

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

MİNİMUM AÇISAL HIZLI HAREKETLER

Murat AKSAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

MİNİMUM AÇISAL HIZLI HAREKETLER

Murat AKSAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış ve tez konusu hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan ön bilgiler ve bazı kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında minimum açısız hızlı çatı (RMF) yardımıyla yörünge küresel eğri olan minimum açısız hızlı hareketlerin (RMM) belirlenmesinde B.JÜTTLER, “Rotating Minimizing Spherical Motions” adlı çalışmasında kuaterniyonları kullanmıştır. Yörünge eğrilerinin özel seçilmesi halinde kuaterniyonik helislerin nasıl elde edileceği araştırılmıştır. Bu bölümün son kısmında ise minimum açısız hızlı hareketlerin uygulamasına yer verilmiştir .

Dördüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında minimum açısız hızlı hareketler için elde edilen sonuçlar 3-boyutlu Minkowski uzayında da incelenmiş ve benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise tezdten elde edilen sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

Ocak 2024, 69 sayfa

Anahtar Kelimeler: Küresel Hareket, Uzay Hareketi, Minimum açısız hızlı hareket, Açısız Hız, Kuaterniyonlar, Kuaterniyonik Helis Eğrileri.

ABSTRACT

PhD Thesis

MOTIONS WITH MINIMUM ANGULAR VELOCITY

Murat AKSAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction and general information about the subject of the thesis.

In the second chapter, preliminaries and some definitions that will be needed for other sections of the thesis are given.

In the third chapter, in 3-dimensional Euclidean space, it is given the structure of the motion RMM with the spherical curve orbit by using rotation minimizing frames (RMF). For the determinates of these motions, in "Rotation Minimizing Spherical Motions" by B. JÜTTLER, quaternions have been used. How to obtain quaternionic helices if orbital curves are chosen specifically has been investigated. In the last part of this chapter, an application is given for the Rotation minimizing motion.

In the fourth chapter, the results obtained for rotation minimizing motions in 3-dimensional Euclidean space are also examined in 3-dimensional Minkowski space and similar results are obtained.

In the fifth chapter, the results which are obtained from the thesis and some proposals are given.

January 2024, 69 pages

Key Words: Spherical Motions, Space Motions, Rotation Minimizing Motions, Angular Velocity, Quaternions, Quaternionic Helices.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında katkılarını hiçbir zaman esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle her zaman yanımda olan, araőtırma konularında her daim beni motive eden değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniöersitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya, destekleriyle her zaman yanımda olan değerli tez izleme kurulu üyesi olan hocalarım Sayın Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniöersitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Sayın Prof. Dr. Murat BEKAR (Gazi Üniöersitesi Matematik Eęitimi Anabilim Dalı)'a sonsuz teőekkürlerimi sunarım. Bu süreçte bilgi ve tecrübeleriyle bana katkıda bulunan Alper ÇAY ve Derya KAHVECİ'ye teőekkürü bir borç bilirim. Bütün hayatım boyunca beni yetiőtiren, haklarını hiçbir zaman ödeyemeceğim sevgili anne ve babama en içten teőekkürlerimi sunarım. Son olarak yine bu zorlu süreçte gösterdiği her türlü fedakarlık ve sabırdan dolayı sevgili eőtım Ayőegöl AKSAR'a sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Murat AKSAR
Ankara, Ocak 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	4
2.1 Öklid Uzayı için Temel Tanım ve Kavramlar.....	4
2.2 Lorentz Uzayı için Temel Tanım ve Kavramlar.....	9
2.3 Kuaterniyonlar ile ilgili Temel Tanım ve Kavramlar.....	14
3. \mathbb{R}^3 ÖKLİD UZAYINDA MİNİMUM AÇISAL HIZLI HAREKET	21
3.1 Minimum Açısız Hızlı Hareketin (RMM) İnşası	21
3.2 Küresel Hareket ve Kuaterniyonik Helisler	25
3.3 Minimum Açısız Hızlı Hareket ve Kuaterniyonik Helisler.....	36
4. \mathbb{E}_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA MİNİMUM AÇISAL HIZLI HAREKET ...	41
4.1 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Split Kuaterniyonlar ile Dönme Dönüşümü	41
4.2 \mathbb{E}_1^3 Minkowski Uzayında Minimum Açısız Hızlı Hareketin (RMM) İnşası ...	50
4.2.1 S_1^2 Üzerinde Minimum Açısız Hızlı Hareket.....	50
4.2.2 \mathbb{H}_0^2 Üzerinde Minimum Açısız Hızlı Hareket.....	56
4.3 \mathbb{E}_1^3 Minkowski Uzayında Küresel Hareket ve Kuaterniyonik Helisler.....	59
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	65
KAYNAKLAR.....	66
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}^3	3-boyutlu Öklid uzayı
\mathbb{R}^4	4-boyutlu Öklid uzayı
\langle , \rangle	Öklid iç çarpım
$\ \cdot \ $	Norm
\langle , \rangle_L	Lorentzian iç çarpım
\times	Vektörel çarpımı
\times_L	Lorentzian vektörel çarpım
S^2	Birim küre
$\mathbb{H}_0^2(r)$	Hiperbolik küre
$\mathbb{S}_1^2(r)$	Pseudo küre
\mathbb{L}	Işık konisi
\mathbb{E}_1^3	Minkowski 3-uzayı
\mathbb{H}	Reel kuaterniyonlar kümesi
$\widehat{\mathbb{H}}$	Split kuaterniyonlar kümesi
k_g	Geodezik eğrilik
κ	Eğrilik fonksiyonu
τ	Burulma fonksiyonu
$\vec{\omega}$	Darboux vektörü
$SO(3)$	Dönme matrislerinin kümesi
$SO(3, 1)$	Lorentziyen dönme matrislerinin kümesi

Kısaltmalar

RMF	Minimum açısal hızlı çatı
RMM	Minimum açısal hızlı hareket
CCR	Sabit eğrilikli oran eğrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	(a) RMF kullanılarak modellenen bir yılan. (b) Küresel bir eğrinin RMF gösterimi	2
Şekil 2.1	$\mathbb{H}_0^2(r)$ Hiperbolik küre, $\mathbb{S}_1^2(r)$ Pseudoküre, \mathbb{L} Işık konisi	10
Şekil 2.2	Split kuaterniyon çarpımı	17
Şekil 3.1	C.C.R eğrisinin projeksiyon görüntüsü	40
Şekil 4.1	C.C.R eğrisinin projeksiyon görüntüsü	64



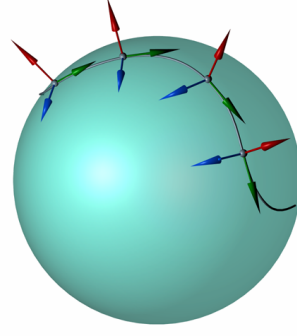
1. GİRİŞ

Hareketler, kinematikte özellikle robot kinematiğinde önemli bir yere sahiptir. Robot hareketlerinin minimum açısal hızla verilmesi kolaylık sağlamaktadır. Bu yüzden bununla ilgili yapılan çalışmalarda ilk olarak minimum açısal hızlı çatı (RMF) ön plana çıkmaktadır. minimum açısal hızlı çatı, bilgisayar destekli tasarımlarda, robotik hareketlerde ve süpürülen yüzey modellemelerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Uzay eğrilerinde minimum açısal hızlı çatı (RMF), ilk olarak 1975 yılında Bishop tarafından ortaya konulmuştur. Frenet çatısına alternatif çatı olarak geliştirilmiştir. Daha sonra Klok, minimum açısal hızlı çatıyı yaklaşık olarak hesaplamak için projeksiyon metodunu kullanmıştır. Wang ve arkadaşları, 3-boyutlu uzayda bir eğrinin RMF'sini doğru ve kararlı bir şekilde hesaplayabilmek için yeni, basit ve etkili bir yöntem sunmuşlardır. Tam bir RMF'ye yaklaşmak için çatıların bir dizisini oluşturan ve kendisinden önce gelen her çatıyı elde eden bu yöntem double yansıma metodu denilmektedir. RMF ayrıca, hareketli bir hedefi takip eden hareketli bir kameranın kararlı hareketinin tasarlanması problemi ile de yakından ilgilidir. Burada kamerayı ve hedefi bağlayan vektör etrafındaki rotasyonun, kamera hareketi sırasında olası koşullara bağlı olarak en aza indirilmesi gerekir. minimum açısal hızlı çatı kullanılarak modellenen bir yılan örneği ve küresel bir eğri üzerinde minimum açısal hızlı çatı şekil 1.1'de gösterilmiştir. (Klok 1986, Wang vd. 2008, Jüttler 1998, Bishop 1975, Goemans ve Overmars 2005).

Son zamanlarda, geometrik tasarım konusunda da RMF'nin önemi artmıştır. Bu konuyla ilgili çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Onlardan bazılarını kısaca ifade edelim. Jüttler, kuaterniyonları kullanarak RMF yaklaşımı için bir metod geliştirmiştir. Bu çalışmada, verilen bir küresel yörünge eğrisi için, olası küresel hareketler arasında minimum açısal hızlı hareket olma durumu sorgulanmıştır. Eğer küresel yörünge eğrisi, eğrinin birim teğeti tarafından üretiliyorsa, o zaman sonuç olarak hareket eğrinin RMF'si olacaktır. minimum açısal hızlı hareketin bir karakterizasyonu açısal hızlarına göre verilmektedir. Açısal hızın minimum olması durumunda küresel hareket, minimum açısal hızlı hareket (RMM) olarak adlandırılmaktadır.



(a)



(b)

Şekil 1.1 (a) RMF kullanılarak modellenen bir yılan. (b) Küresel bir eğrinin RMF gösterimi

Bu çalışmada ilk olarak, \mathbb{R}^3 Öklid uzayında, birim küre üzerinde minimum açısal hızlı hareket (RMM) için yeni bir yöntem verilmiştir. Bu yöntemde, diğer yöntemlerden farklı olarak minimum açısal hızlı hareketin inşası için minimum açısal hızlı çatı kullanılmıştır. Küresel hareketlerde bir noktanın yörüngesi; hareket matrisi ile o noktanın koordinatlarından oluşan vektörün çarpımı ile bulunabilmektedir. $A(t)$, 3×3 tipinde bir dönme matrisi ve P de bir nokta olmak üzere $\alpha(t) = A(t).P$ ifadesi bize P noktasının yörünge eğrisini vermektedir. Ters problem olarak, $\alpha(t)$ bir küresel eğri ise bu eğriye karşılık gelecek şekilde birçok $A(t)$ ortogonal matrisleri yazılabilmektedir. $W(t) = \dot{A}A^{-1}$ matrisi hareketin açısal hız matrisi olup bu matris antisimetriktir. Antisimetrik matrislere $\vec{w}(t)$ gibi bir vektör karşılık gelmektedir. Bu vektörün uzunluğu $\|\vec{w}(t)\|$ olup bize hareketin açısal hızını vermektedir. Bu hızın minimum olması durumunda hareketin; Rotating minimizing hareket (RMM) olduğu gösterilmiştir.

İkinci olarak, yörünge eğrilerinin özel seçilmesi halinde kuaterniyonik eğrilerin nasıl elde edileceği araştırılmıştır. Bu bölümün son kısmında bir helis eğrisi üzerinde yöntemin uygulaması gösterilmiştir.

Üçüncü olarak, 3 boyutlu Minkowski uzayında minimum açısal hızlı çatı (RMF) yardımıyla minimum açısal hızlı hareket (RMM) elde edilmiştir. Burada S_1^2 Lorentz küresi ve H_0^2 hiperbolik küre üzerinde alınan bir eğrinin Darboux çatısı elde edilmiştir. Daha

sonra bu çatı $\int \alpha(t)$ etrafında döndürülerek RMF elde edilmiş ve yörünge eğrisi $\alpha(t)$ olan 3×3 tipindeki $A(t)$ dönme matrisinin minimum açısal hızlı hareket (RMM) olduğu gösterilmiştir. Son olarak, bu yöntem örneklerle desteklenmiş olup Öklid uzayındaki yapılan çalışmaların benzerlikleri ve farklılıkları gösterilmiştir.

Son bölümde ise tezden elden sonuçlara ve gelecekte yapılacak çalışmalara yer verilmiştir.



2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez için kullanılacak bazı temel tanım ve kavramlardan bahsedilecektir.

2.1 Öklid Uzayı için Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1 (İç Çarpım Uzayı) \mathfrak{V} bir vektör uzayı ve \mathbb{R} reel sayılar cismi olsun. Bu durumda,

$$\langle, \rangle : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı \langle, \rangle fonksiyonu,

- $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \langle \eta_2, \eta_1 \rangle$
- $\forall \iota_1, \iota_2 \in \mathbb{R}$ için $\langle \iota_1 \eta_1 + \iota_2 \eta_2, \eta_3 \rangle = \iota_1 \langle \eta_1, \eta_3 \rangle + \iota_2 \langle \eta_2, \eta_3 \rangle$
- $\eta_1 \neq 0$ için $\langle \eta_1, \eta_1 \rangle \geq 0, \eta_1 = 0 \Leftrightarrow \langle \eta_1, \eta_1 \rangle = 0$

özelliklerini sağladığında \langle, \rangle fonksiyonuna \mathfrak{V} üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu, $(\mathfrak{V}, \langle, \rangle)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı ve $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ sayısına da η_1 ile η_2 nun iç çarpımı denir (O'Neill 2006).

Tanım 2.2 (Öklid İç Çarpım) \mathbb{R}^n vektör uzayında, $\forall \iota = (\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle \iota, v \rangle = \sum \iota_i v_i,$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma *Öklid iç çarpımı* adı verilir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.3 (Bir Vektörün Normu)

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow \|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm \mathbb{R}^n üzerinde bir norm olup $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ikilisi bir normlu uzaydır (O'Neill 2006).

Tanım 2.4 \mathbb{R}^3 Öklid uzayında, $\forall \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n), \varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n) \in \mathbb{R}^3$ için Öklid vektörel çarpımı,

$$\nu \times \varsigma = (\nu_2\varsigma_3 - \nu_3\varsigma_2, \nu_3\varsigma_1 - \nu_1\varsigma_3, \nu_1\varsigma_2 - \nu_2\varsigma_1),$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.5 $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ açık aralık olsun. $\alpha : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün C^∞ sınıfından bir α dönüşümü, \mathbb{R}^n uzayında bir eğri olarak adlandırılmaktadır (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.6 (Hız Vektörü) $(n + 1)$ boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^{n+1} de, \mathfrak{M} eğrisi (I, ρ) komşuluğu olsun. $\rho : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ in Öklidyen koordinat fonksiyonları $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ olmak üzere $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+1}), \rho \in M$ eğrisinin diferensiyeli,

$$\rho'(t) = \left(\frac{d\rho_1}{dt}, \frac{d\rho_2}{dt}, \dots, \frac{d\rho_{n+1}}{dt} \right)$$

şeklinindedir. $\rho'(t)$ tanjant vektörüne, \mathfrak{M} eğrisinin $t \in \mathcal{J}$ parametre değerine karşılık gelen $\rho(t)$ noktasında, (\mathcal{J}, ρ) komşuluğuna göre hız vektörü olarak tanımlanmaktadır (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.7 (Birim Hızlı Eğri) Bir $\rho : \mathcal{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin her $s \in \mathcal{J}$ noktasındaki hız vektörü olan $\rho'(s)$ vektörü, birim vektör ise, yani $\|\rho'(s)\| = 1$ ise, ρ eğrisine *birim hızlı eğri* adı verilmektedir (Özdemir 2020).

Tanım 2.8 (Regüler Eğri) \mathcal{J}, \mathbb{R} uzayının bir açık aralığı verilsin. Bu durumda $\gamma : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinde, eğer $t \in \mathcal{J}$ olduğunda $\gamma'(t) \neq 0$ ise, bu eğri *regüler eğri* olarak adlandırılır (Özdemir 2020).

Tanım 2.9 (Küresel Eğri) Bir küre üzerinde bulunan eğrilere **küresel eğri** denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.10 (Frenet-Serret Çatısı) Eğri birim hızlı ise, $\|\beta'(t)\| = 1$ olduğundan, $\beta'(t) = \mathcal{T}$ vektörüne eğrinin **birim teğet vektör alanı** denir. $\langle \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle = 1$ olduğundan türev alınarak $\langle \mathcal{T}', \mathcal{T} \rangle + \langle \mathcal{T}, \mathcal{T}' \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathcal{T}', \mathcal{T} \rangle = 0$ elde edilir. Yani birim hızlı bir eğride \mathcal{T}' vektörü, eğri boyunca teğete dik bir vektördür. Bu vektör birim olmayabilir. O yüzden normunu alarak birim hızlı hale getirerek elde edilen vektöre de **eğrinin**

normali denir. Bu vektör \mathfrak{N} ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{T}'}{\|\mathfrak{T}'\|} = \frac{\beta''}{\|\beta''\|}$$

şeklinde olacaktır. Artık, eğri boyunca birbirine dik olan iki birim vektör oldu. Bu iki vektöre dik olan üçüncü vektör de, vektörel çarpımla elde edilerek, eğri üzerinde birbirine dik üç birim vektör olacaktır. \mathfrak{B} **eğrinin birnomali** olmak üzere $\mathfrak{B} = \mathfrak{T} \times \mathfrak{N}$ olacaktır. Sonuç olarak $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{N}, \mathfrak{B}\}$ çatısı elde edilir. Bu çatıya **Frenet-Serret Çatısı** denilmektedir (Özdemir 2020).

Tanım 2.11 (Eğrilik fonksiyonu) \mathbb{R}^3 uzayı için birim hızlı $\xi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin.

$$\epsilon_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}, \epsilon_1(s) = \|\mathfrak{T}'\|$$

fonksiyonu, ξ eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca $\epsilon_1(s)$ sayısına eğrinin $\xi(s)$ noktasındaki **eğriliği** olarak tanımlanır (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.12 (Burulma Fonksiyonu) \mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\beta : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\mathfrak{T}, \mathfrak{N}, \mathfrak{B}$ üçlüsü Frenet vektör alanları olmak üzere,

$$\epsilon_2 : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}, \epsilon_2(s) = -\langle \mathfrak{B}'(s), \mathfrak{N}(s) \rangle$$

fonksiyonu, β eğrisinin **burulma fonksiyonu** olarak adlandırılır ve $\epsilon_2(s)$ sayısına eğrinin $\beta(s)$ noktasındaki **burulması** adı verilir (Sabuncuoğlu 2004).

Teorem 2.1 $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{N}, \mathfrak{B}\}$, ζ eğrisinin Frenet çatısı, ϵ_1 eğrilik fonksiyonu ve ϵ_2 burulma fonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}' &= \epsilon_1 \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N}' &= -\epsilon_1 \mathfrak{T} + \epsilon_2 \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B}' &= -\epsilon_2 \mathfrak{N} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklere **Frenet-Serret Formülleri** denir. Bu eşitlik matris formunda,

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{T}' \\ \mathfrak{N}' \\ \mathfrak{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 \\ -\epsilon_1 & 0 & \epsilon_2 \\ 0 & -\epsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{T} \\ \mathfrak{N} \\ \mathfrak{B} \end{bmatrix},$$

yazılabilir (Özdemir 2020).

Tanım 2.13 (Açısal hız vektörü) Bir parçacığın açısal hızı denilince , seçilen bir merkez etrafında dönme hızı anlaşılır. yani açısal hız, parçacığın açısal pozisyonun değişim hızını ifade eder. Genellikle ω ile gösterilir. Bu dönme sırasında dönme eksenini de söz konusudur. İşte bu dönme eksenine **anlık dönüş eksenini** veya **açısal hız vektörü** denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.14 (Darboux vektörü) Bir uzay eğrisinin Frenet çatısının açısal hız vektörüne **Darboux vektörü** denir. Buna göre, bir γ eğrisinin $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ Frenet çatısı için,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}' &= \vec{\omega}_0 \times \mathcal{T} \\ \mathcal{N}' &= \vec{\omega}_0 \times \mathcal{N} \\ \mathcal{B}' &= \vec{\omega}_0 \times \mathcal{B}\end{aligned}$$

denklemini sağlayan $\vec{\omega}_0$ vektörüne, **Frenet çatısının Darboux vektörü** denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.15 (Darboux vektör alanı) Birim hızlı her $\beta : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi olmak üzere $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ Frenet çatısı için,

$$D = \epsilon_2 \mathcal{T} + \epsilon_1 \mathcal{B}$$

vektör alanı, β eğrisinin **Darboux vektör alanı** olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.16 (Helis Eğrisi) E^3 uzayında eğriliği sıfırdan farklı bir ζ eğrisinin tanjant doğruları sabit bir vektör ile sabit bir açı yaptığında ζ eğrisine **helis** eğrisi adı verilmektedir. Buna göre bir $\zeta : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in \mathcal{I}$ için

- $v' = 0$,
- $\langle T(s), v \rangle = \cos\theta$, (θ sabit),

şartlarını sağlayan bir v vektörü varsa, bu durumda ζ eğrisi helistir. Bir helis eğrisinin hem eğrilik fonksiyonu hem de burulma fonksiyonu sıfırdan farklı ve aynı zamanda sabit ise bu helis **daire helis** olarak adlandırılır (Özdemir 2020).

Teorem 2.2 (Lancret Teoremi) Regüler bir eğri $\zeta(s)$ olarak verilsin. ζ eğrisinin helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa}(s)$ sabit çıkmasıdır (İzumiya ve Takeuchi 2004).

Tanım 2.17 (CCR Eğrisi) $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Eğrilikleri oranı sabitse yani $\frac{k_{i+1}}{k_i}$ oranı sabit ise ζ eğrisine **sabit eğrilikli oran eğrisi** denir. Kısaca **CCR eğrisi** denir. Bu anlamda CCR eğrisi \mathbb{R}^3 de genel helislerin \mathbb{R}^n 'e bir genellemesidir (Monterde 2004).

Tanım 2.18 (Dönme matrisi) Determinantı 1 olan ortogonal matrislere **dönme matrisi** denir. 3 Boyutlu Öklid uzayında dönme matrislerinin kümesi,

$$SO(3) = \{Z \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : Z^t Z = I \text{ ve } \det Z = 1\}$$

ile gösterilir. Bu küme, matrisle çarpma işlemine göre bir gruptur. Dönme matrisleri açıları ve uzunlukları koruyan dönüşümlerdir. \mathbb{R}^3 de her dönme matrisi bir n eksen etrafında ϕ açısı kadar dönmeyi ifade eder. ϕ açısına dönme açısı, n eksenine dönme eksenidir. \mathbb{R}^3 uzayında,

$$Z_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}, Z_y = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix}, Z_z = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

matrisleri sırasıyla x, y, z eksenleri etrafında ϕ açısı kadar dönmeyi ifade eden matrislerdir (Özdemir 2020).

Tanım 2.19 3 boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^3 de, $\gamma : \mathfrak{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\gamma(s)$ eğrisi boyunca, $\{\Xi_1, \Xi_2, \Xi_1 \wedge \Xi_2 = \Xi_3\}$ hareketli çatısına **alternatif hareketli çatı** denir. Burada $\Xi_3, \gamma(s)$ eğrisinin Darboux vektörü, Ξ_1 asli normal vektör ve Ξ_2 asli normal vektörün türevidir. Alternatif hareketli çatının türev denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \Xi_1' \\ \Xi_2' \\ \Xi_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & g \\ 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \\ \Xi_3 \end{bmatrix},$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\Xi_1 &= \frac{\Xi'_1}{\|\Xi'_1\|} \\ \Xi_3 &= \frac{\tau \mathfrak{T} + \kappa \Xi_2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ \Xi_3 &= \Xi_1 \wedge \Xi_2\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $f = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}$ ve $g = \frac{\epsilon_1^2}{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{3/2}} (\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})' f = \sigma f$ alternatif hareketli çatısına göre γ eğrisinin eğrilikleridir. Ayrıca burada, ϵ_1 , Frenet çatısının γ eğrisinin eğriliği ve ϵ_2 , γ eğrisinin torsiyonu olmaktadır (Uzunoglu vd. 2016).

2.2 Lorentz Uzayı için Temel Tanım ve Kavramlar

\mathbb{R}^3 uzayında $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ve $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ için,

$$\langle \mu, \lambda \rangle_L = -\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3$$

ve

$$\mu \times_L \lambda = \begin{vmatrix} -i & j & k \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix},$$

şeklinde tanımlanan

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \times_L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

fonksiyonlarına, \mathbb{R}^3 uzayında, $(-, +, +)$ işaretine göre tanımlanmış sırasıyla **Lorentziyen skaler ve vektörel çarpım** denir. Bu çarpımlarla birlikte \mathbb{R}^3 uzayına **Lorentz uzayı** veya **3-boyutlu Minkowski uzayı** denir. Kısaca \mathbb{R}_1^3 veya \mathbb{E}_1^3 ile gösterilir. $\langle \mu, \lambda \rangle_L = 0$ ise μ ve λ vektörleri pseudo ortogonal veya Lorentziyen ortogonal vektörlerdir (Özdemir 2020).

Bu uzayda herhangi bir $\varpi \in \mathbb{E}_1^3$ vektörü olmak üzere,

- $\langle \varpi, \varpi \rangle_L > 0 \Rightarrow \varpi$ vektörü spacelike,
- $\langle \varpi, \varpi \rangle_L < 0 \Rightarrow \varpi$ vektörü timelike,
- $\langle \varpi, \varpi \rangle_L = 0 \Rightarrow \varpi$ vektörü lightlike veya null,

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, ϖ vektörünün normu da,

$$\|\varpi\|_L = \sqrt{|\langle \varpi, \varpi \rangle_L|}$$

şeklinde tanımlanır. $\langle \varpi, \varpi \rangle_L = \pm 1$ ise ϖ vektörüne birim vektör denir. Bu uzayda,

$$\mathbb{S}_1^2(r) = \{m \in \mathbb{E}_1^3 : \langle m, m \rangle_L = r^2\} = \{(a, b, c) : -a^2 + b^2 + c^2 = r^2\}$$

kümesine r yarıçaplı **pseudoküre**,

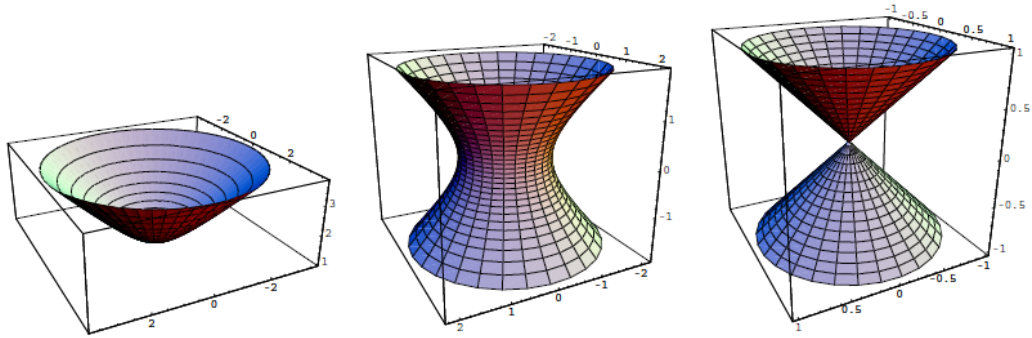
$$\mathbb{H}_0^2(r) = \{m \in \mathbb{E}_1^3 : \langle m, m \rangle_L = -r^2\} = \{(a, b, c) : -a^2 + b^2 + c^2 = -r^2\}$$

kümesine, r yarıçaplı **hiperbolik küre**,

$$\mathbb{L} = \{m \in \mathbb{E}_1^3 : \langle m, m \rangle_L = 0\} = \{(a, b, c) : -a^2 + b^2 + c^2 = 0\}$$

kümesine de **ışık konisi** veya **null koni** denir.(O'Neil 1983).

Şekil 2.1'de sırasıyla Hiperbolik küre, Pseudoküre, Işık konisi verilmiştir (Lopez 2014).



Şekil 2.1 $\mathbb{H}_0^2(r)$ Hiperbolik küre, $\mathbb{S}_1^2(r)$ Pseudoküre, \mathbb{L} Işık konisi

Önerme 2.1 $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}_1^3$ bir vektör altuzayı olmak üzere,

1. $\dim(\mathcal{C}^\perp) = 3 - \dim(\mathcal{C})$
2. $(\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$
3. Eğer \mathcal{C} non-dejenere ise, bu durumda (\mathcal{C}^\perp) de non-dejenere altuzaydır.
4. \mathcal{C} timeliktir (sırasıyla spacelike, lightlike) ancak ve ancak \mathcal{C}^\perp spacelike (sırasıyla timelike, lightlike)'tir.

Önerme 2.2 $\varpi_1, \varpi_2 \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere Lorentziyen vektörel çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $\varpi_1 \times_L \varpi_2 = -\varpi_2 \times_L \varpi_1$
- $\varpi_1 \times_L \varpi_2$ vektörü ϖ_1 ve ϖ_2 ye diktir.
- $\varpi_1 \times_L \varpi_2 = 0$ olması için gerek ve yeter şart bu vektörlerin bağımlı olmamalarıdır.
- $\varpi_1 \times_L \varpi_2 \neq 0$ olmak üzere $P = \langle \varpi_1, \varpi_2 \rangle_L$ düzleminde olması için P lightlike olmalıdır (Demir 2010).

Teorem 2.3 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in E_1^3$ vektörleri olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

- $\langle \sigma_1 \times_L \sigma_2, \sigma_3 \rangle_L = -\det(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,
- $(\sigma_1 \times_L \sigma_2) \times_L \sigma_3 = -\langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle_L \sigma_2 + \langle \sigma_2, \sigma_3 \rangle_L \sigma_1$,

dir (Ceylan 2023).

Teorem 2.4 $\vec{\omega}_1$ ve $\vec{\omega}_2$ 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör olmak üzere,

- Eğer $\vec{\omega}_1$ ve $\vec{\omega}_2$ timelike vektörler ise bu durumda $\vec{\omega}_1 \times_L \vec{\omega}_2$ spacelike bir vektördür.
- Eğer $\vec{\omega}_1$ ve $\vec{\omega}_2$ spacelike vektörler ise bu durumda $\vec{\omega}_1 \times_L \vec{\omega}_2$ timelike bir vektördür.
- Eğer $\vec{\omega}_1$ spacelike, $\vec{\omega}_2$ de timelike vektör ise bu durumda $\vec{\omega}_1 \times_L \vec{\omega}_2$ spacelike bir vektördür (Ceylan 2023).

Tanım 2.20 \mathbb{E}_1^3 in bir izometrisi $\mathcal{A} : \mathbb{E}_1^3 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ Lorentz metriğini koruyan bir izomorfizmdir. Öyle ki

$$\langle \mathcal{A}\sigma_1, \mathcal{A}\sigma_2 \rangle_L = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_L, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{E}_1^3$$

dir. \mathbb{E}_1^3 in bütün izometrilere cümlesi $O_1(3)$ ile gösterilir (Lopez 2014).

Tanım 2.21 \mathbb{E}_1^3 de dönme, bir vektörü, K doğrusu üzerinde bir nokta etrafında hareket ettiren izometridir. K doğrusuna dönmenin eksenini denir. \mathbb{E}_1^3 üç farklı durumuna göre yani eksenin timelike, spacelike veya lightlike olması durumuna göre üç farklı dönme hareketi mevcuttur. Bu durumda K sırasıyla z , x veya $(1, 0, 1)$ vektörü tarafından üretilen doğru alınabilir. Dönme hareketinin matrisi de yine K nin durumuna göre değişiklik gösterir (Demir 2010).

1. $K = \{(0, 0, 1)\}$ biçiminde timelike vektör durumunda dönme matrisi \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \psi \in \mathbb{R}$$

2. $K = \{(1, 0, 0)\}$ biçiminde timelike vektör durumunda dönme matrisi \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\psi & \sinh\psi \\ 0 & \sinh\psi & \cosh\psi \end{bmatrix}, \quad \psi \in \mathbb{R}$$

3. $K = \{(1, 0, 1)\}$ biçiminde timelike vektör durumunda dönme matrisi \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\psi^2}{2} & \psi & \frac{\psi^2}{2} \\ -\psi & 1 & \psi \\ -\frac{\psi^2}{2} & \psi & 1 + \frac{\psi^2}{2} \end{bmatrix}, \quad \psi \in \mathbb{R}$$

olur.(Lopez 2014).

Tanım 2.22 β, \mathbb{E}_1^3 ' de bir eğri olsun. Eğer bir $s \in I$ için $\beta'(s)$ spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) ise $\beta(s)$ spacelike (sırasıyla timelike, lightlike)'tır (Lopez 2014).

Tanım 2.23 (Eğrilik, burulma ve Frenet denklemleri) $\zeta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ yay uzunluk parametrelili regüler bir eğri olsun. $\mathfrak{T}(s) = \zeta'(s)$ s 'de bir tanjant vektör olmak üzere, $\langle \mathfrak{T}(s), \mathfrak{T}(s) \rangle_L$ sabit olduğundan yani 1, -1 veya 0' a eşit olduğundan her iki tarafın s 'ye göre türevi alınırsa $\langle \mathfrak{T}(s), \mathfrak{T}'(s) \rangle_L = 0$ elde edilir. Bu durumda $\mathfrak{T}'(s), \mathfrak{T}(s)$ ye diktir. $\mathfrak{T}'(s) \neq 0$ olmak üzere $\mathfrak{T}'(s)$ ile $\mathfrak{T}(s)$ lineer bağımlı değildir. Bu durum eğrinin düz bir çizgi olmasını önler. Bundan dolayı $\mathfrak{T}(s)$ 'in karakterine bağlı olarak üç durum mevcuttur:

1. **Eğri timelike olsun.**

Bu durumda $\mathfrak{T}(s)$ timelike bir vektör olduğundan $\mathfrak{T}'(s)$ de spacelike bir vektördür. $\mathfrak{T}'(s) \neq 0$ olmak üzere $\mathfrak{T}(s)$ ile lineer bağımsızdır. s noktasındaki ζ 'nin eğriliği, $\epsilon_1(s) = \|\mathfrak{T}'(s)\|_L$ şeklinde tanımlanır. $N(s)$ normal vektör olmak üzere,

$$P(s) = \frac{\mathfrak{T}'(s)}{\epsilon_1(s)} \Rightarrow \mathfrak{T}'(s) = \epsilon_1(s)P(s)$$

Buradan $\epsilon_1(s) = \langle \mathfrak{T}'(s), P(s) \rangle_L$ elde edilir. $R(s)$ binormal vektör olmak üzere, $R(s) = \mathfrak{T}(s) \times_L P(s)$ şeklinde tanımlanır. $R(s)$ vektörü birim ve spacelike vektördür. Her $s \in I$ için $\{\mathfrak{T}, P, R\}$ üçlüsü \mathbb{E}_1^3 'in ortonormal bir bazıdır. $\det(\mathfrak{T}, P, R) = \langle \mathfrak{T}(s) \times_L P(s), R(s) \rangle_L = \langle R(s), R(s) \rangle_L = 1 > 0$ olduğundan $\{\mathfrak{T}, P, R\}$ üçlüsü pozitif tanımlıdır. s noktasındaki ζ 'nin burulması ϵ_2 olmak üzere $\epsilon_2(s) = \langle P'(s), R(s) \rangle_L$ şeklinde tanımlanır. Türev yardımıyla Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{T}' \\ P' \\ R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 \\ \epsilon_1 & 0 & \epsilon_2 \\ 0 & -\epsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{T} \\ P \\ R \end{bmatrix},$$

şeklindedir.

2. Eğri spacelike olsun.

Bu durumda $\mathfrak{T}(s)$ spacelike vektördür. $\mathfrak{T}'(s)$, $\mathfrak{T}(s)$ 'ye dik olduğu için $\mathfrak{T}'(s)$ spacelike, timelike veya lightlike olabilir.

(a) $\mathfrak{T}'(s)$ spacelike vektör ise, Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{T}' \\ P' \\ R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 \\ -\epsilon_1 & 0 & \epsilon_2 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{T} \\ P \\ R \end{bmatrix},$$

şeklindedir. Burada ζ 'nin burulması ϵ_2 olmak üzere, $\epsilon_2(s) = -\langle P'(s), R(s) \rangle_L$ biçiminde tanımlanır. $\det(\mathfrak{T}, P, R) = \langle \mathfrak{T}(s) \times_L P(s), R(s) \rangle_L = \langle R(s), R(s) \rangle_L = -1 < 0$ olduğundan $\{\mathfrak{T}, P, R\}$ bazı negatif tanımlıdır.

(b) $\mathfrak{T}'(s)$ timelike vektör ise, Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{T}' \\ P' \\ R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 \\ \epsilon_1 & 0 & \epsilon_2 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{T} \\ P \\ R \end{bmatrix},$$

şeklindedir. Burada ζ 'nin burulması ϵ_2 olmak üzere, $\epsilon_2(s) = \langle P'(s), R(s) \rangle_L$ biçiminde tanımlanır. Frenet üçlüsü pozitif tanımlıdır.

(c) $\mathfrak{T}'(s)$ her $s \in I$ için lightlike vektör ise Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{T}' \\ P' \\ R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 1 & 0 & -\epsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{T} \\ P \\ R \end{bmatrix},$$

biçimindedir. Burada ϵ_2 burulma fonksiyonu ζ eğrisinin pseudo-torsiyonu olarak adlandırılır. $\mathfrak{T}'(s)$ lightlike vektör olduğundan ζ eğrisinin eğriliği tanımlanamaz. Ayrıca P ve R lightlike olduğu için $\{\mathfrak{T}, P, R\}$, \mathbb{E}_1^3 'in ortonormal bir bazı değildir. $\{\mathfrak{T}, P, R\}$ üçlüsüne bir *null çatı* denir.

3. Eğri lightlike olsun.

ζ , pseudo yay uzunluk parametrelili bir lightlike eğri olmak üzere, teğeti $\mathfrak{T}(s) = \zeta'(s)$ lightlike vektördür. Normal vektör alanı $N(s) = \mathfrak{T}'(s)$ şeklinde tanımlanırsa $N(s)$ bir birim spacelike vektör olur. Binormal vektör tek lightlike vektör olup $N(s)$ 'ye diktir öyle ki $\langle \mathfrak{T}(s), B(s) \rangle_L = -1$ 'dir. Böylece $\{\mathfrak{T}, N, B\}$, \mathbb{E}_1^3 'in bir null çatısıdır. Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{T}' \\ P' \\ R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \epsilon_2 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{T} \\ P \\ R \end{bmatrix},$$

biçimindedir (Lopez 2014).

2.3 Kuaterniyonlar ile ilgili Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.24 (Reel Kuaterniyon) $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ reel sayılar olmak üzere, $q = \mu_0 + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k$ şeklinde yazılan ve

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ijk = -1$$

eşitliklerini sağlayan sayılara **reel kuaterniyon** denir. Kuaterniyonlar kümesi \mathbb{H} ile gösterilir. Buna göre kuaterniyonlar kümesi,

$$\mathbb{H} = \{\mu_0 + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k : i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ijk = -1, \quad \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde ifade edilir.

Bir $q = \mu_0 + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k$ kuaterniyonunun, $\mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k$ kısmına **vektörel kısım** denir, v_q ile gösterilir. μ_0 değerine de kuaterniyonun **skaler kısım** denir, s_q ile gösterilir.

Dolayısıyla her kuaterniyon

$$q = s_q + v_q$$

şeklinde bir vektör ile bir skaler toplamı olarak ifade edilir.

\mathbb{H} kuaterniyonlar kümesinde,

$$p = \mu_1 + \mu_2 i + \mu_3 j + \mu_4 k \quad \text{ve} \quad q = \nu_1 + \nu_2 i + \nu_3 j + \nu_4 k$$

iki kuaterniyonu için, eşitliği, toplamı, skalerle çarpması ve iki kuaterniyonun çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

- **İki Kuaterniyonun Eşitliği:**

$$p = q \Leftrightarrow \mu_1 = \nu_1, \mu_2 = \nu_2, \mu_3 = \nu_3, \mu_4 = \nu_4$$

- **Toplama:**

$$p + q = (\mu_1 + \nu_1) + (\mu_2 + \nu_2)i + (\mu_3 + \nu_3)j + (\mu_4 + \nu_4)k$$

- **Skalerle Çarpma:** $\mu \in \mathbb{R}$ için,

$$\mu p = \mu\mu_1 + \mu\mu_2 i + \mu\mu_3 j + \mu\mu_4 k$$

- **İki Kuaterniyonun Çarpımı:**

İki kuaterniyon çarpılırken, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$,
 $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ eşitlikleri dikkate alınır.

$$\begin{aligned} pq &= (\mu_1 + \mu_2 i + \mu_3 j + \mu_4 k)(\nu_1 + \nu_2 i + \nu_3 j + \nu_4 k) \\ &= \mu_1 \nu_1 - (\mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_3 + \mu_4 \nu_4) + (\mu_1 \nu_2 + \nu_1 \mu_2 + \mu_3 \nu_4 - \nu_3 \mu_4) \mathbf{i} \\ &\quad + (\mu_1 \nu_3 + \nu_1 \mu_3 + \mu_4 \nu_2 - \nu_4 \mu_2) \mathbf{j} + (\mu_1 \nu_4 + \nu_1 \mu_4 + \mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) \mathbf{k} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. .

Kuaterniyon çarpımı,

$$pq = (s_p + v_p)(s_q + v_q) = s_p v_q - \langle v_p, v_q \rangle + s_p v_q + s_q v_p + v_p \times v_q$$

şeklinde Öklidiyen iç çarpımı ve vektörel çarpımı yardımıyla ifade edilebilir (Özdemir 2020).

Tanım 2.25 (Bir Reel Kuaterniyonun Eşleniği) $p = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k = s_q + v_q$ kuaterniyonu için, vektörel kısmın değiştirilmesiyle elde edilen,

$$s_q - v_q = a_1 - a_2 i - a_3 j - a_4 k$$

kuaterniyonuna, q **kuaterniyonunun eşleniği** denir ve \bar{q} ile gösterilir (Özdemir 2020).

Tanım 2.26 (Bir Kuaterniyonun Normu) Kuaterniyonlar kümesinde herhangi bir $p = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k \in \mathbb{H}$ kuaterniyonun normu,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0 \\ q &\rightarrow \|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir 2020).

Tanım 2.27 (Birim Kuaterniyon) Normu 1 olan kuaterniyona **birim kuaterniyon** denir. q sıfırdan farklı olmak üzere, $q_0 = \frac{q}{\|q\|}$ birim kuaterniyondur (Özdemir 2020).

Teorem 2.5 Kuaterniyonlar kümesinde herhangi bir $r \in \mathbb{H}$ kuaterniyonun tersi tektir ve

$$r^{-1} = \frac{\bar{r}}{\|r\|^2}$$

kuaterniyonuna eşittir. r birim kuaterniyon ise $r^{-1} = \bar{r}$ olur (Özdemir 2020).

Tanım 2.28 (Kuaterniyonik Eğri) \mathbb{H} reel kuaterniyonlar kümesinde, $t \in I = [0, 1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \zeta : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H} \\ t &\rightarrow \zeta(t) = \sum_{i=1}^4 \zeta_i(t)e_i, \quad e_4 = 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ζ eğrisine **kuaterniyonik eğri** denir (Yoon 2012).

Teorem 2.6 (Kuaterniyonik Helis) \mathbb{H} reel kuaterniyonlar kümesinde, $\xi = \xi(s)$ birim hızlı kuaterniyonik eğri ve sıfırdan farklı $M(s), m(s), r(s) - M(s)$ eğrilikleri olmak üzere, ξ eğrisi kuaterniyonik helistir olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 + \frac{1}{(r - M)^2} \left(\left(\frac{M}{m}\right)'\right)^2 = \text{sabit}$$

olmasıdır (Yoon 2012).

Tanım 2.29 (Split Kuaterniyonlar) $i^2 = -1, j^2 = k^2 = ijk = 1$ koşullarını sağlayan $q = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ sayı dörtlülerin oluşturduğu birleşimli, fakat değişmeli ve

bölmeli olmayan sayı cebirine **split kuaterniyon cebiri** denir. Bu sayı dörütlülerin oluşturduğu cümle $\widehat{\mathbb{H}}$ ile gösterilir. Bu cümleyi kısaca,

$$\widehat{\mathbb{H}} = \{q = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k : b_i \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = k^2 = ijk = 1\}$$

ifade edebiliriz. Split kuaterniyon çarpımı Şekil 2.2'e göre yapılmaktadır.

	1	ς_1	ς_2	ς_3
1	1	ς_1	ς_2	ς_3
ς_1	ς_1	-1	ς_3	$-\varsigma_2$
ς_2	ς_2	$-\varsigma_3$	1	$-\varsigma_1$
ς_3	ς_3	ς_2	ς_1	1

Şekil 2.2 Split kuaterniyon çarpımı

Split kuaterniyonlar s_q kısmı skaler ve v_q kısmı da vektörel olmak üzere iki kısma ayrılır:

$$q = s_q + v_q$$

şeklinde yazılır. Eğer $s_q = 0$ ise o zaman $q = v_q$ olur. Bu durumda q split kuaterniyonuna **has split kuaterniyon** denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.30 (Split Kuaterniyon Çarpımı) $\widehat{\mathbb{H}}$ split kuaterniyonlar kümesinde verilen herhangi iki

$$q = s_q + v_q, \quad p = s_p + v_p$$

split kuaterniyonun çarpımı, kuaterniyonun vektör kısımlarını \mathbb{R}_1^3 uzayı ile özdeşleştirerek $(-, +, +)$ işaretine göre tanımlanmış Lorentziyen skaler çarpım ve vektörel çarpım yardımıyla

$$pq = (s_p + v_p)(s_q + v_q) = s_p v_q + \langle v_p, v_q \rangle_L + s_p v_q + s_q v_p + v_p \times_L v_q$$

biçiminde gösterilir (Özdemir 2020).

Tanım 2.31 (Split Kuaterniyonun Eşleniği) $q = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k = s_q + v_q$ bir split kuaterniyon olmak üzere, split kuaterniyonun eşleniği,

$$\bar{q} = s_q - v_q = b_0 - b_1i - b_2j - b_3k$$

biçiminde tanımlanır. \bar{q} ile gösterilir (Aslan vd. 2021).

Tanım 2.32 (Split Kuaterniyonun Normu) $q = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ split kuaterniyonun normu,

$$\|q\| = \sqrt{|N_q|} = \sqrt{|q\bar{q}|} = \sqrt{|b_0^2 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2|}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $N_q = \pm 1$ ise q birim split kuaterniyon olarak adlandırılır (Aslan vd. 2021).

Tanım 2.33 (Split Kuaterniyonun Sınıflandırılması) $(\mathbb{R}^4, -, -, +, +) \cong \mathbb{E}_2^4$ olmak üzere, q split kuaterniyonu

$$-N_q = -b_0^2 - b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \langle q, q \rangle_{\mathbb{E}_2^4}$$

şeklinde ifade edilebilir. Yani her split kuaterniyon \mathbb{E}_2^4 uzayının bir elemanı olarak kabul edilebilir. Bu durumda aşağıdaki sınıflandırma verilebilir.

1. $N_q > 0$ ise, $\langle q, q \rangle_{\mathbb{E}_2^4} < 0$ olacağından q 'ya **timelike split kuaterniyon**,
2. $N_q < 0$ ise, $\langle q, q \rangle_{\mathbb{E}_2^4} > 0$ olacağından q 'ya **spacelike split kuaterniyon**,
3. $N_q = 0$ ise, $\langle q, q \rangle_{\mathbb{E}_2^4} = 0$ olacağından q 'ya **lightlike split(bölünmüş) kuaterniyon**

olarak ifade edilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.34 (Split Kuaterniyonun Tersisi) $q = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ split kuaterniyonun tersi, $N_q \neq 0$ olmak üzere,

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre spacelike ve timelike kuaterniyonların split kuaterniyon çarpımına göre tersleri vardır, fakat lightlike split kuaterniyonun tersi yoktur (Özdemir 2020).

Teorem 2.7 $q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$ spacelike kuaterniyonu verilsin.

$$\sinh\varphi = \frac{a_1}{\|q\|}, \quad \cosh\varphi = \frac{\sqrt{-a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\|q\|}, \quad m = \frac{a_2i + a_3j + a_4k}{\sqrt{-a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}$$

olmak üzere,

$$q = \|q\|(\sinh\varphi + m\cosh\varphi)$$

şeklinde yazılabilir. Burada m vektörü, \mathbb{E}_1^3 ile gösterilen $(-, +, +)$ işareli Lorentz uzayında spacelike birim vektördür.

Teorem 2.8 $q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k = s_q + v_q$ timelike kuaterniyonu verilsin.

1. Eğer v_q vektörel kısmı spacelike ise,

$$\cosh\varphi = \frac{|a_1|}{\|q\|}, \quad \sinh\varphi = \frac{\sqrt{-a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\|q\|}, \quad m = \frac{a_2i + a_3j + a_4k}{\sqrt{-a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}$$

olmak üzere

$$q = \|q\|(\sinh\varphi + m\cosh\varphi)$$

şeklinde yazılabilir.

2. Eğer v_q vektörel kısmı timelike ise,

$$\cos\varphi = \frac{|a_1|}{\|q\|}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}}{\|q\|}, \quad m = \frac{a_2i + a_3j + a_4k}{\sqrt{a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}}$$

olmak üzere

$$q = \|q\|(\sin\varphi + m\cos\varphi)$$

şeklinde yazılabilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Teorem 2.9 Her $q = s_q + v_q$ birim timelike kuaterniyon olsun.

1. Eğer $v_q \in \mathbb{E}_1^3$ spacelike ise,

$$q = \cosh\varphi + m\sinh\varphi$$

biçimindedir ve \mathbb{S}_1^2 veya \mathbb{H}_0^2 üzerinde bir büyük hiperbolik yayına karşılık gelir.

2. Eğer $v_q \in \mathbb{E}_1^3$ timelike ise,

$$q = \cos\varphi + m\sin\varphi$$

şeklinde ve \mathbb{S}_1^2 üzerinde bir büyük elips yayına karşılık gelir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.35 (Lorentziyen Dönme Matrisi) Determinantı 1 olan Lorentziyen ortogonal matrislere **Lorentziyen dönme matrisi** denir. Lorentziyen dönme matrisleri kümesi,

$$SO(3, 1) = \{A \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : A^T I^* A = I^* \text{ ve } \det A = 1\}$$

ile gösterilir. Lorentz uzayındaki dönme matrisleri, bir v eksenini etrafında, v eksenini spacelike ise φ açısı kadar hiperbolik dönmeyi, v eksenini timelike ise φ açısı kadar eliptik dönmeyi ifade eder. φ açısına dönme açısı, v eksenine dönme eksenini denir (Özdemir 2020).

Teorem 2.10 Bir $q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$ birim timelike kuaterniyonu için

$$\widehat{A}_q : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3, \quad \widehat{A}_q(v) = qvq^{-1}$$

dönme dönüşümüne karşılık gelen matris:

$$\widehat{A}_q = \begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 & 2a_1a_4 - 2a_2a_3 & -2a_1a_3 - 2a_2a_4 \\ 2a_2a_3 + 2a_4a_1 & a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 & -2a_3a_4 - 2a_2a_1 \\ 2a_2a_4 - 2a_3a_1 & 2a_2a_1 - 2a_3a_4 & a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 \end{bmatrix},$$

matrisidir. Bu matris $\widehat{A}^T I^* \widehat{A} = I^*$ ve $\det \widehat{A}_q = (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)^3 = 1$ özelliklerini sağladığından \widehat{A}_q matrisi 3-boyutlu Lorentz uzayında bir dönme matrisidir (Özdemir ve Ergin 2006).

3. \mathbb{R}^3 ÖKLİD UZAYINDA MİNİMUM AÇISAL HIZLI HAREKET

3.1 Minimum Açısall Hızlı Hareketin (RMM) İnşası

Bu bölümde minimum açısall hızlı hareketin inşası için bir metot verilecektir.

Tanım 3.1 $X(t)$ birim vektör alanı verilsin. Bu durumda α boyunca $\{T(t), X(t), T \times X(t)\}$ çatısına minimum açısall hızlı Çatı veya Bishop Çatısı denir. $\vec{\delta} = \vec{\delta}(t)$ eğrisi $t \in [0, 1]$ parametresiyle $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ birim küre üzerinde bir eğri olsun. $A(t)$ küresel hareket ve $\vec{p} \in S^2$ keyfi bir nokta olmak üzere $\vec{\delta}(t) = A(t)\vec{p}$ olsun. Burada $\vec{\delta}(t)$ yörüngesini veren birçok küresel hareket yazılabilir. Bu küresel hareketler içerisinde açısall hızlı minimum olan harekete **minimum açısall hızlı hareket (RMM)** denir.

Tanım 3.2 Yörüngesi $\delta(t)$ olan $A(t)$ küresel hareketin açısall hızlı minimum ise, yani

$$\int_0^1 \|\vec{\omega}(t)\| dt$$

integrali minimum ise $A(t)$ hareketine **minimum açısall hızlı hareket (RMM)** denir. Burada $t \in [0, 1]$ ve $\vec{\omega}(t)$ hareketin açısall hızlı vektörüdür (Jüttler 1998).

Önerme 3.1 Yörüngesi $\vec{\delta}(t)$ olan $A(t)$ küresel hareket, minimum açısall hızlı harekettir ancak ve ancak hareketin açısall hızlı

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\delta}(t) \times \dot{\vec{\delta}}(t) \quad (3.1)$$

olmasıdır (Jüttler 1998).

İspat. Kabul edelim ki $A(t)$ küresel hareketi (3.1) eşitliğini sağlasın. $B = B(t)$ hareketinin açısall hızlı

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) + \dot{\vec{\delta}}(t)$$

olsun. Bunun sonucunda

$$\|\vec{\delta} \times \dot{\vec{\delta}} + \dot{\vec{\delta}}\| \geq \|\vec{\delta} \times \dot{\vec{\delta}}\|$$

$$\int_0^1 \|\vec{v}\| dt \geq \int_0^1 \|\vec{\omega}\| dt$$

şeklinde yazılabilir. Burada eşitliğin olması durumu $\dot{\varphi} \equiv 0$ olmasıyla mümkündür. Burada φ ve $\vec{\delta}$, C^1 fonksiyon olduğundan bu durum iddiamızı kanıtlar (Jüttler 1998). ■

Sonuç 3.1 Yörüngesi $\vec{\delta}$ olan $A(t)$ minimum açısal hızlı hareketi verilen küresel eğri $\vec{\delta}(t)$ 'nin parametre seçiminden bağımsızdır. (Jüttler 1998).

İspat. $k = k(s)$, verilen küresel $\vec{\delta}$ eğrisinin C^1 parametre dönüşümü olsun. Aynı zamanda $' = \frac{d}{ds}$ olsun. s parametresine göre açısal hız $\vec{\omega}^*$ olmak üzere, $\vec{\omega}^* = k'(s)\vec{\omega} = k'(s)\vec{\delta} \times \dot{\vec{\delta}} = \vec{\delta} \times \dot{\vec{\delta}}$ şeklinde yazabiliriz. Böylece verilen küresel eğri ile ilişkili olan RMM C^1 parametre dönüşümlerine göre değişmezdir (Jüttler 1998). ■

$\gamma(t) \subset S^2$ küresel eğri olsun. Açısal hız vektörü

$$w(t) = \gamma(t) \times \gamma'(t)$$

olan küresel hareketi elde edeceğiz. Burada $' = \frac{d}{dt}$ dir. Yörüngesi $\vec{\gamma}(t)$ olan $A(t)$ küresel hareketi minimum açısal hızlı harekettir ancak ve ancak küresel hareketin açısal hızı

$$\vec{w}(t) = \vec{\gamma} \times \vec{\gamma}'$$

dir.(B.Jüttler)

Küre üzerinde $\gamma(s)$ eğrisi için Sabban çatısını inşa edelim. $p = \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}$ ve $\|\gamma'(s)\| = a$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \gamma(s) \\ p(s) \\ r(s) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(s) \\ p(s) \\ r(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde olsun. Burada $\frac{b}{a} = k_g$, $\gamma(s)$ eğrisinin geodezik eğriliğidir. $\{\gamma(s), p(s), r(s)\}$ çatısıyla elde edilen küresel hareketin

Darboux vektörü $w = b\gamma(s) + as(s)$ dir. Bu hareketin açısal hızı

$$\|w\| = \sqrt{b^2 + a^2}$$

dir.

$\varphi = -\int b(s)ds$ olmak üzere γ etrafında $\{p, r\}$ vektör alanlarının φ kadar döndürerek $\{\gamma, n_1, n_2\}$ RMF'yi elde ederiz.

$$n_1 = \cos \varphi p + \sin \varphi r,$$

$$n_2 = -\sin \varphi p + \cos \varphi r$$

olmak üzere

$$n_1' = -a \cos \varphi \gamma(s),$$

$$n_2' = a \sin \varphi \gamma(s)$$

elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & a \cos \varphi & -a \sin \varphi \\ -a \cos \varphi & 0 & 0 \\ a \sin \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

$\{\gamma(s), n_1(s), n_2(s)\}$ çatısı, $\int \gamma(s) ds$ eğrisi üzerinde RMF'dir.

Yörüngesi $\gamma(s)$ eğrisi olan küresel RMM'nin inşası için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1 $\vec{\gamma}(s) \subset S^2$ küresel eğri olsun. $\{\gamma(s), n_1(s), n_2(s)\}$ çatısı ve $\int \gamma(s) ds$ eğrisi üzerinde RMF olsun.

$$\vec{\gamma}(s) = A(s)\vec{e}_1$$

olmak üzere $A(s)$, yörüngesi $\vec{\gamma}(s)$ eğrisi olan bir RMM belirtir. Burada $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ dir.

İspat. $\{\gamma(s), p(s), r(s)\}$ çatısıyla elden edilen küresel hareketin açısal hızı $\|w\| = \sqrt{b^2 + a^2}$ dir. Şimdi bu açısal hızı minimum yapacak hareketi elde edelim. Bunun için $\{\gamma(s), n_1(s), n_2(s)\}$ RMF ile elde edilen $A(s) = \begin{bmatrix} \vec{\gamma}(s) & n_1(s) & n_2(s) \end{bmatrix}$ küresel hareketini ele alalım. Bu hareketin

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & a \cos \varphi & -a \sin \varphi \\ -a \cos \varphi & 0 & 0 \\ a \sin \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

türev denklemleri olmak üzere

bu hareketin Darboux vektörü (açısal hız vektörü),

$$\hat{w}(t) = a \sin \phi n_1 + a \cos \phi n_2$$

dir.

$$n_1 = a \cos \varphi p + a \sin \varphi r,$$

$$n_2 = -a \sin \varphi p + a \cos \varphi r$$

n_1 ve n_2 yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\hat{w}(s) = ar(s)$$

elde edilir. Buradan hareketin açısal hızı $\|\hat{w}\| = a$ olup $\|\hat{w}\| < \|w\|$ dir. Bu da açısal hızın minimum olduğunu gösterir. ■

Sonuç 3.2 $A(t) = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \gamma \end{bmatrix}$ küresel hareketi, $e_3 = (0, 0, 1)$ noktasının yörüngesi $\gamma(t)$ olan RMM'dir.

Örnek 3.1 $\xi = \xi(s) = (\sin \Lambda \cos(s\varphi), \sin \Lambda \sin(s\varphi), \cos \Lambda) \subset S^2$ küçük bir çember olsun. Yörüngesi $\xi(t)$ olan RMM'yi elde edelim.

$$\begin{cases} \xi' = (-\varphi \sin \Lambda \sin(s\varphi), \varphi \sin \Lambda \cos(s\varphi), 0), \\ |\xi'| = \varphi \sin \Lambda = a, \\ p = (-\sin(s\varphi), \cos(s\varphi), 0), \\ r = (-\cos \Lambda \cos(s\varphi), -\cos \Lambda \sin(s\varphi), \sin \Lambda) \end{cases}$$

Burada $r' = -bp$ olduğundan $b = \varphi \cos \Lambda$ olur. $\xi(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği $\frac{b}{a} = k_g = \cot \Lambda$ dir.

$\{\xi, n_1, n_2\}$ çatısının Darboux vektörü

$$\begin{aligned} \hat{w} &= as = \varphi \sin \Lambda s \\ &= (-\cos(t\varphi)\varphi \sin \Lambda \cos \Lambda, -\sin(t\varphi)\varphi \sin \Lambda \cos \Lambda, \varphi \cos^2 \Lambda + \varphi) \end{aligned}$$

Bu da B.Jüttler'in "Rotating Minimizing Spherical Motions" çalışmasındaki (11) deki eşitlikle aynıdır. Buradaki açısal hız (3.1) deki

$$\hat{w} = \vec{\xi} \times \vec{\xi}'$$

eşitliği sağlar.

Şimdi RMM'nin matrisini bulalım.

$$A(s) = \begin{bmatrix} \xi & n_1 & n_2 \end{bmatrix},$$

$$n_1 = \cos \phi p + \sin \phi r,$$

$$n_2 = -\sin \phi p + \cos \phi r,$$

$$\phi = -\int \varphi \cos \Lambda ds$$

$$= -\varphi \cos \Lambda \int ds$$

$$= -\varphi \cos(\Lambda)p$$

olmak üzere,

$$A(s) =$$

$$\begin{bmatrix} \sin \Lambda \cos(s\varphi) & -\cos \phi \sin(s\varphi) - \sin \phi \cos \Lambda \cos(s\varphi) & \sin \phi \sin(s\varphi) - \cos \phi \cos \Lambda \cos(s\varphi) \\ \sin \Lambda \sin(s\varphi) & \cos \phi \cos(s\varphi) - \sin \phi \cos \Lambda \sin(s\varphi) & -\sin \phi \cos(s\varphi) - \cos \phi \cos \Lambda \sin(s\varphi) \\ \cos \Lambda & \sin \phi \sin \Lambda & \cos \phi \sin \Lambda \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Böylece $A(s)$ matrisi bize yörüngesi $\vec{\xi}(s)$ olan RMM'yi verir. Yani $A(s)e_1 = \vec{\xi}(s)$ dir. Ayrıca $\|\hat{w}(s)\| = a$ elde edilir ki bu da açısal hızın minimum olduğunu gösterir.

3.2 Küresel Hareket ve Kuaterniyonik Helisler

Tanım 3.3 $r \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu olmak üzere,

$$r + \bar{r} = 0$$

denklemini sağlıyorsa r kuaterniyonuna uzaysal (spatial) kuaterniyon adı verilir (Yoon 2012).

Tanım 3.4 $I = [0, 1]$, \mathbb{R} üzerinde bir açık aralık ve $t \in I$ düzgün bir eğri boyunca yay uzunluk paramatresi olmak üzere,

$$\delta : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$t \rightarrow \delta(t) = \sum_{i=1}^3 \delta_i(t) \mathbf{e}_i, \quad (1 \leq i \leq 3).$$

biçiminde tanımlanan diferansiyellenebilir $\delta(t)$ eğrisine uzaysal kuaterniyonik eğri adı verilir (Yoon 2012).

$\delta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ birim hızlı kuaterniyonik eğri ve $p(s) = \delta'(s)$ birim uzunluklu teğet olsun.

$$\mathbf{p}' * \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{p} * \bar{\mathbf{p}}' = 0 \quad (3.2)$$

eşitliği gereğince \mathbf{p}' , \mathbf{p} 'ye diktir ve $\mathbf{p}' * \bar{\mathbf{p}}$ bir uzaysal kuaterniyondur. Buradaki " * " , kuaterniyonik çarpımdır.

$\{\mathbf{p}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$ üçlüsü $\delta(s)$ eğrisinin Frenet çatısı olsun. Bu durumda Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= k\mathbf{n}_1, \\ \mathbf{m}'_1 &= -k\mathbf{p} + r\mathbf{n}_2, \\ \mathbf{m}'_2 &= -r\mathbf{n}_1 \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $\mathbf{p}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ sırasıyla birim tanjant, birim asli normal ve binormal kuaterniyonik eğrilerdir. Ayrıca burada k ve r fonksiyonları sırasıyla δ eğrisinin esas eğriliği ve burulmasıdır (Yoon 2012).

Tanım 3.5 $\xi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ birim hızlı kuaterniyonik eğri, $T(s) = \xi'(s)$ birim uzunluklu teğet ve s yay uzunluk parametresi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \xi &: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} \\ s &\rightarrow \xi(s) = \sum_{i=1}^4 \xi_i(s)\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_4 = 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. \mathbb{R}^4 'de uzay eğrisinin Frenet çatısı $\{T_F(s), M_1(s), M_2(s), M_3(s)\}$ olmak üzere, Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_F'(s) &= K\mathbf{M}_1(s), \\ \mathbf{M}'_1(s) &= -K\mathbf{T}_F(s) + k\mathbf{M}_2(s), \\ \mathbf{M}'_2(s) &= -k\mathbf{M}_1(s) + (r - K)\mathbf{M}_3(s), \\ \mathbf{M}'_3(s) &= -(r - K)\mathbf{M}_2(s) \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde dir. Burada $\mathbf{M}_1 = \mathbf{p} * \mathbf{T}_F$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{m}_1 * \mathbf{T}_F$, $\mathbf{M}_3 = \mathbf{m}_2 * \mathbf{T}_F$ ve $K = \|\mathbf{T}_F'(s)\|$ dir.

ξ eğrisinin bu Frenet formülleri, \mathbb{R}^3 deki δ eğrisinin Frenet formüllerinden elde edilmiştir. Ayrıca ξ ve δ eğrilerinin eğrilikleri arasında bir bağıntı mevcuttur. $\xi(s)$ eğrisinin esas eğriliği $K(s) = \|T'(s)\|$, burulması k , bitorsiyonu $(r - K)$ şeklindedir (Yoon 2012)

Tanım 3.6 Herhangi iki r ve q kuaterniyon olmak üzere,

$$j(r, q) = \frac{r * \bar{q} + q * \bar{r}}{2}$$

eşiti her zaman bir reel sayıdır. Bu reel sayıya r ve q **kuaterniyonlarının iç çarpımı** denir. (Özdemir 2020).

Teorem 3.2 $\varsigma = \varsigma(t)$, \mathbb{H} 'de birim hızlı kuaterniyonik bir eğri olsun. Eğrilikleri $P(t)$, $p(t)$ ve $r(t) - P(t)$ sıfırdan farklı olmak üzere, ς bir genel helistir ancak ve ancak

$$\left(\frac{P}{p}\right)^2 + \frac{1}{(r - P)^2} \left(\left(\frac{P}{p}\right)'\right)^2 = c$$

dir. ($c \in \mathbb{R}$) (Yoon 2012).

İspat. $\varsigma(t)$, \mathbb{H} ' de ekseni sabit ve birim vektör olan Φ genel helis için, eğri boyunca

$$j(\mathbf{T}, \Phi) = c$$

eşitliği sabittir. ($c \in \mathbb{R}$). Bu denklemde t ye göre türev alındığında ve (3.2) deki eşitlik kullanıldığında

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} j(\mathbf{T}, \Phi) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{T} * \bar{\Phi} + \Phi * \bar{\mathbf{T}}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{T}' * \bar{\Phi} + \Phi * \bar{\mathbf{T}}') \\ &= j(\mathbf{T}', \Phi) \\ &= K j(\mathbf{M}_1, \Phi). \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece Φ birim vektörü

$$\Phi = b_1(t)\mathbf{T}(t) + b_2(t)\mathbf{M}_2(t) + b_3(t)\mathbf{M}_3(t), \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$b_1(t) = j(\mathbf{T}, \Phi) = c,$$

$$b_2(t) = j(\mathbf{M}_2, \Phi),$$

$$b_3(t) = j(\mathbf{M}_3, \Phi),$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$$

dir. (3.4) denkleminde türev alınır

$$(b_1 P - b_2 p) \mathbf{M}_1 + (b_2' - b_3(r - P)) \mathbf{M}_2 + (b_3' + b_2(r - P)) \mathbf{M}_3 = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$b_1 P - b_2 p = 0,$$

$$b_2' - b_3(r - P) = 0,$$

$$b_3' + b_2(r - P) = 0,$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$b_2 = \frac{P}{p} b_1 = -\frac{1}{r - P} b_3', \quad (3.5)$$

$$b_2' = b_3(r - P).$$

denklemini elde edilir. (3.5)'in birinci denkleminde türev alınıp, ikinci denkleminde yazılırsa,

$$b_3'' - \frac{(r - P)'}{r - P} b_3' + (r - P)^2 b_3 = 0 \quad (3.6)$$

b_3 'e göre diferensiyel denklemini elde edilir.

Eğer (3.6) denkleminde $\rho = \int_0^t (r - P) dt$ şeklinde değişken değiştirilirse

$$\frac{d^2 b_3}{d\rho^2} + b_3 = 0 \quad (3.7)$$

diferensiyel denklemini elde edilir. Böylece (3.7) deki diferensiyel denklemin çözümü,

$$b_3 = \Gamma \cos \rho(t) + \Delta \sin \rho(t), \quad (3.8)$$

biçiminde elde edilir. Burada Γ ve Δ sabit katsayılarıdır. (3.5) and (3.8)'den

$$b_2 = \frac{P}{p} b_1 = \Gamma \sin \rho(t) - \Delta \cos \rho(t),$$

$$b_3 = \frac{1}{r-P} \left(\frac{P}{p} \right)' b_1 = \Gamma \cos \rho(t) + \Delta \sin \rho(t).$$

eşitlikleri bulunur. Yukarıdaki denklemlerden

$$\Gamma = b_1 \left(\frac{P}{p} \sin \rho(t) + \frac{1}{r-P} \left(\frac{P}{p} \right)' \cos \rho(t) \right),$$

$$\Delta = b_1 \left(\frac{1}{r-P} \left(\frac{P}{p} \right)' \sin \rho(t) - \frac{P}{p} \cos \rho(t) \right),$$

eşitlikleri elde edilir ki bu da

$$\Gamma^2 + \Delta^2 = b_1^2 \left(\left(\frac{P}{p} \right)^2 + \frac{1}{(r-P)^2} \left(\left(\frac{P}{p} \right)' \right)^2 \right).$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$\left(\frac{P}{p} \right)^2 + \frac{1}{(r-P)^2} \left(\left(\frac{P}{p} \right)' \right)^2 = \text{sabit} \quad (3.9)$$

ifadesinin sabit olduğunu göstermiş olduk. Tersine, (3.9)'daki durum sağlansın. Bu durumda $j(\mathbf{T}, \Phi) = c$ eşitliğini sağlayan Φ sabit birim vektörünü daima elde edebiliriz.

Birim vektör

$$\Phi = \mathbf{T}_F + \frac{P}{p} \mathbf{M}_2 + \frac{1}{r-P} \left(\frac{P}{p} \right)' \mathbf{M}_3$$

şeklinde tanımlanırsa her iki tarafın türevi alındığında $\Phi' = 0$ olduğu açıkça görülür. Bu durum bize Φ sabit bir vektör olduğunu gösterir. Sonuç olarak, ζ eğrisi \mathbb{H} de bir genel helistir. ■

Şimdi küresel hareket yardımıyla Kuarterniyonik çatı elde edilecektir. Ardından Kuarterniyonik eğrinin \mathbb{R}^4 de helis olma karakterizasyonları verilecektir. İlk olarak dönme matrisleriyle ilgili temel tanım ve kavramlar verilecektir.

$\mathfrak{R}(t) \in SO(n)$ olmak üzere

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{R}^T(t)] = [I_n]$$

denklemini sağlar. Her iki tarafın türevi alındığında,

$$\begin{aligned} [\dot{\Delta}\Delta^T] + [\Delta\dot{\Delta}^T] &= [0] \\ [\dot{\Delta}\Delta^T] &= -[\Delta\dot{\Delta}^T] \\ [\dot{\Delta}\Delta^T] &= -[\dot{\Delta}\Delta^T]^T \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $[\dot{\Delta}\mathfrak{R}^{-1}] = [\dot{\Delta}\Delta^T] = [\nabla]$ tanjant operatörü antisimetriktir. $[\nabla]$ matrisi, $[\Delta(t)]$ dönme matrisinin açısal hız matrisidir. Şimdi $SO(3)$ uzay dönmelerinde, bir sabit açısal hız matrisi $[\nabla]$ verildiğinde,

$$[\dot{\Delta}(t)] = [\nabla][\Delta(t)]$$

diferensiyel denklemini elde edilir. Bu denklemin bir çözümü,

$$\Delta(t) = e^{t[\nabla]}$$

ile dönmelerin 1-parametrelili grubu elde edilir.

Bu üstel ifadeyi farklı biçimde yazarsak,

$$[\nabla] = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $[\nabla]$ antisimetrik matrisine karşılık gelen vektör

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ olmak üzere

$\eta = \|w\| = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}$, $\frac{[\nabla]}{\eta} = [\Omega]$ ve $\frac{\varepsilon_1}{\eta} = e$, $\frac{\varepsilon_2}{\eta} = f$, $\frac{\varepsilon_3}{\eta} = g$ denirse,

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -g & f \\ g & 0 & -e \\ -f & e & 0 \end{bmatrix} \text{ antisimetrik matrisini elde ederiz ve } e^2 + f^2 + g^2 = 1 \text{ dir.}$$

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} 0 & -g & f \\ g & 0 & -e \\ -f & e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -g & f \\ g & 0 & -e \\ -f & e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g^2 - f^2 & ef & eg \\ ef & -g^2 - e^2 & fg \\ eg & fg & -e^2 - f^2 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega^3] = [\Omega] [\Omega^2] = \begin{bmatrix} 0 & -g & f \\ g & 0 & -e \\ -f & e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g^2 - f^2 & ef & eg \\ ef & -g^2 - e^2 & fg \\ eg & fg & -e^2 - f^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g & -f \\ -g & 0 & e \\ f & -e & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega] = [\Omega] \quad [\Omega^2] = [\Omega^2]$$

$$[\Omega^3] = -[\Omega] \quad [\Omega^4] = [\Omega] [\Omega^3] = -[\Omega^2]$$

$$[\Omega^5] = [\Omega] [\Omega^4] = -[\Omega^3] = [\Omega] \quad [\Omega^6] = [\Omega] [\Omega^5] = [\Omega^2], \dots$$

$$\Delta(t) = e^{t[\nabla]} = e^{\eta t[\Omega]}$$

$$\Delta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta t[\Omega])^n}{n!}$$

$$\Delta(t) = I + \frac{\eta t}{1!} [\Omega] + \frac{(\eta t)^2}{2!} [\Omega^2] + \frac{(\eta t)^3}{3!} \underbrace{[\Omega^3]}_{-\Omega} + \frac{(\eta t)^4}{4!} \underbrace{[\Omega^4]}_{-\Omega^2} + \frac{(\eta t)^5}{5!} \underbrace{[\Omega^5]}_{\Omega} + \frac{(\eta t)^6}{6!} \underbrace{[\Omega^6]}_{\Omega^2} + \dots$$

$$\Delta(t) = I + \left(\frac{\eta t}{1!} - \frac{(\eta t)^3}{3!} + \frac{(\eta t)^5}{5!} + \dots \right) [\Omega] + \left(\frac{(\eta t)^2}{2!} - \frac{(\eta t)^4}{4!} + \frac{(\eta t)^6}{6!} + \dots \right) [\Omega^2]$$

$$\Delta(t) = I + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\eta t)^{2n+1}}{(2n+1)!} [\Omega] - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\eta t)^{2n}}{(2n)!} [\Omega^2]$$

$$\Delta(t) = I + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\eta t)^{2n+1}}{(2n+1)!} [\Omega] + \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\eta t)^{2n}}{(2n)!} \right) [\Omega^2]$$

$$\Delta(t) = I + \sin(\eta t) [\Omega] + (1 - \cos(\eta t)) [\Omega^2]$$

elde edilir. Bu $[\nabla]$ açısal hız matrisinden elde edilen ε ekseninde bir dönmenin denklemidir. ηt açısı dönme açısı olmak üzere, cisim ε etrafında η sabit açısal hızıyla dönmektedir.

Örnek 3.2

$$k \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ olmak üzere } [\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ antisimetrik matrisini olmak üzere}$$

Bu antisimetrik matristen Cayley formülü yardımıyla bir ortogonal dönme matrisi oluşturalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k) &= [I_3 + \mathcal{B}(k)] [I_3 - \mathcal{B}(k)]^{-1} \\ \mathcal{A}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ \mathcal{A}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(1+k^2) & 0 & k/(1+k^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -k/(1+k^2) & 0 & 1/(1+k^2) \end{bmatrix} \\ \mathcal{A}(k) &= \begin{bmatrix} (1-k^2)/(1+k^2) & 0 & 2k/(1+k^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -2k/(1+k^2) & 0 & (1-k^2)/(1+k^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\det \mathcal{A}(k) = 1$$

$$\text{ve } \mathcal{A}^{-1}(k) = \begin{bmatrix} (1-k^2)/(1+k^2) & 0 & -2k/(1+k^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k/(1+k^2) & 0 & (1-k^2)/(1+k^2) \end{bmatrix} = \mathcal{A}^T(k)$$

olduğundan

$\mathcal{A}(k)$ ortogonal bir dönme matrisidir. Dönme açısı ϕ ise

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{iz\mathcal{A} - 1}{2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}, \\ \sin \phi &= \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \frac{2k}{1+k^2}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(k) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}(k)$, y -ekseni etrafında ϕ açısı kadar dönme yapar.

Şimdi $\mathcal{A}(k)$ dönme matrisinin tanjant operatörünü (açısal hız matrisini) bulalım.

$$[\dot{\mathcal{A}}(k)] = \begin{bmatrix} -\sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & -\sin \phi \end{bmatrix}$$

$$[\nabla] = [\dot{\mathcal{A}}\mathcal{A}^{-1}(k)]$$

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} -\sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & -\sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Şimdi ise küresel hareket ve kuaterniyonik çatı bağlantısı yapılacaktır. Birim kuaterniyonlar, küresel hareketi tanımlamak için kullanılabilir. Bu konuyu, O.Bothema ve B.Roth *Theoretical Kinematics* adlı kitabında ayrıntılı bir şekilde ele almıştır. Kuaterniyonlarla, dönme dönüşümlerinin tanımlanması son zamanlarda bilgisayar ve animasyon teknolojilerinde sıkça kullanılmaktadır. Birim kuaterniyon yardımıyla dönme matrisinin kurulması çok daha kolaydır.

$S(t) = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix}$ orthogonal matris olsun. $\dot{S}S^T = \nabla(t)$ olacak şekilde açısal hız matrisi vardır. Bu açısal hız matrisine karşılık gelen vektör $\nabla(t) \cong \vec{w}(t)$ Darboux vektörüdür. Darboux vektörü

$$w \times s_1 = s'_1,$$

$$w \times s_2 = s'_2,$$

$$w \times s_3 = s'_3$$

eşitliğini sağlar. Herhangi bir dönme matrisi \mathcal{A} için $\mathcal{Q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ olacak şekilde bir birim kuaterniyon bulunabilir. Bu birim kuaterniyon

$$\mathcal{A}\vec{\lambda} = \mathcal{Q}(t) * \vec{\lambda} * \bar{\mathcal{Q}}(t) \quad (3.10)$$

denklemini sağlar. Burada $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^3$ vektörü $\vec{\lambda} = (0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ kuaterniyon şeklinde tanımlanır. Ayrıca ” * ”, kuaterniyonik çarpım ve \bar{Q} ise Q kuaterniyonun eşleniğidir.

Böylece

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}}{\|\dot{Q}\|} &= N(t), \\ 2\dot{Q}(t) * \bar{Q}(t) &= \vec{w}(t), \\ w_b(t) &= \frac{w(t)}{\|w(t)\|}, \quad (\text{birim}) \\ \frac{w'_b}{\|w'_b\|} &= z_1, \\ w_b \times z_1 &= z_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitlikleri yazıldığında Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} w_b \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & m & 0 \\ -m & 0 & n \\ 0 & -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada m ve n , $\{w_b, z_1, z_2\}$ çatısına göre eğriliklerdir. Bu durumda

$$\begin{aligned} w_b * Q &= N, \\ z_1 * Q &= Y, \\ z_2 * Q &= Z \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\begin{bmatrix} Q \\ N \\ Y \\ Z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{K} & 0 & 0 \\ -\mathcal{K} & 0 & m & 0 \\ 0 & -m & 0 & n - \mathcal{K} \\ 0 & 0 & \mathcal{K} - n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ N \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

kuaterniyonik çatısı elde edilir. Burada \mathcal{K}, m ve $n - \mathcal{K}$, $\beta(t) = \int Q(t)dt$ olmak üzere β kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik çatıya göre eğrilikleridir (Aksar vd. 2023).

Örnek 3.3

$$\zeta : I \rightarrow E^3$$

$$t \rightarrow \zeta(t)$$

eğrisinin Frenet çatısı $\{T, X, Y\}$ olsun. Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ Y \end{bmatrix},$$

şeklinde olmak üzere $\zeta(t)$ eğrinin eğrilikleri yardımıyla kuaterniyonik eğrinin \mathbb{R}^4 de helis olma karakterizasyonunu verilecektir. $\mathcal{B}(t) = \begin{bmatrix} T & X & Y \end{bmatrix}$ ortogonal matris olsun. ζ eğrisinin darboux vektörü

$$w = k_2 T + k_1 Y$$

dir.

$$w_b = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} T + \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} Y \quad (\text{birim})$$

olmak üzere,

$$\begin{cases} C = \frac{X'}{\|X'\|}, \\ w_b = X \times C, \\ f = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \\ g = \frac{k_1^2 (\frac{k_2}{k_1})'}{k_1^2 + k_2^2} = \sigma f \end{cases} \quad (3.13)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{bmatrix} w_b \\ -C \\ X \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & f \\ 0 & -f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b \\ -C \\ X \end{bmatrix}$$

şeklinde çatı denklemleri elde edilir. g ve f , $\{w_b, -C, X\}$ çatısına göre eğriliklerdir. (Uzunoğlu vd. 2016).

$\beta(t) = \int Q(t) dt$ Kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleri için aşağıdaki karakterizasyonlar verilebilir.

$$\begin{cases} \mathcal{K} = \frac{\|w_b\|}{2} = \frac{f}{2}, \\ f = \sqrt{k_2^2 + k_1^2}, \\ m = g = \sigma f, \\ n = f \end{cases} \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.14)'deki eşitlikler (3.9) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3 $\beta(t) = \int Q(t)dt$ bir helistir ancak ve ancak $\frac{1}{4} \left(\frac{f}{g}\right)^2 + \frac{1}{f^2} \left(\left(\frac{f}{g}\right)'\right)^2 = c$,
($c \in \mathbb{R}$)

Sonuç 3.4 $\zeta : I \rightarrow E^3$

$$\begin{cases} k_1 = \mu \cos \phi, \\ k_2 = \mu \sin \phi \end{cases}$$

olsun. ζ sabit precessiyonlu bir eğri olsun. Burada k_1 ve k_2 , γ eğrisinin Frenet çatısına göre eğrilikleridir. μ keyfi bir sabittir. (3.10)'daki eşitlikler göz önüne alındığında f ve g eğrilikleri sabit çıkar. Bu da $\beta(t) = \int Q(t)dt$ eğrisinin bir C.C.R eğrisi olduğunu gösterir. Gerçekten \mathcal{K}, m, n eğrilikleri sabit olup aynı zamanda oranları da sabittir (Monterde 2004).

Sonuç 3.5 $\frac{f}{g} = \mu$ sabit olsun. Bu durumda, ζ helistir. (**Lancert teoremi**)

$\beta(t) = \int Q(t)dt$, eğrisi de \mathbb{R}^4 'de bir C.C.R eğrisidir.

Gerçekten,

$$\begin{cases} \mathcal{K} = c_1 = \frac{f}{2}, \\ c_2 = g, \\ c_3 = n - \mathcal{K} = f - \frac{f}{2}, \\ = \mathcal{K} \end{cases}$$

elde edilir.

$$\begin{cases} \frac{c_1}{c_2} = \frac{f}{2g} = \text{sabit}, \\ \frac{c_2}{c_3} = \frac{2g}{f} = \text{sabit} \end{cases}$$

olduğundan dolayı $\beta(t) = \int Q(t)dt$, \mathbb{R}^4 de bir C.C.R eğrisidir.

3.3 Minimum Açısal Hızlı Hareket ve Kuaterniyonik Helisler

Bu bölümde \mathbb{R}^3 de verilen bir eğri yardımıyla RMM tanımlanacaktır. Bu RMM'ye göre helis olma karakterizasyonu verilecektir. $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^3$ de bir eğri ve $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı

olsun. $\{T, X_1, X_2\}$, γ eğrisi üzerinde RMF olsun. Bu durumda $\{T, X_1, X_2\}$ çatısı $\int T dt$ üzerinde bir RMF'dir. $\Lambda e_1 = T = \gamma'(t)$ olduğundan $\Lambda = \begin{bmatrix} T & X_1 & X_2 \end{bmatrix}$ matrisi bize e_1 noktasında yörüngesi T olan RMM'yi verir. Böylelikle RMM'nin Darboux vektörü $\mathcal{W} = \kappa B$ ve \mathcal{W}_b birim vektör olmak üzere $\mathcal{W}_b = B$ dir. Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3 $\xi(s) \subset \mathbb{R}^3$ helis olmayan bir eğri olsun. ξ üzerinde RMF'ye karşılık gelen kuaterniyonik eğri \mathcal{Q} olmak üzere $\int \mathcal{Q}(s) ds$ helistir ancak ve ancak

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon_1^2} \left(\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)' \right)^2 = c^2$$

olmasıdır. $\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \neq c \right)$

İspat. $\xi(s)$ eğrisi üzerinde RMF'ye karşılık gelen kuaterniyonik eğri \mathcal{Q} olsun. Bu durumda (3.11) deki eşitlikten

$$2\dot{\mathcal{Q}}(s) * \bar{\mathcal{Q}}(s) = \epsilon_1 B$$

elde edilir. Buradan da

$$2\|\dot{\mathcal{Q}}(s)\| = \epsilon_1$$

elde edilir. (3.14) deki eşitlikler yardımıyla

$$\mathcal{K} = \frac{\epsilon_1}{2},$$

$$r - \mathcal{K} = \epsilon_1 - \frac{\epsilon_1}{2} = \frac{\epsilon_1}{2},$$

$$k = \epsilon_2$$

eğrilikleri (3.9) da yerine yazılırsa

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon_1^2} \left(\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)' \right)^2 = c^2$$

elde edilir. ■

Örnek 3.4 $\gamma(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s, \frac{-\sqrt{3}}{2} \cos s, \frac{1}{2}s \right)$ helis eğrisi için,

1. $\gamma(s)$ 'nin T teğetler göstergesi için yörüngesi T olan RMM'yi bulalım.
2. Bu RMM'ye karşılık gelen \mathcal{Q} kuaterniyonunu belirleyelim.
3. \mathcal{Q} kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik çatısını ve eğriliklerini bulalım.

4. $\mathcal{W} = \frac{\sqrt{3}}{2}B$ için \mathbb{R}^4 de C.C.R eğrisini bulalım.

Çözüm

1. Yörüngesi T olan RMM'yi bulalım. $\gamma(\rho)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, \Gamma, \Sigma\}$ olmak üzere,

$$T(\rho) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \rho, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \rho, \frac{1}{2} \right),$$

$$\Gamma(\rho) = (-\sin \rho, \cos \rho, 0),$$

$$\Sigma(\rho) = \left(-\frac{1}{2} \cos \rho, -\frac{1}{2} \sin \rho, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

şeklinde bulunur. $\gamma(s)$ eğrisinin $\{T, \Gamma, \Sigma\}$ çatısına göre eğrilikleri ϵ_1 ve ϵ_2 olmak üzere,

$$\epsilon_1(\rho) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\epsilon_2(\rho) = \frac{1}{2}$$

eşitlikleri sağlanır. $\varphi = \int \frac{1}{2} d\rho$ olmak üzere $\{T, \Gamma, \Sigma\}$ çatısı T yörüngesi etrafında φ kadar dönme yaptığında oluşan $\{T, Y_1, Y_2\}$ çatısı RMF'dir. Burada

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \cos \varphi N - \sin \varphi B, \\ Y_2 &= \sin \varphi N + \cos \varphi B \end{aligned} \right\}$$

dir. $\gamma(s)$ üzerinde RMF için $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -Y_2 & Y_1 & T \end{bmatrix}$, **Teorem 3.1** gereğince RMM belirtir. Burada, RMM altında $e_3 = (0, 0, 1)$ noktasının yörüngesi T dir. $\{T, Y_1, Y_2\}$ RMF'nin dönme matrisi $\mathcal{R}(\rho)$ olmak üzere matrisi

$$\mathcal{R}(\rho) = \begin{bmatrix} \sin(\rho) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos(\rho) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \sin(\rho) - \frac{1}{2} \cos(\rho) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\rho) \\ -\cos \rho \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin(\rho) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) & \cos(\rho) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin(\rho) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \rho \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

şeklindedir.

2. (3.15) de verilen $\mathcal{R}(\rho)$ küresel hareketine karşılık gelen Q birim kuaterniyonunu elde edelim. (3.10)'daki eşitlik kullanılarak $\mathcal{R}\vec{\lambda} = Q(t) * \vec{\lambda} * \bar{Q}(t)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^3$

denkleminde gerekli hesaplamalar yapıldığında birim kuaterniyon

$$Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\rho}{4}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\rho}{4}\right), \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\rho}{4}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\rho}{4}\right) \right)$$

olarak bulunur.

3. (3.12)'deki metot kullanıldığında, kuaterniyonik çatı

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\rho}{4}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\rho}{4}\right), \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\rho}{4}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\rho}{4}\right) \right), \\ N &= \left(-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\rho}{4}\right), -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{3\rho}{4}\right), -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{3\rho}{4}\right), \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\rho}{4}\right) \right), \\ Y &= \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\rho}{4}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{3\rho}{4}\right), -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{3\rho}{4}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\rho}{4}\right) \right), \\ Z &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\rho}{4}\right), -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\rho}{4}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\rho}{4}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\rho}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Şimdi ise Q kuaterniyonik eğrinin $\{Q, N, Y, Z\}$ çatısına göre eğriliklerini bulalım.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{\|\mathcal{W}\|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ k &= \tau = \frac{1}{2}, \\ r &= \kappa = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ r - \mathcal{K} &= \frac{\sqrt{3}}{4} = \mathcal{K} \end{aligned} \right\}$$

eğrilikleri elde edilir.

Burada \mathcal{K} , k , $r - \mathcal{K}$, $Q(\rho)$ kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleridir. **Sonuç 3.5**'den 3-boyutlu uzayda kuaterniyonik eğrinin eğriliklerini aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\left. \begin{aligned} K &= c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ k &= c_2 = \frac{1}{2}, \\ r - K &= c_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

dir. Burada c_1, c_2, c_3 'ler $\int Q(\rho)d\rho$ eğrisinin Frenet eğrilikleridir.

4. \mathbb{R}^4 de C.C.R eğrisini elde edelim. (3.16)'da elde ettiğimiz eğriliklerin oranları

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

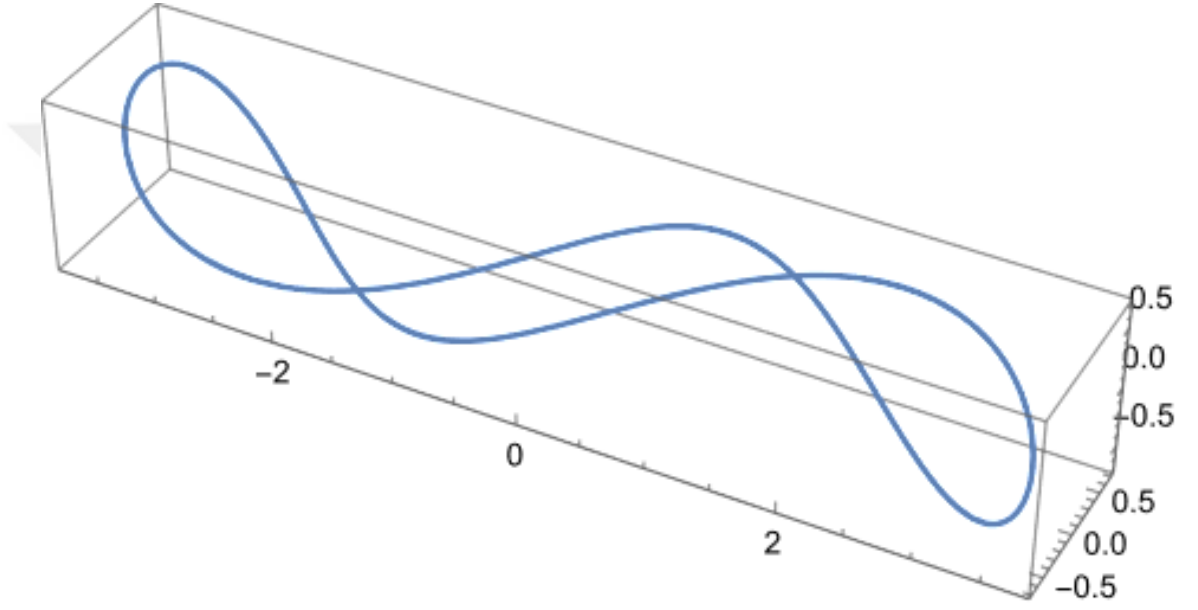
ve

$$\frac{c_2}{c_3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

olduğundan $\beta(s) = \int Q(\rho)d\rho$ eğrisi \mathbb{R}^4 'de bir C.C.R eğrisidir. C.C.R eğrisi

$$\beta(\rho) = \left(2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\rho}{4}\right), \frac{2}{3} \cos\left(\frac{3\rho}{4}\right), \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3\rho}{4}\right), -2\sqrt{3} \cos\left(\frac{\rho}{4}\right) \right)$$

biçimindedir. $\beta(s)$ C.C.R eğrisinin \mathbb{R}^3 de projeksiyonu şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 C.C.R eğrisinin projeksiyon görüntüsü

4. \mathbb{E}_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA MİNİMUM AÇISAL HIZLI HAREKET

Bu bölümde 3-boyutlu Lorentz Minkowski uzayında RMF kullanılarak RMM tanımlanacaktır. Bu çalışmanın 3.bölümünde 3-boyutlu Öklid Uzayında birim küre üzerinde RMM hareketin inşası için bir metot verildi. Ayrıca RMM ve helisler arasındaki ilişki incelendi. Burada da 3-boyutlu Öklid uzayı ve 3-boyutlu Lorentz Minkowski uzayındaki RMM'nin benzerlikleri ve farklılıkları ele alınacaktır. İlk olarak Split kuaterniyonlarla dönme dönüşümleri ve uygulamaları incelenecek daha sonra RMM'nin inşa metodu verilecektir.

4.1 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Split Kuaterniyonlar ile Dönme Dönüşümü

Bu kısımda, 3-boyutlu Minkowski uzayında Birim timelike kuaterniyonlarda dönme konusu ele alınacaktır (Özdemir ve Ergin 2006)

Dönme dönüşümünü temsil etmek için ortonormal matrisler, Euler açıları ve kuaterniyonlar gibi kullanılan birçok yöntem vardır. Bunların arasından kuaterniyonlar en kullanışlı yöntemdir. Ortonormal matrislerle karşılaştırdığımızda, bir ortonormal matrisin her kolonunun birim vektör olması ve birbirine dik olması gerektiğinden bazı kısıtlamalar mevcuttur. Bu kısıtlamalar, dokuz sayı kullanarak ortonormal bir matris oluşturmayı zorlaştırır. Ancak bir birim kuaterniyon kullanılarak kolayca bir dönme matrisi oluşturulabilir. Yani bir dönüşü temsil etmek için dört sayı yeterlidir, öyle ki kuaterniyon normunun 1'e eşit olması gereken tek bir kısıtlama vardır.

Kuaterniyonlar Öklid uzayında bir dönme belirtir. Eğer $\phi = 0$ ise o zaman bu dönme $r = (1, 0, 0, 0)$ kuaterniyonu ile temsil edilir. $r = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ kuaterniyonu kullanılarak bir dönme matrisi elde edilebilir. \mathcal{D}_r , r kuaterniyonuna karşılık gelen dönme matrisi olmak üzere

$$\mathcal{D}_r = \begin{bmatrix} \mu_0^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 & -2\mu_0\mu_3 + 2\mu_1\mu_2 & 2\mu_0\mu_2 + 2\mu_1\mu_3 \\ 2\mu_1\mu_2 + 2\mu_3\mu_0 & \mu_0^2 - \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 & 2\mu_2\mu_3 - 2\mu_1\mu_0 \\ 2\mu_1\mu_3 - 2\mu_2\mu_0 & 2\mu_1\mu_0 + 2\mu_2\mu_3 & \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_3^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde 3-boyutlu Öklid uzayında dönme belirtir (Özdemir ve Ergin 2006).

Ayrıca x, y, z eksenleri etrafında Θ açısı kadar dönmeyi ifade eden matrisler :

$$\mathcal{D}_{r_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varrho & -\sin \varrho \\ 0 & \sin \varrho & \cos \varrho \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_{r_y} = \begin{pmatrix} \cos \varrho & 0 & \sin \varrho \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varrho & 0 & \cos \varrho \end{pmatrix} \quad \text{ve}$$

$$\mathcal{D}_{r_z} = \begin{pmatrix} \cos \varrho & -\sin \varrho & 0 \\ \sin \varrho & \cos \varrho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olacaktır (Özdemir ve Ergin 2006).

Bu dönme matrislerini sırasıyla $r_x = (\cos \frac{\varrho}{2}, \sin \frac{\varrho}{2}, 0, 0)$, $r_y = (\cos \frac{\varrho}{2}, 0, \sin \frac{\varrho}{2}, 0)$ ve $r_z = (\cos \frac{\varrho}{2}, 0, 0, \sin \frac{\varrho}{2})$ birim kuaterniyonlar şeklinde ifade edebiliriz.

Şimdi ise bu kısımda 3 boyutlu Minkowski uzayında dönmeleri gerçekleştirmek için birim timelike kuaterniyonların nasıl kullanıldığı ve bir dönüşü nasıl temsil ettiği gösterilecektir. İlk olarak tanımlanacak olan $\hat{\mathcal{D}}$ dönüşümünün bir dönme belirttiğini ifade eden bir teorem verilecektir. Ardından timelike split kuaterniyonun vektörel kısmının timelike veya space-like olmasına göre dönme türünün değiştiği gösterilecektir. $\mathbb{T}\hat{\mathbb{S}}$ ve $\mathbb{T}\hat{\mathbb{S}}_b$ sırasıyla timelike split ve birim timelike split kuaterniyonların cümlesini temsil edecektir.

Teorem 4.1 r ve p timelike kuaterniyonlar olsun. Bu durumda

$$\hat{\mathcal{D}} : \mathbb{T}\hat{\mathbb{S}} \rightarrow \mathbb{T}\hat{\mathbb{S}}, \quad \hat{\mathcal{D}}_r(p) = rpr^{-1}$$

şeklinde tanımlanan $\hat{\mathcal{D}}$ dönüşümü, normu, p timelike kuaterniyonun skalar kısmını koruyan bir lineer dönüşümdür (Özdemir 2020).

İspat. $c \in \mathbb{R}$ ve $q_1, q_2 \in \hat{\mathbb{S}}$ split kuaterniyonları olmak üzere,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_r(cq_1 + q_2) &= r(cq_1 + q_2)r^{-1} = (rcq_1r^{-1}) + (qq_2r^{-1}) \\ &= c(rq_1r^{-1}) + (rq_2r^{-1}) \\ &= c\hat{\mathcal{D}}_r(q_1) + \hat{\mathcal{D}}_r(q_2) \end{aligned}$$

olduğundan $\hat{\mathcal{D}}_r$ dönüşümü lineerdir. $\hat{\mathcal{D}}_r(p)$ dönüşümünün skalar kısmı ,

$$S(\hat{\mathcal{D}}_r(p)) = S(rpr^{-1}) = S(rr^{-1}p) = Sp$$

dir. Böylece $\hat{\mathcal{D}}_r$ dönüşümü p kuaterniyonun skaler kısmını değiştirmez. Ayrıca

$$\|\hat{\mathcal{D}}_r(p)\| = \|rpr^{-1}\| = \|r\|\|p\|\|r^{-1}\| = \|p\|\|rr^{-1}\| = \|p\|$$

olduğu için $\hat{\mathcal{D}}_r$ dönüşümü normu korur. ■

Teorem 4.2 Bir $r = r_1 + r_2i + r_3j + r_4k$ birim timelike kuaterniyon olmak üzere,

$$\hat{\mathcal{D}}_r : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3, \quad \hat{\mathcal{D}}_r(p) = rpr^{-1}$$

dönme dönüşümüne karşılık gelen matris:

$$\hat{\mathcal{D}}_r = \begin{bmatrix} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 & 2r_1r_4 - 2r_2r_3 & -2r_1r_3 - 2r_2r_4 \\ 2r_2r_3 + 2r_4r_1 & r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + r_4^2 & -2r_3r_4 - 2r_2r_1 \\ 2r_2r_4 - 2r_3r_1 & 2r_2r_1 - 2r_3r_4 & r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

dir. Bu matris $\hat{\mathcal{D}}^T I^* \hat{\mathcal{D}} = I^*$ ve $\det \hat{\mathcal{D}}_r = (r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2)^3 = 1$ eşitliklerini sağlar. Kısaca, $\hat{\mathcal{D}}_r$ matrisi 3 boyutlu Minkowski uzayında bir dönme matrisidir (Özdemir ve Ergin 2006).

İspat. $\hat{\mathcal{D}}_r$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris:

$$\hat{\mathcal{D}}_r = \begin{bmatrix} -\hat{\mathcal{D}}_r(i) & \hat{\mathcal{D}}_r(j) & \hat{\mathcal{D}}_r(k) \end{bmatrix}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_r(i) &= rir^{-1} \\ &= (r_1 + r_2i + r_3j + r_4k)i(r_1 - r_2i - r_3j - r_4k) \\ &= (r_1i - r_2 - r_3k + r_4j)(r_1 - r_2i - r_3j - r_4k) \\ &= ((r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)i + (2r_2r_3 + 2r_4r_1)j + (2r_2r_4 - 2r_3r_1)k \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_r(j) &= rjr^{-1} \\ &= (r_1 + r_2i + r_3j + r_4k)j(r_1 - r_2i - r_3j - r_4k) \\ &= (r_1j + r_2k - r_3 + r_4i)(r_1 - r_2i - r_3j - r_4k) \\ &= (2r_1r_4 - 2r_2r_3)i + (r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + r_4^2)j + (r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2)k \end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{D}}_r(k) &= rkr^{-1} \\
&= (r_1 + r_2i + r_3j + r_4k)k(r_1 - r_2i - r_3j - r_4k) \\
&= (r_1k - r_2j - r_3i + r_4)(r_1 - r_2i - r_3j - r_4k) \\
&= (-2r_1r_3 - 2r_2r_4)i + (-2r_3r_4 - 2r_2r_1)j + (r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2)k
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.1) dönme matrisi elde edilmiş oldu. $r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2 = 1$ olduğu için $\det \hat{\mathcal{D}}_r = (r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2)^3 = 1$ elde edilir. Aynı zamanda $I^* = \text{diag}(-1, 1, 1)$ köşegen matrisi olmak üzere, $\hat{\mathcal{D}}^T I^* \hat{\mathcal{D}} = I^*$ olduğundan $\hat{\mathcal{D}} \in SO(1, 2)$ olur öyle ki $\hat{\mathcal{D}}$, 3 boyutlu Minkowski uzayında bir dönme matrisidir. ■

Bir birim timelike kuaterniyonun vektörel kısmı spacelike veya timelike olması durumunda, dönme hiperbolik veya küresel olur. Eğer vektörel kısmı bir spacelike vektör ise r kuaterniyonu hiperbolik dönme, eğer timelike ise r kuaterniyonu bir küresel dönme belirtir.

Teorem 4.3 $r = \cosh\psi + \mu_0 \sinh\psi$ birim timelike kuaterniyonu verilsin. Bu kuaterniyonun vektörel kısmı spacelike ve μ null olmayan bir lorentziyen vektör olmak üzere,

$$\hat{\mathcal{D}}_r(\mu) = r\mu r^{-1}$$

dönüşümü, μ_0 spacelike eksenini etrafında 2ψ açısı kadar hiperbolik dönme yapar (Özdemir ve Ergin 2006).

İspat. İlk olarak, $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\}$ üçlüsünü alalım. Bu durumda

$$\mu_0 \times_L \mu_1 = \mu_2, \quad \mu_2 \times_L \mu_0 = -\mu_1, \quad \mu_1 \times_L \mu_2 = \mu_0$$

, eşitlikleri sağlanır. Ayrıca μ ve μ_0 vektörlerinin gerdiği düzlemde $\langle \mu_0, \mu_1 \rangle_L = 0$ olacak şekilde bir μ_1 timelike vektörü bulunur. Böylece μ vektörünün timelike veya spacelike olması durumuna göre sırasıyla

$$\mu = (\cosh \rho)\mu_0 + (\sinh \rho)\mu_1 \quad \mu = (\sinh \rho)\mu_0 + (\cosh \rho)\mu_1$$

eşitlikleri vardır. Şimdi ise $\hat{\mathcal{D}}_r(\mu) = r\mu r^{-1}$ dönüşümünün μ_0 ve μ_1 vektörlerini nasıl değiştirdiğini gösterelim. $\vec{V}r$ vektörel kısım μ_0 vektörüne paralel olduğundan, $r\mu_0 = \mu_0 r$ eşitliği vardır öyle ki

$$\hat{\mathcal{D}}_r(\mu_0) = r\mu_0 r^{-1} = \mu_0 r r^{-1} = \mu_0$$

. elde edilir. Bu durum , μ_0 vektörünün $\hat{\mathcal{D}}_r$ dönüşümü altında değişmediğini gösterir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{D}}_r(\mu_1) &= r\mu_1 r^{-1} = (\cosh \psi + \mu_0 \sinh \psi) \mu_1 (\cosh \psi - \mu_0 \sinh \psi) \\ &= \mu_1 \cosh^2 \psi - \cosh \psi \sinh \psi (\mu_1 \mu_0) + \cosh \psi \sinh \psi (\mu_0 \mu_1) \\ &\quad - (\mu_0 \mu_1) \mu_0 \sinh^2 \psi\end{aligned}\quad (4.2)$$

elde edilir. Bu denklemden ortogonal has split kuaterniyonlar için $\mu_1 \mu_0 = \mu_1 \times_L \mu_0$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ Lorentz vektörleri olmak üzere,

$$\vec{\zeta}_1 \times_L (\vec{\zeta}_2 \times_L \vec{\zeta}_3) = \langle \vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2 \rangle_L \vec{\zeta}_3 - \langle \vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_3 \rangle_L \vec{\zeta}_2$$

özdeşliğinden ve ayrıca μ_0 birim spacelike olduğundan

$$(\mu_0 \mu_1) \mu_0 = (\mu_0 \times_L \mu_1) \times_L \mu_0 = -\mu_1$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.2)'de yerine yazılırsa,

$$\hat{\mathcal{D}}_r(\mu_1) = \mu_1 \cosh 2\psi + \mu_2 \sinh 2\psi$$

olarak bulunur. Bu durum bize, μ Lorentziyen vektörünün μ_0 etrafında 2ψ açısı kadar hiperbolik dönme yaptığını gösterir (Özdemir ve Ergin 2006). ■

Örnek 4.1 $r = 3 + i + 3j$ split kuaterniyonu verilsin. Bu durumda

- Split kuaterniyonunu sınıflandıralım.
- Kuaterniyona karşılık gelen dönme matrisini bulalım.
- $v = (2, 2, 1)$ spacelike vektörünü dönme dönüşümüne göre bulalım.

Çözüm

- $r = 3 + i + 3j$ kuaterniyonu için,

$$\begin{aligned}N_r &= r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2 \\ &= 9 + 1 - 9 = 1 > 0\end{aligned}$$

olduğundan r timelike kuaterniyondur.

(b). r kuaterniyonunun vektörel kısmı v_r olmak üzere, $v_r = (1, 3, 0)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\langle v_r, v_r \rangle_L &= \langle (1, 3, 0), (1, 3, 0) \rangle_L \\ &= -1 + 9 = 8 > 0\end{aligned}$$

olduğundan vektörel kısmı spacelikettir. Bu durumda hiperbolik dönme söz konusudur. r kuaterniyonuna karşılık gelen matris (4.1)'den

$$\hat{\mathcal{D}}_r = \begin{bmatrix} 19 & -6 & -18 \\ 6 & -1 & -6 \\ -18 & 6 & 17 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$r = 3 + i + 3j = 3 + 2\sqrt{2} \left(\frac{i + 3j}{2\sqrt{2}} \right)$$

olduğundan r timelike kuaterniyonu $\mu_0 = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}, 0)$ spacelike eksenini etrafında $\cosh\psi = 3$ olmak üzere, 2ψ kadar hiperbolik dönme yapar.

(c). $v = (2, 2, 1)$ spacelike vektörü $\hat{\mathcal{D}}_r$ dönüşümü altında,

$$\hat{\mathcal{D}}_r(v) = \begin{bmatrix} 19 & -6 & -18 \\ 6 & -1 & -6 \\ -18 & 6 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

vektörü elde edilir.

Teorem 4.4 $r = \cos\varphi + \nu_0 \sin\varphi$ birim timelike kuaterniyonu verilsin. Bu kuaterniyonun vektörel kısmı timelike ve ν null olmayan bir lorentziyen vektör olmak üzere,

$$\hat{\mathcal{D}}_r(\nu) = r\nu r^{-1}$$

dönüşümü, ν_0 spacelike eksenini etrafında 2φ açısı kadar dönme yapar (Özdemir ve Ergin 2006).

İspat. İlk olarak, $\{\nu_0, \nu_1, \nu_2\}$ üçlüsünü alalım. Bu durumda

$$\nu_0 \times_L \nu_1 = \nu_2, \quad \nu_2 \times_L \nu_0 = \nu_1, \quad \nu_1 \times_L \nu_2 = -\nu_0$$

, eşitlikleri vardır. Aynı zamanda ν ve ν_0 vektörlerinin geldiği düzlemde $\langle \nu_0, \nu_1 \rangle_L = 0$ olacak şekilde bir ν_1 spacelike vektörü bulunur. Böylece ν vektörünün timelike veya spacelike olması durumuna göre sırasıyla

$$\nu = (\cosh \rho)\nu_0 + (\sinh \rho)\nu_1 \quad \nu = (\sinh \rho)\nu_0 + (\cosh \rho)\nu_1$$

eşitlikleri mevcuttur. Şimdi ise $\hat{\mathcal{D}}_r(\nu) = r\nu r^{-1}$ dönüşümünün ν_0 ve ν_1 vektörlerinin nasıl değiştiğini gösterelim. $\vec{v}r$ vektörel kısım ν_0 vektörüne paralel olduğundan, $r\nu_0 = \nu_0 r$ eşitliğini yazabiliriz. Böylece,

$$\hat{\mathcal{D}}_r(\nu_0) = r\nu_0 r^{-1} = \nu_0 r r^{-1} = \nu_0$$

eşitliği elde edilir. Bu durum, ν_0 vektörünün $\hat{\mathcal{D}}_r$ dönüşümü altında değişmediğini gösterir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_r(\nu_1) &= r\nu_1 r^{-1} = (\cos \varphi + \nu_0 \sin \varphi) \nu_1 (\cos \varphi - \nu_0 \sin \varphi) \\ &= \nu_1 \cosh^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi (\nu_1 \nu_0) + \cos \varphi \sin \varphi (\nu_0 \nu_1) \\ &\quad - (\nu_0 \nu_1) \nu_0 \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu denklemden ortogonal has split kuaterniyonlar için $\nu_1 \nu_0 = \nu_1 \times_L \nu_0$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2, \vec{\zeta}_3$, Lorentziyen vektörler olmak üzere,

$$\vec{\zeta}_1 \times_L (\vec{\zeta}_2 \times_L \vec{\zeta}_3) = \langle \vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2 \rangle_L \vec{\zeta}_3 - \langle \vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_3 \rangle_L \vec{\zeta}_2$$

özdeşliğinden ve ayrıca ν_0 birim timelike olduğundan

$$(\nu_0 \nu_1) \nu_0 = (\nu_0 \times_L \nu_1) \times_L \nu_0 = -\nu_0 \times_L (\nu_0 \times_L \nu_1) = -\langle \nu_0, \nu_0 \rangle_L \nu_1 + \langle \nu_0, \nu_1 \rangle_L \nu_0 = \nu_1$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.3)'de yerine yazıldığında,

$$\hat{\mathcal{D}}_r(\nu_1) = \nu_1 \cos 2\varphi + \nu_2 \sin 2\varphi$$

olarak bulunur. Bu eşitlik, ν Lorentziyen vektörünün ν_0 etrafında 2φ açısı kadar küresel dönme yaptığını ifade eder (Özdemir ve Ergin 2006). ■

Örnek 4.2 Vektörel kısmı timelike olan $r = \cos \varphi + i \sin \varphi$ birim timelike kuaterniyonuna karşılık gelen dönme matrisinin

$$\nu = \cosh \tau i + \sinh \tau k$$

timelike vektörünü 2φ açısı kadar küresel dönme yaptırdığını gösterelim.

\vec{v}_r vektörel kısım i vektörüne paralel olduğundan, $ri = ir$ eşitliğini yazabiliriz. Buna göre,

$$\hat{\mathcal{D}}_r(i) = rir^{-1} = irr^{-1} = i$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\hat{\mathcal{D}}_r(k) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)k(\cos\varphi - i\sin\varphi) = k\cos 2\varphi - j\sin 2\varphi$$

olur. Böylece $\hat{\mathcal{D}}_r$ dönüşümü ν vektörünün i bileşenin değiştirmezken, k bileşeni -2φ açısı kadar i timelike vektörü etrafında küresel olarak dönme yapar. Ayrıca, $r = \cos\varphi + i\sin\varphi$ kuaterniyonuna karşılık gelen dönme matrisi (4.1)'den

$$\hat{\mathcal{D}}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.3

$$A_r = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -4 \\ 8 & 7 & -4 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

dönme matrisine karşılık gelen birim timelike kuaterniyonunu, dönme eksenini ve açısını bulalım.

3-boyutlu Minkowski uzayında 3×3 tipinde verilen bir ortonormal matrisi için karşılık gelen birim timelike kuaterniyonunu aşağıdaki formülle bulabiliriz:

$$r_1^2 = \frac{1}{4}(1 + A_{q2,2} + A_{q3,3}), \quad r_2 = \frac{1}{4r_1}(A_{q3,2} - A_{2,3}),$$

$$r_3 = -\frac{1}{4r_1}(A_{q1,3} + A_{q3,1}), \quad r_4 = \frac{1}{4r_1}(A_{q2,1} + A_{q1,2})$$

dir. ($r_1 \neq 0$) Buradan $r = (2, 1, 0, 2)$ birim timelike kuaterniyonu elde edilir. Vektörel kısmı spacelike olduğundan hiperbolik dönme yapar. Yani,

$$r = 2 + i + 2k = 2 + \sqrt{3} \left(\frac{i + 2k}{\sqrt{3}} \right)$$

olduğundan, r timelike kuaterniyonu $\mu_0 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}})$ spacelike eksenini etrafında $\cosh\phi = 2$ olmak üzere, 2ϕ kadar hiperbolik dönme yapar.

Ek olarak, $\hat{\mathcal{D}}_r$ dönme matrisi olmak üzere, özdeğeri +1 olan birim özvektörün dönmenin eksenini tanımlayan μ_0 birim vektörüne eşit olduğunu bulabiliriz. $\hat{\mathcal{D}}_{r,1,1}$ ve $\cosh^2 \frac{\phi}{2} - \sinh^2 \frac{\phi}{2} = 1$ veya $\cos^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2} = 1$, denklemleri kullanılarak dönme açısı olan ϕ bulunur.

Örnek 4.4

$$B = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -2 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{7}{4} & 2 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

dönme matrisine karşılık gelen birim timelike kuaterniyonunu, dönme eksenini ve açısını bulalım.

Bu matrisin özdeğerlerinden birisi +1 olduğundan yukarıdaki metot kullanılabilir. Şöyle ki özdeğeri +1 olan özvektör aynı zamanda dönme eksenini μ_0 dir. Dolayısıyla dönme eksenini $\mu_0 = (2, 1, -2)$ elde edilir. μ_0 spacelike vektör olduğundan, karşılık gelen birim timelike kuaterniyonu

$$r = \pm \left(\cosh \frac{\phi}{2} + \mu_0 \sinh \frac{\phi}{2} \right)$$

biçimindedir. Diğer taraftan $B_{1,1} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = \frac{9}{4}$ denklemi ve

$$r = \pm \left(\cosh \frac{\phi}{2} + (2, 1, -2) \sinh \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.4)$$

eşitliği yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} \cosh^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) + 9 \sinh^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) &= \frac{9}{4} \\ \cosh^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) - \sinh^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) &= 1 \end{aligned}$$

denklemleri taraf tarafa işlem yapılırsa,

$$\cosh \left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{3}{\sqrt{8}}, \quad \sinh \left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

elde edilir. Bu eşitlikler (4.4)'de yerine yazılırsa

$$q = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{-2}{\sqrt{8}} \right)$$

birim timelike kuaterniyonu bulunur. Ayrıca r timelike kuaterniyonu μ_0 spacelike eksenini etrafında,

$$\phi = 2 \cosh^{-1} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \right)$$

açısı kadar hiperbolik dönme yapar.

4.2 \mathbb{E}_1^3 Minkowski Uzayında Minimum Açısız Hızlı Hareketin (RMM) İnşası

Bu bölümde 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında minimum açısız hızlı çatı (RMF) yardımıyla minimum açısız hızlı hareket (RMM) tanımlanacaktır. Lorentz birim küre üzerinde verilen bir eğrinin spacelike veya timelike olması durumuna göre RMM incelenecektir. Ayrıca 3-boyutlu Öklid uzayındaki RMM ile 3-boyutlu Minkowski uzayındaki RMM arasındaki benzerlikler ve farklılıklar ortaya konulacaktır.

Bu bölümde RMM'nin inşası için 2 durum incelenecektir. Öklid uzayı için yapılan çalışmaların benzer sonuçları burada da elde edilecektir. 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayındaki birim küreler,

$$\mathbb{S}_1^2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : -\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1\} \quad \mathbb{H}_0^2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : -\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = -1\}$$

olmak üzere, bu küreler üzerinde verilen bir eğri için RMM'nin inşası verilecektir.

4.2.1 \mathbb{S}_1^2 Üzerinde Minimum Açısız Hızlı Hareket

Bu kısımda \mathbb{S}_1^2 küresi üzerinde timelike veya spacelike eğriler dikkate alınacaktır. \mathbb{S}_1^2 küresi üzerinde verilen bir timelike eğrinin RMM'si aşağıdaki teoremle verilecektir.

Teorem 4.5 $\xi(t)$, \mathbb{S}_1^2 üzerinde bir timelike eğri olsun. $\{\xi(t), T(t), S(t)\}$ yüzey üzerinde Darboux çatısı olsun. Ayrıca $\{\xi, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ üçlüsü $\int \xi(t) dt$ boyunca RMF olsun. Bu durumda yörüngesi $\xi(t) = \mathfrak{A}(t)e_1$ olan bir eğri için $\mathfrak{A}(t)$ bir RMM'dir. Burada $e_1 = (1, 0, 0)$ ve $\mathfrak{A}(t)$, 3×3 tipinde bir matris belirtmek üzere $\mathfrak{A}(t) = \begin{bmatrix} \xi & -\Gamma_2 & \Gamma_1 \end{bmatrix}$.

İspat. $\xi \subset \mathbb{S}_1^2$ regüler bir eğri olsun. t noktasındaki teğet vektörü $T(t) = \frac{\xi'(t)}{\|\xi'(t)\|}$ olmak üzere,

$$\langle \xi, \xi \rangle_L = -\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$$

eşitliğinden $\xi(t)$ bir spacelike vektördür. $\langle T, \xi \rangle_L = 0$ olduğundan T timelike vektördür. $S = \xi \times_L T$ eşitliğinden S spacelike vektördür. $\xi(t)$ eğrisi için ortonormal çatı $\{\xi(t), T(t), S(t)\}$ olmak üzere türev denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \xi'(t) \\ T'(t) \\ S'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m & 0 \\ m & 0 & -n \\ 0 & -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ T(t) \\ S(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

dir. Burada $\{\xi(t), T(t), S(t)\}$ orthonormal çatısı $\xi \times_L T = S$, $T \times_L S = \xi$, $S \times_L \xi = -T$ eşitliklerini sağlar. Ayrıca geodezik eğriliği $n/m = k_g$ dir. Burada $\|\xi'(t)\| = m$ dir. Ayrıca $\{\xi(t), T(t), S(t)\}$ çatılı küresel hareketin Darboux vektörü ise $\mathcal{W} = -n\xi(t) - mS(t)$ dir. Aynı zamanda bu küresel hareketin açısal hızı,

$$\|\mathcal{W}(t)\| = \sqrt{n^2 + m^2} \quad (4.6)$$

dir. T ve S vektör alanları $\xi(t)$ etrafında $\varphi = -\int n(t)dt$ açısı kadar dönme yaptığında $\{\xi, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ çatısı elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \cosh(\varphi)T + \sinh(\varphi)S, \\ \Gamma_2 &= \sinh(\varphi)T + \cosh(\varphi)S \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde yazılabilir. Daha sonra (4.7)'de her tarafın türevi alındığında,

$$\begin{aligned} \Gamma_1' &= m \cosh(\varphi)\xi(t), \\ \Gamma_2' &= m \sinh(\varphi)\xi(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Böylece $\{\xi, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ çatısı, $\int \xi(t)dt$ eğrisi boyunca bir RMF'dir. Bu çatının türev denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \xi'(t) \\ \Gamma_1'(t) \\ \Gamma_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m \cosh(\varphi) & -m \sinh(\varphi) \\ m \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ m \sinh(\varphi) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \Gamma_1(t) \\ \Gamma_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

şeklinde dir. $\{\xi, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ çatısına karşılık gelen hareketin Darboux vektörü

$$\widehat{\mathcal{W}}(t) = -m \sinh(\varphi)\Gamma_1 + m \cosh(\varphi)\Gamma_2 \quad (4.10)$$

olarak bulunur. (4.7)'deki Γ_1 ve Γ_2 , (4.10)'da yerine yazılırsa

$$\widehat{\mathcal{W}}(t) = mS(t) \quad (4.11)$$

elde edilir. $\mathfrak{A}(t) = [\xi(t), -\Gamma_2, \Gamma_1]$ hareketin açısal hızı

$$\|\widehat{\mathcal{W}}(t)\| = m \quad (4.12)$$

olarak bulunur. (4.6)'dan $\|\mathcal{W}(t)\| = \sqrt{n^2 + m^2}$ olduğundan $\|\widehat{\mathcal{W}}(t)\| \leq \|\mathcal{W}(t)\|$ elde edilir. Bu durum RMF'nin açısal hızının minimum olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $\mathfrak{A}(t) = \left[\xi \quad -\Gamma_2 \quad \Gamma_1 \right]$, S_1^2 üzerinde $e_1 = (1, 0, 0)$ noktasında yörüngesi $\xi(t)$ olan bir RMM'dir. ■

Örnek 4.5 $\Upsilon \in S_1^2$ timelike bir eğri olmak üzere,

$$\Upsilon = \Upsilon(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh t, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

verilsin. Şimdi $e_1 = (1, 0, 0)$ noktasında yörüngesi $\Upsilon(t)$ olan RMM'yi bulalım. ilk olarak verilen eğri üzerinde ortonormal çatıyı inşa edelim.

$$\Upsilon'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh t, 0 \right),$$

$$\|\Upsilon'(t)\| = \sqrt{\left| -\frac{1}{2} \cosh^2 t + \frac{1}{2} \sinh^2 t \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$T_\Upsilon = \frac{\Upsilon'(t)}{\|\Upsilon'(t)\|} = (\cosh t, \sinh t, 0),$$

$$S_\Upsilon = \Upsilon \times_L T_\Upsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ \sinh t & \cosh t & 1 \\ \cosh t & \sinh t & 0 \end{vmatrix}$$

$$S_\Upsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sinh t, \cosh t, -1)$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer taraftan $S'_\Upsilon = -nT_\Upsilon$ olduğundan $n = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ olarak elde edilir. $\Upsilon' = \frac{1}{\sqrt{2}}T_\Upsilon$ olduğundan $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olarak bulunur. Υ eğrisinin $\{\Upsilon, T_\Upsilon, S_\Upsilon\}$ çatısının Darboux vektörü \mathscr{W} olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathscr{W} \times_L \Upsilon &= \Upsilon', \\ \mathscr{W} \times_L T_\Upsilon &= T'_\Upsilon, \\ \mathscr{W} \times_L S_\Upsilon &= S'_\Upsilon \end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitliklerini sağlar. (4.13) koşullarını sağlayan Darboux vektörü ise

$$\mathscr{W} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Upsilon - \frac{1}{\sqrt{2}}S_\Upsilon \tag{4.14}$$

dir. $\{\Upsilon, T_\Upsilon, S_\Upsilon\}$ çatısının Darboux vektörü \mathscr{W} , (4.5) denklemini sağlar. Burada hareketin açısal hızı $\|\mathscr{W}(t)\| = 1$ dir.

T_Υ ve S_Υ vektör alanları $\Upsilon(t)$ etrafında $\varphi = -\int n(t)dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}}dt$ açısı kadar dönme yaptığında Darboux vektör alanı çatısı $\{\Upsilon, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ elde edilir. Bu çatının Darboux vektörü (4.11)'den $\widehat{\mathscr{W}} = mS = \frac{1}{\sqrt{2}}S$ olarak bulunur. Hareketin açısal hızı ise (4.12) gereğince

$\|\widehat{\mathcal{W}}(t)\| = m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ elde edilir. Buradan $\|\widehat{\mathcal{W}}(t)\| \leq \|\mathcal{W}(t)\|$ olduğu açıkça görülür. Bu durum RMF'nin açılma hızının minimum olduğunu gösterir. **Teorem 4.5.**'den, $\mathfrak{A}(t) = \begin{bmatrix} \xi & -\Gamma_2 & \Gamma_1 \end{bmatrix}$ hareketinin S_1^2 birim küre üzerinde $e_1 = (1, 0, 0)$ noktasında yörüngesi $\Upsilon(t)$ olan bir RMM olduğu gösterilmiştir.

Şimdi ise S_1^2 birim küresi üzerinde verilen bir spacelike eğri için aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 4.6 $\Sigma(t), S_1^2$ üzerinde bir spacelike eğri olsun. $\{\Sigma(t), T(t), S(t)\}$ yüzey üzerinde Darboux çatısı olmak üzere, $\{\Sigma, \Pi_1, \Pi_2\}$ üçlüsü $\int \Sigma(t)dt$ boyunca RMF olarak verilsin. Bu durumda yörüngesi $\Sigma(t) = \mathfrak{B}(t)e_1$ olan bir eğri için $\mathfrak{B}(t)$ bir RMM'dir. Burada $e_1 = (1, 0, 0)$ ve $\mathfrak{B}(t)$, 3×3 tipinde bir matris belirtmek üzere $\mathfrak{A}(t) = \begin{bmatrix} \xi & -\Pi_2 & \Pi_1 \end{bmatrix}$ dir.

İspat.

$\Sigma \subset S_1^2$ regüler bir eğri olsun. t noktasındaki tanjant vektörü $T = \frac{\Sigma'(t)}{\|\Sigma'(t)\|}$ olmak üzere, We have

$$\langle \Sigma, \Sigma \rangle_L = -\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 = 1$$

denklemden Σ spacelike vektördür. $\langle T, \Sigma \rangle_L = 0$ olduğundan T spacelike vektördür. $S = \Sigma \times_L T$ eşitliği gereğince S timelike vektördür. $\Sigma(t)$ eğrisine göre ortonormal çatı $\{\Sigma(t), T(t), S(t)\}$ olmak üzere bu çatının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \Sigma'(t) \\ T'(t) \\ S'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m & 0 \\ -m & 0 & n \\ 0 & n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma(t) \\ T(t) \\ S(t) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\{\Sigma(t), T(t), S(t)\}$ çatısı,

$$\Sigma \times_L T = -S, \quad T \times_L S = \Sigma, \quad S \times_L \Sigma = T$$

denklemlerini sağlar. (4.15)'de verilen küresel çatının geodezik eğriliği $n/m = k_g$ dir. Ayrıca $\|\Sigma'(t)\| = m$ eşitliği mevcuttur. Diğer taraftan $\{\Sigma(t), T(t), S(t)\}$ çatılı küresel hareketin Darboux vektör alanı ise

$$\mathcal{W}(t) = -n\Sigma(t) + mS(t) \quad (4.16)$$

dir. Burada $\mathcal{W}(t)$ Darboux vektör alanı (4.13)'deki koşulları sağlar. Bu durumda küresel hareketin açısal hızı

$$\|\mathcal{W}(t)\| = \sqrt{|n^2 - m^2|} \quad (4.17)$$

olarak bulunur. T and S vektör alanları $\Sigma(t)$ etrafında $\phi = -\int n(t)dt$ açısı kadar dönme yaptığında $\{\Sigma, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısı elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \cosh(\phi)T + \sinh(\phi)S, \\ \Pi_2 &= \sinh(\phi)T + \cosh(\phi)S \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir. Burada (4.18)'de her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \Pi_1' &= m \cosh(\phi)\Sigma(t), \\ \Pi_2' &= -m \sinh(\phi)\Sigma(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

olarak bulunur. Böylece $\{\Sigma, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısı, $\int \Sigma(t)dt$ eğrisi boyunca bir RMF'dir. Bu çatının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \Sigma'(t) \\ \Pi_1'(t) \\ \Pi_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m \cosh(\phi) & -m \sinh(\phi) \\ m \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ -m \sinh(\phi) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma(t) \\ \Pi_1(t) \\ \Pi_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

biçimindedir. $\{\Sigma, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısına karşılık gelen Darboux vektörü

$$\widehat{\mathcal{W}}(t) = -m \sinh(\phi)\Pi_1 + m \cosh(\phi)\Pi_2 \quad (4.21)$$

olarak hesaplanır. (4.18)'deki denklemler (4.21)'de yerine yazılırsa

$$\widehat{\mathcal{W}}(t) = mS(t) \quad (4.22)$$

elde edilir. $\{\Sigma, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısına karşılık gelen hareketin açısal hızı,

$$\|\widehat{\mathcal{W}}(t)\| = m \quad (4.23)$$

olarak hesaplanır. Burada iki durum söz konusudur:

- Eğer $|n| < \sqrt{2}|m|$ ise bu durumda $\|\mathcal{W}(t)\| \leq \|\widehat{\mathcal{W}}(t)\|$ eşitsizliği elde edilir. Bu durumda $\{\Sigma, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısı RMF olarak seçilmesine rağmen, $\{\Sigma(t), T(t), S(t)\}$ çatısı RMF olmuştur. Çünkü, $\{\Sigma(t), T(t), S(t)\}$ çatısına karşılık gelen açısal hız değeri,

$\{\Sigma, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısının açılmal hız değerinden küçüktür. Sonuç olarak, S_1^2 üzerinde verilen bir spacelike eğrisi için RMF'yi açılmal hızın minimum olduğu çatı olarak seçmeliyiz.

- Eğer $|n| > \sqrt{2}|m|$ ise bu durumda $\|\widehat{\mathcal{W}}(t)\| \leq \|\mathcal{W}(t)\|$ eşitsizliği elde edilir. Burada $\{\Sigma, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısının açılmal hızı minimum olduğundan $\{\Sigma, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısı RMF olmuştur.

■

Örnek 4.6 $\varrho \subset S_1^2$ spacelike bir eğri olsun.

$$\varrho = \varrho(t) = (1, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$$

şeklinde verilsin. $e_1 = (1, 0, 0)$ noktasındaki yörünge eğrisi $\varrho(t)$ olan RMM'yi bulalım. İlk önce verilen eğri üzerindeki ortonormal çatıyı oluşturalım.

$$\varrho'(t) = (0, -\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t),$$

$$\|\varrho'(t)\| = \sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2},$$

$$T = \frac{\varrho'(t)}{\|\varrho'(t)\|} = (0, -\sin t, \cos t),$$

$$S = \varrho \times_L T = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & \sqrt{2} \cos t & \sqrt{2} \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$S = (-\sqrt{2}, -\cos t, -\sin t)$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer yandan $S' = -nT$ olduğundan $n = 1$ elde edilir. Ayrıca $\varrho' = mT$ olduğundan $m = \sqrt{2}$ olarak hesaplanır. Böylece,

$$\left. \begin{aligned} \varrho'(t) &= \sqrt{2}T, \\ T' &= -\sqrt{2}\varrho + S, \\ S' &= -T \end{aligned} \right\}$$

eşitlikleri ve (4.15) dikkate alındığında ortonormal çatı

$$\begin{bmatrix} \varrho'(t) \\ T'(t) \\ S'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varrho(t) \\ T(t) \\ S(t) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

şeklinde yazılabilir. $\{\varrho, T, S\}$ çatısına karşılık gelen hareketin Darboux vektörü ise

$$\Omega = -\varrho + \sqrt{2}S \quad (4.25)$$

olarak hesaplanır. Bu hareketin açısal hızı ise $\|\Omega(t)\| = \sqrt{|1-2|} = 1$ dir.

T ve S vektör alanları $\varrho(t)$ etrafında $\psi = -\int n(t)dt = -\int dt$ açısı kadar dönme yaptığında Darboux vektör alanının çatısı $\{\varrho, \Pi_1, \Pi_2\}$ elde edilir. Bu çatının Darboux vektörü (4.22)'den $\widehat{\Omega} = mS = \sqrt{2}S$ olarak bulunur. Hareketin açısal hızı ise (4.23)'den $\|\widehat{\Omega}(t)\| = m = \sqrt{2}$ elde edilir. Burada $|n| < \sqrt{2}|m|$ koşulu sağlandığından yani $1 < 2$ olduğundan $\|\Omega(t)\| \leq \|\widehat{\Omega}(t)\|$ elde edilir. Sonuç olarak, $\|\Omega(t)\|$ açısal hızına sahip $\{\varrho, T(t), S(t)\}$ çatısı $\int \varrho(t)dt$ eğrisi boyunca RMF'dir.

4.2.2 \mathbb{H}_0^2 Üzerinde Minimum Açısal Hızlı Hareket

Bu kısımda \mathbb{H}_0^2 birim küresi üzerinde spacelike eğriler üzerinde çalışılacaktır. Çünkü hiperbolik küre üzerinde sadece spacelike eğriler yatmaktadır. \mathbb{H}_0^2 birim küresi üzerinde verilen bir spacelike eğrinin RMM'si aşağıdaki teoremle gösterilecektir.

Teorem 4.7 $\Phi(s)$, H_0^2 üzerinde spacelike bir eğri olsun. $\{\Phi(s), T(s), S(s)\}$ Darboux çatısı olsun. $\{\Phi, \Xi_1, \Xi_2\}$ çatısı ise $\int \Phi(s)ds$ eğri boyunca RMF olsun. Bu durumda yörünge eğrisi $\Phi(s) = \mathcal{D}(s)e_1$ olan bir eğri için $\mathcal{D}(s) = \begin{bmatrix} \Phi & \Xi_1 & \Xi_2 \end{bmatrix}$ bir RMM'dir. Burada $e_1 = (1, 0, 0)$ ve $\mathcal{D}(s)$, 3×3 tipinde bir matris olmak üzere $\mathcal{D}(s) = \begin{bmatrix} \Phi & -\Xi_2 & \Xi_1 \end{bmatrix}$ dir.

İspat. $\Phi = \Phi(s) \in H_0^2$ regüler bir eğri olsun. s noktasındaki teğet vektörü $T(s) = \frac{\Phi'(s)}{\|\Phi'(s)\|}$ olmak üzere,

$$\langle \Phi, \Phi \rangle_L = -\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = -1$$

eşitliğinden Φ bir timelike vektördür. $\langle T, \Phi \rangle_L = 0$ olduğundan T spacelike vektördür. $S = \Phi \times_L T$ denkleminde S spacelike vektördür. $\Phi(s)$ eğrisinin ortonormal çatısı $\{\Phi(s), T(s), S(s)\}$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \Phi'(s) \\ T'(s) \\ S'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 \\ \epsilon_1 & 0 & \epsilon_2 \\ 0 & -\epsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(s) \\ T(s) \\ S(s) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\{\Phi(s), T(s), S(s)\}$ ortonormal çatısı

$$\Phi \times_L T = S, T \times_L S = -\Phi, S \times_L \Phi = T$$

eşitliklerini sağlar. Bu çatının geodezik eğriliği $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = k_g$ dir. Diğer taraftan $\|\Phi'\| = \epsilon_1$ eşitliği sağlanır. $\{\Phi(s), T(s), S(s)\}$ çatılı küresel hareketin Darboux vektörü ise $\mathfrak{W}(s) = \epsilon_2\Phi(s) + \epsilon_1S(s)$ dir. Bu küresel hareketin açısal hızı ise

$$\|\mathfrak{W}(s)\| = \sqrt{|\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2|} \quad (4.27)$$

dir. T and S vektör alanları $\Phi(s)$ etrafında $\theta = -\int \epsilon_2(s)ds$ açısı kadar dönme yaptığında $\{\Phi, \Xi_1, \Xi_2\}$ çatısı elde edilir. Buradan,

$$\Xi_1 = \cos(\theta)T + \sin(\theta)S, \quad (4.28)$$

$$\Xi_2 = -\sin(\theta)T + \cos(\theta)S$$

elde edilir. Burada (4.28)'de her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\Xi_1' = \epsilon_1 \cos(\theta)\Phi(s), \quad (4.29)$$

$$\Xi_2' = -\epsilon_1 \sin(\theta)\Phi(s)$$

olarak hesaplanır. Böylece $\{\Phi, \Xi_1, \Xi_2\}$ çatısı, $\int \Phi(s)ds$ eğrisi boyunca bir RMF'dir. Bu çatının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \Phi'(s) \\ \Xi_1'(s) \\ \Xi_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 \cos(\theta) & -\epsilon_1 \sin(\theta) \\ \epsilon_1 \cos(\theta) & 0 & 0 \\ -\epsilon_1 \sin(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(s) \\ \Xi_1(s) \\ \Xi_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir. $\{\Phi, \Xi_1, \Xi_2\}$ çatısına karşılık gelen Darboux vektörü

$$\widehat{\mathfrak{W}}(s) = \epsilon_1 \sin(\theta)\Xi_1 + \epsilon_1 \cos(\theta)\Xi_2 \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.28)'deki denklemler (4.31)'de yerine yazılırsa

$$\widehat{\mathfrak{W}}(s) = \epsilon_1 S(s) \quad (4.32)$$

elde edilir. $\{\Phi, \Xi_1, \Xi_2\}$ çatısına karşılık gelen hareketin açısal hızı,

$$\|\widehat{\mathfrak{W}}(s)\| = \epsilon_1 \quad (4.33)$$

olarak bulunur. (4.27)'den $\|\mathfrak{W}(s)\| = \sqrt{|\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2|}$ olduğundan $\|\mathfrak{W}(s)\| \leq \|\widehat{\mathfrak{W}}(s)\|$ eşitsizliği elde edilir. Burada iki durum söz konusudur:

- **Eğer** $|\epsilon_2| < \sqrt{2}|\epsilon_1|$ **ise** bu durumda $\|\mathfrak{W}(t)\| \leq \|\widehat{\mathfrak{W}}(t)\|$ eşitsizliği elde edilir. Bu durumda $\{\Phi, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısı RMF olarak seçilmesine rağmen, $\{\Phi(t), T(t), S(t)\}$ çatısı RMF olmuştur. Çünkü, $\{\Phi(t), T(t), S(t)\}$ çatısına karşılık gelen açısal hız değeri, $\{\Phi, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısının açısal hız değerinden küçüktür. Sonuç olarak, H_0^2 üzerinde verilen bir spacelike eğrisi için RMF'yi açısal hızın minimum olduğu çatı olarak seçmeliyiz.
- **Eğer** $|\epsilon_2| > \sqrt{2}|\epsilon_1|$ **ise** bu durumda $\|\widehat{\mathfrak{W}}(t)\| \leq \|\mathfrak{W}(t)\|$ eşitsizliği elde edilir. Burada $\{\Phi, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısının açısal hızı minimum olduğundan $\{\Phi, \Pi_1, \Pi_2\}$ çatısı RMF olmuştur.

■

Örnek 4.7 $\wp \subset H_0^2$ spacelike eğrisi

$$\wp = \wp(s) = (\sqrt{3}, \sqrt{2} \cos s, \sqrt{2} \sin s)$$

olmak üzere, $e_1 = (1, 0, 0)$ noktasındaki yörünge eğrisi \wp olan RMM'yi elde edelim. İlk olarak verilen eğri üzerinde ortonormal çatıyı bulalım.

$$\wp'(s) = (0, -\sqrt{2} \sin s, \sqrt{2} \cos s),$$

$$\|\wp'(s)\| = \sqrt{2\sin^2 s + 2\cos^2 s} = \sqrt{2},$$

$$T = \frac{\wp'(s)}{\|\wp'(s)\|} = (0, -\sin s, \cos s),$$

$$S = \wp \times_L T = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \cos s & \sqrt{2} \sin s \\ 0 & -\sin s & \cos s \end{vmatrix}$$

$$S = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3} \cos s, -\sqrt{3} \sin s)$$

eşitlikleri bulunur. Diğer taraftan $S' = -\epsilon_2 T$ olduğundan

$$S = -\sqrt{3}(0, -\sin s, \cos s) = -\sqrt{3}T$$

denkleminde $\epsilon_2 = \sqrt{3}$ olarak bulunur.

Ayrıca $\wp' = \epsilon_1 T$ olduğundan,

$$\wp'(s) = (0, -\sqrt{2} \sin s, \sqrt{2} \cos s) = \sqrt{2}T$$

denkleminde $\epsilon_1 = \sqrt{2}$ olarak hesaplanır. Böylece,

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(s) &= \sqrt{2}T, \\ T' &= \sqrt{2}\varphi + \sqrt{3}S, \\ S' &= -\sqrt{3}T \end{aligned} \right\}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler (4.26)'da yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \varphi'(s) \\ T'(s) \\ S'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ T(s) \\ S(s) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

ortonormal çatı elde edilir. $\{\varphi, T, S\}$ çatısına karşılık gelen hareketin Darboux vektörü ise

$$\mathfrak{W} = \sqrt{2}\varphi + \sqrt{3}S \quad (4.35)$$

olarak yazılır. Bu hareketin açısal hızı Darboux vektörünün normuna eşittir. Buradan da $\|\mathfrak{W}(s)\| = \sqrt{|-3+2|} = 1$ elde edilir. T ve S vektör alanları $\varphi(s)$ etrafında $\theta = -\int \epsilon_2(s)ds = -\int \sqrt{3}ds$ açısı kadar dönme yaptığında Darboux vektör alanının çatısı $\{\varphi, \Xi_1, \Xi_2\}$ olarak bulunur. Bu çatının Darboux vektörü (4.32)'den $\widehat{\mathfrak{W}}(s) = \epsilon_1 S(s) = \sqrt{2}S$ olarak bulunur. Dolayısıyla bu çatıya karşılık gelen hareketin açısal hızı (4.33)'den $\|\widehat{\mathfrak{W}}(s)\| = \epsilon_1 = \sqrt{2}$ olarak hesaplanır. Burada $|\epsilon_2| < \sqrt{2}|\epsilon_1|$ koşulu sağlandığından yani $\sqrt{3} < 2$ olduğundan $\|\mathfrak{W}\| \leq \|\widehat{\mathfrak{W}}(t)\|$ elde edilir. Sonuç olarak, $\|\mathfrak{W}\|$ açısal hızına sahip $\{\varphi, T(t), S(t)\}$ çatısı $\int \varphi(t)dt$ eğrisi boyunca RMF'dir.

4.3 \mathbb{E}_1^3 Minkowski Uzayında Küresel Hareket ve Kuaterniyonik Helisler

Bu kısımda \mathbb{E}_1^3 Minkowski uzayında küresel hareket ve kuaterniyonik çatı arasındaki ilişki gösterilecektir. Burada Öklid uzayından farklı olarak Split kuaterniyonlar kullanılacaktır. Split kuaterniyonlar yardımıyla 3 boyutlu Minkowski uzayında dönme dönüşümleri incelenebilir. Yani birim hiperboloidaller üzerindeki hareketleri split kuaterniyonlar yardımıyla incelemek mümkündür.

$A(t) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ matrisi 3×3 tipinde orthogonal matris olsun. $\dot{A}A^{-1} = \Omega(t)$ olacak şekilde açısal hız matrisi vardır. Bu açısal hız matrisine karşılık gelen vektör $\Omega(t) \cong \vec{\omega}(t)$ darboux vektörüdür. Darboux vektörü

$$\omega \times_L a_1 = a'_1,$$

$$\omega \times_L a_2 = a'_2,$$

$$\omega \times_L a_3 = a'_3$$

eşitliklerini sağlar. \mathbb{E}_1^3 Minkowski uzayında herhangi bir dönme matrisi \mathcal{U} için $\mathcal{S} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ olacak şekilde bir birim split kuaterniyon bulunabilir. Bu birim split kuaterniyon

$$\mathcal{U}\vec{\mu} = \mathcal{S}(t) * \vec{\mu} * \bar{\mathcal{S}}(t) \quad (4.36)$$

denklemini sağlar. Burada $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^3$ vektörü $\vec{\mu} = (0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ split kuaterniyon şeklinde tanımlanır. Ayrıca ” * ”, split kuaterniyonik çarpım ve $\bar{\mathcal{S}}$ ise \mathcal{S} kuaterniyonun eşleniğidir.

Böylece

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathcal{S}}}{\|\dot{\mathcal{S}}\|} &= \mathcal{M}_1(t), \\ 2\dot{\mathcal{S}}(t) * \bar{\mathcal{S}}(t) &= \vec{\omega}(t), \\ \|\omega(t)\| &= 2\|\dot{\mathcal{S}}(t)\|, \\ \omega_b(t) &= \frac{\omega(t)}{\|\omega(t)\|}, \quad (\text{birim}) \\ \frac{\omega'_b}{\|\omega'_b\|} &= t_1, \\ \omega_b \times_L t_1 &= t_2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

eşitlikleri yazıldığında Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} \omega_b \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_b \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada κ ve τ , $\{\omega_b, t_1, t_2\}$ çatsına göre eğriliklerdir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \omega_b * \mathcal{S} &= \mathcal{M}_1, \\ t_1 * \mathcal{S} &= \mathcal{M}_2, \\ t_2 * \mathcal{S} &= \mathcal{M}_3 \end{aligned} \quad (4.38)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & r - K \\ 0 & 0 & K - r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 \end{bmatrix}$$

kuaterniyonik çatısı elde edilir. Burada K , k ve $r - K$, $\gamma(t) = \int \mathcal{S}(t)dt$ olmak üzere γ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik çatıya göre eğrileridir.

Örnek 4.8 $\gamma = \gamma(t) = (1, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) \subset S_1^2$ bir spacelike eğri olmak üzere, yörüngesi $\gamma(t)$ olan RMM'yi elde edip bu harekete karşılık gelen \mathcal{Q} split kuaterniyonunu belirleyelim.

Bu eğri üzerindeki ortonormal çatı **Örnek 4.6**'dan

$$\gamma'(t) = (0, -\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t),$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2},$$

$$T = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (0, -\sin t, \cos t),$$

$$S = \gamma \times_L T = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & \sqrt{2}\cos t & \sqrt{2}\sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$S = (-\sqrt{2}, -\cos t, -\sin t)$$

şeklindedir. Buradan $n = 1$ ve $m = \sqrt{2}$ elde edilir. $\{\gamma, T, S\}$ çatısına karşılık gelen hareketin açısal hızı $\|w(t)\| = 1$ dir. T ve S vektör alanları $\gamma(t)$ etrafında $\phi = -\int dt$ açısı kadar dönme yaptığında oluşan çatıya karşılık gelen hareketin açısal hızı ise $\|\bar{w}(t)\| = \sqrt{2}$ olarak bulunur. Burada RMF olarak $\{\gamma, T, S\}$ çatısını almamız. Bu durumda $U(t) = \gamma(t)e_2$ olmak üzere yörüngesi $\gamma(t)$ olan $U(t)$ hareketini, $U(t) = \begin{bmatrix} -S & \gamma & T \end{bmatrix}$ şeklinde yazabiliriz. Buradan da

$$U(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \cos t & \sqrt{2}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \sqrt{2}\sin t & \cos t \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

biçiminde yazılır. $U(t)$ hareket matrisi $\det U(t) = 1$ ve $U^T I^* U = I^*$ koşullarını sağlar.

Burada, $I^* = \text{diag}(-1, 1, 1)$ köşegen matrisidir.

$U(t)$ hareketine karşılık gelen birim timelike split kuaterniyonu $\mathfrak{S} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ olmak üzere, (4.1)'den

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos t}}{2}, \\ s_2 &= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos t}}{2}, \\ s_3 &= -\frac{\sqrt{1 - \cos t}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}}, \\ s_4 &= \frac{\sqrt{1 + \cos t}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

biçiminde hesaplanır. Yani,

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos t}}{2}, \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos t}}{2}, -\frac{\sqrt{1 - \cos t}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}}, \frac{\sqrt{1 + \cos t}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}} \right) \quad (4.41)$$

elde edilir. Bu durumda (4.37)'deki eşitlikten $\|w(t)\| = 2\|\dot{\mathfrak{S}}(t)\|$ sağlandığını gösterelim. Şimdi $\mathfrak{S} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ birim timelike kuaterniyonunun t ye göre türevini alalım. Bu durumda,

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_1 &= -\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos t}}{4}, \\ \dot{s}_2 &= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos t}}{4}, \\ \dot{s}_3 &= -\frac{\sqrt{1 + \cos t}}{4\sqrt{1 + \sqrt{2}}}, \\ \dot{s}_4 &= -\frac{\sqrt{1 - \cos t}}{4\sqrt{1 + \sqrt{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

olarak bulunur. Şimdi de $\dot{\mathfrak{S}}(t) = (\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3, \dot{s}_4)$ kuaterniyonunun normunu hesaplayalım. $\|\dot{\mathfrak{S}}(t)\| = \sqrt{\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2 - \dot{s}_3^2 - \dot{s}_4^2}$ olduğunu biliyoruz. (4.42)'deki denklemlerin karelerini alındığında,

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_1^2 &= \frac{(1 + \sqrt{2})(1 - \cos t)}{16}, \\ \dot{s}_2^2 &= \frac{(1 + \sqrt{2})(1 + \cos t)}{16}, \\ \dot{s}_3^2 &= \frac{1 + \cos t}{16(1 + \sqrt{2})}, \\ \dot{s}_4^2 &= \frac{1 - \cos t}{16(1 + \sqrt{2})} \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

elde edilir. Bu eşitlikleri birim timelike kuaterniyonda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|\dot{\mathfrak{S}}(t)\| &= \sqrt{\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2 - \dot{s}_3^2 - \dot{s}_4^2} \\
&= \sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})(1-\cos t)}{16} + \frac{(1+\sqrt{2})(1+\cos t)}{16} - \frac{1+\cos t}{16(1+\sqrt{2})} - \frac{1-\cos t}{16(1+\sqrt{2})}} \\
&= \sqrt{\underbrace{\frac{(1+\sqrt{2})(1-\cos t)}{16} + \frac{(1+\sqrt{2})(1+\cos t)}{16}}_{\frac{1+\sqrt{2}}{8}} - \underbrace{\frac{1+\cos t}{16(1+\sqrt{2})} - \frac{1-\cos t}{16(1+\sqrt{2})}}_{\frac{-1}{8(1+\sqrt{2})}}} \\
&= \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8(1+\sqrt{2})}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

olarak bulunur. Böylece $\mathfrak{S} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ kuaterniyonu $\|w(t)\| = 2\|\dot{\mathfrak{S}}(t)\|$ denklemini sağlamış oldu.

Şimdi de $\mathfrak{S} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ birim timelike kuaterniyonunun **Teorem 3.2'** den bir genel helis olduğunu gösterelim. İlk olarak (4.38)'daki denklemler yardımıyla kuaterniyonik çatıyı oluşturalım. Gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} &= \left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos t}}{2}, \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t}}{2}, -\frac{\sqrt{1-\cos t}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \frac{\sqrt{1+\cos t}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \right), \\
\mathfrak{M}_1 &= \left(-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t}}{4}, \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos t}}{4}, -\frac{\sqrt{1+\cos t}}{4\sqrt{1+\sqrt{2}}}, -\frac{\sqrt{1-\cos t}}{4\sqrt{1+\sqrt{2}}} \right), \\
\mathfrak{M}_2 &= \left(-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos t}}{8}, -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t}}{8}, \frac{\sqrt{1-\cos t}}{8\sqrt{1+\sqrt{2}}}, -\frac{\sqrt{1+\cos t}}{8\sqrt{1+\sqrt{2}}} \right), \\
\mathfrak{M}_3 &= \left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t}}{16}, -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos t}}{16}, \frac{\sqrt{1+\cos t}}{16\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \frac{\sqrt{1-\cos t}}{16\sqrt{1+\sqrt{2}}} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi ise \mathfrak{S} kuaterniyonik eğrinin $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3\}$ çatısına göre eğriliklerini elde edelim. (3.14)'e göre hesaplandığında,

$$\begin{cases} P = \frac{\|w(t)\|}{2} = \frac{1}{2}, \\ p = \tau = \sqrt{2}, \\ r = \kappa = 1, \\ r - P = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.45}$$

eğrilikleri elde edilir. Burada P , p ve $r - P$, $\delta(t) = \int \mathcal{S}(t)dt$ olmak üzere δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik çatıya göre eğriliğidir. **Teorem 3.2**'den elde edilen eğriler,

$$\left(\frac{P}{p}\right)^2 + \frac{1}{(r-P)^2} \left(\left(\frac{P}{p}\right)'\right)^2 = c$$

denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \left(\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}\right)'\right)^2 = \frac{1}{8}$$

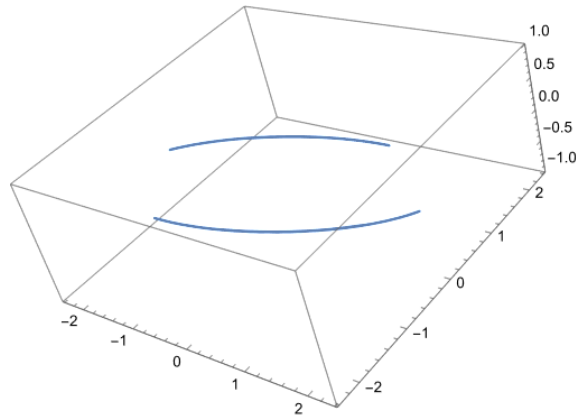
elde edilir. **Teorem 3.2** gereğince $\delta(t) = \int \mathcal{S}(t)dt$ eğrisi kuaterniyonik helistir. Ayrıca \mathbb{R}_1^4 de C.C.R eğrisini elde edelim. (4.45)'de elde ettiğimiz eğriliği,

$$\begin{cases} P = c_1 = \frac{1}{2}, \\ p = c_2 = \sqrt{2}, \\ r - P = c_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde yazarsak,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{ve} \quad \frac{c_2}{c_3} = 2\sqrt{2}$$

olduğundan $\delta(t) = \int \mathcal{S}(t)dt$ eğrisi bir C.C.R eğrisidir. $\delta(t)$ eğrisinin \mathbb{R}_1^3 de projeksiyonu Şekil 4.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1 C.C.R eğrisinin projeksiyon görüntüsü

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Hareketler konusu bilgisayar destekli programlarda, kinematik, fizik gibi birçok alanlarda önemli bir yere sahiptir. Robot kinematiğinde, robot hareketlerinin minimum açısal hızla verilmesi kolaylık sağlamaktadır. Bu tez çalışmasında Öklid uzayında minimum açısal hızlı çatı (RMF) yardımıyla minimum açısal hızlı hareket (RMM) elde edilmiştir. B. Jüttler *Rotation minimizing spherical motions* adlı çalışmasında RMM'nin inşası için birim kuaterniyonları kullanmıştır. Bu çalışmada ise yeni ve farklı bir metot verilmiştir. Bu açıdan önemlidir. Diğer taraftan, RMF'ye karşılık gelen küresel hareketin açısal hızının minimum olması durumunda hareketin RMM olduğu gösterilmiştir. Buna ek olarak küresel çatı hareketine karşılık gelen birim kuaterniyonlar yardımıyla kuaterniyonik helis veya C.C.R eğrisi olma karakterizasyonları verilmiştir. Daha sonra elde edilen sonuçlarla ilgili örnekler üzerinde uygulamaları gösterilmiştir. Tezin diğer bölümlerinde Öklid uzayı için yapılan çalışma 3 boyutlu Minkowski uzayında yapılmıştır. Burada 3 boyutlu Öklid uzayında RMM inşa edilmesindeki yöntem kullanılmıştır. Lorentziyen birim küre üzerinde verilen bir eğrinin spacelike ya da timelike olması durumuna göre Minkowski uzayında RMM elde edilmiştir. Buna ek olarak 3-boyutlu Minkowski uzayında split kuaterniyonlar yardımıyla dönme dönüşümleri incelenmiştir. Burada \mathbb{E}_1^3 Minkowski uzayında birim timelike kuaterniyonlarda dönmeler ele alınmıştır. Split kuaterniyonların 3 boyutlu Lorentz uzayında dönmelere karşılık geldiği ifade edilmiştir. Ayrıca verilen birim timelike kuaterniyonu için vektörel kısmı timelike veya spacelike olması durumuna göre sırasıyla küresel veya hiperbolik dönmeye karşılık geldiği belirtilmiştir. Daha sonra elde edilen sonuçlarla ilgili örnekler üzerinde uygulama yapılmıştır. Bunun yanı sıra, Minkowski uzayında, küresel harekete karşılık gelen birim split kuaterniyonlar yardımıyla kuaterniyonik helis olma karakterizasyonları incelenmiştir. Gelecekteki çalışmalarda Galile uzayında minimum açısal hızlı hareketler elde edilebilir. Dahası elde edilen bu sonuçlar dual uzayında da incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Aksar, M., Yaylı, Y. ve Kılıçoğlu, Ş., 2023. *Rotation Minimizing Spherical Motions and Helices*. Journal of Science and Arts , 23(1); 137-148.
- Aslan, S., Bekar, M. ve Yaylı, Y., 2021. *Ruled Surfaces in Minkowski 3-space and Split Quaternion Operators*. Adv. Appl. Clifford Algebras 31(74).
- Baharathi, K., Nagaraj, M. 1987. *Quaternion valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formula* , Indian Journal Pure Applied Mathematics, 18(6), 507-511.
- Bishop, L.R., 1975. There is more than one way to frame a curve, American Mathematical Monthly, 82(3), 246-251.
- Bottema, O. and Roth, B., 1990. Theoretical Kinematics. Dover Publications, New York.
- Bükçü, B., Karacan, M. K., 2008. Special Bishop Motion and Bishop Darboux Rotation axis of the Space Curve, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, 6(1), 27-34.
- Cansu, G. 2022. Kuaterniyonik Eğriler ve Uygulamaları. Doktora tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Ceylan, A.Y., 2023. The Geometry of Bézier Curves in Minkowski 3-Space. Universal Journal of Mathematics and Applications, 6(1); 7-14
- Demir, E. 2010. Lorentz uzayında umbilik yüzeyler. Yüksek lisans tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Etayo, F., 2016. Rotation Minimizing Vector Fields and Frames in Riemannian Manifolds, Geometry, Algebra and Applications: From Mechanics to Cryptography, 161, 91-100.
- Etayo, F., 2018. Geometric Properties of Rotation Minimizing Vector Fields along curves in Riemannian Manifolds, Turkish Journal of Mathematics, 42, 121130.
- Farouki, R.T., 2016. Rational Rotation-Minimizing Frames-Recent Advances and Open Problems, Applied Mathematics and Computation, 272, 80-91.
- Formiga, J. B., Romero C., 2005. On the differential geometry of curves in Minkowski space. arXiv:gr-qc/0601002v1.
- Goemans, O., Overmars, M. 2005. Automatic Generation of Camera Motion to Track a Moving Guide. Algorithmic Foundations of Robotics VI. Springer Tracts in Advanced Robotics, vol 17.187-202
- Hacısalıhoğlu, H.H., 2000. Diferensiyel Geometri, Ertem Matbaası, Ankara.
- İzumiya, S., Takeuchi, N., 2004. New Special Curves and Developable Surfaces, Turkish Journal of Mathematics, 28, 153-163.

- Jüttler, B. 1998. *Rotation Minimizing Spherical Motions*, In: Lenarčič, J., Husty, M.L. (eds) *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*. Springer, Dordrecht.413-422.
- Kahraman, F., 2022. Quaternionic bertrand curves according to type 2-quaternionic frame in \mathbb{R}^4 . *Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Ser. A1 Math. Stat.* 71(2); 395–406.
- Keskin, Ö. 2020. Eğriler üzerinde çatı hareketlerinin geometrik uygulamaları. Doktora tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Klok, F., 1986. Two moving frames for sweeping along a 3D trajectory. *Comput.Aid. Geomet. Des.*3(1); 217-229.
- Kula, L., Yaylı, Y., 2005. On Slant Helix and its Spherical Indicatrix, *Applied Mathematics and Computation*, 169(1), 600-607.
- Kula, L., 2003. Bölünmüş Kuarterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları. Doktora tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kula, L. , Ekmekci, N., Yaylı, Y., Ilarslan, K. 2010. Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-Space. *Turkish Journal of Mathematics*, TUBITAK.34(2) 261-273.
- López, R., 2014. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz Minkowski Space, *International Electronic Journal of Geometry*, 7(1), 44107.
- McCarthy, J. M., 1990. *An Introduction to Theoretical Kinematics*. The MIT Press Cambridge , Massachusetts London, England.
- Monterde, J. 2004. *Curves with constant curvature ratios*, arXiv:math/0412323v1
- O'Neill, B. 1983. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, New York.
- O'Neill, B. 2006. *Elementary Differential Geometry*. Elsevier Academic Press Publications, USA.
- Özdemir, M., Ergin, A.A.,2006. *Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space*, *Journal of Geometry and Physics*, 56(2);322-336
- Özdemir, M., 2020. *Kuarterniyonlar ve Geometri*. Altın Nokta Yayınevi, İzmir.
- Özdemir, M., 2020. *Diferansiyel Geometri*. Altın Nokta Yayınevi, İzmir.
- Özkaldı, S., 2006. *Düzlemde ve uzayda kinematik geometri*. Yüksek lisans tezi. Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Entitüsü, Kırıkkale.
- Sabuncuoğlu, A. 2004. *Diferansiyel Geometri*, Nobel Yayınevi, Ankara.
- Scofield, P.D., 1995. Curves of Constant Precession, *The American Mathematical Monthly*, 102 (6), 531-537.
- Taşköprü, K. 2013. \mathbb{E}^3 , 3-Boyutlu Öklid Uzayında Sabban Çatısına göre Smarandache Eğrileri. Yüksek lisans tezi. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

- Tozak, H. 2010. Minkowski 4-uzayında eğriler ve hareketlerin geometrisi. Yüksek lisans tezi. Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli.
- Uzunoğlu, B., Gök, I. and Yaylı, Y., 2016. A New Approach on Curves of Constant Precession, *Applied Mathematics and Computation*, 275, 317-323.
- Vanlı, A. T., 2022. Diferensiyel Geometri ve Mathematica Uygulamaları. Özbaran Ofset Matbaacılık, Ankara.
- Wang, W., Jüttler, B., Zheng, D. and Liu Y., 2008. Computation of Rotation Minimizing Frame, *ACM Transactions on Graphics*, 27(1), Article No. 2, 18 pages.
- Yeneroğlu, M., 2000. 3-Boyutlu Reel uzayda Bir Cismin Hareketinin Kinematik Diferensiyel Geometrisi. Yüksek lisans tezi. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Yoon, D. W. 2012. *On the quaternionic general helices in euclidean 4-space*. *Honam Mathematical Journal*. 34(3); 381-390.