



**YAKALANMA OLASILIĞI DÜŞÜK RADARLARDA YÜKSEK
MERTEBEDEN VARYASYONEL COSTAS DİZİLERİNİN İNCELENMESİ**

Mesut GÜDEK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK – ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mesut GÜDEK

06/12/2023

YAKALANMA OLASILIĞI DÜŞÜK RADARLARDA YÜKSEK MERTEBEDEN VARYASYONEL COSTAS DİZİLERİNİN İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Mesut GÜDEK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2023

ÖZET

Radarlar, elektromanyetik dalgalar ile hedeflerden hız, konum ve menzil gibi temel bilgilerin elde edilmesinde kullanılmaktadır. Geleneksel darbeleri radarlar, söz konusu bilgileri elde edebilmek için yüksek çıkış gücüne sahip kısa süreli darbeler kullanır. Bu durum muharebe sahasında dost radarın düşman unsurlar tarafından kolayca farkedilmesine neden olabilir. Radar sisteminin düşman unsurlar tarafından tespit edilmesini olabildiğince zorlaştırmak için yakalanma olasılığı düşük radarlar kullanılabilir. Bu radarlar, amaçlarını gerçekleştirmek için geniş bantlı, düşük güçlü ve kodlanmış sürekli dalga sinyalleri kullanır. Frekans kaydırmalı anahtarlama, bu kodlama yöntemlerinden birisidir. Costas dizileri, frekans kaydırmalı anahtarlama yöntemi ile yakalanma olasılığı düşük radar sinyalleri oluşturmak için kullanılmaktadır. Bir Costas dizisi, her satır ve sütununda sadece bir adet “1” elemanı bulunan, dizinin diğer tüm elemanları “0” olan ve aynı zamanda dizinin bütün “1” olan elemanlarının aralarındaki vektörel uzaklığın birbirinden farklı olduğu $n \times n$ boyutunda bir permütasyon matrisi olarak ifade edilebilir. Costas dizileri, sonlu cisimler teorisine dayanan Welch, Lempel, Golomb gibi temel yöntemler ile ve bu yöntemlerin Taylor T_4 , Golomb $G_4^* - G_5^*$, Taylor $T_1 - T_0$, Welch W_0 gibi bazı varyasyonları ile elde edilebilir. Bu tez çalışması kapsamında, yakalanma olasılığı düşük radarlar ve sonlu cisimler teorisine dayanan Costas dizileri ayrıntılı olarak araştırılmıştır. C++ programlama dili kullanılarak yazılım geliştirilmiş ve yüksek mertebeden (5000’e kadar) varyasyonel Costas dizileri için kapsamlı bir arama gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar tablolar halinde sunulmuştur.

Bilim Kodu : 90516
Anahtar Kelimeler : Yakalanma Olasılığı Düşük Radarlar, Costas dizileri, Taylor T_4 , Golomb $G_4^* - G_5^*$, Taylor $T_1 - T_0$, Welch W_0
Sayfa Adedi : 81
Danışman : Prof. Dr. Erkan AFACAN

INVESTIGATION OF HIGHER ORDER VARIATIONAL COSTAS ARRAYS FOR LOW PROBABILITY OF INTERCEPT RADARS

(M. Sc. Thesis)

Mesut GÜDEK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2023

ABSTRACT

Radars are used to obtain basic information such as velocity, location and range from targets with the help of electromagnetic waves. In order to obtain the mentioned information, conventional pulsed radars use short-duration pulses with high output power. In this circumstance, friendly radar can be easily detected by hostile elements on the battlefield. To increase the difficulty of detection by hostile elements as much as possible, low probability of intercept radars can be used. These radars in order to achieve these aims, use signals which have wide bandwidth, low power and coded continuous wave. Frequency shift keying is one of these coding techniques. Costas arrays have been used to generate frequency shift keying radar signals for low probability of intercept radar systems. A Costas array is a permutation matrix of size $n \times n$ in which there is only “1” in each row and each column, all other elements are “0”, and the vectorial difference between all “1”s is different from each other. Costas arrays can be obtained by basic construction methods that based on finite field theory, such as Welch, Lempel, Golomb and some variations of these methods such as Taylor T_4 , Golomb $G_4^* - G_5^*$, Taylor $T_1 - T_0$, Welch W_0 . Within the scope of this thesis, low probability intercept radars and Costas arrays based on finite field theory, have been investigated in detail. A software has been developed using the C++ programming language and a comprehensive search for higher order (up to 5000) variational Costas arrays has been performed. The obtained results have been presented in tabular forms.

Science Code : 90516
Key Words : Low Probability of Intercept Radars, Costas arrays, Taylor T_4 , Golomb $G_4^* - G_5^*$, Taylor $T_1 - T_0$, Welch W_0
Page Number : 81
Supervisor : Prof. Dr. Erkan AFACAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmalarım boyunca her zaman beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında değerli zamanlarını bana ayıran, kıymetli bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman benden esirgemeyen, akademik kariyer yolculuğumun emekleme döneminde, daima beni gözlemleyerek gelişimime katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erkan AFACAN'a içtenlikle teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca özellikle tez ilerleme ve gözden geçirme toplantılarıma eşlik eden, bildiri ve makale yayımlayabilmem için olağanüstü çaba harcayan, her konuda bilgi ve tecrübelerinden istifade ettiğim, Sayın Dr. Yasin GENÇ ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nilay AYTAŞ KORKMAZ hocalarıma içtenlikle teşekkür ederim.

Hayatımın her anında, attığım her adım ve verdiğim tüm kararlarda daima yanımda olan, tez çalışmalarım esnasında özel hayatımızdaki sorumlulukları fazlasıyla üstlenerek çalışmalarına daha fazla zaman ayırmama imkan sağlayan, hayatımdaki tüm iyikilerin sahibi biricik eşim Neslihan'a tüm kalbimle teşekkür ederim.

Bugünlere gelebilmem için maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli annem ve babama sonsuz teşekkür ederim.

Yüksek lisans yapmaya teşvik ettiği ve Yakalanma Olasılığı Düşük Radarlarda Yüksek Mertebeden Varyasyonel Costas Dizilerini elde etmek için yüksek kapasiteli bilgisayarların kullanımına izin verdiği için ASELSAN A.Ş.'ye teşekkür ederim.

Bu başarı sizlerin emekleri olmasaydı asla gerçekleşmezdi.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xii
RESİMLERİN LİSTESİ	xiv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xv
1. GİRİŞ.....	1
2. YAKALANMA OLASILIĞI DÜŞÜK RADARLAR.....	5
2.1. YOD Radarların Karakteristik Özellikleri.....	5
2.1.1. Düşük yan kulak düzeyi.....	6
2.1.2. Esnek anten ışıma örüntüsü	7
2.1.3. Etkin güç yönetimi.....	7
2.1.4. Yayılma ortamına uygun taşıyıcı frekans seçimi.....	7
2.1.5. Etkin bant genişliği	8
2.1.6. Duyarlılık faktörü	9
2.1.7. Geniş bant iletimi.....	9
2.1.8. Evre uyumlu sinyal algılama	10
2.1.9. Monostatik / Bistatik konfigürasyon	11
2.2. YOD Radarlarda Kullanılan Sinyal Çeşitleri	11
2.2.1. Frekans modüleli sürekli dalga (FMCW)	12
2.2.2. Faz kaydirmalı anahtarlama (PSK).....	12
2.2.3. Frekans kaydirmalı anahtarlama (FSK).....	13

Sayfa

3. COSTAS DİZİLERİ	15
3.1. Temel Yöntemlerle Elde Edilen Costas Dizileri	18
3.1.1. Welch metodu	18
3.1.2. Lempel yöntemi	27
3.1.3. Golomb metodu	46
3.2. Varyasyonel Yöntemlerle Elde Edilen Costas Dizileri	67
3.2.1. Taylor T_4 varyasyonu	67
3.2.2. Golomb G_4^* - G_5^* varyasyonu	69
3.2.3. Taylor T_1 ve T_0 varyasyonu	70
3.2.4. Welch W_0 varyasyonu	73
4. SONUÇLAR	75
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	81

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. $\{6\ 2\ 1\ 7\ 5\ 8\ 3\ 4\}$ Costas dizisine ait fark üçgen analizi	17
Çizelge 3.2. $\alpha = 2$ ilkel kökü için $GF(13)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi	29
Çizelge 3.3. $\alpha = 6$ ilkel kökü için $GF(13)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi	30
Çizelge 3.4. $\alpha = 7$ ilkel kökü için $GF(13)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi	31
Çizelge 3.5. $\alpha = 11$ ilkel kökü için $GF(13)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi	32
Çizelge 3.6. $p = 2$ için $n = 1$ 'den $n = 5$ 'e kadar olan indirgenemez polinomların listesi.....	34
Çizelge 3.7. $\alpha = x$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi	36
Çizelge 3.8. $\alpha = x^2$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi	38
Çizelge 3.9. $\alpha = x+1$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi	39
Çizelge 3.10. $\alpha = x^3+x+1$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi..	40
Çizelge 3.11. $\alpha = x^2+1$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi.....	41
Çizelge 3.12. $\alpha = x^3+x^2+x$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi.	42
Çizelge 3.13. $\alpha = x^3+x^2+1$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi	43
Çizelge 3.14. $\alpha = x^3+1$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi.....	44
Çizelge 3.15. $f_4(x) = x^4+x+1$ ilkel polinomu için elde edilen Costas dizileri	45
Çizelge 3.16. $\alpha = 2$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi.....	47
Çizelge 3.17. $\alpha = 2$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	48
Çizelge 3.18. $\alpha = 2$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	48
Çizelge 3.19. $\alpha = 2$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	49
Çizelge 3.20. $\alpha = 6$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	50
Çizelge 3.21. $\alpha = 6$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	50
Çizelge 3.22. $\alpha = 6$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	51
Çizelge 3.23. $\alpha = 6$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	52

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.24. $\alpha = 7$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	52
Çizelge 3.25. $\alpha = 7$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	53
Çizelge 3.26. $\alpha = 7$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	54
Çizelge 3.27. $\alpha = 7$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	54
Çizelge 3.28. $\alpha = 8$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	55
Çizelge 3.29. $\alpha = 8$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	56
Çizelge 3.30. $\alpha = 8$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu	56
Çizelge 3.31. $\alpha = 8$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu.	57
Çizelge 3.32. $q = 11$ asal sayısı için elde edilen tüm Golomb G_2 Costas dizileri.....	58
Çizelge 3.33. $\alpha = x$ ve $\beta = x$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu.....	61
Çizelge 3.34. $\alpha = x$ ve $\beta = x^2$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu.....	62
Çizelge 3.35. $\alpha = x$ ve $\beta = x+1$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu.....	63
Çizelge 3.36. $\alpha = x$ ve $\beta = x^2+1$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu.....	63
Çizelge 3.37. $\alpha = x$ ve $\beta = x^2+x$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu.....	64
Çizelge 3.38. $\alpha = x$ ve $\beta = x^2+x+1$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu.....	64
Çizelge 3.39. $GF(8)$ ve x^3+x+1 ilkel polinomu için elde edilen G_2 Costas dizileri.....	65
Çizelge 3.40. Yüksek mertebeden (7-5000) Taylor T_4 Costas dizileri.....	68
Çizelge 3.41. Yüksek mertebeden (7 - 5000) Golomb G_4^* ve G_5^* Costas dizileri.....	70
Çizelge 4.1. Bilgisayar özellikleri.....	76

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Alıcı duyarlılığı.....	9
Şekil 2.2. LPI radar sinyali ile geleneksel darbeli radar sinyalinin karşılaştırılması.....	10
Şekil 3.1. Sekizinci mertebeden $\{6\ 2\ 1\ 7\ 5\ 8\ 3\ 4\}$ Costas dizisi.....	16
Şekil 3.2. Bir darbeli radara ait belirsizlik diyagramı.....	17
Şekil 3.3. Costas dizisi kullanılarak frekans kaydırmalı anahtarlama ile modüle edilmiş bir LPI radarına ait belirsizlik diyagramı	18
Şekil 3.4. $g = 2$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10\ 9\ 7\ 3\ 6\}$ W_1 Costas dizisi	20
Şekil 3.5. $g = 6$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 6\ 3\ 7\ 9\ 10\ 5\ 8\ 4\ 2\}$ W_1 Costas dizisi	22
Şekil 3.6. $g = 7$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 7\ 5\ 2\ 3\ 10\ 4\ 6\ 9\ 8\}$ W_1 Costas dizisi	22
Şekil 3.7. $g = 8$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 8\ 9\ 6\ 4\ 10\ 3\ 2\ 5\ 7\}$ W_1 Costas dizisi	23
Şekil 3.8. $g = 2$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10\ 9\ 7\ 3\ 6\}$ W_1 Costas dizisinden 9'uncu mertebeden $\{1\ 3\ 7\ 4\ 9\ 8\ 6\ 2\ 5\}$ W_2 Costas dizisinin elde edilmesi	25
Şekil 3.9. $g = 6$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 6\ 3\ 7\ 9\ 10\ 5\ 8\ 4\ 2\}$ W_1 Costas dizisinden 9'uncu mertebeden $\{5\ 2\ 6\ 8\ 9\ 4\ 7\ 3\ 1\}$ W_2 Costas dizisinin elde edilmesi	25
Şekil 3.10. $g = 7$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 7\ 5\ 2\ 3\ 10\ 4\ 6\ 9\ 8\}$ W_1 Costas dizisinden 9'uncu mertebeden $\{6\ 4\ 1\ 2\ 9\ 3\ 5\ 8\ 7\}$ W_2 Costas dizisinin elde edilmesi.....	26
Şekil 3.11. $g = 8$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 8\ 9\ 6\ 4\ 10\ 3\ 2\ 5\ 7\}$ W_1 Costas dizisinden 9'uncu mertebeden $\{7\ 8\ 5\ 3\ 9\ 2\ 1\ 4\ 6\}$ W_2 Costas dizisinin elde edilmesi.....	26
Şekil 3.12. $g = 2$ ilkel kökü için 9'uncu mertebeden $\{1\ 3\ 7\ 4\ 9\ 8\ 6\ 2\ 5\}$ W_2 Costas dizisinden 8'inci mertebeden $\{2\ 6\ 3\ 8\ 7\ 5\ 1\ 4\}$ W_3 Costas dizisinin elde edilmesi.....	27
Şekil 3.13. $\alpha = 2$ ilkel kökü için 11'inci mertebeden $\{6\ 10\ 5\ 7\ 3\ 1\ 4\ 9\ 8\ 2\ 11\}$ L_2 Costas dizisi.....	29
Şekil 3.14. $\alpha = 6$ ilkel kökü için 11'inci mertebeden $\{3\ 10\ 1\ 9\ 6\ 5\ 7\ 11\ 4\ 2\ 8\}$ L_2 Costas dizisi.....	30

Şekil	Sayfa
Şekil 3.15. $\alpha = 7$ ilkel kökü için 11'inci mertebeden $\{1\ 10\ 4\ 3\ 8\ 11\ 9\ 5\ 7\ 2\ 6\}$ L_2 Costas dizisi.....	31
Şekil 3.16. $\alpha = 11$ ilkel kökü için 11'inci mertebeden $\{4\ 10\ 8\ 1\ 5\ 7\ 6\ 3\ 11\ 2\ 9\}$ L_2 Costas dizisi.....	32
Şekil 3.17. $\alpha = 2$ ilkel kökü için 11'inci mertebeden $\{6\ 10\ 5\ 7\ 3\ 1\ 4\ 9\ 8\ 2\ 11\}$ L_2 Costas dizisinden 10'uncu mertebeden $\{6\ 10\ 5\ 7\ 3\ 1\ 4\ 9\ 8\ 2\}$ L_3 Costas dizisinin elde edilmesi	33
Şekil 3.18. $GF(2^4)$ sonlu cismi için x^4+x+1 ilkel polinomu kullanılarak elde edilen 14'üncü mertebeden $\{4\ 8\ 14\ 1\ 10\ 13\ 9\ 2\ 7\ 5\ 12\ 11\ 6\ 3\}$ ve $\{12\ 9\ 4\ 3\ 10\ 8\ 13\ 6\ 2\ 5\ 14\ 1\ 7\ 11\}$ L_2 Costas dizileri.....	45
Şekil 3.19. $q = 11$ asal sayısı için elde edilen Golomb G_2 Costas dizileri.....	58
Şekil 3.20. $q = 11$ asal sayısı için $\{1\ 4\ 6\ 2\ 9\ 3\ 8\ 7\ 5\}$ Golomb G_2 Costas dizisinden $\{3\ 5\ 1\ 8\ 2\ 7\ 6\ 4\}$ G_3 Costas dizisinin elde edilmesi	59
Şekil 3.21. $GF(8)$ ve x^3+x+1 ilkel polinomu için elde edilen G_2 Costas dizileri	66
Şekil 3.22. $GF(8)$ ve x^3+x+1 ilkel polinomu için elde edilen G_3 Costas dizileri	66
Şekil 3.23. $GF(8)$ ve x^3+x+1 ilkel polinomu için elde edilen G_4 Costas dizileri	67
Şekil 3.24. $q = 9$ 'uncu mertebeden $\{2\ 1\ 5\ 8\ 3\ 9\ 7\ 4\ 6\}$ Lempel L_2 Costas dizisinden, 7'nci mertebeden $\{3\ 6\ 1\ 7\ 5\ 2\ 4\}$ Taylor T_4 Costas dizisinin elde edilmesi	67
Şekil 3.25. $\{1\ 7\ 3\ 4\ 6\ 5\ 2\}$ G_2 Costas dizisinden $\{2\ 3\ 5\ 4\ 1\}$ G_4^* ve $\{1\ 2\ 4\ 3\}$ G_5^* Costas dizilerinin elde edilmesi	69
Şekil 3.26. $q = 17$ için 15'inci mertebeden $\{12\ 9\ 7\ 15\ 4\ 8\ 14\ 10\ 13\ 6\ 1\ 11\ 2\ 3\ 5\}$ Golomb G_2 Costas dizisinden elde edilen Taylor T_1 Costas dizileri.....	71
Şekil 3.27. $q = 17$ için 15'inci mertebeden $\{12\ 9\ 7\ 15\ 4\ 8\ 14\ 10\ 13\ 6\ 1\ 11\ 2\ 3\ 5\}$ Golomb G_2 Costas dizisinden elde edilen $\{1\ 13\ 10\ 8\ 16\ 5\ 9\ 15\ 11\ 14\ 7\ 2\ 12\ 3\ 46\ 17\}$ Taylor T_0 Costas dizisi.....	72
Şekil 3.28. $p = 13$ için 12'nci mertebeden $\{3\ 7\ 12\ 2\ 9\ 8\ 10\ 6\ 1\ 11\ 4\ 5\}$ Welch W_1 Costas dizisinden elde edilen $\{1\ 4\ 8\ 13\ 3\ 10\ 9\ 11\ 7\ 2\ 12\ 5\ 6\}$ Welch W_0 Costas dizisi	73

RESİMLERİN LİSTESİ

Resim	Sayfa
Resim 1.1. Radar sinyal gönderme / alma	2
Resim 2.1. Atmosferik emilimin milimetre dalga spektrumunda dağılımı	8



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler Açıklamalar

dB	Desibel
dBm	Desibel Miliwatt
GHz	Giga Hertz
GB	Gigabyte
Hz	Hertz
k	Kelvin

Kısaltmalar Açıklamalar

AESA	Active Electronic Scanned Array (Aktif Elektronik Taramalı Dizi)
ARM	Anti Radiation Missile (Anti Radyasyon Füzesi)
CPU	Central Processing Unit (Merkezi İşlemci Birimi)
CW	Continuous Wave (Sürekli Dalga)
EBOB	En Büyük Ortak Bölen
ELINT	Electronic Intelligence (Elektronik İstihbarat)
ESR	Electronic Support Receiver (Elektronik Destek Alıcısı)
FKA	Frekans Kaydırmalı Anahtarlama
FMCW	Frequency Modulated Continuous Wave (Frekans Modüleli Sürekli Dalga)
FSK	Frequency Shift Keying
GF	Galois Field
GPU	Graphics Processing Unit (Grafik İşleme Birimi)
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers (Elektrik ve Elektronik Mühendisleri Enstitüsü)
LPI	Low Probability of Intercept

Kısaltmalar	Açıklamalar
PSK	Phase Shift Keying (Faz Kaydırmalı Anahtarlama)
RADAR	Radio Detection and Ranging (Radyo Algılama ve Menzil Belirleme)
RAM	Random Access Memory (Rastgele Erişimli Hafıza)
SNR	Signal to Noise Ratio (Sinyal Gürültü Oranı)
YOD	Yakalanma Olasılığı Düşük

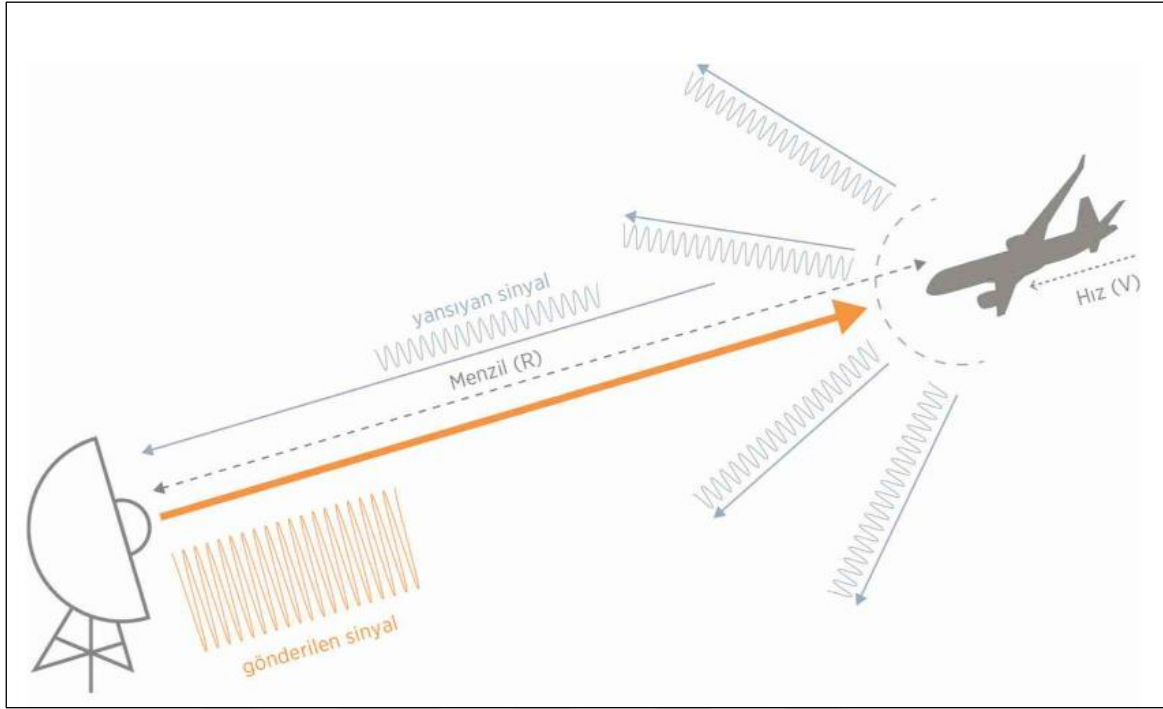


1. GİRİŞ

İnsanoğlu bilindiği üzere muhaberede ilk olarak ses ve dumandan faydalanmıştır. Ancak kötü hava şartlarında bazen bu tür haberleşme imkansız hale gelmiş ve bazen de mesafe açısından oldukça kısıtlı kalmıştır. Telli telgraf ve radyonun keşfi ile iletişim imkanları çoğalmıştır. Uçakların keşfi ile harp stratejisinde önceden haber alma kavramı en önemli konulardan biri haline gelmiştir. Bu amaçla, yaklaşan düşman uçaklarının ileri savunma hatlarına konumlandırılmış dinleme postaları ile ihbar edilmesi ilk tedbir olarak düşünülmüştür. Savaş uçaklarının ve süpersonik füzelerin icat edilmesiyle bu yöntemler de kullanılamaz hale gelmiştir. Zaman içerisinde yüksek hızlı hedeflerin tespiti için yeni yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur. Yapılan araştırmalar neticesinde elektromanyetik dalgaların ve bu dalgaların hedeflerden geri dönen yankılarının kullanımının bu tür hedeflerin erken tespiti için en uygun yöntemlerden biri olduğu görülmüştür.

Doğada yarasaların “yankı” ilkesine dayanarak hiçbir yere çarpmadan uçabildikleri bilinmektedir. Bu hayvanlar insan kulağının duyamayacağı frekansta süpersonik ses dalgaları yayarlar ve bu dalgaların atmosferde nesnelere çarpıp geri dönen yankılarını anlamlandırarak engellerin kendilerine olan uzaklıklarını belirlerler. Bir radar sistemi de benzer ilkeyle çalışır. Ancak yarasada olduğu gibi ses dalgaları yerine elektromanyetik dalgaları kullanır.

Radar, “Radio Detection and Ranging” yani “Radyo Algılama ve Menzil Belirleme” anlamına gelen İngilizce kelimelerin kısaltması olarak ifade edilmektedir. Bir radar, temel olarak şu bileşenlerden oluşur: osilatörün ürettiği elektromanyetik dalgayı atmosfere yayan bir verici anten, hedeften geri dönen yankıları toplayan bir alıcı anten, bu yankıları işleme yeteneğine sahip bir sinyal işleme ünitesi ve tespit edilen hedeflerin gösterilmesi için kullanılan kontrol görüntüleme ünitesi. Radarın temel çalışma ilkesi oldukça basittir. Bir radar sistemi bir verici anten vasıtasıyla elektromanyetik dalgaları iletir. İletilen bu dalgalar hedeflere çarpar ve bu hedeflerden tüm yönlerde saçılır. Radar için önemli olan geri saçılan dalgalardır. Alıcı anten radara geri dönen bu yankıları toplar ve sinyal işleme ünitesine aktarır. Söz konusu sinyal çeşitli tekniklerle işlenerek hedefin hızı, yönü ve mesafesi hakkında bilgi edinilir.



Resim 1.1. Radar sinyal gönderme / alma [1]

Modern muharebe sahaları, farklı görev ve sorumlulukları yerine getirmek üzere görevlendirilmiş, birbirleriyle entegre faaliyet icra edebilen askeri unsurları içerisinde barındıran karmaşık ve dinamik ortamları temsil eder. Bu sahada her askeri unsur, düşman tehditlerine karşı taktik üstünlük sağlamak ve operasyonel hedefleri gerçekleştirmek için en yeni teknolojilerin getirdiği yararları benimsemek ve kullanmak zorundadır. Bu bağlamda, radar teknolojileri, muharebe sahalarında taktiksel durum üstünlüğü elde etmek için kritik bir rol oynamaktadır.

Günümüzde askeri teknoloji alanındaki gelişmeler, radar sistemlerinin kullanımını, rolünü ve önemini giderek arttırmıştır. Muharebe sahası bilindiği üzere, düşman hareketliliği, istihbarat, keşif, saldırı ve savunma gibi birçok faktörün kesiştiği bir ortamdır. Bu ortamda düşmanın konumunu, hızını, sayısını ve niyetini doğru bir şekilde tespit edebilmek, dost unsurların stratejik harekât planlarının oluşturulmasında ve uygulanmasında hayati öneme sahiptir. Bu anlamda radarlar, askeri amaçlarla kullanılmaya başlandıkları ilk zamanlardan günümüze kadar elektronik harbin en önemli unsurlarından biri olagelmıştır [2].

Askeri radarlar, keşif ve istihbarat faaliyetlerinin temel yapı taşı oluşturur ve dost unsurların düşman tehditlerini önceden tespit etme ve yanıt verme yeteneklerini artırır. Özellikle hava savunma görevi icra eden radarlar, düşman unsurlar tarafından yapılacak

hava saldırılarına karşı önemli bir hava savunma katmanı sağlayabilir. Bu hava savunma katmanını işlevsel olarak zayıflatmak veya kullanılamaz hale getirmek için radarların yaydığı elektromanyetik dalgalardan yararlanan anti radyasyon füzeleri (Anti Radiation Missile; ARM) gibi bazı füze sistemleri bulunmaktadır. Muharebe sahasında bazen radarın performansını azaltmaya çalışan veya radarı tamamen engelleyen elektronik karıştırma sistemleri de kullanılabilir. Bu sistemlerin etkili elektronik karıştırma yapabilmesi için bazı radar parametrelerini bilmesi gerekir. Bu durum, elektromanyetik sinyallerin düşman unsurlar tarafından tespit edilmesinin zor olduğu radar tasarımlarının üretilmesini teşvik etmiştir. Yakalanma olasılığı düşük radarlar (YOD), bu tür radarlar arasında yer alır [2].

Bu tez çalışmasının 2'nci Bölümünde yakalanma olasılığı düşük radarlar hakkında ayrıntılı bilgi verilmiştir. 3'üncü Bölümde YOD radarlarda yaygın olarak kullanılan Costas dizileri incelenmiştir. Costas dizileri ile ilgili temel yöntemlerin yanı sıra çeşitli varyasyonel yöntemler de ele alınmıştır. Dördüncü Bölümde yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. YAKALANMA OLASILIĞI DÜŞÜK RADARLAR

Radarlar, elektromanyetik dalgaları kullanarak optik sistemlerle görülemeyecek kadar uzak mesafelerde yer alan cisimlerin varlıklarını veya noksanlıklarını tespit etmek, bu cisimlerin konumları ve hızları hakkında yüksek hassasiyetle bilgi sahibi olmak maksadıyla tasarlanmış ve üretilmiş ileri teknoloji sensörler olarak tanımlanabilir. Günümüzde radarlar çok farklı amaçlara ve çok geniş uygulama alanlarına sahip olmalarına rağmen, icat edildiği ilk zamanlarda yaygın olarak askeri amaçlar için kullanılmaktaydı. Çünkü muharebe alanında yer alan düşman unsurlar hakkında önceden bilgi sahibi olmak, icra edilecek askeri operasyonun başarısı ve dost unsurların güvenliğinin sağlanabilmesi için kritik öneme sahiptir [2].

Askeri bir radar, modern muharebe alanında düşman unsurlar hakkında bilgi edinmeye çalışır. Düşman elektronik harp ve elektronik istihbarat (Electronic Intelligence- ELINT) sistemleri ise radarımızın performansını düşürmek veya tamamen çalışmasını engellemek için çaba harcarlar. Söz konusu sistemlerin etkin bir şekilde çalışabilmesi için sinyal ile ilgili bazı radar parametrelerini çözümü gerekir. Bu durum, elektronik harp sistemleri tarafından tespit edilemeyen veya edilmesi zor olan radar sistemlerinin üretilmesi ihtiyacını ortaya çıkartmıştır.

Düşman elektronik harp sistemlerinin gelişmiş algoritmalarından ve etkili bozma-karıştırma yöntemlerinden etkilenmeyen, dolayısıyla bu sistemler tarafından tespit edilebilme olasılığı en aza indirilmiş, gelişmiş frekans atlama ve karmaşık modülasyon tekniklerine sahip radarlar literatürde yakalanma olasılığı düşük (YOD) veya “low probability of intercept (LPI)” radarlar olarak tanımlanırlar.

2.1. YOD Radarların Karakteristik Özellikleri

YOD radarlar, gizliliğin ön planda olduğu askeri operasyonlarda ve sivil uygulamalarda kullanılmak üzere tasarlanırlar ve üretilirler. Bu bakımdan geleneksel darbeli radarlarla karşılaştırıldıklarında oldukça farklı karakteristik özelliklere sahiptirler.

Bir YOD radarın başlıca karakteristik özellikleri;

- Düşük yan kulak düzeyi
- Esnek anten ışıma örüntüsü
- Etkin güç yönetimi
- Yayılma ortamına uygun taşıyıcı frekans seçimi
- Etkin bant genişliği
- Duyarlılık faktörü
- Geniş bant iletimi
- Evre uyumlu (coherent) sinyal algılama
- Monostatik / bistatik konfigürasyon

olarak sıralanabilir.

2.1.1. Düşük yan kulak düzeyi

Elektronik Destek Alıcıları (Electronic Support Receiver; ESR), bir radar anteninin yan kulak ışımlarından faydalanarak radar sinyallerini algılayabilir. Bu nedenle, bir LPI radar anteninin yan kulak düzeyi son derece düşük olmalıdır.

Faz dizili anten tasarımlarında her bir anten elemanının uyarım parametreleri ayrı ayrı kontrol edilebilir. Bu sayede çok düşük düzeyli yan kulak ışıması elde edilebilir. Bu durum, radar sinyalinin yakalanma ve hüzmeye yönünün belirlenme olasılığını en aza indirir.

Giderek azalan (tapered) bir uyarım uygulandığında yan kulak seviyesi -13 dB'nin altına düşürülebilir. Genel olarak -20 dB yan kulak düzeyi kabul edilebilir bir değerdir. Bir LPI radarı için ise -45 dB gibi çok daha düşük yan kulak düzeyleri gereklidir [2].

Ana hüzmeye kolay bir şekilde bastırılamaz, bu nedenle iletilen hüzmelerin geniş bir frekans bandına yayılması ve çıkış gücünün düşürülmesi gerekmektedir. Bu, radar sinyalinin yakalanmasını ve yönünün belirlenmesini zorlaştırır [3].

2.1.2. Esnek anten ışıma örüntüsü

Elektronik Destek Alıcıları, radarların tespit edilmesinde ve çalışma parametrelerinin elde edilmesinde tarama türü ve tarama hızı gibi bilgilerinden faydalanabilir. Söz konusu çalışma parametrelerini rasgele değiştirmek gibi yanıltıcı teknikler kullanan LPI radarları, düşman elektronik destek alıcıları tarafından yapılacak müdahalelere karşı yüksek oranda direnç gösterecek ve düşük yakalanma olasılığına sahip olacaktır.

Aktif elektronik taramalı faz dizili antenler (Active Electronic Scanned Array; AESA), farklı uzay bölgelerini taramak için değişken frekanslarda çalışan çoklu hüzmeler kullanılabilir. Bir LPI radarın ışıma süresinin kontrol edilmesinde ve sınırlandırılmasında aktif elektronik taramadan faydalanılabilir.

2.1.3. Etkin güç yönetimi

Etkin güç yönetimi, sayısal sinyal işlemedeki gelişmelerle birlikte uygulanabilir hale gelen bir radar tekniğidir. Bu yöntem,

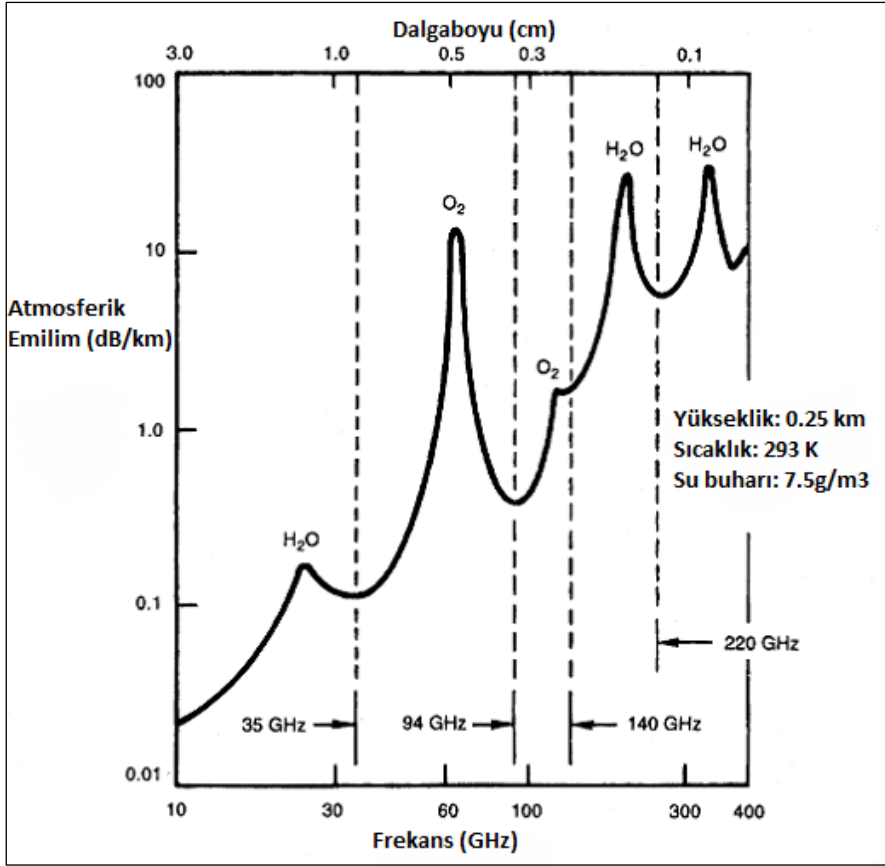
- Anten yan hüzmeye kontrolü/bastırılması,
- Bir hedefin rasgele aydınlatılması,
- Minimum sinyal gürültü oranı (Signal to Noise Ratio; SNR) için verici gücünün dinamik olarak kontrol edilmesi tekniklerini içerir.

Bir LPI radarı hedefe kilitlendikten kısa bir süre sonra, SNR'ı minimum değerde tutacak şekilde verici gücünü azaltır. Bu işlem radar takip süresi boyunca devam eder. Düşük çıkış gücü sayesinde radarın algılanma menzili azaltılmış olur. Etkin güç yönetimi, karşı taraftaki elektronik destek alıcılarının radar menzilini yanlış hesaplamasına ve dost radarı düşük öncelikli tehdit olarak sınıflandırmasına neden olur [4].

2.1.4. Yayılma ortamına uygun taşıyıcı frekans seçimi

Bir LPI radarı, gönderme sinyalini gizlemek ve düşman alıcılar tarafından tespit edilmesini daha da zorlaştırmak için atmosferik emilimin en fazla meydana geldiği 22, 60, 118, 183 ve 320 GHz gibi frekansları öncelikli olarak kullanabilir. Atmosferik emilim, vericinin enerjisini de yüksek düzeyde azalttığı için, bu tekniğin kullanımı genellikle kısa menzilli

sistemlerde tercih edilir.



Resim 2.1. Atmosferik emilimin milimetre dalga spektrumunda dağılımı [2, 5]

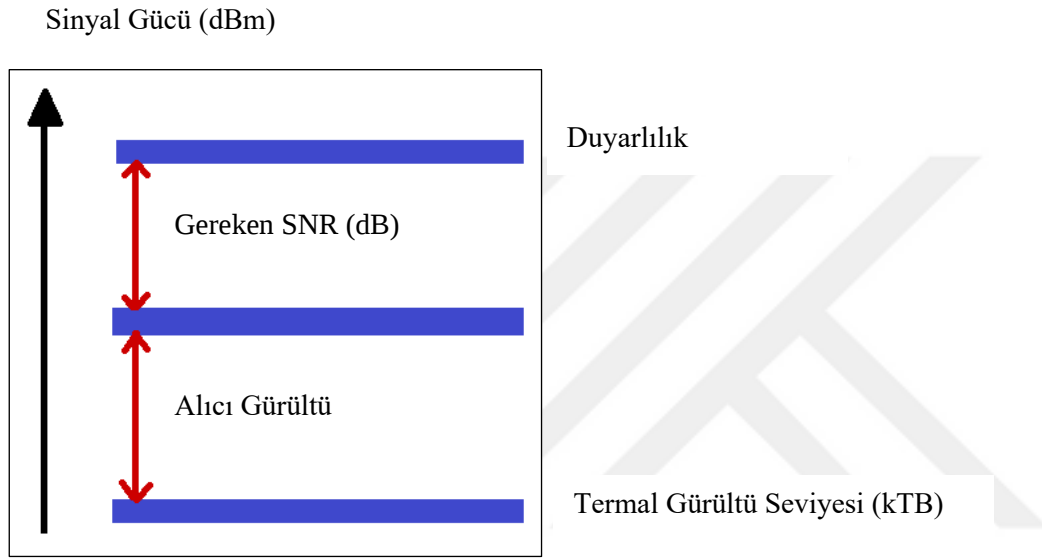
Mevcut elektronik destek alıcıları genellikle 500 MHz ile 20 GHz arasında bir frekans bandında çalışır. LPI radarlarda genellikle söz konusu çalışma bandının dışında bir frekans seçilir [2].

2.1.5. Etkin bant genişliği

Bir LPI radarı, kendi sinyalinin parametrelerini bildiğinden düşman alıcısına göre bant genişliğini daha etkin kullanır. Buna karşılık düşman alıcısı, LPI radar sinyalini tespit edebilmek için geniş bir bant aralığındaki sinyalleri yakalamak ve bu sinyallerin türünü belirlemek için de ayrıntılı parametrik ölçümler yapmak zorundadır [6].

2.1.6. Duyarlılık faktörü

Duyarlılık faktörü, bir radar alıcısının zayıf sinyalleri algılama yeteneğinin bir ölçüsüdür (Şekil 2.1). Gelişmiş sinyal işleme teknikleri ve filtreleme algoritmaları sayesinde LPI radarlar alıcı gürültü seviyesini minimize ederek duyarlılık faktörünün artırılmasına ve daha zayıf sinyallerden hedef tespiti yapılabilmesine olanak sağlar. Duyarlılık faktörü, başarılı bir LPI radar tasarımı için değerlendirilmesi gereken önemli bir parametredir.



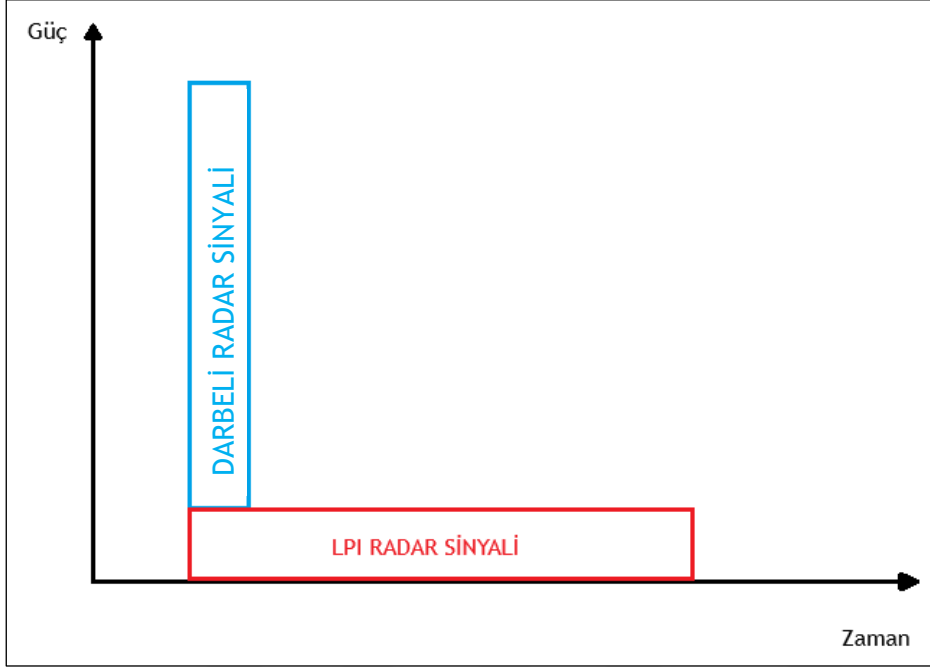
Şekil 2.1. Alıcı duyarlılığı

2.1.7. Geniş bant iletimi

Geleneksel darbeleri radarlar, yüksek çıkış gücüne sahip kısa süreli darbeler ile hedef tespiti yapmaya çalışırlar. Hedefe çarpıp radar antenine zayıflayarak geri dönen yankı sinyalinin radar tarafından tespit edilebilmesi için gönderilen sinyalin tepe gücünün, radarın tespit eşik değerinin altında olmaması gerekir. Radar anteninden yüksek tepe gücü ile bir sinyalin gönderilmesi muharebe sahasında bulunan düşman elektronik harp unsurları tarafından kolayca tespit edilmesine sebep olabilir. Düşman unsurlar tarafından tespit edilmeyi engellemek için yüksek çıkış gücüne sahip darbeleri sinyaller kullanmak yerine enerjiyi geniş bir banda yayıp çıkış güç seviyesini düşürmek gerekir.

Bir LPI radarını geleneksel darbeleri radarlardan ayırtıran ve düşman elektronik harp unsurları tarafından tespit edilmesine engel olan en belirgin özelliği kullandığı darbe formudur. LPI radarlar, geleneksel radarların aksine darbe sıkıştırma teknikleriyle enerjisi

geniş bir banda yayılmış tepe gücü düşük sinyaller kullanırlar. Bu sayede düşman elektronik harp unsurlarının sahip olduğu menzil avantajını modülasyon teknikleri ile etkisiz hale getirerek rakip alıcılar tarafından tespit edilmeyi zorlaştırırlar.



Şekil 2.2. LPI radar sinyali ile geleneksel darbeli radar sinyalinin karşılaştırılması

2.1.8. Evre uyumlu sinyal algılama

Evre uyumlu sinyal algılama, tespit edilme olasılığını azaltmak için LPI radarlar tarafından kullanılan başka bir tekniktir. LPI radarların hedef tespiti yaparken gönderilen sinyalin evre bilgisini kullanmasını sağlar. Hedeften dönen yankı sinyali, hedefin konumunu ve hızını belirlemek için daha önce tanımlanmış referans sinyal ile karşılaştırılır. Bu sayede radarın hedef tespiti esnasında düşük güçlü yayın yapması ve tespit edilme olasılığını minimize etmesi sağlanır.

Düşman alıcısı, sinyalin parametrik ayrıntılarını tam olarak bilmedikçe, bir radar sinyalini doğru bir şekilde algılayamaz. Sinyal modülasyonu rasgele olduğunda, bu özellik daha da etkili hale gelir. Bir radar sinyalinin gerçek gürültü sinyali ile modüle edilmesi rasgele sinyal modülasyonunu sağlar. Gerçek gürültü modülasyonu kullanan radarlara da rasgele sinyal radarları denir. Rasgele sinyal radarları (Random Signal Radar; RSR), yankı sinyalini, iletilen sinyalin gecikmeli bir örneği ile ilişkilendirirler. İletilen sinyal tamamen rasgele olduğu için, hedef alıcı, alınan sinyali ilişkilendirmek için herhangi bir referans noktasından

faaydalanamaz [7].

2.1.9. Monostatik / Bistatik konfigürasyon

LPI radar tasarımlarında hem monostatik hem de bistatik radar konfigürasyonları kullanılabilir. Monostatik radar tasarımları için, vericiden gönderilen sürekli dalga (Continuous Wave; CW) sinyalinin alıcı hattında yalıtılması gerekir. Bistatik radarlar için verici ve alıcı antenler birbirlerinden uzak noktalara yerleştirilir. Bistatik radar tasarımları, zaman ve yön senkronizasyonu gibi operasyonel kullanımı engelleyen bir dizi teknolojik zorluklar taşımaktadır. Spektruma yayılı bistatik sürekli dalga radarları, LPI radarlar için ideal tasarım konseptlerinden bir tanesidir [3].

2.2. YOD Radarlarda Kullanılan Sinyal Çeşitleri

LPI özellikli bir radar, bir yandan muharebe sahasında hedef tespiti yapmaya çalışırken diğer yandan düşman unsurlar tarafından tespit edilmemeye çalışır. Bunu başarabilmek için belirli modülasyon işlemlerinden geçirilmiş özel dalga biçimli elektromanyetik sinyaller kullanır. Geleneksel düşman elektronik harp unsurları operasyonel kullanım konseptlerine uygun olarak farklı özelliklerde ve duyarlılık düzeylerinde almaç yapılarına sahiptir. Genellikle bu almaçlar basit bir yapıda olup muharebe sahasında tehdit oluşturan rakip radarların gerçek zamanlı olarak tespit edilmesini amaçlamaktadır. Günümüz modern elektronik harp unsurları ile LPI radarların tespit edilebilmesi için yüksek bant genişliğinin yanı sıra yönlü anten tasarımları ile almaç kazancının arttırılması gerekir [2, 4].

LPI radarlar için darbe sıkıştırırmalı sürekli dalga modülasyon teknikleri aşağıda verilmiştir;

- Frekans Modüleli Sürekli Dalga (Frequency Modulated Continuous Wave; FMCW)
 - Doğrusal Frekans Modülasyonu (Linear Frequency Modulation; LFM)
 - Üçgen Frekans Modülasyonu (Triangular Frequency Modulation; TFM)
 - Basamaklı Frekans Modülasyonu
 - Doğrusal Olmayan Frekans Modülasyonu (Nonlinear Frequency Modulation; NLFM)
- Faz Kaydırmalı Anahtarlama (Phase Shift Keying; PSK)
 - İkili Faz Kaydırmalı Anahtarlama (Binary Phase Shift Keying; BPSK)
 - Çok Fazlı Kodlar (Polyphase codes)

- Çok Zamanlı Kodlar (Polytime codes)
- Frekans Kaydırmalı Anahtarlama (Frequency Shift Keying; FSK)
- Costas Dizileri
- Melez Frekans/Faz Kaydırmalı Anahtarlama
- Hedef Uyumlu PSK/FSK Tekniği

2.2.1. Frekans modüleli sürekli dalga (FMCW)

LPI radarlarda frekans modülasyonu ve darbe sıkıştırma tekniği olarak FMCW'nin kullanımı oldukça yaygındır. Bu teknikte gönderilen sinyalin frekansı, belirli bir modülasyon profiline uygun olarak sürekli değiştirilir. Bu modülasyon profili için genellikle üçgen frekans modülasyonu tercih edilir. Üçgen frekans modülasyonu pozitif ve negatif eğimli iki doğrusal frekans bölümünden oluşur. Yani frekans bir süre boyunca belirli bir eğimle artırılıp, sonrasında aynı eğimle azaltılır.

FMCW radarlarda sinyal gönderilirken aynı zamanda alıcı hattı da sürekli olarak aktiftir. Radar, gönderilen sinyal ile alınan yankı sinyalini sürekli olarak karşılaştırır. FMCW radarlarda iletilen sinyal ile yankı sinyali arasında, vurum frekansı (beat frequency) olarak adlandırılan bir frekans farkı ortaya çıkar. Bu frekans farkı ile hedefin menzil ve Doppler bilgisi yüksek duyarlılıkla elde edilebilir [2].

FMCW radarların elektronik destek sistemleri tarafından tespit edilmesi oldukça zordur. Ayrıca bu radarlar yüksek menzil çözünürlüğüne, yüksek bant genişliğine ve düşük güç tüketimine sahiptirler.

2.2.2. Faz kaydırmalı anahtarlama (PSK)

LPI radarların ilk zamanlarında genlik ve açı modülasyonu gibi analog yöntemlerle üretilen frekans modüleli sürekli dalga sinyalleri kullanılırken, elektronik alanındaki gelişmeler sayesinde sayısal devrelerin kullanımının yaygınlaşması ve bu devrelerin sinyal işlemede sağladığı esneklik günümüz LPI radarlarında sayısal modülasyon tekniklerinin kullanımını yaygın hale getirmiştir.

Faz kaydırmalı anahtarlama, taşıyıcı sinyalin frekansı sabit tutulurken faz bilgisinin belirli bir örüntüye göre zamanla değiştirilmesi ile elde edilen modülasyon tekniğidir.

Fazın zamana göre değiştirilmesine bağlı olarak ikili faz kaydırmalı anahtarlama, çok fazlı kodlar ve çok zamanlı kodlar olarak gruplandırılabilir. Çok fazlı kodlar, alt kod içinde yer alan faz kaydırma değerinin birden çok değer almasına ve çok uzun kod üretilmesine olanak sağlar. Bu kodlar, ikili faz kaydırmalı anahtarlama kodlarından daha iyi yan hüzme performansına ve Doppler toleransına sahiptir.

2.2.3. Frekans kaydırmalı anahtarlama (FSK)

Frekans kaydırmalı anahtarlama (FSK) modülasyonunda taşıyıcı sinyalin frekansı değiştirilerek dijital veri iletilir. Bu modülasyon tekniği ile alışan LPI radarlarının kullandıkları frekans setleri bilinmediği için tespit edilme olasılıkları minimize edilmiş olur. Düşman alıcılar bu frekans setlerini rasgeleymiş gibi algırlarlar, böylelikle bir sonraki frekansın ne olacağını kestiremezler ve sinyali takip edemezler [8].

Frekans kaydırmalı anahtarlama kullanan radarlar frekans atlamalı radarlar olarak da bilinirler. Frekans kaydırmalı anahtarlama, düşük enerji seviyeleriyle çalışabilen bir modülasyon tekniğidir. Bu durum radarın düşük güçte çalışmasına ve böylelikle düşman tarafından tespit edilme olasılığının azaltılmasına olanak sağlar. Ayrıca frekans kaydırmalı anahtarlama modülasyonu, gürültüye ve elektriksel parazitlere karşı oldukça dirençlidir. Bu durum düşmanın radar sinyalini karıştırmasına veya engellemesine yönelik girişimlerine karşı radara daha dayanıklı bir iletişim imkanı sağlar.



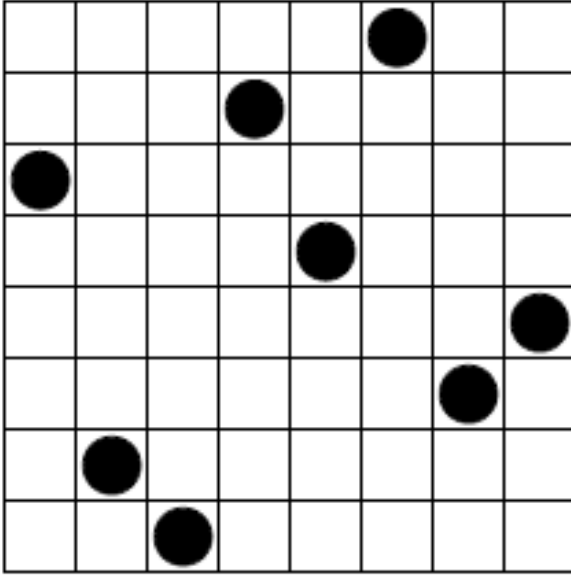
3. COSTAS DİZİLERİ

J. P. Costas 1960'lı yıllarda, ABD Donanması için bir proje üzerinde çalışırken, radar ve sonar sistemlerinin performanslarını iyileştirmek için ideal özlinti özelliğine sahip permütasyon matrisleri üzerinde çalışmaya başlamıştır [8].

Tipik bir radar veya sonar uygulamasında, ardışık zaman dilimlerinde bir dizi farklı frekans üretmek performansın iyileştirilmesi açısından oldukça faydalıdır. Genel olarak bir sinyal bir hedeften yansıdığında, yankı sinyali bir alıcı tarafından algılanır. Yankı sinyali, iletilen sinyale kıyasla, frekansta hedefin hızına karşılık gelen bir miktarda, kaynağa doğru veya aksi yönde kaydırılmış şekilde olur. Böylece iletilen sinyal ve yankı sinyali arasındaki süre, hedefin mesafesiyle orantılıdır. Pratik uygulamalarda, alıcı tarafından algılanan sinyal her zaman gürültüdür ve yankı sinyalini gürültüden ayırt etmek gerekir. Yankı sinyali ile yüksek ilintiye sahip iletilen sinyalin zaman ekseninde kayması hedefin konumuna karşılık gelirken, frekans ekseninde kayması hedefin hızına karşılık gelir. Bu nedenle iletilen sinyalin, zaman frekans kaymalarında kendisiyle düşük ilintiye sahip olacak şekilde seçilmesi gereklidir.

Costas dizisi kavramı ilk defa Costas tarafından 1965 yılında mühendis olarak çalıştığı General Electric firması için yazdığı raporda kullanılmıştır [9]. 1984 yılında yayınlanan üç makalede Costas dizilerini oluşturma yöntemleri ortaya konulmuştur [9]. Costas, fiziksel kısıtlamalar nedeniyle, uygulama için en ideal sinyalleri, frekans sayısının zaman aralığı sayısına eşit olduğu, her frekansın bu zaman aralığında sadece bir defa iletildiği ve her zaman aralığında sadece bir adet frekansın iletildiği sinyaller olarak tanımlamıştır. Costas sıfırdan farklı tüm zaman ve frekans kaymalarında özlintisi en fazla “1” olan bu tür kalıplarla ilgilenmiş ve sorunu permütasyon matrisleri cinsinden ifade etmiştir.

Bir Costas dizisi, her satır ve sütununda sadece bir adet “1” elemanı bulunan, dizinin diğer tüm elemanları “0” olan ve aynı zamanda dizinin bütün “1” olan elemanlarının aralarındaki vektörel uzaklığın birbirinden farklı olduğu $n \times n$ boyutunda bir permütasyon matrisi olarak ifade edilebilir [11, 12]. Costas dizileri olarak tanımlanan bu permütasyon matrislerinin sütunları frekans eksenini, satırları ise zaman eksenini ifade eder. Sekizinci mertebeden örnek bir Costas dizisi Şekil 3.1’de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Sekizinci mertebeden {6 2 1 7 5 8 3 4} Costas dizisi

Şekil 3.1’de yer alan {6 2 1 7 5 8 3 4} Costas dizisinde kullanılan frekanslar noktalar ile kullanılmayanlar ise boşluklar ile ifade edilmektedir. $n \times n$ boyutlarındaki her permütasyon matrisi Costas dizisi değildir. Herhangi bir permütasyon matrisinin Costas dizisi olabilmesi için bazı özelliklere sahip olması gerekir. Bir permütasyon matrisinin Costas dizisi olup olmadığını belirleyebilmek için fark üçgen analizi yöntemi kullanılabilir. n ’inci mertebeden Costas dizisinin elemanları $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$ şeklinde ifade edilir. Fark üçgen analizi yönteminde dizinin elemanları ise;

$$\Delta(i, j) = f(i + j) - f(j) \quad (3.1)$$

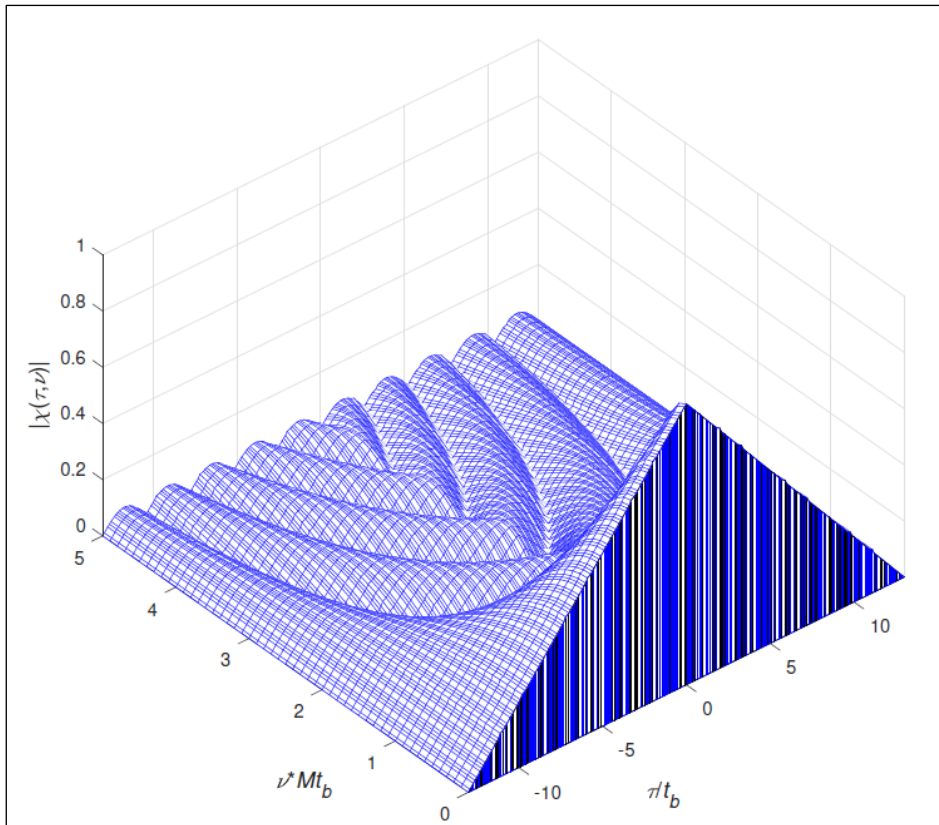
Eş.3.1 ile hesaplanabilir. Bu eşitlikte i ’ler satır numaralarını, j ’ler ise sütun numaralarını göstermektedir. n ’inci mertebeden bir Costas dizisinin fark üçgen analizinde $n - 1$ tane satır ve m ’inci satırda $n - m$ tane eleman vardır. Fark üçgen analizinde bulunan herhangi bir eleman, bulunduğu satır ve sütundaki diğer elemanlardan farklıdır. Şekil 3.1’de verilen Costas dizisine ait fark üçgen analizi Çizelge 3.1’de gösterilmiştir.

Frekans kaydırmalı anahtarlama yöntemi ile çalışan radarlarda Costas dizilerinin kullanımı ile ideale çok yakın belirsizlik diyagramları elde edilebilir [13]. Belirsizlik diyagramları incelenerek bir radar sinyalinin menzil ve Doppler çözünürlükleri hakkında fikir sahibi olunabilir [14]. LPI radarlarda, ışıma örüntüsünün yan kulaklarının mümkün olduğunca düşük genlikli olması, ana hüzmünün ise dar ve yüksek genlikli olması tercih edilir.

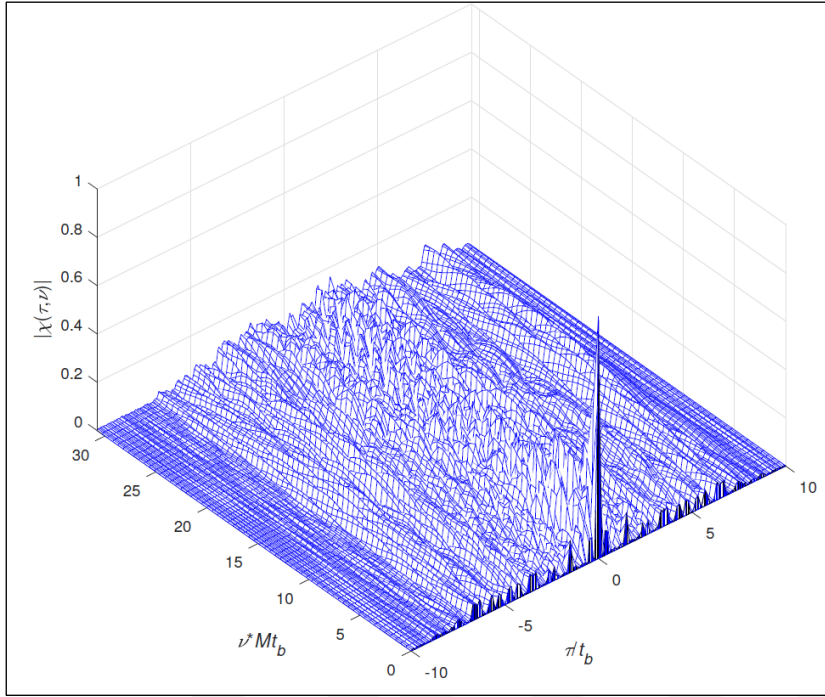
Çizelge 3.1. {6 2 1 7 5 8 3 4} Costas dizisine ait fark üçgen analizi

Satır Numarası	6	2	1	7	5	8	3	4
1	-4	-1	6	-2	3	-5	1	
2	-5	5	4	1	-2	-4		
3	1	3	7	-4	-1			
4	-1	6	2	-3				
5	2	1	3					
6	-3	2						
7	-2							

Şekil 3.2’de herhangi bir modülasyon tekniği uygulanmamış geleneksel bir darbeli radara ait belirsizlik diyagramı yer almaktadır. Şekil 3.3’de ise Costas dizisi kullanılarak frekans kaydırmalı anahtarlama ile modüle edilmiş bir LPI radarın belirsizlik diyagramı yer almaktadır. Belirsizlik diyagramında merkezdeki sivri ucun yüksekliği sinyalden elde edilecek enerji değerini ifade eder. Bu sivri ucun yanındaki değerler ne kadar küçük ise hız ve menzil bakımından birbirine yakın hedefleri ayırt etmek o derece kolaylaşır [15].



Şekil 3.2. Bir darbeli radara ait belirsizlik diyagramı



Şekil 3.3. Costas dizisi kullanılarak frekans kaydırmalı anahtarlama ile modüle edilmiş bir LPI radarına ait belirsizlik diyagramı

3.1. Temel Yöntemlerle Elde Edilen Costas Dizileri

Costas dizileri, Welch, Lempel ve Golomb gibi temel oluşturma yöntemleri ve bu yöntemlerin bazı varyasyonları ile elde edilebilir [16, 17]. Temel oluşturma yöntemleri ve varyasyonların elde edilme yöntemleri bu bölümde açıklanmıştır.

3.1.1. Welch metodu

Her asal $p > 2$ için, $g \pmod{p}$ 'ye göre ilkel köklerden biri olsun. Bu durumda, $0 \leq j \leq p - 2$ için $(j, g^j \pmod{p})$ noktası, $(p - 1)$ 'inci mertebeden W_1 Costas dizisinin koordinatlarını verir [18, 19]. Bir permütasyon matrisi olarak tanımlanabilen $n \times n$ boyutlu bir Costas dizisinde, matrisin satır ve sütunları (j, g^j) noktası olarak ifade edilmektedir [20, 21].

Bu notasyonda $(0, 1)$ noktası, bu permütasyon matrisinin ilk satırını ve ilk sütununu, yani köşe noktasını temsil etmektedir. Bu köşe noktası $(0, 1)$ bulunduğu satır ve sütun ile birlikte silinirse $(p - 2)$ 'nci mertebeden W_2 Costas dizisi olarak ifade edilen bir permütasyon matrisi elde edilir. Yeni $(0, 1)$ noktası elde edilen bu W_2 Costas dizisinin köşe noktası olur. Eğer $g = 2, \pmod{p}$ 'ye göre ilkel kök ise elde edilen W_2 Costas dizisinin köşe noktası $(0, 1)$ benzer şekilde bulunduğu satır ve sütun ile birlikte silinirse $(p - 3)$ 'üncü mertebeden W_3 ile

ifade edilen Costas dizisi elde edilir [22].

Örnek olarak $p = 11$ sayısı için Welch yöntemi kullanılarak Costas dizileri elde edilmiştir. Costas dizilerini elde etmek için ilk olarak ilkel köklerin belirlenmesi gerekir. İlkel kökler farklı yöntemlerle elde edilebilir.

$a, m \in \mathbb{Z}$ ve $m > 0$ olmak üzere $\text{ebob}(m, a) = 1$ olsun. Eğer a sayısının $(\text{mod } m)$ 'ye göre mertebesi $\varphi(m)$ ise a elemanına m modülünde bir ilkel kök (primitive root) denir. Diğer bir ifadeyle $(\text{mod } m)$ 'de mertebesi $\varphi(m)$ olan elemanlara ilkel kök denir.

$$m = P_1^{r_1} \cdot P_2^{r_2} \dots P_t^{r_t} \quad (3.2)$$

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_t}\right) \quad (3.3)$$

Eş. 3.3'e göre;

$$\varphi(11) = 11 \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 10 \quad (3.4)$$

elde edilir. Dolayısıyla $(\text{mod } 11)$ 'e göre mertebesi 10 olan elemanlar ilkel köklerdir. İlkel köklerin sayısı $\varphi(p - 1)$ ile hesaplanır. $p = 11$ sayısı için $\varphi(10)$ ilkel köklerin sayısını verir.

$$\varphi(10) = \varphi(2^1 \cdot 5^1) = 10 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4 \quad (3.5)$$

Eş. 3.5'e göre $p = 11$ sayısı için 4 adet ilkel kök bulunmaktadır. İlkel kökleri bulmak için ilk olarak $p = 11$ sayısı için asal kalan sınıfları kümesinin belirlenmesi gerekir. $p = 11$ için asal kalan sınıfları kümesi

$$\mathbb{Z}_{11}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (3.6)$$

olarak ifade edilebilir. Asal kalan sınıfları kümesindeki her bir elemanın sırasıyla mertebesi hesaplanarak ilkel kök olup olmadığı belirlenir. “1” sayısı birim eleman olduğu ve mertebesi “1” olduğu için ilkel kök değildir.

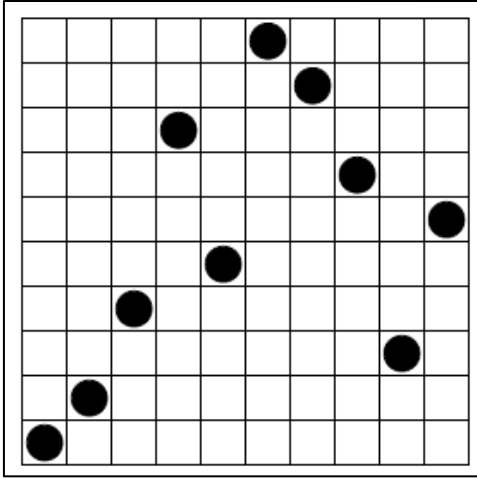
2 elemanın mertebesi

$$2^0 = 1 \pmod{11} \quad 2^3 = 8 \pmod{11} \quad 2^6 = 9 \pmod{11} \quad 2^9 = 6 \pmod{11}$$

$$2^1 = 2 \pmod{11} \quad 2^4 = 5 \pmod{11} \quad 2^7 = 7 \pmod{11} \quad 2^{10} = 1 \pmod{11}$$

$$2^2 = 4 \pmod{11} \quad 2^5 = 10 \pmod{11} \quad 2^8 = 3 \pmod{11}$$

olarak hesaplandığından 2 sayısının mertebesinin 10 olduğu görülür. Dolayısıyla 2 sayısının kuvvetleri $\pmod{p}$ 'ye göre asal kalan sınıfları kümesindeki tüm elemanları verdiği için 2 sayısını için ilkel kök denilir. Bu durumda, yukarıdaki hesaplardan 2 ilkel kökünün oluşturduğu $(p - 1)$ yani 10'uncu mertebeden W_1 Costas dizisi $\{1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10\ 9\ 7\ 3\ 6\}$ şeklinde ifade edilebilir. Başlangıç noktası $(0, 1)$ noktası olacak şekilde söz konusu W_1 Costas dizisi Şekil 3.4'te gösterilmiştir.



Şekil 3.4. $g = 2$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10\ 9\ 7\ 3\ 6\}$ W_1 Costas dizisi

Benzer şekilde asal kalan sınıfları kümesinde yer alan diğer elemanların mertebeleri hesaplanarak ilkel kök olup olmadıklarına karar verilir.

3 elemanın mertebesi

$$3^0 = 1 \pmod{11} \quad 3^3 = 5 \pmod{11}$$

$$3^1 = 3 \pmod{11} \quad 3^4 = 4 \pmod{11}$$

$$3^2 = 9 \pmod{11} \quad 3^5 = 1 \pmod{11}$$

3 elemanının mertebesi 5 olduğu için ilkel kök değildir. Dolayısıyla 3 elemanından W_1 Costas dizisi elde edilemez.

4 elemanının mertebesi

$$\begin{array}{ll} 4^0 = 1 \pmod{11} & 4^3 = 9 \pmod{11} \\ 4^1 = 4 \pmod{11} & 4^4 = 3 \pmod{11} \\ 4^2 = 5 \pmod{11} & 4^5 = 1 \pmod{11} \end{array}$$

4 elemanının mertebesi 5 olduğu için ilkel kök değildir. Dolayısıyla 4 elemanından W_1 Costas dizisi elde edilemez.

5 elemanının mertebesi

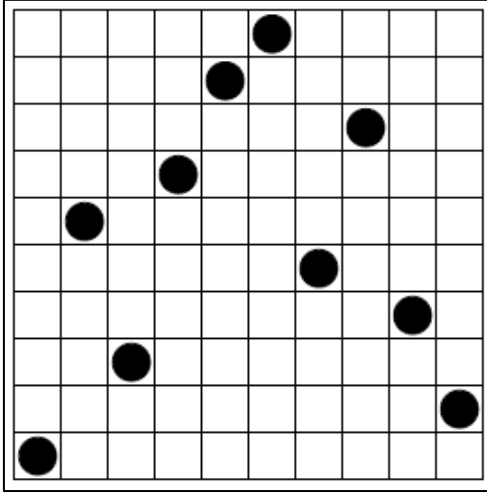
$$\begin{array}{ll} 5^0 = 1 \pmod{11} & 5^3 = 4 \pmod{11} \\ 5^1 = 5 \pmod{11} & 5^4 = 9 \pmod{11} \\ 5^2 = 4 \pmod{11} & 5^5 = 1 \pmod{11} \end{array}$$

5 elemanının mertebesi 5 olduğu için ilkel kök değildir. Dolayısıyla 5 elemanından W_1 Costas dizisi elde edilemez.

6 elemanının mertebesi

$$\begin{array}{llll} 6^0 = 1 \pmod{11} & 6^3 = 7 \pmod{11} & 6^6 = 5 \pmod{11} & 6^9 = 2 \pmod{11} \\ 6^1 = 6 \pmod{11} & 6^4 = 9 \pmod{11} & 6^7 = 8 \pmod{11} & 6^{10} = 1 \pmod{11} \\ 6^2 = 3 \pmod{11} & 6^5 = 10 \pmod{11} & 6^8 = 4 \pmod{11} & \end{array}$$

olarak hesaplandığından 6 sayısının mertebesinin 10 olduğu görülür. Dolayısıyla 6 sayısının kuvvetleri $(\text{mod } p)$ ’ye göre asal kalan sınıfları kümesindeki tüm elemanları verdiği için 6 sayısı için ilkel kök denilir. Bu durumda, yukarıdaki hesaplamadan 6 ilkel kökünün oluşturduğu $(p - 1)$ yani 10’uncu mertebeden W_1 Costas dizisi $\{1\ 6\ 3\ 7\ 9\ 10\ 5\ 8\ 4\ 2\}$ şeklinde ifade edilir. Başlangıç noktası $(0, 1)$ noktası olacak şekilde söz konusu W_1 Costas dizisi Şekil 3.5’te gösterilmiştir.

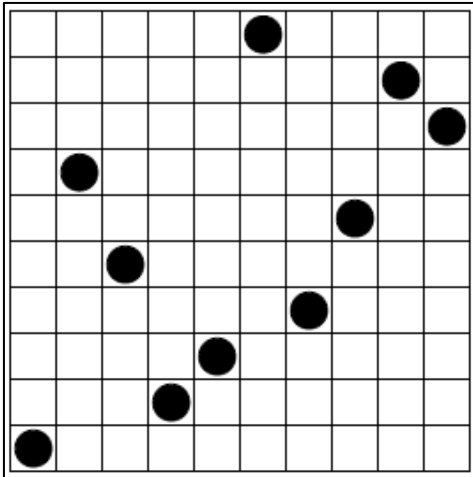


Şekil 3.5. $g = 6$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 6\ 3\ 7\ 9\ 10\ 5\ 8\ 4\ 2\}$ W_1 Costas dizisi

7 elemanının mertebesi

$7^0 = 1 \pmod{11}$	$7^3 = 2 \pmod{11}$	$7^6 = 4 \pmod{11}$	$7^9 = 8 \pmod{11}$
$7^1 = 7 \pmod{11}$	$7^4 = 3 \pmod{11}$	$7^7 = 6 \pmod{11}$	$7^{10} = 1 \pmod{11}$
$7^2 = 5 \pmod{11}$	$7^5 = 10 \pmod{11}$	$7^8 = 9 \pmod{11}$	

olarak hesaplandığından 7 sayısının mertebesinin 10 olduğu görülür. Dolayısıyla 7 sayısının kuvvetleri $(\text{mod } p)$ 'ye göre asal kalan sınıfları kümesindeki tüm elemanları verdiği için 7 sayısı için ilkel kök denilir. Bu durumda, yukarıdaki hesaplardan 7 ilkel kökünün oluşturduğu $(p - 1)$ yani 10'uncu mertebeden W_1 Costas dizisi $\{1\ 7\ 5\ 2\ 3\ 10\ 4\ 6\ 9\ 8\}$ şeklinde ifade edilir. Başlangıç noktası $(0, 1)$ noktası olacak şekilde söz konusu W_1 Costas dizisi Şekil 3.6'da gösterilmiştir.

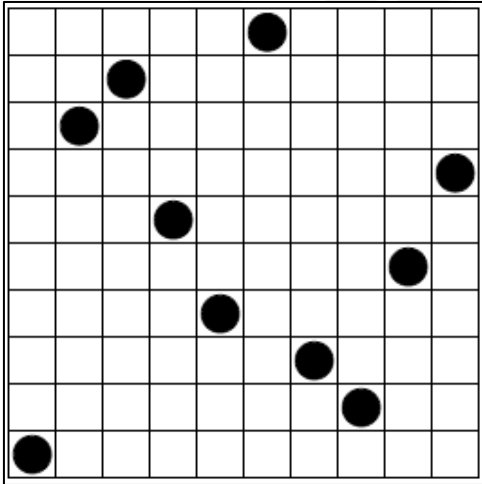


Şekil 3.6. $g = 7$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 7\ 5\ 2\ 3\ 10\ 4\ 6\ 9\ 8\}$ W_1 Costas dizisi

8 elemanının mertebesi

$$\begin{array}{llll}
 8^0 = 1 \pmod{11} & 8^3 = 6 \pmod{11} & 8^6 = 3 \pmod{11} & 8^9 = 7 \pmod{11} \\
 8^1 = 8 \pmod{11} & 8^4 = 4 \pmod{11} & 8^7 = 2 \pmod{11} & 8^{10} = 1 \pmod{11} \\
 8^2 = 9 \pmod{11} & 8^5 = 10 \pmod{11} & 8^8 = 5 \pmod{11} &
 \end{array}$$

olarak hesaplandığından 8 sayısının mertebesinin 10 olduğu görülür. Dolayısıyla 8 sayısının kuvvetleri $(\text{mod } p)$ 'ye göre asal kalan sınıfları kümesindeki tüm elemanları verdiği için 8 sayısı için ilkel kök denilir. Bu durumda, yukarıdaki hesaplamadan 8 ilkel kökünün oluşturduğu $(p - 1)$ yani 10'uncu mertebeden W_1 Costas dizisi $\{1\ 8\ 9\ 6\ 4\ 10\ 3\ 2\ 5\ 7\}$ şeklinde ifade edilir. Başlangıç noktası $(0, 1)$ noktası olacak şekilde söz konusu W_1 Costas dizisi Şekil 3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3.7. $g = 8$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 8\ 9\ 6\ 4\ 10\ 3\ 2\ 5\ 7\}$ W_1 Costas dizisi

9 elemanının mertebesi

$$\begin{array}{ll}
 9^0 = 1 \pmod{11} & 9^3 = 3 \pmod{11} \\
 9^1 = 9 \pmod{11} & 9^4 = 5 \pmod{11} \\
 9^2 = 4 \pmod{11} & 9^5 = 1 \pmod{11}
 \end{array}$$

9 elemanının mertebesi 5 olduğu için ilkel kök değildir. Dolayısıyla 9 elemanından W_1 Costas dizisi elde edilemez.

10 elemanının mertebesi

$$10^0 = 1 \pmod{11}$$

$$10^1 = 10 \pmod{11}$$

$$10^2 = 1 \pmod{11}$$

10 elemanının mertebesi 2 olduğu için ilkel kök değildir. Dolayısıyla 10 elemanından W_1 Costas dizisi elde edilemez.

Küçük sayılar için asal kalan kümesinde yer alan her bir sayının mertebesi hesaplanarak ilkel kökler kolayca belirlenebilir. Fakat yeterince büyük sayılar için bu yöntemle ilkel köklerin belirlenmesi son derece zordur. Bu zorluğun üstesinden gelmek için ilkel köklerin belirlenmesine yönelik farklı bir yöntem daha tanımlanmıştır. Bu yöntemde en küçük asal sayının ilkel kök olup olmadığına bakılır. Yine aynı örnekten yola çıkılırsa $p = 11$ için 2 sayısının ilkel kök olduğu kolayca belirlenebilir. $2 \pmod{11}$ 'e göre ilkel kök olduğu için 2^r 'nin de ilkel kök olabilmesi için $\text{ebob}(r, \phi(11)) = \text{ebob}(r, 10) = 1$ olmalıdır. Bu ifadeden anlaşılacağı üzere r sayısı ile 10 sayısı aralarında asal olmalıdır. Bu şartı sağlayan sayılar 1, 3, 7, 9 olarak hesaplanabilir. Dolayısıyla diğer ilkel kökler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$2^1 = 2 \pmod{11}$$

$$2^3 = 9 \pmod{11}$$

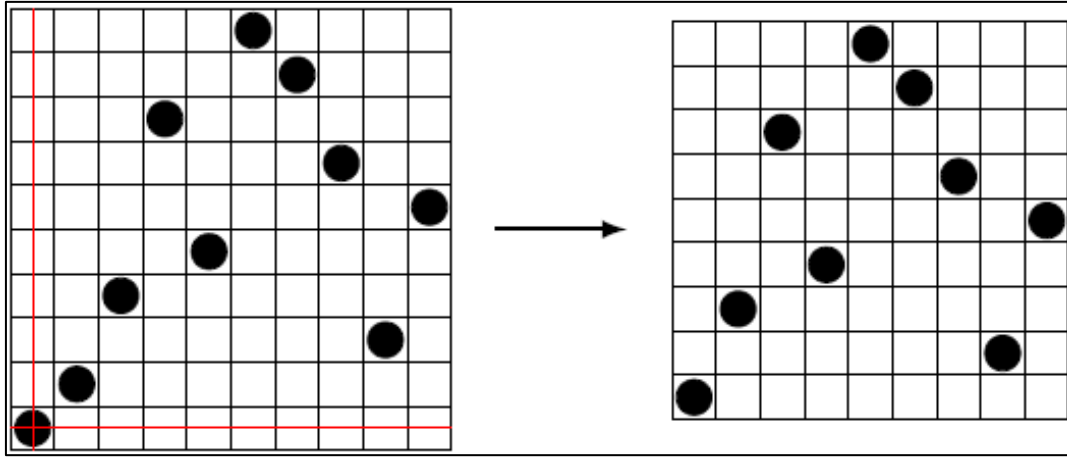
$$2^7 = 7 \pmod{11}$$

$$2^9 = 6 \pmod{11}$$

Özet olarak her asal $p > 2$ sayısı için ilkel köklerin sayısı $\phi(p - 1)$ Euler fonksiyonu ile hesaplanabilir. Dolayısıyla Welch W_1 Costas dizilerinin sayısı da ilkel köklerin sayısına eşittir.

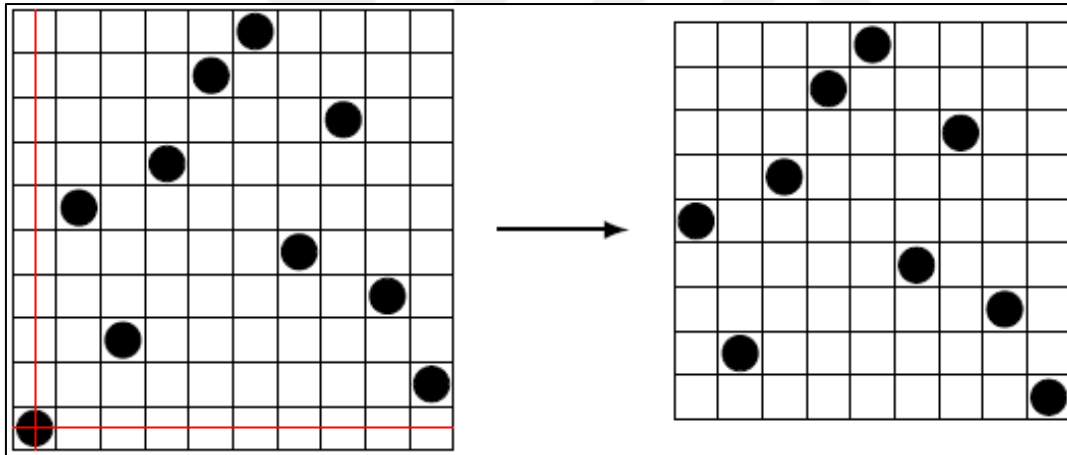
W_1 Costas Dizilerinden W_2 Costas Dizilerinin Elde Edilmesi

$p = 11$ sayısı için ilkel kökler 2, 6, 7 ve 8 olarak hesaplanmıştır. Bu ilkel köklerden elde edilen W_1 Costas dizileri de sırasıyla şekillerde gösterilmiştir. Şekil 3.4'te verilen $g = 2$ ilkel kökü için elde edilen 10'uncu mertebeden $\{1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10\ 9\ 7\ 3\ 6\}$ W_1 Costas dizisinin (0, 1) köşe noktasını bulunduğu satır ve sütun ile birlikte sildiğimizde 9'uncu mertebeden $\{1\ 3\ 7\ 4\ 9\ 8\ 6\ 2\ 5\}$ W_2 Costas dizisi elde edilir. Bu dizinin elde edilişi Şekil 3.8'de gösterilmiştir.

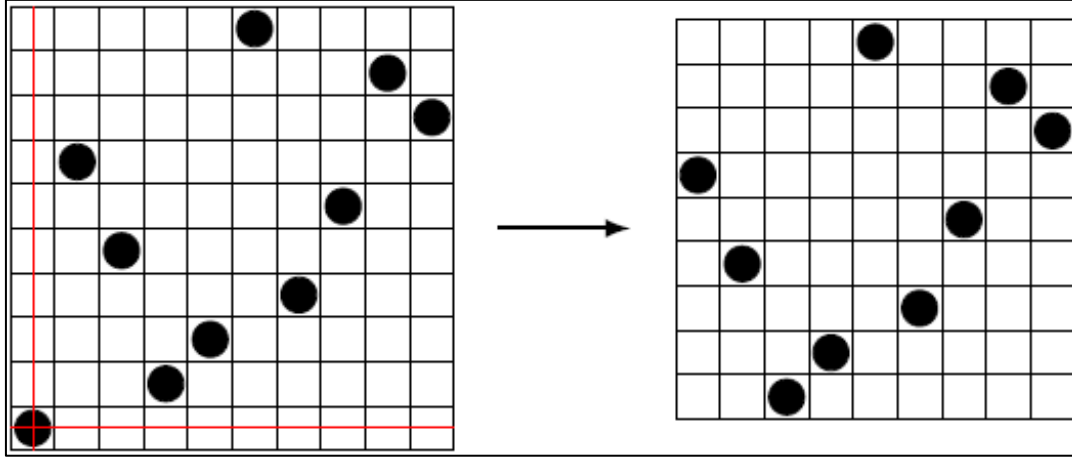


Şekil 3.8. $g = 2$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10\ 9\ 7\ 3\ 6\}$ W_1 Costas dizisinden 9'uncu mertebeden $\{1\ 3\ 7\ 4\ 9\ 8\ 6\ 2\ 5\}$ W_2 Costas dizisinin elde edilmesi

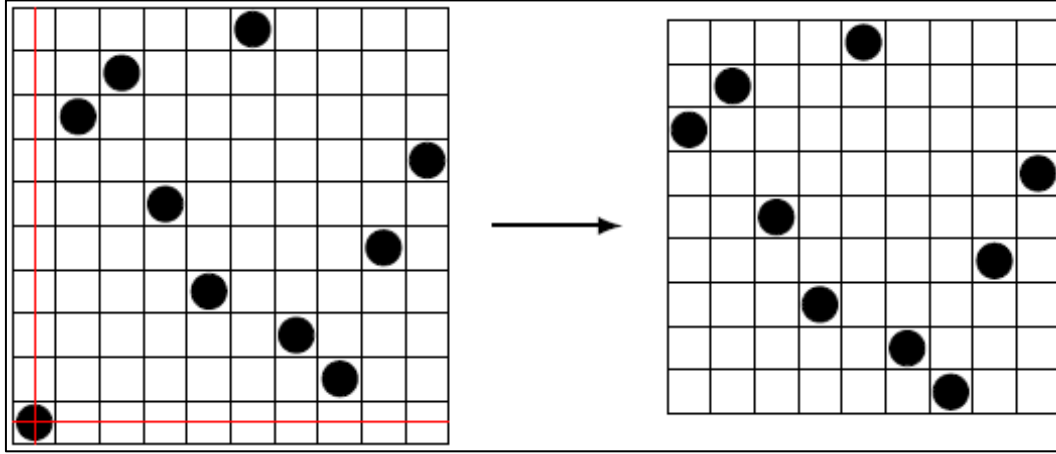
Benzer şekilde $g = 6$, $g = 7$ ve $g = 8$ ilkel kökleri için W_2 Costas dizilerinin elde edilişi sırasıyla aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



Şekil 3.9. $g = 6$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 6\ 3\ 7\ 9\ 10\ 5\ 8\ 4\ 2\}$ W_1 Costas dizisinden 9'uncu mertebeden $\{5\ 2\ 6\ 8\ 9\ 4\ 7\ 3\ 1\}$ W_2 Costas dizisinin elde edilmesi



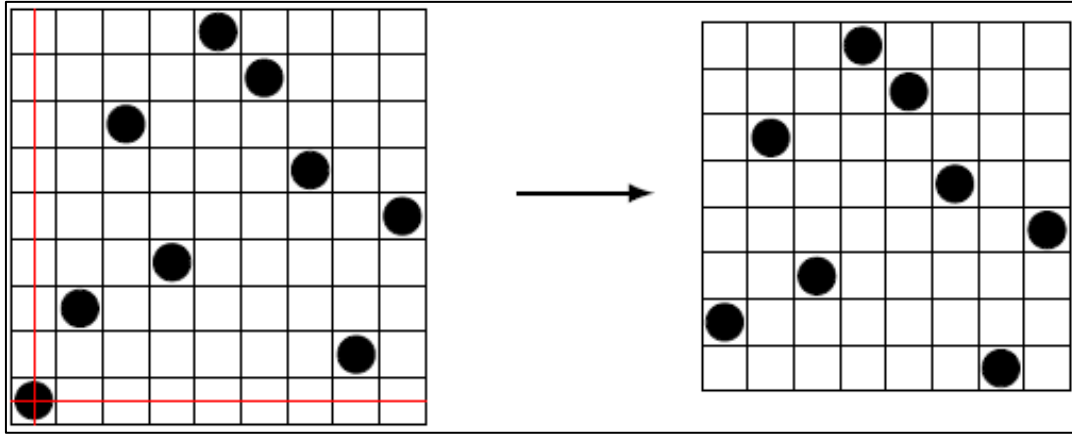
Şekil 3.10. $g = 7$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 7\ 5\ 2\ 3\ 10\ 4\ 6\ 9\ 8\}$ W_1 Costas dizisinden 9'uncu mertebeden $\{6\ 4\ 1\ 2\ 9\ 3\ 5\ 8\ 7\}$ W_2 Costas dizisinin elde edilmesi



Şekil 3.11. $g = 8$ ilkel kökü için 10'uncu mertebeden $\{1\ 8\ 9\ 6\ 4\ 10\ 3\ 2\ 5\ 7\}$ W_1 Costas dizisinden 9'uncu mertebeden $\{7\ 8\ 5\ 3\ 9\ 2\ 1\ 4\ 6\}$ W_2 Costas dizisinin elde edilmesi

W_2 Costas Dizilerinden W_3 Costas Dizilerinin Elde Edilmesi

Elde edilen tüm 9'uncu mertebeden W_2 Costas dizilerinin $(0, 1)$ köşe noktaları benzer şekilde bulunduğu satır ve sütun ile birlikte silinirse, 8'inci mertebeden W_3 Costas dizileri elde edilmiş olur. Örnek olarak $g = 2$ ilkel kökü için 8'inci mertebeden elde edilen W_3 Costas dizisi Şekil 3.12'de gösterilmiştir.



Şekil 3.12. $g = 2$ ilkel kökü için 9'uncu mertebeden $\{1\ 3\ 7\ 4\ 9\ 8\ 6\ 2\ 5\}$ W_2 Costas dizisinden 8'inci mertebeden $\{2\ 6\ 3\ 8\ 7\ 5\ 1\ 4\}$ W_3 Costas dizisinin elde edilmesi

3.1.2. Lempel yöntemi

n bir tamsayı ve p bir asal sayı olmak üzere, q elemanlı sonlu bir cismin (Galois Field; GF) $GF(q)$ eleman sayısı $q = p^n$ olarak hesaplanır [22]. α , $GF(q)$ için ilkel kök olmak üzere $1 \leq i, j \leq q - 2$ aralığında

$$\alpha^i + \alpha^j = 1 \quad (3.7)$$

koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden L_2 Costas dizisinin kordinatlarını temsil eder. 2 sayısı bu $GF(q)$ sonlu cismin ilkel kökü ve $q > 2$ ise $(q - 2, q - 2)$ noktası L_2 Costas dizisinin köşe noktasıdır [23]. Bu nokta bulunduğu satır ve sütun ile birlikte silindiğinde $(q - 3)$ 'üncü mertebeden L_3 Costas dizisi elde edilir [24, 25]. Lempel yöntemi ile elde edilen $(q - 3)$ 'üncü mertebeden L_3 Costas dizisi, Welch yöntemi ile elde edilen $(p - 3)$ 'üncü mertebeden W_3 Costas dizisi ile aynı değildir [26].

Lempel yöntemi ile hem asal sayılar için hem de asal sayıların kuvvetleri için Costas dizileri hesaplanabilmektedir. L_2 Costas dizilerinin sayısı $\phi(p^n - 1)/n$ formülü ile hesaplanır [27].

Bu bölümde örnek olarak $m = 13$ asal sayısı için Lempel yöntemi ile Costas dizileri elde edilmiştir. Costas dizilerinin temel yöntemlerden herhangi biri ile elde edilebilmesi için ilk olarak ilkel köklerin belirlenmesi gerekir. İlkel köklerin belirlenmesi için kesin bir kural yoktur. İlkel köklerin nasıl hesaplanacağı 3.1.1 Welch Yöntemi bölümünde örneklerle detaylıca anlatılmıştır.

Eş. 3.4'e göre ;

$$\varphi(13) = 13 \left(1 - \frac{1}{13}\right) = 12 \quad (3.8)$$

Dolayısıyla (mod 13)'e göre mertebesi 12 olan elemanlar ilkel köklerdir. İlkel köklerin sayısı $\varphi(m - 1)$ ile hesaplanır. $m = 13$ sayısı için $\varphi(12)$ ilkel köklerin sayısını verir.

$$\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3^1) = 12 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4 \quad (3.9)$$

Eş. 3.9'e göre $m = 13$ sayısı için 4 adet ilkel kök bulunmaktadır. İlkel kökleri bulmak için ilk olarak $m = 13$ sayısı için asal kalan sınıfları kümesinin belirlenmesi gerekir. $m = 13$ için asal kalan sınıfları kümesi

$$\mathbb{Z}_{13}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad (3.10)$$

olarak ifade edilebilir. Asal kalan sınıfları kümesindeki her bir elemanın sırasıyla mertebesi hesaplanarak ilkel kök olup olmadığı belirlenir. “1” sayısı birim eleman olduğu ve mertebesi “1” olduğu için ilkel kök değildir.

Hesaplamalar sonrasında 2, 6, 7 ve 11 sayılarının mertebelerinin 12 olduğu görülmüştür. Dolayısıyla bu sayıların kuvvetleri (mod 13)'e göre asal kalan sınıfları kümesindeki tüm elemanları verdiği için bu sayılar ilkel kök olarak tanımlanırlar.

Lempel metodu ile Costas dizilerini elde etmek için 13 elemanlı $GF(13)$ sonlu cismi kullanılabilir. Bu cismin elemanları;

$$GF(13) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad (3.11)$$

olarak yazılabilir. $GF(13)$ sonlu cismi oluşturulurken her bir ilkel kök için sırasıyla toplama çizelgeleri aşağıda hesaplanmıştır.

Çizelge 3.2. $\alpha = 2$ ilkel kökü için $GF(13)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}
0	0	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7
1	1	2	3	5	9	4	7	0	12	10	6	11	8
α^1	2	3	4	6	10	5	8	1	0	11	7	12	9
α^2	4	5	6	8	12	7	10	3	2	0	9	1	11
α^3	8	9	10	12	3	11	1	7	6	4	0	5	2
α^4	3	4	5	7	11	6	9	2	1	12	8	0	10
α^5	6	7	8	10	1	9	12	5	4	2	11	3	0
α^6	12	0	1	3	7	2	5	11	10	8	4	9	6
α^7	11	12	0	2	6	1	4	10	9	7	3	8	5
α^8	9	10	11	0	4	12	2	8	7	5	1	6	3
α^9	5	6	7	9	0	8	11	4	3	1	10	2	12
α^{10}	10	11	12	1	5	0	3	9	8	6	2	7	4
α^{11}	7	8	9	11	2	10	0	6	5	3	12	4	1

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\alpha^1 + \alpha^6 = 1$$

$$\alpha^5 + \alpha^3 = 1$$

$$\alpha^9 + \alpha^8 = 1$$

$$\alpha^2 + \alpha^{10} = 1$$

$$\alpha^6 + \alpha^1 = 1$$

$$\alpha^{10} + \alpha^2 = 1$$

$$\alpha^3 + \alpha^5 = 1$$

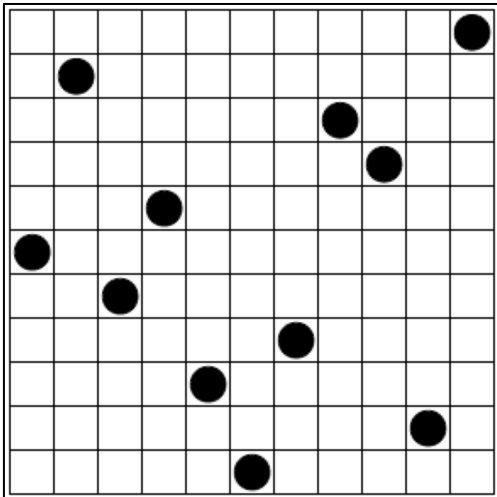
$$\alpha^7 + \alpha^4 = 1$$

$$\alpha^{11} + \alpha^{11} = 1$$

$$\alpha^4 + \alpha^7 = 1$$

$$\alpha^8 + \alpha^9 = 1$$

$\alpha^i + \alpha^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden L_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 2$ ilkel kökü için L_2 Costas dizisi $\{6\ 10\ 5\ 7\ 3\ 1\ 4\ 9\ 8\ 2\ 11\}$ olarak elde edilir. Söz konusu L_2 Costas dizisi Şekil 3.13'te gösterilmiştir.

Şekil 3.13. $\alpha = 2$ ilkel kökü için 11'inci mertebeden $\{6\ 10\ 5\ 7\ 3\ 1\ 4\ 9\ 8\ 2\ 11\}$ L_2 Costas dizisi

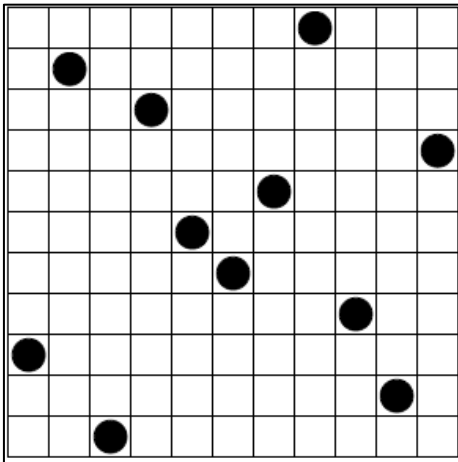
Çizelge 3.3. $\alpha = 6$ ilkel kökü için $GF(13)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}
0	0	1	6	10	8	9	2	12	7	3	5	4	11
1	1	2	7	11	9	10	3	0	8	4	6	5	12
α^1	6	7	12	3	1	2	8	5	0	9	11	10	4
α^2	10	11	3	7	5	6	12	9	4	0	2	1	8
α^3	8	9	1	5	3	4	10	7	2	11	0	12	6
α^4	9	10	2	6	4	5	11	8	3	12	1	0	7
α^5	2	3	8	12	10	11	4	1	9	5	7	6	0
α^6	12	0	5	9	7	8	1	11	6	2	4	3	10
α^7	7	8	0	4	2	3	9	6	1	10	12	11	5
α^8	3	4	9	0	11	12	5	2	10	6	8	7	1
α^9	5	6	11	2	0	1	7	4	12	8	10	9	3
α^{10}	4	5	10	1	12	0	6	3	11	7	9	8	2
α^{11}	11	12	4	8	6	7	0	10	5	1	3	2	9

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{array}{lll}
 \alpha^1 + \alpha^3 = 1 & \alpha^5 + \alpha^6 = 1 & \alpha^9 + \alpha^4 = 1 \\
 \alpha^2 + \alpha^{10} = 1 & \alpha^6 + \alpha^5 = 1 & \alpha^{10} + \alpha^2 = 1 \\
 \alpha^3 + \alpha^1 = 1 & \alpha^7 + \alpha^7 = 1 & \alpha^{11} + \alpha^8 = 1 \\
 \alpha^4 + \alpha^9 = 1 & \alpha^8 + \alpha^{11} = 1 &
 \end{array}$$

$\alpha = 6$ ilkel kökü için L_2 Costas dizisi $\{3\ 10\ 1\ 9\ 6\ 5\ 7\ 11\ 4\ 2\ 8\}$ olarak elde edilir. Söz konusu L_2 Costas dizisi Şekil 3.14'te gösterilmiştir.

Şekil 3.14. $\alpha = 6$ ilkel kökü için 11'inci mertebeden $\{3\ 10\ 1\ 9\ 6\ 5\ 7\ 11\ 4\ 2\ 8\}$ L_2 Costas dizisi

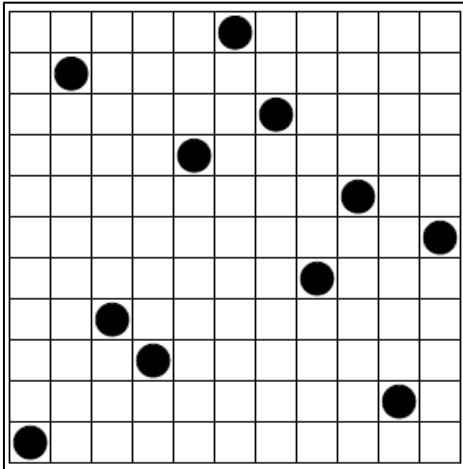
Çizelge 3.4. $\alpha = 7$ ilkel kökü için $GF(13)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}
0	0	1	7	10	5	9	11	12	6	3	8	4	2
1	1	2	8	11	6	10	12	0	7	4	9	5	3
α^1	7	8	1	4	12	3	5	6	0	10	2	11	9
α^2	10	11	4	7	2	6	8	9	3	0	5	1	12
α^3	5	6	12	2	10	1	3	4	11	8	0	9	7
α^4	9	10	3	6	1	5	7	8	2	12	4	0	11
α^5	11	12	5	8	3	7	9	10	4	1	6	2	0
α^6	12	0	6	9	4	8	10	11	5	2	7	3	1
α^7	6	7	0	3	11	2	4	5	12	9	1	10	8
α^8	3	4	10	0	8	12	1	2	9	6	11	7	5
α^9	8	9	2	5	13	4	6	7	1	11	3	12	10
α^{10}	4	5	11	1	9	0	2	3	10	7	12	8	6
α^{11}	2	3	9	12	7	11	0	1	8	5	10	6	4

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{array}{lll}
 \alpha^1 + \alpha^1 = 1 & \alpha^5 + \alpha^8 = 1 & \alpha^9 + \alpha^7 = 1 \\
 \alpha^2 + \alpha^{10} = 1 & \alpha^6 + \alpha^{11} = 1 & \alpha^{10} + \alpha^2 = 1 \\
 \alpha^3 + \alpha^4 = 1 & \alpha^7 + \alpha^9 = 1 & \alpha^{11} + \alpha^6 = 1 \\
 \alpha^4 + \alpha^3 = 1 & \alpha^8 + \alpha^5 = 1 &
 \end{array}$$

$\alpha = 7$ ilkel kökü için L_2 Costas dizisi $\{1\ 10\ 4\ 3\ 8\ 11\ 9\ 5\ 7\ 2\ 6\}$ olarak elde edilir. Söz konusu L_2 Costas dizisi Şekil 3.15'te gösterilmiştir.

Şekil 3.15. $\alpha = 7$ ilkel kökü için 11'inci mertebeden $\{1\ 10\ 4\ 3\ 8\ 11\ 9\ 5\ 7\ 2\ 6\}$ L_2 Costas dizisi

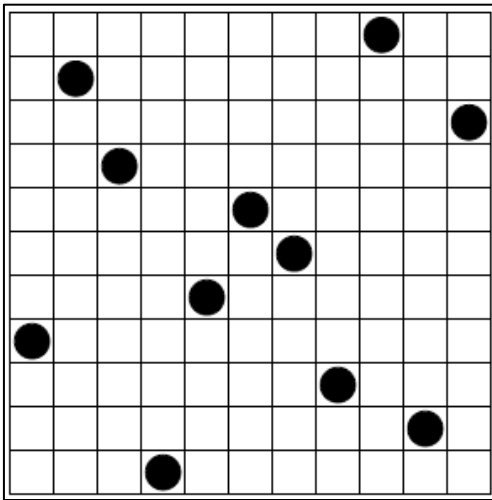
Çizelge 3.5. $\alpha = 11$ ilkel kökü için $GF(13)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}
0	0	1	11	4	5	3	7	12	2	9	8	10	6
1	1	2	12	5	6	4	8	0	3	10	9	11	7
α^1	11	12	9	2	3	1	5	10	0	7	6	8	4
α^2	4	5	2	8	9	7	11	3	6	0	12	1	10
α^3	5	6	3	9	10	8	12	4	7	1	0	2	11
α^4	3	4	1	7	8	6	10	2	5	12	11	0	9
α^5	7	8	5	11	12	10	1	6	9	3	2	4	0
α^6	12	0	10	3	4	2	6	11	1	8	7	9	5
α^7	2	3	0	6	7	5	9	1	4	11	10	12	8
α^8	9	10	7	0	1	12	3	8	11	5	4	6	2
α^9	8	9	6	12	0	11	2	7	10	4	3	5	1
α^{10}	10	11	8	1	2	0	4	9	12	6	5	7	3
α^{11}	6	7	4	10	11	9	0	5	8	2	1	3	12

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

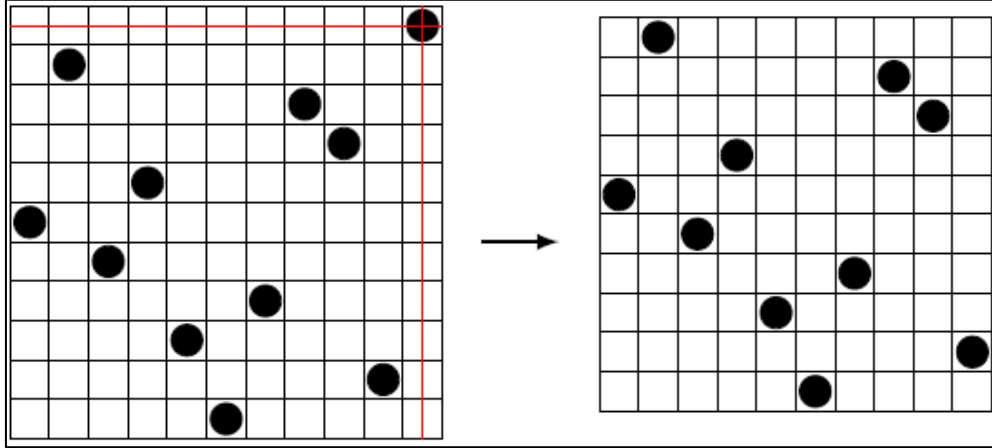
$$\begin{array}{lll}
 \alpha^1 + \alpha^4 = 1 & \alpha^5 + \alpha^5 = 1 & \alpha^9 + \alpha^{11} = 1 \\
 \alpha^2 + \alpha^{10} = 1 & \alpha^6 + \alpha^7 = 1 & \alpha^{10} + \alpha^2 = 1 \\
 \alpha^3 + \alpha^8 = 1 & \alpha^7 + \alpha^6 = 1 & \alpha^{11} + \alpha^9 = 1 \\
 \alpha^4 + \alpha^1 = 1 & \alpha^8 + \alpha^3 = 1 &
 \end{array}$$

$\alpha = 11$ ilkel kökü için L_2 Costas dizisi $\{4\ 10\ 8\ 1\ 5\ 7\ 6\ 3\ 11\ 2\ 9\}$ olarak elde edilir. Söz konusu L_2 Costas dizisi Şekil 3.16'da gösterilmiştir.



Şekil 3.16. $\alpha = 11$ ilkel kökü için 11'inci mertebeden $\{4\ 10\ 8\ 1\ 5\ 7\ 6\ 3\ 11\ 2\ 9\}$ L_2 Costas dizisi

2 sayısı ilkel kök olduğu için Şekil 3.13'te verilen $\{6\ 10\ 5\ 7\ 3\ 1\ 4\ 9\ 8\ 2\ 11\}$ L_2 Costas dizisinin $(i, j) = (9, 9)$ noktası köşe noktasını ifade etmektedir. Bu nokta bulunduğu satır ve sütun ile birlikte silinirse $(q - 3)$ 'üncü mertebeden $\{6\ 10\ 5\ 7\ 3\ 1\ 4\ 9\ 8\ 2\}$ L_3 Costas dizisi elde edilir. Şekil 3.17'de L_3 Costas dizisinin elde edilişi gösterilmektedir.



Şekil 3.17. $\alpha = 2$ ilkel kökü için 11'inci mertebeden $\{6\ 10\ 5\ 7\ 3\ 1\ 4\ 9\ 8\ 2\ 11\}$ L_2 Costas dizisinden 10'uncu mertebeden $\{6\ 10\ 5\ 7\ 3\ 1\ 4\ 9\ 8\ 2\}$ L_3 Costas dizisinin elde edilmesi

Diğer bir örnek olarak $q = 16$ sayısı için Lempel yöntemi ile Costas dizileri elde edilmiştir. İlk olarak 16 elemanlı sonlu cismin oluşturulması gerekir. q sayısı, asal bir sayının kuvveti olduğundan bu sonlu cismin elemanları sayılardan değil polinomlardan oluşmaktadır. Aşağıda 16 elemanlı sonlu bir cismin indirgenemez polinomlar kullanılarak nasıl oluşturulduğu ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Tanım

En az birinci dereceden iki polinom şeklinde çarpanlarına ayrılamayan polinomlara indirgenemez polinomlar denir. p^n elemanlı sonlu bir cismi oluşturabilmek için n 'inci dereceden indirgenemez polinomların hesaplanması gerekmektedir [28, 29].

$GF(2^4)$ yani $p = 2$, $n = 4$ sonlu cismini oluşturmak için indirgenemez polinomları hesaplayalım. $p = 2$ yani (mod 2) için aradığımız indirgenemez polinomlar, katsayıları 0 ve 1 olan $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ şeklinde yazılabilen n 'inci dereceden polinomlardır. İndirgenemez polinomları hesaplayabilmek için x 'e tam olarak bölünemeyen yani sabit terimi 1 olan polinomlar incelenmelidir. Bu tanıma uyan 8 farklı polinom yazılabilir.

Bu polinomlar;

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= x^4 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)(x + 1) \\
 f_2(x) &= x^4 + x^3 + 1 \\
 f_3(x) &= x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) \\
 f_4(x) &= x^4 + x + 1 \\
 f_5(x) &= x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x^3 + x + 1)(x + 1) \\
 f_6(x) &= x^4 + x^3 + x + 1 = (x^3 + 1)(x + 1) \\
 f_7(x) &= x^4 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x + 1) \\
 f_8(x) &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
 \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. $f_1(x)$, $f_3(x)$, $f_5(x)$, $f_6(x)$, $f_7(x)$ polinomları yukarıda gösterildiği gibi çarpanlarına ayrılabilirdiğinden indirgenebilir polinomlardır. $f_2(x) = x^4 + x^3 + 1$, $f_4(x) = x^4 + x + 1$, $f_8(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinomları ise indirgenemez polinomlardır. $GF(2^4)$ cismini oluşturmakta kullanılabilen indirgenemez polinomlara ilkel polinomlar denir. İlk beş derece için indirgenemez polinomların listesi Çizelge 3.6'da verilmiştir.

Çizelge 3.6. $p = 2$ için $n = 1$ 'den $n = 5$ 'e kadar olan indirgenemez polinomların listesi

n	İndirgenemez polinomlar
1	$x, x+1$
2	x^2+x+1
3	x^3+x^2+1, x^3+x+1
4	$x^4+x^3+1, x^4+x^3+x^2+x+1, x^4+x+1$
5	$x^5+x^2+1, x^5+x^3+x^2+x+1, x^5+x^3+1, x^5+x^4+x^3+x+1, x^5+x^4+x^3+x^2+1, x^5+x^4+x^2+x+1$

$f_4(x) = x^4 + x + 1$ polinomunun bir ilkel polinom olduğu gösterilebilir. Söz konusu polinomu kullanarak $GF(2^4)$ sonlu cismini oluşturalım. $f(x)$, $GF(q)$ veya $GF(p^n)$ 'de ilkel bir polinom ise, bu sonlu cismin bütün elemanları Eş. 3.12'de olduğu gibi hesaplanabilir.

$$x^0 = 1, x, x^2, x^3, \dots, x^{p^n-2} \quad (3.12)$$

$GF(p^n)$ yani $GF(2^4)$ için kuvvet döngüsü (power cycle) oluşturmak suretiyle elemanları bulunurken, mertebesi $n = 3$ olan $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ formunda bir polinomdan yararlanılır.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$					
0	0	0	0	$\rightarrow$	0
0	0	0	1	$\rightarrow$	1
0	0	1	0	$\rightarrow$	x
0	0	1	1	$\rightarrow$	$x+1$
0	1	0	0	$\rightarrow$	x^2
0	1	0	1	$\rightarrow$	x^2+1
0	1	1	0	$\rightarrow$	x^2+x
0	1	1	1	$\rightarrow$	x^2+x+1
1	0	0	0	$\rightarrow$	x^3
1	0	0	1	$\rightarrow$	x^3+1
1	0	1	0	$\rightarrow$	x^3+x
1	0	1	1	$\rightarrow$	x^3+x+1
1	1	0	0	$\rightarrow$	x^3+x^2
1	1	0	1	$\rightarrow$	x^3+x^2+1
1	1	1	0	$\rightarrow$	x^3+x^2+x
1	1	1	1	$\rightarrow$	x^3+x^2+x+1

$GF(2^4) = \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, x^3, x^3+1, x^3+x, x^3+x+1, x^3+x^2, x^3+x^2+1, x^3+x^2+x, x^3+x^2+x+1\}$ şeklinde oluşturulabilir.

“0” yutan eleman, “1” ise birim eleman olduğundan bu sayıların kuvvetleri $GF(2^4)$ ’ün kuvvet döngüsünde yer alan tüm elemanları vermeyeceği için ilkel eleman değildir. x ’in ilkel eleman olup olmadığı mertebesi hesaplanarak belirlenebilir.

x elemanının mertebesi

$$\begin{aligned}
 x^0 &= 1 & (\text{mod } x^4+x+1) \\
 x^1 &= x & (\text{mod } x^4+x+1) \\
 x^2 &= x^2 & (\text{mod } x^4+x+1) \\
 x^3 &= x^3 & (\text{mod } x^4+x+1) \\
 x^4 &= x+1 & (\text{mod } x^4+x+1) \\
 x^5 &= x^2+x & (\text{mod } x^4+x+1) \\
 x^6 &= x^3+x^2 & (\text{mod } x^4+x+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^7 &= x^3+x+1 & (\text{mod } x^4+x+1) \\
x^8 &= x^2+1 & (\text{mod } x^4+x+1) \\
x^9 &= x^3+x & (\text{mod } x^4+x+1) \\
x^{10} &= x^2+x+1 & (\text{mod } x^4+x+1) \\
x^{11} &= x^3+x^2+x & (\text{mod } x^4+x+1) \\
x^{12} &= x^3+x^2+x+1 & (\text{mod } x^4+x+1) \\
x^{13} &= x^3+x^2+1 & (\text{mod } x^4+x+1) \\
x^{14} &= x^3+1 & (\text{mod } x^4+x+1)
\end{aligned}$$

$\alpha = x$ olmak üzere, α^j şeklinde x 'in tüm kuvvetleri $0 \leq j \leq q - 2 = 14$ aralığında $GF(2^4)$ 'ün kuvvet döngüsünde yer alan tüm elemanları verdiğinden x ilkel elemandır. $GF(p^n)$ sonlu cismi için ilkel elemanların sayısı $\varphi(p^n - 1)$ ile hesaplanır.

$$\#GF(2^4) = \varphi(2^4 - 1) = \varphi(15) = 15 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8 \quad (3.13)$$

İlkel elemanlar belirlenip toplama tabloları oluşturulduktan sonra Costas dizileri elde edilebilir. Kuvvet döngüsünde yer alan diğer elemanların mertebelerine bakıldığında diğer ilkel elemanlar $\{x^2, x+1, x^3+x+1, x^2+1, x^3+x^2+x, x^3+x^2+1, x^3+1\}$ olarak hesaplanır.

$\alpha = x$ ilkel elemanı için

Çizelge 3.7. $\alpha = x$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x	x^2	x^3	$x+1$	x^2+x	x^3+x^2
1	1	0	$x+1$	x^2+1	x^3+1	x	x^2+x+1	x^3+x^2+1
α^1	x	$x+1$	0	x^2+x	x^3+x	1	x^2	x^3+x^2+x
α^2	x^2	x^2+1	x^2+x	0	x^3+x^2	x^2+x+1	x	x^3
α^3	x^3	x^3+1	x^3+x	x^3+x^2	0	x^3+x+1	x^3+x^2+x	x^2
α^4	$x+1$	x	1	x^2+x+1	x^3+x+1	0	x^2+1	x^3+x^2+x+1
α^5	x^2+x	x^2+x+1	x^2	x	x^3+x^2+x	x^2+1	0	x^3+x
α^6	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x	x^3	x^2	x^3+x^2+x+1	x^3+x	0
α^7	x^3+x+1	x^3+x	x^3+1	x^3+x^2+x+1	$x+1$	x^3	x^3+x^2+1	x^2+x+1
α^8	x^2+1	x^2	x^2+x	1	x^3+x^2+1	x^2+x	$x+1$	x^3+1
α^9	x^3+x	x^3+x+1	x^3	x^3+x^2+x	x	x^3+1	x^3+x^2	x^2+x
α^{10}	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	$x+1$	x^3+x^2+x+1	x^2	1	x^3+x+1
α^{11}	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2	x^3+x	x^2+x	x^3+x^2+1	x^3	x
α^{12}	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2+1	x^3+x+1	x^2+x+1	x^3+x^2	x^3+1	$x+1$
α^{13}	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^3+x^2+x+1	x^3+1	x^2+1	x^3+x^2+x	x^3+x+1	1
α^{14}	x^3+1	x^3	x^3+x+1	x^3+x^2+1	1	x^3+x	x^3+x^2+x+1	x^2+1

Çizelge 3.7. (devam) $\alpha = x$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}	α^{12}	α^{13}	α^{14}
0	x^3+x+1	x^2+1	x^3+x	x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+1	x^3+1
1	x^3+x	x^2	x^3+x+1	x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2	x^3
α^1	x^3+1	x^2+x	x^3	x^2+1	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x+1	x^3+x+1
α^2	x^3+x^2+x+1	1	x^3+x^2+x	$x+1$	x^3+x	x^3+x+1	x^3+1	x^3+x^2+1
α^3	$x+1$	x^3+x^2+1	x	x^3+x^2+x+1	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1
α^4	x^3	x^2+x	x^3+1	x^2	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^3+x^2+x	x^3+x
α^5	x^3+x^2+1	$x+1$	x^3+x^2	1	x^3	x^3+1	x^3+x+1	x^3+x^2+x+1
α^6	x^2+x+1	x^3+1	x^2+x	x^3+x+1	x	$x+1$	1	x^2+1
α^7	0	x^3+x^2+x	1	x^3+x^2	x^2+1	x^2	x^2+x	x
α^8	x^3+x^2+x	0	x^3+x^2+x+1	x	x^3+x+1	x^3+x	x^3	x^3+x^2
α^9	1	x^3+x^2+x+1	0	x^3+x^2+1	x^2	x^2+1	x^2+x+1	$x+1$
α^{10}	x^3+x^2	x	x^3+x^2+1	0	x^3+1	x^3	x^3+x	x^3+x^2+x
α^{11}	x^2+1	x^3+x+1	x^2	x^3+1	0	1	$x+1$	x^2+x+1
α^{12}	x^2	x^3+x	x^2+1	x^3	1	0	x	x^2+x
α^{13}	x^2+x	x^3	x^2+x+1	x^3+x	$x+1$	x	0	x^2
α^{14}	x	x^3+x^2	$x+1$	x^3+x^2+x	x^2+x+1	x^2+x	x^2	0

Yukarıdaki tabloda toplamı 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \alpha^4 &= 1 & \alpha^4 + \alpha^1 &= 1 & \alpha^7 + \alpha^9 &= 1 & \alpha^{10} + \alpha^5 &= 1 & \alpha^{13} + \alpha^6 &= 1 \\
\alpha^2 + \alpha^8 &= 1 & \alpha^5 + \alpha^{10} &= 1 & \alpha^8 + \alpha^2 &= 1 & \alpha^{11} + \alpha^{12} &= 1 & \alpha^{14} + \alpha^3 &= 1 \\
\alpha^3 + \alpha^{14} &= 1 & \alpha^6 + \alpha^{13} &= 1 & \alpha^9 + \alpha^7 &= 1 & \alpha^{12} + \alpha^{11} &= 1
\end{aligned}$$

$\alpha^i + \alpha^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden L_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x$ ilkel polinomu için L_2 Costas dizisi $\{4 \ 8 \ 14 \ 1 \ 10 \ 13 \ 9 \ 2 \ 7 \ 5 \ 12 \ 11 \ 6 \ 3\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x^2$ ilkel elemanı için

Çizelge 3.8. $\alpha = x^2$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x^2	$x+1$	x^3+x^2	x^2+1	x^2+x+1	x^3+x^2+x+1
1	1	0	x^2+1	x	x^3+x^2+1	x^2	x^2+x	x^3+x^2+x
α^1	x^2	x^2+1	0	x^2+x+1	x^3	1	$x+1$	x^3+x+1
α^2	$x+1$	x	x^2+x+1	0	x^3+x^2+x+1	x^2+x	x^2	x^3+x^2
α^3	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^3	x^3+x^2+x+1	0	x^3+1	x^3+x+1	$x+1$
α^4	x^2+1	x^2	1	x^2+x	x^3+1	0	x	x^3+x
α^5	x^2+x+1	x^2+x	$x+1$	x^2	x^3+x+1	x	0	x^3
α^6	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x+1	x^3+x^2	$x+1$	x^3+x	x^3	0
α^7	x^3+1	x^3	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x	x^2+1	x^3+x^2	x^3+x^2+x	x^2+x
α^8	x	$x+1$	x^2+x	1	x^3+x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	x^3+x^2+1
α^9	x^3	x^3+1	x^3+x^2	x^3+x+1	x^2	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x+1	x^2+x+1
α^{10}	x^2+x	x^2+x+1	x	x^2+1	x^3+x	$x+1$	1	x^3+1
α^{11}	x^3+x+1	x^3+x	x^3+x^2+x+1	x^3	x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2	x^2
α^{12}	x^3+x	x^3+x+1	x^3+x^2+x	x^3+1	x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+1	x^2+1
α^{13}	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x	x^3+x^2+1	x	x^3+x+1	x^3+1	1
α^{14}	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^3+1	x^3+x^2+x	1	x^3	x^3+x	x

+	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}	α^{12}	α^{13}	α^{14}
0	x^3+1	x	x^3	x^2+x	x^3+x+1	x^3+x	x^3+x^2+x	x^3+x^2+1
1	x^3	$x+1$	x^3+1	x^2+x+1	x^3+x	x^3+x+1	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2
α^1	x^3+x^2+1	x^2+x	x^3+x^2	x	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x	x^3+1
α^2	x^3+x^2+x	1	x^3+x+1	x^2+1	x^3	x^3+1	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x
α^3	x^2+1	x^3+x^2+x	x^2	x^3+x	x^2+x+1	x^2+x	x	1
α^4	x^3+x^2	x^2+x+1	x^3+x^2+1	$x+1$	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x+1	x^3
α^5	x^3+x^2+x	x^2+1	x^3+x^2+x+1	1	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^3+1	x^3+x
α^6	x^2+x	x^3+x^2+1	x^2+x+1	x^3+1	x^2	x^2+1	1	x
α^7	0	x^3+x+1	1	x^3+x^2+x+1	x	$x+1$	x^2+x+1	x^2
α^8	x^3+x+1	0	x^3+x	x^2	x^3+1	x^3	x^3+x^2	x^3+x^2+x+1
α^9	1	x^3+x	0	x^3+x^2+x	$x+1$	x	x^2+x	x^2+1
α^{10}	x^3+x^2+x+1	x^2	x^3+x^2+x	0	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^3	x^3+x+1
α^{11}	x	x^3+1	$x+1$	x^3+x^2+1	0	1	x^2+1	x^2
α^{12}	$x+1$	x^3	x	x^3+x^2	1	0	x^2	x^2+x+1
α^{13}	x^2+x+1	x^3+x^2	x^2+x	x^3	x^2+1	x^2	0	$x+1$
α^{14}	x^2	x^3+x^2+x+1	x^2+1	x^3+x+1	x^2	x^2+x+1	$x+1$	0

Yukarıdaki tabloda toplamı 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \alpha^4 &= 1 & \alpha^4 + \alpha^1 &= 1 & \alpha^7 + \alpha^9 &= 1 & \alpha^{10} + \alpha^5 &= 1 & \alpha^{13} + \alpha^6 &= 1 \\
\alpha^2 + \alpha^8 &= 1 & \alpha^5 + \alpha^{10} &= 1 & \alpha^8 + \alpha^2 &= 1 & \alpha^{11} + \alpha^{12} &= 1 & \alpha^{14} + \alpha^3 &= 1 \\
\alpha^3 + \alpha^{14} &= 1 & \alpha^6 + \alpha^{13} &= 1 & \alpha^9 + \alpha^7 &= 1 & \alpha^{12} + \alpha^{11} &= 1
\end{aligned}$$

$\alpha^i + \alpha^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q-2)$ 'nci dereceden L_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x^2$ ilkel elemanı için L_2 Costas dizisi $\{4\ 8\ 14\ 1\ 10\ 13\ 9\ 2\ 7\ 5\ 12\ 11\ 6\ 3\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x+1$ ilkel elemanı için

Çizelge 3.9. $\alpha = x+1$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	$x+1$	x^2+1	x^3+x^2+x+1	x	x^2+x	x^3+x
1	1	0	x	x^2	x^3+x^2+x	$x+1$	x^2+x+1	x^3+x+1
α^1	$x+1$	x	0	x^2+x	x^3+x^2	1	x^2+1	x^3+1
α^2	x^2+1	x^2	x^2+x	0	x^3+x	x^2+x+1	$x+1$	x^3+x^2+x+1
α^3	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2	x^3+x	0	x^3+x^2+1	x^3+1	x^2+1
α^4	x	$x+1$	1	x^2+x+1	x^3+x^2+1	0	x^2	x^3
α^5	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	$x+1$	x^3+1	x^2	0	x^3+x^2
α^6	x^3+x	x^3+x+1	x^3+1	x^3+x^2+x+1	x^2+1	x^3	x^3+x^2	0
α^7	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^3+x^2+x	x^3	x	x^3+x^2+x+1	x^2+x+1	x^2+x+1
α^8	x^2	x^2+1	x^2+x+1	1	x^3+x+1	x^2+x	x	x^3+x^2+x
α^9	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x+1	x^3+1	$x+1$	x^3+x^2+x	x^3+x	x^2+x
α^{10}	x^2+x+1	x^2+x	x^2	x	x^3	x^2+1	1	x^3+x^2+1
α^{11}	x^3+1	x^3	x^3+x	x^3+x^2	x^2+x	x^2	x^3+x^2+x+1	$x+1$
α^{12}	x^3	x^3+1	x^3+x+1	x^3+x^2+1	x^2+x+1	x^3+x	x^3+x^2+x	x
α^{13}	x^3+x+1	x^3+x	x^3	x^3+x^2+x	x^2	x^3+1	x^3+x^2+1	1
α^{14}	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+1	x^3+x+1	1	x^3+x^2	x^3	x^2

+	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}	α^{12}	α^{13}	α^{14}
0	x^3+x^2+1	x^2	x^3+x^2	x^2+x+1	x^3+1	x^3	x^3+x+1	x^3+x^2+x
1	x^3+x^2	x^2+1	x^3+x^2+1	x^2+x	x^3	x^3+1	x^3+x	x^3+x^2+x+1
α^1	x^3+x^2+x	x^2+x+1	x^3+x^2+x+1	x^2	x^3+x	x^3+x+1	x^3	x^3+x^2+1
α^2	x^3	1	x^3+1	x	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x	x^3+x+1
α^3	x	x^3+x+1	$x+1$	x^3	x^2+x	x^2+x+1	x^2	1
α^4	x^3+x^2+x+1	x^2+x	x^3+x^2+x	x^2+1	x^2	x^3+x	x^3+1	x^3+x^2
α^5	x^2+x+1	x	x^3+x	1	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2+1	x^3
α^6	x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^2+x	x^3+x^2+1	$x+1$	x	1	x^2
α^7	0	x^3+1	1	x^3+x	x^2	x^2+1	x^2+x	$x+1$
α^8	x^3+1	0	x^3	$x+1$	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^3+x^2+x+1	x^3+x
α^9	1	x^3	0	x^3+x+1	x^2+1	x^2	x^2+x+1	x
α^{10}	x^3+x	$x+1$	x^3+x+1	0	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2	x^3+1
α^{11}	x^2	x^3+x^2+1	x^2+1	x^3+x^2+x	0	1	x	x^2+x+1
α^{12}	x^2+1	x^3+x^2	x^2	x^3+x^2+x+1	1	0	$x+1$	x^2+x
α^{13}	x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^2+x+1	x^3+x^2	x	$x+1$	0	x^2+1
α^{14}	$x+1$	x^3+x	x	x^3+1	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	0

Yukarıdaki tabloda toplamı 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \alpha^1 + \alpha^4 &= 1 & \alpha^4 + \alpha^1 &= 1 & \alpha^7 + \alpha^9 &= 1 & \alpha^{10} + \alpha^5 &= 1 & \alpha^{13} + \alpha^6 &= 1 \\
 \alpha^2 + \alpha^8 &= 1 & \alpha^5 + \alpha^{10} &= 1 & \alpha^8 + \alpha^2 &= 1 & \alpha^{11} + \alpha^{12} &= 1 & \alpha^{14} + \alpha^3 &= 1 \\
 \alpha^3 + \alpha^{14} &= 1 & \alpha^6 + \alpha^{13} &= 1 & \alpha^9 + \alpha^7 &= 1 & \alpha^{12} + \alpha^{11} &= 1
 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \alpha^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q-2)$ 'nci dereceden L_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x+1$ ilkel elemanı için L_2 Costas dizisi $\{4\ 8\ 14\ 1\ 10\ 13\ 9\ 2\ 7\ 5\ 12\ 11\ 6\ 3\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x^3+x+1$ ilkel elemanı için

Çizelge 3.10. $\alpha = x^3+x+1$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x^3+x+1	x^3+1	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^2+x	x^3+x^2+x+1
1	1	0	x^3+x	x^3	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^2+x+1	x^3+x^2+x
α^1	x^3+x+1	x^3+x	0	x	x^2+x+1	x^2+x	x^3+1	x^2
α^2	x^3+1	x^3	x	0	x^2+1	x^2	x^3+x^2+x+1	x^2+x
α^3	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^2+x+1	x^2+1	0	1	x^3+x	$x+1$
α^4	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^2+x	x^2	1	0	x^3+x+1	x
α^5	x^2+x	x^2+x+1	x^3+1	x^3+x^2+x+1	x^3+x	x^3+x+1	0	x^3+1
α^6	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^2	x^2+x	$x+1$	x	x^3+1	0
α^7	$x+1$	x	x^3	x^3+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^2+1	x^3+x^2
α^8	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^2+1	x^2+x+1	x	$x+1$	x^3	1
α^9	x^3	x^3+1	$x+1$	1	x^2	x^2+1	x^3+x^2+x	x^2+x+1
α^{10}	x^2+x+1	x^2+x	x^3+x^2	x^3+x^2+x	x^3+x+1	x^3+x	1	x^3
α^{11}	x^2	x^2+1	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+1	x^3	x^3+1	x	x^3+x+1
α^{12}	x^3+x	x^3+x+1	1	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^3+x^2	x^2+1
α^{13}	x	$x+1$	x^3+1	x^3+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^2	x^3+x^2+1
α^{14}	x^2+1	x^2	x^3+x^2+x	x^3+x^2	x^3+1	x^3	$x+1$	x^3+x

+	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}	α^{12}	α^{13}	α^{14}
0	$x+1$	x^3+x^2+x	x^3	x^2+x+1	x^2	x^3+x	x	x^2+1
1	x	x^3+x^2+x+1	x^3+1	x^2+x	x^2+1	x^3+x+1	$x+1$	x^2
α^1	x^3	x^2+1	$x+1$	x^3+x^2	x^3+x^2+x+1	1	x^3+1	x^3+x^2+x
α^2	x^3+x	x^2+x+1	1	x^3+x^2+x	x^3+x^2+1	$x+1$	x^3+x+1	x^3+x^2
α^3	x^3+x^2+x+1	x	x^2	x^3+x+1	x^3	x^2+x	x^3+x^2+x	x^3+1
α^4	x^3+x^2+x	$x+1$	x^2+1	x^3+x	x^3+1	x^2+x+1	x^3+x^2+x+1	x^3
α^5	x^2+1	x^3	x^3+x^2+x	1	x	x^3+x^2	x^2	$x+1$
α^6	x^3+x^2	1	x^2+x+1	x^3	x^3+x+1	x^2+1	x^3+x^2+1	x^3+x
α^7	0	x^3+x^2+1	x^3+x+1	x^2	x^2+x+1	x^3+1	1	x^2+x
α^8	x^3+x^2+1	0	x^2+x	x^3+1	x^3+x	x^2	x^3+x^2	x^3+x+1
α^9	x^3+x+1	x^2+x	0	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2	x	x^3+x	x^3+x^2+1
α^{10}	x^2	x^3+1	x^3+x^2+x+1	0	$x+1$	x^3+x^2+1	x^2+1	x
α^{11}	x^2+x+1	x^3+x	x^3+x^2	$x+1$	0	x^3+x^2+x	x^2+x	1
α^{12}	x^3+1	x^2	x	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x	0	x^3	x^3+x^2+x+1
α^{13}	1	x^3+x^2	x^3+x	x^2+1	x^2+x	x^3	0	x^2+x+1
α^{14}	x^2+x	x^3+x+1	x^3+x^2+1	x	1	x^3+x^2+x+1	x^2+x+1	0

Yukarıdaki tabloda toplamı 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \alpha^1 + \alpha^{12} &= 1 & \alpha^4 + \alpha^3 &= 1 & \alpha^7 + \alpha^{13} &= 1 & \alpha^{10} + \alpha^5 &= 1 & \alpha^{13} + \alpha^7 &= 1 \\
 \alpha^2 + \alpha^9 &= 1 & \alpha^5 + \alpha^{10} &= 1 & \alpha^8 + \alpha^6 &= 1 & \alpha^{11} + \alpha^{14} &= 1 & \alpha^{14} + \alpha^{11} &= 1 \\
 \alpha^3 + \alpha^4 &= 1 & \alpha^6 + \alpha^8 &= 1 & \alpha^9 + \alpha^2 &= 1 & \alpha^{12} + \alpha^1 &= 1
 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \alpha^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q-2)$ 'nci dereceden L_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x^3+x+1$ ilkel elemanı için L_2 Costas dizisi $\{12\ 9\ 4\ 3\ 10\ 8\ 13\ 6\ 2\ 5\ 14\ 1\ 7\ 11\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x^2+1$ ilkel elemanı için

Çizelge 3.11. $\alpha = x^2+1$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x^2+1	x	x^3+x	x^2	x^2+x+1	x^3
1	1	0	x^2	$x+1$	x^3+x+1	x^2+1	x^2+x	x^3+1
α^1	x^2+1	x^2	0	x^2+x+1	x^3+x^2+x+1	1	x	x^3+x^2+1
α^2	x	$x+1$	x^2+x+1	0	x^3	x^2+x	x^2+1	x^3+x
α^3	x^3+x	x^3+x+1	x^3+x^2+x+1	x^3	0	x^3+x^2+x	x^3+x^2+1	x
α^4	x^2	x^2+1	1	x^2+x	x^3+x^2+x	0	$x+1$	x^3+x^2
α^5	x^2+x+1	x^2+x	x	x^2+1	x^3+x^2+1	$x+1$	0	x^3+x^2+x+1
α^6	x^3	x^3+1	x^3+x^2+1	x^3+x	x	x^3+x^2	x^3+x^2+x+1	0
α^7	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x+1	x^3+x^2	x^2	x^3+x	x^3+1	x^2+x
α^8	$x+1$	x	x^2+x	1	x^3+1	x^2+x+1	x^2	x^3+x+1
α^9	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x	x^3+x^2+1	x^2+1	x^3+x+1	x^3	x^2+x+1
α^{10}	x^2+x	x^2+x+1	$x+1$	x^2	x^3+x^2	x	1	x^3+x^2+x
α^{11}	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^3	x^3+x^2+x+1	x^2+x+1	x^3+1	x^3+x	x^2+1
α^{12}	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^3+1	x^3+x^2+x	x^2+x	x^3	x^3+x+1	x^2
α^{13}	x^3+1	x^3	x^3+x^2	x^3+x+1	$x+1$	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x	1
α^{14}	x^3+x+1	x^3+x	x^3+x^2+x	x^3+1	1	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2	$x+1$

+	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}	α^{12}	α^{13}	α^{14}
0	x^3+x^2+x	$x+1$	x^3+x^2+x+1	x^2+x	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^3+1	x^3+x+1
1	x^3+x^2+x+1	x	x^3+x^2+x	x^2+x+1	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^3	x^3+x
α^1	x^3+x+1	x^2+x	x^3+x	$x+1$	x^3	x^3+1	x^3+x^2	x^3+x^2+x
α^2	x^3+x^2	1	x^3+x^2+1	x^2	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x+1	x^3+1
α^3	x^2	x^3+1	x^2+1	x^3+x^2	x^2+x+1	x^2+x	$x+1$	1
α^4	x^3+x	x^2+x+1	x^3+x+1	x	x^3+1	x^3	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x+1
α^5	x^3+1	x^2	x^3	1	x^3+x	x^3+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2
α^6	x^2+x	x^3+x+1	x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^2+1	x^2	1	$x+1$
α^7	0	x^3+x^2+1	1	x^3	$x+1$	x	x^2+x+1	x^2+1
α^8	x^3+x^2+1	0	x^3+x^2	x^2+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x	x^3
α^9	1	x^3+x^2	0	x^3+1	x	$x+1$	x^2+x	x^2
α^{10}	x^3	x^2+1	x^3+1	0	x^3+x+1	x^3+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+1
α^{11}	$x+1$	x^3+x^2+x	x	x^3+x+1	0	1	x^2	x
α^{12}	x	x^3+x^2+x+1	$x+1$	x^3+x	1	0	x^2+1	x^2+x+1
α^{13}	x^2+x+1	x^3+x	x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^2	x^2+1	0	x
α^{14}	x^2+1	x^3	x^2	x^3+x^2+1	x	x^2+x+1	x	0

Yukarıdaki tabloda toplamı 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \alpha^1 + \alpha^4 &= 1 & \alpha^4 + \alpha^1 &= 1 & \alpha^7 + \alpha^9 &= 1 & \alpha^{10} + \alpha^5 &= 1 & \alpha^{13} + \alpha^6 &= 1 \\
 \alpha^2 + \alpha^8 &= 1 & \alpha^5 + \alpha^{10} &= 1 & \alpha^8 + \alpha^2 &= 1 & \alpha^{11} + \alpha^{12} &= 1 & \alpha^{14} + \alpha^3 &= 1 \\
 \alpha^3 + \alpha^{14} &= 1 & \alpha^6 + \alpha^{13} &= 1 & \alpha^9 + \alpha^7 &= 1 & \alpha^{12} + \alpha^{11} &= 1
 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \alpha^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q-2)$ 'nci dereceden L_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x^2+1$ ilkel elemanı için L_2 Costas dizisi $\{4 \ 8 \ 14 \ 1 \ 10 \ 13 \ 9 \ 2 \ 7 \ 5 \ 12 \ 11 \ 6 \ 3\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x^3+x^2+x$ ilkel elemanı için

Çizelge 3.12. $\alpha = x^3+x^2+x$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x^3+x^2+x	x^3+x+1	x^3	x^3+1	x^2+x+1	x^3+x^2
1	1	0	x^3+x^2+x+1	x^3+x	x^3+1	x^3	x^2+x	x^3+x^2+1
α^1	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	0	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1	x^3+1	x
α^2	x^3+x+1	x^3+x	x^2+1	0	$x+1$	x	x^3+x^2	x^2+x+1
α^3	x^3	x^3+1	x^2+x	$x+1$	0	1	x^3+x^2+x+1	x^2
α^4	x^3+1	x^3	x^2+x+1	x	1	0	x^3+x^2+x	x^2+1
α^5	x^2+x+1	x^2+x	x^3+1	x^3+x^2	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	0	x^3+x+1
α^6	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x	x^2+x+1	x^2	x^2+1	x^3+x+1	0
α^7	x^2	x^2+1	x^3+x	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2	x^3+x^2+1	$x+1$	x^3
α^8	x^3+x^2+1	x^3+x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+1	x^2+1	x^3+x	1
α^9	x^3+x	x^3+x+1	x^2	1	x	$x+1$	x^3+x^2+1	x^2+x
α^{10}	x^2+x	x^2+x+1	x^3	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	1	x^3+x
α^{11}	x	$x+1$	x^3+x^2	x^3+1	x^3+x	x^3+x+1	x^2+1	x^3+x^2+x
α^{12}	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	1	x^2	x^2+x+1	x^2+x	x^3	$x+1$
α^{13}	x^2+1	x^2	x^3+x+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x	x^3+1
α^{14}	$x+1$	x	x^3+x^2+1	x^3	x^3+x+1	x^3+x	x^2	x^3+x^2+x+1

+	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}	α^{12}	α^{13}	α^{14}
0	x^2	x^3+x^2+1	x^3+x	x^2+x	x	x^3+x^2+x+1	x^2+1	$x+1$
1	x^2+1	x^3+x^2	x^3+x+1	x^2+x+1	$x+1$	x^3+x^2+x	x^2	x
α^1	x^3+x	$x+1$	x^2	x^3	x^3+x^2	1	x^3+x+1	x^3+x^2+1
α^2	x^3+x^2+x+1	x^2+x	1	x^3+x^2+1	x^3+1	x^2	x^3+x^2+x	x^3
α^3	x^3+x^2	x^2+1	x	x^3+x^2+x	x^3+x	x^2+x+1	x^3+x^2+1	x^3+x+1
α^4	x^3+x^2+1	x^2+1	$x+1$	x^3+x^2+x+1	x^3+x+1	x^2+x	x^3+x^2	x^3+x
α^5	$x+1$	x^3+x	x^3+x^2+1	1	x^2+1	x^3	x	x^2
α^6	x^3	1	x^2+x	x^3+x	x^3+x^2+x	$x+1$	x^3+1	x^3+x^2+x+1
α^7	0	x^3+1	x^3+x^2+x	x	x^2+x	x^3+x+1	1	x^2+x+1
α^8	x^3+1	0	x^2+x+1	x^3+x+1	x^3+x^2+x+1	x	x^3	x^3+x^2+x
α^9	x^3+x^2+x	x^2+x+1	0	x^3+x^2	x^3	x^2+1	x^3+x^2+x+1	x^3+1
α^{10}	x	x^3+x+1	x^3+x^2	0	x^2	x^3+1	$x+1$	x^2+1
α^{11}	x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^3	x^2	0	x^3+x^2+1	x^2+x+1	1
α^{12}	x^3+x+1	x	x^2+1	x^3+1	x^3+x^2+1	0	x^3+x	x^3+x^2
α^{13}	1	x^3	x^3+x^2+x+1	$x+1$	x^2+x+1	x^3+x	0	x^2+x
α^{14}	x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^3+1	x^2+1	1	x^3+x^2	x^2+x	0

Yukarıdaki tabloda toplamı 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \alpha^1 + \alpha^{12} &= 1 & \alpha^4 + \alpha^3 &= 1 & \alpha^7 + \alpha^{13} &= 1 & \alpha^{10} + \alpha^5 &= 1 & \alpha^{13} + \alpha^7 &= 1 \\
 \alpha^2 + \alpha^9 &= 1 & \alpha^5 + \alpha^{10} &= 1 & \alpha^8 + \alpha^6 &= 1 & \alpha^{11} + \alpha^{14} &= 1 & \alpha^{14} + \alpha^{11} &= 1 \\
 \alpha^3 + \alpha^4 &= 1 & \alpha^6 + \alpha^8 &= 1 & \alpha^9 + \alpha^2 &= 1 & \alpha^{12} + \alpha^1 &= 1
 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \alpha^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q-2)$ 'nci dereceden L_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x^3+x^2+x$ ilkel elemanı için L_2 Costas dizisi $\{12\ 9\ 4\ 3\ 10\ 8\ 13\ 6\ 2\ 5\ 14\ 1\ 7\ 11\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x^3+x^2+1$ ilkel elemanı için

Çizelge 3.13. $\alpha = x^3+x^2+1$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x	x^3+x	x^3+x+1	x^2+x	x^3
1	1	0	x^3+x^2	x^3+x^2+x+1	x^3+x+1	x^3+x	x^2+x+1	x^3+1
α^1	x^3+x^2+1	x^3+x^2	0	$x+1$	x^2+x+1	x^2+x	x^3+x+1	x^2+1
α^2	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	$x+1$	0	x^2	x^2+1	x^3	x^2+x
α^3	x^3+x	x^3+x+1	x^2+x+1	x^2	0	1	x^3+x^2	x
α^4	x^3+x+1	x^3+x	x^2+x	x^2+1	1	0	x^3+x^2+1	$x+1$
α^5	x^2+x	x^2+x+1	x^3+x+1	x^3	x^3+x^2	x^3+x^2+1	0	x^3+x^2+x
α^6	x^3	x^3+1	x^2+1	x^2+x	x	$x+1$	x^3+x^2+x	0
α^7	x	$x+1$	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2	x^3	x^3+1	x^2	x^3+x
α^8	x^3+1	x^3	x^2	x^2+x+1	$x+1$	x	x^3+x^2+x+1	1
α^9	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x	1	x^2+1	x^2	x^3+1	x^2+x+1
α^{10}	x^2+x+1	x^2+x	x^3+x	x^3+1	x^3+x^2+1	x^3+x^2	1	x^3+x^2+x+1
α^{11}	x^2+1	x^2	x^3	x^3+x+1	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	$x+1$	x^3+x^2+1
α^{12}	x^3+x^2	x^3+x^2+1	1	x	x^2+x	x^2+x+1	x^3+x	x^2
α^{13}	$x+1$	x	x^3+x^2+x	x^3+x^2+1	x^3+1	x^3	x^2+1	x^3+x+1
α^{14}	x^2	x^2+1	x^3+1	x^3+x	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x	x^3+x^2

+	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}	α^{12}	α^{13}	α^{14}
0	x	x^3+1	x^3+x^2+x+1	x^2+x+1	x^2+1	x^3+x^2	$x+1$	x^2
1	$x+1$	x^3	x^3+x^2+x	x^2+x	x^2	x^3+x^2+1	x	x^2+1
α^1	x^3+x^2+x+1	x^2	x	x^3+x	x^3	1	x^3+x^2+x	x^3+1
α^2	x^3+x^2	x^2+x+1	1	x^3+1	x^3+x+1	x	x^3+x^2+1	x^3+x
α^3	x^3	$x+1$	x^2+1	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x+1	x^2+x	x^3+1	x^3+x^2+x
α^4	x^3+1	x	x^2	x^3+x^2	x^3+x^2+x	x^2+x+1	x^3	x^3+x^2+x+1
α^5	x^2	x^3+x^2+x+1	x^3+1	1	$x+1$	x^3+x	x^2+1	x
α^6	x^3+x	1	x^2+x+1	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+1	x^2	x^3+x+1	x^3+x^2
α^7	0	x^3+x+1	x^3+x^2+1	x^2+1	x^2+x+1	x^3+x^2+x	1	x^2+x
α^8	x^3+x+1	0	x^2+x	x^3+x^2+x	x^3+x^2	x^2+1	x^3+x	x^3+x^2+1
α^9	x^3+x^2+1	x^2+x	0	x^3	x^3+x	$x+1$	x^3+x^2	x^3+x+1
α^{10}	x^2+1	x^3+x^2+x	x^3	0	x	x^3+x+1	x^2	$x+1$
α^{11}	x^2+x+1	x^3+x^2	x^3+x	x	0	x^3+1	x^2+x	1
α^{12}	x^3+x^2+x	x^2+1	$x+1$	x^3+x+1	x^3+1	0	x^3+x^2+x+1	x^3
α^{13}	1	x^3+x	x^3+x^2	x^2	x^2+x	x^3+x^2+x+1	0	x^2+x+1
α^{14}	x^2+x	x^3+x^2+1	x^3+x+1	$x+1$	1	x^3	x^2+x+1	0

Yukarıdaki tabloda toplamı 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \alpha^1 + \alpha^{12} &= 1 & \alpha^4 + \alpha^3 &= 1 & \alpha^7 + \alpha^{13} &= 1 & \alpha^{10} + \alpha^5 &= 1 & \alpha^{13} + \alpha^7 &= 1 \\
 \alpha^2 + \alpha^9 &= 1 & \alpha^5 + \alpha^{10} &= 1 & \alpha^8 + \alpha^6 &= 1 & \alpha^{11} + \alpha^{14} &= 1 & \alpha^{14} + \alpha^{11} &= 1 \\
 \alpha^3 + \alpha^4 &= 1 & \alpha^6 + \alpha^8 &= 1 & \alpha^9 + \alpha^2 &= 1 & \alpha^{12} + \alpha^1 &= 1
 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \alpha^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q-2)$ 'nci dereceden L_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x^3+x^2+1$ ilkel elemanı için L_2 Costas dizisi $\{12\ 9\ 4\ 3\ 10\ 8\ 13\ 6\ 2\ 5\ 14\ 1\ 7\ 11\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x^3+1$ ilkel elemanı için

Çizelge 3.14. $\alpha = x^3+1$ ilkel elemanı için $GF(2^4)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x^3+1	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^2+x+1	x^3+x
1	1	0	x^3	x^3+x^2	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^2+x	x^3+x+1
α^1	x^3+1	x^3	0	x^2	x^2+x	x^2+x+1	x^3+x^2+x	$x+1$
α^2	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^2	0	x	$x+1$	x^3+x	x^2+x+1
α^3	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+x	x^2+x	x	0	1	x^3	x^2+1
α^4	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1	x^2+x+1	$x+1$	1	0	x^3+1	x^2
α^5	x^2+x+1	x^2+x	x^3+x^2+x	x^3+x	x^3	x^3+1	0	x^3+x^2+1
α^6	x^3+x	x^3+x+1	$x+1$	x^2+x+1	x^2+1	x^2	x^3+x^2+1	0
α^7	x^2+1	x^2	x^3+x^2	x^3	x^3+x	x^3+x+1	x	x^3+x^2+x+1
α^8	x^3+x+1	x^3+x	x	x^2+x	x^2	x^2+1	x^3+x^2	1
α^9	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^2+1	1	$x+1$	x	x^3+x+1	x^2+x
α^{10}	x^2+x	x^2+x+1	x^3+x^2+x+1	x^3+x+1	x^3+1	x^3	1	x^3+x^2
α^{11}	$x+1$	x	x^3+x	x^3+x^2+x	x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^2	x^3+1
α^{12}	x^3	x^3+1	1	x^2+1	x^2+x+1	x^2+x	x^3+x^2+x+1	x
α^{13}	x^2	x^2+1	x^3+x^2+1	x^3+1	x^3+x+1	x^3+x	$x+1$	x^3+x^2+x
α^{14}	x	$x+1$	x^3+x+1	x^3+x^2+x+1	x^3+x^2+1	x^3+x^2	x^2+1	x^3

+	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}	α^{12}	α^{13}	α^{14}
0	x^2+1	x^3+x+1	x^3+x^2	x^2+x	$x+1$	x^3	x^2	x
1	x^2	x^3+x	x^3+x^2+1	x^2+x+1	x	x^3+1	x^2+1	$x+1$
α^1	x^3+x^2	x	x^2+1	x^3+x^2+x+1	x^3+x	1	x^3+x^2+1	x^3+x+1
α^2	x^3	x^2+x	1	x^3+x+1	x^3+x^2+x	x^2+1	x^3+1	x^3+x^2+x+1
α^3	x^3+x	x^2	$x+1$	x^3+1	x^3+x^2	x^2+x+1	x^3+x+1	x^3+x^2+1
α^4	x^3+x+1	x^2+1	x	x^3	x^3+x^2+1	x^2+x	x^3+x	x^3+x^2
α^5	x	x^3+x^2	x^3+x+1	1	x^2	x^3+x^2+x+1	$x+1$	x^2+1
α^6	x^3+x^2+x+1	1	x^2+x	x^3+x^2	x^3+1	x	x^3+x^2+x	x^3
α^7	0	x^3+x^2+x	x^3+1	$x+1$	x^2+x	x^3+x^2+1	1	x^2+x+1
α^8	x^3+x^2+x	0	x^2+x+1	x^3+x^2+1	x^3	$x+1$	x^3+x^2+x+1	x^3+1
α^9	x^3+1	x^2+x+1	0	x^3+x	x^3+x^2+x+1	x^2	x^3	x^3+x^2+x
α^{10}	$x+1$	x^3+x^2+1	x^3+x	0	x^2+1	x^3+x^2+x	x	x^2
α^{11}	x^2+x	x^3	x^3+x^2+x+1	x^2+1	0	x^3+x+1	x^2+x+1	1
α^{12}	x^3+x^2+1	$x+1$	x^2	x^3+x^2+x	x^3+x+1	0	x^3+x^2	x^3+x
α^{13}	1	x^3+x^2+x+1	x^3	x	x^2+x+1	x^3+x^2	0	x^2+x
α^{14}	x^2+x+1	x^3+1	x^3+x^2+x	x^2	1	x^3+x	x^2+x	0

Yukarıdaki tabloda toplamı 1 olan α değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \alpha^1 + \alpha^{12} &= 1 & \alpha^4 + \alpha^3 &= 1 & \alpha^7 + \alpha^{13} &= 1 & \alpha^{10} + \alpha^5 &= 1 & \alpha^{13} + \alpha^7 &= 1 \\
 \alpha^2 + \alpha^9 &= 1 & \alpha^5 + \alpha^{10} &= 1 & \alpha^8 + \alpha^6 &= 1 & \alpha^{11} + \alpha^{14} &= 1 & \alpha^{14} + \alpha^{11} &= 1 \\
 \alpha^3 + \alpha^4 &= 1 & \alpha^6 + \alpha^8 &= 1 & \alpha^9 + \alpha^2 &= 1 & \alpha^{12} + \alpha^1 &= 1
 \end{aligned}$$

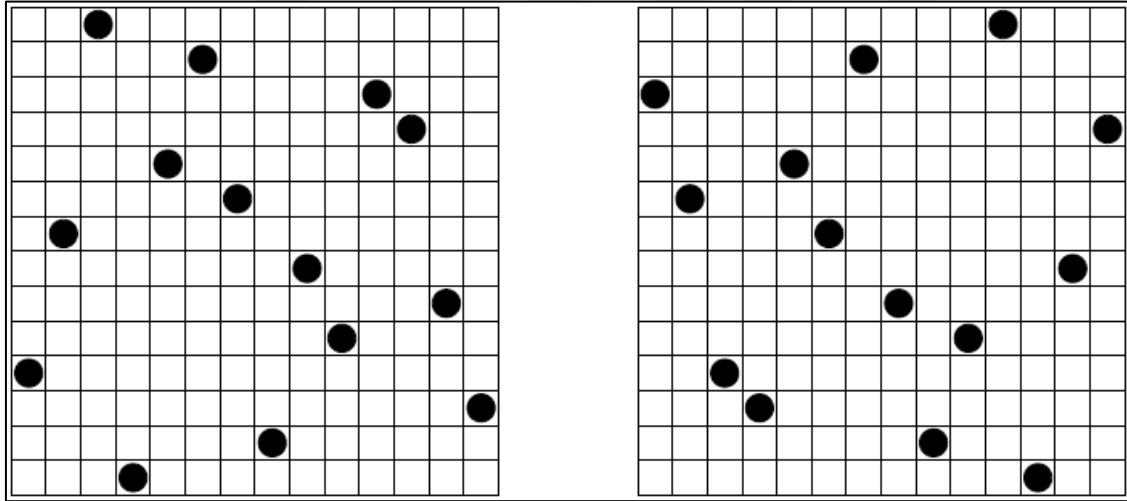
$\alpha^i + \alpha^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q-2)$ 'nci dereceden L_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x^3+1$ ilkel elemanı için L_2 Costas dizisi $\{12\ 9\ 4\ 3\ 10\ 8\ 13\ 6\ 2\ 5\ 14\ 1\ 7\ 11\}$ olarak elde edilir.

Sonuç olarak $f_4(x) = x^4+x+1$ ilkel polinomu için elde edilen Costas dizileri Çizelge 3.15'te verilmiştir.

Çizelge 3.15. $f_4(x) = x^4+x+1$ ilkel polinomu için elde edilen Costas dizileri

İlkel eleman	Costas dizileri
x	{4 8 14 1 10 13 9 2 7 5 12 11 6 3}
x^2	{4 8 14 1 10 13 9 2 7 5 12 11 6 3}
$x+1$	{4 8 14 1 10 13 9 2 7 5 12 11 6 3}
x^3+x+1	{12 9 4 3 10 8 13 6 2 5 14 1 7 11}
x^2+1	{4 8 14 1 10 13 9 2 7 5 12 11 6 3}
x^3+x^2+x	{12 9 4 3 10 8 13 6 2 5 14 1 7 11}
x^3+x^2+1	{12 9 4 3 10 8 13 6 2 5 14 1 7 11}
x^3+1	{12 9 4 3 10 8 13 6 2 5 14 1 7 11}

Tekrar eden Costas dizileri çıkarıldıktan sonra elde edilen L_2 Costas dizileri {4 8 14 1 10 13 9 2 7 5 12 11 6 3} ve {12 9 4 3 10 8 13 6 2 5 14 1 7 11} olarak ifade edilebilir. Bu Costas dizileri Şekil 3.18'de gösterilmektedir.



Şekil 3.18. $GF(2^4)$ sonlu cismi için x^4+x+1 ilkel polinomu kullanılarak elde edilen 14'üncü mertebeden {4 8 14 1 10 13 9 2 7 5 12 11 6 3} ve {12 9 4 3 10 8 13 6 2 5 14 1 7 11} L_2 Costas dizileri

{4 8 14 1 10 13 9 2 7 5 12 11 6 3} ve {12 9 4 3 10 8 13 6 2 5 14 1 7 11} L_2 Costas dizilerinin $(q-2, q-2) = (14, 14)$ noktası köşe noktası olmadığı için $GF(2^4)$ için $(q-3)$ yani 13'üncü mertebeden L_3 Costas dizisi elde edilemez.

3.1.3. Golomb metodu

n bir tamsayı ve p bir asal sayı olmak üzere, q elemanlı sonlu bir cismin $GF(q)$ eleman sayısı $q = p^n$ olarak hesaplanır [23]. α ve β , bu $GF(q)$ için ilkel kök ise $1 \leq (i, j) \leq q - 2$ aralığında

$$\alpha^i + \beta^j = 1 \quad (3.14)$$

koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci mertebeden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını gösterir [29]. $\alpha = \beta$ olduğu durumlarda elde edilen G_2 Costas dizisi bir önceki bölümde anlatılan Lempel metodu ile elde edilen L_2 Costas dizisi ile aynıdır [30]. G_2 Costas dizisinin en sol ve en alt noktası yani $(1, 1)$ noktası köşe noktasını temsil eder [23]. Bu nokta bulunduğu satır ve sütun ile birlikte silindiğinde $(q - 3)$ 'üncü mertebeden G_3 Costas dizisi elde edilir. Eğer G_3 Costas dizisi yine $(1, 1)$ noktasına sahipse veya diğer bir ifadeyle G_2 Costas dizisi $(2, 2)$ noktasına da sahipse, bu noktanın bulunduğu satır ve sütun ile birlikte silinmesiyle $(q - 4)$ 'üncü mertebeden G_4 Costas dizisi elde edilir [31]. G_2 Costas dizilerinin sayısı $\phi(p^n - 1) \cdot \phi(p^n - 1)/n$ formülü ile hesaplanır [18].

Bu bölümde örnek olarak $q = 11$ asal sayısı için Golomb yöntemi ile Costas dizileri elde edilmiştir. Söz konusu Costas dizilerinin elde edilebilmesi için ilk olarak ilkel köklerin belirlenmesi gerekir. İlkel köklerin nasıl hesaplanacağı 3.1.1 Welch Metodu bölümünde örneklerle detaylıca anlatılmıştır.

Eş. 3.4'e göre;

$$\phi(11) = 11 \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 10 \quad (3.15)$$

Dolayısıyla $(\text{mod } 11)$ 'e göre mertebesi 10 olan sayılar ilkel köklerdir. İlkel köklerin sayısı $\phi(p - 1)$ ile hesaplanır. $p = 11$ sayısı için $\phi(10)$ ilkel köklerin sayısını verir.

$$\phi(10) = \phi(2^1 \cdot 5^1) = 10 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4 \quad (3.16)$$

Eş. 3.16'ya göre $q = 11$ sayısı için 4 adet ilkel kök bulunmaktadır. İlkel kökleri bulmak için ilk olarak $q = 11$ sayısı için asal kalan sınıfları kümesinin belirlenmesi gerekir. $q = 11$ için asal kalan sınıfları kümesi;

$$\mathbb{Z}_{11}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (3.17)$$

olarak ifade edilebilir. Asal kalan sınıfları kümesindeki her bir elemanın sırasıyla mertebesi hesaplanarak ilkel kök olup olmadığı belirlenir. Bir sayının mertebesinin nasıl hesaplanacağı 3.1.1 Welch Metodu bölümünde detaylı olarak anlatılmıştır. “1” sayısı birim eleman olduğu ve mertebesi “1” olduğu için ilkel kök değildir. Hesaplamalar sonrasında 2, 6, 7 ve 8 sayılarının mertebesinin 10 olduğu görülmüştür. Dolayısıyla bu sayıların kuvvetleri (mod 11)’e göre asal kalan sınıfları kümesindeki tüm elemanları verdiği için ilkel kök olarak tanımlanır. Golomb metodu ile Costas dizilerini elde etmek için 11 elemanlı $GF(11)$ sonlu cismi kullanılabilir. Bu cismin elemanları;

$$GF(11) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (3.18)$$

olarak yazılabilir. $GF(11)$ sonlu cismini oluşturmak adına her bir (α, β) ilkel kök çifti için sırasıyla toplama tabloları aşağıda hesaplanmıştır.

Çizelge 3.16. $\alpha = 2$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama çizelgesi

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6
1	1	2	3	5	9	6	0	10	8	4	7
β^1	2	3	4	6	10	7	1	0	9	5	8
β^2	4	5	6	8	1	9	3	2	0	7	10
β^3	8	9	10	1	5	2	7	6	4	0	3
β^4	5	6	7	9	2	10	4	3	1	8	0
β^5	10	0	1	3	7	4	9	8	6	2	5
β^6	9	10	0	2	6	3	8	7	5	1	4
β^7	7	8	9	0	4	1	6	5	3	10	2
β^8	3	4	5	7	0	8	2	1	10	6	9
β^9	6	7	4	10	3	0	5	4	2	9	1

Yukarıdaki çizelgede toplamları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \alpha^1 + \beta^5 &= 1 & \alpha^4 + \beta^7 &= 1 & \alpha^7 + \beta^4 &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^3 &= 1 & \alpha^5 + \beta^1 &= 1 & \alpha^8 + \beta^6 &= 1 \\ \alpha^3 + \beta^2 &= 1 & \alpha^6 + \beta^8 &= 1 & \alpha^9 + \beta^9 &= 1 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 2$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{5\ 3\ 2\ 7\ 1\ 8\ 4\ 6\ 9\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.17. $\alpha = 2$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6
1	1	2	3	5	9	6	0	10	8	4	7
β^1	6	7	8	10	3	0	5	4	2	9	1
β^2	3	4	5	7	0	8	2	1	10	6	9
β^3	7	8	9	0	4	1	6	5	3	10	2
β^4	9	10	0	2	6	3	8	7	5	1	4
β^5	10	0	1	3	7	4	9	8	6	2	5
β^6	5	6	7	9	2	10	4	3	1	8	0
β^7	8	9	10	1	5	2	7	6	5	0	3
β^8	4	5	6	8	1	9	3	2	0	7	10
β^9	2	3	4	6	10	7	1	0	9	5	8

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \alpha^1 + \beta^5 &= 1 & \alpha^4 + \beta^3 &= 1 & \alpha^7 + \beta^6 &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^7 &= 1 & \alpha^5 + \beta^9 &= 1 & \alpha^8 + \beta^4 &= 1 \\ \alpha^3 + \beta^8 &= 1 & \alpha^6 + \beta^2 &= 1 & \alpha^9 + \beta^1 &= 1 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 2$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{5\ 7\ 8\ 3\ 9\ 2\ 6\ 4\ 1\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.18. $\alpha = 2$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6
1	1	2	3	5	9	6	0	10	8	4	7
β^1	7	8	9	0	4	1	6	5	3	10	2
β^2	5	6	7	9	2	10	4	3	1	8	0
β^3	2	3	4	6	10	7	1	0	9	5	8
β^4	3	4	5	7	0	8	2	1	10	6	9
β^5	10	0	1	3	7	4	9	8	6	2	5
β^6	4	5	6	8	1	9	3	2	0	7	10
β^7	6	7	8	10	3	0	5	4	2	9	1
β^8	9	10	0	2	6	3	8	7	5	1	4
β^9	8	9	10	1	5	2	7	6	5	0	3

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\alpha^1 + \beta^5 &= 1 & \alpha^4 + \beta^1 &= 1 & \alpha^7 + \beta^2 &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^9 &= 1 & \alpha^5 + \beta^3 &= 1 & \alpha^8 + \beta^8 &= 1 \\ \alpha^3 + \beta^6 &= 1 & \alpha^6 + \beta^4 &= 1 & \alpha^9 + \beta^7 &= 1\end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 2$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{5\ 9\ 6\ 1\ 3\ 4\ 2\ 8\ 7\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.19. $\alpha = 2$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6
1	1	2	3	5	9	6	0	10	8	4	7
β^1	8	9	10	1	5	2	7	6	4	0	3
β^2	9	10	0	2	6	3	8	7	5	1	4
β^3	6	7	8	10	3	0	5	4	2	9	1
β^4	4	5	6	8	1	9	3	2	0	7	10
β^5	10	0	1	3	7	4	9	8	6	2	5
β^6	3	4	5	7	0	8	2	1	10	6	9
β^7	2	3	4	6	10	7	1	0	9	5	8
β^8	5	6	7	9	2	10	4	3	1	8	0
β^9	7	8	9	0	4	1	6	5	3	10	2

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\alpha^1 + \beta^5 &= 1 & \alpha^4 + \beta^9 &= 1 & \alpha^7 + \beta^8 &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^1 &= 1 & \alpha^5 + \beta^7 &= 1 & \alpha^8 + \beta^2 &= 1 \\ \alpha^3 + \beta^4 &= 1 & \alpha^6 + \beta^6 &= 1 & \alpha^9 + \beta^3 &= 1\end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 2$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{5\ 1\ 4\ 9\ 7\ 6\ 8\ 2\ 3\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.20. $\alpha = 6$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	6	3	7	9	10	5	8	4	2
1	1	2	7	4	8	10	0	6	9	5	3
β^1	2	3	8	5	9	0	1	7	10	6	4
β^2	4	5	10	7	0	2	3	9	1	8	6
β^3	8	9	3	0	4	6	7	2	5	1	10
β^4	5	6	0	8	1	3	4	10	2	9	7
β^5	10	0	5	2	6	8	9	4	7	3	1
β^6	9	10	4	1	5	7	8	3	6	2	0
β^7	7	8	2	10	3	5	6	1	4	0	9
β^8	3	4	9	6	10	1	2	8	0	7	5
β^9	6	7	1	9	2	4	5	0	3	10	8

Yukarıdaki çizelgede toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \beta^9 &= 1 & \alpha^4 + \beta^8 &= 1 & \alpha^7 + \beta^2 &= 1 \\
\alpha^2 + \beta^6 &= 1 & \alpha^5 + \beta^1 &= 1 & \alpha^8 + \beta^3 &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^4 &= 1 & \alpha^6 + \beta^7 &= 1 & \alpha^9 + \beta^5 &= 1
\end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 6$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{9\ 6\ 4\ 8\ 1\ 7\ 2\ 3\ 5\}$ olarak elde edilir

Çizelge 3.21. $\alpha = 6$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	6	3	7	9	10	5	8	4	2
1	1	2	7	4	8	10	0	6	9	5	3
β^1	6	7	1	9	2	4	5	0	3	10	8
β^2	3	4	9	6	10	1	2	8	0	7	5
β^3	7	8	2	10	3	5	6	1	4	0	9
β^4	9	10	4	1	5	7	8	3	6	2	0
β^5	10	0	5	2	6	8	9	4	7	3	1
β^6	5	6	0	8	1	3	4	10	2	9	7
β^7	8	9	3	0	4	6	7	2	5	1	10
β^8	4	5	10	7	0	2	3	9	1	8	6
β^9	2	3	8	5	9	0	1	7	10	6	4

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \beta^1 &= 1 & \alpha^4 + \beta^2 &= 1 & \alpha^7 + \beta^8 &= 1 \\
\alpha^2 + \beta^4 &= 1 & \alpha^5 + \beta^9 &= 1 & \alpha^8 + \beta^7 &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^6 &= 1 & \alpha^6 + \beta^3 &= 1 & \alpha^9 + \beta^5 &= 1
\end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 6$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{1\ 4\ 6\ 2\ 9\ 3\ 8\ 7\ 5\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.22. $\alpha = 6$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	6	3	7	9	10	5	8	4	2
1	1	2	7	4	8	10	0	6	9	5	3
β^1	7	8	2	10	3	5	6	1	4	0	9
β^2	5	6	0	8	1	3	4	10	2	9	7
β^3	2	3	8	5	9	0	1	7	10	6	4
β^4	3	4	9	6	10	1	2	8	0	7	5
β^5	10	0	5	2	6	8	9	4	7	3	1
β^6	4	5	10	7	0	2	3	9	1	8	6
β^7	6	7	1	9	2	4	5	0	3	10	8
β^8	9	10	4	1	5	7	8	3	6	2	0
β^9	8	9	3	0	4	6	7	2	5	1	10

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \beta^7 &= 1 & \alpha^4 + \beta^4 &= 1 & \alpha^7 + \beta^6 &= 1 \\
\alpha^2 + \beta^8 &= 1 & \alpha^5 + \beta^3 &= 1 & \alpha^8 + \beta^9 &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^2 &= 1 & \alpha^6 + \beta^1 &= 1 & \alpha^9 + \beta^5 &= 1
\end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 6$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{7\ 8\ 2\ 4\ 3\ 1\ 6\ 9\ 5\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.23. $\alpha = 6$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	6	3	7	9	10	5	8	4	2
1	1	2	7	4	8	10	0	6	9	5	3
β^1	8	9	3	0	4	6	7	2	5	1	10
β^2	9	10	4	1	5	7	8	3	6	2	0
β^3	6	7	1	9	2	4	5	0	3	10	8
β^4	4	5	10	7	0	2	3	9	1	8	6
β^5	10	0	5	2	6	8	9	4	7	3	1
β^6	3	4	9	6	10	1	2	8	0	7	5
β^7	2	3	8	5	9	0	1	7	10	6	4
β^8	5	6	0	8	1	3	4	10	2	9	7
β^9	7	8	2	10	3	5	6	1	4	0	9

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\alpha^1 + \beta^3 = 1 \quad \alpha^4 + \beta^6 = 1 \quad \alpha^7 + \beta^4 = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \alpha^5 + \beta^7 = 1 \quad \alpha^8 + \beta^1 = 1$$

$$\alpha^3 + \beta^8 = 1 \quad \alpha^6 + \beta^9 = 1 \quad \alpha^9 + \beta^5 = 1$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 6$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{3 \ 2 \ 8 \ 6 \ 7 \ 9 \ 4 \ 1 \ 5\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.24. $\alpha = 7$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8
1	1	2	8	6	3	4	0	5	7	10	9
β^1	2	3	9	7	4	5	1	6	8	0	10
β^2	4	5	0	9	6	7	3	8	10	2	1
β^3	8	9	4	2	10	0	7	1	3	6	5
β^4	5	6	1	10	7	8	4	9	0	3	2
β^5	10	0	6	4	1	2	9	3	5	8	7
β^6	9	10	5	3	0	1	8	2	4	7	6
β^7	7	8	3	1	9	10	6	0	2	5	6
β^8	3	4	10	8	5	6	2	7	9	1	0
β^9	6	7	2	0	8	9	5	10	1	4	3

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \beta^4 &= 1 & \alpha^4 + \beta^6 &= 1 & \alpha^7 + \beta^9 &= 1 \\
\alpha^2 + \beta^7 &= 1 & \alpha^5 + \beta^1 &= 1 & \alpha^8 + \beta^8 &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^5 &= 1 & \alpha^6 + \beta^3 &= 1 & \alpha^9 + \beta^2 &= 1
\end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 7$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{4\ 7\ 5\ 6\ 1\ 3\ 9\ 8\ 2\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.25. $\alpha = 7$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8
1	1	2	8	6	3	4	0	5	7	10	9
β^1	6	7	2	0	8	9	5	10	1	4	6
β^2	3	4	10	8	5	6	2	7	9	1	0
β^3	7	8	3	1	9	10	6	0	2	5	4
β^4	9	10	5	3	0	1	8	2	4	7	6
β^5	10	0	6	4	1	2	9	3	5	8	7
β^6	5	6	1	10	7	8	4	9	0	3	2
β^7	8	9	4	2	10	0	7	1	3	6	5
β^8	4	5	0	9	6	7	3	8	10	2	1
β^9	2	3	9	7	4	5	1	6	8	0	10

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \beta^6 &= 1 & \alpha^4 + \beta^4 &= 1 & \alpha^7 + \beta^1 &= 1 \\
\alpha^2 + \beta^3 &= 1 & \alpha^5 + \beta^9 &= 1 & \alpha^8 + \beta^2 &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^5 &= 1 & \alpha^6 + \beta^7 &= 1 & \alpha^9 + \beta^8 &= 1
\end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 7$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{6\ 3\ 5\ 4\ 9\ 7\ 1\ 2\ 8\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.26. $\alpha = 7$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8
1	1	2	8	6	3	4	0	5	7	10	9
β^1	7	8	3	1	9	10	6	0	2	5	4
β^2	5	6	1	10	7	8	4	9	0	3	2
β^3	2	3	9	7	4	5	1	6	8	0	10
β^4	3	4	10	8	5	6	2	7	9	1	0
β^5	10	0	6	4	1	2	9	3	5	8	7
β^6	4	5	0	9	6	7	3	8	10	2	1
β^7	6	7	2	0	8	9	5	10	1	4	3
β^8	9	10	5	3	0	1	8	2	4	7	6
β^9	8	9	4	2	10	0	7	1	3	6	5

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\alpha^1 + \beta^2 = 1 \quad \alpha^4 + \beta^8 = 1 \quad \alpha^7 + \beta^7 = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^1 = 1 \quad \alpha^5 + \beta^3 = 1 \quad \alpha^8 + \beta^4 = 1$$

$$\alpha^3 + \beta^5 = 1 \quad \alpha^6 + \beta^9 = 1 \quad \alpha^9 + \beta^6 = 1$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 7$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{2 \ 1 \ 5 \ 8 \ 3 \ 9 \ 7 \ 4 \ 6\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.27. $\alpha = 7$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8
1	1	2	8	6	3	4	0	5	7	10	9
β^1	8	9	4	2	10	0	7	1	3	6	5
β^2	9	10	5	3	0	1	8	2	4	7	6
β^3	6	7	2	0	8	9	5	10	1	4	3
β^4	4	5	0	9	6	7	3	8	10	2	1
β^5	10	0	6	4	1	2	9	3	5	8	7
β^6	3	4	10	8	5	6	2	7	9	1	0
β^7	2	3	9	7	4	5	1	6	8	0	10
β^8	5	6	1	10	7	8	4	9	0	3	2
β^9	7	8	3	1	9	10	6	0	2	5	4

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \beta^8 &= 1 & \alpha^4 + \beta^2 &= 1 & \alpha^7 + \beta^3 &= 1 \\
\alpha^2 + \beta^9 &= 1 & \alpha^5 + \beta^7 &= 1 & \alpha^8 + \beta^6 &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^5 &= 1 & \alpha^6 + \beta^1 &= 1 & \alpha^9 + \beta^4 &= 1
\end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 7$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{8\ 9\ 5\ 2\ 7\ 1\ 3\ 6\ 4\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.28. $\alpha = 8$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	8	9	6	4	10	3	2	5	7
1	1	2	9	10	7	5	0	4	3	6	8
β^1	2	3	10	0	8	6	1	5	4	7	9
β^2	4	5	1	2	10	8	3	7	6	9	0
β^3	8	9	5	6	3	1	7	0	10	2	4
β^4	5	6	2	3	0	9	4	8	7	10	1
β^5	10	0	7	8	5	3	9	2	1	4	6
β^6	9	10	6	7	4	2	8	1	0	3	5
β^7	7	8	4	5	2	0	6	10	9	1	3
β^8	3	4	0	1	9	7	2	6	5	8	10
β^9	6	7	3	4	1	10	5	9	8	0	2

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \beta^2 &= 1 & \alpha^4 + \beta^3 &= 1 & \alpha^7 + \beta^5 &= 1 \\
\alpha^2 + \beta^8 &= 1 & \alpha^5 + \beta^1 &= 1 & \alpha^8 + \beta^7 &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^9 &= 1 & \alpha^6 + \beta^6 &= 1 & \alpha^9 + \beta^4 &= 1
\end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 8$ ve $\beta = 2$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{2\ 8\ 9\ 3\ 1\ 6\ 5\ 7\ 4\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.29. $\alpha = 8$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	8	9	6	4	10	3	2	5	7
1	1	2	9	10	7	5	0	4	3	6	8
β^1	6	7	3	4	1	10	5	9	8	0	2
β^2	3	4	0	1	9	7	2	6	5	8	10
β^3	7	8	4	5	2	0	6	10	9	1	3
β^4	9	10	6	7	4	2	8	1	0	3	5
β^5	10	0	7	8	5	3	9	2	1	4	6
β^6	5	6	2	3	0	9	4	8	7	10	1
β^7	8	9	5	6	3	1	7	0	10	2	4
β^8	4	5	1	2	10	8	3	7	6	9	0
β^9	2	3	10	0	8	6	1	5	4	7	9

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\alpha^1 + \beta^8 = 1 \quad \alpha^4 + \beta^7 = 1 \quad \alpha^7 + \beta^5 = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \alpha^5 + \beta^9 = 1 \quad \alpha^8 + \beta^3 = 1$$

$$\alpha^3 + \beta^1 = 1 \quad \alpha^6 + \beta^4 = 1 \quad \alpha^9 + \beta^6 = 1$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 8$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{8 \ 2 \ 1 \ 7 \ 9 \ 4 \ 5 \ 3 \ 6\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.30. $\alpha = 8$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	8	9	6	4	10	3	2	5	7
1	1	2	9	10	7	5	0	4	3	6	8
β^1	7	8	4	5	2	0	6	10	9	1	3
β^2	5	6	2	3	0	9	4	8	7	10	1
β^3	2	3	10	0	8	6	1	5	4	7	9
β^4	3	4	0	1	9	7	2	6	5	8	10
β^5	10	0	7	8	5	3	9	2	1	4	6
β^6	4	5	1	2	10	8	3	7	6	9	0
β^7	6	7	3	4	1	10	5	9	8	0	2
β^8	9	10	6	7	4	2	8	1	0	3	5
β^9	8	9	5	6	3	1	7	0	10	2	4

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \beta^6 &= 1 & \alpha^4 + \beta^9 &= 1 & \alpha^7 + \beta^5 &= 1 \\
\alpha^2 + \beta^4 &= 1 & \alpha^5 + \beta^3 &= 1 & \alpha^8 + \beta^1 &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^7 &= 1 & \alpha^6 + \beta^8 &= 1 & \alpha^9 + \beta^2 &= 1
\end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 8$ ve $\beta = 7$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{6\ 4\ 7\ 9\ 3\ 8\ 5\ 1\ 2\}$ olarak elde edilir.

Çizelge 3.31. $\alpha = 8$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için $GF(11)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9
0	0	1	8	9	6	4	10	3	2	5	7
1	1	2	9	10	7	5	0	4	3	6	8
β^1	8	9	5	6	3	1	7	0	10	2	4
β^2	9	10	6	7	4	2	8	1	0	3	5
β^3	6	7	3	4	1	10	5	9	8	0	2
β^4	4	5	1	2	10	8	3	7	6	9	0
β^5	10	0	7	8	5	3	9	2	1	4	6
β^6	3	4	0	1	9	7	2	6	5	8	10
β^7	2	3	10	0	8	6	1	5	4	7	9
β^8	5	6	2	3	0	9	4	8	7	10	1
β^9	7	8	4	5	2	0	6	10	9	1	3

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \beta^4 &= 1 & \alpha^4 + \beta^1 &= 1 & \alpha^7 + \beta^5 &= 1 \\
\alpha^2 + \beta^6 &= 1 & \alpha^5 + \beta^7 &= 1 & \alpha^8 + \beta^9 &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^3 &= 1 & \alpha^6 + \beta^2 &= 1 & \alpha^9 + \beta^8 &= 1
\end{aligned}$$

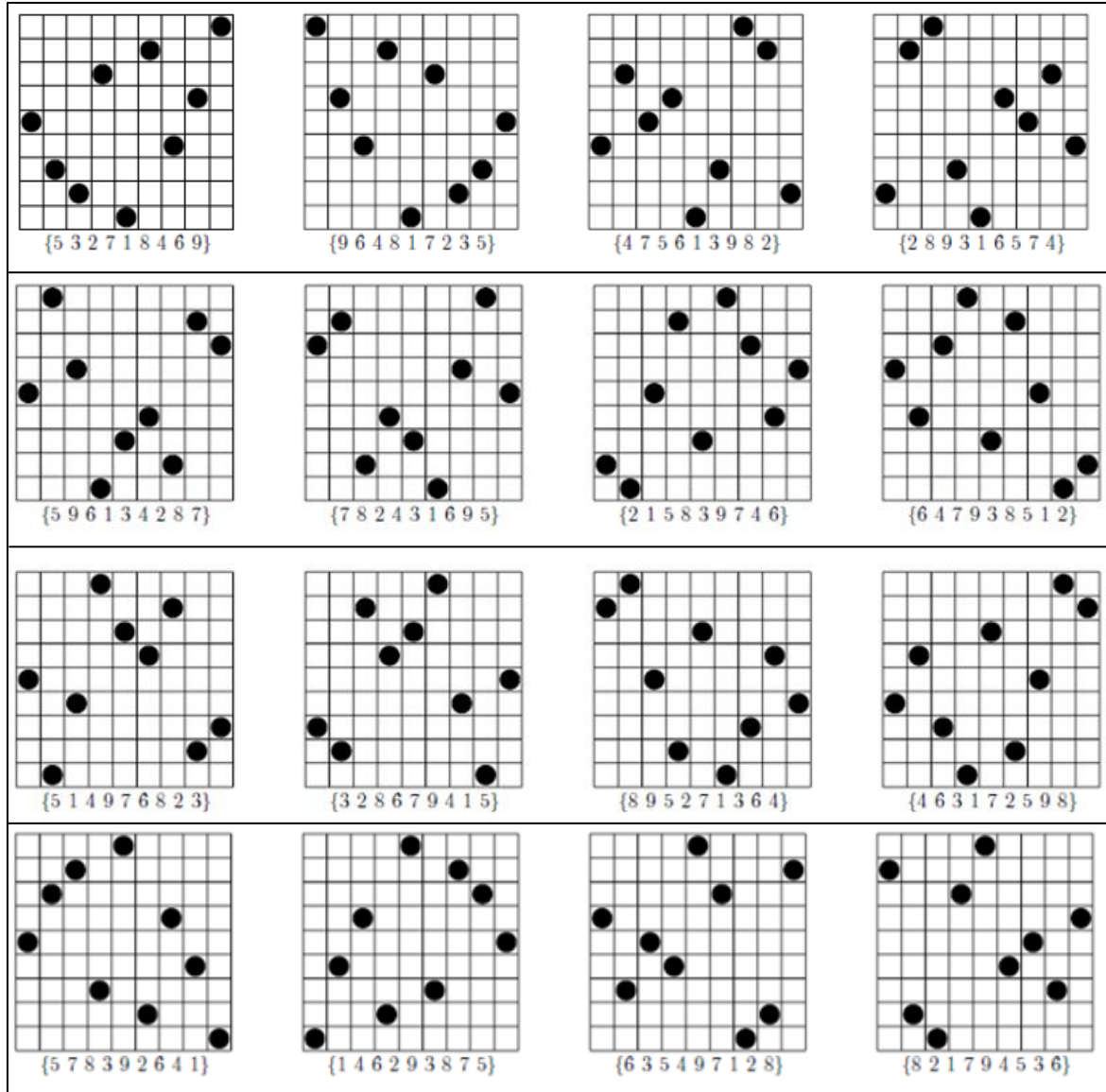
$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = 8$ ve $\beta = 8$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{4\ 6\ 3\ 1\ 7\ 2\ 5\ 9\ 8\}$ olarak elde edilir.

Sonuç olarak $q = 11$ asal sayısı için elde edilen tüm Golomb G_2 Costas dizileri Çizelge 3.32'de sunulmuştur.

Çizelge 3.32. $q = 11$ asal sayısı için elde edilen tüm Golomb G_2 Costas dizileri

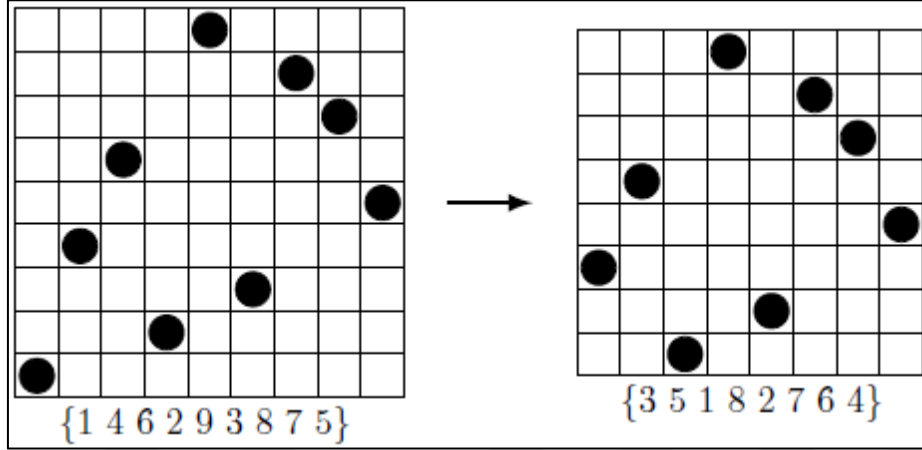
α/β	2	6	7	8
2	{5 3 2 7 1 8 4 6 9}	{9 6 4 8 1 7 2 3 5}	{4 7 5 6 1 3 9 8 2}	{2 8 9 3 1 6 5 7 4}
6	{5 7 8 3 9 2 6 4 1}	{1 4 6 2 9 3 8 7 5}	{6 3 5 4 9 7 1 2 8}	{8 2 1 7 9 4 5 3 6}
7	{5 9 6 1 3 4 2 8 7}	{7 8 2 4 3 1 6 9 5}	{2 1 5 8 3 9 7 4 6}	{6 4 7 9 3 8 5 1 2}
8	{5 1 4 9 7 6 8 2 3}	{3 2 8 6 7 9 4 1 5}	{8 9 5 2 7 1 3 6 4}	{4 6 3 1 7 2 5 9 8}

Çizelge 3.32’de yer alan G_2 Costas dizileri Şekil 3.19’da verilmiştir.

Şekil 3.19. $q = 11$ asal sayısı için elde edilen Golomb G_2 Costas dizileri

Bu dizilerden sadece $\alpha = 6$ ve $\beta = 6$ ilkel kökleri için elde edilen {1 4 6 2 9 3 8 7 5} G_2 Costas dizisi, (1, 1) elemanına sahip olduğundan, bu diziden $(q - 3)$ 'üncü yani 8'inci mertebeden G_3 Costas dizisi elde edilebilir. G_2 Costas dizisinde (1, 1) noktası bulunduğu

satır ve sütun ile birlikte silinirse 8'inci mertebeden $\{3\ 5\ 1\ 8\ 2\ 7\ 6\ 4\}$ G_3 Costas dizisi elde edilir.



Şekil 3.20. $q = 11$ asal sayısı için $\{1\ 4\ 6\ 2\ 9\ 3\ 8\ 7\ 5\}$ Golomb G_2 Costas dizisinden $\{3\ 5\ 1\ 8\ 2\ 7\ 6\ 4\}$ G_3 Costas dizisinin elde edilmesi

Çizelge 3.32'den görüleceği üzere üretilen G_2 Costas dizilerinden hiçbirisi $(1, 1)$ ve $(2, 2)$ noktasına sahip olmadığından bu örnek için G_4 Costas dizisi elde edilememiştir.

Diğer bir örnek olarak $q = 8$ sayısı için Golomb yöntemi ile Costas dizileri elde edilmiştir. İlk olarak 8 elemanlı sonlu cismin oluşturulması gerekir. q sayısı, asal bir sayının kuvveti olduğundan bu sonlu cismin elemanları sayılardan değil polinomlardan oluşmaktadır. Aşağıda 8 elemanlı sonlu bir cismin indirgenemez polinomlar kullanılarak nasıl oluşturulduğu ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

$GF(8) = GF(2^3)$ yani $p = 2$, $n = 3$ sonlu cismi için indirgenemez polinomları hesaplayalım. $p = 2$ yani (mod 2) için aradığımız indirgenemez polinomlar, katsayıları "0" ve "1" olan $ax^3 + bx^2 + cx + d$ şeklinde yazılabilen n 'inci dereceden polinomlardır. İndirgenemez polinomları hesaplayabilmek için x 'e tam olarak bölünemeyen yani sabit terimi "1" olan polinomlar incelenmelidir. Bu forma uyan 4 farklı polinom yazılabilir.

Bu polinomlar;

$$f_1(x) = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$f_2(x) = x^3 + x + 1$$

$$f_3(x) = x^3 + x^2 + 1$$

$$f_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$

olarak ifade edilebilir.

$f_1(x)$ ve $f_4(x)$ polinomları yukarıda gösterildiği gibi çarpanlarına ayrılabilirdiğinden indirgenemez polinomlardır. $f_2(x) = x^3 + x + 1$ ve $f_3(x) = x^3 + x^2 + 1$ polinomları ise indirgenemez polinomlardır. $GF(2^3)$ cismini oluşturmakta kullanılabilen indirgenemez polinomlara ilkel polinomlar denir. Çizelge 3.6'da $p = 2$ için $n = 1$ 'den $n = 5$ 'e kadar olan indirgenemez polinomlar verilmiştir.

$f_2(x) = x^3 + x + 1$ polinomunun ilkel polinom olduğu gösterilebilir. Bu polinomu kullanarak $GF(2^3)$ sonlu cismini oluşturalım. $f(x)$, $GF(q)$ veya $GF(p^n)$ 'de ilkel bir polinom ise, bu sonlu cismin bütün elemanları Eş. 3.19'da ifade edilen kuvvet döngüsü ile hesaplanabilir.

$$x^0 = 1, x, x^2, x^3, \dots, x^{p^n-2} \quad (3.19)$$

$GF(p^n)$ yani $GF(2^3)$ için kuvvet döngüsü oluşturmak suretiyle elemanları bulunurken, mertebesi $n = 2$ olan $f(x) = ax^2 + bx + c$ formunda bir polinomdan yararlanılır.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

0	0	0	→	0
0	0	1	→	1
0	1	0	→	x
0	1	1	→	$x+1$
1	0	0	→	x^2
1	0	1	→	x^2+1
1	1	0	→	x^2+x
1	1	1	→	x^2+x+1

$GF(2^3) = \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1\}$ şeklinde oluşturulabilir.

“0” yutan eleman “1” ise birim eleman olduğundan bu sayıların kuvvetleri $GF(2^3)$ 'ün kuvvet döngüsünde yer alan elemanları vermeyeceği için ilkel eleman değildirler. x 'in ilkel eleman olup olmadığı mertebesi hesaplanarak belirlenebilir.

x elemanının mertebesi

$$\begin{aligned}
 x^0 &= 1 & (\text{mod } x^3+x+1) \\
 x^1 &= x & (\text{mod } x^3+x+1) \\
 x^2 &= x^2 & (\text{mod } x^3+x+1) \\
 x^3 &= x+1 & (\text{mod } x^3+x+1) \\
 x^4 &= x^2+x & (\text{mod } x^3+x+1) \\
 x^5 &= x^2+x+1 & (\text{mod } x^3+x+1) \\
 x^6 &= x^2+1 & (\text{mod } x^3+x+1)
 \end{aligned}$$

$\alpha = x$ olmak üzere, α^j şeklinde x 'in tüm kuvvetleri $0 \leq j \leq (q - 2) = 6$ aralığında $GF(2^3)$ 'ün kuvvet döngüsünde yer alan tüm elemanları verdiğinden x ilkel elemandır. $GF(p^n)$ sonlu cismi için ilkel elemanların sayısı $\varphi(p^n - 1)$ ile hesaplanır.

$$GF(2^3) = \varphi(2^3 - 1) = \varphi(7) = 7 \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 6 \quad (3.20)$$

İlkel elemanlar belirlenip toplama tabloları oluşturulduktan sonra Costas dizileri elde edilebilir. Kuvvet döngüsünde yer alan diğer elemanların mertebelerine bakıldığında tüm ilkel elemanlar $\{x, x^2, x+1, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1\}$ olarak hesaplanır.

$\alpha = x$ ve $\beta = x$ ilkel elemanları için

Çizelge 3.33. $\alpha = x$ ve $\beta = x$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
1	1	0	$x+1$	x^2+1	x	x^2+x+1	x^2+x	x^2
β^1	x	$x+1$	0	x^2+x	1	x^2	x^2+1	x^2+x+1
β^2	x^2	x^2+1	x^2+x	0	x^2+x+1	x	$x+1$	1
β^3	$x+1$	x	1	x^2+x+1	0	x^2+1	x^2	x^2+x
β^4	x^2+x	x^2+x+1	x^2	x	x^2+1	0	1	$x+1$
β^5	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	$x+1$	x^2	1	0	x
β^6	x^2+1	x^2	x^2+x+1	1	x^2+x	$x+1$	x	0

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\alpha^1 + \beta^3 = 1 \quad \alpha^3 + \beta^1 = 1 \quad \alpha^5 + \beta^4 = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^6 = 1 \quad \alpha^4 + \beta^5 = 1 \quad \alpha^6 + \beta^2 = 1$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x$ ve $\beta = x$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{3\ 6\ 1\ 5\ 4\ 2\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x$ ve $\beta = x^2$ ilkel elemanları için

Çizelge 3.34. $\alpha = x$ ve $\beta = x^2$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3 + x + 1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
1	1	0	$x+1$	x^2+1	x	x^2+x+1	x^2+x	x^2
β^1	x^2	x^2+1	x^2+x	0	x^2+x+1	x	$x+1$	1
β^2	x^2+x	x^2+x+1	x^2	x	x^2+1	0	1	$x+1$
β^3	x^2+1	x^2	x^2+x+1	1	x^2+x	$x+1$	x	0
β^4	x	$x+1$	0	x^2+x	1	x^2	x^2+1	x^2+x+1
β^5	$x+1$	x	1	x^2+x+1	0	x^2+1	x^2	x^2+x
β^6	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	$x+1$	x^2	1	0	x

Yukarıdaki tabloda toplamları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\alpha^1 + \beta^5 = 1 \quad \alpha^3 + \beta^4 = 1 \quad \alpha^5 + \beta^2 = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^3 = 1 \quad \alpha^4 + \beta^6 = 1 \quad \alpha^6 + \beta^1 = 1$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x$ ve $\beta = x^2$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{5\ 3\ 4\ 6\ 2\ 1\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x$ ve $\beta = x+1$ ilkel elemanları için

Çizelge 3.35. $\alpha = x$ ve $\beta = x+1$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
1	1	0	$x+1$	x^2+1	x	x^2+x+1	x^2+x	x^2
β^1	$x+1$	x	1	x^2+x+1	0	x^2+1	x^2	x^2+x
β^2	x^2+1	x^2	x^2+x+1	1	x^2+x	$x+1$	x	0
β^3	x^2	x^2+1	x^2+x	0	x^2+x+1	x	$x+1$	1
β^4	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	$x+1$	x^2	1	0	x
β^5	x	$x+1$	0	x^2+x	1	x^2	x^2+1	x^2+x+1
β^6	x^2+x	x^2+x+1	x^2	x	x^2+1	0	1	$x+1$

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \alpha^1 + \beta^1 &= 1 & \alpha^3 + \beta^5 &= 1 & \alpha^5 + \beta^6 &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 1 & \alpha^4 + \beta^4 &= 1 & \alpha^6 + \beta^3 &= 1 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q-2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x$ ve $\beta = x+1$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{1\ 2\ 5\ 4\ 6\ 3\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x$ ve $\beta = x^2+1$ ilkel elemanları için

Çizelge 3.36. $\alpha = x$ ve $\beta = x^2+1$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
1	1	0	$x+1$	x^2+1	x	x^2+x+1	x^2+x	x^2
β^1	x^2+1	x^2	x^2+x+1	1	x^2+x	$x+1$	x	0
β^2	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	$x+1$	x^2	1	0	x
β^3	x^2+x	x^2+x+1	x^2	x	x^2+1	0	1	$x+1$
β^4	$x+1$	x	1	x^2+x+1	0	x^2+1	x^2	1
β^5	x^2	x^2+1	x^2+x	0	x^2+x+1	x	$x+1$	1
β^6	x	$x+1$	0	x^2+x	1	x^2	x^2+1	x^2+x+1

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \alpha^1 + \beta^4 &= 1 & \alpha^3 + \beta^6 &= 1 & \alpha^5 + \beta^3 &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^1 &= 1 & \alpha^4 + \beta^2 &= 1 & \alpha^6 + \beta^5 &= 1 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x$ ve $\beta = x^2+1$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{4\ 1\ 6\ 2\ 3\ 5\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x$ ve $\beta = x^2+x$ ilkel elemanları için

Çizelge 3.37. $\alpha = x$ ve $\beta = x^2+x$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
1	1	0	$x+1$	x^2+1	x	x^2+x+1	x^2+x	x^2
β^1	x^2+x	x^2+x+1	x^2	x	x^2+1	0	1	$x+1$
β^2	x	$x+1$	0	x^2+x	1	x^2	x^2+1	x^2+x+1
β^3	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	$x+1$	x^2	1	0	x
β^4	x^2	x^2+1	x^2+x	0	x^2+x+1	x	$x+1$	1
β^5	x^2+1	x^2	x^2+x+1	1	x^2+x	$x+1$	x	0
β^6	$x+1$	x	1	x^2+x+1	0	x^2+1	x^2	x^2+x

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \alpha^1 + \beta^6 &= 1 & \alpha^3 + \beta^2 &= 1 & \alpha^5 + \beta^1 &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^5 &= 1 & \alpha^4 + \beta^3 &= 1 & \alpha^6 + \beta^4 &= 1 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x$ ve $\beta = x^2+x$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{6\ 5\ 2\ 3\ 1\ 4\}$ olarak elde edilir.

$\alpha = x$ ve $\beta = x^2+x+1$ ilkel elemanları için

Çizelge 3.38. $\alpha = x$ ve $\beta = x^2+x+1$ ilkel elemanları ve $f_2(x) = x^3+x+1$ ilkel polinomu için $GF(2^3)$ sonlu cisminin toplama tablosu

+	0	1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
1	1	0	$x+1$	x^2+1	x	x^2+x+1	x^2+x	x^2
β^1	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	$x+1$	x^2	1	0	x
β^2	$x+1$	x	1	x^2+x+1	0	x^2+1	x^2	x^2+x
β^3	x	$x+1$	0	x^2+x	1	x^2	x^2+1	x^2+x+1
β^4	x^2+1	x^2	x^2+x+1	1	x^2+x	$x+1$	x	0
β^5	x^2+x	x^2+x+1	x^2	x	x^2+1	0	1	$x+1$
β^6	x^2	x^2+1	x^2+x	0	x^2+x+1	x	$x+1$	1

Yukarıdaki tabloda toplamaları 1 olan α ve β değerleri sütun ve satır olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \alpha^1 + \beta^2 &= 1 & \alpha^3 + \beta^3 &= 1 & \alpha^5 + \beta^5 &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^4 &= 1 & \alpha^4 + \beta^1 &= 1 & \alpha^6 + \beta^6 &= 1 \end{aligned}$$

$\alpha^i + \beta^j = 1$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları $(q - 2)$ 'nci dereceden G_2 Costas dizisinin koordinatlarını verir. Bu koşula göre $\alpha = x$ ve $\beta = x^2 + x + 1$ ilkel kökleri için G_2 Costas dizisi $\{2\ 4\ 3\ 1\ 5\ 6\}$ olarak elde edilir.

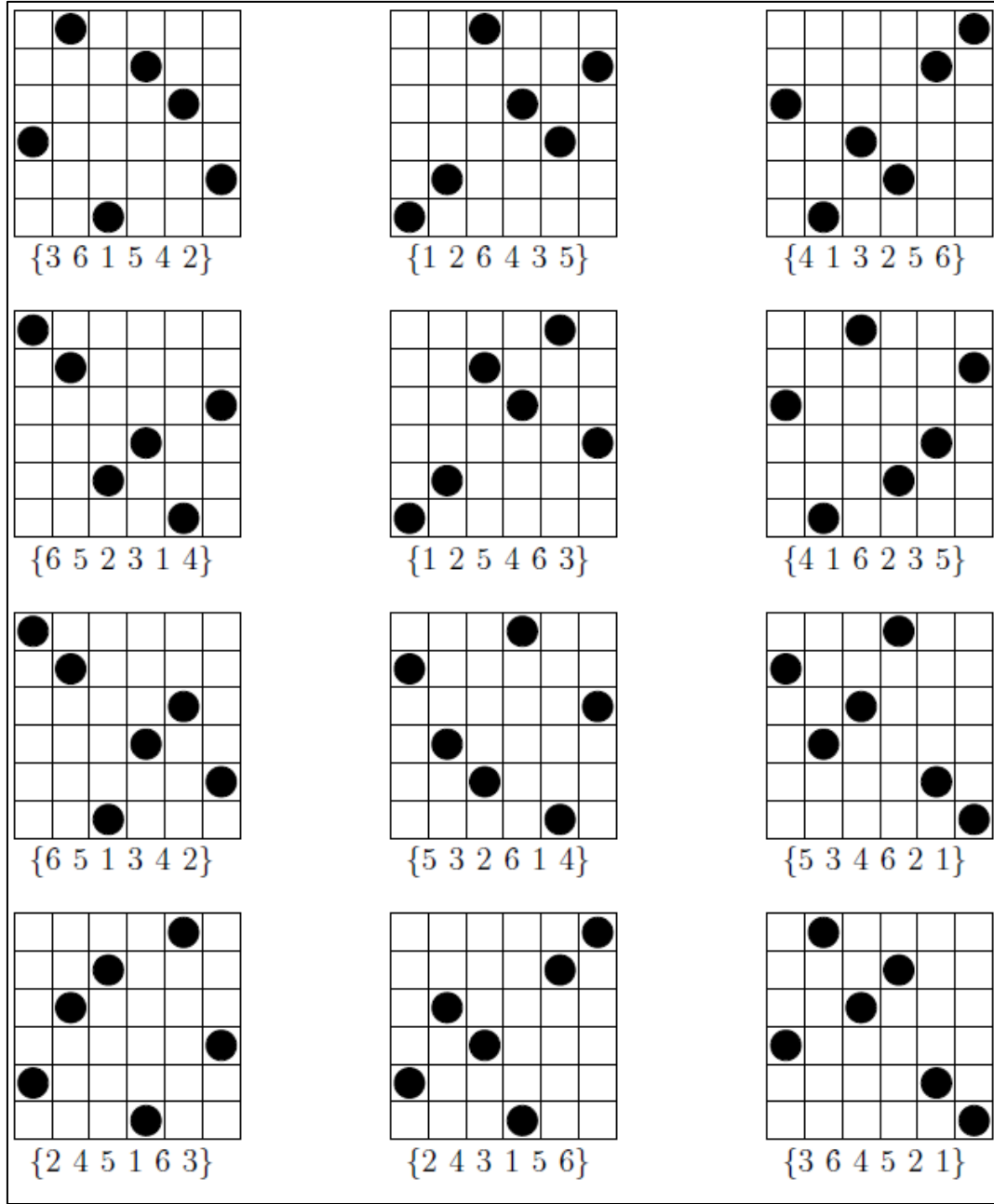
Benzer şekilde hesaplama yapılarak tüm Golomb G_2 Costas dizileri elde edilmiştir. α ve β , sırasıyla $\{x, x^2, x+1, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1\}$ ilkel elemanları olacak şekilde ayrı ayrı toplama tabloları oluşturularak 36 adet Golomb G_2 Costas dizisi üretilmiştir. Elde edilen tüm Costas dizileri Çizelge 3.39'da verilmiştir.

Çizelge 3.39. $GF(8)$ ve x^3+x+1 ilkel polinomu için elde edilen G_2 Costas dizileri

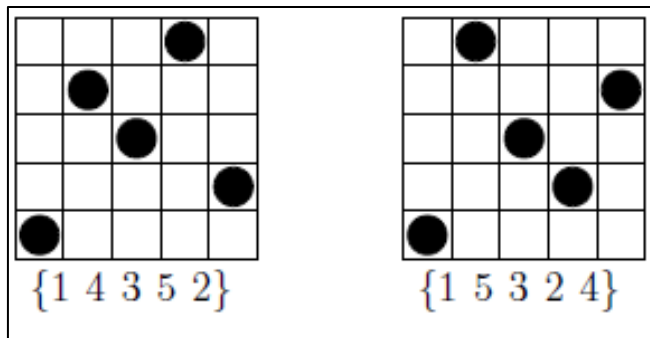
β/α	x	x^2	$x+1$	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
x	{3 6 1 5 4 2}	{5 3 4 6 2 1}	{1 2 5 4 6 3}	{4 1 6 2 3 5}	{6 5 2 3 1 4}	{2 4 3 1 5 6}
x^2	{6 5 2 3 1 4}	{3 6 1 5 4 2}	{2 4 3 1 5 6}	{1 2 5 4 6 3}	{5 3 4 6 2 1}	{4 1 6 2 3 5}
$x+1$	{1 2 6 4 3 5}	{4 1 3 2 5 6}	{5 3 2 6 1 4}	{6 5 1 3 4 2}	{2 4 5 1 6 3}	{3 6 4 5 2 1}
x^2+1	{2 4 5 1 6 3}	{1 2 6 4 3 5}	{3 6 4 5 2 1}	{5 3 2 6 1 4}	{4 1 3 2 5 6}	{6 5 1 3 4 2}
x^2+x	{5 3 4 6 2 1}	{6 5 2 3 1 4}	{4 1 6 2 3 5}	{2 4 3 1 5 6}	{3 6 1 5 4 2}	{1 2 5 4 6 3}
x^2+x+1	{4 1 3 2 5 6}	{2 4 5 1 6 3}	{6 5 1 3 4 2}	{3 6 4 5 2 1}	{1 2 6 4 3 5}	{5 3 2 6 1 4}

Tablo incelendiğinde bazı Costas dizilerinin bir kereden fazla elde edildiği görülür. Bu diziler sadeleştirildiğinde $GF(8)$ ve x^3+x+1 ilkel polinomu için 12 farklı Golomb G_2 Costas dizisinin elde edildiği görülür. Söz konusu Costas dizileri Çizelge 3.39'da sarı boyalı olarak Şekil 3.21'de ise permütasyon matrisi olarak verilmiştir.

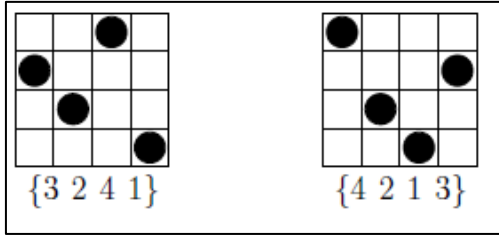
Bu dizilerden $\{1\ 2\ 5\ 4\ 6\ 3\}$ ve $\{1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 3\}$ G_2 Costas dizileri $(1, 1)$ ve $(2, 2)$ elemanlarına sahip olduğundan, bu dizilerden $(q - 3)$ 'üncü yani 5'inci mertebeden G_3 Costas dizisi ve $(q - 4)$ 'üncü yani 4'üncü mertebeden G_4 Costas dizisi elde edilebilir. Bu yeni diziler Şekil 3.22 ve Şekil 3.23'te gösterilmiştir.



Şekil 3.21. $GF(8)$ ve x^3+x+1 ilkel polinomu için elde edilen G_2 Costas dizileri



Şekil 3.22. $GF(8)$ ve x^3+x+1 ilkel polinomu için elde edilen G_3 Costas dizileri



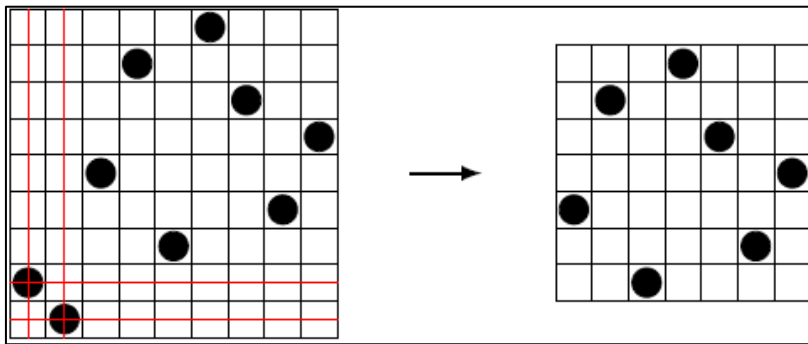
Şekil 3.23. $GF(8)$ ve x^3+x+1 ilkel polinomu için elde edilen G_4 Costas dizileri

3.2. Varyasyonel Yöntemlerle Elde Edilen Costas Dizileri

Costas dizileri, Welch, Lempel ve Golomb gibi temel oluşturma yöntemlerinin yanı sıra bu yöntemleri referans alan Taylor T_4 , Golomb G_4^* - G_5^* , Taylor T_1 - T_0 ve Welch W_0 gibi bu yöntemlerin varyasyonları ile de elde edilebilir [30].

3.2.1. Taylor T_4 varyasyonu

Taylor T_4 varyasyonu, Lempel yöntemini esas alır. Eğer $(q - 2)$ 'nci mertebeden elde edilen bir L_2 Costas dizisi $(1, 2)$ ve $(2, 1)$ elemanlarına sahipse, yani diğer bir ifadeyle bu L_2 Costas dizisinin elemanları $\{2\ 1\ \dots\}$ şeklinde ifade edilebiliyorsa bu L_2 Costas dizisinin en alt 2 satırı ve en sol 2 sütunu silinerek $(q - 4)$ 'üncü mertebeden Taylor T_4 Costas dizisi elde edilebilir [32, 33]. Örnek olarak bu yöntemi kullanarak $q = 11$ için Taylor T_4 Costas dizisini elde edelim. Bölüm 3.1.2'de anlatılan Lempel yöntemi ile $(q - 2)$ 'nci yani 9'uncu mertebeden L_2 Costas dizisi $\{2\ 1\ 5\ 8\ 3\ 9\ 7\ 4\ 6\}$ olarak bulunur. Bu dizinin en alt iki satırı ve en sol iki sütunu silindiğinde $(q - 4)$ 'üncü yani 7'nci mertebeden Taylor T_4 Costas dizisi $\{3\ 6\ 1\ 7\ 5\ 2\ 4\}$ olarak elde edilir. Şekil 3.24'te bu dizinin elde edilişi gösterilmiştir.



Şekil 3.24. $q = 9$ 'uncu mertebeden $\{2\ 1\ 5\ 8\ 3\ 9\ 7\ 4\ 6\}$ Lempel L_2 Costas dizisinden, 7'nci mertebeden $\{3\ 6\ 1\ 7\ 5\ 2\ 4\}$ Taylor T_4 Costas dizisinin elde edilmesi

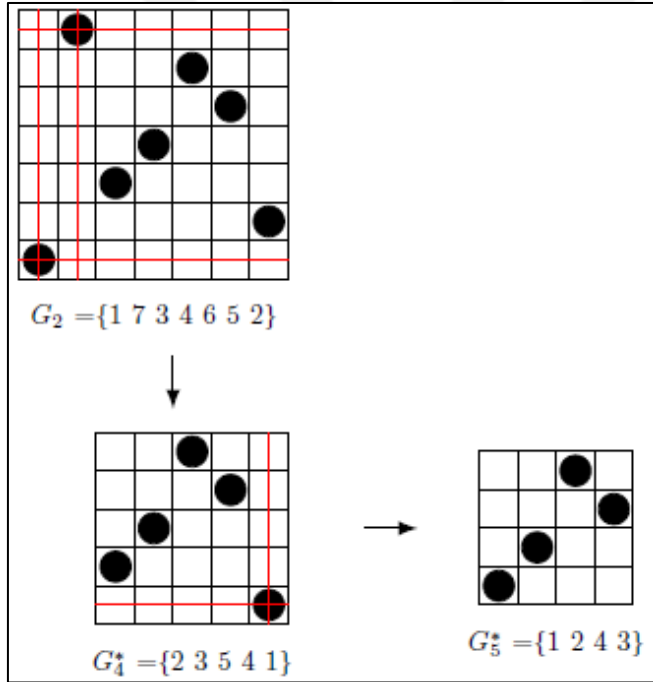
Bu tez çalışması kapsamında yüksek mertebeden Taylor T_4 Costas dizileri (7 – 5000) oluşturulmuş ve Çizelge 3.40’da sunulmuştur.

Çizelge 3.40. Yüksek mertebeden (7-5000) Taylor T_4 Costas dizileri

Mertebe	T_4	Mertebe	T_4	Mertebe	T_4	Mertebe	T_4	Mertebe	T_4
9	1	641	2	1801	2	2791	1	3769	2
11	1	659	1	1811	1	2819	1	3779	1
19	1	701	2	1831	1	2851	1	3889	2
31	1	719	1	1879	1	2879	1	3911	1
41	2	739	1	1889	2	2909	2	3931	1
59	1	751	1	1901	2	2939	1	4019	1
61	2	821	2	1931	1	2971	1	4079	1
71	1	839	1	1949	2	2999	1	4091	1
79	1	929	2	1979	1	3011	1	4099	1
109	2	971	1	2011	1	3019	1	4111	1
131	1	1019	1	2039	1	3061	2	4129	2
149	2	1039	1	2099	1	3109	2	4139	1
179	1	1051	1	2111	1	3119	1	4211	1
191	1	1091	1	2129	2	3181	2	4219	1
239	1	1129	2	2131	1	3191	1	4241	2
241	2	1171	1	2141	2	3209	2	4259	1
251	1	1181	2	2309	2	3221	2	4271	1
269	2	1201	2	2311	1	3229	2	4339	1
271	1	1259	1	2339	1	3259	1	4349	2
311	1	1301	2	2341	2	3319	1	4409	2
359	1	1319	1	2351	1	3359	1	4421	2
379	1	1321	2	2381	2	3361	2	4451	1
389	2	1399	1	2399	1	3371	1	4519	1
409	2	1429	2	2411	1	3449	2	4591	1
419	1	1439	1	2459	1	3491	1	4639	1
431	1	1451	1	2531	1	3511	1	4679	1
439	1	1459	1	2539	1	3539	1	4721	2
449	2	1481	2	2549	2	3541	2	4799	1
479	1	1489	2	2551	1	3559	1	4801	2
491	1	1499	1	2579	1	3659	1	4889	2
499	1	1531	1	2609	2	3671	1	4919	1
569	2	1559	1	2671	1	3691	1	4931	1
571	1	1571	1	2699	1	3701	2	4951	1
599	1	1609	2	2711	1	3709	2	4999	1
601	2	1619	1	2719	1	3719	1		
631	1	1759	1	2741	2	3761	2		

3.2.2. Golomb G_4^* - G_5^* varyasyonu

Golomb G_4^* - G_5^* varyasyonu Golomb yöntemini esas alır. Eğer $\alpha + \beta = 1$ ve $\alpha^2 + \beta^{-1} = 1$ koşulları $(q - 2)$ 'nci mertebeden G_2 Costas dizisinde sağlanıyorsa $\alpha^{-1} + \beta^2 = 1$ koşulu da sağlanmış olur [16]. G_2 Costas dizisindeki $(1, 1)$ noktası ve $(2, q - 2)$ noktası, bulunduğu satırları ve sütunları ile birlikte silinirse $(q - 4)$ 'üncü mertebeden G_4^* Costas dizisi elde edilir [18, 34]. Ancak elde edilen bu G_4^* Costas dizisinin G_4 Costas dizisiyle aynı olmadığına dikkat edilmelidir [8, 35]. Eğer G_2 Costas dizisindeki $(q - 2, 2)$ noktası veya G_4^* Costas dizisindeki $(q - 4, 1)$ noktası bulunduğu satır ve sütunla birlikte silinirse, G_5^* Costas dizisi elde edilir [18]. Örnek bir G_4^* - G_5^* Costas dizilerinin elde edilişi şekil 3.25'de gösterilmiştir.



Şekil 3.25. $\{1\ 7\ 3\ 4\ 6\ 5\ 2\}$ G_2 Costas dizisinden $\{2\ 3\ 5\ 4\ 1\}$ G_4^* ve $\{1\ 2\ 4\ 3\}$ G_5^* Costas dizilerinin elde edilmesi

Bu tez çalışması kapsamında yüksek mertebeden Golomb G_4^* - G_5^* Costas dizileri $(7 - 5000)$ araştırılmıştır. p bir asal sayı olmak üzere yüksek mertebeden $q = p$ ve $q = p^n$ inci mertebeden Costas dizileri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar detaylı olarak değerlendirildiğinde Taylor T_4 ile Golomb G_4^* - G_5^* Costas dizileri arasında dikkate değer bir ilişki olduğu fark edilmiştir.

Varsayım 1

Eğer Taylor T_4 yöntemi kullanılarak, $q = p$ veya $q = p^n$ olarak ifade edilebilen herhangi bir merteye için iki adet Costas dizisi üretilebiliyorsa, yine aynı merteye için Golomb G_4^* ve G_5^* Costas dizileri de mevcuttur. Ancak bu varsayım sadece $q = 9$ için geçerli değildir. $q = 9$ için sadece bir adet T_4 Costas dizisi olmasına rağmen, Golomb G_4^* ve G_5^* Costas dizileri de hesaplanabilmektedir.

Bu tez çalışması kapsamında yüksek mertebeden Golomb G_4^* ve G_5 Costas dizileri (7 – 5000) oluşturulmuş ve Çizelge 3.41’de sunulmuştur.

Çizelge 3.41. Yüksek mertebeden (7 - 5000) Golomb G_4^* ve G_5^* Costas dizileri

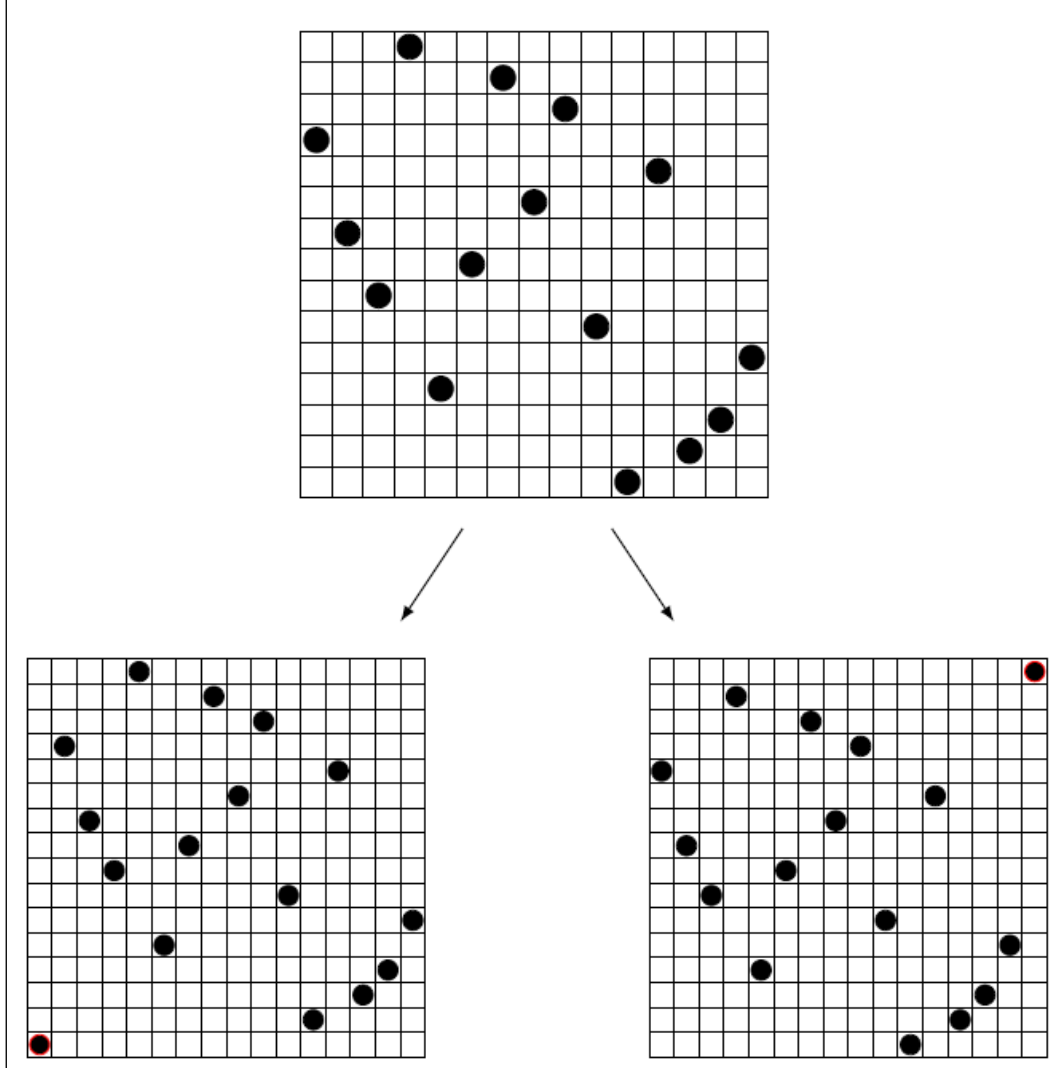
Mertebe	G_4^* - G_5^*	Mertebe	G_4^* - G_5^*	Mertebe	G_4^* - G_5^*	Mertebe	G_4^* - G_5^*	Mertebe	G_4^* - G_5^*
9*	1	641	2	1609	2	2741	2	3709	2
41	2	701	2	1801	2	2909	2	3761	2
61	2	821	2	1889	2	3061	2	3769	2
109	2	929	2	1901	2	3109	2	3889	2
149	2	1129	2	1949	2	3181	2	4129	2
241	2	1181	2	2129	2	3209	2	4241	2
269	2	1201	2	2141	2	3221	2	4349	2
389	2	1301	2	2309	2	3229	2	4409	2
409	2	1321	2	2341	2	3361	2	4421	2
449	2	1429	2	2381	2	3449	2	4721	2
569	2	1481	2	2549	2	3541	2	4801	2
601	2	1489	2	2609	2	3701	2	4889	2

3.2.3. Taylor T_1 ve T_0 varyasyonu

Taylor T_1 varyasyonu Golomb yöntemine dayanır. $(q - 2)$ 'nci mertebeden elde edilen bir G_2 Costas dizisinin sol alt köşe (0, 0), sol üst köşe (0, $q - 1$), sağ alt köşe ($q - 1$, 0) veya sağ üst köşe ($q - 1$, $q - 1$) bölgelerinden herhangi birine bir nokta eklenir. Bu şekilde elde edilen yeni Costas dizisi $(q - 1)$ 'inci mertebeden Taylor T_1 Costas dizisidir [36]. Taylor T_1 varyasyonu, $q \neq 2^k$ olduğu durumlarda geçerlidir [37].

Örnek olarak bu yöntemi kullanarak $q = 17$ sayısı için Taylor T_1 Costas dizisini elde edelim. Bölüm 3.1.3’de anlatılan Golomb yöntemi ile $(q - 2)$ 'nci yani 15’inci mertebeden G_2 Costas dizisi {12 9 7 15 4 8 14 10 13 6 1 11 2 3 5} olarak bulunur. Bu dizinin sol alt (0, 0), sol üst

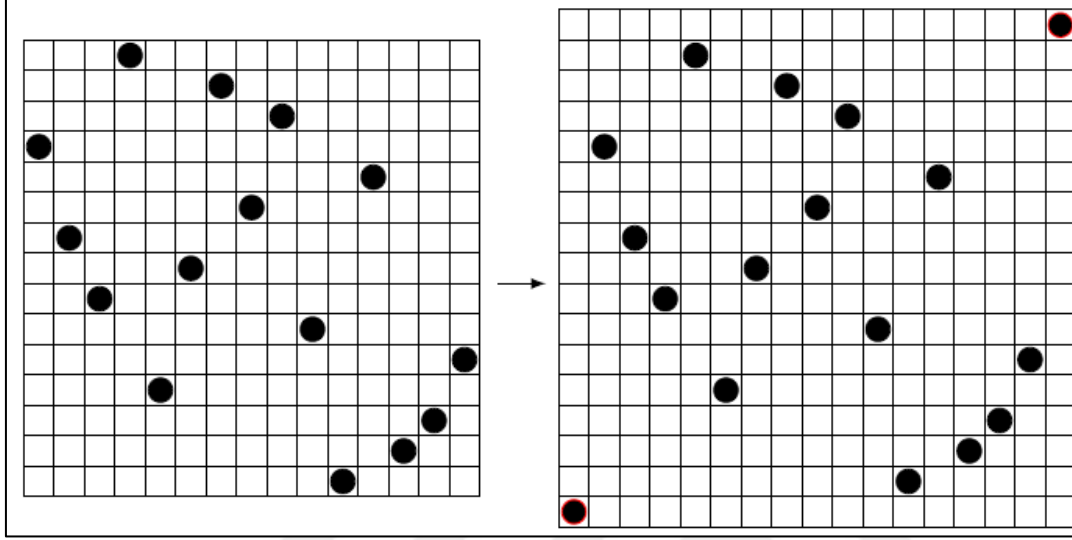
(0, 16), sağ alt (16, 0) ve sağ üst (16, 16) bölgelerinden herhangi birine bir nokta eklenerek ayrı ayrı olası Taylor T_1 Costas dizileri elde edilebilir. Şekil 3.26'da {12 9 7 15 4 8 14 10 13 6 1 11 2 3 5} Golomb G_2 Costas dizisinden elde edilen Taylor T_1 Costas dizileri gösterilmiştir.



Şekil 3.26. $q = 17$ için 15'inci mertebeden {12 9 7 15 4 8 14 10 13 6 1 11 2 3 5} Golomb G_2 Costas dizisinden elde edilen Taylor T_1 Costas dizileri

Taylor T_0 varyasyonu, Taylor T_1 varyasyonu gibi Golomb yöntemini esas alır. $(q - 2)$ 'nci mertebeden elde edilen bir G_2 Costas dizisinin sol alt köşe (0, 0) ve sağ üst köşe $(q - 1, q - 1)$ veya sağ alt köşe $(q - 1, 0)$ ve sol üst köşe $(0, q - 1)$ gibi çapraz köşe noktalarından herhangi ikisine birer adet nokta eklenir. Bu şekilde elde edilen muhtemel yeni Costas dizisi q 'ncu dereceden Taylor T_0 Costas dizisidir.

Aynı örnek üzerinden, 15'inci mertebeden $\{12\ 9\ 7\ 15\ 4\ 8\ 14\ 10\ 13\ 6\ 1\ 11\ 2\ 3\ 5\}$ G_2 Costas dizisinin sağ alt köşe $(q - 1, 0)$ ve sol üst köşe $(0, q - 1)$ bölgelerine birer nokta eklenerek T_0 Costas dizisi elde edilmiştir. Şekil 3.27'da bu Taylor T_0 Costas dizisinin elde edilişi gösterilmiştir.



Şekil 3.27. $q = 17$ için 15'inci mertebeden $\{12\ 9\ 7\ 15\ 4\ 8\ 14\ 10\ 13\ 6\ 1\ 11\ 2\ 3\ 5\}$ Golomb G_2 Costas dizisinden elde edilen $\{1\ 13\ 10\ 8\ 16\ 5\ 9\ 15\ 11\ 14\ 7\ 2\ 12\ 3\ 46\ 17\}$ Taylor T_0 Costas dizisi

Bu tez çalışması kapsamında yüksek mertebeden Taylor T_1 ve T_0 Costas dizileri ($5 \leq q \leq 3000$) oluşturulmuştur. Elde edilen sonuçlar detaylıca incelendiğinde 53'ten büyük sayılar için Taylor T_1 Costas dizisinin, 47'den büyük sayılar için ise Taylor T_0 Costas dizisinin üretilmediği gözlenmiştir.

Varsayım 2

$q > 53$ için Taylor T_1 Costas dizisi elde edilemez.

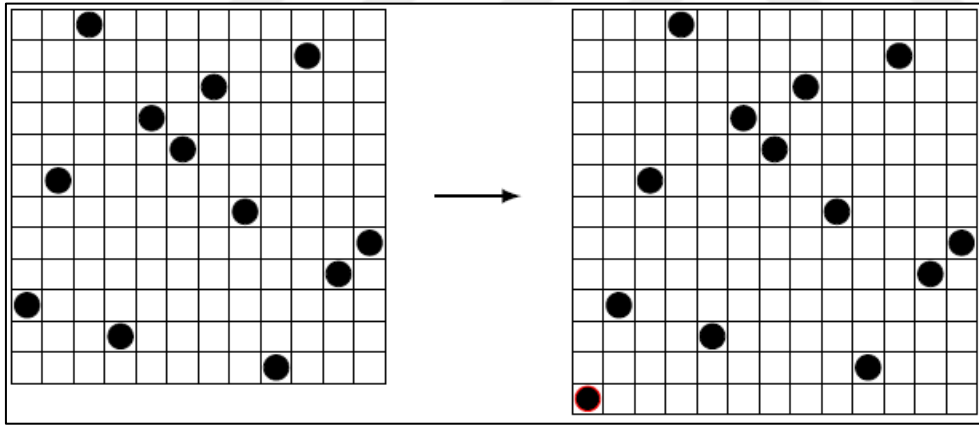
Varsayım 3

$q > 47$ için Taylor T_0 Costas dizisi elde edilemez.

3.2.4. Welch W_0 varyasyonu

Welch W_0 varyasyonu, Welch yöntemine dayanır. p bir asal sayı olmak üzere $(p - 1)$ 'inci mertebeden elde edilen bir W_1 Costas dizisinin herhangi bir köşesine bir nokta eklenerek p 'inci mertebeden $(p \times p)$ boyutlarında bir permütasyon matrisi oluşturulur. Oluşturulan bu matris Costas dizisi özelliklerine sahip ise Welch W_0 varyasyonu ile elde edilen Costas dizisi olarak tanımlanır [38].

Örnek olarak bu yöntemi kullanarak $p = 13$ sayısı için Welch W_0 Costas dizisini elde edelim. Bölüm 3.1.1'de anlatılan Welch yöntemi ile $(p - 1)$ 'inci yani 12'nci mertebeden W_1 Costas dizisi $\{3\ 7\ 12\ 2\ 9\ 8\ 10\ 6\ 1\ 11\ 4\ 5\}$ olarak bulunur. Bu dizinin sol alt $(0, 0)$, sol üst $(0, p - 1)$, sağ alt $(p - 1, 0)$ ve sağ üst $(p - 1, p - 1)$ bölgelerinden herhangi birine bir nokta eklenerek ayrı ayrı olası Welch W_0 Costas dizileri elde edilebilir. Şekil 3.28'de $\{3\ 7\ 12\ 2\ 9\ 8\ 10\ 6\ 1\ 11\ 4\ 5\}$ Welch W_1 Costas dizisinden elde edilen $\{1\ 4\ 8\ 13\ 3\ 10\ 9\ 11\ 7\ 2\ 12\ 5\ 6\}$ Welch W_0 Costas dizisi gösterilmiştir.



Şekil 3.28. $p = 13$ için 12'nci mertebeden $\{3\ 7\ 12\ 2\ 9\ 8\ 10\ 6\ 1\ 11\ 4\ 5\}$ Welch W_1 Costas dizisinden elde edilen $\{1\ 4\ 8\ 13\ 3\ 10\ 9\ 11\ 7\ 2\ 12\ 5\ 6\}$ Welch W_0 Costas dizisi

Bu tez çalışması kapsamında yüksek mertebeden Welch W_0 Costas dizileri ($5 \leq q \leq 3000$) oluşturulmuştur. Elde edilen sonuçlar detaylıca incelendiğinde 53'ten büyük sayılar için Welch W_0 Costas dizilerinin üretilemediği gözlenmiştir.

Varsayım 4

$q > 53$ için Welch W_0 Costas dizisi elde edilemez.



4. SONUÇLAR

Darbeli radarlar, günümüzde, hedeflerin mesafe ve hızlarının tespit edilmesinde yoğun olarak kullanılmaktadır. Ancak amacın düşman tarafından tespit edilmeden yakın mesafelerdeki hedefleri tespit etmek olduğu durumlarda genellikle LPI radarların kullanımı tercih edilmektedir. Darbeli radarlarda, daha iyi bir menzil çözünürlüğü elde edebilmek için nispeten daha kısa süreli darbeler kullanılır. Eğer hedef tespiti için kısa süreli darbeler kullanılıyorsa, bu darbelerin yüksek tepe gücü ile hedefe iletilmesi gerekir. Radarın yüksek tepe gücü ile ışıma yapması, genellikle, modern muharebe sahasında yer alan düşman elektronik harp sistemleri tarafından kolaylıkla tespit edilmesine ve dolayısıyla kullandığı çalışma parametrelerinin tahmin edilmesine neden olur [39]. Bu parametrelerin düşman unsurlar tarafından tespit edilmesi, söz konusu parametrelerin elektronik karıştırma sistemleri ile radarlarımıza karşı yanıltıcı faaliyetlerde kullanılmasına neden olabilir.

Düşük güç tüketimleri, kullandıkları karmaşık modülasyon teknikleri ve sürekli sinyal kullanımı gibi en temel özellikleri sayesinde LPI radarları oldukça avantajlı ve tercih edilebilir bir hale gelmiştir. Bu temel özellikler LPI radarların çok yakın mesafelerde bile düşman tarafından tespit edilmeden görev yapmasına olanak sağlamaktadır. LPI radarları geniş bir frekans bandında sürekli dalga sinyalleri yayma yeteneğine sahiptir. LPI radarları bu özelliklerinin yanı sıra yüksek menzil - Doppler çözünürlüğü de sağlarlar. Geniş bir bantta ışıma yapabilme kabiliyeti, çözünürlüğü artırır. Diğer yandan sürekli dalga sinyallerinin kullanılması, bu sinyallerin çok daha düşük tepe gücüyle gönderilmesine olanak sağlar [40].

LPI radarları bu özelliklere sahip sinyalleri elde edebilmek için çeşitli modülasyon tekniklerinden faydalanır. Bu modülasyon türlerinden birisi Frekans Kaydırmalı Anahtarlama tekniğidir. Costas dizileri, LPI radarları için Frekans Kaydırmalı Anahtarlama tekniği ile sinyallerin oluşturulmasında kullanılan yöntemlerden birisidir.

Bu tez çalışmasında, LPI radarları için Frekans Kaydırmalı Anahtarlama ile modüle edilmiş sinyallerden olan Costas dizileri, bu dizilerin elde edilmesinde kullanılan Welch, Lempel ve Golomb gibi temel yöntemler ve bu yöntemlerin Taylor T_4 , Golomb G_4^* - G_5^* , Taylor T_1 - T_0 , Welch W_0 gibi bazı varyasyonları araştırılmıştır. Tüm bu yöntemler için C/C++ dilinde programlar geliştirilmiştir.

Literatürde ilk kez bu yüksek lisans tez çalışmasında, Taylor T_4 , Golomb G_4^* - G_5^* , Taylor $T_1 - T_0$, Welch W_0 varyasyonları için yüksek mertebeden (5000'e kadar) Costas dizileri araştırılmıştır ve elde edilen sonuçlar tablolar halinde sunulmuştur. Hesaplamalar çok uzun süreler aldığı için yüksek işlem gücüne sahip özel bilgisayarlar kullanılmıştır. Çizelge 4.1'de tablo halinde detayları verilen yüksek kapasiteli bilgisayarların bulunduğu bir laboratuvarında bu programlar 7 gün 24 saat boyunca çalıştırılmıştır. Örneğin Golomb G_4^* - G_5^* yöntemi kullanılarak 4000'inci mertebeye kadar Costas dizilerinin elde edilmesi için 5 adet HPZ4 bilgisayar 5 hafta boyunca çalışmıştır. 4000'den büyük sayılar için 64 GB RAM belleğe sahip HPZ4 bilgisayarlar hesaplamalarda yetersiz kalmıştır. Daha yüksek mertebeden sayılar için hesaplamalara bir adet HPC bilgisayar ile devam edilmiştir. HPC bilgisayar ile Golomb G_4^* - G_5^* yöntemi kullanılarak 4000 – 5000 arası sayılar için hesaplamalar 2,5 ay sürmüştür.

Çizelge 4.1. Bilgisayar özellikleri

	HPC	HPZ4
Ürün Adı	Dell	Hewlett Packard
CPU	Intel Xeon Gold 6154 (18 core)	Intel Xeon W-2245
Computer Node	36 Nodes (x2 socket)	8 Core 16 Thread
RAM	10 GB (per Node)	64 GB
GPU	Nvidia Volta V100 SXM2 GPGPU 16 GB	Nvidia Geforce RTX 3060TI 16 GB
GPU Node	4 Node x 4 GPU	1 Node x 16 GB GPU

Düşük mertebeli sayılar için Costas dizilerinin hesaplanmasında “Costas Arrays Matlab Toolbox” paket programının kullanımı oldukça avantajlıdır [17]. Fakat merteye büyüdükçe özellikle iki ilkel eleman ve polinom hesaplamalarıyla karmaşılaşan Golomb yöntemi aşırı miktarda zaman ve bellek kullanımı gerektirdiğinden bu paket program hesaplamalarda yetersiz kalmaktadır.

Günümüzde halen 29'dan büyük sayılar için kaç adet Costas dizisi olduğu bilinmemektedir. Tüm Costas dizilerinin elde edilebilmesi için genel bir yöntem de bulunmamaktadır. İlerideki çalışmalarda zaman ve bellek kullanımı daha efektif hale getirelerek, daha yüksek mertebeden Costas dizilerinin elde edilmesi için paralel hesaplama yöntemleri kullanılabilir. Tez kapsamında elde edilmiş olan yüksek mertebeli Costas dizileri Savunma Sanayii'nde çeşitli projelerde ve uygulamalarda kullanılabilir.

KAYNAKLAR

1. İnternet: TÜBİTAK BİLGEM Teknoloji, (April 2023). Radar Teknolojileri. Web: https://www.savunmasanayiidergilik.com/images/uploads/Tasarim/29_375380_%C5%9Fekill1.jpg Son Erişim Tarihi: 13.12.2023.
2. Pace, P. E., (2009). *Detecting and classifying low probability of intercept radar*. (Second Edition). Norwood/ABD: Artech House, 3-4, 15, 17, 87, 220.
3. GuoSui, L., Hong, G., WeiMin, S., Hongbo, S., (2001). *The analysis and design of modern low probability of intercept radar*. International Conference on Radar Proceedings (Cat no.01TH8559) 120-124.
4. Denk, A., (2006). *Detection and jamming of Low Probability Intercept (LPI) radars*. Master's Thesis, M.S. in Systems Engineering, Naval Postgraduate School Monterey, California, USA.
5. Güleç, F., (2014). *Yakalanma olasılığı düşük radarlarda Costas dizilerinin kullanımı*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
6. Fernando, L. T., (2002). *Detection and classification of low probability of intercept radar signals using parallel filter arrays and higher order statistics*. Master's Thesis, M.S. in Systems Engineering, Naval Postgraduate School Monterey, California, USA.
7. David L. A., (2001). *EW 101: A first course in electronic warfare*. (First Edition), Norwood, MA: Artech House.
8. Afacan, E., (2017). Creation of a database and analysis for higher order Costas arrays, *Tubitak Project Report*, Project Number: 115R279, Ankara, Turkey.
9. Costas, J. P., (1965). *Medium constraints on sonar design and performance*. General Electric Company, Fairfield, CT, USA, Tech. Rep. Class 1 Rep. R65EMH33.
10. Costas, J. P., (1984). A study of a class of detection waveforms having nearly ideal range-Doppler ambiguity properties, *Proceedings of the IEEE*, 72(8), 996-1009, doi:10.1109/PROC.1984.12967, Syracuse, New York.
11. Chang, W., and Scarbrough, K., (1989). Costas arrays with small number of cross-coincidences. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 25(1), 109-112, doi: 10.1109/7.18669, New London, USA.
12. Gilbert, E. N., (1965), Latin squares which contain no repeated digrams, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 7, 189–198, doi:10.1137/1007035, USA.
13. Titlebaum, E. L., Maric, S. V., and Bellegarda, J. R., (1991). Ambiguity properties of quadratic congruential coding, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 27(1), 18-29, doi:10.1109/7.68144, New York, USA.
14. Pezeshki, A., Calderbank, R., and Scharf, L. L., (2009). *Sidelobe suppression in a desired range/Doppler interval*, IEEE National Radar Conference Proceedings. 1–5, doi:10.1109/RADAR.2009.4977144, Pasadena, CA, USA.

15. Maric, S. V., Seskar, I., and Titlebaum, E. L., (1994). On cross-ambiguity properties of Welch–Costas arrays, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 30(4), 1063–1071, doi: 10.1109/7.328760, City Coll. of New York, USA.
16. Golomb, S. W., (1992). The T4 and G4 constructions for Costas arrays, *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(4), 1404–1406, doi: 10.1109/18.144726 University of Southern California, USA.
17. Taylor, K., Rickard, S., and Drakakis, K., (2011). *Costas arrays: Survey, standardization, and MATLAB toolbox*, ACM Transactions on Mathematical Software, 37(4), 41:1–41:31, doi: 10.1145/1916461.1916465 New York, NY, United States.
18. Beard, J. K., Russo, J. C., Erickson, K. G., Monteleone, M. C., and Wright, M. T., (2007). Costas array generation and search methodology, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 43(2), 522–538, doi: 10.1109/TAES.2007.4285351.
19. Güleç F., and Afacan, E., (2015). *Usage of Costas arrays in Low Probability of Intercept radars*, 23rd Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU), 347–350, doi:10.1109/SIU.2015.7129830 Malatya, Turkey.
20. Beard, J. K., (2006). *Generating Costas arrays to order 200*, 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems, 1130–1133, doi: 10.1109/CISS.2006.286635 Princeton, USA.
21. Russo, J. C., Erickson, K. G., and Beard, J. K., (2010). *Costas array search technique that maximizes backtrack and symmetry exploitation*, 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS), 1–8, doi: 10.1109/CISS.2010.5464772 Princeton, USA.
22. Drumheller D. M., and Titlebaum, E. L., (1991). Cross-correlation properties of algebraically constructed Costas arrays, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 27(1) 2–10, doi: 10.1109/7.68142.
23. Wan, Z. X., (2003), *Lectures on finite fields and Galois rings*, New Jersey: World Scientific Publishing Company.
24. Golomb. S. W., and Gong, G., (2007). The status of Costas arrays, *IEEE Transactions on Information Theory*, 53(11), 4260–4265, doi: 10.1109/TIT.2007.907524.
25. Golomb S. W., and Taylor, H., (1984). Constructions and properties of Costas arrays, *Proceedings of the IEEE*, 72(9), 1143–1163, doi: 10.1109/PROC.1984.12994.
26. Chang, Y., Chou, W.S., and Shiue, P. J. S., (2005). On the number of primitive polynomials over finite fields, *Finite Fields and Their Applications*, 11(1), 156–163, doi: 10.1016/j.ffa.2004.01.003.
27. Stewart, I., (2004). *Galois theory*, (Third Edition). Boca Raton, FL, USA: CRC Press.
28. Lidl, R., and Niederreiter, H., (1997). *Finite fields*, (Second Edition). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

29. McEliece R. J., (1987). *Finite fields for computer scientists and engineers*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
30. Afacan, E., (2017). *A new search method for costas arrays by using difference triangle analysis*, In Electromagnetics Research Symposium Spring (PIERS), 456-461, doi:10.1109/PIERS.2017.8261784 St. Petersburg, Russia.
31. Golomb, S. W., (1996). Algebraic constructions for Costas arrays, *Combinatorial Theory Series A*, 7, 1143–1163, Los Angeles, California, USA.
32. Drakakis, K., Iorio, F., and Rickard, S., (1984). The enumeration of Costas arrays of order 28. *Information Theory Workshop*, 1–5, doi: 10.1109/CIG.2010.5592926, Dublin, Ireland.
33. Drakakis K., (2008). Results of the enumeration of Costas arrays of order 27, *IEEE Transactions on Information Theory*, 54(10), 4684–4687, doi: 10.1109/TIT.2008.928979.
34. Chang, C.F., and Bell, M. R., (2003). Frequency-coded waveforms for enhanced delay-Doppler resolution. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(11), 2960–2971, doi: 10.1109/TIT.2003.818408.
35. Drakakis, K., Iorio, F., Rickard, S., and Walsh, J., (2011) Results of the enumeration of Costas arrays of order 29. *Advances in Mathematics of Communications*, 5, 547–553, doi: 10.3934/amc.2011.5.547.
36. Drakakis, K., (2006). A review of Costas arrays. *Journal of Applied Mathematics*, 1–32, doi: 10.1155/JAM/2006/26385.
37. Drakakis, K., (2010). A structural constraint for Golomb Costas arrays. *IEEE Transactions on Information Theory*. 56(11), 5762-5764.
38. Drakakis, K., Gow R., and Rickard, S., (2006). *On the parity populations of Welch-constructed Costas arrays*. 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems Princeton, NJ, USA, 811-814.
39. Skolnik, M. I., (1981). *Introduction to radar systems*, (Second Edition), Singapore: McGraw-Hill Book Company.
40. Stimson, G. W., (1998). *Introduction to airborne radar*. (Second Edition), New Jersey: SciTech Pub.
41. Gudek, M., Genc, Y., Korkmaz, N.A., Akkoc, A., Afacan, E., and Yazgan, E., (2023). *Yakalanma olasılığı düşük radarlarda varyasyonel Costas dizilerinin kullanılması*. IV. Başkent International Conference on Multidisciplinary Studies, Ankara, Turkey.
42. Gudek, M., Genc, Y., Korkmaz, N.A., Akkoc, A., Afacan, E., and Yazgan, E., (2023). *Higher order Taylor and Golomb Costas arrays*. Akıllı sistemlerde yenilikler ve uygulamaları konferansı (ASYU), Sivas, Turkey.





Gazili olmak ayrıcalıktır