



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**ÖĞRENCİLERİN MATEMATİKSEL MUHAKEME VE İSPAT
BECERİLERİNİN ÖĞRETMENLER TARAFINDAN FARK
EDİLME DÜZEYLERİNİN İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatih DEMİR

Danışman: Doç. Dr. Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK

TOKAT

Şubat-2024

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK danışmanlığında hazırlamış olduğum “Öğrencilerin Matematiksel Muhakeme ve İspat Becerilerinin Öğretmenler Tarafından Fark Edilme Düzeylerinin İncelenmesi” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

19/01/2024

Fatih DEMİR

JÜRİ KABUL VE ONAY

Fatih DEMİR tarafından hazırlanan “**Öğrencilerin Matematiksel Muhakeme ve İspat Becerilerinin Öğretmenler Tarafından Fark Edilme Düzeylerinin İncelenmesi**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 19/01/2024 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Unvanı, Adı Soyadı)

İmzası

Üye (Başkan) :

.....

Üye :

Üye :

Üye :

Üye :

ONAY

...../...../.....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEŞEKKÜR

Ders dönemim ve tez yazım sürecimde ne zaman ihtiyacım olsa bilgi, tecrübe ve yönlendirmeleriyle beni destekleyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Zülfiye Zeybek ŞİMŞEK'e gönülden teşekkür ederim.

Tez jürisine katılarak dönütleriyle çalışmama katkıda bulunan değerli hocalarım Doç. Dr. Nurullah YAZICI, Dr. Öğr. Üyesi Ayfer EKER KARAKAYA ve Dr. Öğr. Üyesi Seher Sultan YEŞİLKAYA'ya çok teşekkür ederim.

Tezim için gerekli verileri toplamamda ve süreç boyunca her zaman kolaylık sağlayan değerli idarecilerime, çalışmama katılarak bana yardımcı olan değerli zümrelerime ve sevgili öğrencilerime çok teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde bir ferdi olmaktan onur duyduğum değerli aile üyelerim annem Süreyya DEMİR, babam Cengiz DEMİR, ablam Serap DEMİR ve kardeşim Elif DEMİR'e çok teşekkür ederim.

Son olarak her zaman olduğu gibi bu süreçte de tüm sevgisi ve sabrıyla yanımda olan desteğini esirgemeyen kıymetli eşim Şerife Gülsüm DEMİR'e ve hayatımıza girdiği günden beri sevginin en saf halini hissetmemize vesile olan oğlum Kerem Göktuğ DEMİR'e hayatımda oldukları için çok teşekkür ederim.

ÖZET

ÖĞRENCİLERİN MATEMATİKSEL MUHAKEME VE İSPAT BECERİLERİNİN ÖĞRETMENLER TARAFINDAN FARK EDİLME DÜZEYLERİNİN İNCELENMESİ

Demir, Fatih

Yüksek Lisans, Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zülfiye Zeybek Şimşek

Şubat 2024, x + 105 sayfa

Bu araştırmada öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerinin öğretmenler tarafından fark edilme düzeylerinin araştırılması amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda araştırma deseni olarak nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Araştırmada öncelikle öğrenci muhakeme ve ispat düzeylerinin belirlenmesi için 96 sekizinci sınıf ortaokul öğrencisine beş sorudan oluşan ispat testi uygulanmıştır. Öğrencilerin muhakeme ve ispat düzeylerine göre analiz edilen ispat testinin sonuçlarından seçilen on öğrenci cevabı, öğretmen bireysel görüşme protokolü aracılığıyla aynı okulda görev yapan dört matematik öğretmenine sunulmuştur. Öğretmenlerin verdikleri cevaplar öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerine dikkat etme, öğrencilerin matematiksel ispat ve becerilerini yorumlama ve öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerine yönelik karar vermelerine ilişkin betimsel olarak analiz edilmiştir. Öğrencilere uygulanan ispat testi sonucunda öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat düzeylerinin en fazla 1. düzey (deneysel düzey) cevaplardan oluştuğu görülmüştür. En az rastlanan ispat düzeyini ise 3. düzey (analitik düzey) cevaplar oluşturmuştur. Öğretmenlerle yapılan öğretmen bireysel görüşme protokolü sonucunda elde edilen bulgular dahilinde öğrencilerin stratejilerine dikkat etme, anlayışlarını yorumlama ve anlayışlarına dayanarak nasıl yanıt verileceğine karar verme becerilerinin tümünde en fazla yetersiz kanıt düzeyinde cevapların bulunduğu görülmüştür. Sağlam kanıt düzeyindeki cevaplar ise en az rastlanan cevaplar olmuştur. Yetersiz kanıt düzeyi oranı en fazla yorumlama becerisinde, en az ise dikkat etme becerisinde görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Matematik Eğitimi, Matematiksel İspat, Matematiksel Muhakeme, Öğretmen Farkındalığı.

ABSTRACT

INVESTIGATING NOTICING LEVELS OF TEACHERS REGARDING TO STUDENTS' MATHEMATICAL REASONING AND PROVING SKILLS

Demir, Fatih

Master's Thesis, Division of Mathematics Education

Advisor: Assoc.Prof.Dr. Zülfiye Zeybek Şimşek

February 2024, x+ 105 pages

This study aimed to investigate the levels of students' mathematical reasoning and proving skills and how teachers notice students' reasoning and proving skills. To achieve this goal, a qualitative research method, specifically a case study design, was employed. Firstly, to determine the levels of student reasoning and proof, a proof test consisting of five questions was administered to 96 eighth-grade middle school students. The responses of ten students selected from the results of the proof test, analyzed according to students' reasoning and proof levels, were presented to four mathematics teachers working in the same school through individual teacher interview protocols. The responses provided by the teachers were descriptively analyzed regarding teachers' attention to students' mathematical reasoning and proof skills, interpretation of students' mathematical proof and skills, and decision-making regarding students' mathematical reasoning and proof skills. As a result of the proof test administered to the students, it was observed that the students' levels of mathematical reasoning and proof consisted mostly of Level 1 (experimental level) responses. The least encountered proof level was Level 3 (analytical level) responses. Based on the findings obtained from the teacher individual interview protocols, it was observed that responses at the insufficient evidence level were most prevalent in all skills, including attention to students' strategies, interpretation of their understandings, and decision-making on how to respond based on their understandings. Responses at the robust evidence level were the least encountered. The proportion of insufficient evidence level was highest in interpretation skills and lowest in attention skills.

Keywords: Mathematics Education, Mathematical Proof, Mathematical Reasoning, Teacher Noticing.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ETİK SÖZLEŞME.....	i
JÜRİ KABUL VE ONAY	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLO LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	x
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
Problem Durumu	2
Araştırmanın Önemi.....	3
Sayıtlılar	5
Sınırlılıklar	5
BÖLÜM II	6
KURAMSAL ÇERÇEVE.....	6
İspat Kavramı ve Tanımı.....	6
Matematik Eğitiminde İspatın Rolü	8
Örnek Kullanımı	10
İspat Öğretimi	13
Öğretmen Farkındalığı.....	16
BÖLÜM III.....	19
YÖNTEM	19
Araştırma Modeli	19
Araştırma Grubu.....	20
Veri Toplama Araçları ve Veri Toplama Süreci	20
İspat Testi Soruları.....	21
Öğretmen Bireysel Görüşme Protokolü	21
Veri Analizi	22
Öğrencilerin Muhakeme ve İspat Düzeyleri.....	22
Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri.....	23

Geçerlik ve Güvenirlik	29
BÖLÜM IV	31
BULGULAR.....	31
Öğrencilerin Muhakeme ve İspat Düzeylerine Yönelik Bulgular.....	31
Öğretmenlerin Öğrencilerin Muhakeme ve İspat Becerilerini Fark Etme Düzeylerine Yönelik Bulgular	36
Soru 1'e Göre Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerine Yönelik Bulgular	37
Soru 2'ye Göre Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerine Yönelik Bulgular	43
Soru 3'e Göre Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerine Yönelik Bulgular	50
Soru 4'e Göre Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerine Yönelik Bulgular	57
Soru 5'e Göre Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerine Yönelik Bulgular	65
BÖLÜM V	73
SONUÇ VE TARTIŞMA	73
Öğrencilerin Muhakeme ve İspat Düzeylerine Yönelik Sonuç ve Tartışmalar	73
Öğretmenlerinin Fark Etme Becerilerinin Düzeyleri ile İlgili Sonuç ve Tartışmalar	74
Öğrencilerin Stratejilerine Dikkat Etme Becerisine Yönelik Tartışma ve Sonuç	75
Öğrencilerin Anlayışlarını Yorumlama Becerisine Yönelik Tartışma ve Sonuç	76
Öğrencilerin Anlayışlarına Dayanarak Nasıl Yanıt Verileceğine Karar Verme Becerisine Yönelik Tartışma ve Sonuç	77
BÖLÜM VI.....	79
ÖNERİLER.....	79
Öğrencilerin Matematiksel Muhakeme ve İspat Düzeylerinin Geliştirilmesine Yönelik Öneriler.....	79
Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerinin Geliştirilmesine Yönelik Öneriler	79
Gelecek Araştırmalara Yönelik Öneriler.....	80
KAYNAKÇA.....	82
EKLER.....	98
Ek 1. İspat Testi Soruları.....	98
Ek 2. Öğretmen Bireysel Görüşme Protokolü.....	100
Ek 3. Veli Onay Formu	102
Ek 4. Katılımcı Onay Formu	103

Ek 5. Araştırma İzni	104
Ek 6. Araştırmacı Özgeçmişi	105



TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 1. Çalışmaya Katılan Öğretmenlerin Demografik Bilgileri	20
Tablo 2. Örnek Öğrenci Düzeyleri	23
Tablo 3. Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerinin Ölçütlenirilmesi	27
Tablo 4. Öğretmen Farkındalık Düzeylerine Ait Örnek Cevaplar.....	28
Tablo 5. İspat Testi Sonuçlarının Düzeylere Dağılım Oranları	36
Tablo 6. Birinci Soru İçin Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri.....	38
Tablo 7. İkinci Soru İçin Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri	44
Tablo 8. Üçüncü Soru İçin Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri	51
Tablo 9. Dördüncü Soru İçin Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri.....	58
Tablo 10. Beşinci Soru İçin Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri.....	66
Tablo 11. Öğretmen Cevaplarının Fark Etme Becerileri Düzeylerine Dağılımı	71

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1. Öğrenci Muhakeme ve İspat Düzeyleri	31
Şekil 2. Ö92'nin cevabı	32
Şekil 3. Ö32'nin cevabı	32
Şekil 4. Ö1'in cevabı.....	33
Şekil 5. Ö4'ün cevabı.....	33
Şekil 6. Ö2'nin cevabı	34
Şekil 7. Ö5'in cevabı	34
Şekil 8. Ö25'in cevabı	34
Şekil 9. Ö3'ün cevabı.....	35
Şekil 10. Ö5'in cevabı	35
Şekil 11. Birinci Soruya Ait Öğrenci Cevapları	37
Şekil 12. Birinci Sorunun Genel Değerlendirmesi	43
Şekil 13. İkinci Soruya Ait Öğrenci Cevapları	44
Şekil 14. İkinci Sorunun Genel Değerlendirmesi	50
Şekil 15. Üçüncü Soruya Ait Öğrenci Cevapları	51
Şekil 16. Üçüncü Sorunun Genel Değerlendirmesi	57
Şekil 17. Dördüncü Soruya Ait Öğrenci Cevapları	58
Şekil 18. Dördüncü Sorunun Genel Değerlendirmesi	64
Şekil 19. Beşinci Soruya Ait Öğrenci Cevapları	66
Şekil 20. Beşinci Sorunun Genel Değerlendirmesi	71
Şekil 21. Öğretmen Farkındalık Düzey Seviyelerine Ait Sonuçlar	75

BÖLÜM I

GİRİŞ

Matematik eğitimi, öğrencilerin düşünsel yeteneklerini geliştirmek ve problem çözme becerilerini güçlendirmek adına ispatın önemini vurgular. Literatürde ispat süreçlerinin ve bu süreçlerdeki zorlukların incelendiği ve ispatın farklı boyutlarının analizi üzerine odaklanan birçok çalışma mevcuttur (Cusi ve Malara, 2007; Harel ve Sowder, 1998; Pekşen Sağır, 2013; Polat ve Akgün, 2016). Matematik eğitimi, öğrencilerin kavramsal anlayışlarını derinleştirmek ve analitik düşünme becerilerini geliştirmek adına temel bir role sahiptir. Bu bağlamda, öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerinin geliştirilmesi, onların sadece problem çözme süreçlerini anlamakla kalmayıp aynı zamanda matematiksel düşünceyi somutlaştırma ve açıklama yeteneklerini de güçlendirir (Çontay, 2017). Uygun öğrenme ortamları sağlandığında ve gerekli altyapılar oluşturulduğunda, öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat yapabilme becerileri gelişebilir (Altıparmak ve Öziş, 2005). Öğretmenler, öğrencilerin bu kritik becerilerini fark ederek değerlendirme ve rehberlik süreçlerinde önemli bir rol oynarlar. Bu noktada, öğretmenlerin öğrencilerin muhakeme ve ispat becerilerini ne ölçüde algıladıklarını anlamak, matematik eğitimindeki yöntem ve stratejilerin geliştirilmesi açısından önemli bir adımdır (Harel ve Sowder, 2007). Bu çalışma, öğrencilerin bu becerilerinin öğretmenler tarafından fark edilme düzeyini anlamak ve bu farkındalığın öğrenci başarısına olan etkisini değerlendirmek üzere temel bir perspektif sunmayı hedeflemektedir.

Özellikle yapılan araştırmalar, ispatın matematiksel düşünme becerilerinin geliştirilmesindeki kritik rolünü öne çıkarmaktadır (Epp, 2016; Tall, 2009; Turan, 2019). Ancak, öğretmenlerin öğrencilerin ispat becerilerini ne kadar fark ettiği ve bu farkındalığın öğrenci başarısına nasıl etki ettiği konusunda net bir anlayış bulunmamaktadır. Öğretmenlerin, öğrencilerin verdiği cevapları inceleyerek altında yatan matematiksel düşünceyi fark etmeleri ve bu düşünceyi matematiksel bir bakış açısıyla yorumlamaları öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin gelişimine katkı sağlamaktadır (Goldsmith ve Seago, 2013; Jacobs, Lamb ve Philipp, 2010).

Bu çalışma, ortaokul seviyesindeki öğrencilerin matematik derslerindeki ispat becerilerinin öğretmenler tarafından fark edilme düzeylerini anlamayı amaçlamaktadır. Araştırma, öğretmenlerin öğrencilerin ispat becerilerini ne kadar kavradıklarını ve ispat becerilerinin öğretimindeki kritik önemini derinlemesine incelemeyi hedeflemektedir. Bu hedef doğrultusunda, matematik eğitimi politikalarını zenginleştirmek ve öğretmenlerin öğrencilerin düşünme süreçlerini daha derinden anlamalarına yardımcı olmak adına bu çalışma, önemli bir katkı sunacaktır. Bu doğrultuda, çalışmanın odaklandığı temel sorular şunlardır: Öğrencilerin muhakeme ve ispat becerileri hangi düzeydedir? Öğretmenler, öğrencilerin ispatlarını ne ölçüde algılayabilmektedir?

Bu çalışma, matematik eğitiminde öğretmen farkındalığının ve ispatın öğrenci başarısına olan etkilerinin altını çizerek, matematiksel düşünme becerilerinin güçlendirilmesine odaklanmaktadır. Ortaya çıkacak bulgular, eğitim alanındaki stratejilerin geliştirilmesi ve matematik öğretiminin daha etkili hale getirilmesinde rehberlik edebilir.

Problem Durumu

İspat yapma ve matematiksel muhakeme matematiğin yapısı göz önüne alındığında matematik müfredatlarının merkezinde yer alması gereken birleşenlerdir (Hanna, 2018). Matematikte ispat yapmak bir ifadenin sadece doğruluğunu veya yanlışlığını kontrol etmek değil aynı zamanda neden doğru veya neden yanlış olduğunu zihinsel faaliyetleri işin içine katarak göstermektir (Hanna, 2000). Bu sebeple matematikçilerin büyük bir çoğunluğu ve birçok matematik müfredatı ispat yapmayı ve matematiksel muhakemeyi birbiriyle eşdeğer görmektedir (Brodie, 2010; NCTM, 2000). Akıl yürütme ve ispat yapmanın birçok araştırmacı tarafından tüm sınıf seviyelerinde öğretilmesi gerektiği belirtilmiştir (Bieda, 2010; Knuth, 2002; Maher ve Martino, 1996). Çünkü günümüzde kurallar ve soyut formüllerden ziyade, matematik öğretimi bilginin elde edildiği yollarla daha çok ilgilenmektedir (Arslan, 2007). Benzer şekilde Okul Matematiğinin İlkeleri ve Standartları'nda (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)) (2000) akıl yürütme ve ispatı matematik öğretimi için temel olarak görülen süreçlerden biri olarak belirterek her sınıf seviyesindeki önemini vurgulamıştır.

Öğretme ve öğrenmenin analiz edilmesi ve bunların öğretimsel kararlar alabilmedeki etkinliği son zamanlarda önem kazanmıştır (Mason, 2002). Özellikle öğretmenlerin anlık karar verebilmelerinin ve öğretimi ilerletmek için kullanılabilecek öğrenci düşünme becerilerini fark etmelerin rolü günümüz matematik öğretiminde göz ardı edilmemektedir (Walkoe, 2015). Matematik öğretiminin etkinliğini değerlendirebilmek için öğrencilerin bir problemi çözme sürecindeki matematiksel düşüncelerinin ve matematiksel fikirlerinin profesyonel olarak fark edilmesi, tanımlanması ve yorumlanması gerekmektedir (Fernandez vd, 2013). Yapılacak olan bu çalışma çerçevesinde öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerinin matematik öğretmenleri tarafından fark edilme düzeylerinin araştırılması amaçlanmıştır. Ayrıca bu çalışma ile ispat öğretiminde öğretmen farkındalığı ile ilgili literatüre katkı sağlanması beklenmektedir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki problemlere ve alt problemlere cevaplar aranacaktır.

1. Öğrencilerin muhakeme ve ispat becerileri hangi düzeydedir?
2. Öğretmenlerin, öğrencilerin yapmış oldukları ispatları fark edebilme düzeyleri nedir?
 - a) Öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme beceri düzeyleri nedir?
 - b) Öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarını yorumlama beceri düzeyleri nedir?
 - c) Öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl yanıt verileceğine karar verme beceri düzeyleri nedir?

Araştırmanın Önemi

İspatın matematik eğitimindeki ve öğretimindeki farklı işlevlerinin araştırmacılar tarafından ortaya konulması ispatın matematik sınıflarındaki öneminin artmasına yol açmıştır (Hanna, 2000). İspatın matematik eğitimindeki önemini araştıran ilgili literatür incelendiğinde, ispat süreçlerinin incelendiği (Karakuş, Erşen, ve Gürbüz, 2017; Martinez ve Pedemonte, 2014; Nardi, Biza ve Zachariades, 2012; Öztürk, ve Kaplan, 2018; Pedemonte ve Buchbinder, 2011; Polat, Oflaz ve Akgün, 2019; Sarı, Altun, ve Aşkar, 2007; Şahin, 2016; Uğurel ve Moralı, 2010; Weber, 2001; Weber, 2009; Zeybek Şimşek ve Üstün, 2019) bir çok çalışmaya rastlanmaktadır. İlgili literatürde ispat yapmaya

yönelik zorlukların belirlendiği (Chazan, 1993; Dane, 2008; Demircioğlu ve Polat, 2016; Jones, 2000; Moore, 1994; Pala ve Narlı, 2018; Selden ve Selden, 2003) araştırmalar sıklıkla görülmektedir. İspat şemalarının incelendiği (Çontay ve Duatepe-Paksu, 2019; Eldekci, 2018; Güner, 2012; Harel ve Sowder, 1998; Housman ve Porter, 2003; Liu, ve Manouchehri, 2013; Ozan ve Narlı, 2018; Pektaş ve Bilgici, 2019; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014; Stylinou, Chae ve Blanton, 2006) çalışmalara çoğunlukla rastlanmaktadır. Matematik eğitiminde ispat ile ilgili bakış açılarının incelendiği (Aksoy ve Narlı, 2019; Altıntaş ve İlgin, 2020; Doruk ve Güler, 2014; Doruk vd., 2014; Flores, 2006; Gellert, 2000; Gökkurt ve Soylu, 2012; Güler ve Dikici, 2012; Kayagil, 2012; Köğce, 2013; Morali vd., 2006; Özdemir ve Kaplan, 2014; Turgut, Yenilmez ve Uygan, 2013; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) araştırmalar bulunmaktadır. İlgili literatürde örnek kullanımının ispat süreçlerine etkisini konu alan (Aylar, 2014; Brown, 2014; Çokyaşa, 2020; Dreyfus, Nardi ve Leikin, 2012; Knuth, Zaslavsky ve Ellis, 2019; Mason, 2017; Mills, 2014) Özkaya, Işık ve Konyalıoğlu, 2014) çalışmalar da mevcuttur.

Matematik eğitiminde öğretmen farkındalığı ile ilgili uluslararası alanda birçok çalışma yapıldığı (Barnhart, 2015; Fernandez, 2013; Jacobs vd, 2010; Matamoros, 2014; McDuffi, 2013; Schack, 2013; Walkoe, 2014; Wright, 2012) görülmektedir. Ancak, öğretmenlerin öğrencinin matematiksel ispatı kullanabilirliğini fark edebilme düzeylerini ele alan araştırmalar açısından ciddi eksiklikler bulunduğu görülmektedir. Literatürdeki bu eksikliği giderebilmek için bu çalışmada ortaokul düzeyindeki öğrencilerin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerinin öğretmenler tarafından fark edilme seviyelerinin araştırılması amaç edinilmiştir. Çalışmada elde edilmesi muhtemel sonuçlar eğitim alanı ile ilgili politika yapıcılara perspektif sunması açısından önem taşımaktadır. Ayrıca ispat ile ilgili öğretmen farkındalığın sağlanması, öğretmenlerin öğrencinin matematiksel olarak nasıl akıl yürütebildiğini ve öğrencinin matematiği ne kadar içselleştirebildiğini anlamalarına yardımcı olacaktır. Bunun sonucu olarak öğretmenin öğrencinin yeni bilgileri önceki bilgiler ile ne kadar bütünleştirebildiğini anlamasına destek sağlayarak matematiksel düşüncenin gelişimine yarar sağlayabilir.

Sayıtlar

1. Araştırmada öğrenciler için kullanılacak olan ispat testinin öğrencilerin gerçek başarılarını yansıttığı varsayılmıştır.

2. Öğretmenlere sorulan farkındalık düzeyleri tespit sorularının öğretmenler tarafından samimiyetle ve açık gönüllülükle bilgi birikimlerine ve tecrübelerine dayanılarak cevaplandığı varsayılmıştır.

3. Araştırmada kullanılan tüm veri toplama araçlarının, araştırmanın hedeflerine uygun olduğu ve öğrenci ve öğretmen görüşlerini gerçekçi bir şekilde yansıttığı varsayılmıştır.

4. Çalışmaya katılan öğrenci ve öğretmenlerin, araştırma sürecinde ele alınan konularda derin ve kapsamlı bir anlayış sergileyerek kendi bilgi, beceri, duygu ve düşüncelerini etkili bir şekilde yansıttığı varsayılmıştır.

5. Veri toplama sürecinde öğrenci ve öğretmenlerin, birbirlerinden bağımsız olarak sorulara bireysel yanıtlar verdiği, karşılıklı etkileşimden uzak kaldıkları varsayılmıştır.

Sınırlılıklar

1. Bu çalışma, Marmara Bölgesinde bulunan bir devlet ortaokulunda görev yapan dört matematik öğretmeni ile sınırlıdır.

2. Bu çalışma, 2022-2023 Eğitim-Öğretim yılında eğitim ve öğretim gören 96 sekizinci sınıf öğrencisi ile sınırlıdır.

3. Bu çalışma veri toplamak için kullanılan öğrencilere uygulanan ispat testi ve öğretmenlere uygulanan öğretmen bireysel görüşme protokolü ile sınırlıdır.

BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölüm, ispatın kavramsal boyutlarından matematik eğitimindeki işlevine, örnek kullanımından öğretim yöntemlerine ve öğretmenlerin farkındalığına kadar geniş bir perspektif sunan kapsamlı bir literatür taramasını içermektedir

İspat Kavramı ve Tanımı

Matematiğin temelini akıl yürütme olduğu vurgulanmaktadır (Rose,1998). Akıl yürütme yeteneğinin geliştirilmesi ise eğitimin en önemli hedeflerinden biridir (Fitzgerald, 1996). Matematik akıl yürütme yoluyla doğrulanır ve ispat bu sürecin merkezi bir parçasını oluşturur (Rose,1998; Schoenfeld, 2009). İspat, matematiksel anlamayı geliştirmenin, matematiksel uygulamalara daha geniş açılardan bakabilmenin, matematiği daha net düşünebilmenin ve etkili kullanabilmenin en temel yapı taşlarından biridir (Hanna, 2000; Hanna ve De Villiers, 2012). Matematiksel bir önermenin ve matematiksel bağlamın anlaşılmasında önemli bir role sahiptir (Bulkova vd., 2018). Matematiksel öğrenme, muhakeme yeteneği kazanabilme ve yeni argümanlar oluşturabilmek için ispat matematiğin önemli bir parçasıdır (Stylianides, 2016). Matematiksel bilginin üretilmesinde ve matematiksel düşüncenin geliştirilmesinde ispatın rolü yadsınamaz (Dede ve Karakuş, 2014). Matematikte ispatın temel amacı, iddiaların geçerliliğini kurmak ve bir iddianın geçerliliğini kesin olarak gösteren herhangi bir tümdengelimli argüman sağlamaktır (Dickerson, 2008). İspatlar ilişkileri açıklayabilir, matematikte yeni keşiflerin bulunmasında önemli bir rol oynayabilir ve matematiğin iletilmesi için ortak bir dil sağlayabilir (Hanna, 2000). Bu nedenlerden ötürü, ispatın matematikteki işlevinin anlaşılması büyük önem taşımaktadır (Hanna, 2000).

İspat kavramı matematikçiler tarafından yeni bir sonucun kabul edilmesinde çok önemli bir rol oynayan sosyal süreçlerin tanınmasında ön plana çıkmaktadır (Hanna, 1990). İspat kişisel şüpheciliğin ortadan kalkmasını sağlayarak matematiksel ifadelerin doğruluğunu araştıran (De Villiers, 1999) ikna edici bir argümandır (Hersh, 1993). Bell (1976), matematikte ispatın anlamını bir önermenin doğruluğu ile ilgili gerekçelendirmeler sunan, önermenin neden doğru olduğuna dair bir görüş oluşturan ve

sonuçların tümdengelimli bir aksiyom sistemine, temel kavramlara, teoremlere ve bunlardan türetilen küçük sonuçlara örgütleyen mantıksal ereve olarak tanımlar. Davis ve Hersh (1990), ispatın hataları ve belirsizlikleri giderilebilmesi için sürekli bir doğrulama sürecine tabi olduğunu ve bu şekilde konunun özünü ortaya çıkaran anlayığı arttırdığını vurgulamığlardır. CadwalladerOlsker (2011) matematiksel bir önermenin ispatlanana kadar doğruluğunun bilinemeyeceğini belirtmiğtir. Tymoczko (1986), ispatı çeşitli sözcüklerle, şekillerde ve yenilenerek ifade edilebilecek esnek bir yapıya sahip olan ve gerekleğmesi için matematik topluluğuna ihtiyaç duyan halka açık faaliyetler olduğunu ifade etmiğtir. Knuth (2002) ispatın matematikin ilerlemesinde önemli bir role sahip olduğuna dikkat ekmiğtir. Rota (1997) ise istenilen sonuca götüren adımlar olarak tanımlayıp ispatın biçimsel boyutuna değinmiğtir. Harel ve Sowder (1998), bir ispatı gerçekleştirebilmek için öncelikle bir gözlemin doğruluğuna iliğkin kendi şüphelerini ortadan kaldırmanın ve sonrasında ise bağkalarının şüphelerini ortadan kaldırmanın gerektiğini belirtmiğtir. Weber ve Alcock (2004) bir ispatın oluğabilmesinin iki farklı yolu olduğunu vurgulamığtır. Bunlar; sembolik formülleri mantıksal olarak izin verilen bir şekilde manipüle ederek çıkarımlar yaptığında meydana gelen sözdizimsel (syntactic) ispat ve yapılan biçimsel çıkarımlara rehberlik etmek için matematiksel kavramların örneklerinin kullanıldığı anlamsal (semantic) ispattır (Weber ve Alcock, 2004). Robinson (2000) matematiksel ispatların iki potansiyel bileğeni olduğundan bahsetmiğtir. Bunlardan ilki durumun geniğ ölçekli, üst düzey görünümü ortaya çıkaran açıklayıcılık, diğeri ise resmileştirilmiğ ispatın ince yapısının sözdizimsel (syntactic) doğruluğunu sağlayan garanti (guarantee) bileğenidir (Robinson, 2000). Csikos'a (1999) göre ise ispatların yapısı; ispatlanacak ifade, ispat sürecinde kullanılan aksiyomlar ve diğer (nceden ispatlanmış) ifadeler ve ispat sürecinde kullanılan çıkarım kuralları olmak üzere üç değiğken ile karakterize edilebilir.

Bir ispatın matematik topluluğu tarafından geçerli sayılabilmesi için uyması gereken mantıksal kurallar ve biçimsel düzenlemeler bulunmaktadır (Alcock ve Weber 2008). İspat akıl yürütmeye dayalı bir mantıksal süreci içerir (Bayazıt, 2017). Matematiksel ispat bir dizi aksiyomla bağlar ve mantıksal çıkarımlar yoluyla bir sonuca ulaştırır (Griffiths, 2000). Bağka bir ifade ile bir ispat belirli bir nclde bağlar ve belirli bir iddiada biter ve bu iddia, eğer tüm argümanlar yapısal bir bakığ açısından geçerliyse ispatlanır (Heinze ve Reiss, 2003). Stylianides'e (2007a) göre, her iddianın doğrudan kanıt niteliği taşımadığı belirtilmiğtir. Bir iddianın kanıt olarak kabul edilebilmesi için

taşıması gereken belirli özellikler bulunmaktadır. İlk olarak, iddia sınıf topluluğu tarafından doğru olduğu kabul edilen ifadeleri içermelidir. Bu ifadeler teoremler, formüller, postulatlar, aksiyomlar veya tanımlar gibi, tartışmaya gerek duyulmaksızın kabul edilen ifadeleri içerir. İkinci olarak, iddia sınıf topluluğunun bildiği veya kavramsal olarak ulaşabileceği mantıksal çıkarım gibi muhakeme biçimlerini içermelidir. Üçüncüsü, iddia sınıf topluluğu için uygun ve anlaşılır kavramsal argümanları içermelidir. Bu da çeşitli sunum ve sosyal boyutları kapsayabilir; örneğin, sözel, cebirsel, görsel-geometrik gibi farklı sunum biçimlerini içermelidir. Balacheff (1988) ise ispat sürecinde öncüllerin ve bu öncüllerin kullanım sıralamasının önemine vurgu yapmıştır. Yani Balacheff'e göre, ispatın formal boyutu, önceden kanıtlanmış savlara dayalı olarak mantıksal bir şekilde adım adım oluşturulmuş, dikkatlice seçilmiş bir dizi adımlardan oluşur. Bell (1976) tarafından yapılan bir başka tanıma göre, yine ispatın tanımında formal boyutu ve seçilen adımları ön plana çıkaran bir vurgu yapılmıştır. Bell'e göre, ispat, veri içinde bulunan ifadeler veya genel olarak kabul edilmiş ifadeler ve ilkelere dayanan başlangıç noktasıyla başlar ve birbirine mantıksal bir zincirle bağlı ifadeler bütünü şeklinde ilerleyerek sonucu oluşturur.

Matematik Eğitiminde İspatın Rolü

Öğrencilere bir teoremin, bir ifadenin veya bir kavramın doğrudan verilmesi matematiğin öğrenilmesini ve içselleştirilmesini zorlaştırmaktadır (Çiltaş ve Yılmaz, 2013). Matematiksel ispatlar, öğrencilere ifadelerin arkasındaki anlamlar hakkında fikir verebilir ve ayrıca ifadelerin neden doğru veya yanlış olduğunu görmelerine yardımcı olabilir (Ko ve Knuth, 2009). Matematiksel anlayışı teşvik ederek öğrencilerin aktarılabilir düşünme becerilerini geliştirmeye yardımcı olur (Dickerson, 2008). Ayrıca öğrencilerin matematiksel muhakeme yeteneklerinin gelişmesinde ispat önemli bir rol oynar (Yılmaz ve Köse, 2021). İspat ve matematiksel muhakeme sayesinde matematiksel kavramlar anlam kazanır ve kavramlar arasındaki ilişkiler açığa çıkar (Flores, 2002). Bu sayede yeni bilgilerin öncekilerle bütünleşmesi sağlanarak matematiksel düşünme gelişir (Yılmaz ve Köse, 2021).

İspat; doğrulamaya, açıklama ve sistematikleştirmeye hizmet eden herhangi bir matematiksel süreç olarak alınırsa, matematiğin öğrenilmeye başlandığı andan itibaren bu tür süreçlerin uygulanmaya başlanması önemlidir (Coe ve Ruthven, 1994). İspat, bir

önermenin doğruluğunu göstermek için kullanılan bir yöntemdir. Bu nedenle, ispat matematikte doğrulama rolünü üstlenir. İspat, varsayım yapma, mantıksal çıkarım yapma, kanıtın yazılı olarak ifade edilmesi ve sonuçların doğruluğunun kontrol edilmesi gibi adımları içerir. Bu adımlar, matematiksel düşünme sürecindeki doğrulama rolünü yerine getirir. İspat, matematiksel düşünme sürecinde birçok farklı adımı içerir ve matematiksel düşünme becerilerinin geliştirilmesinde önemli bir rol oynar (Bell, 1976). İspatın açıklama rolü, ispatın sadece bir teoremin doğruluğunu göstermekle kalmayıp, aynı zamanda teoremin neden doğru olduğunu da göstermesi olarak tanımlanmıştır. Bu tür bir ispat, matematiksel fikirleri ve teoremin arkasındaki matematiksel özellikleri açığa çıkarır. İspatlamak için ispat, bir teoremin doğruluğunu göstermek için kullanılan bir dizi mantıksal adımdan oluşur. İspat, matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunu gösterir ve genellikle bir dizi mantıksal adım ve matematiksel kural kullanılarak yapılır. İspat, teoremin doğruluğunu kanıtlamak için kullanılır ve genellikle matematiksel bir ifadenin doğruluğunu göstermek için kullanılan resmi bir süreçtir. Öte yandan, açıklamak için ispat, sadece bir teoremin doğruluğunu göstermekle kalmaz, aynı zamanda teoremin neden doğru olduğunu da açıklar. Açıklamak için ispat, matematiksel fikirleri ve teoremin arkasındaki matematiksel özellikleri açığa çıkarır. Bu tür bir ispat, öğrencilere matematiksel kavramları ve ilişkileri daha derinlemesine anlamaları için yardımcı olabilir. Bu nedenle, açıklayıcı ispatlar, sadece teoremin doğruluğunu göstermekle kalmayıp, aynı zamanda matematiksel kavramların anlaşılmasına da katkıda bulunur (Hanna, 1990). İspatın sistematikleştirme işlevi ise bir matematiksel ifadenin bir teori veya matematiksel sistemde postulatlar, tanımlar ve diğer teoremlerle birlikte yer aldığını göstermeyi içerir. Bu ispat işlevi, bir önerinin diğer önerilere bağımlılığını göstererek ve matematik teorilerinin mimarisini temsil ederek ispat çalışmasını haklı çıkarmak için kullanılabilir. Ayrıca, öğretmenin, öğrencilerin matematiği öğrenmesi ve anlaması ile matematiğe karşı sorumluluğunu da ele alır. Bu işlev, öğrencilerin bir ispatın mimarisini anlamalarına yardımcı olur ve öğretmenin öğrencilerin çalışmalarını değerlendirmesine olanak tanır (Herbst, Miyakawa ve Chazan, 2010).

Örnek Kullanımı

Örnek oluşturma, genelleme, varsayımda bulunma ve diyagram çizme, ispat oluşturmaya bilgilendirdiği gösterilen anlamsal akıl yürütme türleridir (Yerushalmy, 2020). Örnekler hem matematiğin bir disiplin olarak gelişmesinde hem de matematik öğretiminde merkezi bir rol oynamaktadır (Giannakoulis vd., 2010). Örnekler, matematikte öğrenmekten ve anlamaya çalışmaktan, öğretmeye, müfredat tasarlamaya ve icat etmeye kadar olan birçok alanda önemli bir işleve sahiptir (Zazkis ve Chernoff, 2008). Örnekler genellikle problem çözme, iddiaların doğruluğunu veya yanlışlığını belirleme, orijinal bir ispat oluşturma veya ispatın anlaşılmasına yardımcı olmak amacı ile kullanılırlar (Mills, 2014). Örnekler, ispatlama sürecinde bir ilk adım sağlayarak, genel örnek temelli argümanların endüktifi olarak hizmet edebilir (Dreyfus vd., 2012). Mevcut ispat biçimlerinin çeşitliliği ve kalitesi göz önüne alındığında öğrencilerin karmaşık olmayan ampirik argümanlardan genel ispatlara geçiş yapmalarına örnekler yardımcı olabilir (Dreyfus vd., 2012).

Örnek kullanımı ile ilgili literatür incelendiğinde yapılan çalışmalarda yöntem olarak çoğunlukla deneysel yöntem tercih edilmiştir (Örneğin: Buchbinder ve Zaslavsky, 2007; Komatsu, 2017; Lannone, 2011). Ayrıca yapılan bu çalışmalarda sayısı az da olsa içerik analizi yöntemi kullanılarak yapılan araştırmalara da rastlamak mümkündür (Örneğin: Mejia Ramos ve Weber, 2020; Reid ve Vargas, 2018). İspat öğretiminde örnek kullanımı ile ilgili araştırmaların örneklemine ise öğrenciler oluşturmaktadır (Örneğin: Buchbinder ve Zaslavsky, 2007; Komatsu, 2017; Weber, 2009).

Weber (2009) çalışmasında ileri düzeyde matematiksel kavramları keşfedebilen, mantıksal çıkarımlarda bulunabilen, oldukça başarılı bir üniversite öğrencisinin ispat sürecinde örnekleri nasıl kullandığını incelemiştir. Öğrenci bir iddiayı ispatlarken öncelikli olarak karşı örnekler bulmaya değil, akıl yürütmesini mantıksal tümdengelimle dayandırmıştır. Yeni bir kavram öğrenirken de örnek kullanımını hemen tercih etmemiş ancak karşılaştığı kavram yeterince zorsa son tercih olarak örnek kullanımını tercih etmiştir. Ellis vd. (2013) de benzer bir çalışma yürütmüştür. Başarılı öğrencilerle beraber matematikçilerin varsayımları ispatlarken örneklerle nasıl ilişki kurduklarını incelemiştir. Örnekleri kasıtlı olarak kullanan katılımcıların tümdengelimli ispat şemaları kullanan katılımcılar oldukları ve daha geniş matematiksel yapılar hakkında düşünmek için

örnekleri kullandıkları görülmüştür. Ayrıca matematikçilerin öğrencilere kıyasla belirli bir örneği seçmeden önce örneği tanımaya daha yatkın oldukları ve örneklerin uygulanabilirliğine dair açık bir üst bilişsel farkındalık sergiledikleri tespit edilmiştir.

Mills (2014) ileri matematik derslerinde teoremleri ispatlarken öğretmenlerin sunumlarında ne tür örnekler kullandıklarını ve ne amaçla kullandıklarını incelemiştir. Örneklerin bir matematik içeriğinin sunumundan önce verildiğinde motive amaçlı, içeriğin sunumunu takip ettiğinde destek amaçlı kullanıldığı görülmüştür. Örüntü keşfi, sınır örnekleri, genel örnekler, bir iddianın somutlaştırılması, mecazi örnekler de öğretmenler tarafından kullanılan örnek türleri olmuştur. Matematikçilerin örnekleri nasıl kullandıklarına dair bilgi vermeyi amaçlayan bir diğer çalışmada Mejia Ramos ve Weber (2020) birçok matematikçinin tümdengelimsel olmayan örnek temelli argümanları belirsizliği ortadan kaldırmak için değil, sadece bir varsayımın doğruluğu hakkındaki belirsizliği azaltmak için kullandıklarını ve farklı amaçlar için bilinçli olarak farklı türde örnekler seçtiklerini belirtmiştir.

Potari vd. (2010) öğretmenlerin, öğrencilerin geçersiz iddialarını reddetme gerekçelerini araştırmıştır. Çalışma sonunda öğretmenlerin çoğu tarafından karşı örneklere dayalı akıl yürütmenin dile getirildiği görülmüştür. Öğretmenlerin bir kısmı iddialarına herhangi bir gerekçe sunmadan karşı örnekler vermiştir. Bu öğretmenler bir teoremden çıkarım yaparak, bir görüntüyü hatırlayarak veya bu karşı örneği bir ders kitabında görmüştüm şeklinde argümanlar sunarak karşı örneklerin varlığını savunmuşlardır. Giannakoulis (2010) da benzer bir çalışma yürütmüştür fakat bu çalışmada farklı olarak öğretmenlerin çoğu iddiaları çürütmede karşı örnekler kullanmamış, teoriye dayalı argümanlar geliştirerek iddiaları çürütmeye çalışmışlardır ve öğretmenler uygun bir teoremi kullanamadıklarında karşı örneklerden yararlanmaya çalıştıklarını ifade etmişlerdir.

Buchbinder ve Zaskavsky (2009) matematiksel ifadelerin geçerliliğini belirlemek için, ortalama düzeyde bir lise öğrencisi ile yürüttükleri çalışmada örneklerin durumunu belli bir çerçeveye göre incelemiştir. Araştırma neticesinde öğrenciye, sonuçlara kendi başına ulaşmasına ve özgürce akıl yürütmesine izin verildiğinde öğrencinin doğru cevaplara ulaştığı görülmüştür. Başlangıçta hem doğrulayan hem de çelişen örnekler kullanan katılımcı daha sonra doğrulayıcı örneklerin ifadeleri kanıtlamak için yetersiz

olduğunu fark etmiş, ancak tek bir çelişkili örneğin ifadeleri çürütmek için yeterli olduğu sonucuna ulaşmıştır. Reid ve Vargas (2018) ise bir argümanın ispat olarak kabul edilebilmesi için gereken psikolojik ve sosyal faktörleri incelemiştir. Genel bir örnek kullanarak yapılan bir ispatta psikolojik faktörde, örneğin bazı yönlerden değişikçe ispatın doğru kalmasını mümkün kılması gerektiği, sosyal faktör olarak da örneğin nerede ve kim tarafından yapıldığının bir öneminin olmaması ve bulunduğu çevrede kabul edilebilir olması gerektiği vurgulanmıştır.

Buchbinder ve Zaslavsky (2007) öğrencilerin karşı örneklerle karşılaştıklarında dahil oldukları temel süreçleri incelemiştir. Karşı örneklerin çeşitli yönlerini vurgulayan farklı türden etkinliklere katılan öğrencilerin matematik düzeyi veya yaşı ne olursa olsun karşı örnekleri yanlış ifadeleri çürütmek için meşru araçlar olarak görmeye başladıkları tespit edilmiştir. Benzer bir çalışmada Komatsu (2010) ilkokul öğrencilerinin matematik etkinliklerinde yaptıkları ispatlarda, çürütme yöntemi olarak karşı örnekler kullanıldığında öğrencilerin verdikleri tepkileri incelemiştir. Öğrenciler karşı örneklerle karşılaştıklarında bozulan ispatlarını güncellemek için karşı örneklerin onlar için bir itici güç olduğu ve çaba sarf ettikleri gözlemlenmiştir. Ayrıca öğrenciler varsayımlarının neden yanlış olduğunu da analiz etmişlerdir.

Lannone (2011) üniversite öğrencileri ile yaptığı çalışmada kendi örneğini oluşturan öğrenci grubu ile önceden hazırlanmış örnekleri inceleyen öğrenci grubunun kanıt oluşturma görevlerini karşılaştırmış ve yeni kavram oluştururken kullandıkları stratejileri incelemiştir. Araştırma sonunda kendi örneğini oluşturan grup ile hazırlanmış örnekleri inceleyen grup arasında ispat üretimi açısından istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunamamıştır. Örnek oluşturma stratejisi olarak deneme yanılma stratejisi en yaygın yaklaşım olarak tespit edilmiştir.

Komatsu (2017) ortaokul geometrisindeki ifadelerin ispatında ampirik örneklerin incelenmesinin ispatların revizyonuna etkisini incelemiştir. İspat inşasından sonra ampirik örnekler incelemek, öğrencilerin eleştirel düşüncelerini geliştirmesine, ispatların değiştirilmesine, ifadelerin alanlarını uygun şekilde kısıtlamak için ortaya çıkmamış koşulların açıklanmasına ve ilk oluşturulan ifadelerin çürütülmesi ile daha genel ifadelerin oluşturulmasına olanak sağlamıştır.

Buchbinder ve Zaslavsky (2019) yaptıkları araştırmada lise öğrencilerinin örnekler arasındaki etkileşimi anlamalarını, matematiksel ifadeleri kanıtlama veya çürütme durumlarını incelemiştir. Öğrencilerin anlamalarının özellikle güçlü olduğu çerçevenin iki yönü; bir örneğin çürütülmesinde karşı örneğin durumu ve bir ifadeyi kanıtlamada örneğin teyit etme durumu olduğu görülmüştür. Ayrıca örneğin türüne göre tutarsızlık ifade türüne göre tutarsızlık ve çıkarım türüne göre tutarsızlık öğrencilerin yanıtlarında belirlenen tutarsızlıklar olarak tespit edilmiştir.

İspat Öğretimi

Matematik eğitiminde erken sınıflardan itibaren ispat ve akıl yürütmenin önemi giderek daha fazla vurgulanmaktadır (Ball, 2002). Öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerinin geliştirilmesi, birçok müfredatın hedefi ve matematik eğitimi araştırma topluluğu kültürünün temel bir unsurudur (Jeannotte ve Kieran, 2017). Matematiksel düşünmede ise ispatlama ve çürütme, bir önermenin doğru veya yanlış olup olmadığını ve neden yanlış olduğunu göstermek için çok önemli yeteneklerdir (Ko ve Knuth, 2009). Oysaki basit bir matematiksel ifadenin bile doğruluğunu ve yanlışlığını değerlendirmek karmaşık bilişsel bir aktivitedir (Epp, 2003). İspat ve akıl yürütme matematiğin temel yönleridir ve öğrencilerin bu tür üst düzey düşünmeyle meşgul olmaları için ihtiyaç duydukları becerileri geliştirmelerine nasıl yardımcı olunacağını belirlenmesi önem taşımaktadır (Martin, 2005). İlgili literatür incelendiğinde ispat öğretimi ile ilgili yapılan çalışmalarda yöntem olarak çoğunlukla içerik analizi kullanıldığı görülmektedir (Örn, Dreyfus, 2002; Hanna, 1989; Jeannotte ve Kieran, 2017; Thompson, 2014).

Hanna (1989) altmışlı yıllarda benimsenen matematik müfredatındaki resmi kanıta yapılan vurgunun kökenlerini incelemiştir. Çalışmada matematiksel deneyimler sağlamanın yeterli olmayacağı, öğrencilerin matematiği anında cevaplar üretmek için bir kara kutu olarak görmeye devam ettikleri sürece matematik öğrenirken karşılaşacakları düzensiz yollarla başa çıkmak için gerekli sabrı geliştiremeyecekleri vurgulanmıştır. Thompson (2014) ise ders kitaplarında akıl yürütme ve kanıtlama ile ilgili öğretmenler, müfredat tasarımcıları ve araştırmacılar için araştırma yapmıştır. Ders kitaplarında akıl yürütme ve kanıtlama ile meşgul olmak için sınırlı sayıda potansiyel fırsatlar sunulduğu tespit edilmiştir.

Chazan (1993) lise öğrencileriyle yaptığı çalışmada geometri derslerinde öğrencilerin ampirik ve tümdengelimli ispat arasındaki farkları fark etmelerini incelemiştir. Çalışma sonucunda geometri derslerinde ampirik delillerin kullanımının öğrencilerin matematiksel ispatı anlamalarını engelleyip engellemediğinden ziyade, tümdengelimli ispatın önemini anlamalarında bir fırsat olarak değerlendirilebileceği öne sürülmüştür. Stylianides ve Stylianides (2009) ise öğretmenlerle yaptığı araştırmada öğrencilerin matematiksel genellemeleri doğrulama yöntemleri olarak ampirik argümanların sınırlamalarını fark etmeleri üzerine karşı örneklerin etkisini araştırmıştır. Karşı örneklerin öğrencilerde bilişsel çatışmalara yol açtığı ve bu sayede kanıt olarak sundukları ampirik argümanlardan şüphe ederek daha genel yaklaşımlar sergiledikleri görülmüştür. Miyazaki ve ark., (2017) ise, ortaokul öğrencileri ile yürüttükleri çalışmada geometride tümdengelimli ispatla tanışmaya yeni başlayan öğrenciler için web tabanlı bir öğrenme destek sisteminin temellerini açıklamıştır. Web tabanlı sistem de bulunan akış şeması kanıtlama sisteminde öğrencilerin kanıtları öğrenmesini desteklemek için otomatik olarak figürü sembolik nesnelere çevirmek için ara yüz, öğrencilerin önceki cevaplarını kontrol etme, problemlerin zorluğuna göre öğrenci görevlerini organize etme olarak üç teknolojik özellik kullanılmıştır.

Knuth (2002) matematik eğitimcilerine yönelik olarak kanıtın matematik anlayışını teşvik etmek için bir araç olarak kullanılması ile ilgili bir çalışma yürütmüştür. Çalışma sonunda, öğretmenler öğrenciler için çeşitli kanıt türleri ile karşılaştıkları öğrenme fırsatları yaratırlarsa öğrencilerin yalnızca daha ayrıntılı bir kanıt anlayışı geliştirmekle kalmayacağı aynı zamanda matematiğin altında yatan daha derin anlayışa sahip olacakları belirtilmiştir. Pereira ve Ponte (2017) ise tasarım temelli bir araştırma yürüterek ele aldıkları öğretmen eylemlerinin öğrencilerin matematiksel muhakemelerini nasıl geliştirebileceği hakkında araştırma yürütmüştür. Matematiksel akıl yürütme süreçlerini ortaya çıkaran durumları teşvik etmek için tek bir eylemin yeterli olamayacağı ve eylemlerin davet etme, bilgilendirme, rehberlik ve meydan okuma eylemleri olarak sıralanmasına odaklanma ihtiyacı olduğu vurgulanmıştır.

Dreyfus (2002) ileri matematik öğretmenlerinin öğretim süreçlerinde neler olup bittiği konusunda daha bilinçli olmalarını sağlamak amacıyla, aralarında soyutlamanın da bulunduğu süreçleri analiz etmiştir. Öğrencilerin matematiksel düşüncesini, bir matematikçinin düşüncesine olabildiğince yaklaştırmak için keşfetme, sezme, kontrol

etme, kanıtlama, tanımlama gibi ileri matematiksel süreçleri ve bunların etkileşimini anlamının bir ön koşul olduğu belirtilmiştir. Uzman matematikçiler ile yürütülen bir diğer çalışmada Inglis ve Ramos (2009) bir argümanın kaynağını bilmenin matematik ile ilgilenen uzman kişilerin ikna düzeylerini etkilemesini araştırmıştır. Çalışma sonunda bir argümanın kaynağının, okuyucunun rapor edilen ikna düzeyini yalnızca, okuyucu argümanı okuduktan sonra ilgili konuda kararsızlık yaşarsa etkilediği tespit edilmiştir. Eğer okuyucu argümanın ikna ediciliğinden eminse ya da argümanın ikna edici olmadığından eminse argümanın kaynağından etkilenmediği belirtilmiştir.

Hanna (2002) çalışmasında kesin tanımları, resmi kanıtları vurgulayan soyut ve ayrıntılı bir yaklaşım olan bourbaki yaklaşımının kökenlerini incelemiştir. Araştırmada öğrencilere iletilmesi gerekenin, dikkatli akıl yürütme ve incelenip kontrol edilebilecek argümanlar oluşturma olduğunun önemi belirtilmiştir. Bu beceriler bir noktaya kadar resmileştirme gerektirse de fikirlerin açıklığına önem verilmesinin gerekliliği vurgulanmıştır. Rumsey ve ark., (2009) ise ilkökul ikinci sınıf öğrencilerinin söylem ve argümantasyon türleri, katılım yapıları ve rutinleri hakkında bir anlayışın gerçekleştirilmesi ile ilgili araştırma yapmıştır. İkinci sınıf düzeyinde söylem, fark etme, merak etme, tahmin etme ve tahmin etme fırsatlarını içeren açık uçlu görevlerin, öğrencilerin birçok gözlem yapmasına ve paylaşmasına izin verdiği gözlemlenmiştir. Benzer bir çalışmada Jeannotte ve Kieran (2017) ilk ve ortaokul seviyesinde matematik öğretilmesi ve öğrenilmesi amacıyla kavramsal bir matematiksel akıl yürütme modeli geliştirmiştir. Oluşturulan modele göre matematiksel akıl yürütmenin yapısal yönünde matematiksel söylemi yönlendiren üst kuralların akıl yürütmenin tümdengelim adımına yapılandırılması gerektiği belirtilmiştir.

Housman ve Porter (2003) araştırmalarında ortalamanın üzerindeki lisans matematik öğrencilerinin inandırıcı bulduğu matematiksel argümanlar ve bu öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenmek için kullandıkları stratejilerin neler olduğunu incelemiştir. Harici ispat şemaları kullanan öğrencilerin örnek oluşturma, örnek kullanımı ve yeniden formüle etme öğrenme stratejilerini kullanmada başarısız oldukları, dönüşümsel ispat şemalarına sahip öğrencilerin ise orta derecede başarı gösterdikleri tespit edilmiştir. Benzer bir çalışmada Ko ve Knuth (2009) lisans matematik öğrencilerinin sürekli fonksiyonlarla ilgili ispat ve karşı örnek üretmeleri üzerine yeteneklerini ve matematiksel anlayışlarını araştırmıştır. Çalışma sonunda katılımcıların

sürekli fonksiyonlarla ilgili tüm ders eğitimlerini tamamlamış olmalarına rağmen, ispat ve karşı örnek üretmede zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Ayrıca öğrenciler için doğru bir karşı örnek oluşturmanın doğru bir kanıt oluşturmaktan daha kolay olduğu tespit edilmiştir.

Öğretmen Farkındalığı

Öğrencileri yeterli ispat düzeyine getirmede ve ispata yönelik olumlu tutum geliştirmelerini desteklemede öğretmenler kritik bir role sahiptir (Doruk ve Kaplan, 2015). Öğrencilerin matematiksel olarak akıl yürütmelerine yardımcı olmak için öğretmenler, çocukların bir cevabın doğru olup olmadığını, bir prosedürün doğru cevapları üretilip üretmeyeceğini veya bir formülün anlamlı olup olmadığını kendi kendilerine doğrulama yeteneklerini tanımalı ve geliştirmelidir (Flores, 2002). Ayrıca öğretmenlerin matematiksel bir argümanın ispat olup olmadığını belirleyebilmeleri için bir ispat veya ispat benzeri argümanı diğeriyle karşılaştırabilmeleri ve ispatları matematiksel ölçütlere dayanan çeşitli temsil biçimleri arasında tanıyabilmeleri gerekmektedir (Steele ve Rogers, 2012).

İlgili literatür incelendiğinde öğretmen farkındalığını konu alan çalışmalara rastlamak mümkündür. Çalışmaların örneklemini çoğunlukla öğretmen adayları oluşturmuş ve bu araştırmalarda yöntem olarak genellikle deneysel yöntemler tercih edilmiştir (Örneğin; Barnhart ve Van Es 2015; Jacobs vd., 2010; Osmanoğlu, 2012; Tirosh, 2000).

Barnhart ve Van Es (2015) video tabanlı bir ders yardımıyla öğretmen adaylarının öğrenci düşüncelerini analiz etme becerilerini incelemiş ve öğretmen adaylarının öğrenci düşüncelerini analiz etmede yüksek düzeyde bilgi birikimine ihtiyaç duydukları tespit edilmiştir. Benzer bir çalışmada Sherin (2009) video tabanlı bir mesleki gelişim ortamı hazırlayarak öğretmenlerin sınıf etkileşimlerinin önemli özelliklerini fark etme ve yorumlama becerilerinin gelişimini araştırmış ve öğretmenlerin, öğrencilerin matematiksel düşüncesini fark etme ve bu düşüncelere katılma becerilerinde artış görüldüğü saptanmıştır. Walkoe (2014) de öğretmen adaylarının, öğrencilerin cebirsel düşüncelerini fark edebilmelerini incelediği çalışmasında benzer bir sonuç elde etmiştir. Öğretmen adaylarının video kulübüne katılmalarının, öğrencilerin cebirsel düşüncelerini

daha derin yollardan fark etmesini ve öğrenci düşünceleri hakkında akıl yürütmesine yardımcı olduğunu göstermiştir.

Osmanoğlu (2012) video örnek olay yardımıyla, öğretmen adaylarının matematik programında belirtilen öğrenci rollerini fark etme becerilerini araştırmıştır. Öğrenci rolleri temalarından metodolojik perspektif, tutumsal perspektif ve sınıf kültürü başlıklarında öğretmen adaylarının fark etme becerilerinde güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğretmenlerin bir video kulübüne katılımlarının doğasını inceleyen bir çalışmada Van Es (2009), öğretmenlerin kulüp çalışmaları boyunca odaklanmanın dört rolü olan; suflör, oluşturucu, önericiler ve eleştirmenler rolleri arasında değişimler yaşadığını vurgulamıştır. McDuffi ve ark., (2003) ise öğretmen adaylarının matematik öğretiminin ve öğreniminin temel yönlerini fark etmelerinin gelişimini yapılandırılmış bir video analiz etkinliği ile incelemiştir. Matematik öğretimi ve öğrenimini fark etme yollarının ağırlıklı olarak dikkat ve farkındalık seviyelerinde olduğu görülmüştür.

Jacobs ve ark., (2010) öğretmen adayları ve öğretmenlerle yürüttükleri çalışmada, ilkokul öğrencilerinin matematiksel düşüncesini profesyonel olarak fark edebilme becerilerini karşılaştırmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının öğrencilerin stratejilerine katılma, matematik anlayışlarını yorumlama ve nasıl cevap verileceğine karar verme becerilerinde öğretmenlere kıyasla daha fazla zorlandıkları tespit edilmiştir. Schock ve ark., (2013) ise uyguladıkları bir modül yardımıyla öğretmen adaylarının erken matematik öğrenmenin aşamalarını fark etme becerilerinin gelişimini incelemiştir. Uygulanan modül sonucunda öğretmen adaylarının profesyonel fark etme bileşenlerinden olan katılma, yorumlama ve karar verme becerilerinde önemli bir ilerleme gösterdiği görülmüştür.

Tirosh (2000) çalışmasında öğretmen adaylarının kesirlerin bölünmesi konusundaki bilgilerini geliştirmek ve öğrencilerin yanlış kavramalarını anlamalarına yardımcı olmayı amaçlamıştır. Araştırma, nitel araştırma yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir ve öğretmen adaylarının yanlış kavramalarını anlamalarını ve bu kavramaları nasıl kullanabileceklerini anlamak için çeşitli görevler ve etkinlikler içermektedir. Sonuç olarak, araştırma, öğretmen adaylarının kesirlerin bölünmesi konusundaki bilgilerini geliştirmek için etkili bir yaklaşımın olduğunu göstermiştir. Ayrıca araştırma, öğretmen adaylarının yanlış kavramalarını anlamalarına yardımcı

olmak için öğretmen eğitimi programlarında daha fazla çaba gösterilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Öğretmen adaylarının farkındalıklarının gelişimini konu özelinde inceleyen benzer bir çalışmada Matamoros ve ark., (2014) öğretmen adaylarının, öğrencilerin türev kavramını anlamalarının belirtilerini fark etme yeteneklerinin gelişimini uygulanan bir öğretim modülü aracılığı ile incelemiştir. Öğretmen adayları öğretim modülünden önce öğrenci cevaplarını doğru yanlış yaklaşımında değerlendirirken, modül sonunda öğrenci öğrenmelerinin farklı özelliklerini belirleyebildikleri görülmüştür.

Yopp (2015) yanlış bir genelleme veya karşı bir örnekle karşı karşıya kalındığında öğretmen adaylarının ne tür iddialarda bulunduğunu incelemiştir. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun karşılaştıkları bir öngörü, gözlem veya veriden nasıl faydalanabileceğini göstermek için uygun bir argüman geliştirirken ne tür iddiaların geçerli olduğuna dair yeterli anlayıştan yoksun oldukları tespit edilmiştir. Fernandez ve ark., (2013) öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme özelinde öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etmelerini incelemiştir. Öğretmen adaylarının, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini fark etmede oluşturulan çerçevenin, öğrenci profillerini fark edemez seviyesinden başladığı ve öğrenci profillerini gerekçelendirerek ve tanımlayarak fark eder seviyesine doğru bir gelişim gösterdiği görülmüştür.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmanın araştırma modeli, araştırma grubu, kullanılan veri toplama araçları, toplama süreci ve elde edilen verilerin analiz yöntemleri detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Araştırma Modeli

Bu çalışma kapsamında öğretmenlerin öğrencilerin ispat yapabilme becerilerini fark edebilme düzeylerini araştırma amacıyla nitel yöntem kullanılmıştır. Nitel araştırmalar araştırma yapılan kişilerin perspektifinden yararlanılarak araştırılan olay, olgu, norm ve değerlerin incelenmesini sağlar (Ekiz, 2009). Ayrıca bu yöntem, araştırılan kişilerin düşüncelerini, ortaya koydukları eylemleri, algılarını ve inançlarını daha doğru bir şekilde analiz edilebilmemize yardımcı olur (Mcmillan ve Schumacher, 2001). Nitel yöntem kullanılarak yapılan bu incelemede, öğretmenlerin öğrencilerin sorulara verdikleri cevapları yorumlarken kullandıkları dili, kavramları ve anlamları anlayabilmek ve bu kavram ve anlamların neyi ifade ettiğini belirlemek önem taşımaktadır. Öğretmenlerin öğrencilerin ispat yapabilme düzeylerini fark edebilme düzeylerinin incelenmesi aşamasında, verilerin toplanıp değerlendirilmesinde ve ayrıntılı olarak yorumlanabilmesinde nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması yöntemi kullanılmıştır.

Öğretmenlerin, öğrencilerin kavramlar arasında ne kadar ilişki kurabildiğini, öğrendikleri bilgiler arasında sebep sonuç ilişkisini kurup kuramadığını, probleme uygun çözüm yolu sunma becerisini fark edebilmelerindeki değişimleri uygun bir şekilde yorumlayabilmek için durum çalışması yöntemi tercih edilmiştir. Çünkü, durum çalışmaları araştırılmak istenilen olay veya bireylerin kendi doğal işleyişlerinde belirli bir zaman ve yer dahilinde mülakatlar, gözlemler, raporlar, dokümanlar ve görsel-işitsel materyaller kullanılarak araştırılan durum ve bireylerin detaylı betimlenerek analiz edilmelerine olanak tanır (Creswell, 2013). Bu doğrultuda öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerinin öğretmenler tarafından fark edilme düzeylerinin ayrıntılı olarak incelenebilmesi için bu çalışmada nitel durum çalışması tercih edilmiştir.

Araştırma Grubu

Bu çalışmada katılımcı grup, amaçlı örnekleme yönteminden faydalanarak seçilmiştir. Amaçlı örnekleme, seçkisiz olmayan bir örnekleme yaklaşımı olup, belirli ölçütleri karşılayan veya belli özelliklere sahip özel durumlar araştırılmak istenildiğinde tercih edilir. Araştırmacı, seçtiği durumu, bireyleri veya olguları anlamaya ve bunlar arasındaki ilişkileri keşfetmeye ve açıklamaya çalışır (Büyüköztürk vd, 2020). Araştırmanın örneklemini Marmara Bölgesinde bulunan bir devlet ortaokulunda öğrenim görmekte olan 96 sekizinci sınıf öğrencisi ve aynı okulda görev yapmakta olan dört matematik öğretmeni oluşturmuştur. Çalışmanın yapılacağı okul araştırma grubu ile daha rahat iletişim kurulabilmesi ve daha doğru sonuçların alınabilmesi açısından araştırmacının görev yaptığı okul olarak belirlenmiştir. Çalışmaya katılan öğretmenlerin demografik özellikleri Tablo 1’de yer almaktadır. Gizlilik amacıyla öğretmenlerin kendi isimleri yerine Öğretmen1, Öğretmen2, Öğretmen3, Öğretmen4 kodlamaları verilmiştir.

Tablo 1. Çalışmaya Katılan Öğretmenlerin Demografik Bilgileri

Öğretmen	Cinsiyet	Mesleki Deneyim (Yıl)	Öğrenim Durumu
Öğretmen1	Kadın	10	Lisans
Öğretmen2	Kadın	18	Lisans
Öğretmen3	Kadın	14	Lisans
Öğretmen4	Erkek	15	Lisans

Tablo 1 incelendiğinde, öğretmenlerin tamamının mesleki deneyiminin on ile yirmi yıl arasında olduğu ve lisans düzeyinde eğitim aldığı görülmektedir.

Veri Toplama Araçları ve Veri Toplama Süreci

Bu çalışmada veri toplama aracı olarak, sekizinci sınıf ortaokul öğrencilerine uygulanmak üzere İspat Testi ve öğrencilerin ispat testi sorularına verdikleri yanıtları kullanarak oluşturulan Öğretmen Bireysel Görüşme Protokolü öğretmenlere uygulanmıştır. Öğretmenlerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler video kayıt altına alınmıştır. Öğretmenlerle yapılan görüşmeler yaklaşık olarak otuz ile kırk dakika arasında sürerken, öğrencilere ispat testi için bir ders süresi verilmiştir. Öğretmenlerin farkındalık düzeyini daha kapsamlı inceleyebilmek amacıyla Knuth, Choppin ve Bieda (2009)’nın

çalışmasında yer alan muhakeme ve ispat düzeylerinden birinci, ikinci ve üçüncü düzeydeki bazı öğrenci cevapları öğretmenlere sunulmuştur.

İspat Testi Soruları

Bu çalışmada kullanılan ispat testi beş sorudan oluşmaktadır. Sorular Aylar (2014)'ın tezinde yer alan veri toplama araçlarından seçilmiştir. Sorular öğrencilerin ispat yapmak ile örnek vererek doğrulama arasındaki farkı bilip bilmediklerini, bir önermenin birden fazla yolla ispatlanabileceğinin ve ispat ile genellenebilir bir yargı sunma arasındaki ilişkinin farkında olup olmadığını değerlendirmeye yönelik sorular arasından öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerinin düzeylerini belirlemek amacıyla seçilmiştir. İspat testinde yer alan sorular aşağıda verilmiştir.

“Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır.” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

“İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

“Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp bu çarpıma 3 eklenirse 6'nın katı olan bir sayı elde edilir.” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

“Bir tek ve bir çift sayı toplandığında her zaman tek sayı elde edilir.” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

“ ab , ba , aa ve bb iki basamaklı sayılar olsun. Bu durumda $ab + ba = aa + bb$ dir.” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Öğretmen Bireysel Görüşme Protokolü

Bu çalışmada yer alan öğretmen bireysel görüşme protokolü ispat testinde yer alan her soru özelinde üç sorudan oluşmaktadır. Birinci soru öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme beceri düzeyini belirlemeye yöneliktir. İkinci soru öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarını yorumlama becerisi düzeyini belirlemeye yöneliktir. Üçüncü soru ise öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl yanıt verileceğine karar verme becerisinin düzeyini belirlemeye yöneliktir. Öğretmen bireysel görüşme protokolüne ait sorular aşağıda verilmiştir.

1) Öğrencinin bu soruya karşılık olarak ne yaptığını düşündüğünüzü ayrıntılı olarak açıklayınız. Öğrencinin her bir problemi nasıl çözdüğünü, kullandığı kavramların unsurlarını ve seçilen yöntemin uygun olup olmadığını ve nedenini açıklayınız.

2) Öğrencinin anlayışları hakkında ne öğrendiğinizi ayrıntılı olarak açıklayınız.

3) Öğrencinin öğretmeni olduğunuzu farz edin ve öğrenciye yanıt verebileceğiniz bazı yolları tanımlayın. Ve neden bu yanıtları seçtiğinizi açıklayınız.

Veri Analizi

Öğrencilerin muhakeme ve ispat becerilerinin seviyeleri Knuth, Choppin ve Bieda'nın (2009) çalışmasında yer alan muhakeme ve ispat düzeylerine göre, ispat testinden gelecek öğrenci cevaplarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerinin profesyonel olarak fark edilebilmesi için ise Jacobs ve ark.'nın (2010) geliştirdikleri ölçeğe göre elde edilen veriler betimsel olarak analiz edilmiştir. Bir nitel veri analiz türü olan betimsel analiz, veri toplama araçları ile elde edilen verilerin önceden belirlenen temalara göre özetlenmesi ve yorumlanmasını içerir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Öğrencilerin muhakeme ve ispat düzeylerinin ve öğretmenlerin farkındalık düzeylerinin nasıl analiz edildiği aşağıdaki başlıklarda ayrıntılandırılmıştır.

Öğrencilerin Muhakeme ve İspat Düzeyleri

Bu çalışmada yer alan ispat düzeyleri, öğrencilerin yapmış oldukları matematiksel ispatların farklı seviyelerini ifade etmektedir. Bu seviyeler, Knuth, Choppin ve Bieda (2009) tarafından tanımlanmıştır ve dört düzeyden oluşmaktadır. Bu düzeyler aşağıda verilmiştir.

0.düzye: Bu seviyedeki öğrenciler bir önermenin veya ifadenin doğruluğunu göstermek için matematiksel bir gerekçe sağlama ihtiyacının farkında değildir. Öğrenci önermenin neden doğru olduğuna herhangi bir gerekçede bulunmadan önermenin doğru olduğunu belirtebilir.

1.düzye: Bu düzeydeki öğrenciler bir önermenin veya ifadenin doğruluğunu göstermek için matematiksel bir gerekçe sağlama ihtiyacının farkındadır ancak gerekçeleri genel değildir. Genellikle öğrencilerin gerekçeleri ampirik temellidir.

Deneyssel temelli gerekçeler arasında birkaç durumu sistematik olarak kontrol etmeyi düşünen öğrenciler bu seviyede değerlendirilir.

2.düzyey: Bu düzeydeki öğrenciler bir önermenin veya ifadenin doğruluğunu göstermek için genel bir argümana duyulan ihtiyacın farkındadır ve genellikle bu tür argümanları kendileri üretmeye çalışır. Bununla birlikte ürettikleri argümanlar ya geçerli bir argüman değildir. Ya da eksik argümanlar üretir. Dolayısıyla argümanlar kabul edilebilir kanıtlar olmaktan uzaktır. Düzey 2 sunulan ampirik kanıtın kanıt olarak yeterli olmadığını ya da kanıt olarak örneklerin sınırlılığının kabul edildiğini ifade eden öğrenci yanıtlarını da içermektedir.

3.düzyey: Bu seviyedeki öğrenciler bir önermenin veya ifadenin doğruluğunu göstermek için genel bir argümana duyulan ihtiyacın farkındadır ve bu tür argümanları kendileri başarıyla üretebilmektedir. Öğrencilerin bu düzeyde ürettikleri argümanlar kabul edilebilir kanıtlar olarak görülmektedir. Öğrencilerin öne sürdükleri argümanlar bir önermenin veya ifadenin her durumda doğru olduğunu göstermektedir. Tablo 2’de her düzey için düzeyin neye göre seçildiğine yönelik açıklama ve ispat testi sorularında yer alan birinci soru özelinde örnek öğrenci cevapları verilmiştir.

Tablo 2. Örnek Öğrenci Düzeyleri

Düzeyler	Açıklama	Örnek öğrenci cevapları
0	Hiç cevap verilmeyen ya da boş bırakılan cevaplar	Doğru
1	Ampirik temelli gerekçeler sunulan cevaplar	Örneğin: 2,3,4 3.3=9 2+3+4=9
2	Geçerli olmayan ya da eksik kurulan argümanlar içeren cevaplar	$x+x+1+x+2=2.(x+1)$
3	Başarı ile oluşturulan genel argümanlardan oluşan cevaplar	$x+x+1+x+2=3.(x+1)$ $3x+3=3x+3$

Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri

Öğretmenlerin öğrenci düşüncelerini fark etme becerilerini inceleyen çalışmalar genellikle bu becerileri dikkat etme, yorumlama ve yanıt verme olmak üzere üç adımda ele almaktadırlar (Jacobs vd., 2010). Bu çalışmada da, öğrencilerin muhakeme ve ispat düzeylerindeki farkındalık düzeyleri dikkat etme, yorumlama ve yanıt verme olmak üzere üç kategoride incelenmiştir. Dikkat etme, öğretmenin öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerine odaklanması ve bu süreçleri fark etmesi anlamına gelir. Yorumlama,

öğretmenin öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini anlaması ve yorumlamasıdır. Karar verme ise öğretmenin öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerine dayanarak uygun bir yanıt vermeyi seçmesidir. Bu üç düzey, öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini daha iyi anlamalarına ve öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olmaktadır. Jacobs ve diğerleri (2010) profesyonel fark etme düzeylerini üç kategoride inceler: sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt. Bu kategoriler, öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini nasıl fark ettiklerine ve yorumladıklarına bağlıdır. Bu düzeyler detaylı olarak aşağıda açıklanmaktadır:

1. Öğrencilerin stratejilerine dikkat etmek

Katılım sağlayan öğretmenlerin verdikleri cevaplar öğrencilerin cevap stratejilerine dikkat edildiğine dair kanıt sağladığında öğretmenlerin yaptıkları açıklamalar, öğrencilerin nasıl saydıkları, nicelikleri temsil etmek için araç veya çizimleri kullanmaları veya onları manipüle etmeyi kolaylaştırmak için ayrıştırılmış sayılar gibi matematiksel olarak önemli ayrıntıları içerir. Öğretmenlerin verdikleri cevaplar öğrencilerin stratejilerinin ayrıntılarına dikkat edildiğine dair kanıt sağlamadığında yapılan yorumlar, bir araç belirleme veya sorunun başarı ile çözüldüğünden bahsetme gibi stratejilerin genel özelliklerine yönelmektedir ve sorunun nasıl çözüldüğüne dair ayrıntılar atlanmaktadır (Jacobs vd., 2010).

Öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerine dikkat etme düzeylerini belirlemek için, öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel stratejilerine odaklanmaları ve bu stratejilerin ayrıntılarını fark etmeleri gerekmektedir. Öğretmenler, öğrencilerin matematiksel stratejilerini gözlemleyerek, öğrencilerin hangi stratejileri kullandığını, bu stratejilerin nasıl kullanıldığını ve öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerindeki zorlukları belirleyebilirler. Öğretmenler, öğrencilerin matematiksel stratejilerini fark etmek için, öğrencilerin sözlü ifadelerini, yazılı çalışmalarını ve diğer matematiksel etkinliklerdeki davranışlarını dikkatle izleyebilirler. Bu şekilde, öğretmenler öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini daha iyi anlayabilir ve öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olabilirler. Sağlam kanıt, öğretmenin öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini fark ettiği ve bu süreçleri açıkça yorumladığı durumlarda ortaya çıkar. Bu tür yanıtlar, öğrencilerin

matematiksel düşünme süreçlerini anlamak için sağlam bir temel sağlar. Sınırlı kanıt, öğretmenin öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini fark ettiği, ancak yorumlamada bazı sınırlamaları olduğu durumlarda ortaya çıkar. Öğretmenler, öğrencilerin matematiksel stratejilerini tanımlayabilir, ancak bu stratejilerin ayrıntılarını tam olarak açıklayamayabilirler. Yetersiz kanıt, öğretmenin öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini fark ettiği, ancak yorumlamada yetersiz olduğu durumlarda ortaya çıkar. Öğretmenler, öğrencilerin matematiksel stratejilerini tanımlayamaz veya yanlış bir şekilde tanımlayabilirler (Jacobs vd., 2010).

2. Öğrencilerin anlayışlarını yorumlama

Öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarını yorumlamada kullanılacak olan ölçeğin düzeyleri sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve öğrencilerin anlayışlarının yorumlanmasına ilişkin kanıt eksikliğinden oluşmaktadır. Sağlam kanıt, matematiksel olarak ilgili ayrıntıları işaret etme, öğrencilerin hangi stratejileri ve anlayışları göstermediğini fark etme, çeşitli şekillerde strateji ayrıntılarını anlamlandırmaya odaklanan kanıtlardır. Sınırlı kanıt, öğrencilerin anlayışlarını yorumlamaya odaklanan ancak sağlam kanıtlar gösteren yanıtlardan daha az derinliğe sahip yorumlardır. Kanıt eksikliği, öğretmenlerden açıkça istenmesine rağmen öğrencilerin anlayışlarının yorumlanmasına dair herhangi bir kanıt içermeyen ifadelerdir. Bu kısımdaki yanıtlar, matematik öğretimi ve öğrenimi hakkında öğrenilenler gibi alternatif odaklara sahiptir (Jacobs vd., 2010).

Öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini anlamak için, öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel stratejilerini doğru bir şekilde tanımlamaları ve yorumlamaları gerekmektedir. Bu nedenle, öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel stratejilerini doğru bir şekilde tanımlayabilmesi ve yorumlayabilmesi için, öğrencilerin matematiksel stratejilerini dikkatli bir şekilde gözlemlemesi gerekmektedir. Öğretmenler, öğrencilerin matematiksel stratejilerinin anlamlarını doğru bir şekilde anlayarak, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini daha iyi anlayabilirler. Sağlam kanıt, öğretmenin öğrencilerin matematiksel stratejilerini doğru bir şekilde yorumladığı ve bu yorumlamaların öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini anlamak için sağlam bir temel sağladığı durumlarda ortaya çıkar. Öğretmenler, öğrencilerin matematiksel stratejilerinin anlamlarını doğru bir şekilde yorumlayabilir ve öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerindeki zorlukları belirleyebilirler. Sınırlı kanıt, öğretmenin öğrencilerin

matematiksel stratejilerini yorumladığı, ancak yorumlamada bazı sınırlamaları olduğu durumlarda ortaya çıkar. Öğretmenler, öğrencilerin matematiksel stratejilerinin anlamlarını doğru bir şekilde yorumlayabilir, ancak bu yorumlamaların ayrıntıları eksik olabilir veya yorumlamalar tam olarak açıklanamayabilir. Yetersiz kanıt, öğretmenin öğrencilerin matematiksel stratejilerini yorumladığı, ancak yorumlamada yetersiz olduğu durumlarda ortaya çıkar. Öğretmenler, öğrencilerin matematiksel stratejilerinin anlamlarını yanlış bir şekilde yorumlayabilir veya yorumlamalar tamamen eksik olabilir.

3. Öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar vermek

Öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar vermede kullanılacak olan ölçeğin düzeyleri sağlam kanıtlar, sınırlı kanıtlar ve kanıt eksikliğinden oluşmaktadır. Sağlam kanıt, öğretmen öğrencinin mevcut stratejisini açıkça göz önünde bulundurarak ve bazı durumlarda olası bir sonraki stratejiyi ön görerek önerilerini her bir öğrenci için özelleştirir. Sınırlı kanıt, öğretmenler öğrencilerin verdiği cevaplar doğrultusunda daha genel bir akıl yürütmede bulunurlar. Kanıt eksikliği, öğrencinin soruyu anlayışı ve çözüm stratejisi üzerine çok az yorum yapılır ya da hiç yapılmaz (Jacobs vd., 2010).

Karar verme, öğrencilerin ispat ve muhakeme becerilerinin öğretmenler tarafından fark edilmesinde önemli bir rol oynar. Bu seviye, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerine dayanarak uygun bir yanıtı seçmeyi içerir. Öğretmenler, öğrencilerin ispat yeteneklerini gözlemleyebilir ve öğrencilerin sundukları çözümleri analiz edebilir. Bu analiz, öğrencilerin bir problemi nasıl çözdüklerini, mantıklı adımlarını ve sonuçlarını değerlendirerek ispat ve muhakeme becerilerini belirlemeye yardımcı olabilir. Örneğin, öğrencilerin bir matematik problemine farklı yöntemlerle yaklaşması ve çözümlerini sunması durumunda, öğretmenler bu çözümleri inceleyerek öğrencilerin muhakeme yeteneklerini değerlendirebilir. Ayrıca, öğrencilerin çözüm adımlarını açıklamalarını isteyerek veya farklı problem türlerini çözmelerini sağlayarak ispat yeteneklerini gözlemleyebilirler. Bu seviye, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini anlamak ve geliştirmek için önemlidir çünkü öğretmenler, öğrencilerin doğru yanıtlarının ötesinde, problem çözme süreçlerini anlamalarına ve geliştirmelerine yardımcı olabilirler. Sağlam kanıt, bu düzeydeki bir öğretmen, öğrencinin matematiksel stratejilerinin tam bir anlayışına dayalı olarak yanıt verir. Sınırlı kanıt, bu düzeydeki bir

öğretmen, öğrencinin matematiksel stratejilerinin bazı anlayışlarına dayalı olarak yanıt verir, ancak yanıtı eksik veya detaylı değildir. Yetersiz kanıt, bu düzeydeki bir öğretmen, öğrencinin matematiksel stratejilerinin eksik veya yanlış anlaşılmasına dayalı olarak yanıt verir. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerde elde edilen veriler, Jacobs ve diğerleri (2010) tarafından belirtilen öğretmen farkındalık basamakları olan dikkat, yorumlama ve karar verme becerilerinin incelendiği bir sınıflandırmaya tabi tutulmuştur. Öğretmenlerin yanıtları, ilgili basamağa yönelik olarak sağlam, sınırlı ve yetersiz kanıtlar şeklinde değerlendirilmiştir. Bu bağlamda öğretmenlerin farkındalık düzeylerinin belirlenmesi için hazırlanan ölçütler Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3. Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerinin Ölçütlenirilmesi

	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
Dikkat Etme	●Öğrencinin stratejilerine, kavramlara ve gelişim düzeyine dikkatle odaklanma ●Öğrencinin düşünme süreçlerini anlama ve kaydedilmiş kanıtları derinlemesine değerlendirme ● Öğrencinin önceki matematiksel deneyimlerini göz önünde bulundurma	●Bazı stratejilere dikkat etme, ancak eksik veya yüzeysel anlayış ●Öğrencinin çözüm yolunu sınırlı bir perspektiften değerlendirme ●Dikkati eksik veya yanlış anlamalar temelinde değerlendirme	●Varsayımlara dayalı dikkat, eksik veya yanlış anlayışlarla değerlendirme ●Öğrencinin düşünme biçimini eksik bilgi ile değerlendirme ●Öğrencinin matematiksel düşüncelerini yanlış etiketleme
Yorumlama	●Matematik kavramlarına dayalı derinlemesine yorumlar yapma ●Öğrencinin çözüm yolunu zengin bir matematiksel dil kullanarak açıklama ●Öğrencinin düşüncelerini geniş bir bağlam içinde değerlendirme	●Stratejilere ve başarıya dayalı temel yorumlar yapma ●Matematiksel kavramları sınırlı bir şekilde ele alma ●Öğrencinin düşünce süreçlerini genişletmeyen yorumlar	●Hataları düzeltme eğiliminde yorumlar, temel anlayış eksikliği ●Öğrencinin çözümünü yanlış anlamaya dayalı yorumlar ●Genellemelerde bulunma eğilimi, öğrenciye özgü değerlendirme eksikliği
Yanıt Verme	●Öğrencinin gelişim düzeyine uygun destekleyici yanıtlar verme ●Öğrencinin düşünce süreçlerini teşvik etmek için açık uçlu sorular sorma ● Problemin alternatif bir çözümle ele alınabileceğini keşfetmeye yardımcı olmak için, mevcut yöntemlerin dışına çıkarak farklı bir bakış açısıyla yaklaşmak	●Temel anlayışa göre yanıtlar verme ●Matematiksel kavramları yeterince keşfetmeyen yanıtlar ●Öğrencinin düşüncelerini geniş bir bağlamda değerlendirmeme	●Yanlış anlayışa dayalı düzeltmeler, gelişimsiz yanıtlar ●Matematiksel kavramları anlamadan yapılan düzeltmeler ●Öğrenciyi takdir ederek çözümü incelememiş gibi ilgisiz yanıtlar sunma

Tablo 4'te Tablo 3'te verilen öğretmenlerin farkındalık düzey ölçütlerine yönelik her farkındalık düzeyine ait öğretmen cevap örnekleri verilmiştir.

Tablo 4. Öğretmen Farkındalık Düzeylerine Ait Örnek Cevaplar

	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
Dikkat Etme	Burada öğrenci özdeşlikle çözmüş, bunu kabul ederdim ispat olarak yani gayet güzel, denklemle çözmüş ama negatife girmesine gerek yoktu. Zaten x negatif çıkarsa onda da sağlardı. Denklemi çözdüğünde bulurdu zaten x in pozitif mi negatif mi çıkacağını, negatife girmesine gerek yoktu diye düşünüyorum.	Bu öğrencimiz de yine cebirsel ifadeleri kullanıp örnek vermiş. Ardışık üç cebirsel ifadeyi toplamış sonucunu bulmuş, ortadaki almış üç ile çarpmış yine sonucunu bulmuş ve ikisinin de birbirine eşit olduğunu görmüş ve hatta bunun özdeşlik olduğunu da ifade etmiş bence yine bu da çok güzel bir ispat yapmış.	Bence doğru çözmüştür. Yani örnek vererek sonuçta üç sayıyı ele alıp toplamış ortadaki sayıyı da alıp üç ile çarpınca diğerini elde etmiş, yani bence bu öğrenci açısından doğru bir çözümdür.
Yorumlama	İlk kurduğu denklemi ispat olarak kabul edebilirim. Çünkü öğrenci burada x yerine hangi değerler verilirse verilsin özdeşliğin sağlanacağını biliyor. İkinci kurduğu denkleme gelirse gerçi orda da bir artırarak gitmiş bunu da kabul edebiliriz.	Burada öğrenci tamamıyla özdeşlik bilgisini de devreye sokarak açıklamasını da gayet güzel yapmış, bu bir ispattır. Açıklamasını da yapmış özdeşlik olduğu için her şekilde doğru çıkacak.	Örnekle açıklamış toplamaları altı olur demiş ama doğrudan hani örneklerin fazla olmasını beklerdim. Yani bazı örneklerde sayılar, verilen örnekler tutabilir bazen tutmayabilir. O yüzden birkaç örnekle bunu açıklarsa daha güvenli olurdu diye düşünüyorum. Bu bir ispat değil bence yani çünkü dedim ya hani bazı örnekler için yeterli olmuyor daha fazla örneğe ihtiyaç duyulabilir.
Yanıt Verme	Bunu denklemle de çözebilirdi. Sekizinci sınıf öğrencisi, ardışık sayılar dediği için birine x deyip diğerine devam edip denklemle de doğru olup olmadığını ispatlayabilirdi. Böylelikle daha kolay çözerdi. Eğer burada bir tanesiyle denerse belki ikincisinde, üçüncüsünde tutmayacak, tutmayacağı içinde eğer burada kabul ettiyse diğerlerinde kabul etmediği için olmayacak ama denklemle çözsüydi kesin sonuca ulaşırdı. O yüzden ben öğrenciye denklemle çözmesini tavsiye ederdim.	Öğrencinin kullandığı yöntem ve kavramlar doğru, belki biraz çeşitlendirebilirdi. Bir örnekle çözmüş sadece, birden fazla örnek olsaydı kesinliği netleşirdi. Çözüm yolu olarak doğru fakat ispat olarak birkaç tane daha denemeye ihtiyacı var. Ben deneme sayısını arttırmasını tercih ederdim ve bunu sekizinci sınıf öğrencisi olduğu için cebirsel ifadelerle yani denklemle de çözsün diye beklerdim.	Kendisini tebrik ediyorum çok güzel yapmış. Bence öğrenci gayet iyi bir yöntem seçmiş ve uygulamış yani.

Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmalarda geçerlik, araştırmacının belirli süreçlerle bulguların doğruluğunu kontrol etmesi ve denetlemesi anlamına gelirken, güvenirlilik ise farklı çalışma ve projelerdeki araştırmacıların tutarlılığını, araştırmayı yapan kişiyle bakış açıları arasındaki uyumu ifade eder (Gibbs, 2007). Merriam (1990a), geçerlik ve güvenirlilik kavramlarının bir araştırma sürecinde büyük öneme sahip olduğunu vurgulamıştır. Bu kavramlar, bir çalışmanın tasarlanması, verilerin toplanması, analizi, yorumlanması ve bulguların sunulması aşamalarında titizlikle ele alınması gereken temel unsurlardır. Güvenirlilik, bilimsel bulguların tekrarlanabilirliği ile ilgiliyken, geçerlik ise elde edilen bulguların doğruluğunu ifade etmektedir (LeCompte ve Goetz, 1982). Nitel bir araştırmada geçerlik, problem durumunun tarafsız bir şekilde ve objektif olarak açıklanması anlamına gelir (Guba ve Lincoln, 1994). Geçerliliği sağlamak amacıyla bu çalışmada, çeşitli veri toplama teknikleri kullanılmıştır. Öğrenci yazılı çalışmaları ve öğretmen video kayıtları gibi farklı veri toplama araçlarıyla geniş bir veri yelpazesi elde edilmiştir. Bu farklı araçlar, araştırmayı daha kapsamlı ve derinlemesine hale getirerek geniş bir bakış açısı sunmayı amaçlamıştır. Lincoln ve Guba (1985), nitel araştırmalarda güvenirliliği tutarlılık olarak tanımlamıştır. Onlara göre, önemli olan bir yabancının aynı sonuçlara ulaşması değil, toplanan ve sunulan verinin ve sonuçların anlamlı ve tutarlı olmasıdır. Dolayısıyla, bir nitel çalışmanın güvenilir kabul edilmesi, bulguların sunulan veriyle uyumlu ve tutarlı olduğu durumlarda gerçekleşir. Ayrıca bu araştırmada veri toplama araçlarının oluşturulmasından, veri analizine kadarki tüm süreçlerde uzman görüşü alınmıştır.

Çalışma sürecinde katılımcıların gerçek isimlerinin ve notlarının kullanılmayacağı, aynı zamanda öğrenci ve matematik öğretmenlerinin katılımının gönüllülük esasına dayandığı belirtilmiştir. Öğrenci velilerinden izin belgesi, matematik öğretmenlerinden ise gönüllü katılım belgesi alınmıştır (Bkz. Ek 3 ve Ek 4). Ayrıca, araştırmacının aynı okulda olması, katılımcılarla samimi ve güvenilir bir ilişki kurulmasına olanak tanımıştır, böylece öğretmenler ve öğrencilerin rahat bir şekilde süreci deneyimlemesi sağlanmıştır. Araştırmada, veri kaynakları, katılımcıların çalışma ortamı ve süreçleri ile veri toplama ve analiz yöntemleri detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Bulguların raporlaştırılması sürecinde, veriler açık, anlaşılır ve detaylı bir biçimde sunulmuştur. Verilerin yorumlanmasında, doğrudan kaynaklardan alıntılar yapılmış ve

farklı veri toplama yöntemlerinden elde edilen sonuçlar, birbiriyle ve ilgili literatürle ilişkilendirilerek raporlanmıştır.



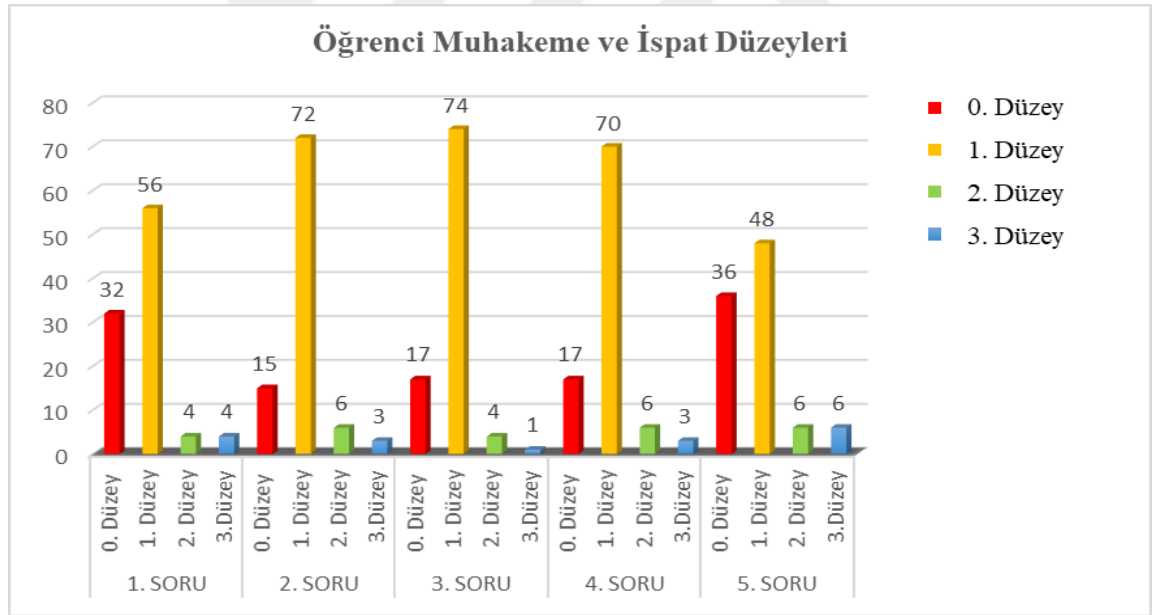
BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde, öğrencilerin muhakeme ve ispat düzeylerine ilişkin bulgular ile birlikte, öğretmenlerin öğrencilerin muhakeme ve ispat becerilerini fark etme düzeylerine dair elde edilen bulgular sunulmuştur.

Öğrencilerin Muhakeme ve İspat Düzeylerine Yönelik Bulgular

Bu bölümde öğrencilere uygulanan ispat testi sorularına verilen öğrenci yanıtlarının düzeyleri incelenmiştir. Öğrencilere uygulan ispat testi soruları 96 öğrenci tarafından cevaplanmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplar neticesinde öğrenciler 0.düzey, 1.düzey, 2.düzey ve 3.düzey olmak üzere dört grupta değerlendirilmiş ve analiz edilmiştir. Öğrenci düzeyleri Şekil 1 ile gösterilmiş ve her düzeydeki öğrenci cevaplarına ait örnekler verilmiştir.

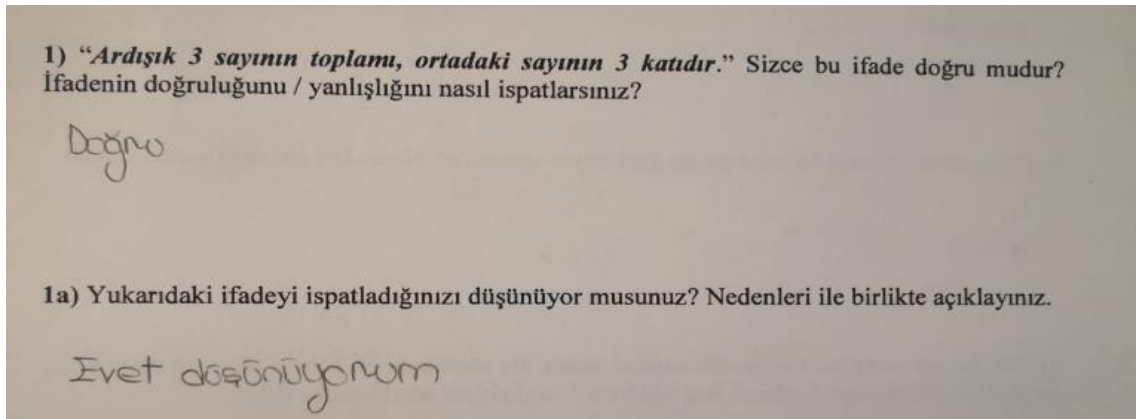


Şekil 1. Öğrenci Muhakeme ve İspat Düzeyleri

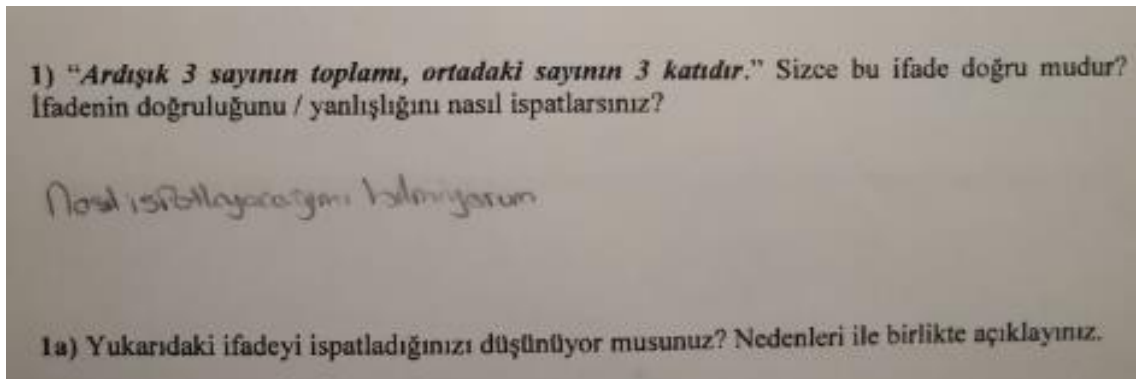
Şekil 1 incelendiğinde öğrencilere yöneltilen beş soruda da 1.düzey öğrenci cevabının en fazla frekansa sahip olduğu görülmektedir. 1.düzeyin ardından her soruda 0.düzey öğrenci cevaplarının frekansları 2.düzey ve 3.düzey öğrenci cevaplarından frekanslarından daha fazla çıkmıştır. 3.düzey öğrenci cevapları çoğunlukla sorulara verilen cevaplarda en az frekansa sahip düzey olmuştur. Öğrenci muhakeme ve ispat

düzeyleri incelendiğinde öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun ispat yapmak ile örnek vererek doğrulamak arasındaki ayrımın farkında olmadıkları görülmüştür.

0.düzey öğrenci cevapları özelinde yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin önermenin neden doğru ya da yanlış olduğuna herhangi bir gerekçede bulunmadan önermenin doğru ya da yanlış olduğunu belirttikleri görülmüştür. Ayrıca soruya herhangi bir yanıt vermeyen öğrenci cevapları da bu düzeyde değerlendirilmiştir. Öğrenci cevaplarından Ö92 ve Ö32'nin cevabı örnek olarak Şekil 2 ve Şekil 3'de verilmiştir.



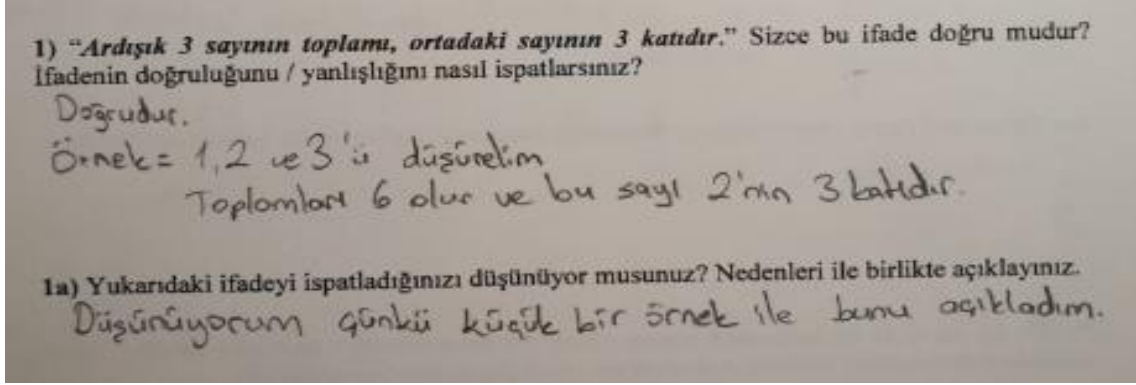
Şekil 2. Ö92'nin cevabı



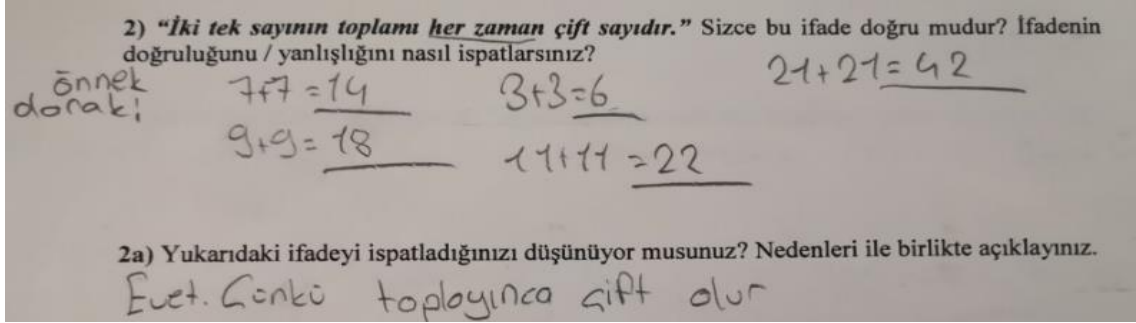
Şekil 3. Ö32'nin cevabı

1.düzey öğrenci cevapları özelinde yanıtlar incelendiğinde örnek vererek doğrulamayı ispat kabul eden öğrenci cevapları bu düzeyde belirlenmiştir. Bu düzeyde yanıt veren öğrenciler bir önermenin doğruluğunu göstermek için matematiksel bir gerekçe sağlamanın farkındadırlar fakat gerekçeleri genel olmaktan uzaktır ve genellikle ampirik temellidir. Deneysel temelli gerekçeler arasından bir ya da birkaç durumu sistematik olarak kontrol etmeyi düşünen öğrenciler bu düzeyde yer almışlardır. Öğrenci

cevaplarından tek bir örnek vererek cevap veren Ö1 ve birden fazla örnek vererek yanıt veren Ö4'ün cevapları örnek olarak Şekil 4 ve Şekil 5'te verilmiştir.



Şekil 4. Ö1'in cevabı



Şekil 5. Ö4'ün cevabı

2.düzey öğrenci cevapları özelinde yanıtlar incelendiğinde bu seviyedeki öğrenciler, genellikle bir ifadenin ya da önermenin doğruluğunu kanıtlamak için genel argümanlara ihtiyaç duyulduğunu kavrarlar. Ancak ürettikleri argümanlar genellikle ya eksik ya da geçerli değildir, bu yüzden argümanları yeterli kanıt sağlamaktan uzaktır. Ayrıca, sunulan ampirik kanıtların yeterli olmadığını veya örneklerin sınırlılığının farkında olmaları da bu öğrencilerin yanıtları arasında yer alır. Öğrenci cevaplarından geçersiz argüman sunan Ö2, kurduğu argümanda eksiklikler olan Ö5 ve verdiği örneklerle ispat yapmaya çalışan fakat oluşturduğu argümandaki sınırlılığı da ifade eden Ö25'in cevapları örnek olarak Şekil 6, Şekil 7 ve Şekil 8'de verilmiştir.

1) "Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

$$(x-1) + x + (x+1) = 3x \quad (-x-1) + (-x) + (-x+1) = -3x$$

1a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

x'i herhangi bir sayı alabileceğimiz için ispatladığımı düşünüyorum. Negatif sayılarda sayının mutlak değerinin 3 ile çarpımına negatif hali gelir.

Şekil 6. Ö2'nin cevabı

2) "İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

x=1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49,51,53,55,57,59,61,63,65,67,69,71,73,75,77,79,81,83,85,87,89,91,93,95,97,99
y=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,46,48,50,52,54,56,58,60,62,64,66,68,70,72,74,76,78,80,82,84,86,88,90,92,94,96,98,100
x+y=diğer tek sayı *Evet doğrudur.*

2a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

Evet, düşünüyorum. Çünkü orada x ve y değişkenlerinin tüm değerleri öyle kullanılırsa çift sayı elde ederiz.

Şekil 7. Ö5'in cevabı

1) "Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

1,2,3 = 6 *2,3,4 = 9*
2,3,4 = 9 *3,4,5 = 12*
3x3=9

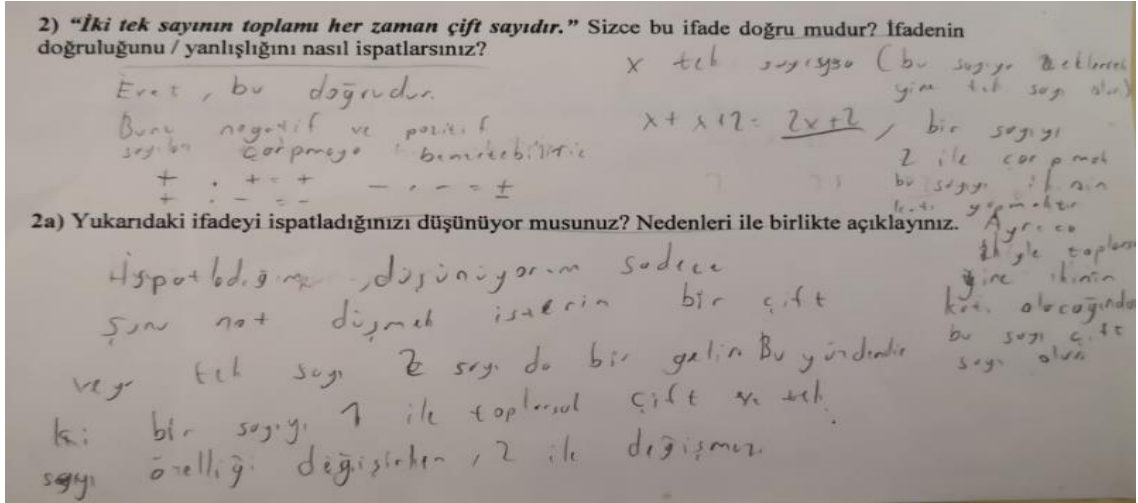
1a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

Sansuza kadar örnek veremeyeceğim için tam olarak ispatlayamam.

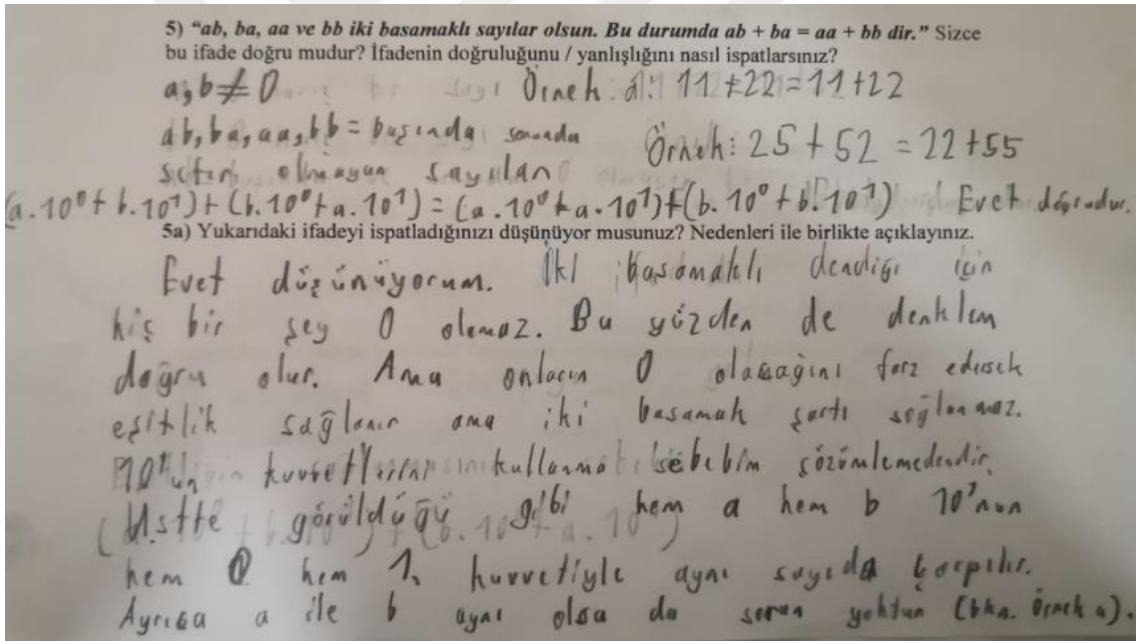
Şekil 8. Ö25'in cevabı

3.düzey öğrenci cevapları özelinde yanıtlar incelendiğinde bu düzeydeki öğrenciler verilen ifadenin doğruluğunu ispatlamak için genel bir argüman oluşturmanın farkındadırlar ve bu argümanları başarıyla oluşturabilmektedirler. Öğrencilerin oluşturdukları argümanlar önermenin her durumda doğru olduğunu gösterebilecek niteliktedir. Öğrenci cevaplarından anlatım yolu ile geçerli argüman oluşturan Ö3 ve

cebirsel ifadeler kullanarak önermenin her koşulda doğru olacağını gösterecek nitelikte argüman üreten Ö5'e ait yanıtlar örnek olarak Şekil 9 ve Şekil 10'da verilmiştir.



Şekil 9. Ö3'ün cevabı



Şekil 10. Ö5'in cevabı

Öğrencilere uygulanan ispat testi ile elde edilen öğrenci muhakeme ve ispat düzeylerinin oranları Tablo 5'te verilmiştir. Tablo 5, 96 öğrenciye uygulanan ispat testindeki 5 soruya her bir öğrencinin verdiği toplamda 480 öğrenci cevabının yüzdesel olarak her bir düzey için oranını ifade etmektedir.

Tablo 5. İspat Testi Sonuçlarının Düzeylere Dağılım Oranları

İspat Düzeyleri	0. Düzy	1. Düzy	2. Düzy	3. Düzy
Öğrenci Yüzdeleri	24%	67%	5%	4%

Tablo 5 değerlendirildiğinde öğrenci muhakeme ve ispat düzeylerinin en çok 1.düzy öğrenci cevaplarından oluştuğu görülmektedir. En az cevaplara ise 3.düzyde rastlanmaktadır.

Öğretmenlerin Öğrencilerin Muhakeme ve İspat Becerilerini Fark Etme Düzeylerine Yönelik Bulgular

Bu bölümde öğrencilerin ispat testindeki sorulara verdikleri cevaplara yönelik olarak öğretmenlerin bireysel görüşme protokolündeki cevapları incelenmiştir. Öğretmen Bireysel Görüşme Protokolü üç alt sorudan oluşmaktadır. Bu alt sorular öğrencilerin stratejilerine dikkat etmede, öğrencilerin anlayışlarını yorumlamada ve öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar vermede öğretmenlerin farkındalık düzeylerini belirlemeye yönelik oluşturulmuş sorulardır. Bu sorulardan ilki, öğretmenin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyini belirlemeye yönelik sorulmuştur. Bu soruda öğrencinin ispat testinde yer alan ilgili soruyu nasıl çözdüğünü düşündüğü öğretmenden ayrıntılı olarak istenmiştir. Diğer soru ise öğretmenin öğrencinin anlayışını yorumlama düzeyini belirlemeye yöneliktir. Bu soruda öğrencinin çözüm yolunun incelenerek öğrencinin kullandığı kavramlar ve öğrencinin seçtiği yöntem hakkında öğretmenin yorum yapması istenmiştir. Ayrıca seçilen yöntemin öğretmen tarafından uygunluğunun, uygun ise neden uygun olduğunun, uygun değil ise neden uygun olmadığının ve öğrencinin ifadeyi ispatlayıp ispatlamadığının ayrıntılı bir şekilde değerlendirilmesi istenmiştir. Son olarak yöneltlen soru ise öğretmenin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyini anlamaya yönelik sorulmuştur. Bu soruda öğretmenden, öğrencinin öğretmeni olduğunu farz etmesi, öğrenciye yanıt verebileceği bazı yolları tanımlaması ve neden bu yanıtları seçtiğini açıklaması istenmiştir.

Soru 1'e Göre Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerine Yönelik Bulgular

Öğretmenler ile gerçekleştirilen görüşmede öğretmenlerden ilk olarak ispat testi aracılığıyla öğrencilere yöneltilen birinci sorudan alınan öğrenci cevaplarını, öğretmen bireysel görüşme protokolü aracılığıyla cevaplamaları istenmiştir. Birinci soruya ait öğrenci cevapları Şekil 11'de gösterilmiştir.

Ö1'e Ait Cevap	1) "Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız? Doğrudur. Örnek = 1, 2 ve 3'ü düşünelim Toplamları 6 olur ve bu sayı 2'nin 3 katıdır. 1a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız. Düşünüyorum çünkü küçük bir örnek ile bunu açıkladım.
Ö2'ye Ait Cevap	1) "Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız? $(x-1) + x + (x+1) = 3x \quad (-x-1) + (-x) + (-x+1) = -3x$ 1a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız. x'i herhangi bir sayı alabileceğimiz için ispatladığını düşünüyorum. Negatif sayılarla sayının en küçük değerinin 3 ile çarpımına negatif hali çıkar.
Ö3'e Ait Cevap	1) "Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız? Doğrudur. Örneklilikte değerin değeri herhangi bir sayı değeri olabilir. Örneğin 1 ve 2'ye 3'ü düşünelim. $1+2+3=6$ ve $3 \cdot 2=6$ bu yüzden de bir örnekle olduğunu düşünüyorum. 1a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız. Doğrudur.

Şekil 11. Birinci Soruya Ait Öğrenci Cevapları

Öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen verilere göre öğretmen farkındalık düzeyleri; her öğrenci için ayrı ayrı dikkat etme, yorumlama ve nasıl yanıt verileceğine karar verme alt başlıklarında incelenmiştir. Öğretmenlerin dikkat etme, yorumlama ve karar verme düzeyleri için yapılan değerlendirmenin bir özeti olarak aşağıdaki Tablo 6 oluşturulmuştur.

Tablo 6. Birinci Soru İçin Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri

		Dikkat Etme	Yorumlama	Karar Verme
Öğretmen1	Ö1	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt	Sağlam Kanıt
	Ö2	Sağlam Kanıt	Sağlam Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen2	Ö1	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö2	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen3	Ö1	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö2	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen4	Ö1	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö2	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt

Dikkat Etme Düzeyine Ait Bulgular

Ö1'in cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde olduğu tespit edilmiştir. Öğretmenler dikkat etme düzeylerini belirlemek için sorulan soruda öğrenci cevabının doğruluğunu yanlış belirlemişlerdir ve örnek vermeyi ispat olarak kabul etmişlerdir. Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen3 öğrencinin örnek sayısını artırarak daha geçerli bir ispat yapacağını savunurken, Öğretmen4 öğrencinin verdiği örneği yeterli bularak ispat yaptığını söylemiştir. Öğretmen1'in Ö1 öğrencisinin çözümüne yönelik verdiği cevap aşağıdaki sunulmuştur.

“Elimdeki kâğıtta bir, iki ve üçü düşünmüş öğrenci toplamalarının altı olduğunu bu sayının ikinin üç katı olduğunu düşünmüş bir ispat yapmaya çalışmış buna göre sayı değerleri vermiş, sayı değerleri verdiği zamanda sonucun doğruluğunu kontrol etmiş. Bir tane örnek vermiş eğer bir iki tane daha örnek verseydi aynı çıkarsa bunun sonucunun doğruluğunu kabul ederdim. Bir tane örnek düşünmüş burada belki bir iki tane daha bu şekilde deneyip düşünüp görebilirdi.”

Öğretmen1'in açıklaması incelendiğinde öğrencinin örnek sayısını artırdığında ispat yapabileceğini söylemiştir. Burada öğretmenin ispat yapmak ile örnek vererek doğrulama arasındaki ayrımın farkında olmadığı görülmektedir. Aynı şekilde Öğretmen2 ve Öğretmen3'ün yorumları da Öğretmen1'in yorumuna benzer şekilde örnek sayısı arttırıldığında öğrencinin ispat yapabileceği doğrultusundadır. Öğretmen4, üç

öğretmenden farklı olarak tek bir örneğin kullanılmasının ispat olarak yeterli olacağını savunmuştur. Öğretmen4'ün cevabı aşağıda sunulmuştur.

“Bence doğru çözmüştür. Yani örnek vererek sonuçta üç sayıyı ele alıp toplamış ortadaki sayıyı da alıp üç ile çarpınca diğerini elde etmiş, yani bence bu öğrenci açısından doğru bir çözümdür.”

Ö2 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1'in sağlam kanıt düzeyinde, diğer öğretmenlerin ise sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar verdiği görülmektedir. Öğretmen1 öğrencinin çözümünde matematiksel ayrıntılara dikkat ederek çözümün doğruluğunu belirlemiştir. Öğretmen1'in cevabı aşağıda sunulmuştur.

“Burada öğrenci özdeşlikle çözmüş, bunu kabul ederdim ispat olarak yani gayet güzel, denklemlerle çözmüş ama negatife girmesine gerek yoktu. Zaten x negatif çıkarsa onda da sağlardı. Denklemi çözdüğünde bulurdu zaten x in pozitif mi negatif mi çıkacağını, negatife girmesine gerek yoktu diye düşünüyorum.”

Öğretmen1 öğrencinin oluşturduğu genel argümanın doğruluğunu kabul etmenin yanı sıra negatif sayılarla kurulan argümana ihtiyaç olmadığını da belirtmiştir. Diğer öğretmenler bu ayrımı yapmamışlardır. Öğrencinin hem pozitif hem negatif cebirsel ifadeleri kullanarak çözüm yapmasını ispat olarak kabul etmişlerdir.

Ö3 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin sınırlı kanıt düzeyinde cevap verdikleri tespit edilmiştir. Tüm öğretmenler öğrencinin verdiği cevabın ispat olup olmadığını genel ifadeler kullanarak değerlendirmişlerdir. Öğretmen4'ün cevabı aşağıda verilmiştir. Diğer öğretmenler de Öğretmen4'ün cevabına benzer bir şekilde çözümü detaylandırmadan yüzeysel cevaplar vererek öğrencinin ispat yaptığını kabul etmişlerdir.

“Bu öğrencimiz de yine cebirsel ifadeleri kullanıp örnek vermiş. Ardışık üç cebirsel ifadeyi toplamış sonucunu bulmuş, ortadakini almış üç ile çarpmış yine sonucunu bulmuş ve ikisinin de birbirine eşit olduğunu görmüş ve hatta bunun özdeşlik olduğunu da ifade etmiş bence yine bu da çok güzel bir ispat yapmış.”

Yorumlama Düzeyine Yönelik Bulgular

Ö1 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen3 ve Öğretmen4 sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar verirken, Öğretmen2 yetersiz kanıt düzeyinde cevap vermiştir. Sınırlı kanıt düzeyinde cevap veren öğretmenlerden biri olan Öğretmen3'ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Öğrencinin kullandığı yöntem ve kavramlar doğru, belki biraz çeşitlendirebilirdi. Bir örnekle çözmüş sadece, birden fazla örnek olsaydı kesinliği netleşirdi. Çözüm yolu olarak doğru fakat ispat olarak birkaç tane daha denemeye ihtiyacı var. Ben deneme sayısını arttırmasını tercih ederdim ve bunu sekizinci sınıf öğrencisi olduğu için cebirsel ifadelerle yani denklemlerle de çözsün diye beklerdim.”

Öğretmen3’ün cevabı değerlendirildiğinde öğrencinin kullandığı stratejiye ek olarak cebirsel ifadeleri de kullanabileceği şeklinde yorum yapılmıştır. Ancak öğrencinin birden fazla deneme yapsaydı yine ispat yapmış olabileceği de öğretmen tarafından dile getirildiği için öğretmenin yorumlamasında eksiklik olduğu görülmektedir. Bu nedenle Öğretmen3’ün cevabı yorumlama düzeyine yönelik olarak sınırlı kanıt düzeyinde tespit edilmiştir. Aynı şekilde öğrenci cevaplarını yorumlama düzeyinde sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar veren Öğretmen1 ve Öğretmen4’ün yorumları da Öğretmen3’ün yorumuna paralel niteliktedir. Öğretmen2 ise öğrencinin cevabını ispat olarak kabul etmemiştir fakat kabul etmemesini geçerli bir argümana dayandırmamıştır. Sadece öğrencinin birden fazla örnek verseydi ispat yapabileceğini savunmuştur. Bu da Öğretmen2’nin yorumunun öğrenci cevaplarını yorumlama düzeyinde yetersiz kanıt seviyesinde olduğunu göstermektedir. Öğretmen2’nin cevabı aşağıda verilmiştir.

“Örnekle açıklamış toplamları altı olur demiş ama doğrudan hani örneklerin fazla olmasını beklerdim. Yani bazı örneklerde sayılar, verilen örnekler tutabilir bazen tutmayabilir. O yüzden birkaç örnekle bunu açıklarsa daha güvenli olurdu diye düşünüyorum. Bu bir ispat değil bence yani çünkü dedim ya hani bazı örnekler için yeterli olmuyor daha fazla örneğe ihtiyaç duyulabilir.”

Ö2 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1 sağlam kanıt düzeyinde cevap verirken, Öğretmen2, Öğretmen3 ve Öğretmen4 yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar sunmuştur. Sağlam kanıt düzeyinde cevap veren Öğretmen1’in cevabı aşağıda sunulmuştur.

“İlk kurduğu denklemi ispat olarak kabul edebilirim. Çünkü öğrenci burada x yerine hangi değerler verilirse verilsin özdeşliğin sağlanacağını biliyor. İkinci kurduğu denkleme gelirse geçi orda da bir artırarak gitmiş bunu da kabul edebiliriz.”

Öğretmen1’in cevabı incelendiğinde öğretmenin öğrencinin çözümü hakkında yorum yaparken öğrencinin ispat yaparken özdeşlik bilgisini göz önünde bulundurduğunu dikkate almıştır ve matematiksel detayları doğru bir şekilde yorumlamıştır. Bu nedenle Öğretmen1’in cevabı öğrencilerin stratejilerini yorumlama düzeyinde sağlam kanıt oluşturmaktadır. Öğretmen2, Öğretmen3 ve Öğretmen4’ün cevaplarında ise öğrencinin soruyu çözerken nasıl düşündüğü ile ilgili bilgilere hiç yer verilmeden sadece yönteminin doğru olduğu söylenmiştir. Bu nedenle Öğretmen2, Öğretmen3 ve Öğretmen4’ün

cevapları yetersiz kanıt düzeyindedir. Bu öğretmenlerden Öğretmen3'ün cevabı aşağıdaki gibidir.

“Bu öğrencimiz de yine cebirsel ifadelerle denklem kurarak çözmüş, çözüm yolu doğru hatta ekstra olarak negatif sayıları kullanarak da yapmış. Kullanılan yöntem uygundur. Bence bu hal yeterlidir.”

Ö3 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin sınırlı kanıt düzeyinde yorumlar yaptığı görülmüştür. Öğretmenler yorumlamalarında öğrencinin yaptığı ispatın doğruluğunu genel ifadeler kullanarak kabul etmişlerdir. Öğrencinin ispat yaparken tercih ettiği yöntemi neden kullandığı hakkında bir bilgi hiçbir öğretmen tarafından sunulmamıştır. Öğretmenler yorumlarını yaparken hepsi genel olarak aynı şekilde cevaplar vermişlerdir. Öğretmen cevaplarından Öğretmen2'nin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

“Burada öğrenci tamamıyla özdeşlik bilgisini de devreye sokarak açıklamasını da gayet güzel yapmış, bu bir ispattır. Açıklamasını da yapmış özdeşlik olduğu için her şekilde doğru çıkacak.”

Karar Verme Düzeyine Yönelik Bulgular

Ö1 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1 sağlam kanıt, Öğretmen2 yetersiz kanıt, Öğretmen3 ve Öğretmen4 sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar vermişlerdir. Öğretmen1'in cevabı aşağıda verilmiştir.

“Bunu denklemle de çözebilirdi. Sekizinci sınıf öğrencisi, ardışık sayılar dediği için birine x deyip diğerine devam edip denklemle de doğru olup olmadığını ispatlayabilirdi. Böylelikle daha kolay çözerdi. Eğer burada bir tanesiyle denerse belki ikincisinde, üçüncüsünde tutmayacak, tutmayacağı içinde eğer burada kabul ettiyse diğerlerinde kabul etmediği için olmayacak ama denklemle çözseydi kesin sonuca ulaşırdı. O yüzden ben öğrenciye denklemle çözmesini tavsiye ederdim.”

Öğretmen1 burada öğrencinin matematiksel gelişim düzeyini göz önünde bulundurarak sekizinci sınıfta bulunan bir öğrencinin bu tarz bir soruyu denklem kullanarak çözebileceğini belirterek, öğrencinin ispatın farklı bir şekilde yapılabileceğine yönlendirmiştir. Ayrıca örnek vererek bu soruda bir genellemeye varamayacağını belirtmiştir. Bu sebeplerle Öğretmen1'in karar verme düzeyine yönelik düzeyi sağlam kanıt olarak tespit edilmiştir. Öğretmen2 ise Öğretmen1'in aksine birden fazla örnek verilerek öğrencinin ispatı yapabileceğini söylemiştir. Burada Öğretmen2 öğrencinin matematiksel gelişim düzeyini göz önünde bulundurmamış, öğrencinin bu soruyu cebirsel ifadeler kullanarak genellenebilir bir ispat yapabileceğini belirtmemiştir. Bu

nedenle Öğretmen2'nin karar verme düzeyine yönelik düzeyi yetersiz kanıt olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen2'nin cevabı aşağıda verilmiştir.

“Bu bir ispat değil bence yani çünkü dedim ya hani bazı örnekler için yeterli olmuyor daha fazla örneğe ihtiyaç duyulabilir. Bu çözümü görseydim öğrencimde derdim ki birkaç en azından üç tane daha örnek bununla ilgili verip evet ondan sonra üç katıdır deseydin diye söyledim.”

Öğretmen3 ve Öğretmen4 öğrencinin anlayışını temel alarak, genel ifadelerle yanıtlar vermişlerdir. Öğrencinin cebirsel ifadeleri kullanabileceğini belirtmişlerdir fakat ifadenin neden bu şekilde ispatlanabileceğinden bahsetmemişlerdir. Bu nedenle Öğretmen3 ve Öğretmen4'ün karar verme düzeyine yönelik düzeyleri sınırlı kanıt seviyesindedir. Öğretmen3'ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrencinin kullandığı yöntem ve kavramlar doğru, belki biraz çeşitlendirebilirdi. Bir örnekle çözmüş sadece, birden fazla örnek olsaydı kesinliği netleşirdi. Çözüm yolu olarak doğru fakat ispat olarak birkaç tane daha denemeye ihtiyacı var. Ben deneme sayısını arttırmasını tercih ederdim ve bunu sekizinci sınıf öğrencisi olduğu için cebirsel ifadelerle yani denklemlerle de çözsün diye beklerdim.”

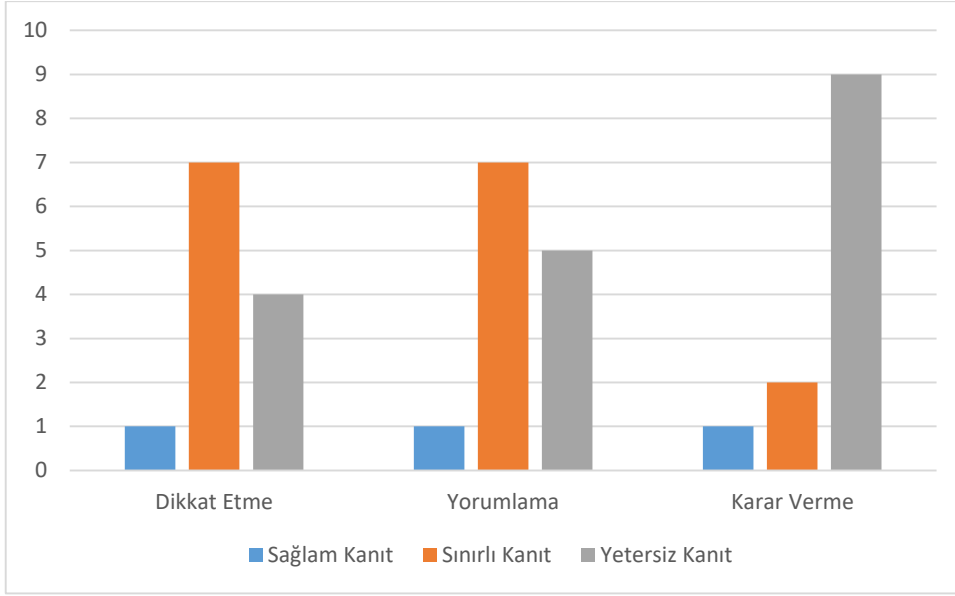
Ö2 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde olduğu görülmüştür. Öğretmenler öğrencinin çözümüne alternatif çözümler sunmamış olup sadece öğrenciyi takdir etme yoluna gitmişlerdir. Öğretmen cevaplarından soru özelinde Öğretmen4'ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Kendisini tebrik ediyorum çok güzel yapmış. Bence öğrenci gayet iyi bir yöntem seçmiş ve uygulamış yani.”

Ö3 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde olduğu tespit edilmiştir. Tüm öğretmenler Ö2 öğrencisinde olduğu gibi öğrencinin çözüm stratejisi üzerine yorum yapmamışlardır. Öğrenciyi takdir etme yoluna gitmişlerdir. Öğretmen cevaplarından Öğretmen3'ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Öğrencinin çözümünün eksiksiz olduğunu düşünüyorum, belki biraz düzen önerebilirim.”

Yukarıda elde edilen bulgular sonucunda birinci sorunun genel bir değerlendirmesi Şekil 12'de gösterilmektedir.



Şekil 12. Birinci Sorunun Genel Değerlendirmesi

Şekil 12 incelendiğinde öğretmenlerin cevaplarındaki fark etme düzeylerinden dikkat etme ve yorumlama düzeylerinde sınırlı kanıt frekansının en yüksek olduğu görülürken karar verme düzeyinde yetersiz kanıt frekansının en yüksek olduğu görülmektedir.

Şekil 12 incelendiğinde fark etme düzeylerinin tamamında en düşük frekansların sağlam kanıt düzeyinde olduğu görülmektedir. Öğretmen cevaplarında sınırlı kanıtın dikkat etme ve yorumlama düzeylerinde en yüksek olduğu görülmektedir. Yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar incelendiğinde farkındalığın en fazla karar verme düzeyinde olduğu ve yorumlama ve dikkat etme düzeylerinde eşit frekansa sahip olduğu görülmektedir.

Soru 2'ye Göre Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerine Yönelik Bulgular

Öğretmenler ile gerçekleştirilen görüşmede öğretmenlerden ispat testi aracılığıyla öğrencilere yöneltilen ikinci sorudan alınan öğrenci cevaplarını, öğretmen bireysel görüşme protokolü aracılığıyla cevaplamaları istenmiştir. İkinci soruya ait öğrenci cevapları Şekil 13'de gösterilmiştir.

2) "İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır." Sizce bu ifade doğru mudur? Ifadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Ö4'e Ait Cevap

Örnek olarak:

$$7+7=14$$

$$3+3=6$$

$$21+21=42$$

$$9+9=18$$

$$11+11=22$$

2a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

Evet. Çünkü toplayınca çift olur

2) "İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır." Sizce bu ifade doğru mudur? Ifadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Ö5'ye Ait Cevap

$x = \text{tek sayı}$ $y = \text{çift sayı}$ $x + (x+y) = \text{bir çift sayı}$

$y = \text{çift sayı}$ $x + (x+y) = \text{bir çift sayı}$

$x+y = \text{diğer tek sayı}$ Evet doğrudur.

2a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

Evet, düşünüyorum. Çünkü orada x ve y değişkenlerinin tüm değerleri öyle kullanılarak çift sayı elde ederiz.

2) "İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır." Sizce bu ifade doğru mudur? Ifadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

Ö3'e Ait Cevap

Evet, bu doğrudur.

Bunu negatif ve pozitif sayılarla çarpma ile benimsedik.

$$+ \cdot + = + \quad - \cdot - = +$$

2a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

İspatladım, düşünüyorum sadece.

Şunu not etmek isterim bir çift ve bir tek sayı 2 sayı da bir gelir. Bu yüzden ki bir sayı 1 ile toplanır çift ve tek sayı 2 ile toplanır çift ve tek.

Örneği değiştirken 2 ile değiştiririz.

x tek sayıysa (bu sayı tek olur) $x + x = 2x$ bir sayı 2 ile çarpılır bu sayı çift olur. Ayrıca öyle toplanır örneğin bir alıcında bu sayı çift sayı olur.

Şekil 13. İkinci Soruya Ait Öğrenci Cevapları

Öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen verilere göre öğretmen farkındalık düzeyleri; her öğrenci için ayrı ayrı dikkat etme, yorumlama ve nasıl yanıt verileceğine karar verme alt başlıklarında incelenmiştir. Öğretmenlerin dikkat etme, yorumlama ve karar verme düzeyleri için yapılan değerlendirmenin bir özeti olarak aşağıdaki Tablo 7 oluşturulmuştur.

Tablo 7. İkinci Soru İçin Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri

		Dikkat Etme	Yorumlama	Karar Verme
Öğretmen1	Ö4	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö5	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen2	Ö4	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö5	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen3	Ö4	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt

	Ö5	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö4	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
Öğretmen4	Ö5	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt

Dikkat Etme Düzeyine Ait Bulgular

Ö4'ün cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde olduğu tespit edilmiştir. Öğrenci bu soruda örnekler vererek ispat yaptığını düşünmüş ve öğretmenler de bu çözümü doğru olarak kabul etmişlerdir. Burada öğretmenlerin hiçbiri genellenebilir ispat yapma ile örnek vererek doğrulama arasındaki ayrımı yapamamışlardır. Öğretmenler arasındaki cevap farklılıkları ile ilgili olarak, Öğretmen1 açıklamasında öğrencinin verdiği örnekleri yeterli bulmamış ve negatif sayılarla da örnekler vermesi gerektiğini ifade etmiştir. Öğretmen 2 ve Öğretmen 4 öğrencinin tek tek örnek verdiğini ve bu örneklerin yeterli olduğundan bahsetmiştir. Öğretmen 3 öğrencinin hep aynı tek sayıları topladığını belirterek öğrencinin soruyu yanlış anladığına değinmiş fakat yine de çözümü doğru kabul etmiştir. Öğretmen cevaplarından örnek olarak Öğretmen 1'in cevabı aşağıda verilmiştir.

“Bu öğrenci deneme yanılma yoluyla çözmüş. İki tane tek sayıyı toplamış, her zaman çift elde edip etmeyeceğine bakmış, sonuca göre de evet elde etmiş çift etmiş çift olmuş. İki tek sayının toplamı her zaman çift sayı elde edilmiş ama negatifleri hesaba katmamış, katabilir miydi? Evet, ispat olarak yaparken negatif sayılarda da deneyip ispat edebilirdi.”

Ö5' in cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen3 yetersiz kanıt düzeyinde bulgular sunarken, Öğretmen4'ün cevabının sağlam kanıt düzeyinde olduğu görülmektedir. Ö5'in cevabı incelendiğinde öğrencinin sorunun ispatını yapabilmek için genellenebilir bir argüman bulmanın ihtiyacını hissettiği görülmektedir. Yani öğrenci cebirsel ifadeler kullanarak bu ispatı yapabileceğini düşünmüştür. Fakat ispatı yaparken kullandığı argümanlar geçerli argümanlar olmamıştır. Öğretmen cevaplarından sadece Öğretmen4 bu ayrımın farkına vararak öğrencinin çözüm stratejisine dikkat ederek sağlam kanıt sunmuştur. Öğretmen4'ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada değişken kullanmış bence doğru kullanmış. Yalnızca şöyle bir eksiklik görüyorum, mesela burada x tek y çift demişte yani tek sayı yerine $2x-1$ şeklinde bir ifade kullanması, çift sayı olarak da $2x$ şeklinde bir ifade kullanması daha sağlıklı olabilirdi.”

Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen3’ün cevapları incelendiğinde Ö5’in ispatındaki eksikliği göremedikleri ve öğrencinin cevabını olduğu gibi doğru kabul ettikleri görülmüştür. Öğretmen3’ün cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

“Doğrudur iki tek sayıyı ifade etmiş, toplamlarının çift olduğunu göstermiş.”

Ö3’ün cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde öğretmenlerin hepsinin sınırlı kanıt düzeyinde farkındalık gösterdiği tespit edilmiştir. Ö3 bu soruyu anlatım yolu ile başarılı bir şekilde ispatlamıştır. Öğretmenler ise bu cevabı incelerken genelleştirilebilir perspektiften ifadelere odaklanarak cevaplar vermişlerdir. Öğretmen2’nin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

“Öğrenci burada tam sayılardaki çarpma, bölme konusuna benzetme yoluna gitmiş. Sözel olarak açıklamış çok farklı yönler gitmiş, ben öğrenciyle tam sayılarda çarpmaya benzetmesinin ne kadar doğru olduğunu tartıştım. Daha karmaşık bakmış ama x tek ise $x+2$ yine tek sayı olur deyip bunları toplamış ve $2x+2$ elde etmiş bu da çift olur demiş, bu hali ispat için yeterli olurmuş aslında.”

Yorumlama Düzeyine Yönelik Bulgular

Ö4 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin cevaplarının yetersiz kanıt düzeyinde olduğu görülmüştür. Öğretmen cevaplarından Öğretmen1, Öğretmen3 ve Öğretmen4 öğrenci anlayışlarını yorumlarken, öğrencinin nasıl düşündüğüyle ilgili yanlış yorumlarda bulunmuşlardır. Öğretmen2 ise yorumlama düzeyine yönelik olarak herhangi bir cevap vermemiştir. Öğretmen4’ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Yani şimdi bu öğrencimiz örnek vererek açıklamaya çalışmış aksi bir örnek çıkmadığı müddetçe doğrudur. Mesela öyle iki sayı bulacak ki tek sayı, toplamı tek olsun aksi bir örnek olsun anca o zaman olmadığını söyleyebilir.”

Öğretmen4’ün cevabı incelendiğinde öğretmenin öğrencinin kullandığı yöntemi doğru olarak kabul ettiği ve bu yöntemi yanlış çıkarımla da desteklediği görülmektedir. Öğretmenin, öğrencinin bu soru özelinde aksi bir örneği bulması için bütün ihtimalleri denemesinin mümkün olamayacağını fark edememesi sebebiyle öğretmenin bu cevabı yetersiz kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen1 ve Öğretmen3’ün cevapları da bu cevaba paralel nitelikte değerlendirilmiştir.

Ö5 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1'in yetersiz kanıt diğer öğretmenlerin ise sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar verdiği görülmektedir. Yetersiz kanıt düzeyinde cevap veren Öğretmen1'in yanıtı aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci denklem kurarak çözmeye çalışmış, x e tek sayı demiş, y ye çift sayı demiş, $x+y$ ye diğer tek sayı demiş. Bunları da toplayınca yine çift sayı elde etmiş bu da güzel bir çözüm olmuş ama sanki bundan ziyade diğer kâğıttaki çözüm yöntemi daha açıklayıcı, örnek vererek açıklamış daha açıklayıcı geldi bana. Ama bu öğrencinin yaptığı da bir ispattır, kabul edebiliriz. Çünkü tek sayının üzerine çift sayı ekleyip tekrar bir tek sayı elde etmiş. Ama ben diğer yöntemi yani örnek vermeyi daha çok tercih ederim. Çünkü bu biraz daha kafa karıştırıcı olmuş.”

Öğretmen1'in cevabı incelendiğinde öğretmenin, öğrencinin yapmış olduğu ispatı doğru argümanlar ile değerlendirmedeği görülmektedir. Öğretmen1 öğrencinin ispatında kullanmaya çalıştığı genellenebilir argümandaki eksikliği yorumlamadan ispat olarak kabul etmiş ve örnek vererek daha açıklayıcı bir ispat yapabileceğini düşünmüştür. Dolayısıyla Öğretmen1 öğrencinin cevabını yorumlarken yanlış çıkarımlarda bulunmuştur. Bu nedenlerle Öğretmen1'in cevabı yetersiz kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen2 ve Öğretmen3 de örnek vererek daha doğru bir ispat yapılabileceğini savunmuşlardır fakat Öğretmen1 den farklı olarak öğrencinin ispatındaki argüman eksikliğinden genel ifadeler kullanarak bahsetmişlerdir. Bu nedenle Öğretmen2 ve Öğretmen3'ün cevapları sınırlı kanıt düzeyinde tespit edilmiştir. Son olarak Öğretmen4 ise Öğretmen2 ve Öğretmen3'te olduğu gibi genel ifadeler kullanarak argüman eksikliğinden bahsetmiş fakat bu iki öğretmenden farklı olarak örnek verme ile ilgili herhangi bir yorumda bulunmamıştır. Bu sebeple Öğretmen4'ün cevabı da sınırlı kanıt düzeyinde yer almıştır. Sınırlı kanıt düzeyinde cevap veren öğretmenlerden Öğretmen2'nin yanıtı aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada x tek, y çift sayı diye belirtmiş ama x le x artı y'yi toplayınca neden devam ettirmemiş orayı anlayamadım. Öğrencinin kafası karışmış sanki gibi geldi bana x ve y şeklinde belirtmesi çok güzel ama devam ettirmemiş.

Ben burada şunu görmeyi isterdim. X tek sayı iki tane x'i toplayınca $2x$ çift olayını görmek isterdim. Ya da örnekle destekleyebilirdi. Ben öğrencilerin bu tarz ispatlarda örnekle desteklenmesini daha güvenli görüyorum o yaştaki öğrenciler için açıkçası.”

Ö3 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar verdiği tespit edilmiştir. Öğretmenlerin cevapları incelendiğinde öğrencinin soru ile ilgili bildiği veya bilmediği durumlarla ilgili herhangi bir yorum yapmadıkları ve öğrencinin nasıl

düşündüğü ile ilgili bir yorumda bulunmadıkları görülmüştür. Öğretmen cevaplarından Öğretmen1'in cevabı örnek olarak verilmiştir.

“Öğrenci burada evet doğrudur, bunu negatif ve pozitif sayıları çarpmaya benzetebiliriz demiş. Artı ile artının çarpımı artı, artı ile eksi çarpımı eksi, eksi ile eksi çarpımı artı yani tek ve çift sayılara benzetmiş. Sonra açıklama yapmış x tek sayı ise bu sayıya iki eklersek yine tek sayı olur, $x+x+2=2x+2$ olur. Bir sayıyı iki ile çarpmak bu sayıyı ikinin katı yapmaktır. Ayrıca iki toplamak yine ikinin katı olacağından bu sayı çift sayı olur. Bence çok güzel anlatmış, bunu ispat olarak kabul edebiliriz. Güzel anlattığını düşünüyorum gayet açıklayıcı olmuş.”

Karar Verme Düzeyine Yönelik Bulgular

Ö4 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar verdikleri tespit edilmiştir. Öğretmen cevapları analiz edildiğinde öğretmenlerin öğrencinin ispatı cebirsel ifadelerle de yapabileceğini belirtmelerinin yanı sıra, bu soru özelinde ispatın anlatım yolu ile de yapılabileceğinden bahsetmemişler ve cevaplarında genel ifadeler kullandıkları görülmüştür. Öğretmen1, Öğretmen3 ve Öğretmen 4 öğrencinin cebirsel ifadeler kullanabileceğini ifade ederken öğrencinin örnek vererek doğrulama yapmasındaki hatalara değinmemişlerdir. Bu cevaplardan Öğretmen1'in cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Yine denklemle çözebilirdi bunu. X i tek sayı olarak alıp ona göre bir tek sayı daha elde edip denklem kurabilirdi. Ama bu doğru bir yöntem olmuş sanki denklemle sanki biraz kafa karıştırabilirdi. Hani bu öğrencinin yaptığı şu an doğru bir yöntem olmuş bence.”

Öğretmen2 ise öğrencinin cebirsel ifadeler kullanabileceğine dikkat çekerek görsel anlatımlarla da ispat yapabileceğini söylerken birden fazla yolla ispat yapabileceğine yönelik ipuçları vermiş fakat o da örnek vererek doğrulama ile ilgili öğrenci hatasına değinmemiştir. Öğretmen2'nin cevabı aşağıda verilmiştir.

“Bu seviyedeki öğrenciye daha görsel anlatılabilir ya da bilinmeyenlerle anlatılabilir ama öğrencinin bu cevabı benim için kabul edilebilir bir cevap.”

Ö5 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen3 yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar verirken, Öğretmen4 ise sınırlı kanıt düzeyinde cevap vermiştir. Öğretmen1 Ö5'in çözümü ile ilgili karar verme düzeyini tespit amaçlı sorulan soruya herhangi bir cevap vermemiştir. Öğretmen2 ve Öğretmen3 ise öğrencinin ispat yaparken kullandığı ifadedeki eksikliğe geçersiz argümanlar kullanarak çözüm önerileri getirmişlerdir. Bu sebeple Öğretmen2 ve Öğretmen3 yetersiz kanıt düzeyinde tespit

edilmiştir. Yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar veren öğretmenlerden Öğretmen3'ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Sayıların birini x diğerini $x+1$ olarak düşünüp değerlendirip çıkarım yapılabilirdi. Biraz eksik olmuş ama sonuca ulaşmış.”

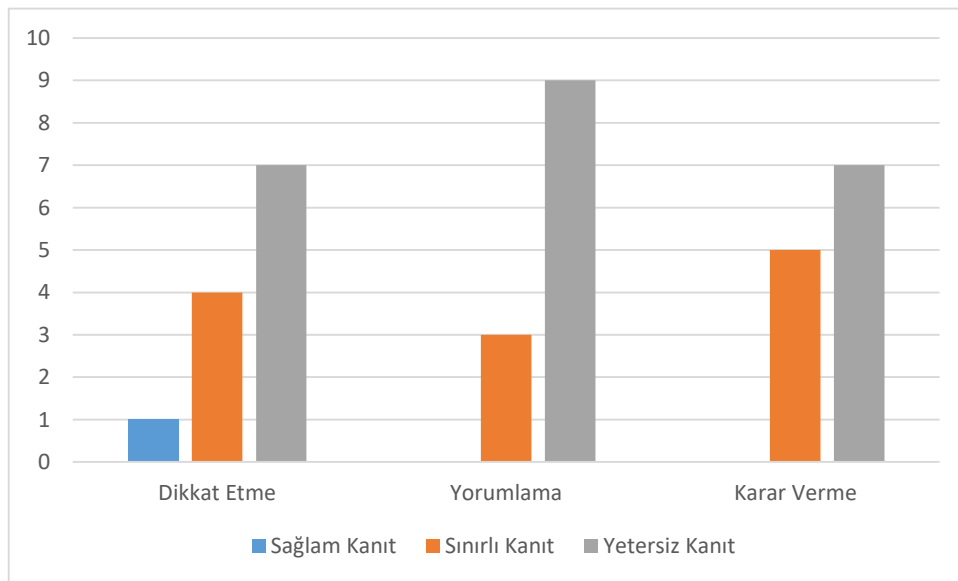
Sınırlı kanıt düzeyinde cevap veren Öğretmen4'ün yanıtı incelendiğinde öğretmen öğrencinin ispatındaki geçerli olmayan argümana doğru bir çözüm önerisi sunmuştur fakat bu öneriyi geniş bir bağlamda ele almış ve yanıtını ayrıntılandırmamıştır. Öğretmen4'ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Yalnızca şöyle bir eksiklik görüyorum, mesela burada x tek y çift demişte yani tek sayı yerine $2x-1$ şeklinde bir ifade kullanması, çift sayı olarak da $2x$ şeklinde bir ifade kullanması daha sağlıklı olabilirdi.”

Ö3 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar verdikleri tespit edilmiştir. Öğretmen1 ve Öğretmen4 bu soru için herhangi bir cevapta bulunmamışken Öğretmen2 ve Öğretmen3 ise cevap olarak sadece öğrenciyi takdir etme yoluna gitmişlerdir. Öğretmen cevaplarından Öğretmen3'ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“ X 'e tek sayı ise demiş bu sayıya iki eklersek yine tek olacağını söylemiş daha sonra bunların ikisinin toplamının her halükarda çift sayı geldiğini söylemiş. Burada çok güzel bir ispat yapmış yöntem doğrudur. Yanıt verilebilecek, önerilebilecek bir şey yok bence.”

Yukarıda elde edilen bulgular sonucunda ikinci sorunun genel bir değerlendirmesi Şekil 14'de gösterilmektedir.



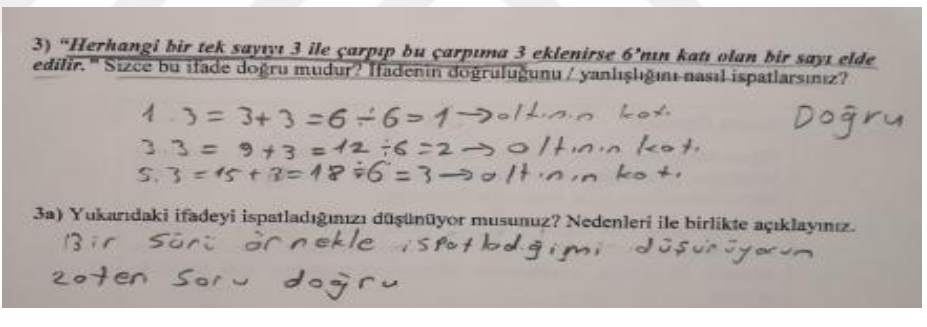
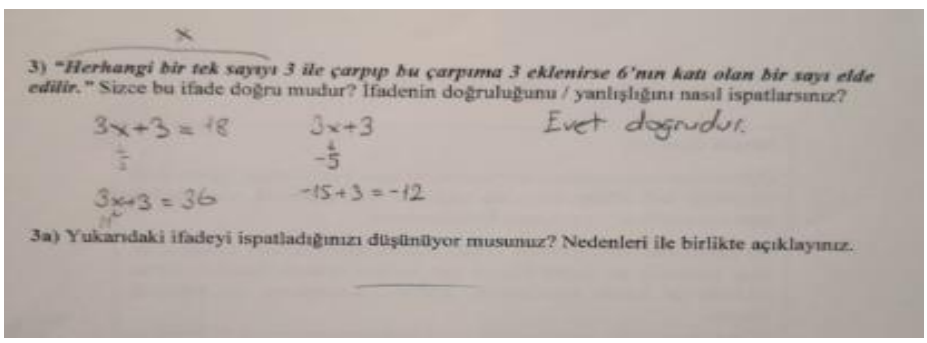
Şekil 14. İkinci Sorunun Genel Değerlendirmesi

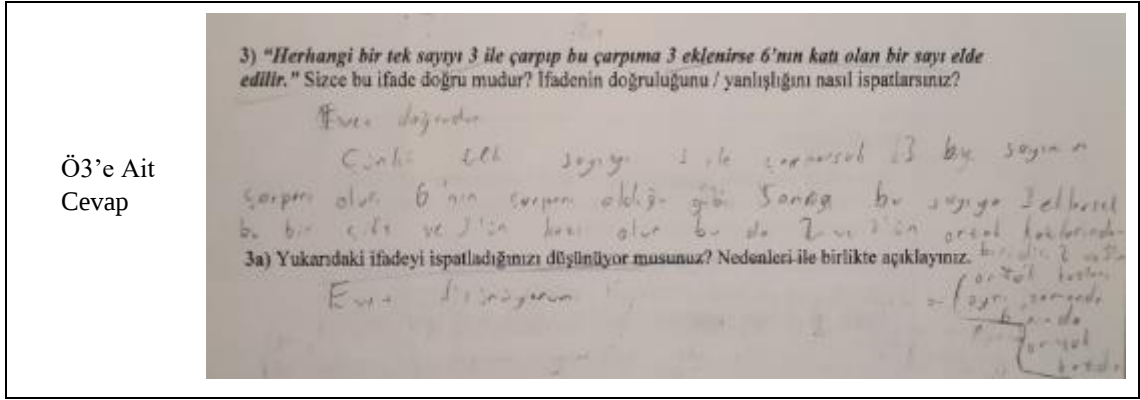
Şekil 14 incelendiğinde öğretmenlerin cevaplarındaki fark etme düzeylerinin tamamında yetersiz kanıt frekansının en yüksek olduğu görülmektedir.

Şekil 14 incelendiğinde fark etme düzeylerinden dikkat etme düzeyinde en düşük frekansın sağlam kanıt düzeyinde olduğu, yorumlama ve karar verme düzeylerinde ise sağlam kanıtın hiç olmadığı görülmektedir. Öğretmen cevaplarında sınırlı kanıtın dikkat etme, yorumlama ve karar verme düzeylerinde yaklaşık ortalama bir frekansa sahip olduğu görülmektedir.

Soru 3'e Göre Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerine Yönelik Bulgular

Öğretmenler ile gerçekleştirilen görüşmede öğretmenlerden ispat testi aracılığıyla öğrencilere yöneltilen üçüncü sorudan alınan öğrenci cevaplarını, öğretmen bireysel görüşme protokolü aracılığıyla cevaplamaları istenmiştir. Üçüncü soruya ait öğrenci cevapları Şekil 15'de gösterilmiştir.

Ö6'e Ait Cevap	 3) "Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp bu çarpıma 3 eklenirse 6'nın katı olan bir sayı elde edilir." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız? 1. $3 = 3 + 3 = 6 \div 6 = 1 \rightarrow 0$ l t n n k o t i 3. $3 = 9 + 3 = 12 \div 6 = 2 \rightarrow 0$ l t n n k o t i 5. $3 = 15 + 3 = 18 \div 6 = 3 \rightarrow 0$ l t n n k o t i Doğru 3a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız. Bir sürü örnekle ispatladığımı düşünüyorum zaten soru doğru
Ö7'ye Ait Cevap	 3) "Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp bu çarpıma 3 eklenirse 6'nın katı olan bir sayı elde edilir." Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız? $3x+3=18$ $3x+3$ $\div 6$ $\div 6$ $3x+3=36$ $-15+3=-12$ Evet doğrudur. 3a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.



Şekil 15. Üçüncü Soruya Ait Öğrenci Cevapları

Öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen verilere göre öğretmen farkındalık düzeyleri; her öğrenci için ayrı ayrı dikkat etme, yorumlama ve nasıl yanıt verileceğine karar verme alt başlıklarında incelenmiştir. Öğretmenlerin dikkat etme, yorumlama ve karar verme düzeyleri için yapılan değerlendirmenin bir özeti olarak aşağıdaki Tablo 8 oluşturulmuştur.

Tablo 8. Üçüncü Soru İçin Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri

		Dikkat Etme	Yorumlama	Karar Verme
Öğretmen1	Ö6	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı kanıt
	Ö7	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen2	Ö6	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı kanıt
	Ö7	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı kanıt
Öğretmen3	Ö6	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı kanıt
	Ö7	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö3	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen4	Ö6	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı kanıt
	Ö7	Sınırlı Kanıt	Sağlam Kanıt	Sınırlı kanıt
	Ö3	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt

Dikkat Etme Düzeyine Ait Bulgular

Ö6'nın cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen4'ün yetersiz kanıt, Öğretmen3'ün ise sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar verdiği görülmektedir. Yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar veren öğretmenlerden Öğretmen2'nin cevabı aşağıda verilmiştir.

“Burada öğrencimiz bir değerini vermiş üç ile çarpmış, üç eklemiş altı demiş, altının katı demiş ve hani benim beklediğim şey bunu en az üç örnekle ispatlamış, yani bir örnekle yapıp bıraksaydı benim için yeterli olmazdı. Ben genel olarak iki ya da üç örnek yapmasını beklerim. Eğer bir formülle ya da özdeşlikle açıklamadıysa. Öğrencinin burada ispat yaptığını düşünüyorum.”

Öğretmen2'nin cevabı incelendiğinde örnek vererek doğrulamayı ispat kabul ederek öğrencinin cevabının doğruluğunu yanlış belirlemiştir. Öğretmen1 ve Öğretmen4'ün cevapları da Öğretmen2'nin cevabına benzer niteliktedir ve öğrencinin örnek vererek yaptığı çözümü ispat olarak kabul etmişlerdir. Öğretmen3 ise farklı olarak öğrencinin örnek vererek doğrulamasını ispat olarak kabul etmemiş ve matematiksel ayrıntılar sunmadan çözümü açıklamıştır. Öğretmen3'ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Burada öğrenci deneme yanılma yapmış, sayıları değiştirerek işlemi bulmuş. Hepsinde de altının katı geldiğini bulmuş, farklı örnekler vermiş sayıları değiştirerek. İspat olarak değilse de sorunun çözümünü bulmuş genele de yaymış gibi görünüyor.”

Ö7'nin cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1 ve Öğretmen2'nin yetersiz, Öğretmen3 ve Öğretmen4'ün sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar verdikleri tespit edilmiştir. Öğretmen1 ve Öğretmen2 cevaplarında Öğrencinin örnek vererek doğrulamasını ispat olarak kabul etmişlerdir ve öğrencinin ispatındaki argüman eksikliğine değinmemişlerdir. Bu sebeple Öğretmen1 ve Öğretmen2'nin cevapları yetersiz kanıt düzeyindedir. Örnek olarak Öğretmen2'nin cevabı aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada cebirsel ifadeler kullanmış x 'i üç ile çarpıp üç eklemiş $3x+3$ cebirsel ifadesini yazmış ben bunu beklerim ve buna hem pozitif hem negatif değerler vermiş bence doğru bir yöntemdir. İspatladığını düşünüyorum.”

Öğretmen3 ve Öğretmen4 ise öğrencinin ispatındaki argüman eksikliğinin farkına varmışlardır fakat bunu matematiksel ayrıntılara değinmeden ifade etmişlerdir. Bu sebeple öğretmenlerin cevapları sınırlı kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen3'ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Burada öğrenci x yerine bir pozitif bir negatif sayı koyarak denemiş, başka sayı vererek de denemiş, burada öğrenci sanki tersten gitmiş gibi hissettim. Yani altının katını yazmış ondan sonra x in değerini bulmuş, ispat olarak kabul edilmeyeceğini düşünüyorum.”

Ö3'ün cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen3'ün sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar verirken Öğretmen4'ün yetersiz kanıt düzeyinde yanıt verdiği tespit edilmiştir. Sınırlı kanıt düzeyinde yanıt veren öğretmenlerin hepsi öğrencinin

matematiksel düşünme sürecini genel ifadelerle değerlendirmişlerdir. Öğretmen cevaplarından Öğretmen1'in cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada sözel olarak anlatmış, evet doğrudur demiş çünkü tek sayıyı üç ile çarparsak, üç bu sayının çarpanı olur, altının çarpanı olduğu gibi sonra bu sayıya üç eklersek bu bir çift sayı ve üçün katı olur. Bu da iki ve üçün ortak katlarından biridir. İki ve üçün ortak katları aynı zamanda altının da ortak katıdır demiş. Gayet güzel bir çözüm yöntemiyle çözmüş bunu bir ispat olarak kabul edebiliriz.”

Yetersiz kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen4'ün cevabı incelendiğinde öğretmen öğrencinin yaptığı ispatın doğruluğunu yanlış belirlemiş ve ispat olarak sözel ifadenin yeterli olmayacağını cebirsel ifadelerin yer alması gerektiğini belirtmiştir. Bu sebeple Öğretmen4'ün cevabı yetersiz kanıt düzeyindedir. Öğretmenin cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada sözel olarak ispat etmeye çalışmış çözümü doğrudur. Ama ispat olarak kabul etmemiz için bir cebirsel ifade bir şeyler görmemiz gerekiyor.”

Yorumlama Düzeyine Yönelik Bulgular

Ö6 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin cevaplarının yetersiz kanıt düzeyinde olduğu görülmektedir. Öğretmen cevapları incelendiğinde Öğretmen1 ve Öğretmen2'nin öğrenci cevabı üzerine herhangi bir çıkarımda bulunmadan sadece öğrencinin örnekler vererek doğrulama yapması üzerinden ispatın doğruluğunu kabul ettikleri görülmüştür. Öğretmen3 öğrencinin çözümünü ispat olarak kabul etmemiş fakat bu düşüncesini destekleyecek argümanlar sunmamıştır. Öğretmen4 ise öğrencinin örnek vererek doğrulama sürecinin aksi bir örnek ortaya çıkmadığı sürece ifadenin ispatı için yeterli olacağı yorumunda bulunarak yanlış akıl yürütme üzerinden açıklamalarda bulunmuştur. Öğretmen cevaplarından Öğretmen4'ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Burada öğrenci yine örnek vererek açıklamış biri almış üç ile çarpmış üç eklemiş altının katı bulmuş sonra üçü almış, üç ile çarpmış üç eklemiş yine altının katı bulmuş sonra beş için aynı şeyleri yapmış ve altının katı bulmuş yani bu şekilde örneklerle devam ederse de yine altının katı bulacaktır. Yani ben çözümün doğru olduğunu düşünüyorum.

Öğrenci burada aykırı bir örnek vermediği sürece yaptığı doğrudur ama aykırı bir örnek çıkarsa o örneğe dayanarak yanlıştır deriz.”

Ö7 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen3'ün yetersiz kanıt, Öğretmen4'ün ise sağlam kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri görülmüştür. Yetersiz kanıt düzeyinde cevap veren öğretmenlerin yanıtları incelendiğinde Öğretmen1 ve Öğretmen2 öğrencinin

ispat yapmak için oluşturduğu argümanın geçersizliğini fark edememişler ve bu doğrultuda yorumlar yapmadan öğrencinin kullandığı yöntemi doğru kabul etmişlerdir. Öğretmen3 bu öğretmenlerin cevaplarından farklı olarak öğrencinin ispatındaki argüman eksikliğini hissetmiş fakat doğru matematiksel ifadelerle bunu açıklayamamıştır. Bu sebeplerle Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen3'ün cevapları yetersiz kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Yetersiz kanıt düzeyinde yanıt veren öğretmenlerden Öğretmen1'in cevabı aşağıda verilmiştir.

“Denklem kurarak çözmüş burada, tek sayı yerine x demiş bunu üç ile çarpmış $3x$ olmuş, üç eklemiş toplamı 18 olduğunu söylemiş. X yerine de beş vermiş, uygun bir yöntem, doğru bir çözüm olmuş. Hem pozitifini denemiş hem negatifini denemiş. İkisinde de doğru olduğu için bunu ispat olarak kabul ederim.”

Sağlam kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen4'ün cevabı incelendiğinde öğretmenin, öğrencinin oluşturmaya çalıştığı genel argümandaki eksikliğe değindiği ve öğrencinin cevabı özelinde hangi hatayı yaptığını belirlediği görülmüştür. Bu sebeple öğretmenin cevabı sağlam kanıt düzeyinde tespit edilmiştir. Öğretmen4'ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Bu öğrencimiz de yine tek sayıyı x olarak almış yani x olarak almasındansa az önce dediğim gibi $2x-1$ olarak alması tek sayıları ifade eden genel bir ifade alması daha sağlıklı daha kullanışlı olurdu. Burada öğrencimiz şunun farkında değil tamam x 'e tam sayı demiş ama aslında biz tek sayıları x ile değil de gördüğümüz zaman tek sayıdır diyebileceğimiz bir ifade ile ifade etmesi gerekirdi. Yani $2x-1$ gibi bir ifade ile ifade etmiş olsaydı o zaman daha net sonuçlara ulaşabilirdi.”

Ö3 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri görülmüştür. Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen3 yanıtlarında öğrencinin nasıl düşündüğü ile ilgili herhangi bir kanıt sunmadan öğrencinin yaptığı ispatın doğruluğunu kabul etmişlerdir. Öğretmen4 bu öğretmenlerden farklı öğrencinin sözel olarak yaptığı ispatı doğru kabul etmemiştir. Anlatım yolu ile doğru ispat yapan öğrencinin yanıtını yanlış belirlemiştir. Dolayısıyla ispat ile ilgili yorum yaparken de yorumunu yanlış temellendirerek öğrencinin sadece cebirsel ifadeler kullanarak doğru ispatı yapabileceğini savunmuştur. Bu sebeple Öğretmen4'ün cevabı da yetersiz kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen4'ün bu yorumu aşağıda örnek olarak verilmiştir.

“Öğrencinin burada cebirsel ifade kullanması gerekiyor. Çünkü cebirsel ifade kullanarak sadece sözel değil genel bir ifade elde etmiş olur ve o da daha sağlıklı bir ispat olmuş olur.”

Karar Verme Düzeyine Yönelik Bulgular

Ö6 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar verdikleri tespit edilmiştir. Öğretmenlerin cevapları analiz edildiğinde tüm öğretmenler öğrencinin bu soruyu cebirsel ifadeler kullanarak da çözebileceğini genel ifadeler kullanarak önermişlerdir. Öğretmenler birbirlerine benzer cevaplar sunarak öğrencinin çözümüne yönelik ayrıntılara girmeden yüzeysel bir şekilde öğrenciye çözüm önerisi sunmuşlardır. Bu nedenle öğretmenlerin tümü sınırlı kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Sınırlı kanıt sunan öğretmen cevaplarından Öğretmen1'in cevabı aşağıda verilmiştir.

“Bir önceki kâğıtta olduğu gibi denklemle çözebilirdi ya da tekke çiftin toplamı, tekke tekin toplamını düşünüp o şekilde de çözebilirdi. Ama yine aynı hesaba geliyor muhtemelen yani sıkıntı yok öğrencinin ispatı doğru olmuş.”

Ö7 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1 ve Öğretmen4'ün sınırlı kanıt, Öğretmen2 ve Öğretmen3'ün ise yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar verdikleri tespit edilmiştir. Sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar sunan Öğretmen1 öğrencinin çözüm stratejisini göz önünde bulundurarak öğrenciye sorunun çözümü için farklı bir alternatif çözüm önerisi sunmuştur. Fakat bu öneriyi detaylandırmamış, kavramsal açıklamalarda bulunmamış ve öğrencinin çözümündeki eksiklikleri ve kavramsal yanlışlıkları göz ardı etmiştir. Bu nedenle Öğretmen1'in cevabı sınırlı kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen4 ise öğrencinin çözüm stratejisindeki eksikliği dikkate alarak öğrencinin çözümüne öneride bulunmuş fakat bunun nedenlerine değinmemiş ve açıklamasını detaylandırmamıştır. Bu nedenle Öğretmen4'ün cevabı da sınırlı kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Örnek olarak sınırlı kanıt düzeyinde değerlendirilen Öğretmen1'in cevabı aşağıda verilmiştir.

“Tek sayı olduğu için tek sayıyı üç ile çarparsak zaten sayı yine tek sayı olur. Bu tek sayının üzerine bir daha tek sayı eklersek zaten çift sayı olur. Bu şekilde de önerebilirim ama tabiki bu tercih meselesi, öğrencinin yaptığı yöntem de gayet açıklayıcı güzel bir yöntem olmuş.”

Öğretmen2 ve Öğretmen3 ise öğrencinin çözümü stratejisindeki kavramsal hatalara yer vermeden öğrenciye yanlış öneriler sunmuşlardır. Öğretmen2 örneklendirmeyi öğrenciye alternatif bir yol olarak sunarken, Öğretmen3 öneride

kavramsal hataya yer vermiştir. Bu nedenle bu iki öğretmen yetersiz kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen3'ün cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

“Burada biraz daha adım adım ilerleyip genele yayabilirdi. X yerine $x+1$ yazıp ispat yapabilirdi diye düşündüm açıkçası.”

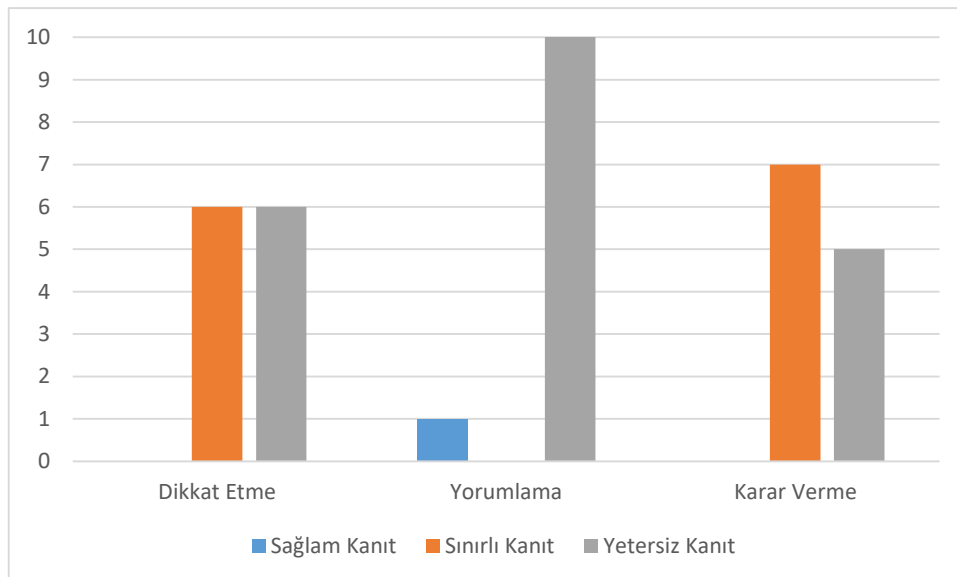
Ö3 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen3 ve Öğretmen4'ün yetersiz kanıt düzeyinde, Öğretmen2'nin ise sınırlı kanıt düzeyinde cevaplar verdiği görülmektedir. Yetersiz kanıt düzeyinde cevap veren öğretmenlerin yanıtları incelendiğinde öğrencinin çözümüne dayanarak nasıl bir yol izleneceğine dair geçerli bir alternatif çözüm sunmadıkları görülmüştür. Öğretmen3'ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Matematiksel olarak ifade edebilirdi onun dışında bir sıkıntı olduğunu düşünmüyorum.”

Öğretmen2 ise nedenini gerekçelendirerek öğrenciye çözümü için başka bir alternatif çözüm yolu önermiştir. Fakat önerdiği bu yolun matematiksel detaylarına ve bu yolda kullanılması gereken kavramlara yer vermemiştir. Bu nedenle Öğretmen2'nin yanıtı sınırlı kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen2'nin cevabı aşağıda verilmiştir.

“Cebirsel ifadeler kullanarak görmek isteme sebebim, matematik dili sonuçta o dilde göstermesini isterim. Evrensel olarak gösterilmesini herkesin bunu anlayabilmesini tercih ederim. Bunu iletirim öğrenciye.”

Yukarıda elde edilen bulgular sonucunda üçüncü sorunun genel bir değerlendirmesi Şekil 16'da gösterilmektedir.

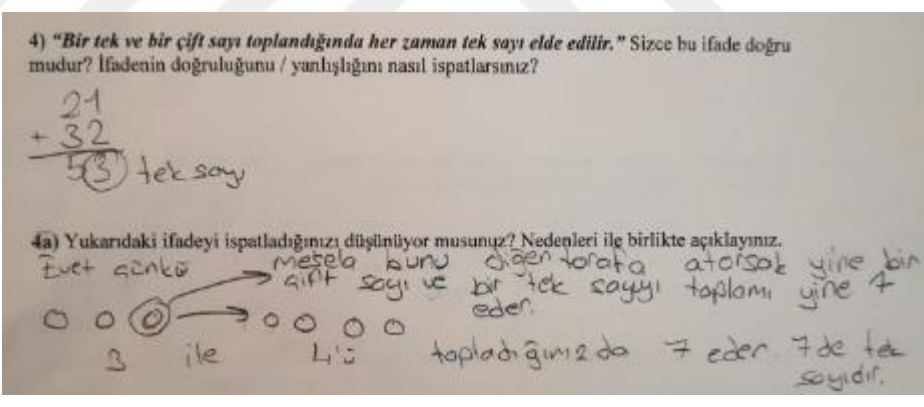
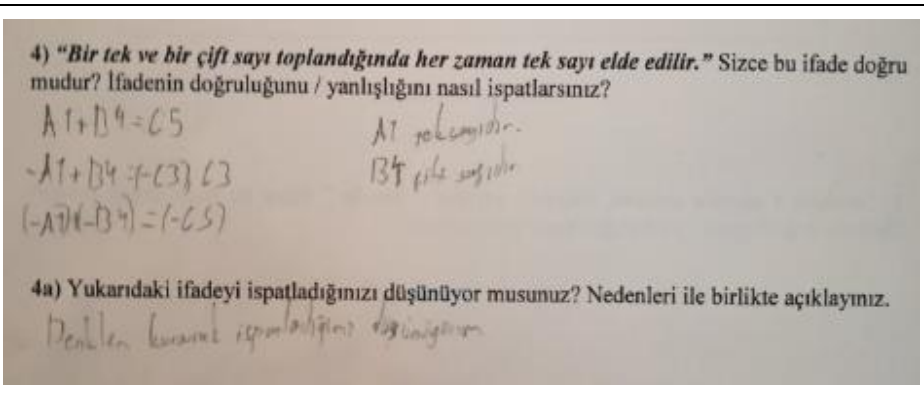


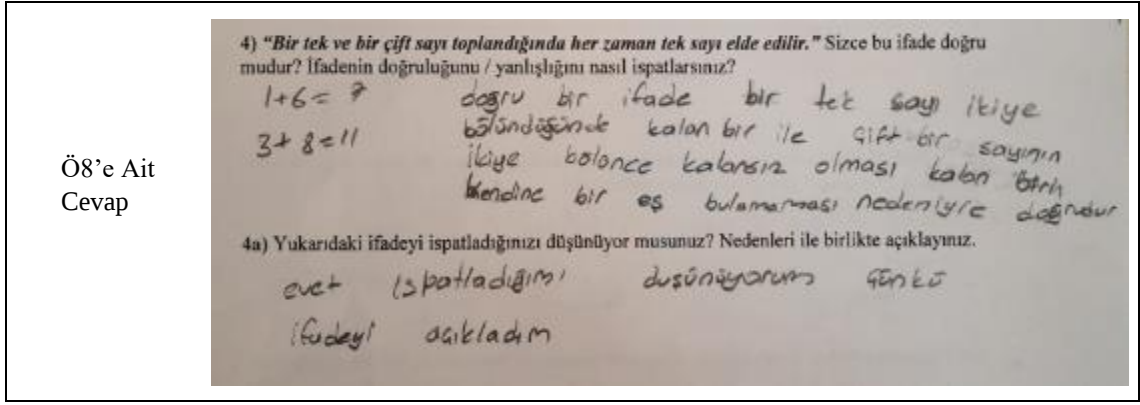
Şekil 16. Üçüncü Sorunun Genel Değerlendirmesi

Şekil 16 incelendiğinde öğretmenlerin cevaplarındaki fark etme düzeylerinden dikkat etme düzeyinde sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt düzeyinde cevapların eşit frekansta olduğu ve sağlam kanıt düzeyinde cevapların ise hiç olmadığı görülmektedir. Yorumlama düzeyindeki öğretmen cevapları değerlendirildiğinde sınırlı kanıt düzeyinde cevapların bulunmadığı, sadece bir adet sağlam kanıt düzeyinde cevabın olduğu ve yetersiz kanıt düzeyindeki cevapların neredeyse tamamını oluşturduğu görülmektedir. Karar verme düzeyinde ise sağlam kanıt düzeyinde cevaba rastlanmadığı ve sınırlı kanıt düzeyindeki cevapların bu düzeyde yoğunlukta olduğu görülmüştür.

Soru 4'e Göre Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerine Yönelik Bulgular

Öğretmenler ile gerçekleştirilen görüşmede öğretmenlerden ispat testi aracılığıyla öğrencilere yöneltilen dördüncü sorudan alınan öğrenci cevaplarını, öğretmen bireysel görüşme protokolü aracılığıyla cevaplamaları istenmiştir. Dördüncü soruya ait öğrenci cevapları Şekil 17'de gösterilmiştir.

Ö4'e Ait Cevap	
Ö2'ye Ait Cevap	



Şekil 17. Dördüncü Soruya Ait Öğrenci Cevapları

Öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen verilere göre öğretmen farkındalık düzeyleri; her öğrenci için ayrı ayrı dikkat etme, yorumlama ve nasıl yanıt verileceğine karar verme alt başlıklarında incelenmiştir. Öğretmenlerin dikkat etme, yorumlama ve karar verme düzeyleri için yapılan değerlendirmenin bir özeti olarak aşağıdaki Tablo 9 oluşturulmuştur.

Tablo 9. Dördüncü Soru İçin Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri

		Dikkat Etme	Yorumlama	Karar Verme
Öğretmen1	Ö4	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö2	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö8	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
Öğretmen2	Ö4	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö2	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö8	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
Öğretmen3	Ö4	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö2	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö8	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen4	Ö4	Sağlam Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö2	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö8	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt

Dikkat Etme Düzeyine Ait Bulgular

Ö4'ün cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen3'ün yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar verdiği görülmüştür. Öğretmen4 ise sağlam kanıt düzeyinde yanıt vermiştir. Yetersiz kanıt düzeyinde yanıt veren öğretmenlerin cevapları incelendiğinde

Öğretmen1'in öğrencinin örnek vererek yaptığı ispatın doğruluğunu kabul etmediği fakat bunun matematiksel gerekçelendirmesini yanlış yaptığı görülmüştür. Öğretmen1 öğrencinin pozitif ve negatif sayılar özelinde örnek sayısını artırmasını savunmuştur. Öğretmen2 ve Öğretmen3 ise öğrencinin verdiği sayısal örneği ve yaptığı hatalı modellemeyi yeterli görerek öğrencinin yaptığı ispatın doğruluğunu kabul etmişlerdir. Yetersiz kanıt düzeyinde yanıt veren öğretmenlerden Öğretmen3'ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada 21 ile 32'yi toplamış tek sayı olduğunu bulmuş sonra burada üç ile dördü topladığında yedi edeceğini bulmuş. Mesela burada üçteki biri diğer tarafa gönderdiğimizde yine bir çift sayı ve bir tek sayının toplamı yedi eder demiş, yani değiştirmiş ve iki ile beş gibi düşünmüş tane topladığımızda tek sayı olur demiş. Yine bunu genele yaysın isteriz ifade olarak doğru bir ifade, ispat olarak kabul edebiliriz.”

Sağlam kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen4'ün cevabı incelendiğinde öğretmenin matematiksel ayrıntılar sunarak öğrencinin çözümünün doğru olmadığını belirlediği görülmektedir. Öğretmen4'ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Öğrencimiz burada tek bir örnek vererek bir sonuç elde etmiş yani kendince doğru sonucu bulmuş, fakat tüm örnekleri kontrol ederek deneme olanağımız yok. Bence yeterli değil tek bir örnekle ispat sayamayız.”

Ö2'nin cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen2'nin sınırlı kanıt düzeyinde, Öğretmen3 ve Öğretmen4'ün ise yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri tespit edilmiştir. Sınırlı kanıt düzeyinde yanıtlar veren Öğretmen1 ve Öğretmen2'nin cevaplarına bakıldığında öğrencinin ispatında kullandığı ifadenin genellenebilir bir cebirsel ifade olmadığını fark etmişler ve öğrencinin cebirsel ifade kullanmaya çalışırken örnek vererek ispatladığını söylemişlerdir. Ancak örnek vererek ispatlamanın da öğrenciyi doğru sonuca götürebileceğini ifade etmişlerdir. Öğretmen1'in cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“A1, B4 demiş, galiba A tek sayı B çift sayıdır demek istemiş. A yerine bir almış, B yerine dört almış, örnek vermiş C5 çıkmış, tam olarak denklem kurmaktan ziyade deneme yanılma yapmış, bir negatif bir pozitif ve ikisinin de negatif olduğu örnekler de vermiş. Biraz karışık görünüyor ama deneme yanılma yapmış aslında farklı bir şey değil. Ama yine de bu deneme yanılma yolu da onu sonuca götürür diye düşünüyorum.”

Yetersiz kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen3 öğrencinin çözümünün doğruluğunu yanlış belirlemiştir. Öğretmen4 ise öğrencinin düşünme biçimini yanlış anlayışla değerlendirmiştir. Öğretmen4'ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada A1 ve B4'ü toplamış C5 bulmuş, A1 iki basamaklı bir sayı, A1 tek sayı B4 çift sayı olarak düşünmüş yani iki basamaklı bir tek bir çift sayı yazmış, onlar

basamağına da harf olarak kullanmış. Sonra da negatiflerini kullanmış orda da –C5 demiş. Bence öğrenci burada doğru bir çözüm yapmamıştır.”

Ö8’in cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1 ve Öğretmen3’ün sınırlı kanıt düzeyinde, Öğretmen2 ve Öğretmen4’ün yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar verdikleri görülmüştür. Sınırlı kanıt düzeyinde yanıtlar veren Öğretmen1 ve Öğretmen3 öğrencinin anlatım yolu ile yaptığı ispatın doğruluğunu kabul etmişler fakat bu kabulü matematiksel detaylandırmadan uzak olarak ele almışlardır. Öğretmen1’in cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Değer vererek çözmüş soruyu bir tek sayı, bir çift sayı almış toplamları tek sayı olmuş. Doğru bir ifade bir tek sayı ikiye bölündüğünde kalan bir ile çift bir sayının ikiye bölününce kalansız olması kalan birin kendine bir eş bulamaması nedeniyle doğrudur demiş. Düşünce yöntemi olarak güzel, ispat olarak da kabul edilebilir.”

Yetersiz kanıt düzeyinde cevap veren öğretmenlerden biri olan Öğretmen2 öğrencinin anlatım yolu ile yaptığı ispatın doğruluğunu kabul etmemiş, öğrencinin bu ispatı doğrulamak için kullandığı örnekleri ispat olarak saymıştır. Öğretmen4 ise öğrencinin anlatım yolu ile yaptığı ispata değinmeyerek öğrencinin yaptığı ispatın doğruluğunu yanlış belirlemiştir. Öğretmen4’ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Bu öğrencimiz de yine örnek vererek açıklamaya çalışmış. İki örnek vermiş ve doğrudur demiş. İki örnek yeterli olmayabilir çünkü nerede bir aksilik yaşayacağını biz örnek vererek açıklayamayız. Örnek vermektan ziyade bizim daha genel ifadelere ulaşmamız gerekiyor. Daha genel bir ifadeye ulaştığımız anda da daha sağlıklı bir ispat yapmış oluruz.”

Yorumlama Düzeyine Yönelik Bulgular

Ö4 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar verdikleri tespit edilmiştir. Öğretmen1 ve Öğretmen 2 cevaplarında öğrencinin çözüm stratejisini ispat ile ilgili ilgisiz bağlantılar kurarak değerlendirmişler ve yanlış çıkarımlarla yorumlamışlardır. Öğretmen3 ve Öğretmen4 ise öğrencinin nasıl düşündüğü, hangi hataları yaptığı ve öğrencinin neyi bilip bilmediği ile ilgili herhangi bir yorumda bulunmamıştır. Öğretmen cevaplarından Öğretmen1’in yanıtı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada örnek vermiş sonra da şekil yardımıyla üç ve dördü modellemeye çalışmış, deneme yanılma yapmış ama mesela tekli olarak düşünmüş. Diğer kâğıtlarda negatifle de denenmişti. Hangisi daha doğru diye bakarsak hepsini denemek pozitif

pozitif, pozitif negatif, negatif negatif denemek daha doğru bir yöntem olur. O yüzden öğrencinin burada yaptığı tam bir ispat gibi gelmiyor bana.”

Ö2 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1 ve Öğretmen2’nin sınırlı kanıt düzeyinde, Öğretmen3 ve Öğretmen4’ün yetersiz kanıt düzeyinde yorumlar yaptıkları görülmüştür. Öğretmen1 ve Öğretmen2 öğrencinin düşüncesinin denklem kurma olduğunu belirtmişlerdir. Ama bunu neden başaramadığını genel ifadelerle anlatmışlardır. Öğretmen2’nin cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada sanki $A+B=C$ deyip sonra $A=1$ ve $B=4$ şeklinde değer vermiş gibi geldi bana $A1$ eşittir tek sayıdır, $B4$ eşittir çift sayıdır dese daha anlaşılır olurdu. Denklem kurarak ispatladığını düşünüyorum demiş ama tam olarak denklemi kuramamış. Bir eksi bir artı kullanmış sonra ikisini eksi yapmış, bu ifadeyi öğrenci özünde biliyor açıklamaya çalışmış kendince de doğru ama matematiksel olarak yanlış.”

Yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar veren Öğretmen3 ve Öğretmen4’ün yanıtları incelendiğinde Öğretmen3’ün öğrencinin düşüncesini yorumlamadığı ve yaptığı çözümü aynen aktardığı görülmüştür. Öğretmen4 ise öğrencinin neyi bilip bilmediği ile ilgili yanlış akıl yürütme üzerinden ve öğrenci düşüncesine dayalı olmayan genel yorumlarda bulunmuştur. Bu nedenlerle Öğretmen3 ve Öğretmen4’ün yanıtları yetersiz kanıt düzeyinde tespit edilmiştir. Yetersiz kanıt düzeyinde cevap veren öğretmenlerden Öğretmen4’ün yanıtı aşağıda örnek olarak verilmiştir.

“Bu bir ispat değildir. Bu öğrenci şunun farkında değil bir eksiklikte şudur. A ile B toplamına da C demiş bunların toplamı iki basamaklı bir sayıda olabilirdi. Orada bir eksiklik var onu da ifade edebilirdi.”

Öğrenci burada denklem kurarak ispatladığını düşünmüş ama bu bir denklem değil zaten yani burada liseye geçtiği zaman bu öğrenci sayıları çözümleyerek de bir şeyler elde edebileceğini öğrenecek ve o zaman da daha sağlıklı bir ispat yapabilecektir.”

Ö8 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri tespit edilmiştir. Öğretmen1 ve Öğretmen3 Öğrencinin düşüncesini yorumlamak yerine öğrencinin çözümünü aynen aktarmışlardır. Öğretmen4 öğrencinin nasıl düşündüğü ile ilgili herhangi bir ayrıntı sunmamıştır. Öğretmen2 ise öğrencinin çözümünü yanlış kanıtlar sunarak yorumlamıştır. Öğretmen2’nin cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada örneklemeye gitmiş, doğru bir ifade demiş bir tek sayı ikiye bölündüğünde kalan bir ile çift bir sayının ikiye bölününce kalansız olması kalan birin kendine bir eş bulamaması nedeniyle doğrudur. Öğrenci teklik çiftliğe gitmiş, tabi ifade çok karmaşık olmuş, anlatmak istediği şey özünde evet hani tek kalırsa yanında çift kalmayacağı için tektir gibi tek ve çift sayıları açıklamış. Açıkçası orda yani örneklemeye yolu ile evet ispattır diyebiliriz.”

Karar Verme Düzeyine Yönelik Bulgular

Ö4 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1 ve Öğretmen3 yetersiz kanıt düzeyinde, Öğretmen2 ve Öğretmen4 sınırlı kanıt düzeyinde yanıtlar vermişlerdir. Yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar veren öğretmenler kendilerine yöneltilen nasıl yanıt verileceğine karar verme ile ilgili soruya herhangi bir yanıt vermemişlerdir. Sınırlı kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen2 öğrencinin cebirsel olarak da ispatı yapabileceğini ifade etmiş ve bunu açıklamıştır. Fakat öğretmen2 bu açıklamasını öğrencinin yanlış yaptığı modellemeyi doğru kabul ederek bunun üzerine temellendirmiş ve öğrenciye yanıt verebileceği çerçeveyi de bunun üzerinden oluşturmuştur. Bu nedenle Öğretmen2'nin yanıtı sınırlı kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen2'nin yanıtı aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci örnek vermiş sonrada şekiller kullanarak tek ve çifti anlatmış yani az önceki öğrencinin sözel olarak anlattığını görsel olarak anlatmış yani ispat olarak kabul edilebilir. Ama burada da cebirsel ifade ile gösterme yöntemini öneririm ama burada da gayet açıklayıcı olmuş. Beşinci, altıncı sınıflar bile rahatlıkla anlayabilirler. Cebirsel ifade diyorum sürekli ama alt sınıflar onu anlamazlar ama bu tarz bir görsellikle alt sınıflar daha rahat anlayabilirler. Alt sınıflar bazen sözel ifadeleri de anlamakta zorlanıyorlar. Ama bu şekilde görsel olduğunda anlayabilirler. Alt sınıflar için açıklayıcı olmuş.”

Sınırlı kanıt düzeyinde yanıt veren diğer öğretmen olan Öğretmen4'ün yanıtı aşağıda verilmiştir.

“Öğrenciye cebirsel ifade kullanmasını önerirdim. Bunun dışında bir yanıt veremem şu an aklıma gelen bir şey yok diğer türlü örnek vererek açıklayarak ama bizim bütün örnekleri deneme ve kullanma gibi bir seçeneğimiz yok bir şekilde bir genellemeye ulaşmamamız gerekiyor bu genellemeye de sadece cebirsel ifadeleri kullanarak ulaşabiliriz.”

Öğretmen4'ün cevabı incelendiğinde öğrencinin sadece cebirsel ifadeler kullanarak bir genellemeye gidebileceğinden bahsettiğini ve öğrenciyi bu yolda yönlendirebileceğini ifade ettiği görülmektedir. Öğretmen4 alternatif olarak öğrencinin doğru bir modelleme yapabileceğinden bunun üzerinden genellenebilir bir örnek oluşturarak da ispat yapabileceğinden bahsetmemiştir. Bu nedenle Öğretmen4'ün yanıtı da sınırlı kanıt düzeyinde tespit edilmiştir.

Ö2 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen4'ün sınırlı kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri, Öğretmen3'ün ise yetersiz kanıt düzeyinde cevap verdiği tespit edilmiştir. Sınırlı kanıt düzeyinde yanıtlar veren

öğretmenlerin yanıtlarında öğrencinin ispatında cebirsel ifadeler kullanabileceğini derine inmeden genel ifadelerle önerdikleri görülmektedir. Sınırlı kanıt düzeyinde yanıt veren öğretmenlerden Öğretmen2'nin cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Ben bunu hani biz yapıyoruz ya cebirsel ifadelerde değer bulurken $A+B$ cebirsel ifadesini verip A şu ise, B şu ise deyip hani eşittir şeklinde gösterip sonra yerlerine koymayı önerebilirdim. Bu şekilde çok karmaşık olmuş yani herkes anlayamayabilir bunu.”

Yetersiz kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen3'ün cevabı incelendiğinde öğretmenin öğrenciye ispat yapabileceği herhangi bir yöntem ve strateji sunmadığı görülmüştür. Bu nedenle Öğretmen3'ün yanıtı yetersiz kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen3'ün yanıtı aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada soruyu çözmüş onda sıkıntı yok sadece bir pozitif bir de negatif olarak çözmüş galiba. Burada sadece $A1$, $B4$ yerine x ve y kullansaydı, şu an çünkü sayılar birbirine çok karışmış, onun dışında bir sıkıntı olduğunu düşünmüyorum, ispat olarak kabul edebiliriz.”

Ö8 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1 ve Öğretmen2'nin sınırlı kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri, Öğretmen3 ve Öğretmen4'ün yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri tespit edilmiştir. Sınırlı kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen1'in yanıtı aşağıda verilmiştir.

“Belki yine denklemlerle çözebilirdi. X i bir tek sayı olarak kabul ederdi. Daha sonra bu tek sayıya tekrar ekleyip çift sayı elde edip sonucun tek sayı olacağını görebilirdi. Ama çocuklar genelde denklem kurmaktan biraz daha çekindikleri için deneme yanılma yoluyla çözüyorlar. Denklem zor geleceğini düşünüyorlar, yine de kâğıdında bir sıkıntı yok doğru bir yöntem olur.”

Öğretmen1'in yanıtı incelendiğinde öğrenciye alternatif bir çözüm olarak cebirsel ifadeleri kullanabileceğini ifade ettiği ama bunu yaparken öğrencinin kullanabileceğini söylediği argümanda eksiklik olduğu görülmektedir. Bu nedenle Öğretmen1'in yanıtı sınırlı kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir.

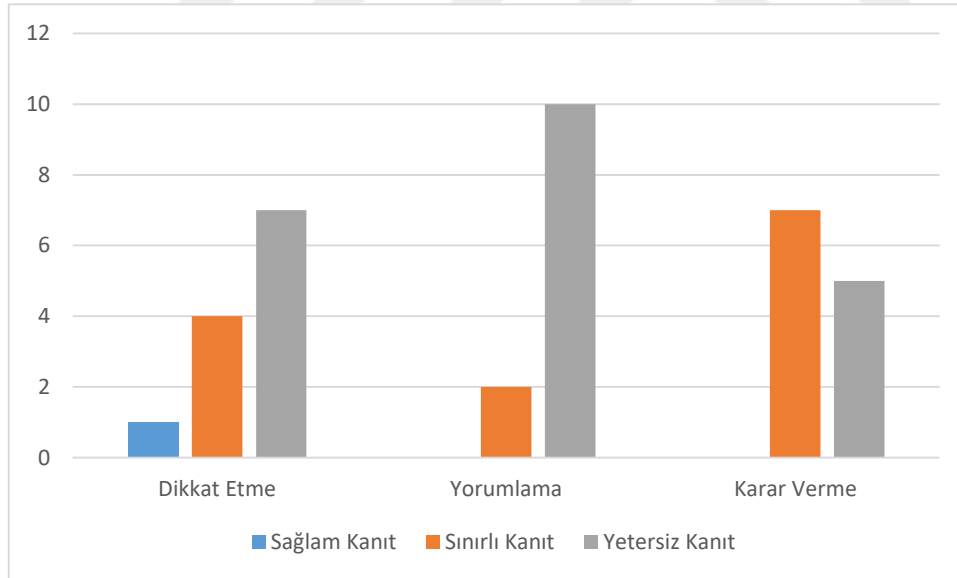
Sınırlı kanıt düzeyinde yanıt veren diğer öğretmen olan Öğretmen2 ise öğrencinin cebirsel ifadeleri kullanarak ispat yapabileceğini söylemiş bunun sebebini açıklamış fakat devamında sözel ifadelerle anlaşılamayabileceği hususunda anlatım yolu ile ispatı kabul etmemiştir. Bu sebeple Öğretmen2'nin yanıtı da sınırlı kanıt düzeyinde tespit edilmiştir. Öğretmen2'nin yanıtı aşağıda verilmiştir.

“Cebirsel ifadelerle açıklamasını isterim açıkçası, hangi ülkeden kim bakarsa baksın evrenselliği görmek isterim. Her zaman öğrencilerime de söylediğim, mesela Amerika ya da gitseniz matematik dilini anlayabilirsiniz, evet sözel ifadeleri anlayamayabilirsiniz ama çözümleri anlayabilirsiniz diyorum. Onları da o yönde desteklemeye çalışıyorum o yüzden evet ispat olarak kabul ederim ama cebirsel ifade kullanmasını öneririm.”

Yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar veren Öğretmen3 ve Öğretmen4’ün cevapları incelendiğinde Öğretmen3’ün öğrencinin çözüm yolu üzerine herhangi bir alternatif sunmadığı, öğrencinin anlaması özelinde yanıtlar vermediği ve öğrenciyi takdir etme yoluna gittiği görülmüştür. Öğretmen4 ise öğrenciye nasıl yanıt verilebileceğine dair yöneltilen soruya herhangi bir cevap vermemiştir. Bu sebeplerle Öğretmen3 ve Öğretmen4’ün yanıtları yetersiz kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen3’ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Burada öğrenci deneme yanılma yoluyla yapmış doğru sonucu da bulmuş. Sonra şöyle bir ifade yazmış. Bir tek sayı ikiye bölündüğünde kalan bir ile çift bir sayının ikiye bölününce kalansız olması, kalan birin kendine bir eş bulamaması nedeniyle doğrudur, demiş. İfade olarak çok güzel açıklamış bunu ispat olarak kabul edebiliriz.”

Yukarıda elde edilen bulgular sonucunda dördüncü sorunun genel bir değerlendirmesi Şekil 18’de gösterilmektedir.



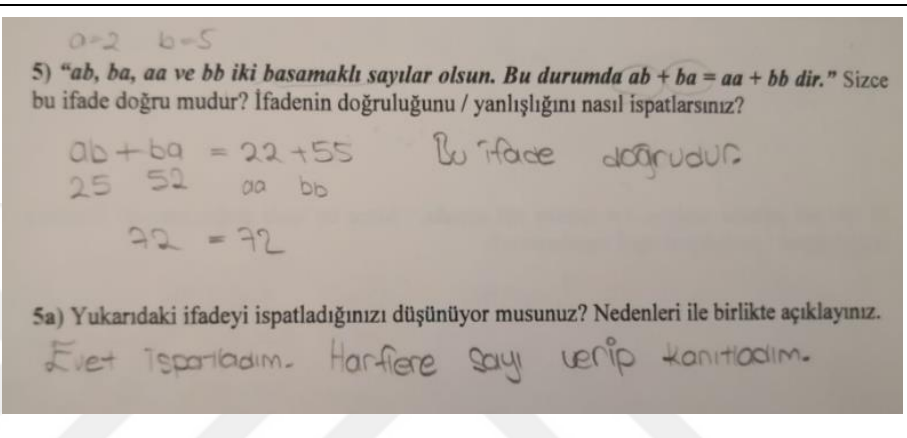
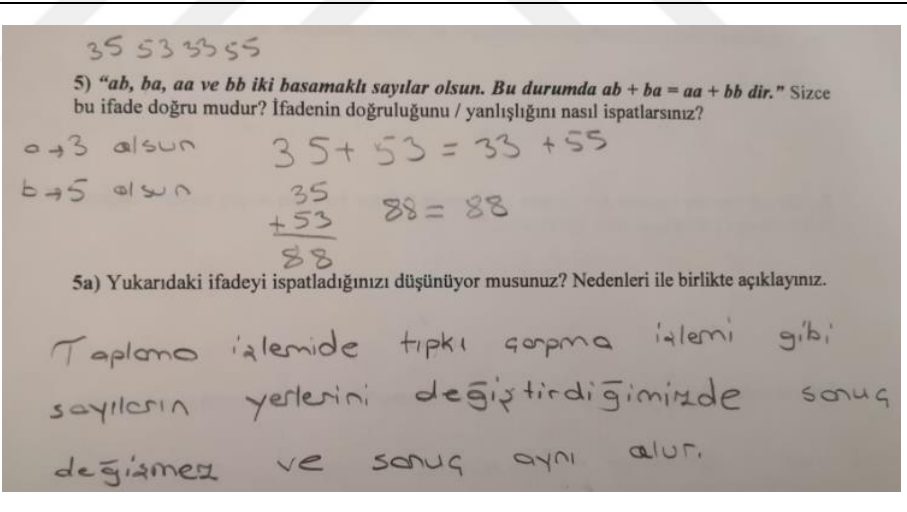
Şekil 18. Dördüncü Sorunun Genel Değerlendirmesi

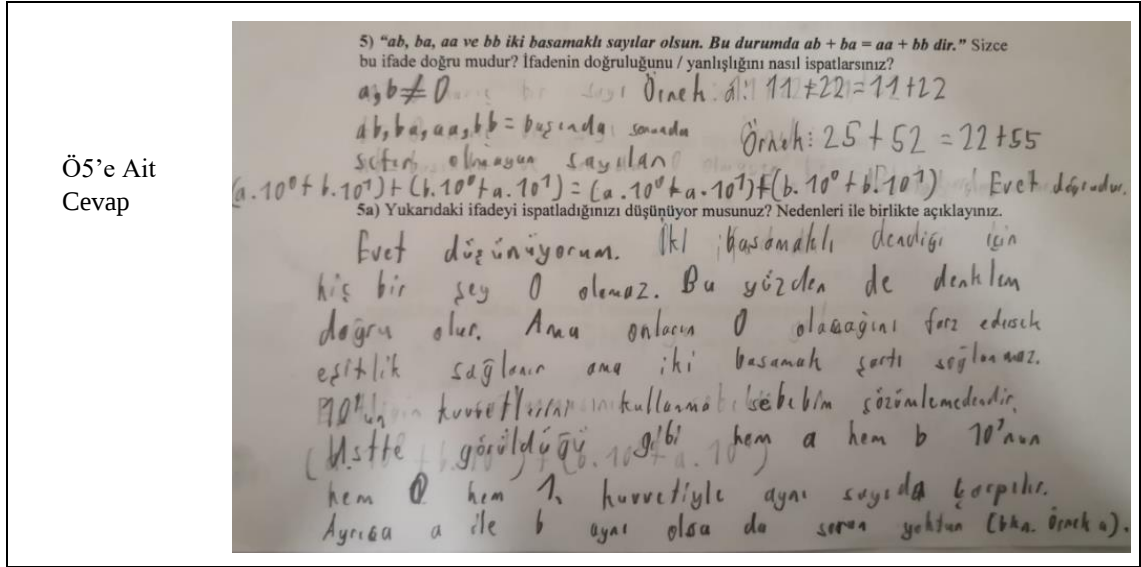
Şekil 18 incelendiğinde öğretmenlerin cevaplarındaki fark etme düzeylerinden en yüksek frekansların dikkat etme ve yorumlama düzeylerinde yetersiz kanıt düzeyindeki cevaplarda, karar verme düzeyinde ise sınırlı kanıt düzeyindeki cevaplarda olduğu

belirlenmiştir. Sağlam kanıt düzeyindeki cevap sadece dikkat etme düzeyinde görülmektedir ve diğer düzeylerde sağlam kanıt düzeyinde cevap bulunmamaktadır.

Soru 5'e Göre Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerine Yönelik Bulgular

Öğretmenler ile gerçekleştirilen görüşmede öğretmenlerden ispat testi aracılığıyla öğrencilere yöneltilen beşinci sorudan alınan öğrenci cevaplarını, öğretmen bireysel görüşme protokolü aracılığıyla cevaplamaları istenmiştir. Beşinci soruya ait öğrenci cevapları Şekil 19'da gösterilmiştir.

Ö9'a Ait Cevap	
Ö10'a Ait Cevap	



Şekil 19. Beşinci Soruya Ait Öğrenci Cevapları

Öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen verilere göre öğretmen farkındalık düzeyleri; her öğrenci için ayrı ayrı dikkat etme, yorumlama ve nasıl yanıt verileceğine karar verme alt başlıklarında incelenmiştir. Öğretmenlerin dikkat etme, yorumlama ve karar verme düzeyleri için yapılan değerlendirmenin bir özeti olarak aşağıdaki Tablo 10 oluşturulmuştur.

Tablo 10. Beşinci Soru İçin Öğretmenlerin Farkındalık Düzeyleri

		Dikkat Etme	Yorumlama	Karar Verme
Öğretmen1	Ö9	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö10	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö5	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen2	Ö9	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö10	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö5	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen3	Ö9	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö10	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö5	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
Öğretmen4	Ö9	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt
	Ö10	Yetersiz Kanıt	Yetersiz Kanıt	Sınırlı Kanıt
	Ö5	Sınırlı Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt

Dikkat Etme Düzeyine Ait Bulgular

Ö9'un cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri tespit edilmiştir. Öğretmen1 ve Öğretmen2 öğrencinin örnek vererek yaptığı çözümü doğru kabul etmişlerdir ve öğrencinin yaptığı ispatın doğruluğunu yanlış belirlemişlerdir. Öğretmen3 öğrencinin yaptığı ispatın çözümünü kabul etmemiş fakat açıklamasında yanlış argümanlar kullanmıştır. Öğretmen4 de öğrencinin çözümünün doğruluğunu yanlış olarak belirlemiştir fakat bunu öğrencinin tek bir örnek vermesine bağlamıştır. Öğretmen2'nin cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Burada öğrencimiz örnek vererek ispatlamış, harflere sayı verip kanıtladım demiş. Örnekleme yöntemi ile öyle bir yöntem dersek evet örnekleme yolu ile doğru kabul edebiliriz.”

Ö10'un cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen3 ve Öğretmen4 'ün yetersiz kanıt düzeyinde, Öğretmen2'nin sağlam kanıt düzeyinde yanıt verdiği görülmüştür. Yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar veren öğretmenlerin cevaplarına bakıldığında Öğretmen1 ve Öğretmen3 sadece öğrencinin örnek üzerinden hareket ettiği bölümü ele almış, örnek üzerinden gitmesinin doğru olduğunu belirtmişler ve öğrencinin sözel olarak açıkladığı kısımdaki argüman yanlışlığına değinmemişlerdir. Öğretmen4 de sözel kısımdaki argüman eksikliğine değinmemiş farklı olarak öğrencinin örnek vermesini doğru bulmamıştır. Fakat bunu matematiksel olarak açıklamamıştır. Öğretmen4'ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci kendince bir örnek vermiş ve kendince ispatlamaya çalışmış doğru sonucu bulmuştur ama ispat olarak kabul edilmez.”

Sağlam kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen2 örnek vermenin yeterli olmayacağını belirtmiş ayrıca öğrencinin yaptığı sözel argümandaki argüman eksikliğini de fark edip matematiksel olarak açıklamasını yapmıştır. Öğretmen2'nin yanıtı aşağıda verilmiştir.

“ $a=3$ olsun, $b=5$ olsun örneklerini verip yerlerine yazıp eşitlik elde etmiş, açıklama olarak da toplama işlemi de tıpkı çarpma işlemi gibi sayıların yerlerini değiştirdiğimizde sonuç değişmez ve sonuç aynı olur demiş. Yani burada sayılar arasında ab ve ba 'yı toplamakla bb ve aa 'yı toplamak gibi açıklama yapmış. Yaptığı açıklama bunu ispatlamaz, öğrencinin yaptığı açıklama değişme özelliği ile ilgili ama öğrencinin ispat etmesi gereken şey $ab+ba=aa+bb$ ifadesinin doğruluğudur.”

Ö5'in cevabı özelinde öğretmenlerin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin sınırlı kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri tespit edilmiştir. Öğretmenler öğrencinin çözümünü doğru olarak belirlemişler ve genel ifadelerle açıklamışlardır. Öğretmen1'in yanıtı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci burada çözümlmeye girmiş a ve b'nin sıfırdan farklı olduğunu da söylemiş evet gayet uygun. Aslında burada ispat yapmaya çalışmış çözümlemenin, yukarıda da deneme yanılma ile yapmış. İkisini de gösterdiği için ispat olarak kabul edebiliriz. Çünkü altına da açıklamasını yapmış. Evet, düşünüyorum iki basamaklı dediği için hiçbir şey sıfır olamaz bu yüzden de denklem doğrudur ama onların sıfır olacağını farz edersek eşitlik sağlanır ama iki basamak şartı sağlanmaz. Onun kuvvetlerini kullanma sebebim çözümlerdir. Onu da açıklamış, üstte görüldüğü gibi hem a hem b onun hem sıfırcı hem de birinci kuvvetiyle aynı sayıyla çarpılır demiş. Evet, çözümleme yöntemiyle de ispat olarak yazmış.”

Yorumlama Düzeyine Yönelik Bulgular

Ö9 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde tüm öğretmenlerin yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri tespit edilmiştir. Öğretmenlerin hiçbiri öğrencinin nasıl düşündüğü ile ilgili herhangi bir ayrıntı sunmamışlardır. Öğretmen1'in yanıtı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Bu öğrencimizde örnek vermiş yine, sayı değerleri vermiş doğru olmuş, doğru olduğunda da ispatladığını düşünmüş. Bir önceki öğrenci ile aynı şeyleri yapmış.”

Ö10 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen3 ve Öğretmen4'ün yetersiz kanıt düzeyinde Öğretmen2'nin ise sınırlı kanıt düzeyinde yorumda bulunduğu görülmüştür. Sınırlı kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen2 öğrencinin çözümünü genel olarak yorumlamıştır. Öğretmen2 öğrencinin anlatım yolu ile yapmaya çalıştığı çözümü ile neyi bilip bilmediği ile ilgili çıkarımlarda bulunmuş fakat bunu genel ifadeler kullanarak yorumlamıştır. Bu nedenle Öğretmen2'nin cevabı sınırlı kanıt olarak belirlenmiştir. Öğretmen2'nin cevabı aşağıda verilmiştir.

“Öğrencinin yaptığı açıklama değişme özelliği ile ilgili ama öğrencinin ispat etmesi gereken şey $ab+ba=aa+bb$ ifadesinin doğruluğudur, eğer örnek ile gittiyse burada $10a+b$ yi kullanmak aklına gelmemiş.”

Yetersiz kanıt düzeyinde yanıt veren öğretmenlerden Öğretmen1 öğrenci çözümünü yanlış yorumlamıştır. Öğretmen3 öğrencinin çözümüyle ilgisiz bağlantılar kurmuştur. Öğretmen4 ise öğrencinin düşüncesine dayanmayan genel yorumlarda bulunmuştur. Yetersiz kanıt düzeyinde yanıt veren öğretmenlerden Öğretmen4'ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrenci kendince bir örnek vermiş ve kendince ispatlamaya çalışmış doğru sonucu bulmuştur ama ispat olarak kabul edilmez. Bence öğrencinin cebirsel olarak çözümleme yapması ve bir eşitlik elde etmesi gerekirdi. O da bugün için erken liseye geçtiğinde bunu öğrenecektir.”

Öğretmen4’ün cevabı incelendiğinde de öğrencinin sekizinci sınıf öğrencisi olduğunu ve cebirsel ifadeleri bu sınıf seviyesinde zaten bilmesi gerektiğini göz ardı ederek yorumda bulunmuştur. Bu sebeple Öğretmen4’ün cevabı yetersiz kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir.

Ö5 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarını yorumlama düzeyleri incelendiğinde Öğretmen2 ve Öğretmen3 yetersiz kanıt düzeyinde, Öğretmen1 ve Öğretmen4 sınırlı kanıt düzeyinde yanıtlar vermişlerdir. Yetersiz kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen2 öğrencinin çözümüyle ilgili herhangi bir yorumda bulunmamıştır. Öğretmen3 ise öğrencinin başarıyla tamamladığı ispatı yarıda bıraktığını belirterek öğrencinin cevabını yanlış yorumlamıştır. Öğretmen3’ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“a, b eşit değil sıfır ile çok güzel ispatın ilk girişini yapmış öğrenci. Ondan sonra da çözümleme yapmış toplama işlemi olarak bulmuş ama daha sonra devam ettirmemiş burada bırakmış sonra şöyle bir açıklama yapmış; hem a hem b onun hem sıfırcı hem birinci kuvvetiyle aynı sayıda çarpılır, ayrıca a ile b aynı olsa da sorun yoktur demiş. Evet, ispat olarak kabul edebiliriz.”

Sınırlı kanıt düzeyinde yanıt veren Öğretmen1 ve Öğretmen4 öğrencinin ispatının bir bölümünü yorumlayarak öğrencinin ne düşündüğünü açıklamışlardır. Öğretmen4’ün cevabı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Öğrencimiz burada a ve b’nin sıfıra eşit olmadığını ifade etmiş, güzel düşünmüş. En azından onlar basamağının sıfır olmayacağını farkında. Bu öğrencimiz çözümleme yapmış bir de yani bu öğrenci çözümleme yaparak güzel bir ispat yapmış.”

Karar Verme Düzeyine Yönelik Bulgular

Ö4 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen3 ve Öğretmen4 ‘ün yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri görülmüştür. Öğretmen1, Öğretmen3 ve Öğretmen4 öğrencinin cevabındaki hataya yönelik bir çözüm önerisi sunmamışlardır. Bu sebeple verdikleri yanıtlar yetersiz kanıt düzeyindedir. Öğretmen2 ise öğrencinin çözümleme yaparak cebirsel ifadeler ile ispat yapabileceğine değinmiş fakat neden çözümleme yapması gerektiğini açıklamamıştır. Bu nedenle Öğretmen2’nin yanıtı sınırlı kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen2’nin yanıtı aşağıda verilmiştir.

“Basamaklarına göre toplayıp ifade etmesini söyledim. Basamak değerleriyle göstermesini beklerdim.”

Ö10 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde Öğretmen1, Öğretmen2 ve Öğretmen4 öğrenciye alternatif bir çözüm olarak cebirsel ifadeleri kullanabileceğini genel ifadelerle söylemişlerdir. Bu nedenle bu üç öğretmen sınırlı kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen1’in yanıtı örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Bu elimdeki kağıtta değer verilmiş a ya üç b ye 5 vermiş sonucunda bir değer bulmuş. Eşitlik bulmuş evet kabul edilebilir, doğru bir yöntem olmuş, evet deneme yanılma olarak doğru bir yöntem ama belki birkaç tane daha değer verebilirdi ama yine aynı şeyleri bulurdu. Muhtemelen öğrenci yine aynı şeyler çıkacağı için başka değerler vermemiştir diye düşünüyorum. Belki çözümleme yapabilirdi burada, daha basit bir yöntemle $10a+b+10b+a$ deseydi çözümleme yapsaydı daha net bir ispatlama yöntemi olabilirdi belki.”

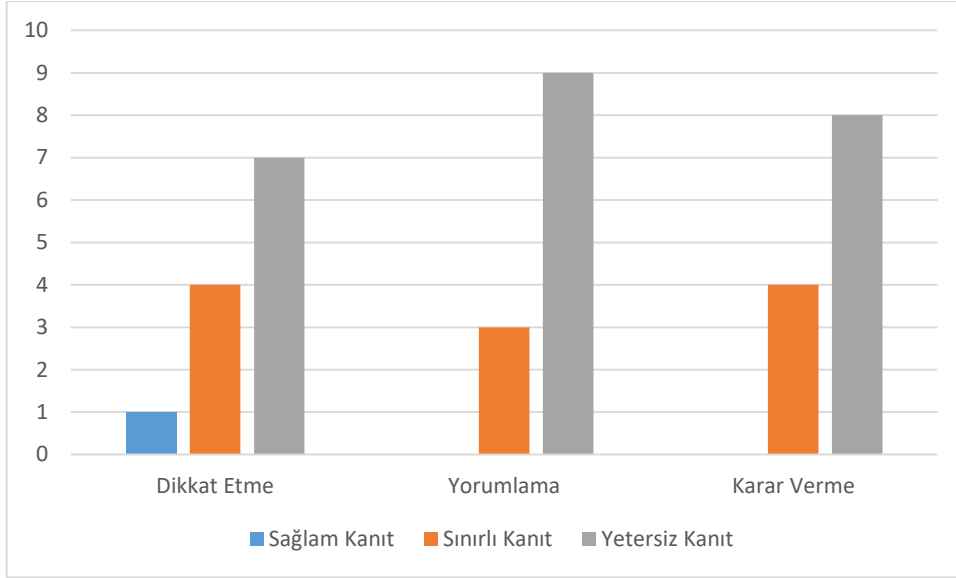
Öğretmen3 ise öğrencinin çözümü ile ilgili yanlış anlayışa dayalı düzeltmede bulunmuştur. Bu sebeple yanıtı yetersiz kanıt düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğretmen3’ün cevabı aşağıda verilmiştir.

“Burada da değer vermiş öğrencimiz doğru sonucu bulmuş sonra da şöyle bir şey söylemiş; toplama işlemi de tıpkı çarpma işlemi gibi sayıların yerlerini değiştirdiğimizde sonuç değişmez ve sonuç aynı kalır, diye söylemiş. Ben burada şunu beklerdim açıkçası acaba buradaki sayıları topladığımızda eldeli olsa ne olurdu acaba, onu görmek isterdim. Bence o kısmı eksik olmuş tam olarak ispat kabul etmezdim.”

Ö5 özelinde öğretmenlerin öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri incelendiğinde Öğretmenlerin hepsinin yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar verdikleri görülmüştür. Öğretmenler kendilerine yöneltilen öğrenciye yanıt verme ile ilgili soruya sadece öğrenciyi takdir ederek cevaplar vermişlerdir. Öğretmen4’ün cevabı aşağıda örnek olarak verilmiştir.

“Öğrencimizi tebrik ederim. Bunu bir ispat olarak kabul edebiliriz.”

Yukarıda elde edilen bulgular sonucunda beşinci sorunun genel bir değerlendirmesi Şekil 20’de gösterilmektedir.



Şekil 20. Beşinci Sorunun Genel Değerlendirmesi

Şekil 20 incelendiğinde öğretmenlerin cevaplarındaki fark etme düzeylerinin tamamında yetersiz kanıt frekansının en yüksek olduğu görülmektedir. Sağlam kanıt düzeyindeki cevaba sadece dikkat etme düzeyinde rastlanmıştır.

Öğretmenlerle yapılan bireysel öğretmen görüşme protokolü genel olarak değerlendirildiğinde Tablo 9 oluşturulmuştur. Öğretmenlerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğrencilerin çözümlerinin incelendiği beş soruda öğretmenler dikkat etme, yorumlama ve karar verme becerileri için toplamda altmışar cevap vermişlerdir. Bu cevapların beceri sınıflandırmalarına göre her bir düzey için yüzdesel dağılımları Tablo 11’de gösterilmektedir.

Tablo 11. Öğretmen Cevaplarının Fark Etme Becerileri Düzeylerine Dağılımı

Fark Etme Becerisi	Beceri Düzeyleri		
	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
Dikkat Etme	7%	42%	51%
Yorumlama	3%	25%	72%
Karar Verme	2%	42%	56%

Tablo 9 incelendiğinde verilen öğretmen cevaplarında fark etme becerilerinin tamamında en yüksek oranların yetersiz kanıt düzeyinde cevaplardan oluştuğu görülmektedir. Ayrıca yetersiz kanıt düzeyindeki cevapların çoktan aza doğru yüzdesel oranlarının öğrenci anlayışlarını yorumlama, öğrenci anlayışlarına dayanarak nasıl yanıt

verileceğine karar verme ve öğrenci stratejilerine dikkat etme olduğu görülmektedir. Sağlam kanıt düzeyindeki öğretmen cevaplarının ise her bir beceri düzeyi için yok denecek kadar az olduğu tespit edilmiştir.



BÖLÜM V

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerinin öğretmenler tarafından fark edilme düzeylerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda öncelikle öğrenci muhakeme ve ispat düzeylerinin belirlenmesi için sekizinci sınıf ortaokul öğrencilerine uygulanmak üzere İspat Testi kullanılmıştır. Yapılan bu testin sonuçları Knuth, Choppin ve Bieda'nın (2009) çalışmasında yer alan muhakeme ve ispat düzeylerine göre analiz edilmiştir. Burada öğrenciler 0.düzye, 1.düzye, 2.düzye ve 3.düzye olarak sınıflandırılmışlardır. Bu sınıflandırmanın sonucunda her düzeyden öğrenci cevapları seçilerek (0.düzye öğrenci cevaplarının büyük bir çoğunluğu boş bırakılmış çok az bir kısmı da doğru yanlış şeklinde cevaplandırıldığı için bu düzey dahil edilmemiştir.) öğretmen bireysel görüşme protokolü aracılığıyla öğretmenlere sunulmuştur. Öğretmenlerin verdikleri cevaplar Jacobs ve ark.'nin (2010) geliştirdikleri ölçeğe göre betimsel olarak analiz edilmiştir. Bu analiz sonucunda öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerine dikkat etme, öğrencilerin matematiksel ispat ve becerilerini yorumlama ve öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerine yönelik karar vermelerine ilişkin bulgular elde edilmiştir.

Öğrencilerin Muhakeme ve İspat Düzeylerine Yönelik Sonuç ve Tartışmalar

Öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerinin öğretmenler tarafından fark edilme düzeylerinin incelendiği bu araştırmada iki alt probleme cevap aranmıştır. Bunlardan birincisi öğrencilerin muhakeme ve ispat becerilerinin hangi düzeyde olduğuna yöneliktir. Bu kapsamda öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat düzeyleri Knuth, Choppin ve Bieda'nın (2009) çalışmasında yer alan muhakeme ve ispat düzeylerine göre 0.düzye, 1.düzye, 2.düzye ve 3.düzye olmak üzere dört düzeyde belirlenmiştir. Beş sorudan oluşan ispat testi aracılığı ile öğrenci cevaplarından elde edilen bu düzeyler incelendiğinde öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat düzeylerini en çok görülen düzeyin 1.düzye, en az görülen düzeyin ise 3.düzye cevaplar olduğu görülmektedir.

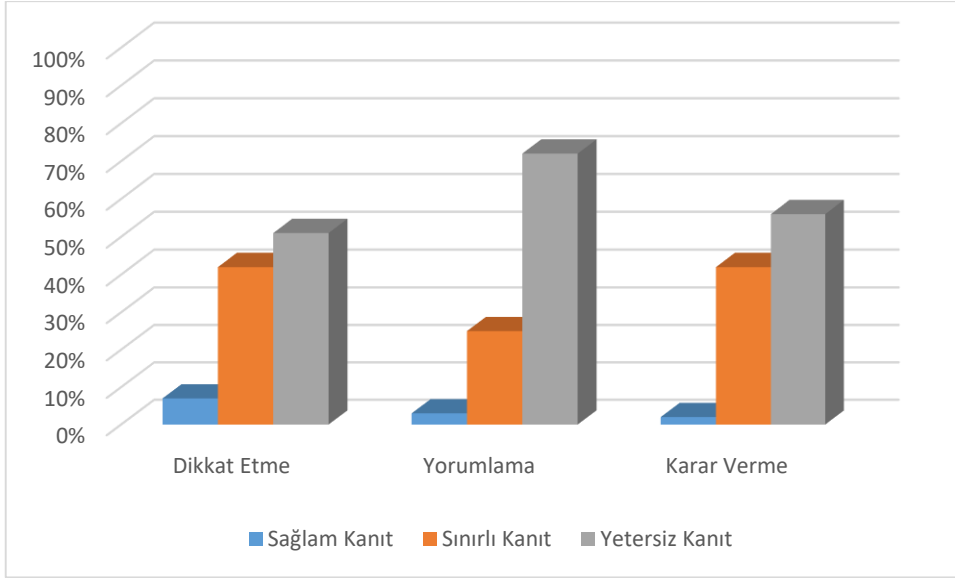
Öğrencilere uygulana İspat Testi incelediğinde, toplam öğrenci cevaplarının %67'sinin 1.düzye cevaplardan oluştuğu (Bkz. Tablo 3) görülmektedir. Bu düzeydeki öğrencilerin önermeleri örnek vererek doğrulama eğiliminde oldukları görülmüştür. Soru

ile hiç uğraşmayan soruyu boş bırakan ya da sadece doğru yanlış şeklinde cevaplar veren öğrenci cevapları tüm öğrenci cevaplarının %24'ünü oluşturan 0.düzy öğrenci cevaplarından oluşmaktadır. Toplam öğrenci cevaplarının %5'lik kısmı önermeleri doğrulamak için genellenebilir bir argüman bulma ihtiyacı hisseden fakat geçerli bir argüman oluşturamayan veya eksik argüman oluşturan 2.düzy öğrenci cevaplarından oluşmaktadır. Tüm cevaplar içerisinde sadece %4' öğrenci cevabı 3.düzyde olup bu düzeydeki öğrenciler istenilen ispatı genellenebilir ve geçerli bir argüman sunarak, başarılı bir ispat yapmışlardır. Bu sonuç literatür de yer alan pek çok araştırma ile (Aylar 2014; Chazan, 1993; Cooper vd., 2011; Çalışkan, 2012; Healy ve Hoyles, 2000; Harel ve Sowder, 1998, Knuth vd., 2012) paralellik göstermektedir.

Öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat düzeyleri incelendiğinde ispat yapmaya çalışan öğrencilerin büyük bir kısmının örnek vererek doğrulamayı tercih etmeleri göz önünde bulundurulursa bu öğrencilerin ispat kavramını tam olarak anlayamadıkları ya da ispat yapmak için başka bir yol bilmedikleri söylenebilir. Örnek vererek doğrulama yapıp ispat yapmadığını ifade eden öğrenci cevapları değerlendirildiğinde ise bu öğrencilerin cebirsel ifadelerden kaçındıkları ve cebri uygulayabilecek kadar hakim olmadıkları çıkarımı yapılabilir.

Öğretmenlerinin Fark Etme Becerilerinin Düzeyleri ile İlgili Sonuç ve Tartışmalar

Araştırmada ikinci problem olarak öğretmenlerin, öğrencilerin yapmış oldukları ispatları fark edebilme düzeyleri araştırılmıştır. Öğretmenlerin fark edebilme düzeylerini belirleyebilmek için Jacobs ve ark. (2010) tarafından yapılan çalışmada yer alan dikkat etme, yorumlama ve nasıl yanıt verileceğine karar verme kategorileri kullanılarak her kategorideki öğretmen cevapları yetersiz kanıt, sınırlı kanıt ve sağlam kanıt olmak üzere üç düzeyde değerlendirilmiştir. Bu çerçeve kullanılarak öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerine dikkat etme, matematiksel muhakeme ve ispat becerilerini yorumlama ve matematiksel muhakeme ve ispat becerilerine yönelik nasıl yanıt verileceğine karar vermelerine yönelik bulgular elde edilmiştir. Tüm öğretmenlerin soruların hepsi için verdikleri cevaplar dahilinde oluşturulan öğretmen farkındalık düzey seviyeleri Şekil 21'de sunulmuştur.



Şekil 21. Öğretmen Farkındalık Düzey Seviyelerine Ait Sonuçlar

Dört öğretmenin öğrencilerin stratejilerine dikkat etme, öğrencilerin anlayışlarını yorumlama ve öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl cevap verileceğine karar verme düzeyleri tüm sorular genelinde değerlendirilmiştir. Öğretmen farkındalık düzeyi oranları her bir beceri için çoktan aza doğru sıralandığında yetersiz kanıt, sınırlı kanıt ve sağlam kanıt düzeyi şeklinde olduğu görülmüştür. Yetersiz kanıt düzeyi oranı en fazla yorumlama becerisinde, en az ise dikkat etme becerisinde görülmüştür. Sınırlı kanıt düzeyi oranları incelendiğinde dikkat etme ve karar verme becerilerinin eşit ve yorumlama becerisinden daha fazla orana sahiptir. Sağlam kanıt düzeyinde ise oranlar çoktan aza doğru dikkat etme, yorumlama ve karar verme becerisi şeklinde sıralanmıştır. Yetersiz kanıtın en az, sağlam kanıtında en fazla olduğu açıklamalar göz önüne alındığında öğretmenlerin yorumlama ve karar verme becerilerine göre dikkat etme becerisinde az da olsa daha fazla farkındalık gösterdikleri söylenebilir.

Öğrencilerin Stratejilerine Dikkat Etme Becerisine Yönelik Tartışma ve Sonuç

Öğrencilerin stratejilerine dikkat etme becerisinde öğretmenlerin çoğunlukla yetersiz kanıt düzeyinde cevaplar verdikleri görülmüştür. Ancak literatürdeki bazı çalışmalarda dikkat etme becerisinde sınırlı kanıt düzeyinin yüksek olduğu (Çetin, 2023; Fernandez, Llinares ve Valls, 2013; Güner ve Akyüz, 2017) görülmektedir. Bu çalışmada dikkat etme düzeyinde yetersiz kanıtların daha fazla olmasının sebebi öğretmenlerin öğrencilerin yaptıkları ispatın doğruluğunu yanlış belirlemeleri olarak söylenebilir. Yani

öğretmenler öğrencilerin ispat yaparken örnek vererek doğrulamalarını çoğunlukla ispat olarak kabul etmişlerdir.

Literatürdeki bazı çalışmalarda öğrencilerin stratejilerine dikkat etme becerisi, öğrencilerin anlayışlarını yorumlama ve öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl yanıt verileceğine karar verme becerileri için ön koşul olarak görülmesine rağmen, (Jacobs vd., 2010; Mouhayar, 2019) dikkat etme becerisindeki her sağlam kanıtın, yorumlama ve karar verme becerilerinde sağlam kanıt elde etmeyi garanti etmediği de görülmektedir (Barnhart ve van Es, 2015; Doğan Coşkun, 2021). Bu çalışmada buna paralellik gösteren bazı bulgulara sahiptir. Örneğin ispat testinde yer alan birinci soruya Ö2'nin verdiği cevabı değerlendirirken Öğretmen1 dikkat etme becerisinde sağlam kanıt sunarken, karar verme becerisinde yetersiz kanıt sunmuştur. Yine başka bir örnekte ispat testinde yer alan dördüncü soruya Ö4'ün verdiği cevabı değerlendiren Öğretmen4 dikkat etme becerisinde sağlam kanıt sunarken yorumlama becerisinde yetersiz kanıt sunmuştur.

Dikkat etme becerisinde öğretmen cevaplarının büyük bir çoğunluğunun öğrenci çözümlerinin doğruluğunu örnek vererek doğrulamayı kabul ederek yanlış belirledikleri göz önüne alındığında bu sonucun öğrenci cevaplarında da benzer şekilde çoğunlukta olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle öğrenciler de bir matematiksel ifadenin ispatını doğrulamaya çalışırken çoğunlukla örnek vererek doğrulamayı kullanmışlar ve ispat yaptıklarını düşünmüşlerdir. Bu sonuca benzer sonuçlara literatürdeki bazı çalışmalarda da rastlanmaktadır (Aylar, 2014; Chazan, 1993; Cooper vd., 2011; Çalışkan, 2012; Healy ve Hoyles, 2000; Harel ve Sowder, 1998, Knuth vd., 2012).

Öğrencilerin Anlayışlarını Yorumlama Becerisine Yönelik Tartışma ve Sonuç

Öğrencilerin anlayışlarını yorumlama becerilerinde ait bulgular incelendiğinde verilen cevapların büyük bir oranının yetersiz kanıt düzeyinde cevaplardan oluştuğu görülmüştür. Öğretmenler genellikle öğrencilerin cevaplarını yorumlamak yerine birebir öğrenci cevaplarını tekrarlama eğilimi göstermişlerdir ve matematiksel olarak öğrencinin kullandığı yöntem ve stratejiyi yorumlamamışlardır. Öğrencinin önermeyi ispatlarken ne düşündüğü ile ilgili herhangi bir yorumda bulunmamışlardır.

Yorumlama becerisindeki yetersiz kanıt düzeyinin dikkat etme becerisinin yetersiz kanıt düzeyindeki cevaplardan daha fazla olduğu göz önüne alındığında

literatürdeki diğer çalışmalara paralel olarak Barnhart ve van Es, 2015; Goldsmith ve Seago, 2011; Sánchez-Matamoros ve ark., 2019) bu araştırmada da bazı öğretmenlerin cevaplarında öğrencilerin çözümlerini doğru belirlemelerine rağmen, çözümleri doğru yorumlayamadıkları ya da çözüm özelinde ilgisiz yorumlar yaptıkları gözlenmiştir. Örneğin ispat testinde yer alan dördüncü soruya Ö4'ün verdiği cevabı değerlendirirken Öğretmen4 dikkat etme becerisinde sağlam kanıt sunarken, yorumlama becerisinde yetersiz kanıt sunmuştur. Bir başka örnekte ispat testinde yer alan ikinci soruya Ö3'ün verdiği cevabı değerlendirirken Öğretmen2 dikkat etme becerisinde sınırlı kanıt sunarken, yorumlama becerisinde yetersiz kanıt düzeyinde cevap sunmuştur.

Bu çalışmada literatürdeki diğer çalışmalardan farklı olarak (Çetin, 2023; Özel, 2019; Taylan, 2015) öğretmenlerin yanlış cevap veren öğrencilerin matematiksel anlayışlarını yorumlama becerilerinin doğru cevabı yorumlama becerilerinden yüksek olmadığı görülmüştür. Bunun sebebi olarak öğrencilerin yanlış yaptığı ispatı doğru olarak kabul edip yorumlamaya çalışan öğretmenlerin yorumlamalarını yanlış bir temele oturttukları söylenebilir.

Öğrencilerin Anlayışlarına Dayanarak Nasıl Yanıt Verileceğine Karar Verme Becerisine Yönelik Tartışma ve Sonuç

Öğrencilerin anlayışlarına dayanarak nasıl yanıt verileceğine karar verme becerisinde öğretmenler en fazla yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar vermişlerdir. Yetersiz kanıt düzeyinde yanıtlar veren öğretmenler genellikle örnek vererek ispat yapmaya çalışan öğrencilere genelde daha fazla örnek vererek cevaplamalarını önermişlerdir. Doğru ispat yapan öğrencilere ise matematiksel olarak herhangi bir yanıt verme yerine öğrenciyi takdir etme yoluna gitmişlerdir. Literatürde buna benzer sonuçlara rastlanmaktadır (Milewski ve Strickland, 2016; Özel, 2019; Taylan, 2018). Öğrencilerin doğru çözümlerine yönelik geri bildirim genellikle doğru cevabı vurgularken, çözüm sürecini ve farklı yaklaşımları göz ardı edebilir. Araştırmalar, öğretmenlerin genellikle yalnızca doğru cevapları övmeye veya takdir etmeye odaklandığını göstermektedir (Crespo, 2002). Ancak, öğretmenlerin rolü, sadece doğru cevapları değil, öğrencilerin düşünme süreçlerini ve stratejilerini anlamak ve geliştirmek olmalıdır (NCTM, 2000). Jacobs ve Ambrose'un belirttiği gibi, öğrencilerin ilk stratejilerini ifade etmeleri ve bu stratejiler üzerine düşünmeleri, gerçek öğrenme için kritik önem taşır (Jacobs ve Ambrose, 2008). Dolayısıyla, öğrencilerin başarılarını takdir etmek önemli olsa da,

öğretmenlerin farklı ve özgün sorularla öğrencilerin anlayışını genişletmeye odaklanmaları gerekmektedir. Bu, sadece bir öğrencinin değil, sınıfın genel anlayışını geliştirmeye yardımcı olabilir.

Karar verme becerisinde sınırlı kanıt düzeyinde öğretmen cevabı azımsanmayacak orandadır. Öğretmenler bu düzeydeki yanıtlarında genel olarak öğrencilere cebirsel ifadeleri kullanmalarına yönelik cevaplar verdikleri fakat öğrencinin neden bir genellemeye ulaşması gerektiğini açıklamadıkları görülmüştür. Literatürde bu sonuca paralel çalışmalar bulunurken (Çetin, 2023), bundan farklı sonuca ulaşan çalışmalarda bulunmaktadır (Milewski ve Strickland, 2016; Özel, 2019).



BÖLÜM VI

ÖNERİLER

Bu çalışma, öğretmenlerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerini fark etme süreçlerini incelemiş ve literatürdeki benzer çalışmalarla birlikte değerlendirmiştir. Bu çalışmada elde edilen bulgular, öğretmen eğitimi programları ve sınıf içi uygulamalar için önemli ipuçları sunmaktadır. Öğretmenlerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerini fark etme süreçlerini geliştirmek için öğretmen eğitimi programlarının içeriğinin ve süreçlerinin gözden geçirilmesi için bir öngörü sunabilir. Ayrıca, farklı öğretim ortamlarında öğretmenlerin fark etme stratejilerini desteklemek için yeni yöntemlerin geliştirilmesine ve kullanılmasına olanak tanıyabilir.

Bu çalışma, öğretmenlerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerini fark etme süreçlerinin karmaşıklığını vurgulayarak, bu alandaki ilerlemeyi teşvik etmek ve eğitimde daha etkili stratejiler geliştirmek adına önemli bir adım olarak değerlendirilebilir.

Öğrencilerin Matematiksel Muhakeme ve İspat Düzeylerinin Geliştirilmesine Yönelik Öneriler

1. İnteraktif ve problem çözme odaklı materyaller geliştirilebilir. Bu materyaller, öğrencilerin mantıksal düşünme ve ispat becerilerini güçlendirecek etkinlikler içerebilir.
2. Sınavlar yerine, öğrencilerin gerçek hayatta karşılaşılabilecekleri problemlere yönelik proje tabanlı veya performans görevlerine dayalı değerlendirme yöntemleri kullanılabilir. Bu şekilde öğrencilerin ispat becerileri daha iyi değerlendirilebilir.
3. Teknoloji tabanlı öğrenme ortamları, öğrencilerin muhakeme ve ispat becerilerini geliştirmelerine yardımcı olabilir. Bu alanda daha fazla araştırma yapılarak etkili dijital araçlar geliştirilebilir.

Öğretmenlerin Farkındalık Düzeylerinin Geliştirilmesine Yönelik Öneriler

1. Matematiksel muhakeme ve ispat becerilerini artırmaya yönelik özel eğitim programları oluşturulabilir. Bu programlar, öğretmenlere bu becerileri öğretme ve değerlendirme konusunda pratik stratejiler sunabilir.

2. Öğretmenler, sınıf içi zamanlarını öğrencilerin pratik yapmasına ve soru sormasına yönelik kullanabilir. Ders dışında öğrencilere sunulan materyallerle, sınıf içi etkileşimli çözümleme ve tartışma süreçleri desteklenebilir.

3. Öğretmenler, öğrencilerin gelişimini izlemek için sürekli geri bildirim sağlayabilirler. Bu, öğrencilerin eksikliklerini anlamalarına ve iyileştirmelerine yardımcı olabilir.

4. Öğretmenler arası çalışma grupları veya toplulukları oluşturulabilir. Bu gruplar, bir araya gelerek en iyi uygulamaları paylaşabilir, deneyimleri tartışabilir ve birbirlerinden öğrenebilirler.

5. Matematik eğitimi üzerine seminerler, konferanslar ve webinarlar düzenlenerek öğretmenlerin bu alandaki en son gelişmeleri ve stratejileri öğrenmeleri sağlanabilir.

6. Okul yönetimi, öğretmenlerin bu becerileri geliştirmelerine destek olmak için kaynakları ve zamanı sağlayabilir. Bu, öğretmenlerin bu alana odaklanmalarını kolaylaştırabilir.

7. Öğretim programları, matematiksel muhakeme ve ispat becerilerine daha fazla vurgu yapacak şekilde güncellenebilir. Bu, öğretmenlere ve öğrencilere bu becerileri geliştirmek için daha fazla fırsat sunabilir.

8. Öğretmenlerin muhakeme ve ispat becerilerini öğretme konusundaki ihtiyaçlarını belirleyecek ve destekleyecek profesyonel gelişim programları oluşturulabilir.

9. Öğretmenlere yönelik rehberlik kaynakları ve materyaller geliştirilebilir. Bu, öğretmenlerin bu becerileri öğretme ve değerlendirme süreçlerinde daha etkili olmalarını sağlayabilir.

Gelecek Araştırmalara Yönelik Öneriler

1. Muhakeme ve ispat becerilerinin sosyal ve psikolojik boyutlarını anlamak için daha derinlemesine araştırmalar yapılabilir. Örneğin, öğrencilerin özgüvenleri veya motivasyonları ile bu beceriler arasındaki ilişki incelenebilir.

2. Kültürel, sosyal ve ekonomik farklılıkların matematiksel muhakeme ve ispat becerileri üzerindeki etkileri üzerine araştırmalar yapılabilir. Bu, daha geniş bir toplumsal perspektif sunabilir.

3. Muhakeme ve ispat becerilerini geliştirmeye yönelik uygulamalı araştırmalar yapılabilir. Bu araştırmalar, sınıf içi uygulamalardan veri toplamayı ve gerçek dünya bağlımlarında etkinliklerin etkisini incelemeyi içerebilir.

4. Öğrencilerin muhakeme ve ispat becerilerindeki gelişimlerini takip etmek için uzun süreli çalışmalar yapılabilir. Bu, becerilerin zaman içinde nasıl değiştiğini anlamak için önemli olabilir.

5. Matematiksel muhakeme ve ispat becerilerini ölçmek için daha doğru, güvenilir ve geçerli lme araçları geliştirilmelidir. Bu, araştırmacıların bu becerilerin ölçümü üzerine çalışmalarını destekler.

KAYNAKÇA

- Aksoy, E. ve Narlı, S. (2019). Öğretim elemanlarının matematiksel ispatın önemine yönelik görüşlerinin incelenmesi. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 47, 134-156.
- Alcock, L. ve Weber, K. (2008). Referential and syntactic approaches to proving: Case studies from a transition-to-proof course. *Research in collegiate mathematics education*, 7, 93-114.
- Almeida, D. (1995). Justifying and proving in the mathematics classroom. *Perspectives-Exeter-*, 53, 52-65.
- Altıntaş, E. ve İlgün, Ş. (2020). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinin belirlenmesi: Kars örnekleme. *Kastamonu Education Journal*, 28(3), 1573-1582.
- Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.
- Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.
- Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi*. Yayımlanmış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En Pimm, D. (Editör), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). Londra: Hodder ve Stoughton.
- Ball, D. L., Hoyle, C., Jahnke, H. N. ve Movshovitz-Hadar, N. (2003). The teaching of proof. *Proceedings of the ICM*, Beijing 2002, vol. 3, 907-922.
- Barnhart, T. ve van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, 45, 83-93.
- Barwell, R. (2005). Language in the mathematics classroom. *Language and Education*, 19(2), 96-101.

- Bayazit, İ. (2017). İspat'ın Önemi Ve İspat Konusundaki Öğretmen Yeterliklerinin İncelenmesi. *Electronic Turkish Studies*, 12(14), 19-40.
- Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351-382.
- Brodie, K. M. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London.
- Brown, S. A. (2014). On skepticism and its role in the development of proof in the classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 86(3), 311-335.
- Buchbinder, O. ve Zaslavsky, O. (2007). How to decide? Students' ways of determining the validity of mathematical statements. In *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 561-570).
- Buchbinder, O. ve Zaslavsky, O. (2009). A framework for understanding the status of examples in establishing the validity of mathematical statements. In *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 225-232). PME.
- Buchbinder, O. ve Zaslavsky, O. (2019). Strengths and inconsistencies in students' understanding of the roles of examples in proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 129-147.
- Bulkova, K., Medova, J. ve Ceretkova, S. (2018). Students' competencies In Mathematical Proofs. In *Edulearn 18. 10th International Conference on Education and New Learning Technology: (Palma, 2nd-4th of July, 2018). Conference proceedings* (pp. 5650-5657). IATED Academy.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2020). *Eğitimde Bilimsel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Pegem Akademi.
- CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof?. *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 33-60.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, 24(4), 359-387.

- Coe, R. ve Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British educational research journal*, 20(1), 41-53.
- Cooper, J., Walkington, C., Williams, C., Akinsiku, O., Kalish, C., Ellis, A. ve Knuth, E. (2011). Adolescent reasoning in mathematics: Exploring middle school students' strategic approaches in empirical justifications. *In Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (Vol. 33, No. 33).
- Crespo, S. (2002). Praising and correcting: Prospective teachers investigate their teacherly talk. *Teaching and Teacher Education*, 18(6), 739-758.
- Creswell, J. W. (2013). *Beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni*. Ankara: Siyasal Yayıncılık.
- Csikos, C. A. (1999). Measuring Students' proving Ability By Means Of Harel And Sowder's Proof-Categorization. *In Proceedings Of The Conference Of The International Group For* (Vol. 100, P. 662).
- Cusi, A. ve Malara, N. (2007). Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions. *In Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 591-600).
- Çalışkan, Ç. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi. Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- Çetin, H. (2023). *Matematik Öğretmenlerinin Öğrenci Düşüncelerini Fark Etme Becerilerinin Örüntü Genellemesi Konusunda İncelenmesi*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi. Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Tokat.
- Çiltaş, A. ve Yılmaz, K. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının teoremlerin ifadeleri için kurmuş oldukları matematiksel modeller. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(2), 107-115.
- Çokyaşa, M. Ç. (2020). *Matematik öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin muhakeme–ispatlama çerçevesi ve üstbiliş bağlamında incelenmesi* (Master's thesis, Eğitim Bilimleri Enstitüsü).

- Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalar*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Denizli.
- Çontay, E. G. ve Duatepe-Paksu, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları ortaya koyan ifadelerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(1), 59-100.
- Dane, A. (2008). İlköğretim matematik 3.sınıf öğrencilerinin tanım, aksiyom ve teorem kavramlarını anlama düzeyleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 16(2), 495-506.
- De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. *Rethinking proof with Sketchpad*, 3-10.
- Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). A pedagogical perspective concerning the concept of mathematical proof: A theoretical study. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences*, 4(2), 47-71.
- Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının "sözsüz ispatlar" ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 81-99.
- Dickerson, D. S. (2008). *High school mathematics teachers' understandings of the purposes of mathematical proof*. Syracuse University.
- Doğan Coşkun, S. (2021). Sınıf öğretmeni adayları öğrencilerin yazılı çözümlerindeki cebirsel düşünme biçimlerini nasıl fark etmektedir? *Journal of Qualitative Research in Education*, 27, 103-124.
- Doruk, M. ve Güler, G. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 71-93.
- Doruk, M., Özdemir, F. ve Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz-yeterlik algıları arasındaki ilişki. *Kastamonu Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 861-874

- Doruk, M. ve Kaplan, A. (2015). Prospective Mathematics Teachers' difficulties In Doing Proofs And Causes Of Their Struggle With Proofs. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(2), 315-328.
- Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Springer, Dordrecht.
- Dreyfus, T., Nardi, E. ve Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classroom. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 191-213). Springer, Dordrecht.
- Ekiz, D. (2009). *Bilimsel araştıma yöntemleri. (2. Baskı)*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Eldekci, S. (2018). Matematik eğitimi öğretmen adaylarının kanıt şemalarının ortaya çıkarılması. *Eğitim Bilimleri Dergisi*, 9(2), 119-136.
- Ellis, A. B., Lockwood, E., Dogan, M. F., Williams, C. C., ve Knuth, E. (2013). Choosing and using examples: How example activity can support proof insight. In *Proceedings of the 37th Conference of the International* (pp. 2-265).
- Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10), 886-899.
- Epp, S. S. (2016). The role of proof in problem solving. In *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 257-286). Routledge.
- Fernández, C., Llinares, S. ve Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 441-468.
- Ferrari, P. L. (2004). Mathematical Language and Advanced Mathematics Learning. *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2 pp 383-390).
- Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true?. *Teaching Children Mathematics*, 8(5), 269-274.
- Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true?. *School science and mathematics*, 106(3), 124-132.

- Gamoran Sherin, M. ve Van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of teacher education*, 60(1), 20-37.
- Gellert, U. (2000). Mathematics instruction in safe space: Prospective elementary teachers' views of mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(1), 251-270.
- Giannakoulis, E., Mastorides, E., Potari, D. ve Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(3), 160-168.
- Gibbs, G. R. (2007). Thematic coding and categorizing. *Analyzing qualitative data*, 703, 38-56.
- Goldsmith, L. T. ve Seago, N. (2011). Using classroom artifacts to focus teachers' noticing affordances and opportunities. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs ve R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers eyes* (pp. 169-187). Routledge.
- Goldsmith, L. T. ve Seago, N. (2013). *Examining mathematics practice through classroom artifacts*. New Jersey: Pearson.
- Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.
- Griffiths, P. A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *The American Mathematical Monthly*, 107(1), 1-14.
- Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmenleri adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571 – 590.
- Güner, P. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul
- Güner, P. ve Akyüz, D. (2017a). Ders imecesi mesleki gelişim modeli: öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin incelenmesi. *İlköğretim Online*, 16(2), 428452.
- Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the learning of mathematics*, 9(1), 20-23.

- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, 44(1), 5-23.
- Hanna, G. (2002). Mathematical proof. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Springer, Dordrecht.
- Hanna, G. (2018). Reflections on proof as explanation. In *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 3-18).
- Hanna, G. ve De Villiers, M. (2012). *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (p. 475). Springer Nature.
- Harel, G. ve Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, 7, 234-283.
- Harel, G. ve Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 805-842.
- Healy, L. ve Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education*, 31(4), 396-428.
- Heinze, A. ve Reiss, K. (2003, June). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italy.
- Herbst, P., Miyakawa, T. ve Chazan, D. (2010). *Revisiting the functions of proof in mathematics classrooms: A view from a theory of instructional exchanges*. Deep Blue at the University of Michigan. <http://hdl.handle.net/2027.42/78168>
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.
- Housman, D. ve Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 139-158.

- Iannone, P., Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P., Simpson, A. ve Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production?. *Educational studies in Mathematics*, 77(1), 1-14.
- Inglis, M. ve Mejia-Ramos, J. P. (2009). The effect of authority on the persuasiveness of mathematical arguments. *Cognition and Instruction*, 27(1), 25-50.
- J.Davis, P. ve Hersh, R. (1982). *The Mathematical Experience*. Houghton Mifflin Company Boston.
- Jacobs, V. R. ve Ambrose, R. C. (2008). Making the most of story problems. *Teaching children mathematics*, 15(5), 260-266.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. ve Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for research in mathematics education*, 41(2), 169-202.
- Jeannotte, D. ve Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.
- Karakuş, F., Erşen, Z. B. ve Ocak, G. (2017). Matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat yapma düzeylerinin incelenmesi. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 10(Özel Sayı 2), 247-265.
- Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports and Science Education*, 1(2), 134-141
- Knuth, E. J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *The Mathematics Teacher*, 95(7), 486-490.
- Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, 33(5), 379-405.
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of mathematics teacher education*, 5(1), 61-88.

- Knuth, E. J., Choppin, J. M. ve Bieda, K. N. (2010). Middle school students' production of mathematical justifications. In *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 153-170).
- Knuth, E., Zaslavsky, O. ve Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53 (2019), 256-262.
- Ko, Y. Y. ve Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 68-77.
- Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), 1-10.
- Komatsu, K. (2017). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 129-144.
- Köğçe, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın matematik öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. *Turkish Studies*, 8(12), 766-776
- LeCompte, M.D. ve Goetz, J.P. (1982). Problems of reliability and validity in ethnographic research. *Review of Educational Research*, 52, 31-60.
- Lincoln, Y. S. ve Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Liu, Y. ve Manouchehri, A. (2013). Middle school children's mathematical reasoning and proving schemes. *Investigations in Mathematics Learning*, 6(1), 18-40.
- Maher, C. A. ve Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194-214.
- Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. ve Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124.
- Martinez, M.V. ve Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational studies in mathematics*, 86(1), 125-149.

- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Taylor & Francis e-Library, London: Routledge Falmer.
- Mason, J. (2017). Relationships between proof and examples: Comments arising from the papers in this issue. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, s. 339-347.
- Mata-Pereira, J. ve Da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186.
- McDuffie, A. R., Foote, M. Q., Bolson, C., Turner, E. E., Aguirre, J. M., Bartell, T. G. ve Land, T. (2014). Using video analysis to support prospective K-8 teachers' noticing of students' multiple mathematical knowledge bases. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(3), 245-270.
- Mcmillan, J.H. ve Schumacher, S. (2001). *Research in education: A conceptual introduction*. (5th edition). New York: Addison Wesley Longman.
- Mejía-Ramos, J. P. ve Weber, K. (2020). Using task-based interviews to generate hypotheses about mathematical practice: mathematics education research on mathematicians' use of examples in proof-related activities. *ZDM*, 52, 1099-1112.
- Merriam, S. B. (1990a). *Qualitative research and case study applications in education*, San Francisco: Jossey-Bass.
- Milewski, A. ve Strickland, S. (2016). (Toward) developing a common language for describing instructional practices of responding: *A teacher-generated framework*. *Mathematics Teacher Educator*, 4(2), 126-144.
- Mills, M. (2014). A framework for example usage in proof presentations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 106-118.
- Miyazaki, M., Fujita, T., Jones, K. ve Iwanaga, Y. (2017). Designing a web-based learning support system for flow-chart proving in school geometry. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 3(3), 233-256.
- Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the learning of mathematics*, 11(3), 20-24.

- Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*. 27, 249-266.
- Moralı, S., Uğurel, I, Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147–160
- Mouhayar, R. (2019). Exploring teachers' attention to students' responses in pattern generalization tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(6), 575-605.
- Nardi, E., Biza, I. ve Zachariades, T. (2012). 'Warrant'revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 157-173.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Learning mathematics for a new century (2000 Yearbook)*. NCTM.
- NTCM. (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics Publication.
- Osmanoğlu, A., Işıksal, M. ve Koç, Y. (2012). Öğretmen adaylarının ilköğretim matematik programında vurgulanan öğrenci rolleri üzerine fark ettikleri noktalar: Video örnek olay kullanımı. *Eğitim ve Bilim*, 37(165).
- Ozan, P. ve Narlı, S. (2018). Matematik öğretmen adaylarının sayılabilirlik kavramına yönelik ispat şemalarının incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 12(2), 136-166.
- Özdemir, F. ve Kaplan, A. (2014). Öğretmen adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3(2), 410-429.
- Özel, Z. (2019). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerini fark etme becerilerinin örüntü genelleme bağlamında incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Özkaya, M., Işık, A. ve Konyalıoğlu, A. C. (2014). İlköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin sürekli fonksiyonlarla ilgili ispatlama ve ters örnek oluşturma

- performansları. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, 11(1), 26-42.
- Öztürk, M. ve Kaplan, A. (2019). Cebirsel ispat yapma sürecinin bilişsel açıdan incelenmesi: Bir karma yöntem araştırması. *Eğitim ve Bilim*, 44(197), 25-64.
- Pala, O. ve Narlı, S. (2018). Matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatlama yaklaşımları ve yaşadıkları güçlükler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 9(3), 449-475
- Pedemonte, B. ve Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*, 43(2), 257-267.
- Pekşen-Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Pektaş, O. ve Bilgici, G. (2019). Matematik öğretmen adaylarının trigonometri konusunda kullandıkları kanıt şemalarının öğrenme stillerine göre incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 27(3), 1348-1358.
- Polat, K. ve Akgün, L. (2019). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat kavramına ve ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşleri. *The Journal Of Academic Social Science Studies*, 2(43), 423-438.
- Polat, K., Oflaz, G. ve Akgün, L. (2019). Görsel ispat becerisinin, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal yetenek ile ilişkisi. *Erciyes Eğitim Dergisi*, 3(2), 105-122.
- Potari, D., Zachariades, T. ve Zaslavsky, O. (2010). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims. *Proceedings of CERME6*, 281-290.
- Reid, D. ve Vargas, E. V. (2018). When is a generic argument a proof?. In *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 239-251). Springer, Cham.
- Robinson, J. A. (2000). Proof= guarantee+ explanation. In *Intellectics and computational logic* (pp. 277-294). Springer, Dordrecht.

- Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 105(3), 252-255.
- Rota, G. C. (1997). *The phenomenology of mathematical proof*. Springer Book Archive Birkhäuser, Boston, MA.
- Rumsey, C., Guarino, J., Gildea, R., Cho, C. Y. ve Lockhart, B. (2019). Tools to support K–2 students in mathematical argumentation. *Teaching children mathematics*, 25(4), 208-217.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. ve Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 100(1), 83-99.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. ve Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International journal of science and mathematics education*, 13(6), 1305-1329.
- Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 295–319.
- Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J. ve Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(5), 379-397.
- Selden, A. ve Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- Snow, C. E. ve Uccelli, P. (2009). The challenge of academic language. *The Cambridge handbook of literacy*, 112, 133.
- Steele, M. D. ve Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 159-180.

- Stylianides A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.
- Stylianides, G. J. ve Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314-352.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L. ve Knuth, E. J. (2009). *Teaching and learning proof across the grades*. New York: Routledge.
- Stylianou, D., Chae, N. ve Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 54-60).
- Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 365-378.
- Tall, D. (2009). The development of mathematical thinking: problem-solving and proof. In *Mathematical Action & Structures of Noticing* (pp. 15-29). Brill.
- Taylan, R. D. (2015). Yeni öğretmenlerin öğrenci düşüncelerine gösterdiği dikkat. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(4), 1495-1510.
- Taylan, R. D. (2018). The relationship between pre-service mathematics teachers' focus on student thinking in lesson analysis and lesson planning tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(2), 337-356.
- Thompson, D. R. (2014). Reasoning-and-proving in the written curriculum: Lessons and implications for teachers, curriculum designers, and researchers. *International Journal of Educational Research*, 64, 141-148.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.

- Turan, İ. (2019). *Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerinin ve argüman tercihlerinin incelenmesi* (Master's thesis, Eğitim Bilimleri Enstitüsü).
- Turgut, M., Yenilmez, K. ve Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(13), 227-252.
- Tymoczko, T. (1986). Making room for mathematicians in the philosophy of mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, 8(3), 44-50.
- Uğurel, I. ve Moralı, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 134-154.
- Uygan, C., Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(2), 137-157.
- Van Es, E. A. (2009). Participants' roles in the context of a video club. *The Journal of the Learning Sciences*, 18(1), 100-137.
- Walkoe, J. (2015). Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(6), 523-550.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101-119.
- Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(2-3), 200-208.
- Weber, K. ve Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, 56(2), 209-234.
- Yıldırım, A ve Şimşek, H. 2013. *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin yayıncılık.

- Yılmaz, T. Y. ve Yavuzsoy, N. K. (2021). Ortaokul Öğrencileri Kanıt Yapabilir mi? *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, 11(2), 852-880.
- Yopp, D. A. (2015). Prospective elementary teachers' claiming in responses to false generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 79-99.
- Zazkis, R. ve Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, 68(3), 195-208.
- Zeybek-Şimşek, Z. ve Üstün, A. (2019). 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 13(1), 196-216.



EKLER**Ek 1. İspat Testi Soruları**

Sevgili Öğrenci,

Öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerinin öğretmenler tarafından fark edilme düzeyleri hakkında bilgi toplamak amacıyla beş adet matematiksel ispat sorusu hazırlanmıştır.

Bu çalışmadan elde edilecek veriler yüksek lisans tezinde kullanılacak olup şahsınıza ait hiçbir bilgiye yer verilmeyecektir. Soruları lütfen dikkatle ve özenle yanıtlamaya çalışınız. Katılımınız için teşekkür ederim.

Adınız ve Soyadınız:

1) “*Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır.*” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

1a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

2) “*İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.*” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

2a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

3) “*Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp bu çarpıma 3 eklenirse 6’nın katı olan bir sayı elde edilir.*” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

3a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

4) “*Bir tek ve bir çift sayı toplandığında her zaman tek sayı elde edilir.*” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

4a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

5) “*ab, ba, aa ve bb iki basamaklı sayılar olsun. Bu durumda $ab + ba = aa + bb$ dir.*” Sizce bu ifade doğru mudur? İfadenin doğruluğunu / yanlışlığını nasıl ispatlarsınız?

5a) Yukarıdaki ifadeyi ispatladığınızı düşünüyor musunuz? Nedenleri ile birlikte açıklayınız.

Ek 2. Öğretmen Bireysel Görüşme Protokolü

Sevgili Öğretmen,

Öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat becerilerinin öğretmenler tarafından fark edilme düzeyleri hakkında bilgi toplamak amacıyla beş adet matematiksel ispat sorusu hazırlanmıştır.

Bu çalışmadan elde edilecek veriler yüksek lisans tezinde kullanılacak olup şahsınıza ait hiçbir bilgiye yer verilmeyecektir. Soruları lütfen dikkatle ve özenle yanıtlamaya çalışınız. Katılımınız için teşekkür ederim.

Adınız ve Soyadınız:

Soru 1

- a) Öğrencinin “*Ardışık 3 sayının toplamı, ortadaki sayının 3 katıdır.*” Sorusunu nasıl çözdüğünü düşünüyorsunuz? Ayrıntılı olarak açıklayınız.
- b) Öğrencinin çözüm yolunu inceleyerek, öğrencinin kullandığı kavramlar ve öğrencinin seçtiği yöntem hakkında ne söyleyebilirsiniz? Sizce seçilen yöntem uygun mu? Neden? Öğrencinin ifadeyi ispatladığını düşünüyor musunuz? Ayrıntılı olarak açıklayınız.
- c) Öğrencinin öğretmeni olduğunuzu farz edin ve öğrenciye yanıt verebileceğiniz bazı yolları tanımlayın. Ve neden bu yanıtları seçtiğinizi açıklayınız.

Soru 2

- a) Öğrencinin “*İki tek sayının toplamı her zaman çift sayıdır.*” Sorusunu nasıl çözdüğünü düşünüyorsunuz? Ayrıntılı olarak açıklayınız.
- b) Öğrencinin çözüm yolunu inceleyerek, öğrencinin kullandığı kavramlar ve öğrencinin seçtiği yöntem hakkında ne söyleyebilirsiniz? Sizce seçilen yöntem uygun mu? Neden? Öğrencinin ifadeyi ispatladığını düşünüyor musunuz? Ayrıntılı olarak açıklayınız.
- c) Öğrencinin öğretmeni olduğunuzu farz edin ve öğrenciye yanıt verebileceğiniz bazı yolları tanımlayın. Ve neden bu yanıtları seçtiğinizi açıklayınız.

Soru 3

- a) Öğrencinin “*Herhangi bir tek sayıyı 3 ile çarpıp bu çarpıma 3 eklenirse 6’nın katı olan bir sayı elde edilir.*” Sorusunu nasıl çözdüğünü düşünüyorsunuz? Ayrıntılı olarak açıklayınız.
- b) Öğrencinin çözüm yolunu inceleyerek, öğrencinin kullandığı kavramlar ve öğrencinin seçtiği yöntem hakkında ne söyleyebilirsiniz? Sizce seçilen yöntem uygun mu? Neden? Öğrencinin ifadeyi ispatladığını düşünüyor musunuz? Ayrıntılı olarak açıklayınız.
- c) Öğrencinin öğretmeni olduğunuzu farz edin ve öğrenciye yanıt verebileceğiniz bazı yolları tanımlayın. Ve neden bu yanıtları seçtiğinizi açıklayınız.

Soru 4

- a) Öğrencinin “*Bir tek ve bir çift sayı toplandığında her zaman tek sayı elde edilir.*” Sizce bu ifade doğru mudur? Sorusunu nasıl çözdüğünü düşünüyorsunuz? Ayrıntılı olarak açıklayınız.
- b) Öğrencinin çözüm yolunu inceleyerek, öğrencinin kullandığı kavramlar ve öğrencinin seçtiği yöntem hakkında ne söyleyebilirsiniz? Sizce seçilen yöntem uygun mu? Neden? Öğrencinin ifadeyi ispatladığını düşünüyor musunuz? Ayrıntılı olarak açıklayınız.
- c) Öğrencinin öğretmeni olduğunuzu farz edin ve öğrenciye yanıt verebileceğiniz bazı yolları tanımlayın. Ve neden bu yanıtları seçtiğinizi açıklayınız.

Soru 5

- a) Öğrencinin “*ab, ba, aa ve bb iki basamaklı sayılar olsun. Bu durumda $ab + ba = aa + bb$ dir.*” Sorusunu nasıl çözdüğünü düşünüyorsunuz? Ayrıntılı olarak açıklayınız.
- b) Öğrencinin çözüm yolunu inceleyerek, öğrencinin kullandığı kavramlar ve öğrencinin seçtiği yöntem hakkında ne söyleyebilirsiniz? Sizce seçilen yöntem uygun mu? Neden? Öğrencinin ifadeyi ispatladığını düşünüyor musunuz? Ayrıntılı olarak açıklayınız.
- c) Öğrencinin öğretmeni olduğunuzu farz edin ve öğrenciye yanıt verebileceğiniz bazı yolları tanımlayın. Ve neden bu yanıtları seçtiğinizi açıklayınız

Ek 3. Veli Onay Formu

Sayın Veli;

Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, “Öğrencilerin Matematiksel Muhakeme Ve İspat Becerilerinin Öğretmenler Tarafından Fark Edilme Düzeylerinin İncelenmesi” adıyla, 01/01/2023- 31/08/2023 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: Bu çalışmada ortaokul düzeyindeki öğrencilerin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerinin öğretmenler tarafından farkedilme seviyelerinin araştırılması amaç edinilmiştir.

Araştırma Uygulaması: Anket şeklindedir.

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı’nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleştirilmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı **tamamen sizin isteğinize bağlıdır**, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir.

Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı : Fatih DEMİR

İletişim bilgileri :

*Velisi bulunduğum sınıfı numaralı öğrencisi
.....’in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum.
(Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla okula geri gönderiniz*).*

..../..../.....

İsim-Soyisim İmza:

Veli Adı-Soyadı :

Telefon Numarası :

Ek 4. Katılımcı Onay Formu

Sayın Katılımcımız

Katılacağınız bu çalışma, “Öğrencilerin Matematiksel Muhakeme Ve İspat Becerilerinin Öğretmenler Tarafından Fark Edilme Düzeylerinin İncelenmesi” adıyla, Fatih DEMİR tarafından 01/01/2023- 31/08/2023 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: Bu çalışmada ortaokul düzeyindeki öğrencilerin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerinin öğretmenler tarafından farkedilme seviyelerinin araştırılması amaç edinilmiştir.

Araştırmanın Nedeni: O Bilimsel araştırma X Tez çalışması

Araştırmanın Yapılacağı Yer(ler): Ali Durmaz Ortaokulu

Araştırma Uygulaması: X Anket

X Görüşme

O Gözlem

O.....

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı’nın ve okul/kurum yönetiminin izni ile gerçekleştirilmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çalışmada sizden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir. Veriler sadece araştırmada kullanılacak ve üçüncü kişilerle paylaşılmayacaktır.

Uygulamalar, kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden rahatsız hissederseniz cevaplama işini yarıda bırakabilirsiniz.

Katılımı onaylamadan önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı : Fatih DEMİR

İletişim Bilgileri :

Yukarıda bilgileri bulunan araştırmaya katılmayı kabul ediyorum.

..../..../.....

İsim-Soyisim İmza:

Katılımcı Adı-Soyadı :

Telefon Numarası :

Ek 5. Araştırma İzni

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ARAŞTIRMALARI
ETİK KURULU KARARLARI

KARAR TARİHİ	OTURUM NO	KARAR SAYISI
29.12.2022	16	01-60

Üniversitemiz Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırmaları Etik Kurul Başkanı Prof. Dr. Eren YÜRÜDÜR başkanlığında toplandı.

KARAR 16.42- Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğünün 05.12.2022 tarih ve 236396 sayılı yazısı görüşüldü.

Aşağıda bilgileri yer alan araştırmacıların yapmak istediği uygulamaların ve kullanacağı veri toplama araçlarının etik açıdan uygunluğuna oy birliği ile karar verildi.

ÇALIŞMANIN TÜRÜ	Yüksek Lisans Tezi
BAŞLIK	Öğrencilerin Matematiksel Muhakeme ve İspat Becerilerinin Öğretmenler Tarafından Fark Edilme Düzeylerinin İncelenmesi
TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ/ YAZARI	Fatih DEMİR (Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı)
RAPORTÖR GÖRÜŞÜ	OLUMLU

Prof. Dr. Eren YÜRÜDÜR
Etik Kurul Başkanı
(İmza)

Doç. Dr. Mehmet KARGÜN
Başkan Yardımcısı
(İmza)

Prof. Dr. Mehmet Serkan UMUZDAŞ
Üye
(İmza)

Doç. Dr. Emine ÖĞÜK
Üye
(İmza)

Doç. Dr. Yücel EROL
Üye
(İmza)

Doç. Dr. Fatih YAZICI
Üye
(İmza)

Dr. Öğr. Üyesi Şevki BABACAN
Üye
(İmza)

Ek 6. Araştırmacı Özgeçmişi**ÖZGEÇMİŐ**