemi kullanılarak $[t_k, t_{k+1}]$ aralığında (3.40) ifadesi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} y^{k+1} = & y^k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_k, y^k) - f(t_{k-1}, y^{k-1})] + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \frac{f(y^{k-2}, t_{k-2})}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\mu \\ & + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \left[\frac{f(y^{k-1}, t_{k-1})}{h} - \frac{f(y^{k-2}, t_{k-2})}{h} \right] \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mu - t_{k-1}) d\mu \\ & + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \left[\frac{f(y^k, t_k)}{2h^2} - \frac{2f(y^{k-1}, t_{k-1})}{2h^2} + \frac{f(y^{k-2}, t_{k-2})}{2h^2} \right] \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mu - t_{k-2})(\mu - t_{k-1}) d\mu. \end{aligned} \quad (3.41)$$

(3.12) denklemindeki hesaplamalar (3.41) eşitliğinde yazıldıktan sonra düzenlenirse, ilgili nümerik algoritma

$$\begin{aligned} y_{k+1} = & y_k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))] \\ & + \frac{\alpha h}{12M(\alpha)} \left[\begin{array}{l} 23f(t_k, y_k) - 16f(t_{k-1}, y_{k-1}) \\ + 5f(t_{k-2}, y_{k-2}) \end{array} \right], k \geq 2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

şeklinde yazılır (Atangana ve İğret Araz, 2021a).

3.2.3. Örnek:

Bu örnekte Caputo-Fabrizio kesirli türevli bir problemi ele alalım:

$$\begin{cases} {}^{CF}D_t^\alpha(t) = y + t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}. \quad (3.43)$$

Bu denklemin her iki tarafına Caputo-Fabrizio kesirli integrali uygulandığında aşağıdaki şekilde olur:

$$y(t) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} (y + t^2) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t (y + \mu^2) d\mu. \quad (3.44)$$

Yukarıda verilen denklemde $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}$ noktalarında yazıldıktan sonra bu iki denklemin farkı alındığında aşağıda verilen eşitlik elde edilir:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} ((y^k + t_k^2) - (y^{k-1} + t_{k-1}^2)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (y + \mu^2) d\mu. \quad (3.45)$$

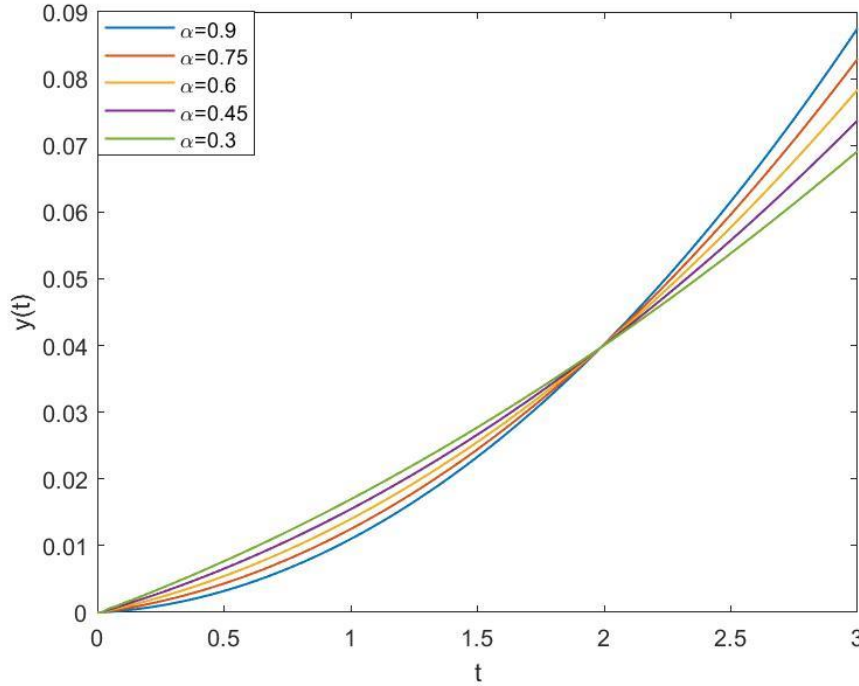
Newton interpolasyon polinomu yöntemi kullanılarak $[t_k, t_{k+1}]$ aralığında, (3.45) ifadesi

$$\begin{aligned}
 y^{k+1} = & y^k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left((y^k + t_k^2) - (y^{k-1} + t_{k-1}^2) \right) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \frac{(y^k + t_k^2)}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\mu \\
 & + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \left[\frac{(y^{k-1} + t_{k-1}^2)}{h} - \frac{(y^{k-2} + t_{k-2}^2)}{h} \right] \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mu - t_{k-1}) d\mu \\
 & - \frac{\alpha}{M(\alpha)} \left[\frac{(y^k + t_k^2)}{2h^2} - \frac{2(y^{k-1} + t_{k-1}^2)}{2h^2} + \frac{(y^{k-2} + t_{k-2}^2)}{2h^2} \right] \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mu - t_{k-2})(\mu - t_{k-1}) d\mu
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

şeklinde düzenlenir. Yukarıda verilen integraller hesaplandığında, ele aldığımız örnek için aşağıdaki nümerik algoritma elde edilir:

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} = & y_k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [(y^k + t_k^2) - (y^{k-1} + t_{k-1}^2)] \\
 & + \frac{\alpha h}{12M(\alpha)} \left[\begin{aligned} & 23(y^k + t_k^2) - 16(y^{k-1} + t_{k-1}^2) \\ & + 5(y^{k-2} + t_{k-2}^2) \end{aligned} \right].
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Caputo-Fabrizio türevine sahip başlangıç değer probleminin çözümü için nümerik simülasyon Şekil 3.3'te verilmiştir.



Şekil 3.3. Caputo-Fabrizio kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik simülasyonu

3.3. Stokastik Kesirli Diferansiyel Denklemler için Newton Polinomuna Dayalı Nümerik Metot

Bu alt başlık altında, Newton polinomuyla inşa edilen bir metodu stokastik kesirli diferansiyel denklemlere uygulayarak bu denklemlerin nümerik yaklaşımlarını sunacağız.

3.3.1. Stokastik Caputo türevli kesirli diferansiyel denkleminin nümerik çözümü

Metodu türetmek için, öncelikle Caputo türevine sahip bir stokastik diferansiyel denklemi ele alalım. Söz konusu model aşağıdaki problem ile ifade edilir:

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha y(t) = f(y, t) + \sigma y dB(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}. \quad (3.48)$$

Yukarıda verilen denkleme Caputo integrali uygulandığında, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t f(y, \mu)(t - \mu)^{a-1} d\mu + \frac{\sigma}{\Gamma(a)} \int_0^t y(\mu)(t - \mu)^{a-1} dB(\mu). \quad (3.49)$$

$t = t_{k+1}$ noktasında, yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) = y(0) &+ \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, \mu)(t_{k+1} - \mu)^{a-1} d\mu \\ &+ \frac{\sigma}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(\mu)(t_{k+1} - \mu)^{a-1} dB(\mu) \end{aligned} \quad (3.50)$$

şeklinde elde edilir.

f fonksiyonu Newton polinomuyla yaklaşıtırdıktan sonra bu hesaplamalar (3.50) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki nümerik algoritma elde edilir (Atangana ve İğret Araz, 2021a):

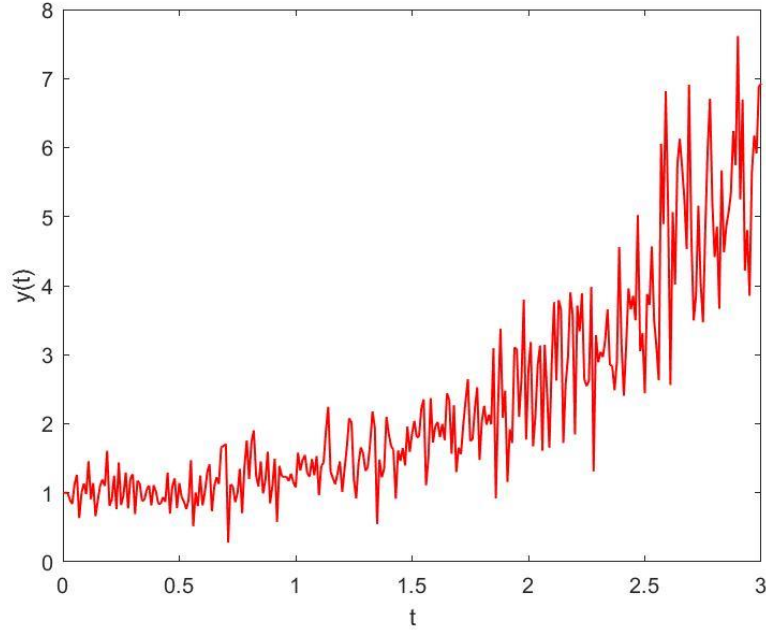
$$y^{k+1} = y(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+1)} \sum_{n=2}^k f(y^{n-2}, t_{n-2})[(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+2)} \sum_{n=2}^k [f(y^{n-1}, t_{n-1}) - f(y^{n-2}, t_{n-2})] \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{h^\alpha}{2\Gamma(a+3)} \sum_{n=2}^k [f(y^n, t_n) - 2f(y^{n-1}, t_{n-1}) + f(y^{n-2}, t_{n-2})] \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \left(2(k-n)^2 + (3\alpha+10)(k-n) \right. \\ \quad \left. + 2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \right) \\ -(k-n)^\alpha \left(2(k-n)^2 + (5\alpha+10)(k-n) \right. \\ \quad \left. + 6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \right) \end{bmatrix} \\
& + \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(a+1)} \sum_{n=0}^k \sigma y(c_n) (B(t_{n+1}) - B(t_n)) [(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha].
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Örnek 3.2.1'deki problem stokastik eklenerek yeniden çözümlerse aşağıdaki nümerik algoritma elde edilir:

$$\begin{aligned}
y^{k+1} &= 1 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+1)} \sum_{n=2}^k y^{n-2} \sin(0.5t_{n-2}) [(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha] \\
& + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+2)} \sum_{n=2}^k [y^{n-1} \sin(0.5t_{n-1}) - y^{n-2} \sin(0.5t_{n-2})] \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{h^\alpha}{2\Gamma(a+3)} \sum_{n=2}^k [y^n \sin(0.5t_n) - 2y^{n-1} \sin(0.5t_{n-1}) + y^{n-2} \sin(0.5t_{n-2})] \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \left(2(k-n)^2 + (3\alpha+10)(k-n) \right. \\ \quad \left. + 2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \right) \\ -(k-n)^\alpha \left(2(k-n)^2 + (5\alpha+10)(k-n) \right. \\ \quad \left. + 6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \right) \end{bmatrix} \\
& + \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(a+1)} \sum_{n=0}^k \sigma y(c_n) (B(t_{n+1}) - B(t_n)).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Stokastik Caputo türevine sahip başlangıç değer probleminin çözümü için nümerik simülasyon Şekil 3.4'te verilmiştir.



Şekil 3.4. $\alpha = 0,9$ ve $\sigma = 0,25$ için stokastik Caputo kesirli türevli Cauchy problemi için bir nümerik simülasyon

3.3.2. Stokastik Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi için bir nümerik algoritma

Bu alt bölümde, Atangana-Baleanu kesirli türevine sahip bir stokastik diferansiyel denklemini çözmek için Newton polinomuna dayalı bir nümerik metodu sunacağız. Söz konusu model aşağıdaki problem ile ifade edilir:

$$\begin{cases} {}^{ABC}_0D_t^\alpha y(t) = f(y, t) + \sigma y dB(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}. \quad (3.53)$$

Yukarıda verilen denkleme Atangana-Baleanu kesirli integrali uyguladığında, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
y(t) &= y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} f(t, y) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} \sigma y dB(t) \\
&+ \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)AB(\alpha)} \int_0^t f(y, \mu)(t-\mu)^{\alpha-1} d\mu \\
&+ \frac{\alpha\sigma}{\Gamma(\alpha)AB(\alpha)} \int_0^t y(\mu)(t-\mu)^{\alpha-1} dB(\mu).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

(3.54) denklemini $t = t_{k+1}$ noktasında,

$$\begin{aligned}
y(t_{k+1}) &= y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} f(t_k, y_k) + \frac{(1-\alpha)}{hAB(\alpha)} \sigma y^k (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \\
&+ \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)AB(\alpha)} \sum_{n=0}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, \mu)(t_{k+1} - \mu)^{\alpha-1} d\mu \\
&+ \frac{\alpha\sigma}{\Gamma(\alpha)AB(\alpha)} \sum_{n=0}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(\mu)(t_{k+1} - \mu)^{\alpha-1} dB(\mu)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

şeklinde yazılır.

f fonksiyonu Newton polinomuyla yaklaşıtırdıktan sonra bu hesaplamalar (3.55) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki nümerik algoritma elde edilir (Atangana ve İğret Araz, 2021a):

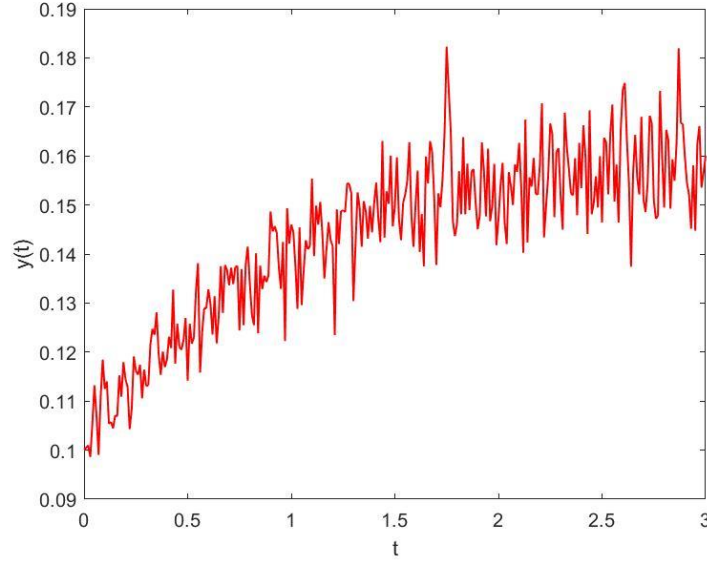
$$\begin{aligned}
y^{k+1} &= y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} f(t_k, y_k) \\
&+ \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k f(y^{n-2}, t_{n-2}) [(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha] \\
&+ \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k [f(y^{n-1}, t_{n-1}) - f(y^{n-2}, t_{n-2})] \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
&+ \frac{\alpha h^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k [f(y^n, t_n) - 2f(y^{n-1}, t_{n-1}) + f(y^{n-2}, t_{n-2})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\begin{array}{c} (k-n+1)^\alpha \left(\begin{array}{c} 2(k-n)^2 + (3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \end{array} \right) \\ -(k-n)^\alpha \left(\begin{array}{c} 2(k-n)^2 + (5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \end{array} \right) \end{array} \right] \\
& + \frac{\alpha h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=0}^k \sigma y(c_n) (B(t_{n+1}) - B(t_n)) [(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha].
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Örnek 3.2.2’de ele alınan diferansiyel denkleme stokastik eklenirse, bu denklemin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
y^{k+1} &= 0.1 + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} 0.5y^k e^{-t_k} + \frac{(1-\alpha)}{hAB(\alpha)} \sigma y^k (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \\
& + \frac{\alpha h^\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(a+1)} \sum_{n=2}^k 0.5y^{n-2} e^{-t_{n-2}} [(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha] \\
& + \frac{\alpha h^\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(a+2)} \sum_{n=2}^k [0.5y^{n-1} e^{-t_{n-1}} - 0.5y^{n-2} e^{-t_{n-2}}] \\
& \quad \times \left[\begin{array}{c} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{array} \right] \\
& + \frac{\alpha h^\alpha}{2AB(\alpha)\Gamma(a+3)} \sum_{n=2}^k [0.5y^n e^{-t_n} - y^{n-1} e^{-t_{n-1}} + 0.5y^{n-2} e^{-t_{n-2}}] \\
& \quad \times \left[\begin{array}{c} (k-n+1)^\alpha \left(\begin{array}{c} 2(k-n)^2 + (3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \end{array} \right) \\ -(k-n)^\alpha \left(\begin{array}{c} 2(k-n)^2 + (5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \end{array} \right) \end{array} \right] \\
& + \frac{\alpha h^{\alpha-1}}{AB(\alpha)\Gamma(a+1)} \sum_{n=2}^k \sigma y^{n-2} (B(t_{n-1}) - B(t_{n-2})) [(k-n+1)^\alpha - (k-n)^\alpha].
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Stokastik Atangana-Baleanu türevine sahip başlangıç değer probleminin çözümü için nümerik simülasyon Şekil 3.5’te verilmiştir.



Şekil 3.5. $\alpha = 0,95$ ve $\sigma = 0,05$ için stokastik Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi için bir nümerik simülasyon

3.3.3. Stokastik Caputo-Fabrizio kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik algoritma

Bu alt başlıkta, aşağıdaki Caputo-Fabrizio kesirli türevli genel bir adi diferansiyel denklemini çözecek bir nümerik algoritma sunalım. Bu problem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} {}^{CF}_0 D_t^\alpha(t) = f(t, y(t)) + \sigma y dB(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.58)$$

Bu denklemin her iki tarafına Caputo-Fabrizio kesirli integrali uygulayalım:

$$y(t) - y(0) = \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} f(t, y(t)) + \frac{\alpha \sigma}{M(\alpha)} \int_0^t y(\mu) dB(\mu). \quad (3.59)$$

Yukarıda verilen denklemden $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}$ noktaları yazıldıktan sonra elde edilen iki denklemin farkı alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) - y(t_k) &= \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))] \\ &+ \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\mu, y(\mu)) d\mu + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma y(\mu) dB(\mu). \end{aligned} \quad (3.60)$$

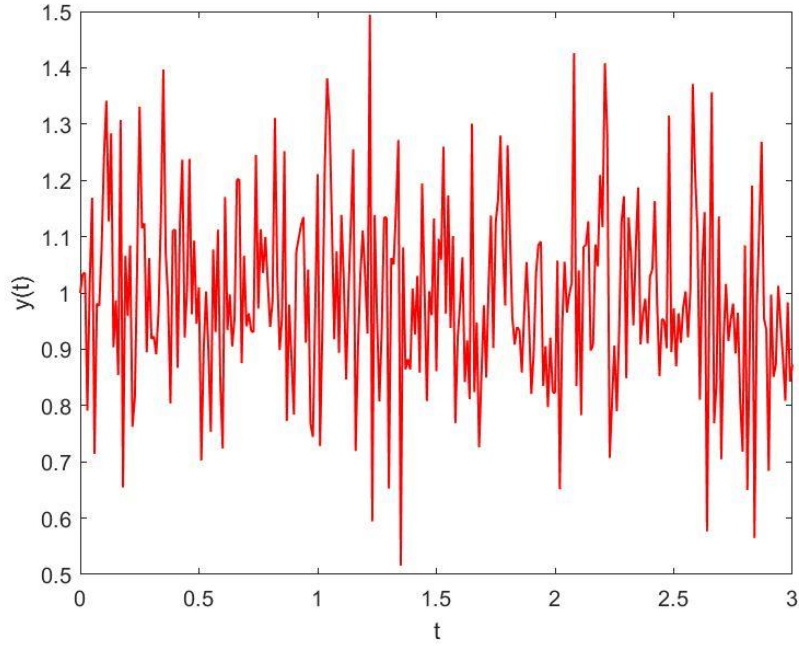
Yukarıda verilen integraller hesaplandığı zaman aşağıdaki algoritma elde edilir (Atangana ve İğret Araz, 2021a):

$$\begin{aligned}
y^{k+1} = & y^k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))] \\
& + \frac{1-\alpha}{hM(\alpha)} \left[\begin{aligned} & \sigma y^k (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \\ & - \sigma y^{k-1} (B(t_k) - B(t_{k-1})) \end{aligned} \right] \\
& + \frac{\alpha h}{12M(\alpha)} \left[\begin{aligned} & 23f(t_k, y_k) - 16f(t_{k-1}, y_{k-1}) \\ & + 5f(t_{k-2}, y_{k-2}) \end{aligned} \right] \\
& + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \sigma y(c_k) (B(t_{k+1}) - B(t_k)).
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Örnek 3.2.3’de Caputo-Fabrizio kesirli türevli problemine stokastik terim eklendiği durumda oluşan diferansiyel denklemin nümerik çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
y^{k+1} = & y^k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [(y^k + t_k^2) - (y^{k-1} + t_{k-1}^2)] \\
& + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left[\begin{aligned} & \sigma y^k (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \\ & - \sigma y^{k-1} (B(t_k) - B(t_{k-1})) \end{aligned} \right] \\
& + \frac{\alpha h}{12M(\alpha)} \left[\begin{aligned} & 23(y^k + t_k^2) - 16(y^{k-1} + t_{k-1}^2) \\ & + 5(y^{k-2} + t_{k-2}^2) \end{aligned} \right] \\
& + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \sigma y(c_k) (B(t_{k+1}) - B(t_k)).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Stokastik Caputo-Fabrizio türevine sahip başlangıç değer probleminin çözümü için nümerik simülasyon Şekil 3.6’da verilmiştir.



Şekil 3.6. $\alpha = 0,5$ ve $\sigma = 0,15$ için stokastik Caputo-Fabrizio kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik simülasyonu

3.4. Parçalı Türevli Diferansiyel Denklemler için Newton Polinomuna Dayalı Nümerik Metot

Bu başlık altında, parçalı türevli diferansiyel denklemler için Newton polinomuna dayalı bir nümerik metot sunulacaktır. Bunun için, bir insan vücudunda kandaki hormon değişimini modelleyen bir diferansiyel denklem, parçalı türev ile modifiye edilecektir (Atangana ve İğret Araz, 2021b). Birinci aralıkta stokastik Caputo kesirli türevini ve ikinci aralıkta Atangana-Baleanu kesirli türevini içeren parçalı türevli diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha x(t) = \rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx + \sigma x dB(t) & ; \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ {}^{ABC}_{t_1}D_t^\alpha x(t) = \rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx & ; \quad t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.63)$$

Yukarıda verilen parçalı türevli denklem integrallenirse,

$$x(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} x(0) + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t y(\mu) dB(\mu) (t - \mu)^{\alpha-1} d\mu \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx(s) \right] (t - s)^{\alpha-1} ds \end{bmatrix}; & 0 \leq t \leq t_1 \\ \begin{bmatrix} x(t_1) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} \left[\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx(t) \right] \\ + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t \left[\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx(s) \right] (t - s)^{\alpha-1} ds \end{bmatrix}; & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.64)$$

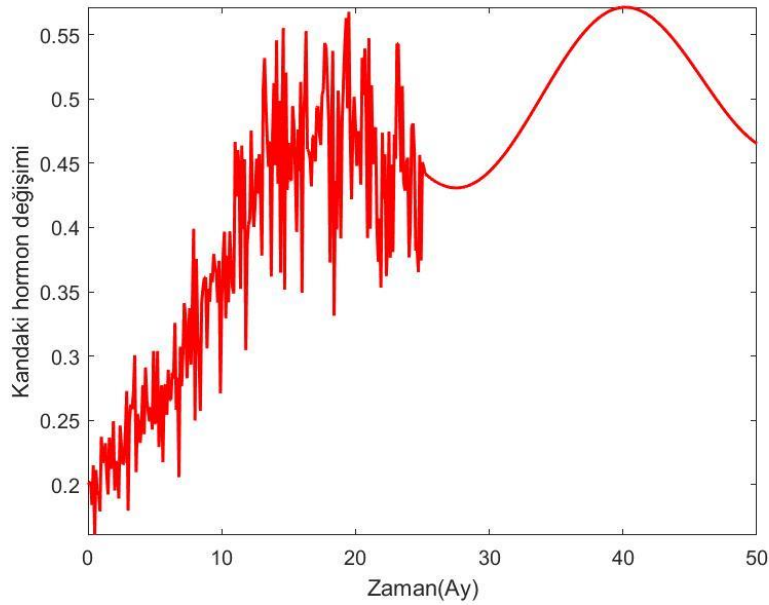
olduğu görülür. İntegralde yer alan fonksiyon Newton interpolasyon polinomu ile yaklaşırlırsa aşağıdaki nümerik algoritma elde edilir (Atangana ve İğret Araz, 2022a, 2022b):

$$\begin{aligned} x^{n_1} = & x(0) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j_1=2}^{n_1} \left[\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_1-2}}{12}\right) - kx^{j_1-2} \right] \left\{ \begin{matrix} (n_1 - j_1 + 1)^\alpha \\ -(n_1 - j_1)^\alpha \end{matrix} \right\} \\ & + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j_1=2}^{n_1} \left[\left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_1-1}}{12}\right) - kx^{j_1-1} \right) - \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_1-2}}{12}\right) - kx^{j_1-2} \right) \right] \\ & \times \left\{ \begin{matrix} (n_1 - j_1 + 1)^\alpha (n_1 - j_1 + 3 + 2\alpha) \\ -(n_1 - j_1)^\alpha (n_1 - j_1 + 3 + 3\alpha) \end{matrix} \right\} \\ & + \frac{(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)} \sum_{j_1=2}^{n_1} \left[\left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_1}}{12}\right) - kx^{j_1} \right) - 2 \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_1-1}}{12}\right) - kx^{j_1-1} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_1-2}}{12}\right) - kx^{j_1-2} \right) \right] \\ & \times \left\{ \begin{matrix} (n_1 - j_1 + 1)^\alpha \left[\begin{matrix} 2(n_1 - j_1)^2 + (3\alpha + 10)(n_1 - j_1) \\ + 2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \end{matrix} \right] \\ -(n_1 - j_1)^\alpha \left[\begin{matrix} 2(n_1 - j_1)^2 + (5\alpha + 10)(n_1 - j_1) \\ + 6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \end{matrix} \right] \end{matrix} \right\} \\ & + \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=0}^k \sigma y(c_n) (B(t_{n+1}) - B(t_n)) [(k - n + 1)^\alpha - (k - n)^\alpha], t \in [0, t_1] \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} x^{n_2} = & x(t_1) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} \left[\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_n}{12}\right) - kx^n \right] \\ & + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j_2=n_1+3}^n \left[\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2-2}}{12}\right) - kx^{j_2-2} \right] \\ & \times \{ (n - j_2 + 1)^\alpha - (n - j_2)^\alpha \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j_2=n_1+3}^n \left[\left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2-1}}{12}\right) - kx^{j_2-1} \right) \right. \\
& \left. - \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2-2}}{12}\right) - kx^{j_2-2} \right) \right] \left\{ \begin{array}{l} (n-j_2+1)^\alpha (n-j_2+3+2\alpha) \\ -(n-j_2)^\alpha (n-j_2+3+3\alpha) \end{array} \right\} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{2AB(\alpha)\Gamma(\alpha+3)} \sum_{j_2=n_1+3}^n \left[\left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2}}{12}\right) - kx^{j_2} \right) \right. \\
& \left. - 2 \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2-1}}{12}\right) - kx^{j_2-1} \right) + \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2-2}}{12}\right) - kx^{j_2-2} \right) \right] \\
& \times \left\{ \begin{array}{l} (n-j_2+1)^\alpha \left[\begin{array}{l} 2(n-j_2)^2 + (3\alpha+10)(n-j_2) \\ +2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \end{array} \right] \\ -(n-j_2)^\alpha \left[\begin{array}{l} 2(n-j_2)^2 + (5\alpha+10)(n-j_2) \\ +6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \end{array} \right] \end{array} \right\}, t \in [t_1, T].
\end{aligned} \tag{3.66}$$

(3.63) probleminde $\rho = 0,05$; $\beta = 0,02$; $k = 0,09$ parametreleri kullanılarak elde edilen nümerik simülasyon Şekil 3.7’de verilmiştir.



Şekil 3.7. $\alpha = 0,85$ ve $\sigma = 0,1$ için kandaki hormonun zamana bağlı değişimini gösteren nümerik simülasyon

Parçalı türev tanımından yola çıkarak, modelin farklı aralıklarda farklı türev kullanılabilecek şekilde inşa edilebileceğini biliyoruz. Bu yüzden burada, birinci aralıkta stokastik Caputo-Fabrizio kesirli türev, ikinci aralıkta Caputo kesirli türev ve üçüncü

aralıkta Atangana-Baleanu kesirli türevin yer aldığı model aşağıdaki şekilde modifiye edilebilecektir:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{CF}D_{t_1}^\alpha x(t) = \rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx + \sigma x dB(t) ; \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ {}^C D_t^\alpha x(t) = \rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx ; \quad t_1 \leq t \leq t_2 \\ {}^{ABC}D_{t_2}^\alpha x(t) = \rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx ; \quad t_2 \leq t \leq T \end{array} \right\}. \quad (3.67)$$

Yukarıda verilen parçalı türevli denklemi integrallersek,

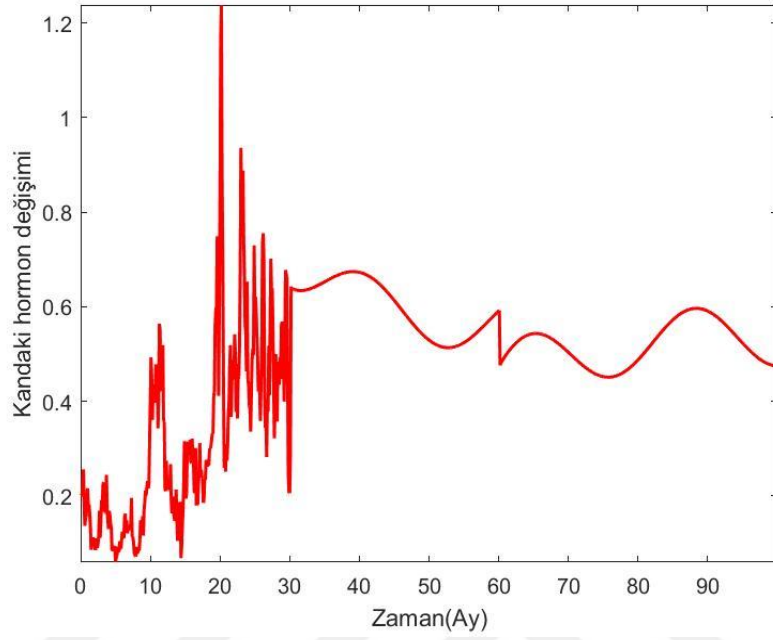
$$x(t) = \left\{ \begin{array}{l} \left[x(0) + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx(t) \right) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi s}{12}\right) - kx(s) \right) ds + \frac{\alpha \sigma}{M(\alpha)} \int_0^t x(\mu) dB(\mu) d\mu \right] ; \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ x(t_1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi s}{12}\right) - kx(s) \right) (t-s)^{\alpha-1} ds ; \quad t_1 \leq t \leq t_2 \\ \left[x(t_2) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kx(t) \right) + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^t \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi s}{12}\right) - kx(s) \right) (t-s)^{\alpha-1} ds \right] ; \quad t_2 \leq t \leq T \end{array} \right\} \quad (3.68)$$

olduğu görülür. İntegralde yer alan fonksiyon Newton interpolasyon polinomu ile yaklaşıtırılırsa aşağıdaki nümerik algoritma elde edilir (Atangana ve İğret Araz, 2022a, 2022b):

$$\begin{aligned} x^{n_1} &= x(0) + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} x(t_{n_1-1}) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \sum_{j_1=2}^{n_1} \left[\frac{23}{12} \left[\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_1}}{12}\right) - kx^{j_1} \right] \Delta t - \frac{4}{3} \left[\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_1-1}}{12}\right) - kx^{j_1-1} \right] \Delta t + \frac{5}{12} \left[\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_1-2}}{12}\right) - kx^{j_1-2} \right] \Delta t \right] \\ &\quad + \frac{\alpha}{hM(\alpha)} \sigma x(c_k) (B(t_{k+1}) - B(t_k)), t \in [0, t_1] \\ x^{n_2} &= x(t_1) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j_2=n_1+3}^{n_2} \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2-2}}{12}\right) - kx(t_{j_2-2}) \right) \left\{ \begin{array}{l} (n_2 - j_2 + 1)^\alpha \\ -(n_2 - j_2)^\alpha \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{j_2=n_1+3}^{n_2} \left[\left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2-1}}{12}\right) - kx^{j_2-1} \right) - \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2-2}}{12}\right) - kx^{j_2-2} \right) \right] \\
& \quad \times \left\{ \begin{aligned} & (n_2 - j_2 + 1)^\alpha (n_2 - j_2 + 3 + 2\alpha) \\ & - (n_2 - j_2)^\alpha (n_2 - j_2 + 3 + 3\alpha) \end{aligned} \right\} \\
& + \frac{(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha + 3)} \sum_{j_2=n_1+3}^{n_2} \left[\left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2}}{12}\right) - kx^{j_2} \right) - 2 \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2-1}}{12}\right) - kx^{j_2-1} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_2-2}}{12}\right) - kx^{j_2-2} \right) \right] \\
& \quad \times \left\{ \begin{aligned} & (n_2 - j_2 + 1)^\alpha \left[\frac{2(n_2 - j_2)^2 + (3\alpha + 10)(n_2 - j_2)}{+2\alpha^2 + 9\alpha + 12} \right] \\ & - (n_2 - j_2)^\alpha \left[\frac{2(n_2 - j_2)^2 + (5\alpha + 10)(n_2 - j_2)}{+6\alpha^2 + 18\alpha + 12} \right] \end{aligned} \right\}, t \in [t_1, t_2] \\
& x^{n_3} = x(t_2) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{n_3}}{12}\right) - kx^{n_3} \right) \\
& \quad + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j_3=n_2+3}^{n_3} \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_3-2}}{12}\right) - kx^{j_3-2} \right) \left\{ \begin{aligned} & (n_3 - j_3 + 1)^\alpha \\ & - (n_3 - j_3)^\alpha \end{aligned} \right\} \\
& \quad + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{j_3=n_2+3}^{n_3} \left[\left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_3-1}}{12}\right) - kx^{j_3-1} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_3-2}}{12}\right) - kx^{j_3-2} \right) \right] \\
& \quad \times \left\{ \begin{aligned} & (n_3 - j_3 + 1)^\alpha (n_3 - j_3 + 3 + 2\alpha) \\ & - (n_3 - j_3)^\alpha (n_3 - j_3 + 3 + 3\alpha) \end{aligned} \right\} \\
& \quad + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{2AB(\alpha)\Gamma(\alpha + 3)} \sum_{j_3=n_2+3}^{n_3} \left[\begin{aligned} & \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_3}}{12}\right) - kx^{j_3} \right) \\ & - 2 \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_3-1}}{12}\right) - kx^{j_3-1} \right) \\ & + \left(\rho - \beta \cos\left(\frac{\pi t_{j_3-2}}{12}\right) - kx^{j_3-2} \right) \end{aligned} \right] \\
& \quad \times \left\{ \begin{aligned} & (n_3 - j_3 + 1)^\alpha \left[\frac{2(n_3 - j_3)^2 + (3\alpha + 10)(n_3 - j_3)}{+2\alpha^2 + 9\alpha + 12} \right] \\ & - (n_3 - j_3)^\alpha \left[\frac{2(n_3 - j_3)^2 + (5\alpha + 10)(n_3 - j_3)}{+6\alpha^2 + 18\alpha + 12} \right] \end{aligned} \right\} \in [t_2, T]
\end{aligned} \tag{3.69}$$

(3.67) probleminde $\rho = 0,05$; $\beta = 0,02$; $k = 0,09$ parametreleri kullanılarak elde edilen nümerik simülasyon Şekil 3.8’de verilmiştir.



Şekil 3.8. $\alpha = 0,85$ ve $\sigma = 0,2$ için kandaki hormonun zamana bağlı değişimini gösteren nümerik simülasyon

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu başlıkta, Lestari ve ark. (2022) tarafından tanıtılan bir Hepatit C modeli için deterministik ve stokastik yaklaşımlar ile ele alınacaktır. Deterministik model için denge noktalarının bulunması, çözümlerin pozitifliği ve temel çoğalma gibi analizler sunulurken, stokastik model için modelin çözümünün varlık ve teklik ispatının yanı sıra nümerik çözümü araştırılacaktır. Dahası, söz konusu model parçalı türevler ile modifiye edilerek, bu kavram sayesinde deterministik ve stokastik yaklaşımların bir arada ele alınması sağlanacaktır. Deterministik, stokastik ve deterministik-stokastik kalıplarına sahip modeller Newton polinomlu metot ile nümerik olarak çözülecektir.

4.1. Hepatit C Modeli Ve Bazı Özellikleri

Lestari, Megawati, Susyanto ve Adi-Kusumo (Lestari ve ark., 2022) Hepatit C virüsü için deterministik matematiksel bir model sunmuştur. Bu model,

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \Lambda - \delta_1 T - (1 - \eta)\beta VT \\ \frac{dI}{dt} &= (1 - \eta)\beta VT - \delta_2 I \\ \frac{dV}{dt} &= (1 - \epsilon)kI - cV\end{aligned}\tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada T enfekte olmamış hücrelerin sayısını, I enfekte olmuş hücrelerin sayısını ve V serbest virüslerin sayısını ifade etmektedir. Enfekte olmamış hücreler Λ oranında üretilir ve doğal olarak δ_1 oranında ölürler. Hücreler sabit bir β hızında bir virüsle etkileşime girdiklerinde enfekte olurlar ve enfekte olduktan sonra δ_2 oranında ölürler. η ilacın virüsü durdurmadaki, ϵ ise ilacın virüsü engellemedeki etkinliğidir. Hepatit C virüsü, enfekte hücreler tarafından sabit bir k oranında üretilir ve sabit bir c oranında temizlenir. Modeldeki bütün parametrelerin tanımlarından dolayı pozitif olduğu göz önünde bulundurulmalıdır.

Bu model için başlangıç koşulları,

$$T(0) = T_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0, \quad V(0) = V_0 \geq 0\tag{4.2}$$

olarak seçilmiştir.

4.1.1. Deterministik modelin denge noktaları

Sistemin hastalık virüsü olmadan denge noktası (E_0) için, hastalık virüsü parametreleri 0 olarak kabul edilir. Yani, $I = 0$ ve $V = 0$ için,

$$\Lambda - \delta_1 T = 0 \quad (4.3)$$

olur. Buradan $T = \frac{\Lambda}{\delta_1}$ olarak bulunur. Dolayısıyla hastalık virüsü olmadan denge noktası

$$E_0 \left(\frac{\Lambda}{\delta_1}, 0, 0 \right) \quad (4.4)$$

olacaktır (Lestari ve ark., 2022). Şimdi endemik denge noktasını (E_1) bulalım. 3.denklemden $V = \frac{(1-\epsilon)kI}{c}$ olur. Bu ifadeyi modelde yer alan ikinci denklemde yerine yazarsak,

$$(1 - \eta)\beta \frac{(1 - \epsilon)kI}{c} T - \delta_2 I = 0 \quad (4.5)$$

olur. Buradan

$$T = \frac{\delta_2 c}{(1 - \eta)(1 - \epsilon)k\beta} \quad (4.6)$$

olarak bulunur. Daha sonra birinci ve ikinci denklemi taraf tarafa toplayıp bulunan T değerini yazarsak

$$\Lambda - \delta_1 \frac{\delta_2 c}{(1 - \eta)(1 - \epsilon)k\beta} = \delta_2 I \quad (4.7)$$

olur. Buradan

$$I = \frac{\Lambda}{\delta_2} - \frac{\delta_1 c}{(1 - \eta)(1 - \epsilon)k\beta} \quad (4.8)$$

olur. Son olarak yukarıda bulunan T değerini birinci denkleme yazarak V değeri bulunur. Yani,

$$\Lambda - \delta_1 \frac{\delta_2 c}{(1 - \eta)(1 - \epsilon)k\beta} = (1 - \eta)\beta V \frac{\delta_2 c}{(1 - \eta)(1 - \epsilon)k\beta}$$

(4.9)

yazılır. Buradan,

$$V = \frac{(1 - \epsilon)k\Lambda}{\delta_2 c} - \frac{\delta_1}{(1 - \eta)\beta} \quad (4.10)$$

olur. Dolayısıyla bu sistemin endemik denge noktası

$$E_1 = \left(\frac{\delta_2 c}{(1 - \eta)(1 - \epsilon)k\beta}, \frac{\Lambda}{\delta_2} - \frac{\delta_1 c}{(1 - \eta)(1 - \epsilon)k\beta}, \frac{(1 - \epsilon)k\Lambda}{\delta_2 c} - \frac{\delta_1}{(1 - \eta)\beta} \right) \quad (4.11)$$

olacaktır (Lestari ve ark., 2022).

4.1.2. Deterministik modelin çözümlerinin pozitifliği

Bu başlık altında, başlangıç koşullarının pozitif olduğu kabul edilerek modelin çözümlerinin pozitifliğini göstereyim. Öncelikle $I(t)$ fonksiyonu ile başlayalım.

$$\frac{dI}{dt} = (1 - \eta)\beta VT - \delta_2 I \quad (4.12)$$

denkleminde $V(t)$ ve $T(t)$ fonksiyonlarının aynı işaretli olduğu kabul edilirse ve

$$(1 - \eta) > 0 \quad (4.13)$$

iken

$$\frac{dI}{dt} \geq -\delta_2 I \quad (4.14)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin çözümü için aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$I(t) \geq I(0)e^{-\delta_2 t}. \quad (4.15)$$

Şimdi $V(t)$ fonksiyonunun pozitif olduğunu göstereyim. Bunun için sistemin üçüncü denklemini yazalım:

$$\frac{dV}{dt} = (1 - \epsilon)kI - cV. \quad (4.16)$$

$I(t) \geq 0$ olduğundan ve

$$(1 - \epsilon) > 0$$

(4.17)

kabulü ile (4.16) eşitliği

$$\frac{dV}{dt} \geq -cV$$

(4.18)

şeklinde yazılır.

$$V(t) \geq V(0)e^{-ct}$$

(4.19)

olur.

$T(t)$ fonksiyonunun çözümünü incelemeden önce aşağıdaki normu tanımlayalım:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, T]} |f|.$$

(4.20)

Şimdi $T(t)$ fonksiyonunun çözümünü araştıralım.

$$\frac{dT}{dt} = \Lambda - \delta_1 T - (1 - \eta)\beta VT$$

(4.21)

denklemini,

$$\frac{dT}{dt} \geq -(\delta_1 T + (1 - \eta)\beta VT)$$

(4.22)

şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &\geq -(\delta_1 T + (1 - \eta)\beta |V| T) \\ &\geq -\left(\delta_1 T + (1 - \eta)\beta \sup_{t \in [0, T]} |V| T\right) \\ &\geq -(\delta_1 + (1 - \eta)\beta \|V\|_{\infty})T \end{aligned}$$

(4.23)

olup

$$\frac{dT}{dt} \geq -kT$$

(4.24)

şeklinde yazılır. Bu denklemin çözümü,

$$T(t) \geq T(0)e^{-kt}$$

(4.25)

şeklindedir. Burada,

$$k = \delta_1 + (1 - \eta)\beta\|V\|_\infty$$

(4.26)

ile ifade edilir.

Buradan, modelin çözümlerinin pozitif olduğu sonucu elde edilmiştir.

4.1.3. Temel çoğalma sayısı

Bu başlık altında tezde sunduğumuz Hepatit C modeli için temel çoğalma sayısı hesaplanacaktır. Temel çoğalma sayısı, salgının seyrini belirlemekte ve salgının gelecekteki seyrini tahmin etmede kullanılır. Burada temel çoğalma sayısı yeni nesil matris (next generation matrix) yöntemi kullanılarak hesaplanmaktadır (Driessche ve Watmough, 2002). Şimdi modelimizin enfekte sınıflarını ele alalım:

$$I' = (1 - \eta)\beta VT - \delta_2 I$$

$$V' = (1 - \epsilon)kI - cV.$$

(4.27)

Denklem sisteminin nonlinear matrisi

$$F = \begin{bmatrix} (1 - \eta)\beta VT \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4.28)

şeklinde olup ve denklem sisteminin lineer matrisi ise aşağıdaki gibi yazılır:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \delta_2 I \\ -(1 - \epsilon)kI + cV \end{bmatrix}.$$

(4.29)

Bu matrisler için Jakobyen matrisleri

$$JF = \begin{bmatrix} 0 & (1 - \eta)\beta T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.30)

ve

$$J\tilde{V} = \begin{bmatrix} \delta_2 & 0 \\ -(1 - \epsilon)k & c \end{bmatrix}$$

(4.31)

şeklinde elde edilir. Buradan

$$F.V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & (1-\eta)\beta T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\delta_2 c} \begin{bmatrix} c & 0 \\ (1-\epsilon)k & \delta_2 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

elde edilir. Buradan işlemi gerçekleştirdiğimizde

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-\eta)\beta T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_2} & 0 \\ \frac{(1-\epsilon)k}{\delta_2 c} & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

yani

$$\begin{bmatrix} \frac{(1-\eta)\beta T(1-\epsilon)k}{\delta_2 c} & \frac{(1-\eta)\beta T}{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

matrisi elde edilir. Buradan $(F.V^{-1})$ matrisinin özdeğerlerinin en büyüğü, diğer bir deyişle spektral yarıçapı

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{(1-\eta)\beta T(1-\epsilon)k}{\delta_2 c} & \frac{(1-\eta)\beta T}{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (4.35)$$

formülü ile hesaplanıp, temel çoğalma sayısı

$$R_0 = \frac{(1-\eta)\beta(1-\epsilon)k}{\delta_2 c} \frac{\Lambda}{\delta_1} \quad (4.36)$$

şeklinde bulunur. Burada temel çoğalma sayısı yani $R_0 > 1$ olduğu durumlarda virüsün yayılımının zamanla artacağı, $R_0 < 1$ olduğu durumlarda ise virüsün yayılımının biteceği sonucuna varılmaktadır (Lestari ve ark., 2022).

4.2. Hepatit C Modeli İçin Newton Metodu ve Nümerik Çözümleri

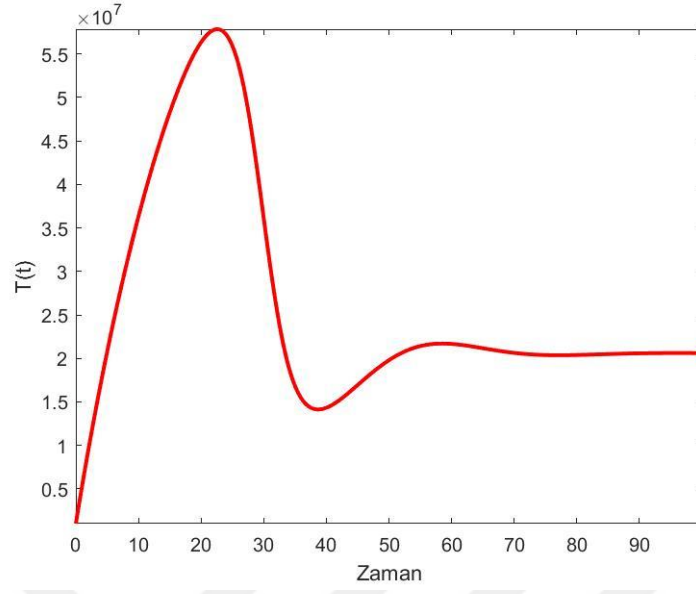
Bu bölümde, Lestari ve ark. (2022) tarafından tanıtılan matematiksel modeli Newton metoduyla klasik türevi, stokastik nümerik çözümü, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu, Caputo kesirli türevi, stokastik kesirli türevi, parçalı türevi ve parçalı stokastik ile modifiye edilen modelin nümerik çözümleri sunulacaktır.

4.2.1. Klasik türevli Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri

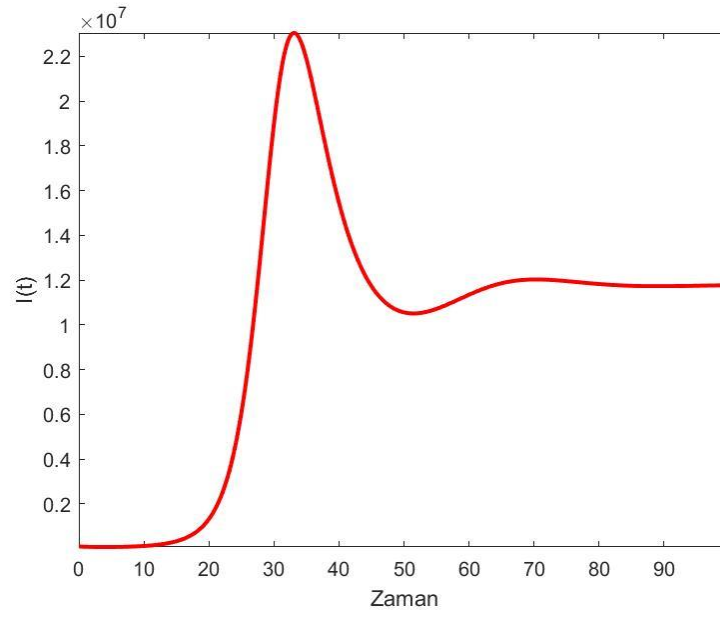
Kesirli Hepatit C modelinin nümerik çözümünü sunmadan önce klasik versiyon ile başlayalım. Bir önceki bölümde olduğu gibi, (4.1) denklem sisteminin her iki tarafı integrallenir ve Newton polinomu ile yaklaştırılırsa, klasik türeve sahip modelin nümerik çözümü aşağıdaki algoritma ile elde edilir:

$$\begin{aligned}
 T^{n+1} &= T^n + h \left[\begin{aligned} &\frac{5}{12} (\Lambda - \delta_1 T^{n-2} - (1 - \eta) \beta V^{n-2} T^{n-2}) \\ &-\frac{4}{3} (\Lambda - \delta_1 T^{n-1} - (1 - \eta) \beta V^{n-1} T^{n-1}) \\ &+\frac{23}{12} (\Lambda - \delta_1 T^n - (1 - \eta) \beta V^n T^n) \end{aligned} \right] \\
 I^{n+1} &= I^n + h \left[\begin{aligned} &\frac{5}{12} ((1 - \eta) \beta V^{n-2} T^{n-2} - \delta_2 I^{n-2}) \\ &-\frac{4}{3} ((1 - \eta) \beta V^{n-1} T^{n-1} - \delta_2 I^{n-1}) \\ &+\frac{23}{12} ((1 - \eta) \beta V^n T^n - \delta_2 I^n) \end{aligned} \right] \\
 V^{n+1} &= V^n + h \left[\begin{aligned} &\left(\frac{5}{12} (1 - \epsilon) k I^{n-2} - c V^{n-2} \right) \\ &-\frac{4}{3} ((1 - \epsilon) k I^{n-1} - c V^{n-1}) \\ &+\frac{23}{12} ((1 - \epsilon) k I^n - c V^n) \end{aligned} \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

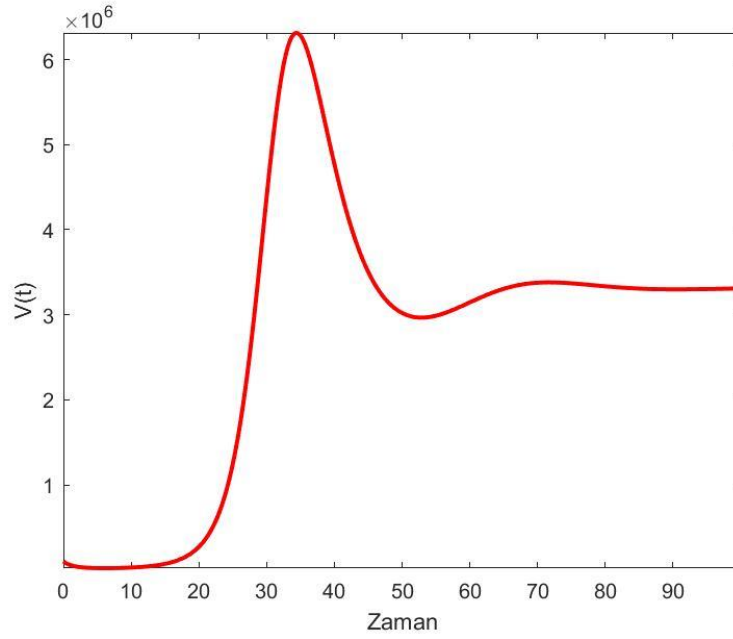
Klasik türeve sahip Hepatit C modeli için nümerik simülasyonlar Şekil 4.1-4.3'te verilmiştir.



Şekil 4.1. Enfekte olmamış hücrelerin sayısının Newton metotlu nümerik simülasyonu



Şekil 4.2. Enfekte olmuş hücrelerin sayısının Newton metotlu nümerik simülasyonu



Şekil 4.3. Serbest virüslerin sayısının Newton metotlu nümerik simülasyonu

4.2.2. Stokastik Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri

Deterministik sisteme stokastik gürültü ekleyerek sistemin stokastik süreçlere genelleştirilebildiğini biliyoruz. Aşağıdaki denklem sisteminde $B_i(t)$, $i = 1,2,3$ standart Brownian hareketi olup, σ_i , $i = 1,2,3$ ise gürültünün yoğunluğu olarak bilinen gerçek bir sabittir. Stokastik denklem,

$$dT = (\Lambda - \delta_1 T - (1 - \eta)\beta VT)dt + \sigma_1 T dB_1(t)$$

$$dI = ((1 - \eta)\beta VT - \delta_2 I)dt + \sigma_2 I dB_2(t)$$

$$dV = ((1 - \epsilon)kI - cV)dt + \sigma_3 V dB_3(t)$$

(4.38)

şeklindedir.

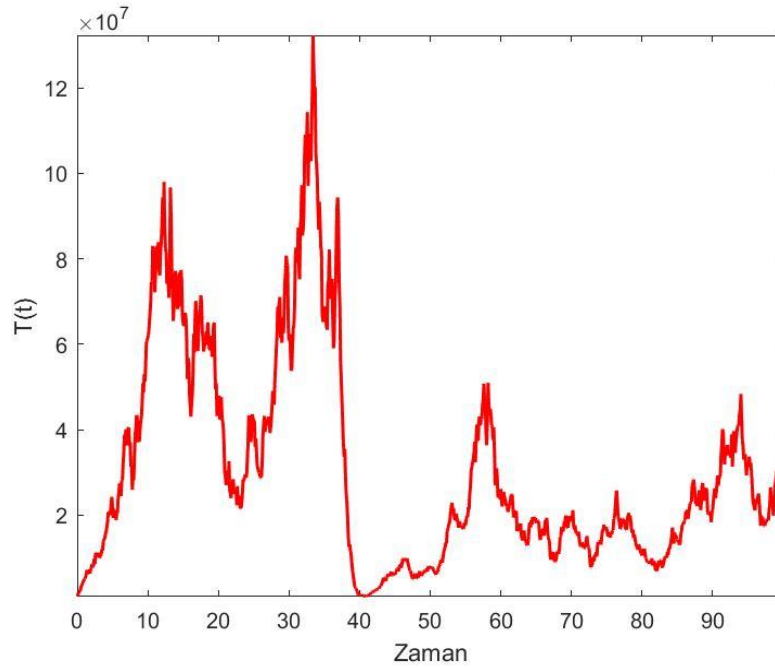
Stokastik denklem sisteminin nümerik çözümü,

$$\begin{aligned} T^{n+1} = T^n + h & \left[\frac{5}{12} (\Lambda - \delta_1 T^{n-2} - (1 - \eta)\beta V^{n-2} T^{n-2}) \right. \\ & - \frac{4}{3} (\Lambda - \delta_1 T^{n-1} - (1 - \eta)\beta V^{n-1} T^{n-1}) \\ & \left. + \frac{23}{12} (\Lambda - \delta_1 T^n - (1 - \eta)\beta V^n T^n) \right] + \sigma_1 T(c_n) (B_1(t_{n+1}) - B_1(t_n)) \end{aligned}$$

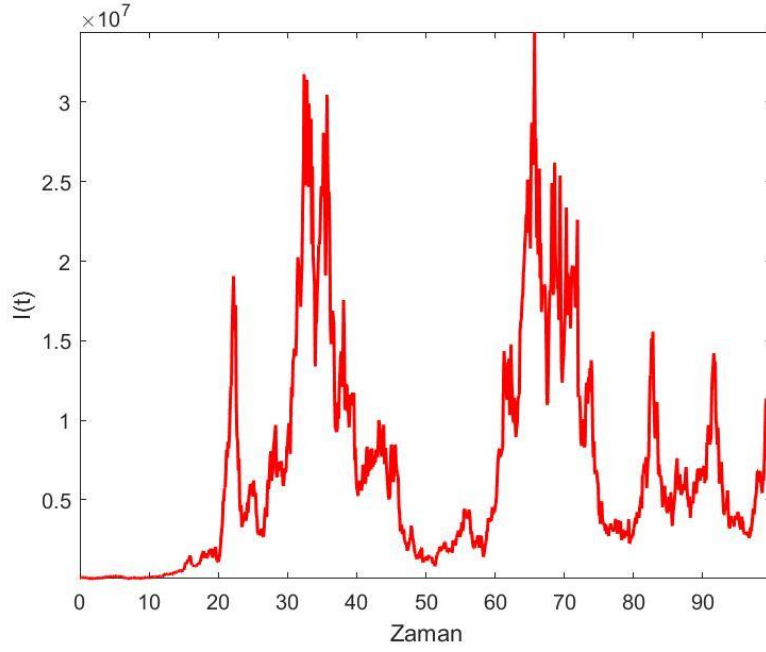
$$\begin{aligned}
I^{n+1} = I^n + h \left[\frac{5}{12} ((1-\eta)\beta V^{n-2} T^{n-2} - \delta_2 I^{n-2}) - \frac{4}{3} ((1-\eta)\beta V^{n-1} T^{n-1} - \delta_2 I^{n-1}) \right. \\
\left. + \frac{23}{12} ((1-\eta)\beta V^n T^n - \delta_2 I^n) \right] + \sigma_2 I(c_n)(B_2(t_{n+1}) - B_2(t_n)) \\
V^{n+1} = V^n + h \left[\left(\frac{5}{12} (1-\epsilon)k I^{n-2} - c V^{n-2} \right) - \frac{4}{3} ((1-\epsilon)k I^{n-1} - c V^{n-1}) \right. \\
\left. + \frac{23}{12} ((1-\epsilon)k I^n - c V^n) \right] + \sigma_3 V(c_n)(B_3(t_{n+1}) - B_3(t_n))
\end{aligned}
\tag{4.39}$$

şeklinde olacaktır. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ iken, (4.39) nümerik çözüm klasik türevli modelin çözümünü verecektir.

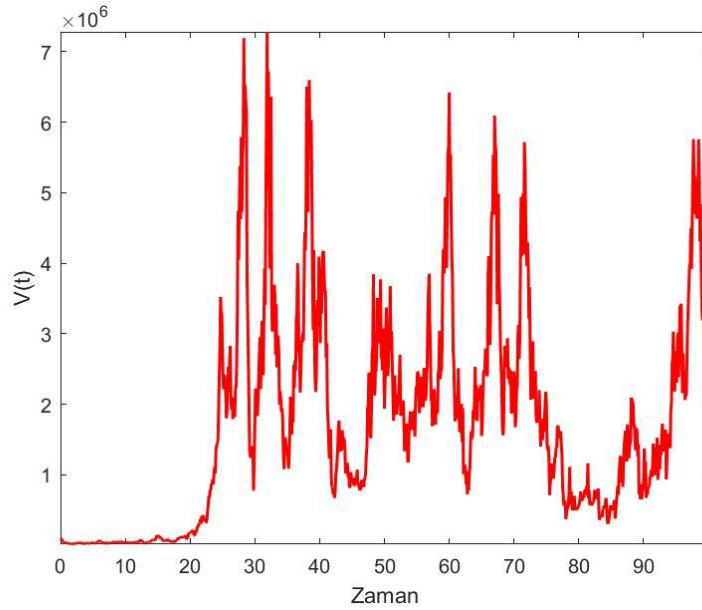
Stokastik denklem sisteminin nümerik simülasyonu Şekil 4.4-4.6’da verilmiştir.



Şekil 4.4. $\sigma = 0,08$ için enfekte olmamış hücrelerin sayısının stokastik nümerik simülasyonu



Şekil 4.5. $\sigma = 0, 14$ için enfekte olmuş hücrelerin sayısının stokastik nümerik simülasyonu



Şekil 4.6. $\sigma = 0, 18$ için serbest virüslerin sayısının stokastik nümerik simülasyonu

4.2.3. Stokastik Hepatit C modeli için varlık-tekliğin incelenmesi

Bu alt başlık altında, (4.38) ile verilen stokastik Hepatit C modelinin çözümünün varlık ve teklifi için gerekli koşullarını sunacağız. Bunun için, Teorem 2.1' de sunulan koşulları inceleyeceğiz. Öncelikle aşağıdaki normu tanımlayalım:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|.$$

(4.40)

Araştırmaya (4.38) modelinin birinci denkleminin sağ tarafındaki fonksiyon ile başlayalım:

$$\begin{aligned}
|F_1(T_1, t) - F_1(T_2, t)|^2 &= |-\delta_1(T_1 - T_2) - (1 - \eta)\beta V(T_1 - T_2)|^2 \\
&\leq 2(|\delta_1|^2 + (1 - \eta)^2\beta^2 V^2)|T_1 - T_2|^2 \\
&\leq 2\left(|\delta_1|^2 + (1 - \eta)^2\beta^2 \sup_{t \in [0, T]} |V|^2\right)|T_1 - T_2|^2 \\
&\leq 2(|\delta_1|^2 + (1 - \eta)^2\beta^2 \|V\|_\infty^2)|T_1 - T_2|^2 \\
&\leq k_1|T_1 - T_2|^2.
\end{aligned}
\tag{4.41}$$

Burada,

$$k_1 = 2(|\delta_1|^2 + (1 - \eta)^2\beta^2 \|V\|_\infty^2) \tag{4.42}$$

şeklindedir. (4.38) modelinin ikinci denkleminin sağ tarafındaki fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
|F_2(I_1, t) - F_2(I_2, t)|^2 &= |-\delta_2(I_1 - I_2)|^2 \\
&\leq (a_1 + |\delta_2|^2)|I_1 - I_2|^2 \\
&\leq k_2|I_1 - I_2|^2
\end{aligned}
\tag{4.43}$$

olduğu görülür. Burada a_1 yeterince küçük bir sayı olmak üzere,

$$k_2 = a_1 + |\delta_2|^2 \tag{4.44}$$

şeklindedir. Son olarak, (4.38) modelinin üçüncü denkleminin sağ tarafındaki fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
|F_3(V_1, t) - F_3(V_2, t)|^2 &= |-c(V_1 - V_2)|^2 \\
&\leq |c|^2|V_1 - V_2|^2 \\
&\leq (a_2 + |c|^2)|V_1 - V_2|^2 \\
&\leq k_3|V_1 - V_2|^2.
\end{aligned}
\tag{4.45}$$

bulunur. Burada a_2 yeterince küçük bir sayı olmak üzere,

$$k_3 = a_2 + |c|^2$$

(4.46)

şeklindedir. Stokastik kısım için de aşağıdaki eşitsizliklerin geçerli olduğu görülür:

$$\begin{aligned}
|G_1(t, T_1) - G_1(t, T_2)|^2 &= \sigma_1^2 |T_1 - T_2|^2 \\
&\leq (\sigma_1^2 + a_3) |T_1 - T_2|^2 \\
|G_2(t, I_1) - G_2(t, I_2)|^2 &= \sigma_2^2 |I_1 - I_2|^2 \\
&\leq (\sigma_2^2 + a_4) |I_1 - I_2|^2 \\
|G_3(t, V_1) - G_3(t, V_2)|^2 &= \sigma_3^2 |V_1 - V_2|^2 \\
&\leq (\sigma_3^2 + a_5) |V_1 - V_2|^2.
\end{aligned}
\tag{4.47}$$

Böylece çözümün varlık-tekliği için Teorem 2.1'in 1. koşulunun sağlandığı görülür.

Şimdi Teorem 2.1'in 2. koşulunu inceleyelim.

$$\begin{aligned}
|F_1(T, t)|^2 &= |-\delta_1 T - (1 - \eta)\beta VT|^2 \\
&\leq 2[|\delta_1|^2 |T|^2 + (1 - \eta)^2 \beta^2 |V|^2 |T|^2] \\
&\leq 2 \left[|\delta_1|^2 |T|^2 + (1 - \eta)^2 \beta^2 \sup_{t \in [0, T]} |V|^2 |T|^2 \right] \\
&\leq 2[|\delta_1|^2 + (1 - \eta)^2 \beta^2 \|V\|_\infty^2] |T|^2 \\
&\leq \bar{k}_1 (1 + |T|^2)
\end{aligned}
\tag{4.48}$$

Burada,

$$\bar{k}_1 = 2[|\delta_1|^2 + (1 - \eta)^2 \beta^2 \|V\|_\infty^2]
\tag{4.49}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
|F_2(I, t)|^2 &= |(1 - \eta)\beta VT - \delta_2 I|^2 \\
&\leq 2((1 - \eta)^2 \beta^2 |V|^2 |T|^2 + (\delta_2)^2 |I|^2) \\
&\leq 2(1 - \eta)^2 \beta^2 \sup_{t \in [0, T]} |V|^2 \sup_{t \in [0, T]} |T|^2 + 2(\delta_2)^2 |I|^2 \\
&\leq 2(1 - \eta)^2 \beta^2 \|V\|_\infty^2 \|T\|_\infty^2 + 2(\delta_2)^2 |I|^2 \\
&\leq (2(1 - \eta)^2 \beta^2 \|V\|_\infty^2 \|T\|_\infty^2) \left(1 + \frac{2(\delta_2)^2}{2(1 - \eta)^2 \beta^2 \|V\|_\infty^2 \|T\|_\infty^2} |I|^2 \right) \\
&\leq \bar{k}_2 \left(1 + \frac{2(\delta_2)^2}{2(1 - \eta)^2 \beta^2 \|V\|_\infty^2 \|T\|_\infty^2} |I|^2 \right)
\end{aligned}
\tag{4.50}$$

olup, burada

$$\bar{k}_2 = 2(1 - \eta)^2 \beta^2 \|V\|_\infty^2 \|T\|_\infty^2 \quad (4.51)$$

ve

$$\frac{2(\delta_2)^2}{2(1 - \eta)^2 \beta^2 \|V\|_\infty^2 \|T\|_\infty^2} < 1 \text{ ve } \eta \neq 1 \quad (4.52)$$

dir. (4.38) sisteminin üçüncü denklemdeki sağ taraf fonksiyonu için ise

$$\begin{aligned} |F_3(V, t)|^2 &= |(1 - \epsilon)kI - cV|^2 \\ &\leq 2(1 - \epsilon)^2 k^2 |I|^2 + 2c^2 |V|^2 \\ &\leq 2(1 - \epsilon)^2 k^2 \sup_{t \in [0, T]} |I|^2 + 2c^2 |V|^2 \\ &\leq 2(1 - \epsilon)^2 k^2 \|I\|_\infty^2 + 2c^2 |V|^2 \\ &\leq (2(1 - \epsilon)^2 k^2 \|I\|_\infty^2) \left(1 + \frac{2c^2}{2(1 - \epsilon)^2 k^2 \|I\|_\infty^2} |V|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

olduğu görülür. Burada,

$$\frac{2c^2}{2(1 - \epsilon)^2 k^2 \|I\|_\infty^2} < 1 \text{ ve } \epsilon \neq 1 \quad (4.54)$$

şeklindedir.

Şimdi bu koşulu $G_1(t, T), G_2(t, I), G_3(t, V)$ fonksiyonları için inceleyelim.

$$\begin{aligned} |G_1(t, T)|^2 &= |\sigma_1 T|^2 \\ &\leq (\sigma_1^2 + b_1) |T|^2 \\ &\leq \bar{k}_1 |T|^2 \\ |G_2(t, I)|^2 &= |\sigma_2 I|^2 \\ &\leq (\sigma_2^2) |I|^2 \\ &\leq (\sigma_2^2 + b_2) |I|^2 \\ &\leq \bar{k}_2 |I|^2 \\ |G_3(t, V)|^2 &= |\sigma_3 V|^2 \\ &\leq (\sigma_3^2 + b_3) |V|^2 \\ &\leq \bar{k}_3 |V|^2. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Dolayısıyla, ele alınan Hepatit C modeli için

$$\max \left\{ \frac{2(\delta_2)^2}{2(1-\eta)^2\beta^2\|V\|_\infty^2\|T\|_\infty^2}, \frac{2c^2}{2(1-\epsilon)^2k^2\|I\|_\infty^2} \right\} < 1 \quad (4.56)$$

koşulu altında ele alınan stokastik denklemin çözümünün var ve tek olduğu sonucu çıkarılır.

4.2.4. Kesirli türevlere sahip Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri

Bu başlık altında, ele alınan Hepatit C modelini kesirli türevler ile modifiye edip, böyle modeller için Newton polinomunun uygulanışını sunacağız. Söz konusu matematiksel modeli hatırlatalım:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \Lambda - \delta_1 T - (1-\eta)\beta VT \\ \frac{dI}{dt} &= (1-\eta)\beta VT - \delta_2 I \\ \frac{dV}{dt} &= (1-\epsilon)kI - cV. \end{aligned} \quad (4.57)$$

(4.56) denklemindeki klasik türev, Caputo-Fabrizio kesirli türevi ile değiştirilirse

$$\begin{aligned} {}^{CF}_0D_t^\alpha T(t) &= \Lambda - \delta_1 T - (1-\eta)\beta VT \\ {}^{CF}_0D_t^\alpha I(t) &= (1-\eta)\beta VT - \delta_2 I \\ {}^{CF}_0D_t^\alpha V(t) &= (1-\epsilon)kI - cV \end{aligned} \quad (4.58)$$

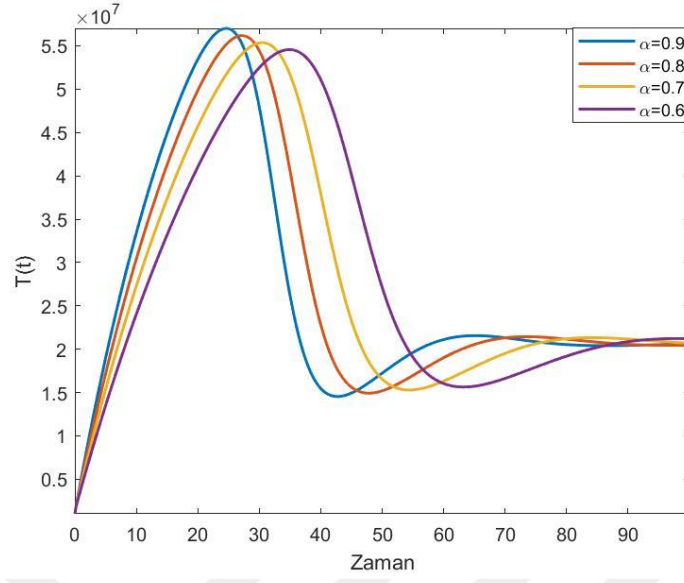
sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini daha sade yazalım:

$$\begin{aligned} {}^{CF}_0D_t^\alpha T(t) &= f(T, I, V) \\ {}^{CF}_0D_t^\alpha I(t) &= g(T, I, V) \\ {}^{CF}_0D_t^\alpha V(t) &= h(T, I, V). \end{aligned} \quad (4.59)$$

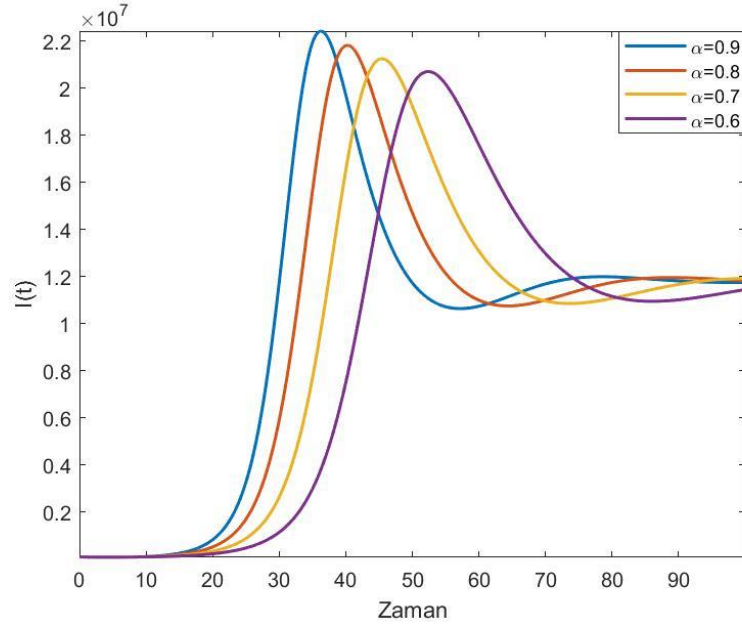
Bu denklem sisteminin Newton polinomunun kullanılmasıyla elde edilen Caputo-Fabrizio kesirli türevi için nümerik algoritması aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
T^{k+1} &= T^k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left[f(T^k, I^k, V^k, t_k) \right. \\
&\quad \left. - f(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \right] \\
&\quad + \frac{\alpha \Delta t}{M(\alpha)} \left[\frac{5}{12} f(T^{k-2}, I^{k-2}, V^{k-2}, t_{k-2}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3} f(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{23}{12} f(T^k, I^k, V^k, t_k) \right] \\
I^{k+1} &= I^k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left[g(T^k, I^k, V^k, t_k) \right. \\
&\quad \left. - g(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \right] \\
&\quad + \frac{\alpha \Delta t}{M(\alpha)} \left[\frac{5}{12} g(T^{k-2}, I^{k-2}, V^{k-2}, t_{k-2}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3} g(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{23}{12} g(T^k, I^k, V^k, t_k) \right] \\
V^{k+1} &= V^k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left[h(T^k, I^k, V^k, t_k) \right. \\
&\quad \left. - h(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \right] \\
&\quad + \frac{\alpha \Delta t}{M(\alpha)} \left[\frac{5}{12} h(T^{k-2}, I^{k-2}, V^{k-2}, t_{k-2}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3} h(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{23}{12} h(T^k, I^k, V^k, t_k) \right].
\end{aligned}
\tag{4.60}$$

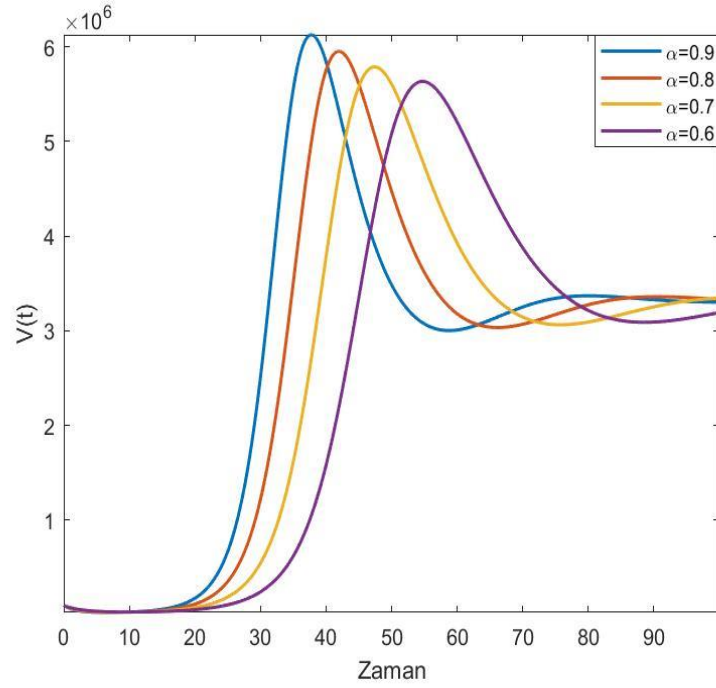
Farklı kesirli mertebeden türevler için Hepatit C salgın modelinin Caputo-Fabrizio nümerik çözümü için simülasyonlar Şekil 4.7-4.9’da verilmiştir.



Şekil 4.7. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli nümerik simülasyonu



Şekil 4.8. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli nümerik simülasyonu



Şekil 4.9. Farklı kesirli mertebeden türevler için serbest virüslerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli nümerik simülasyonu

(4.56) denklem sistemini Atangana-Baleanu türeviyle sade biçimde yazarsak denklem

$${}^{ABC}_0D_t^\alpha T(t) = f(T, I, V)$$

$${}^{ABC}_0D_t^\alpha I(t) = g(T, I, V)$$

$${}^{ABC}_0D_t^\alpha V(t) = h(T, I, V)$$

(4.61)

şeklinde olur.

Şimdi verilen denklem sistemin Atangana-Baleanu türevinin Newton polinomu kullanılarak elde edilen nümerik algoritmasını bulalım.

$$T^{k+1} = T(0) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} f(T^k, I^k, V^k, t_k)$$

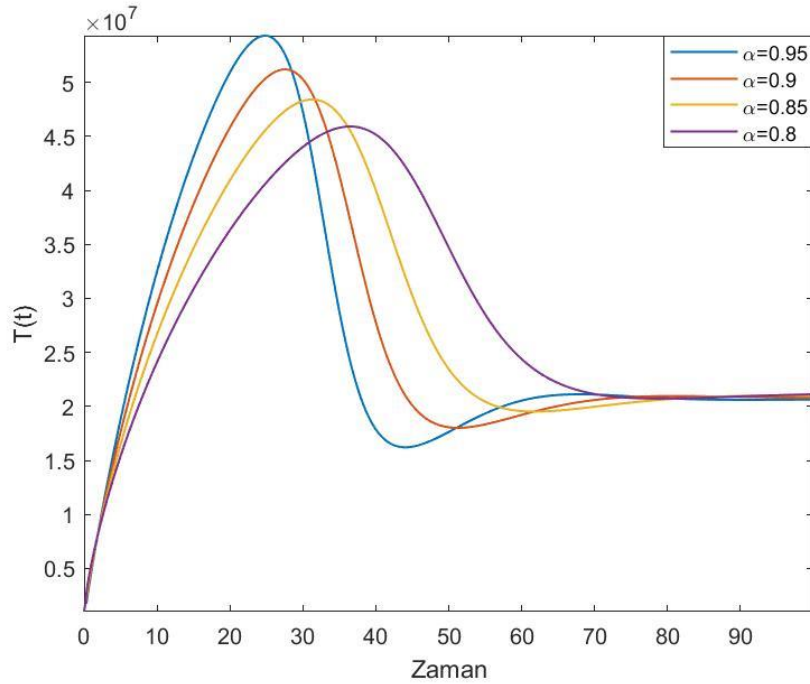
$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} f(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha(k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha(k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} f(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2f(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
& \times \left[(k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} - (k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^{k+1} &= I(0) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} g(T^k, I^k, V^k, t_k) \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} g(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha(k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha(k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} g(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2g(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
& \times \left[(k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} - (k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \right]
\end{aligned}$$

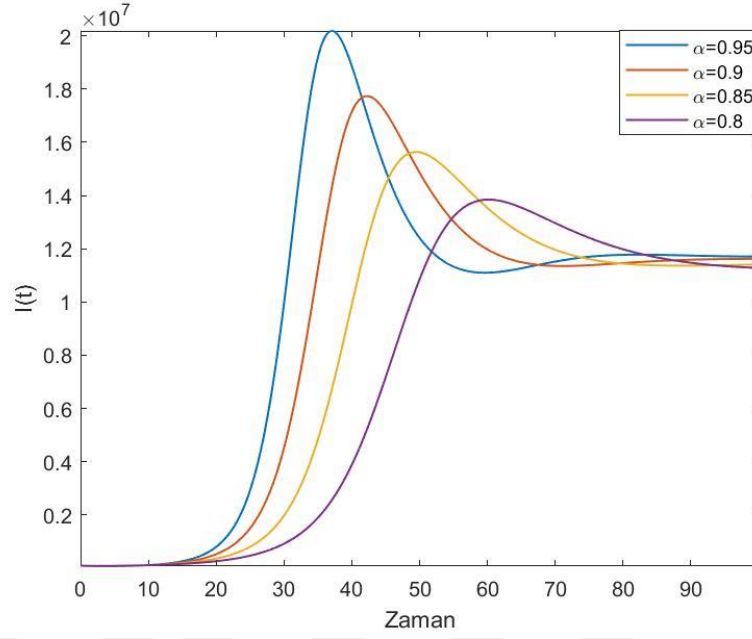
$$V^{k+1} = V(0) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} f(T^k, I^k, V^k, t_k)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} h(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha(k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha(k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} h(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -hf(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
& \times \left[(k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} - (k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \right].
\end{aligned}
\tag{4.62}$$

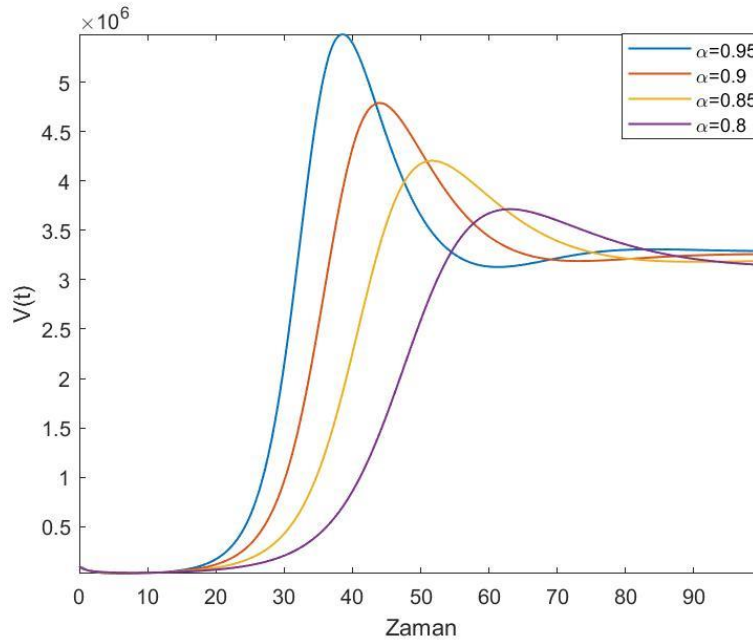
Farklı kesirli mertebeden türevler için Hepatit C salgın modelinin Atangana-Baleanu kesirli türevinin nümerik çözümü için simülasyonlar Şekil 4.10-4.12’de verilmiştir.



Şekil 4.10. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli nümerik simülasyonu



Şekil 4.11. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli nümerik simülasyonu



Şekil 4.12. Farklı kesirli mertebeden türevler için serbest virüslerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli nümerik simülasyonu

(4.56) matematiksel modeli Caputo türeviyle sade biçimde yazarsak denklem

$${}_0^C D_t^\alpha T(t) = f(T, I, V)$$

$${}_0^C D_t^\alpha I(t) = g(T, I, V)$$

$${}_0^C D_t^\alpha V(t) = h(T, I, V)$$

(4.63)

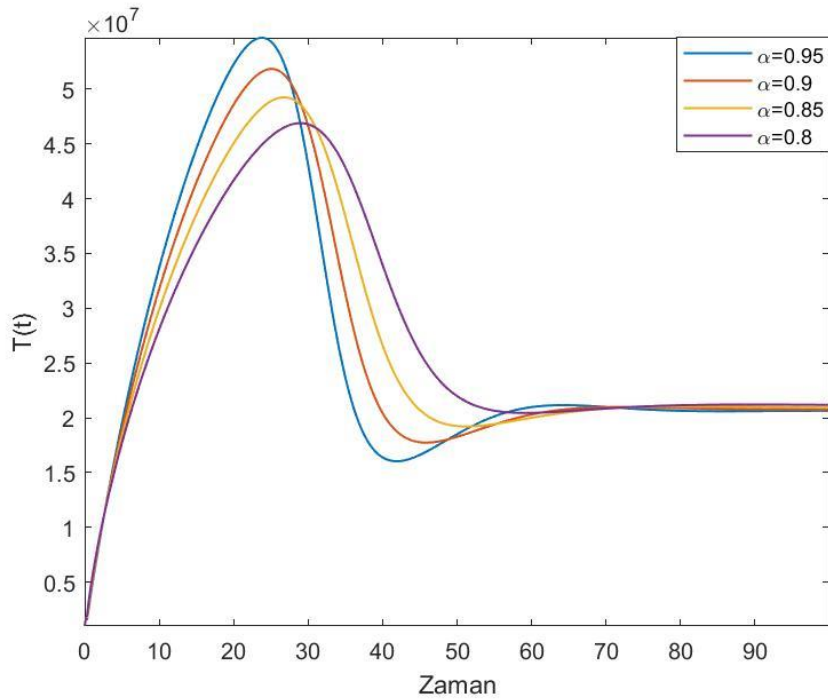
şeklinde olur.

Şimdi verilen denklem sistemi için Caputo türevinin Newton polinomlu nümerik çözümünü bulalım.

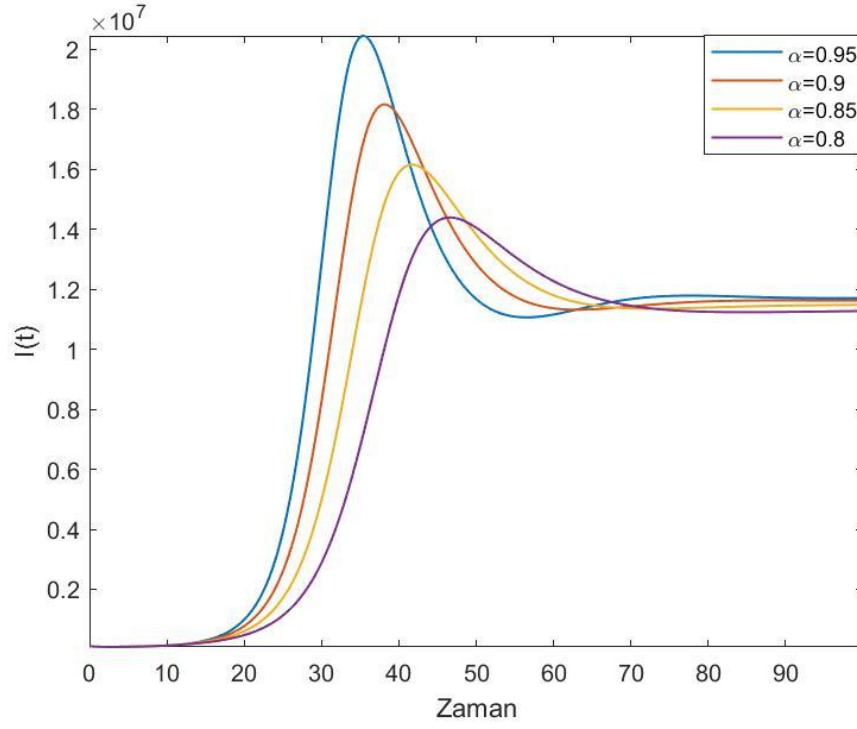
$$\begin{aligned}
T^{k+1} &= T(0) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=2}^k f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
&+ \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} f(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
&+ \frac{(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} f(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2f(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} \\ -(k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
I^{k+1} &= I(0) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=2}^k g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
&+ \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} g(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
&+ \frac{(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} g(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2g(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} \\ -(k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V^{k+1} = & V(0) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=2}^k h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
& + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=2}^k \left[h(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \right. \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& \quad + \frac{(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} h(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2h(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} \\ -(k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \Bigg]
\end{aligned} \tag{4.64}$$

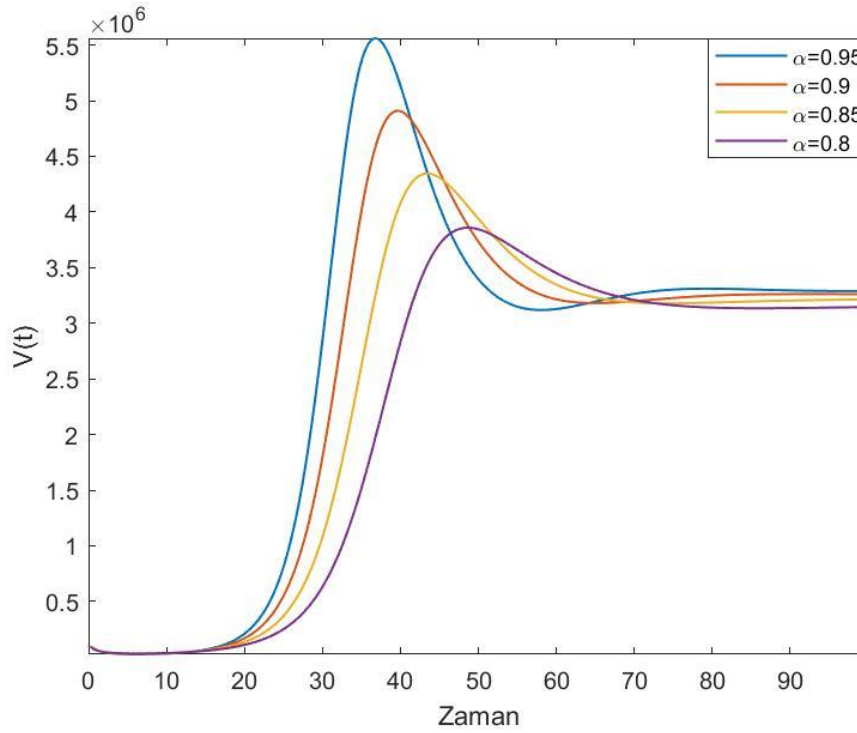
Farklı kesirli mertebeden türevler için Hepatit C salgın modelinin Caputo kesirli türevinin çözümü için nümerik simülasyonlar Şekil 4.13-4.15'te verilmiştir.



Şekil 4.13. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Caputo kesirli türevli nümerik simülasyonu



Şekil 4.14. Farklı kesirli mertebeden türevler için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Caputo kesirli türevli nümerik simülasyonu



Şekil 4.15. Farklı kesirli mertebeden türevler için serbest virüslerin sayısının Caputo kesirli türevli nümerik simülasyonu

4.2.5. Stokastik kesirli Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri

Hücreseel düzeyde stokastik Hepatit C salgın modeli,

$$\begin{aligned}dT &= (\Lambda - \delta_1 T - (1 - \eta)\beta VT)dt + \sigma_1 T dB_1(t) \\dI &= ((1 - \eta)\beta VT - \delta_2 I)dt + \sigma_2 I dB_2(t) \\dV &= ((1 - \epsilon)kI - cV)dt + \sigma_3 V dB_3(t)\end{aligned}\tag{4.65}$$

şeklindedir. Bu stokastik matematiksel modeli Caputo-Fabrizio kesirli türevi için uygulayalım.

$$\begin{aligned}{}^{CF}_0 D_t^\alpha T(t) &= \Lambda - \delta_1 T - (1 - \eta)\beta VT + \sigma_1 T dB_1(t) \\{}^{CF}_0 D_t^\alpha I(t) &= (1 - \eta)\beta VT - \delta_2 I + \sigma_2 I dB_2(t) \\{}^{CF}_0 D_t^\alpha V(t) &= (1 - \epsilon)kI - cV + \sigma_3 V dB_3(t)\end{aligned}\tag{4.66}$$

Denklemin daha sade hali

$$\begin{aligned}{}^{CF}_0 D_t^\alpha T(t) &= f(T, I, V) + \sigma_1 T dB_1(t) \\{}^{CF}_0 D_t^\alpha I(t) &= g(T, I, V) + \sigma_2 I dB_2(t) \\{}^{CF}_0 D_t^\alpha V(t) &= h(T, I, V) + \sigma_3 V dB_3(t)\end{aligned}\tag{4.67}$$

şeklinde olur. Her bir denklem için ayrı ayrı integral işlemi uygularsak

$$\begin{aligned}T(t) &= T(0) + \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} f(T, I, V) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t f(T, I, V) d\tau + \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} \sigma_1 T dB_1(t) \\&\quad + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t \sigma_1 T dB_1(\tau) \\I(t) &= I(0) + \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} g(T, I, V) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t g(T, I, V) d\tau + \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} \sigma_2 I dB_2(t) \\&\quad + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t \sigma_2 I dB_2(\tau) \\V(t) &= V(0) + \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} h(T, I, V) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t h(T, I, V) d\tau + \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} \sigma_3 V dB_3(t) \\&\quad + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t \sigma_3 V dB_3(\tau)\end{aligned}\tag{4.68}$$

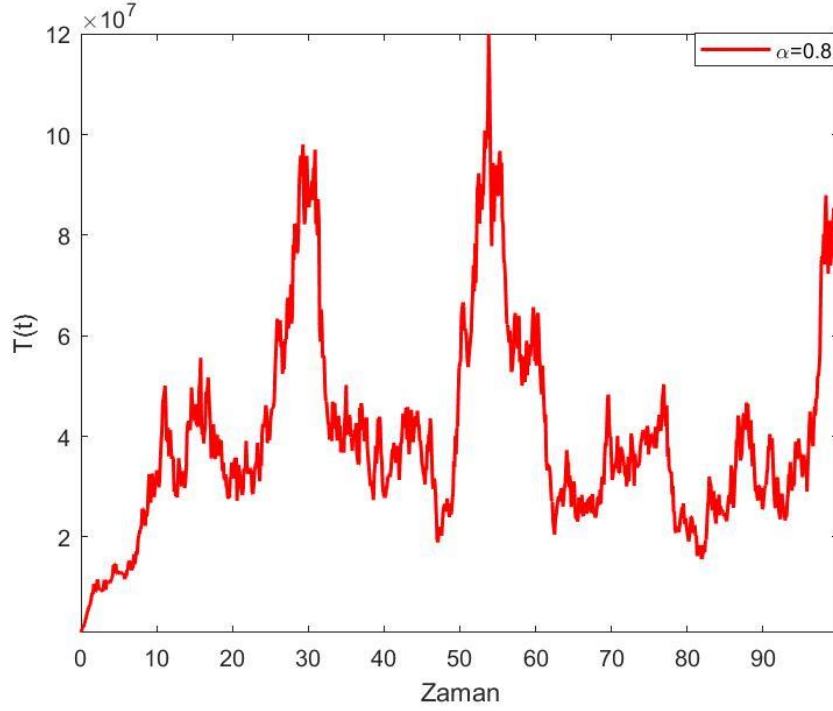
elde edilir. Denklem sisteminin Newton polinomunun kullanılmasıyla elde edilen nümerik algoritması

$$\begin{aligned}
T^{k+1} &= T^k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left[\begin{array}{c} f(T^k, I^k, V^k, t_k) \\ -f(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left[\begin{array}{c} \sigma_1 T^k (B_1(t_{k+1}) - B_1(t_k)) \\ -\sigma_1 T^{k-1} (B_1(t_k) - B_1(t_{k-1})) \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha \Delta t}{M(\alpha)} \left[\begin{array}{c} \frac{5}{12} f(T^{k-2}, I^{k-2}, V^{k-2}, t_{k-2}) \\ -\frac{4}{3} f(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \\ +\frac{23}{12} f(T^k, I^k, V^k, t_k) \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \sigma_1 T(c_k) (B_1(t_{k+1}) - B_1(t_k)) \\
I^{k+1} &= I^k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left[\begin{array}{c} g(T^k, I^k, V^k, t_k) \\ -g(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left[\begin{array}{c} \sigma_2 I^k (B_2(t_{k+1}) - B_2(t_k)) \\ -\sigma_2 I^{k-1} (B_2(t_k) - B_2(t_{k-1})) \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha \Delta t}{M(\alpha)} \left[\begin{array}{c} \frac{5}{12} g(T^{k-2}, I^{k-2}, V^{k-2}, t_{k-2}) \\ -\frac{4}{3} g(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \\ +\frac{23}{12} g(T^k, I^k, V^k, t_k) \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \sigma_2 I(c_k) (B_2(t_{k+1}) - B_2(t_k)) \\
V(t_{k+1}) &= V(t_k) + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left[\begin{array}{c} h(T^k, I^k, V^k, t_k) \\ -h(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \left[\begin{array}{c} \sigma_3 V^k (B_3(t_{k+1}) - B_3(t_k)) \\ -\sigma_3 V^{k-1} (B_3(t_k) - B_3(t_{k-1})) \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha \Delta t}{M(\alpha)} \left[\begin{array}{c} \frac{5}{12} h(T^{k-2}, I^{k-2}, V^{k-2}, t_{k-2}) \\ -\frac{4}{3} h(T^{k-1}, I^{k-1}, V^{k-1}, t_{k-1}) \\ +\frac{23}{12} h(T^k, I^k, V^k, t_k) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

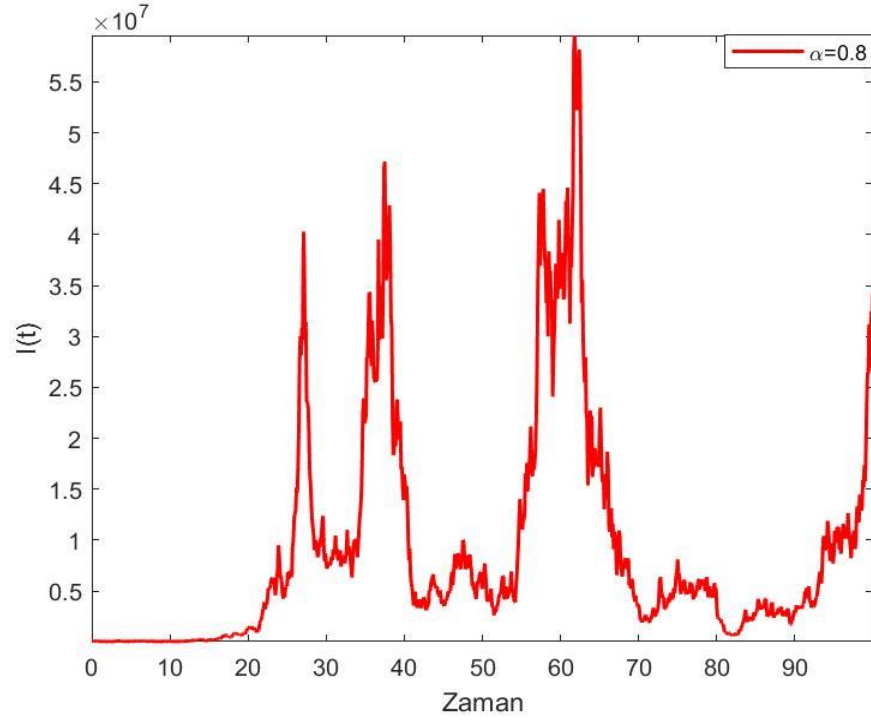
$$+ \frac{\alpha}{M(\alpha)} \sigma_3 V(c_k) (B_3(t_{k+1}) - B_3(t_k)) \quad (4.69)$$

şeklinde olur.

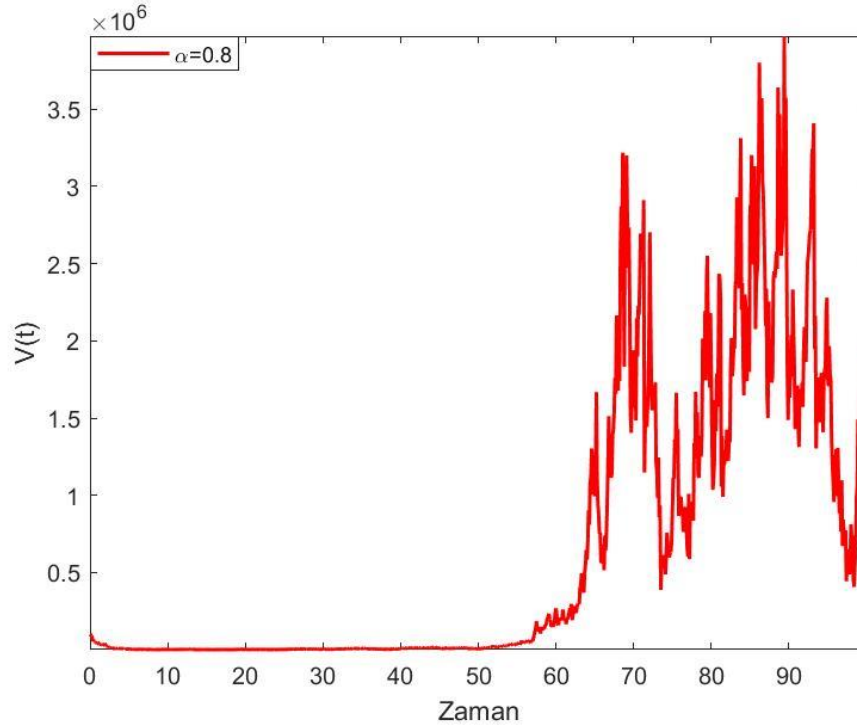
Hepatit C salgın modelinin Caputo-Fabrizio kesirli türevinin çözümü için stokastik nümerik simülasyonları Şekil 4.16-4.18’de verilmiştir.



Şekil 4.16. $\alpha = 0,8$ ve $\sigma = 0,08$ için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu



Şekil 4.17. $\alpha = 0,8$ ve $\sigma = 0,14$ için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu



Şekil 4.18. $\alpha = 0,8$ ve $\sigma = 0,18$ için serbest virüslerin sayısının Caputo-Fabrizio kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu

(4.64)' de verilen stokastik modeli Atangana-Baleanu kesirli türeviyle sade şekilde yazarsak denklem,

$$\begin{aligned} {}^{ABC}_0 D_t^\alpha T(t) &= f(T, I, V) + \sigma_1 T dB_1(t) \\ {}^{ABC}_0 D_t^\alpha I(t) &= g(T, I, V) + \sigma_2 I dB_2(t) \\ {}^{ABC}_0 D_t^\alpha V(t) &= h(T, I, V) + \sigma_3 V dB_3(t) \end{aligned} \quad (4.70)$$

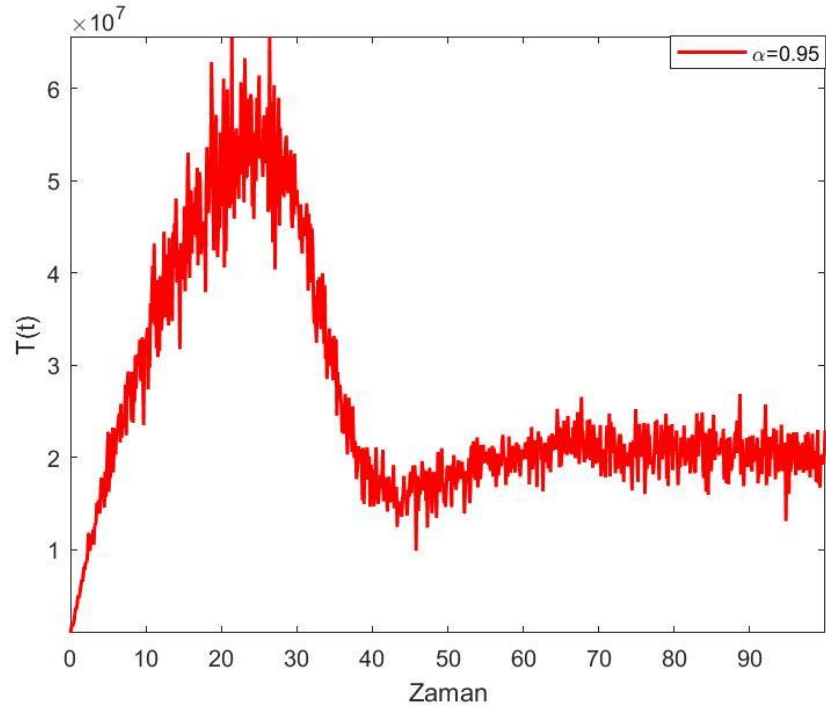
şeklinde olur. Verilen stokastik modelin Atangana-Baleanu kesirli türevinin Newton polinomu kullanılarak elde edilen nümerik algoritması

$$\begin{aligned} T^{k+1} &= T(0) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} f(T^k, I^k, V^k, t_k) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} \sigma_1 T^k (B_1(t_{k+1}) - B_1(t_k)) \\ &\quad + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} f(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha(k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha(k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} f(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2f(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} \\ -(k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\alpha(\Delta t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=0}^k \sigma_1 I^n (B_1(t_{n+1}) - B_1(t_n)) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\ I^{k+1} &= I(0) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} g(T^k, I^k, V^k, t_k) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} \sigma_2 I^k (B_2(t_{k+1}) - B_2(t_k)) \end{aligned}$$

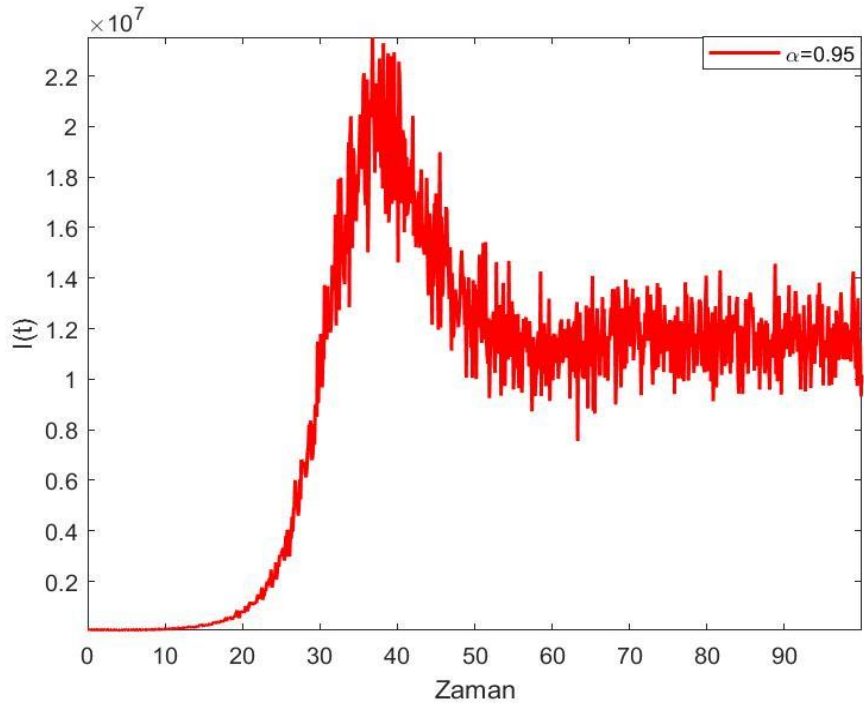
$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} g(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha(k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha(k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} g(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2g(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} \\ -(k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=0}^k \sigma_2 I^n (B_2(t_{n+1}) - B_2(t_n)) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
V^{k+1} = V(0) & + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} h(T^k, I^k, V^k, t_k) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} \sigma_3 V^k (B_3(t_{k+1}) - B_3(t_k)) \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} h(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha(k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha(k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)AB(\alpha)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} h(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2hf(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} \\ -(k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
& + \frac{\alpha(\Delta t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{n=0}^k \sigma_3 V^n (B_3(t_{n+1}) - B_3(t_n)) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

şeklinde olur.

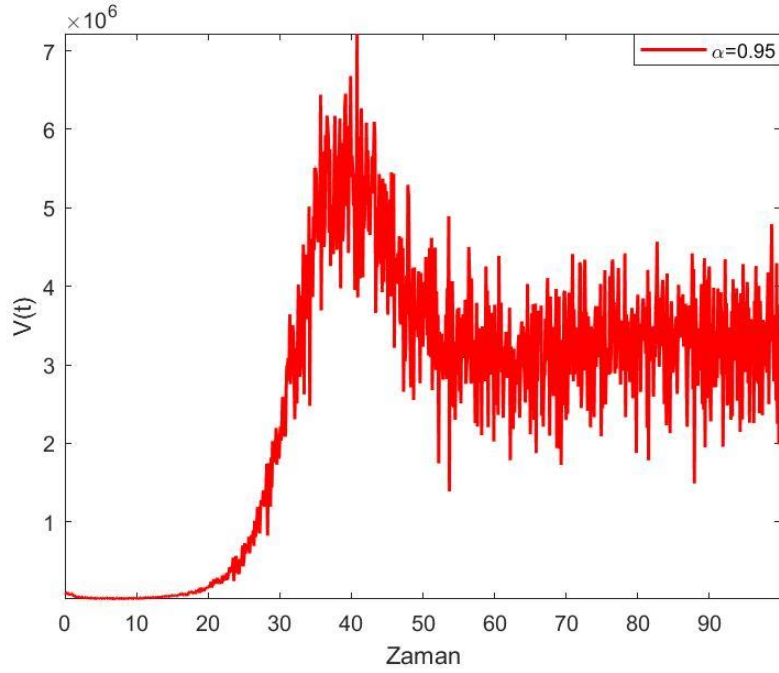
Hepatit C salgın modelinin Atangana-Baleanu kesirli türevinin çözümü için stokastik nümerik simülasyonları Şekil 4.19-4.21’de verilmiştir.



Şekil 4.19. $\alpha = 0,95$ ve $\sigma = 0,09$ için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu



Şekil 4.20. $\alpha = 0,95$ ve $\sigma = 0,1$ için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu



Şekil 4.21. $\alpha = 0,95$ ve $\sigma = 0,15$ için serbest virüslerin sayısının Atangana-Baleanu kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu

(4.64)'de verilen stokastik modeli Caputo kesirli türeviyle sade şekilde yazarsak

$${}_0^C D_t^\alpha T(t) = f(T, I, V) + \sigma_1 T dB_1(t)$$

$${}_0^C D_t^\alpha I(t) = g(T, I, V) + \sigma_2 I dB_2(t)$$

$${}_0^C D_t^\alpha V(t) = h(T, I, V) + \sigma_3 V dB_3(t)$$

(4.72)

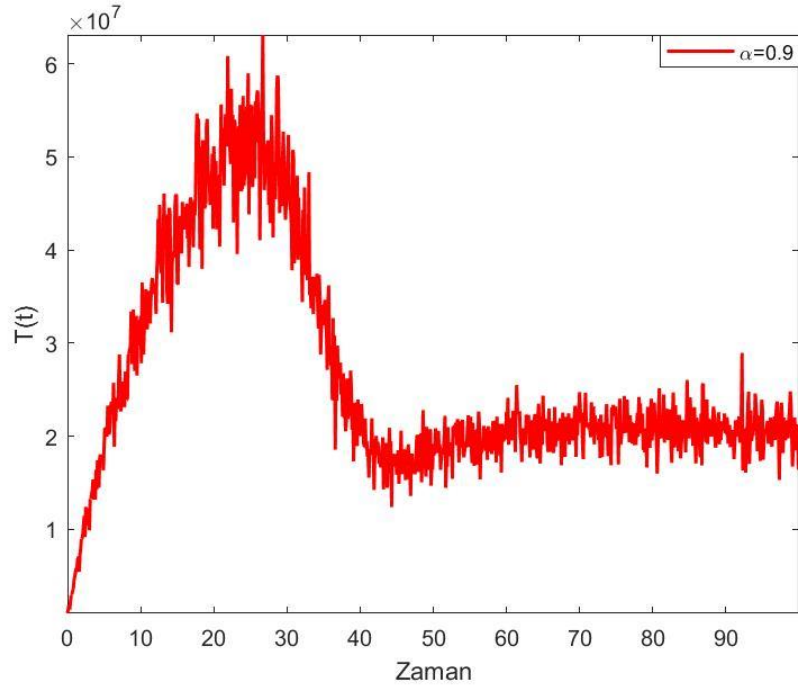
olur. Verilen stokastik modelin Caputo kesirli türevinin Newton polinomu kullanılarak elde edilen nümerik algoritması

$$\begin{aligned} T^{k+1} = & T(0) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{n=2}^k f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\ & + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} f(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\ & + \frac{(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha + 3)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} f(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2f(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +f(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} - (k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

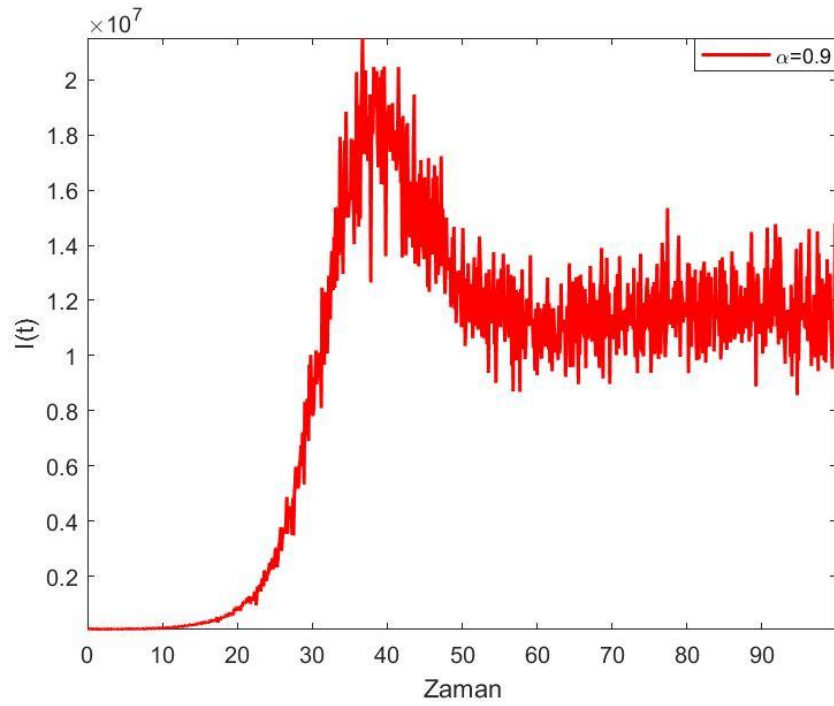
$$\begin{aligned}
& + \frac{(\Delta t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=0}^k \sigma_1 T^n (B_1(t_{n+1}) - B_1(t_n)) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
I^{k+1} = I(0) & + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=2}^k g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
& + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} g(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} g(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2g(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +g(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
& \times \left[(k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} - (k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \right] \\
& + \frac{(\Delta t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=0}^k \sigma_2 I^n (B_2(t_{n+1}) - B_2(t_n)) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
V^{k+1} = V(0) & + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=2}^k h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix} \\
& + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} h(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ -h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha (k-n+3+2\alpha) \\ -(k-n)^\alpha (k-n+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{(\Delta t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)} \sum_{n=2}^k \begin{bmatrix} h(T^n, I^n, V^n, t_n) \\ -2h(T^{n-1}, I^{n-1}, V^{n-1}, t_{n-1}) \\ +h(T^{n-2}, I^{n-2}, V^{n-2}, t_{n-2}) \end{bmatrix} \\
& \times \left[(k-n+1)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(3\alpha+10)(k-n) \\ +2\alpha^2+9\alpha+12 \end{bmatrix} - (k-n)^\alpha \begin{bmatrix} 2(k-n)^2 \\ +(5\alpha+10)(k-n) \\ +6\alpha^2+18\alpha+12 \end{bmatrix} \right] \\
& + \frac{(\Delta t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=0}^k \sigma_3 V^n (B_3(t_{n+1}) - B_3(t_n)) \begin{bmatrix} (k-n+1)^\alpha \\ -(k-n)^\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

şeklinde olur.

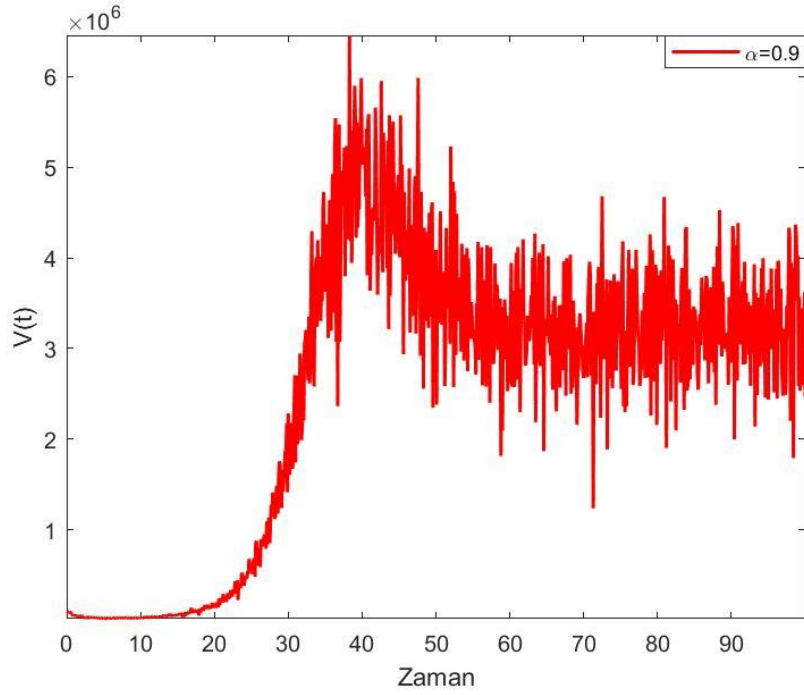
Hepatit C salgın modelinin Caputo kesirli türevinin çözümü için stokastik nümerik simülasyonları Şekil 4.22-4.24'te verilmiştir.



Şekil 4.22. $\alpha = 0,9$ ve $\sigma = 0,09$ için enfekte olmamış hücrelerin sayısının Caputo kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu



Şekil 4.23. $\alpha = 0,9$ ve $\sigma = 0,1$ için enfekte olmuş hücrelerin sayısının Caputo kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu



Şekil 4.24. $\alpha = 0,9$ ve $\sigma = 0,1$ için serbest virüslerin sayısının Caputo kesirli türevli stokastik nümerik simülasyonu

4.2.6. Parçalı türeve sahip Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri

Şimdi Hepatit C modelini parçalı türev kavramını kullanarak yeniden modelleyelim:

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y), & 0 < t < t_0 \\ {}^{CD}_{t_0} D_t^\alpha Y(t) = F(t, Y), & t_0 < t < t_1 \\ {}^{AB}_{t_1} D_t^\alpha Y(t) = F(t, Y), & t_1 < t < T \end{cases} \quad (4.74)$$

Burada,

$$Y = \begin{bmatrix} T \\ I \\ V \end{bmatrix} \text{ ve } F(t, Y) = \begin{bmatrix} \Lambda - \delta_1 T - (1 - \eta)\beta VT \\ (1 - \eta)\beta VT - \delta_2 I \\ (1 - \epsilon)kI - cV \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

şeklinde olur. $0 < t < t_0$ için Newton polinomuna dayalı nümerik metot aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
Y^{n+1} = Y(0) &+ \sum_{k=2}^{n_1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[F(t_{k-2}, Y^{k-2}) \right. \\
&+ \left. \frac{F(t_{k-1}, Y^{k-1}) - F(t_{k-2}, Y^{k-2})}{h} (s - t_{k-2}) \right] ds \\
&+ \sum_{k=2}^{n_1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{F(t_k, Y^k) - 2F(t_{k-1}, Y^{k-1}) + F(t_{k-2}, Y^{k-2})}{2h^2} (s - t_{k-2})(s - t_{k-1}) \right] ds.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}
Y^{n+1} = Y(0) &+ h \sum_{k=2}^{n_1} F(t_{k-2}, y^{k-2}) + \sum_{k=2}^{n_1} \left(F(t_{k-1}, Y^{k-1}) - F(t_{k-2}, Y^{k-2}) \right) \frac{5h}{2} \\
&+ \sum_{k=2}^{n_1} \left(F(t_k, Y^k) - 2F(t_{k-1}, Y^{k-1}) + F(t_{k-2}, Y^{k-2}) \right) \frac{23h}{12}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$t_0 < t < t_1$ için,

$$\begin{aligned}
Y^{n+1} = Y(t_0) &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t_{k-2}, Y^{k-2}) (t_{n+1} - s)^{\alpha-1} ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [F(t_{k-1}, Y^{k-1}) - F(t_{k-2}, Y^{k-2})] (s - t_{k-2}) (t_{n+1} - s)^{\alpha-1} ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{F(t_k, Y^k) - 2F(t_{k-1}, Y^{k-1}) + F(t_{k-2}, Y^{k-2})}{2} \right] \\
&\quad \times (s - t_{k-2})(s - t_{k-1})(t_{n+1} - s)^{\alpha-1} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y^{n+1} = Y(t_0) &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} F(t_{k-2}, Y^{k-2}) ((n_2 - k + 1)^\alpha - (n_2 - k)^\alpha) \\
&+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} [F(t_{k-1}, Y^{k-1}) - f(t_{k-2}, Y^{k-2})] \\
&\quad \times \left[\begin{aligned} &(n_2 - k + 1)^\alpha (n_2 - k + 3 + 2\alpha) \\ &- (n_2 - k)^\alpha (n_2 - k + 3 + 3\alpha) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{\left(F(t_k, Y^k) - 2F(t_{k-1}, Y^{k-1}) + F(t_{k-2}, Y^{k-2})\right)}{2} \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (n_2 - k + 1)^\alpha \left[\begin{matrix} 2(n_2 - k)^2 + (3\alpha + 10)(n_2 - k) \\ + 2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \end{matrix} \right] \\ -(n_2 - k)^\alpha \left[\begin{matrix} 2(n_2 - k)^2 + (5\alpha + 10)(n_2 - k) \\ + 6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \end{matrix} \right] \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

olur.

$t_1 < t < T$ için,

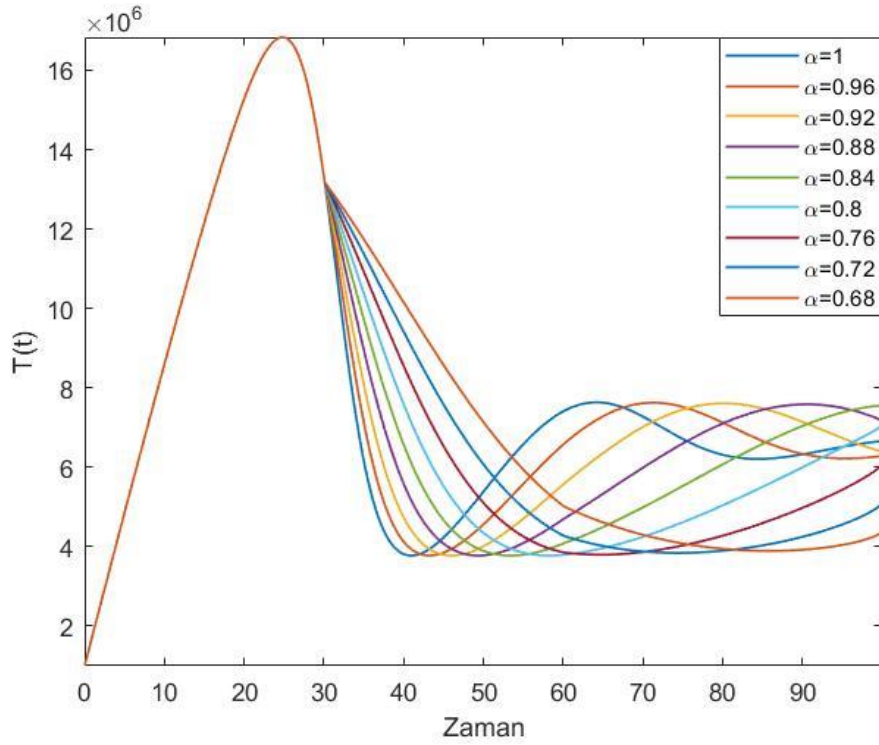
$$\begin{aligned}
Y^{n+1} &= Y(t_1) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} F(t_k, Y^k) \\
& \quad + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_2+1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t_{k-2}, Y^{k-2}) (t-s)^{\alpha-1} ds \\
& \quad + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_2+1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} [F(t_{k-1}, Y^{k-1}) - F(t_{k-2}, Y^{k-2})] (s-t_{k-2})(t-s)^{\alpha-1} ds \\
& \quad + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_2+1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\left(F(t_k, Y^k) - 2F(t_{k-1}, Y^{k-1}) + F(t_{k-2}, Y^{k-2})\right)}{2} \\
& \quad \quad \times (s-t_{k-2})(s-t_{k-1})(t-s)^{\alpha-1} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y^{n+1} &= Y(t_1) + \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} F(t_k, Y^k) \\
& \quad + \frac{\alpha h^\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=n_2+1}^n F(t_{k-2}, Y^{k-2}) \begin{bmatrix} (n-k+1)^\alpha \\ -(n-k)^\alpha \end{bmatrix} \\
& \quad + \frac{\alpha h^\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha+2)} \sum_{k=n_2+1}^n [F(t_{k-1}, Y^{k-1}) - F(t_{k-2}, Y^{k-2})] \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (n-k+1)^\alpha (n-k+3+2\alpha) \\ -(n-k)^\alpha (n-k+3+3\alpha) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

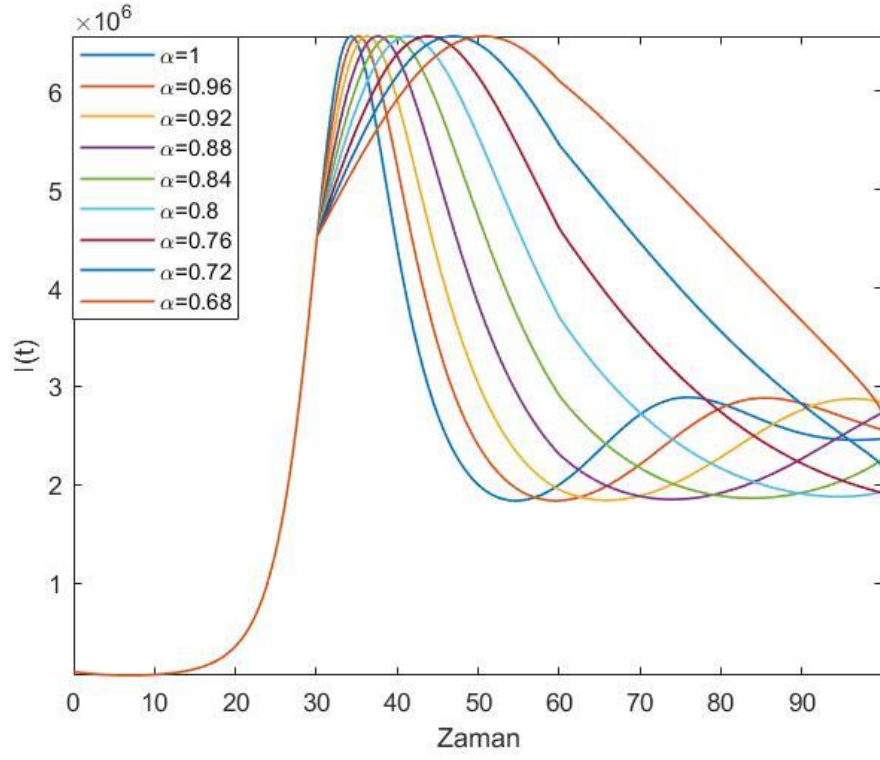
$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha h^\alpha}{2AB(\alpha)\Gamma(\alpha+3)} \sum_{k=n_2+1}^n \left(F(t_k, Y^k) - 2F(t_{k-1}, Y^{k-1}) + F(t_{k-2}, Y^{k-2}) \right) \\
& \times \begin{bmatrix} (n-k+1)^\alpha \left[2(n-k)^2 + (3\alpha+10)(n-k) \right] \\ + 2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \\ -(n-k)^\alpha \left[2(n-k)^2 + (5\alpha+10)(n-k) \right] \\ + 6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.79}$$

şeklinde olur.

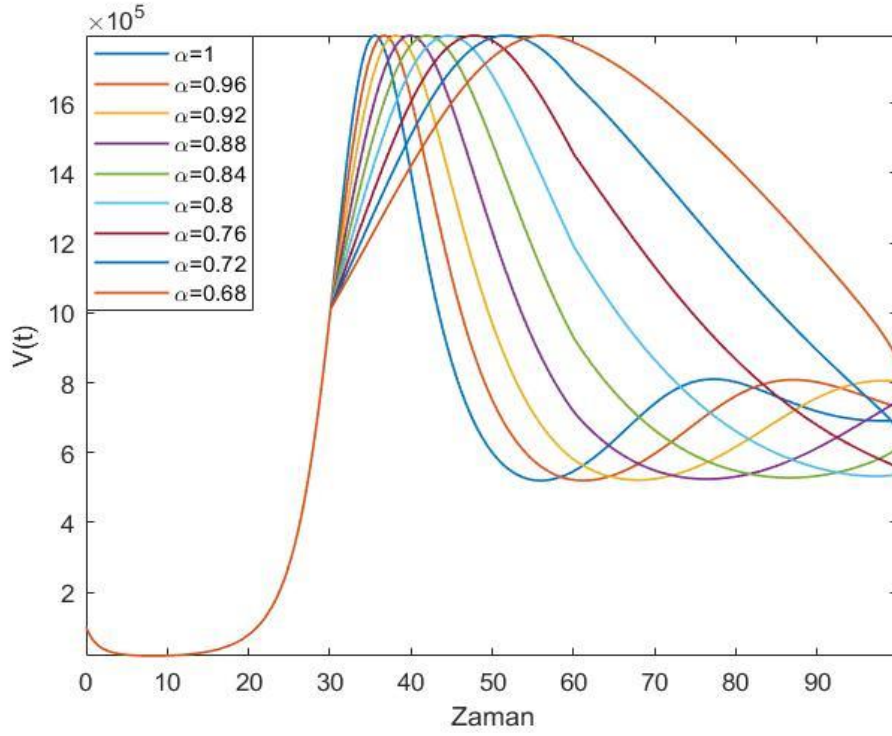
$\alpha = 0,9$ için parçalı türevin simülasyonları Şekil 4.25-4.27’de verilmiştir.



Şekil 4.25. Enfekte olmamış hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu



Şekil 4.26. Enfekte olmuş hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu



Şekil 4.27. Serbest virüslerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu

4.2.7. Parçalı ve stokastik türeve sahip Hepatit C modeli ve nümerik çözümleri

Şimdi Hepatit C modelini stokastik ve kesirli türev kavramını kullanarak parçalı türev ile yeniden modelleyelim:

$$\begin{cases} dY(t) = F(t, Y)dt + \sigma_i Y_i dB_i(t) & , \quad 0 < t < t_0 \\ {}^C D_t^\alpha Y(t) = F(t, Y) & , \quad t_0 < t < t_1 \\ {}^{AB} D_t^\alpha Y(t) = F(t, Y) + \sigma_i Y_i dB_i(t) & , \quad t_1 < t < T \end{cases} \quad (4.80)$$

Burada $i = 1, \dots, 3$ ve

$$Y = \begin{bmatrix} T \\ I \\ V \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

olmak üzere,

$$F(t, Y) = \begin{bmatrix} (\Lambda - \delta_1 T - (1 - \eta)\beta VT) \\ ((1 - \eta)\beta VT - \delta_2 I) \\ ((1 - \epsilon)kI - cV) \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

şeklinde olur. $0 < t < t_0$ için Newton polinomuna dayalı nümerik metot aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} Y^{n+1} = Y(0) + \sum_{k_1=2}^{n_1} \left[\frac{5h}{12} F_i(t_{k-2}, Y^{k-2}) - \frac{4h}{3} F_i(t_{k-1}, Y^{k-1}) + \frac{23h}{12} F_i(t_k, Y^k) \right] \\ + \sigma_i Y_i(c_n) [B_i(t_{n+1}) - B_i(t_n)]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

$t_0 < t < t_1$ için,

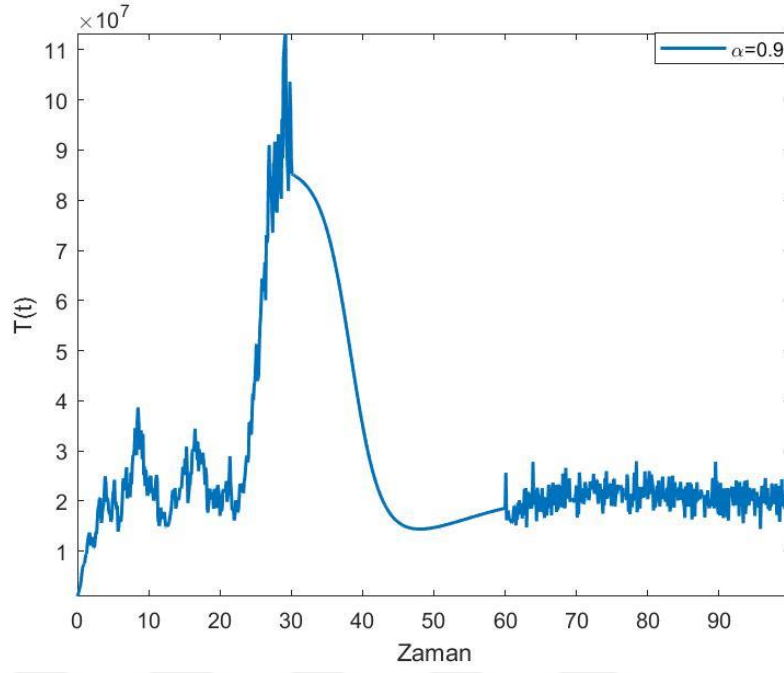
$$\begin{aligned} Y^{n+1} = Y(t_0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+1)} \sum_{k_2=n_1+1}^{n_2} F_i(t_{k_2-2}, Y_{k_2-2}) [(n_2 - k_2 + 1)^\alpha - (n_2 - k_2)^\alpha] \\ + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+2)} \sum_{k_2=n_1+2}^{n_2} [F_i(t_{k_2-1}, Y_{k_2-1}) - F_i(t_{k_2-2}, Y_{k_2-2})] \\ \times \left[\begin{aligned} & (n_2 - k_2 + 1)^\alpha (n_2 - k_2 + 3 + 2\alpha) \\ & - (n_2 - k_2)^\alpha (n_2 - k_2 + 3 + 3\alpha) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)} \sum_{k_2=n_1+2}^{n_2} [F_i(t_{k_2}, Y_{k_2}) - 2F_i(t_{k_2-1}, Y_{k_2-1}) + F_i(t_{k_2-2}, Y_{k_2-2})] \\
& \quad \times \left[\begin{aligned} & (n_2 - k_2 + 1)^\alpha \left(\begin{aligned} & 2(n_2 - k_2)^2 + (3\alpha + 10)(n_2 - k_2) \\ & + 2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \end{aligned} \right) \\ & - (n_2 - k_2)^\alpha \left(\begin{aligned} & 2(n_2 - k_2)^2 + (5\alpha + 10)(n_2 - k_2) \\ & + 6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned} \tag{4.84}$$

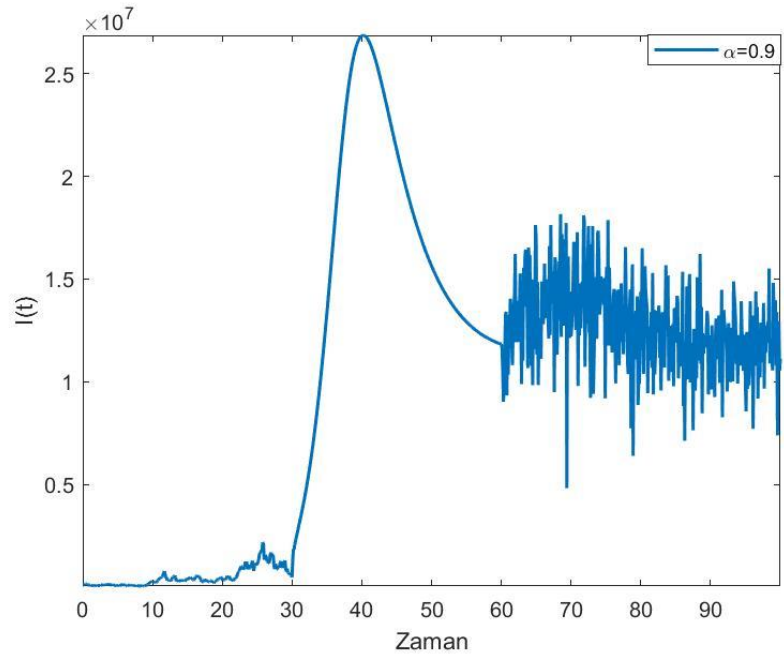
$t_1 < t < T$ için,

$$\begin{aligned}
Y^{n+1} &= Y(t_1) + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} F_i(t_{n_3}, Y_{n_3}) \\
& + \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{k_3=n_2+2}^{n_3} F_i(t_{k_3-2}, Y_{k_3-2}) \left[\begin{aligned} & (n_3 - k_3 + 1)^\alpha \\ & - (n_3 - k_3)^\alpha \end{aligned} \right] \\
& + \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{k_3=n_2+2}^{n_3} [F_i(t_{k_3-1}, Y_{k_3-1}) - F_i(t_{k_3-2}, Y_{k_3-2})] \\
& \quad \times \left[\begin{aligned} & (k - n + 1)^\alpha (k - n + 3 + 2\alpha) \\ & - (k - n)^\alpha (k - n + 3 + 3\alpha) \end{aligned} \right] \\
& + \frac{\alpha h^\alpha}{2\Gamma(\alpha+3)AB(\alpha)} \sum_{k_3=n_2+2}^{n_3} \left[\begin{aligned} & F_i(t_{k_3}, Y_{k_3}) - 2F_i(t_{k_3-1}, Y_{k_3-1}) \\ & + F_i(t_{k_3-2}, Y_{k_3-2}) \end{aligned} \right] \\
& \quad \times \left[\begin{aligned} & (n_3 - k_3 + 1)^\alpha \left(\begin{aligned} & 2(n_3 - k_3)^2 + (3\alpha + 10)(n_3 - k_3) \\ & + 2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \end{aligned} \right) \\ & - (n_3 - k_3)^\alpha \left(\begin{aligned} & 2(n_3 - k_3)^2 + (5\alpha + 10)(n_3 - k_3) \\ & + 6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] \\
& + \frac{\alpha h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)AB(\alpha)} \sum_{k_3=n_2+2}^{n_3} \sigma_i Y_i(c_{k_3}) (B_i(t_{k_3}) - B_i(t_{k_3})) \left[\begin{aligned} & (n_3 - k_3 + 1)^\alpha \\ & - (n_3 - k_3)^\alpha \end{aligned} \right].
\end{aligned} \tag{4.85}$$

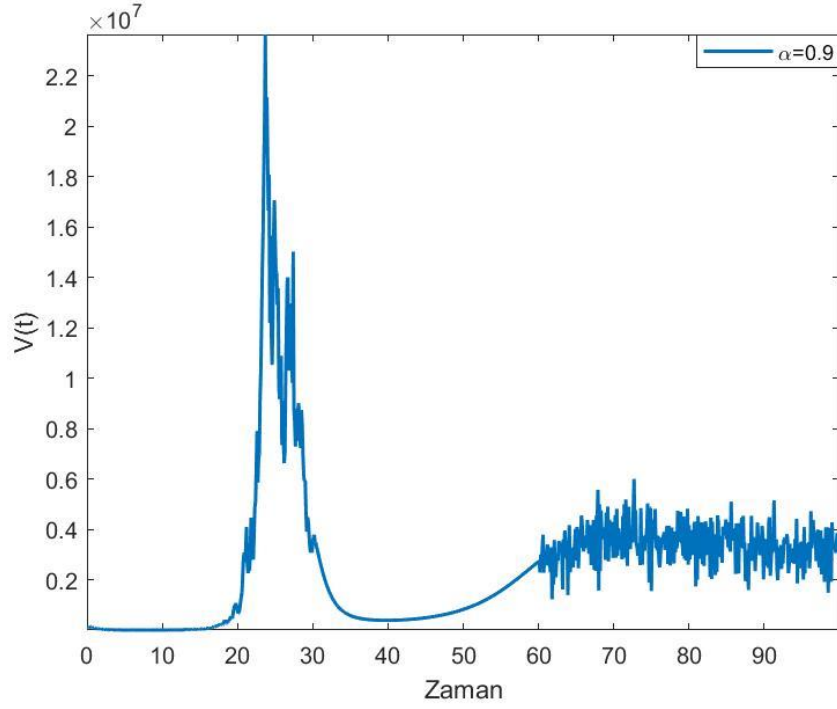
$\alpha = 0,9$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 0,15$ ve $\sigma_3 = 0,18$ değerleri için parçalı ve stokastik türevlere sahip Hepatit C modeli için nümerik simülasyonlar Şekil 4.28-4.30'da verilmiştir.



Şekil 4.28. $\alpha = 0,9$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 0,15$; $\sigma_3 = 0,18$ değerleri için parçalı türeve sahip enfekte olmamış hücrelerin sayısını gösteren simülasyon



Şekil 4.29. $\alpha = 0,9$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 0,15$; $\sigma_3 = 0,18$ değerleri için parçalı türeve sahip enfekte olmuş hücrelerin sayısını gösteren simülasyon



Şekil 4.30. $\alpha = 0,9$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 0,15$; $\sigma_3 = 0,18$ değerleri için parçalı türeve sahip serbest virüslerin sayısını gösteren simülasyon

Şimdi Hepatit C modelini $0 < t < t_0$ aralığında stokastik ve $t_0 < t < T$ aralığında deterministik olarak ele alalım. Söz konusu model

$$\begin{cases} dY(t) = F(t, Y)dt + \sigma_i Y_i dB_i(t) & , \quad 0 < t < t_0 \\ {}^C D_t^\alpha Y(t) = G(t, Y) & , \quad t_0 < t < T \end{cases} \quad (4.86)$$

ile temsil edilir. $0 < t < t_0$ için, nümerik çözüm aşağıdaki şekildedir:

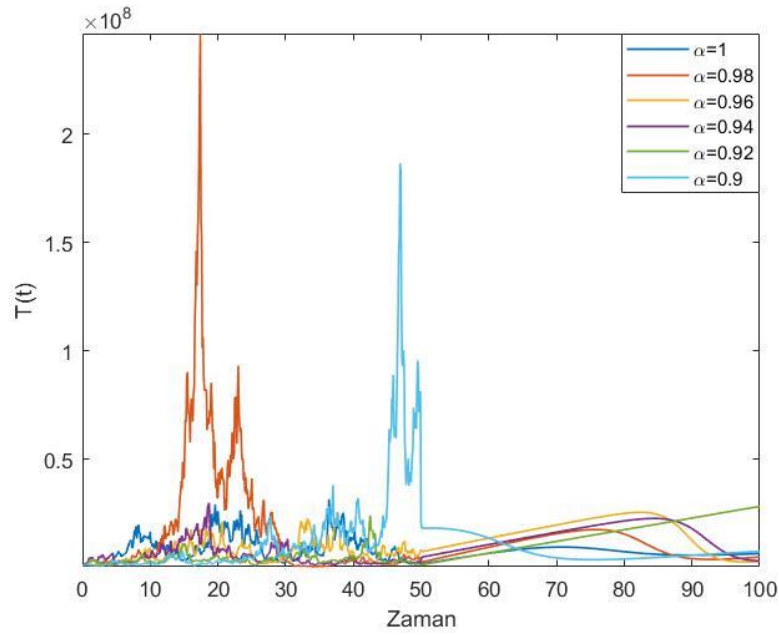
$$\begin{aligned} Y^{n+1} = Y(0) + \sum_{k_1=2}^{n_1} \left[\frac{5h}{12} F_i(t_{k-2}, Y^{k-2}) - \frac{4h}{3} F_i(t_{k-1}, Y^{k-1}) + \frac{23h}{12} F_i(t_k, Y^k) \right] \\ + \sigma_i Y_i(c_n) [(B_i(t_{n+1}) - B_i(t_n))]. \end{aligned} \quad (4.87)$$

$t_0 < t < t_1$ için,

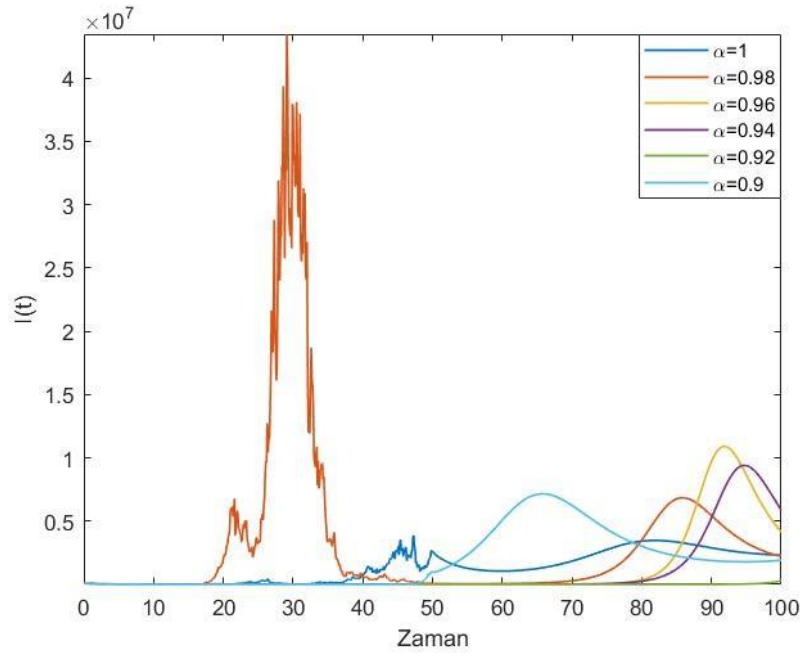
$$\begin{aligned} Y^{n+1} = Y(t_0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+1)} \sum_{k_2=n_1+1}^n F_i(t_{k_2-2}, Y_{k_2-2}) [(n - k_2 + 1)^\alpha - (n - k_2)^\alpha] \\ + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+2)} \sum_{k_2=n_1+2}^n [F_i(t_{k_2-1}, Y_{k_2-1}) - F_i(t_{k_2-2}, Y_{k_2-2})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} (n - k_2 + 1)^\alpha (n - k_2 + 3 + 2\alpha) \\ -(n - k_2)^\alpha (n - k_2 + 3 + 3\alpha) \end{bmatrix} \\
& + \frac{h^\alpha}{2\Gamma(a + 3)} \sum_{k_2=n_1+2}^n [F_i(t_{k_2}, Y_{k_2}) - 2F_i(t_{k_2-1}, Y_{k_2-1}) + F_i(t_{k_2-2}, Y_{k_2-2})] \\
& \times \begin{bmatrix} (n - k_2 + 1)^\alpha \left(\frac{2(n - k_2)^2 + (3\alpha + 10)(n - k_2)}{+2\alpha^2 + 9\alpha + 12} \right) \\ -(n - k_2)^\alpha \left(\frac{2(n - k_2)^2 + (5\alpha + 10)(n - k_2)}{+6\alpha^2 + 18\alpha + 12} \right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

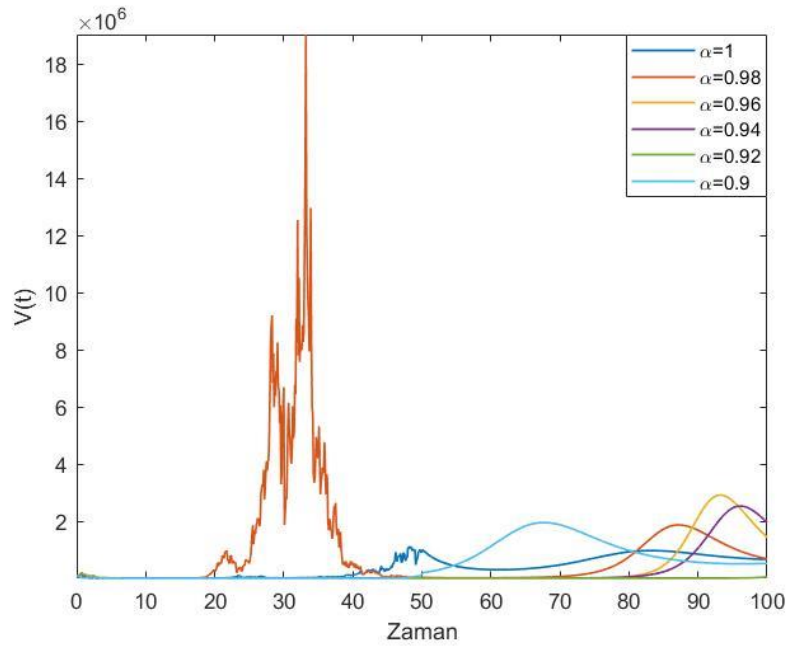
$\sigma_1 = 0,18$; $\sigma_2 = 0,16$ ve $\sigma_3 = 0,21$ değerleri için parçalı ve stokastik türevlere sahip Hepatit C modeli için nümerik simülasyonlar Şekil 4.31-4.33'te verilmiştir.



Şekil 4.31. Enfekte olmamış hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu



Şekil 4.32. Enfekte olmuş hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu



Şekil 4.33. Serbest virüslerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu

Son olarak, Hepatit C modelini $0 < t < t_0$ aralığında deterministik ve $t_0 < t < T$ aralığında stokastik olarak ele alalım. Söz konusu model aşağıdaki sistem ile hükmedilir:

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y) & , \quad 0 < t < t_0 \\ {}^c D_t^\alpha Y(t) = F(t, Y) + \sigma_i Y_i dB_i(t) & , \quad t_0 < t < T \end{cases}$$

(4.89)

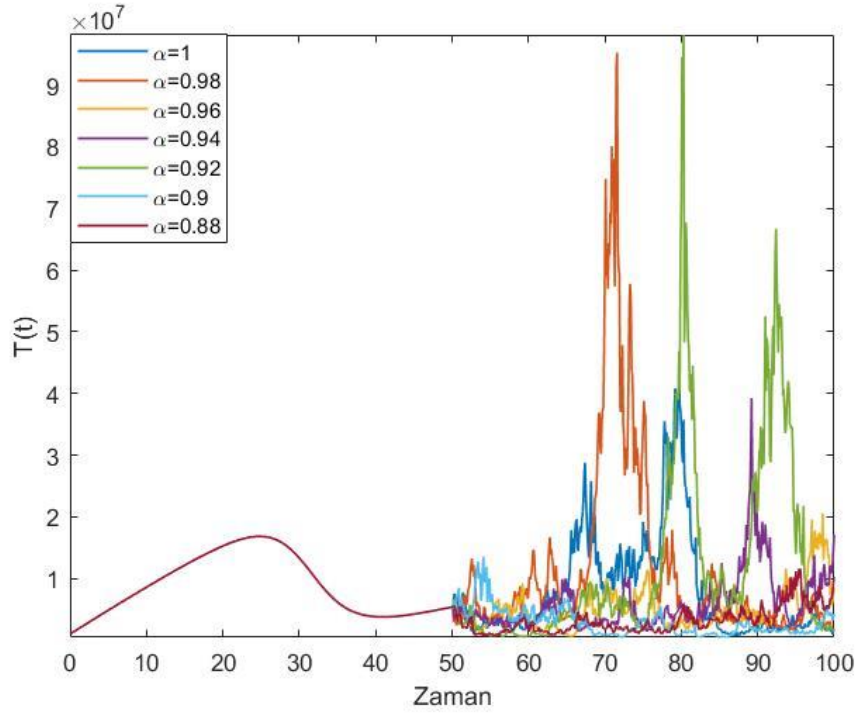
$0 < t < t_0$ için, genel hali aşağıdaki şekildedir:

$$Y^{n+1} = Y(0) + \sum_{k_1=2}^{n_1} \left[\frac{5h}{12} F_i(t_{k-2}, Y^{k-2}) - \frac{4h}{3} F_i(t_{k-1}, Y^{k-1}) + \frac{23h}{12} F_i(t_k, Y^k) \right]. \quad (4.90)$$

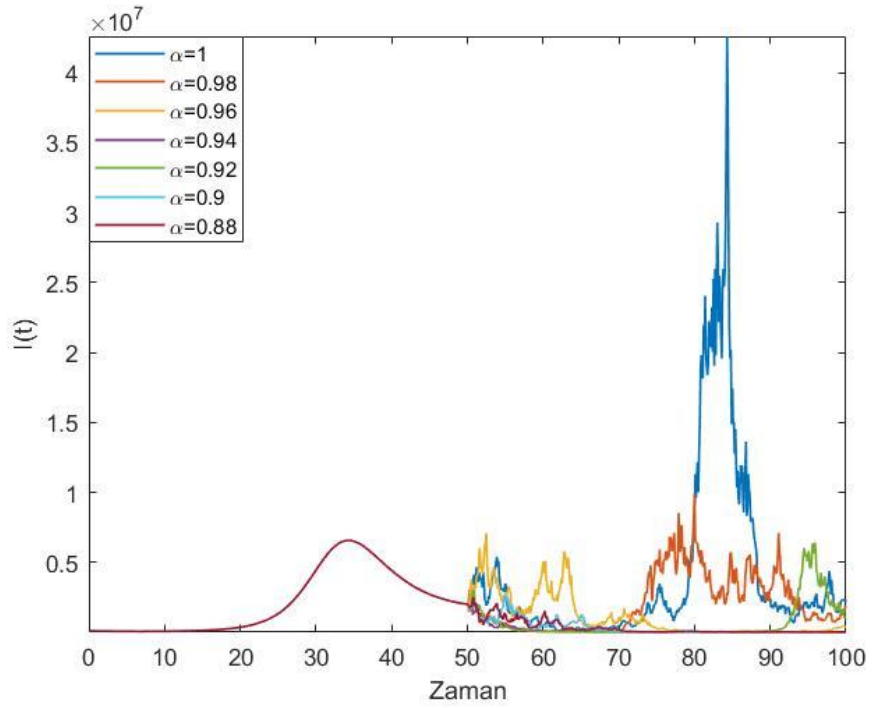
$t_0 < t < t_1$ için,

$$\begin{aligned} Y^{n+1} = & Y(t_0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+1)} \sum_{k_2=n_1+1}^{n_2} F_i(t_{k_2-2}, Y_{k_2-2}) [(n-k_2+1)^\alpha - (n-k_2)^\alpha] \\ & + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+2)} \sum_{k_2=n_1+2}^n [F_i(t_{k_2-1}, Y_{k_2-1}) - F_i(t_{k_2-2}, Y_{k_2-2})] \\ & \quad \times \begin{bmatrix} (n-k_2+1)^\alpha (n-k_2+3+2\alpha) \\ -(n-k_2)^\alpha (n-k_2+3+3\alpha) \end{bmatrix} \\ & + \frac{h^\alpha}{2\Gamma(a+3)} \sum_{k_2=n_1+2}^n [F_i(t_{k_2}, Y_{k_2}) - 2F_i(t_{k_2-1}, Y_{k_2-1}) + F_i(t_{k_2-2}, Y_{k_2-2})] \\ & \quad \times \begin{bmatrix} (n-k_2+1)^\alpha \left(2(n-k_2)^2 + (3\alpha+10)(n-k_2) \right. \\ \quad \left. + 2\alpha^2 + 9\alpha + 12 \right) \\ -(n-k_2)^\alpha \left(2(n-k_2)^2 + (5\alpha+10)(n-k_2) \right. \\ \quad \left. + 6\alpha^2 + 18\alpha + 12 \right) \end{bmatrix} \\ & + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+1)} \sum_{k_2=n_1+2}^{n_3} \sigma_i Y_i(c_{k_2}) (B_i(t_{k_2}) - B_i(t_{k_2})) \begin{bmatrix} (n-k_2+1)^\alpha \\ -(n-k_2)^\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.91)$$

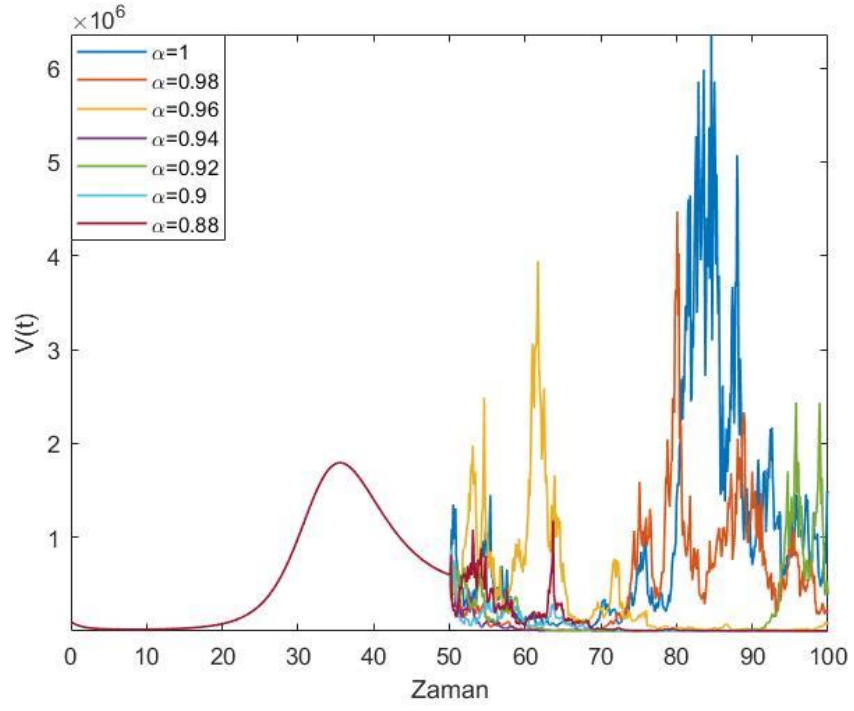
$\sigma_1 = 0,18$; $\sigma_2 = 0,16$ ve $\sigma_3 = 0,21$ değerleri için parçalı ve stokastik türevlere sahip Hepatit C modeli için nümerik simülasyonlar Şekil 4.34-4.36'da verilmiştir.



Şekil 4.34. Enfekte olmamış hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu



Şekil 4.35. Enfekte olmuş hücrelerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu



Şekil 4.36. Serbest virüslerin sayısını gösteren parçalı türev simülasyonu

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Leibniz'in L'Hospital'e sorduğu bir soru (Leibniz, 1859; Baleanu ve Fernandez, 2019) ile ilk temelleri atılan kesirli analiz teorisinde, Riemann-Liouville, Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana- Baleanu gibi birçok kesirli türev tanımının ortaya çıkmasına ve araştırmacıların literatürde var olan matematiksel modelleri bu türevler ile yeniden modifiye edip modellerin farklı davranışlarının incelenmesine olanak sağlamıştır. Farklı çekirdekler kullanan bu türevler farklı süreçler ortaya çıkmış ve bu türevlerin kullanıldığı modeller geçmiş (memory), solan geçmiş (fading memory), çaprazlama (crossover) gibi davranışlar gözlenmiştir. Bununla birlikte, böyle diferansiyel denklemleri analitik olarak çözmek zor olduğundan, nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulduğunu biliyoruz. Bu yüzden kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için Newton polinomuna dayalı bir nümerik metottan faydalanılmıştır. Sonraki bölümde, Lestari ve ark. (2022) tarafından tanıtılan bir Hepatit C modeli, tamsayı ve tamsayı olmayan mertebeden türevler ile ele alınmıştır. Deterministik ve stokastik yaklaşımlar ele alınan ilgili modelin çözümü için Newton polinomlu nümerik metot sunulmuştur. Deterministik model için denge noktaları, temel çoğalma sayısı, çözümlerin pozitifliği araştırılırken, stokastik Hepatit C modelinin çözümünün varlık-tekliliğinin sağlandığı koşullar elde edilmiş ve ayrıca bu model için nümerik algoritma sunulmuştur. Daha sonra Hepatit C modeli, deterministik ve stokastik süreci birlikte ele almayı öneren ve Atangana ve ark. (2021b) tarafından tanıtılan parçalı türevler kullanılarak yeniden ele alınmıştır. Bu kavram tanıtılmadan önce özellikle deterministik-stokastik modellerin birlikte yer aldığı modellerin literatürde olmaması, bu operatörler sınıfını diğer operatörlerden farklı kılmış ve ilgileri üzerinde toplamıştır. Böylece bu tezde literatüre önemli bir katkı olarak hem deterministik hem de stokastik bir sürecin olabileceği senaryoları farklı mertebeden kesirli türevler için göz önüne alınmıştır. Modelin bu senaryoları için grafiksel gösterimler simüle edilmiştir.

Şekiller incelendiğinde, parçalı türev kavramının modellemede literatürde yer alan operatörlere nazaran farklı bir bakış açısı getirdiği ve modellemede gerçekliğe daha fazla yaklaşıldığı durumlar gözlenmiştir. Örneğin, farklı kalıpları sunulduğu simülasyonlardan deterministik modellerin daha çok toplamsal (accumulative) datayı, stokastik modellerin anlık dataları ve deterministik-stokastik modellerin ise belirli bir zaman aralığında toplamsal (accumulative) datayı, diğer zaman aralığında anlık dataları modellemede başarılı olabileceği sonucuna varılabilir.

6. KAYNAKLAR

- Atangana, A., 2021. Mathematical model of survival of fractional calculus, critics and their impact: How singular is our world?, *Advances in Difference Equations*, 2021 (1), 1-59.
- Atangana, A. and Baleanu, D., 2016. New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model, *Thermal Science*, 20 (2), 763-769.
- Atangana, A. and Hammouch, Z. 2019. Fractional calculus with power law: The cradle of our ancestors, *The European Physical Journal Plus*, 134 (9), 429.
- Atangana, A. and İğret Araz, S., 2021a. New numerical scheme with Newton polynomial: Theory, methods and applications, *Elsevier, Academic press*, ISBN:9780323854481.
- Atangana, A. and İğret Araz, S., 2021b. New concept in calculus: Piecewise differential and integral operators, *Chaos, Solitons and Fractals*, 145. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110638>.
- Atangana, A. and İğret Araz S., 2022a. Rhythmic behaviors of the human heart with piecewise derivative, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 19 (3), 3091-3109.
- Atangana, A. and İğret Araz, S., 2022b. Piecewise derivatives versus short memory concept: Analysis and application, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 19 (8).
- Atangana, A. and İğret Araz, S., 2022c. Fractional Stochastic Differential Equations Applications To Covid-19 Modeling, Springer.
- Baleanu, D. and Fernandez, A., 2019. On fractional operators and their classifications, *Mathematics*, 7 (9), 830.
- Bell, W.W., 2004. Special functions for scientists and engineers, Courier Corporation.
- Boyce, W.E. and DiPrima, R.C., 2012. Solutions For Elementary Differential Equations And Boundary Value Problem, John Wiley and Sons, USA.
- Caputo, M. and Fabrizio, M., 2015. A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, 1 (2), 73-85.
- Choo, Q.L., Kuo, G., Weiner, A.J., Overby, L.R., Bradley, D.W., Houghton, M., 1989. Isolation of a cDNA clone derived from a blood-borne non-A, non-B viral hepatitis genome, *Science*, 244, 359–362.
- Collaborators, H., 2017. Global prevalence and genotype distribution of hepatitis C virus infection in 2015: A modelling study, *Lancet Gastroenterol Hepatol*, 2, 161-176.
- Dayan, F., Ahmed, N., Bariq, A., Akgül, A., Jawaz, M., Rafiq, M., Raza, A., 2023. Computational study of a co-infection model of HIV/AIDS and hepatitis C virus models, *Scientific Reports*, 13 (1), 21938.

- Denk, E., 2022. Tümör-Virüs İlişisini Ve Tümörün Viroterapi Yöntemi İle Tedavisini İçeren Kesirli Tümör Büyüme Modeli, Yüksek Lisans Tezi, *Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Siirt, 9-12.
- Dietz, C. and Maasoumy, B., 2022. Direct-acting antiviral agents for hepatitis C virus infection-From drug discovery to successful implementation in clinical practice, *Viruses*, 14 (6), 1325.
- Driessche, P.V. and Watmough, J., 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical Biosciences*, 180 (1-2), 29-48.
- Duncan, J.D., Urbanowicz, R.A., Tarr, A.W., Ball, J.K., 2020. Hepatitis C virus vaccine: Vhallenges and prospects, *Vaccines*, 8 (1), 90.
- Feinstone, S.M., Kapikian, A.Z., Purcell, R.H., Alter, H.J., Holland, P.V., 1975. Transfusion-associated hepatitis not due to viral hepatitis type A or B, *New England Journal of Medicine*, 292 (15), 767-770.
- Ghoshdastidar, D. and Dukkipati, A., 2013. On power-law kernels, corresponding reproducing kernel Hilbert space and applications, *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 27 (1), 365-371.
- Gorenflo, R. and Mainardi, F., 1998. Fractional calculus and stable probability distributions, *Archives of Mechanics*, 50 (3), 377-388.
- Klebaner, F.C., 2006. Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial College Press, Singapore.
- Kuo, G., Choo, Q.L., Alter, H.J., Gitnick, G.L., Redeker, A.G., Purcell, R.H., Miyamura, T., Dienstag, J.L., Alter, M.J., Stevens, C.E., Tegtmeier, G.E., Bonino, M., Lee, W.S., Kuo, C., Berger, K., Shuster, J.R., Overby, L.R., Bradley, D.W., Houghton, M., 1989. An assay for circulating antibodies to a major etiologic virus of human non-A, non-B hepatitis, *Science*, 244, 362-366.
- Larney, S., Peacock, A., Leung, J., Colledge, S., Hickman, M., Vickerman, P., Grebely, J., Dumchev, K.V., Griffiths, P., Hines, L., Cunningham E.B., Mattick R.P., Lynskey M., Marsden J., Strang J., Degenhardt L., 2017. Global, regional, and country-level coverage of interventions to prevent and manage HIV and hepatitis C among people who inject drugs: A systematic review, *The Lancet Global Health*, 5, 1208-1220.
- Lestari, D., Megawati, N. Y., Susyanto, N., Adi-Kusumo, F., 2022. Qualitative behaviour of a stochastic hepatitis C epidemic model in cellular level, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 19, 1515-1535.
- Lestari, D., Adi-Kusumo, F., Megawati, N. Y., Susyanto, N., 2023. A minimum principle for stochastic control of hepatitis C epidemic model, *Boundary Value Problems*, 2023 (1), 1-12.
- Leibniz, G.W., 1859. Mathematische Schriften: aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover. Briefwechsel zwischen Leibniz, Wallis, Varignon, Guido Grandi, Zendrini, Hermann und Freiherrn von Tschirnhaus, Volume 1, *Druck und Verlag von H. W. Schmidt: Halle*, Germany.

- Maasoumy, B. and Wedemeyer, H., 2012. Natural history of acute and chronic hepatitis C, *Best practice & Research Clinical Gastroenterology*, 26 (4), 401-412.
- Mittag-Leffler, G.M., 1903. Sur la nouvelle fonction $Ea(x)$, *C.R. Academie des Sciences*, Paris, 137, 554-558.
- Nagle, R.K., Saff, E.B., Snider, A.D., 2013. Fundamentals of Differential Equations, Pearson.
- Önalın, Ö., 2010. Stokastik Süreçler, Avcıol Basım Yayın, İstanbul.
- Podlubny, I., 1998. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier.
- Sadki, M., Danane, J., Allali, K., 2023. Hepatitis C virus fractional-order model: Mathematical Analysis, *Modeling Earth Systems and Environment*, 9 (2), 1695-1707.
- Steele, M.J., 2010. Stochastic Calculus and Financial Applications, Springer.
- Topuz, C., 2021. Stokastik Diferensiyel Denklemler İçin Parametre Tahmini, Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 33-34.
- Vujovic, V. and Krstic, M., 2020. Stability of Stochastic Model for Hepatitis-C Transmission with an Isolation stage, *Filomat*, 34 (14), 4795-4809.
- Wu, G.C., Deng Z.G., Baleanu D., Zeng D.Q., New variable-order fractional chaotic systems for fast image encryption, *Chaos*, 29, 2019.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İpek KORKMAZ

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Özel Yeni Açı Temel Lisesi, Merkez, Siirt	2016
Üniversite	: Siirt Üniversitesi, Merkez, Siirt	2021
Yüksek Lisans	: Siirt Üniversitesi, Merkez, Siirt	2024
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2022-...	Park Ortaokulu	Öğretmen