

T.C.

AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

2024-YL-04

**GAMA FONKSİYONUNUN BİR PARAMETRELİ
DEFORMASYONU VE İLGİLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER**

Meryem YEŞİL ÇAKMAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. İnci EGE

AYDIN-2024

KABUL ve ONAY

T.C. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Meryem YEŞİL ÇAKMAK tarafından hazırlanan "GAMA FONKSİYONUNUN BİR PARAMETRELİ DEFORMASYONU VE İLGİLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER" başlıklı tez, aşağıdaki jüri tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 22/01/2024

Jüri Üyeleri

ONAY:

Başkan : Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ
HÜ Fen Fak.

Üye : Prof. Dr. İnci EGE
ADÜ Fen Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Muhammet Ali OKUR
ADÜ Fen Fak.

Bu tez Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca uygun görülmüş ve Fen Bilimleri Enstitüsünün .././2024 tarih vesayılı oturumunda alınan numaralı Yönetim Kurulu kararıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa Sürmen
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca bana rehberlik eden, tez konusunun belirlenmesinde ve tezin hazırlanma sürecinin her aşamasında bilgisini, tecrübesini ve değerli zamanını esirgemeyerek bana her fırsatta yardımcı olan değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. İnci EGE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tüm yaşamım boyunca ihtiyaç duyduğum her anımda yanımda olan anneme ve babama, tez çalışmam boyunca gösterdiği saygı ve sabırdan dolayı eşim Çetin Çakmak'a ve son olarak, hayatıma mutluluk ve anlam katan canım kızım Elif Merin Çakmak'a teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.



BİLİMSEL ETİK BEYANI

"GAMA FONKSİYONUNUN BİR PARAMETRELİ DEFORMASYONU VE İLGİLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER" başlıklı Yüksek Lisans tezindeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiz atf yaptığımı bildiririm. İfade ettiklerimin aksi ortaya çıktığında ise her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Meryem YEŞİL ÇAKMAK

22/01/2024

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEŞEKKÜR	iii
BİLİMSEL ETİK BEYANI	v
SİMGELER DİZİNİ	ix
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	5
3.1. Gama, Beta, Digama ve Poligama Fonksiyonları	5
3.2. Gama, Digama ve Poligama Fonksiyonlarının Bir Parametrelili Deformasyonları Olan V -gama, V -digama ve V -poligama Fonksiyonları	7
3.3. Klasik Eşitsizliklerin Bazı Uygulamaları	16
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	21
4.1. V -gama Fonksiyonunun Bazı Özellikleri	21
4.2. V -gama Fonksiyonunun Bir Asimptotik Genişlemesi	25
4.3. Beta Fonksiyonunun Bir Parametrelili Deformasyonu V -beta Fonksiyonu	26
4.4. V -gama ve V -beta Fonksiyonları İçin Bir Limit	29
4.5. V -gama Fonksiyonunu İçeren Bazı Eşitsizlikler	31
5. SONUÇ	43
KAYNAKLAR	45
ÖZ GEÇMİŞ	47

SİMGELER DİZİNİ

B_v : V -beta fonksiyonu

Γ : Gama fonksiyonu

Γ_v : V - gama fonksiyonu

γ : Euler-Mascheroni sabiti

\mathbb{N} : Doğal sayılar kümesi

ψ : Digama (Psi) fonksiyonu

$\psi^{(m)}$: Poligama fonksiyonları

ψ_v : V -digama fonksiyonu

$\psi_v^{(m)}$: V -poligama fonksiyonları

\mathbb{R} : Gerçek sayılar kümesi

\mathbb{Z} : Tam sayılar kümesi

ÖZET

GAMA FONKSİYONUNUN BİR PARAMETRELİ DEFORMASYONU VE İLGİLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER

Yeşil Çakmak M., Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Programı, Yüksek Lisans Tezi, Danışman: Prof. Dr. İnci Ege, Aydın, 2024.

Amaç: Bu çalışmada, gama fonksiyonu ve gama fonksiyonunun bir parametrelili deformasyonu (v -genellemesi, v -analoğu) olan v -gama fonksiyonunun tanımı, özellikleri ve aralarındaki ilişkilerin incelenmesi ve gama fonksiyonunun v -analoğunu içeren bazı eşitsizliklerin verilmesi amaçlanmaktadır.

Materyal ve Yöntem: Konu ile ilgili yazılmış tüm makale ve kitaplar araştırmanın materyalleridir. Araştırma tekniği olarak kaynaklar kısmında verilen makaleler incelenmiş, sonrasında da matematiksel ispat yöntemleri kullanılarak çalışma yürütülmüştür.

Bulgular: Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünün ardından ikinci bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, gama fonksiyonunun bir parametrelili deformasyonunun (v -genellemesi, v -analoğu) tanımı verilerek bazı özellikleri incelenmiş ve v -gama fonksiyonunu içeren bazı eşitsizlikler Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri yardımı ile ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde v -gama fonksiyonunun bir asimptotik genişlemesi verilmiştir. Ayrıca beta fonksiyonunun bir parametrelili deformasyonu olan v -beta fonksiyonunun tanımı verilerek v -gama ve v -beta fonksiyonları için limit ifadeleri gösterilmiştir.

Son olarak v -digama ve v -poligama fonksiyonlarının çeşitli özelliklerinden faydalanarak v -gama, v -digama ve v -poligama fonksiyonlarını içeren bazı eşitsizliklere yer verilmiştir.

Sonuç: Bu yüksek lisans tez çalışmasında; Gama fonksiyonunun bir parametrelili deformasyonu olan v -gama fonksiyonu ve bununla ilişkili olarak v -beta, v -digama ve v -poligama fonksiyonları tanıtılmış ve özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca v -gama, v -digama ve v -poligama fonksiyonlarını içeren sonuçlar ve eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Gama Fonksiyonu, V -gama fonksiyonu, V -poligama fonksiyonu, V -beta fonksiyonu, Eşitsizlik.

ABSTRACT

ONE PARAMETER DEFORMATION OF THE GAMMA FUNCTION AND SOME ASSOCIATED INEQUALITIES

Yeşil Çakmak M., Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Graduate School of Naturel and Applied Sciences, Mathematics Program, Master Thesis, Supervisor: Prof. Dr. İnci Ege, Aydın, 2024.

Objective: In this study, the definition, properties, and relationships between the gamma function and a one parameter deformation of the gamma function (v -generalization, v -analog), called the v -gamma function are investigated. The aim is to provide some inequalities that include the v -analog of the gamma function.

Materials and Methods: All articles and books on the subject are the research materials. The articles given in the references section were examined as a research technique and then the study was carried out using mathematical proof methods.

Results: This thesis consists of four chapters. Following the introduction, the second chapter provides the basic definitions and theorems that will be used in other chapters of the thesis. In the third chapter, the definition of a one parameter deformation of the gamma function (v -generalization, v -analog) is given and some of its properties were examined. Certain inequalities involving the v -gamma function are expressed using Hölder and Minkowski inequalities. The fourth chapter present an asymptotic expansion of the v -gamma function. Additionally, the definition of the v -beta function, a one parameter deformation of the beta function is provided, and the limit expressions for the v -gamma and v -beta functions are demonstrated. Finally, by leveraging various properties of the v -digamma and v -polygamma functions, some inequalities involving the v -gamma, v -digamma, and v -polygamma functions are presented.

Conclusion: In this master's thesis the v -gamma function which is a one parameter deformation of the gamma function and in association with that v -beta, v -digamma and v -polygamma functions have been introduced, and their properties have been thoroughly examined. Furthermore, results and inequalities involving the v -gamma, v -digamma and v -polygamma functions have been obtained.

Keywords: Gamma function, V -gamma function, V -polygamma function, V -beta function, Inequality.

1. GİRİŞ

Özel fonksiyonlar; bazı fiziksel, matematiksel ya da istatistiksel problemlerin çözümlerinde ortaya çıkan matematiksel fonksiyonların bir sınıfı olarak tanımlanabilir. Özel fonksiyonlar alanı oldukça geniştir ve pek çok özel fonksiyon bu alanın doğuşundan sonra matematikçiler tarafından tanımlanmış ve üzerinde çalışılmıştır. Euler, Gauss, Legendre ve Laplace gibi pek çok matematikçi, bu yeni ve kullanışlı alan üzerinde çalışmalar yapmıştır. O zamandan günümüze özel fonksiyonlar sınıfı dikkate değer özellik ve uygulamalar ile sürekli gelişmektedir. Bu gelişmenin bir sonucu olarak pek çok özel fonksiyon tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları hata fonksiyonu, gama fonksiyonu, beta fonksiyonu ve Bessel fonksiyonudur. Bunlar arasında belki de en bilinen ve yaygın kullanılanı gama fonksiyonudur.

Matematik sadece eşitlikler hakkında değildir. Matematikte ve diğer bilim alanlarında, farklı değerler ve sayılar arasındaki ilişki çalışılır. Matematikte iki değer veya miktar farklı olduğunda onlar arasındaki ilişki eşitsizlik olarak ifade edilir. Eşitsizlik alanı, matematiksel analizin en önemli alanlarından biridir. Geçtiğimiz yıllar boyunca matematiksel eşitsizliklerin kullanılışlılığı ve uygulamaları, matematikte ve bilimin pek çok alanında geniş yer almıştır. Oyun teorisi, matematiksel programlama, kontrol teorisi, olasılık ve istatistik gibi pek çok bilimsel alanda matematiksel analizin bağımsız bir ihtisas alanı olarak eşitsizlik teorisi karşımıza çıkmaktadır. Özel fonksiyonların ve eşitsizlik kavramının matematikteki önemi düşünüldüğünde bu iki kavramı bir araya getiren sonuçların da matematik ve diğer bilim dallarında kullanılması doğaldır.

Bu tezde; tanımlanan ve üzerinde çalışılan özel fonksiyonlardan biri olan, gama fonksiyonunun bir parametrelili deformasyonu v -gama fonksiyonu ile ilgili bir çalışma sunulmaktadır. Ayrıca, v -gama fonksiyonunu içeren bazı eşitsizliklere de yer verilmiştir. Böylece, tanımlanan v -gama özel fonksiyonunun matematik alanındaki uygulamalarının örneklenmesi de amaçlanmıştır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Gama fonksiyonu, Leonhard Euler (1707-1783) tarafından faktöriyel fonksiyonunun negatif olmayan reel sayılara genişletilmesi amacı ile $r > 0$ gerçel değerleri için

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{r-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

şeklinde Riemann integrali ile tanımlanmıştır (Abramowitz ve Stegun, 1964).

Bu fonksiyon için Γ gösterimini ilk kullanan kişi Adrien Marie Legendre (1750-1833) olmuştur. Daha sonra Γ fonksiyonu, önemi nedeniyle birçok matematikçinin dikkatini çekmiş ve farklı gösterimleri yapılmıştır. Bu gösterimlerden bazıları aşağıda verilmiştir. Gama fonksiyonunun Friedrich Gauss (1777-1855) tarafından yapılan gösterimi

$$\Gamma(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^r}{r(r+1)(r+2)\dots(r+n)} \quad (2.2)$$

şeklinde (Abramowitz ve Stegun, 1964).

Karl Weierstrass (1815-1897) tarafından yapılan gösterimi ise

$$\frac{1}{\Gamma(r)} = r e^{\gamma r} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right) e^{-\frac{r}{n}} \quad (2.3)$$

şeklinde (Abramowitz ve Stegun, 1964).

Euler sonsuz çarpımı da

$$\Gamma(r) = r^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-1} \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanmıştır (Andrews vd., 1999).

Bu gösterimlerin birbirine denkliği 1922 yılında Harald Bohr ve Johannes Møller tarafından elde edilen karakterizasyon ile kesin olarak belirlenmiştir.

Gama fonksiyonunun logaritmik türevi digama (psi) fonksiyonu $r > 0$ değerleri için

$$\psi(r) = \frac{d}{dr} \ln \Gamma(r) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır (Abramowitz ve Stegun, 1964).

Poligama fonksiyonu ise $r > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$\psi^{(m)}(r) = \frac{d^m}{dr^m} \psi(r) \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlıdır (Abramowitz ve Stegun, 1964).

Euler 1771 yılında beta fonksiyonunu

$$B(r, s) = \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1} dt \quad (2.7)$$

Riemann integrali ile tanımlamıştır (Abramowitz ve Stegun, 1964).

Gama fonksiyonu için Stirling asimptotik formülü (Whittaker ve Watson, 1952)

$$\Gamma(r) = \sqrt{2\pi} r^{r-\frac{1}{2}} e^{-r} + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.8)$$

şeklindedir.

Gama fonksiyonu, Sandor (2005), Alsina ve Tomás (2005), Shabani (2007), Shabani (2008), Iddrisu ve Tetteh (2017) gibi birçok matematikçi tarafından incelenmiştir.

Djabang vd. (2020) gama fonksiyonunun bir parametrelili deformasyonunu (v -analoğu, v -genellemesi)

$$\Gamma_v(r) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} e^{-t} dt \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlamıştır.

Ayrıca digama ve poligama fonksiyonlarının bir parametrelili deformasyonlarını sırasıyla $\psi_v(r) = \frac{d}{dr} \ln \Gamma_v(r)$, $\psi_v^{(m)}(r) = \left(\frac{d}{dr}\right)^m \psi_v(r)$ şeklinde tanımlamış ve Γ fonksiyonunun Gauss, Weierstrass ve Euler tarafından yapılan gösterimlerinin v -genellemelerini yapmıştır.

Ege (2022) gama fonksiyonunun v -analoğu için Bohr-Mollerup tipi bir teorem tanımlamıştır.

Beta fonksiyonunun v -analoğu $v > 0$ değerleri için

$$B_v(r, s) = v \int_0^1 t^{\frac{r}{v}-1} (1-t)^{\frac{s}{v}-1} dt \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Ege, 2022)

Ayrıca Ege (2022) Γ_v fonksiyonunun bir asimptotik genişlemesini

$$\Gamma_v(r+v) = \sqrt{2\pi} v^{(-\frac{2r}{v}-\frac{1}{2})} r^{(\frac{r}{v}+\frac{1}{2})} e^{-\frac{r}{v}} + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlamıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tez konusu ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Konu ile ilgili yazılmış tüm makale ve kitaplar araştırmanın materyalleridir. Araştırma tekniği olarak kaynaklar kısmında verilen makaleler incelenmiş, sonrasında da matematiksel ispat yöntemleri kullanılarak çalışma yürütülmüştür.

3.1. Gama, Beta, Digama ve Poligama Fonksiyonları

Tanım 3.1. (Gama Fonksiyonu) (Abramowitz ve Stegun, 1964)

$r > 0$ değerleri için gama fonksiyonu,

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{r-1} e^{-t} dt \quad (3.1)$$

Riemann integrali ile tanımlıdır. Ayrıca limit formunda gama fonksiyonu,

$$\Gamma(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^r}{r(r+1)(r+2)\dots(r+n)} \quad (3.2)$$

biçimindedir.

Tanım 3.2. (Beta Fonksiyonu) (Abramowitz ve Stegun, 1964)

$r, s > 0$ değerleri için beta fonksiyonu,

$$B(r, s) = \int_0^1 t^{r-1} (1-t)^{s-1} dt \quad (3.3)$$

Riemann integrali ile tanımlıdır.

Beta fonksiyonunun gama fonksiyonu cinsinden ifadesi $r, s \neq 0, -1, -2, \dots$ değerleri için

$$B(r, s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} \quad (3.4)$$

şeklindedir ve

$$B(r, s) = B(s, r)$$

simetri özelliğini taşır.

Tanım 3.3. (Euler-Mascheroni Sabiti) (Andrews vd., 1999) Euler sabiti, γ ile gösterilir

ve $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ olmak üzere

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - \ln n) = 0,57721566490153286060\dots$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 3.4. (Weierstrass Kanonik Çarpımı) (Andrews vd., 1999) $r > 0$ değerleri için

$$\frac{1}{\Gamma(r)} = r e^{\gamma r} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right) e^{-\frac{r}{n}} \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada γ , Euler sabitidir.

Teorem 3.5. (Euler'in Sonsuz Çarpımı) (Andrews vd., 1999) $r > 0$ değerleri için

$$\Gamma(r) = r^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-1} \quad (3.6)$$

şeklindedir.

Tanım 3.6. (Digama Fonksiyonu) (Abramowitz ve Stegun, 1964) $r > 0$ değerleri için digama (psi) fonksiyonu ψ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \frac{d}{dr} \ln \Gamma(r) \\ &= \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.7. (Poligama Fonksiyonu) (Abramowitz ve Stegun, 1964) $r > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ değerleri için poligama fonksiyonları $\psi^{(m)}(r)$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \psi^{(m)}(r) &= \frac{d^m}{dr^m} \psi(r) \\ &= \frac{d^{m+1}}{dr^{m+1}} \ln \Gamma(r) \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.8. (Konvekslik ve Logaritmik Konvekslik) (Mitrinovic vd., 1993)

I konveks bir küme olmak üzere $f : I \rightarrow (0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. $r, s \in I$ ve $\alpha + \beta = 1$ koşulunu sağlayan $\alpha, \beta > 0$ değerleri için

$$f(\alpha r + \beta s) \leq \alpha f(r) + \beta f(s) \quad (3.9)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye "konveks fonksiyon" ve

$$\ln f(\alpha r + \beta s) \leq \alpha \ln f(r) + \beta \ln f(s) \quad (3.10)$$

ya da buna denk olarak

$$f(\alpha r + \beta s) \leq (f(r))^\alpha (f(s))^\beta \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye "logaritmik konveks" fonksiyon denir.

Not 3.9. Gama fonksiyonu $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmik konveks yani $\ln \Gamma$ konvektir.

Teorem 3.10. (Bohr-Mollerup Teoremi) (Rudin, 1964) f , $(0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $f(1) = 1$, $f(r+1) = rf(r)$ ve $\ln f$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks ise $\forall r \in (0, \infty)$ için $f(r) = \Gamma(r)$ biçimindedir.

3.2. Gama, Digama ve Poligama Fonksiyonlarının Bir Parametrelili Deformasyonları Olan V -gama, V -digama ve V -poligama Fonksiyonları

Bu alt bölümde gama fonksiyonunun bir parametrelili deformasyonunun tanımı ve temel özellikleri ele alınarak gama fonksiyonunun Gauss, Weierstrass ve Euler tarafından yapılan gösterimleri v -analog için de yapılmıştır. Ayrıca digama fonksiyonunun v -analoğu ve poligama fonksiyonunun v -analoğu tanımlanarak integral ve seri gösterimleri verilmiştir.

Tanım 3.11. (V -gama Fonksiyonu) (Djabang vd., 2020)

Gama fonksiyonunun bir parametrelili deformasyonu (v -analoğu, v -genellemesi) $r, v > 0$ değerleri için

$$\Gamma_v(r) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} e^{-t} dt \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır.

Gama fonksiyonu ile v -gama fonksiyonu arasındaki ilişki, $r, v > 0$ değerleri için

$$v = 1 \text{ ise } \Gamma_v(r) = \Gamma(r)$$

biçimindedir. Ayrıca, Γ_v fonksiyonu $r, v > 0$ değerleri için

$$\Gamma_v(r+v) = rv^{-2}\Gamma_v(r) \quad (3.13)$$

$$\Gamma_v(v) = 1 \quad (3.14)$$

eşitliklerini sağlar. Ayrıca v -gama fonksiyonunun gama fonksiyonu ile ifadesi

$$\Gamma_v(r) = v^{1-\frac{r}{v}}\Gamma\left(\frac{r}{v}\right) \quad (3.15)$$

şeklindedir.

Önerme 3.12. (Djabang vd., 2020) $r, v > 0$ değerleri için

$$\Gamma_v(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \left(\frac{n}{v}\right)^{\frac{r}{v}} v^{n+2}}{r(r+v)(r+2v)\dots(r+nv)} \quad (3.16)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$ eşitliği $\Gamma_v(r) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} e^{-t} dt$ ifadesinde kullanılırsa

$$\Gamma_v(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

elde edilir.

$$I_n = \int_0^n \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

integraline kısmi integral uygulanırsa;

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{v^2}{r} \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \Big|_0^n + \frac{nv^2}{nr} \int_0^n \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\ &= \frac{nv^2}{nr} \int_0^n \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{nv^2}{nr} \frac{(n-1)v^2}{n(r+v)} \frac{(n-2)v^2}{n(r+2v)} \cdots \frac{v^2}{n(r+(n-1)v)} \int_0^n \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}+n-1} dt \\ &= \frac{n! \left(\frac{n}{v}\right)^{\frac{r}{v}} v^{n+2}}{r(r+v)(r+2v)\dots(r+nv)} \end{aligned}$$

olur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \Gamma_v(r)$$

olduğundan istenen elde edilir. □

Şimdi de $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \ln n \right)$ Euler sabiti olmak üzere aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 3.13. (Djabang vd., 2020) $r, v > 0$ değerleri için

$$\frac{1}{\Gamma_v(r)} = v^{\frac{r}{v}-2} r e^{\frac{\gamma r}{v}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{kv}\right) e^{-\frac{r}{kv}} \quad (3.17)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Önerme 3.12'den

$$\begin{aligned}\Gamma_v(r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \left(\frac{n}{v}\right)^{\frac{r}{v}} v^{n+2}}{r(r+v)(r+2v)\dots(r+nv)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{v}\right)^{\frac{r}{v}} \frac{v^2}{r} \left(\frac{v}{r+v}\right) \left(\frac{2v}{r+2v}\right) \dots \left(\frac{nv}{r+nv}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma_v(r)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v}{n}\right)^{\frac{r}{v}} \frac{r}{v^2} \left(1 + \frac{r}{v}\right) \left(1 + \frac{r}{2v}\right) \dots \left(1 + \frac{r}{nv}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v}{n}\right)^{\frac{r}{v}} \frac{r}{v^2} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{r}{kv}\right)\end{aligned}$$

Elde edilen limitte $e^{-\frac{r}{kv}}$ eklemesi yapıldığında

$$\frac{1}{\Gamma_v(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v}{n}\right)^{\frac{r}{v}} \frac{r}{v^2} e^{\frac{r}{v}(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{r}{kv}\right) e^{-\frac{r}{kv}}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{r}{v}(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{r}{v}(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n + \ln n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{r}{v}(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n)} e^{\frac{r}{v} \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\gamma r}{v}} e^{\ln n \frac{r}{v}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\gamma r}{v}} n^{\frac{r}{v}}\end{aligned}$$

olur. $e^{\frac{r}{v}(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}$ yerine $e^{\frac{\gamma r}{v}} n^{\frac{r}{v}}$ yazıldığında

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma_v(r)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v^{\frac{r}{v}}}{n^{\frac{r}{v}}} \frac{r}{v^2} e^{\frac{\gamma r}{v}} n^{\frac{r}{v}} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{r}{kv}\right) e^{-\frac{r}{kv}} \\ &= v^{\frac{r}{v}-2} r e^{\frac{\gamma r}{v}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{kv}\right) e^{-\frac{r}{kv}}\end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa $0 < \left(1 + \frac{r}{kv}\right)^{-\frac{r}{kv}} < 1$ olduğundan önermenin ifadesindeki sonsuz çarpım yakınsaktır. \square

Not 3.14. Önerme 3.13 ile Weierstrass kanonik çarpımının v -analoğu verilmiştir.

Şimdi de Euler'in sonsuz çarpımının v -analoğunu verelim.

Önerme 3.15. (Djabang vd., 2020) $r, v > 0$ değerleri için Γ_v fonksiyonu

$$\Gamma_v(r) = v^{2-\frac{r}{v}} r^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{r}{v}} \left(1 + \frac{r}{nv}\right)^{-1} \quad (3.18)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. (3.6) eşitliğinde r yerine $\frac{r}{v}$ yazıldığında

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{r}{v}\right) &= \left(\frac{r}{v}\right)^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{r}{v}} \left(1 + \frac{r}{nv}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{v}{r}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{r}{v}} \left(1 + \frac{r}{nv}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. $\Gamma_v(r) = v^{1-\frac{r}{v}} \Gamma\left(\frac{r}{v}\right)$ eşitliğinde $\Gamma\left(\frac{r}{v}\right)$ yerine (3.19) eşitliği yazılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma_v(r) &= v^{1-\frac{r}{v}} \frac{v}{r} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{r}{v}} \left(1 + \frac{r}{nv}\right)^{-1} \\ &= v^{2-\frac{r}{v}} r^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{r}{v}} \left(1 + \frac{r}{nv}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. □

Tanım 3.16. (*V-digama Fonksiyonu*) (Djabang vd., 2020)

Digama fonksiyonunun bir parametrelili deformatsiyonu (*v-analoğu*) $r > 0$ değerleri için,

$$\begin{aligned} \psi_v(r) &= \frac{d}{dr} \ln \Gamma_v(r) \\ &= \frac{\Gamma'_v(r)}{\Gamma_v(r)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.17. (*V-poligama Fonksiyonları*) (Djabang vd., 2020)

Poligama fonksiyonlarının bir parametrelili deformatsiyonu (*v-analoğu*) m pozitif tam sayı değerleri için,

$$\psi_v^{(m)}(r) = \left(\frac{d}{dr}\right)^m \psi_v(r) \quad (3.22)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.18. (Djabang vd., 2020) $r, v > 0$ değerleri için, *v-digama fonksiyonunun seri gösterimi*

$$\psi_v(r) = -\frac{\ln v + \gamma}{v} - \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{nv} - \frac{1}{r + nv} \right] \quad (3.23)$$

şeklindedir.

İspat. (3.17) eşitliğinin her iki tarafına \ln fonksiyonunu uyguladığımızda

$$\ln \Gamma_v(r) = -\left(\frac{r}{v} - 2\right) \ln v - \ln r - \frac{\gamma r}{v} - \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r}{nv}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{nv}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının r 'ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \psi_v(r) &= -\frac{\ln v}{v} - \frac{1}{r} - \frac{\gamma}{v} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nv+r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nv} \\ &= -\frac{\ln v + \gamma}{v} - \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{nv} - \frac{1}{r+nv} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. \square

Önerme 3.19. (Djabang vd., 2020) $r, v > 0$ değerleri için v -digama fonksiyonunun integral gösterimi

$$\psi_v(r) = -\frac{\ln v + \gamma}{v} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-vt} - e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt \quad (3.24)$$

şeklindedir.

İspat.

$$\psi_v(r) = -\frac{\ln v + \gamma}{v} - \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{nv} - \frac{1}{r+nv} \right]$$

eşitliğinde $\frac{1}{r}$ yerine $\int_0^{\infty} e^{-rt} dt$, $\frac{1}{nv}$ yerine $\int_0^{\infty} e^{-nvt} dt$ ve $\frac{-1}{r+nv}$ yerine $\int_0^{\infty} e^{-(r+nv)t} dt$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \psi_v(r) &= -\frac{\ln v + \gamma}{v} - \int_0^{\infty} e^{-rt} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{-nvt} - e^{-(r+nv)t}) dt \\ &= -\frac{\ln v + \gamma}{v} - \int_0^{\infty} e^{-rt} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nvt} (1 - e^{-rt}) dt \\ &= -\frac{\ln v + \gamma}{v} - \int_0^{\infty} e^{-rt} dt + \int_0^{\infty} (1 - e^{-rt}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nvt} dt \end{aligned}$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nvt}$ serisinin kısmi toplamı hesaplandığında

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nvt} = \left(\frac{1}{e}\right)^{vt} + \left(\frac{1}{e}\right)^{2vt} + \dots = \frac{e^{-vt}}{1 - e^{-vt}}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
 \psi_v(r) &= -\frac{\ln v + \gamma}{v} - \int_0^\infty e^{-rt} dt + \int_0^\infty (1 - e^{-rt}) \frac{e^{-vt}}{1 - e^{-vt}} dt \\
 &= -\frac{\ln v + \gamma}{v} + \int_0^\infty \left(-e^{-rt} + \frac{e^{-vt} - e^{-rt}e^{-vt}}{1 - e^{-vt}} \right) dt \\
 &= -\frac{\ln v + \gamma}{v} + \int_0^\infty \frac{-e^{-rt} + e^{-vt}e^{-rt} + e^{-vt} - e^{-vt}e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt \\
 &= -\frac{\ln v + \gamma}{v} + \int_0^\infty \frac{e^{-vt} - e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt
 \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.20. (Djabang vd., 2020) $r, v > 0$ ve m pozitif bir tam sayı olmak üzere v -poligama fonksiyonlarının seri gösterimi

$$\psi_v^{(m)}(r) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(r + nv)^{m+1}} \quad (3.25)$$

şeklindedir.

İspat. (3.23) eşitliğinin r değişkenine göre türevi alındığında

$$\psi'_v(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (r + nv)^{-2}$$

elde edilir.

$m = 1$ için

$$\begin{aligned}
 \psi'_v(r) &= (-1)^{1+1} 1! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(r + nv)^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (r + nv)^{-2}
 \end{aligned}$$

olduğundan $m = 1$ için (3.25) eşitliği doğru olur.

$(m - 1)$. mertebeden türevi,

$$\psi_v^{(m-1)}(r) = (-1)^m (m - 1)! \sum_{n=1}^{\infty} (r + nv)^{-m}$$

doğru olsun. $\psi_v^{(m-1)}(r)$ fonksiyonunun türevi alındığında,

$$\begin{aligned}\psi_v^{(m)}(r) &= (-1)^m(m-1)! \sum_{n=1}^{\infty} (-m)(r+nv)^{-m-1} \\ &= (-1)^m(m-1)!(-m) \sum_{n=1}^{\infty} (r+nv)^{-m-1} \\ &= (-1)^m(-1)(m)(m-1)! \sum_{n=1}^{\infty} (r+nv)^{-m-1} \\ &= (-1)^{m+1}m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(r+nv)^{m+1}}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 3.21. (Laplace Dönüşümü) (Spiegel, 1965) $f(t)$ fonksiyonu $t \geq 0$ için tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Eğer herhangi bir s sayısı verildiğinde;

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t)e^{-st} dt$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak ise $F(s)$ fonksiyonuna $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir ve $L\{f(t)\} = F(s)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.22. (Ters Laplace Dönüşümü) (Spiegel, 1965) Bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ yani, $L\{f(t)\} = F(s)$ ise $f(t)$ 'ye $F(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümü denir ve sembolik olarak, $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ yazılır. L^{-1} 'e ters Laplace dönüşüm operatörü denir.

Önerme 3.23. (Djabang vd., 2020) m bir pozitif tam sayı olmak üzere v -poligama fonksiyonlarının integral gösterimi

$$\psi_v^{(m)}(r) = (-1)^{m+1} \int_0^{\infty} \frac{t^m e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt \quad (3.26)$$

şeklindedir.

İspat.

$$\psi_v^{(m)}(r) = (-1)^{m+1}m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(r+nv)^{m+1}}$$

fonksiyonuna ters Laplace dönüşümü uygulandığında;

$$\begin{aligned}\psi_v^{(m)}(r) &= (-1)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t^m e^{-(r+nv)t} dt \\ &= (-1)^{m+1} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t^m e^{-(r+nv)t} dt \\ &= (-1)^{m+1} \int_0^{\infty} t^m \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(r+nv)t} dt\end{aligned}$$

olur. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(r+nv)t}$ serisinin kısmi toplamı

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(r+nv)t} &= \left(\frac{1}{e}\right)^{rt} + \left(\frac{1}{e}\right)^{(r+v)t} + \dots \\ &= \frac{e^{-rt}}{1 - e^{-vt}}\end{aligned}$$

şeklinde bulunarak ilgili eşitlikte yerine yazıldığında

$$\psi_v^{(m)}(r) = (-1)^{m+1} \int_0^{\infty} \frac{t^m e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt$$

v -poligama fonksiyonunun integral gösterimi elde edilir. □

Şimdi de Önerme 3.23'ün bir uygulaması olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.24. (Djabang vd., 2020) $v, r, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\left(e^{\psi_v^{(k)}(r)}\right)^2 \geq e^{\psi_v^{(k+1)}(r)} e^{\psi_v^{(k-1)}(r)}, \quad (k \text{ tek ise})$$

$$\left(e^{\psi_v^{(k)}(r)}\right)^2 \leq e^{\psi_v^{(k+1)}(r)} e^{\psi_v^{(k-1)}(r)}, \quad (k \text{ çift ise})$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat.

$$\psi_v^{(k)}(r) = (-1)^{k+1} \int_0^{\infty} \frac{t^k e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt$$

eşitliğinden

$$\psi_v^{(k)}(r) - \frac{1}{2} (\psi_v^{(k+1)}(r) + \psi_v^{(k-1)}(r))$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1} \int_0^\infty \frac{t^k e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt - \frac{1}{2} (-1)^{k+2} \int_0^\infty \frac{t^{k+1} e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt \\
&- \frac{1}{2} (-1)^k \int_0^\infty \frac{t^{k-1} e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2} \int_0^\infty \frac{2t^k e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt - \frac{(-1)^{k+1}}{2} (-1) \int_0^\infty \frac{t^{k+1} e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt \\
&- \frac{(-1)^{k+1}}{-2} \int_0^\infty \frac{t^{k-1} e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2} \int_0^\infty \frac{2t^k e^{-rt} + t^{k+1} e^{-rt} + t^{k-1} e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2} \int_0^\infty \frac{t^{k-1} e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} (t^2 + 2t + 1) dt \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2} \int_0^\infty \frac{t^{k-1} e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} (t + 1)^2 dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda ifadenin işareti k 'ye bağlıdır. Böylece

$$\psi_v^{(k)}(r) - \frac{1}{2} \left(\psi_v^{(k+1)}(r) + \psi_v^{(k-1)}(r) \right) \geq 0, \quad (k \text{ tek ise})$$

ve

$$\psi_v^{(k)}(r) - \frac{1}{2} \left(\psi_v^{(k+1)}(r) + \psi_v^{(k-1)}(r) \right) \leq 0, \quad (k \text{ çift ise})$$

eşitsizlikleri elde edilir. Elde edilen eşitsizliklere üstel fonksiyonu uygulayarak

$$\left(e^{\psi_v^{(k)}(r)} \right)^2 \geq e^{\psi_v^{(k+1)}(r)} e^{\psi_v^{(k-1)}(r)}, \quad (k \text{ tek ise})$$

$$\left(e^{\psi_v^{(k)}(r)} \right)^2 \leq e^{\psi_v^{(k+1)}(r)} e^{\psi_v^{(k-1)}(r)}, \quad (k \text{ çift ise})$$

eşitsizlikleri elde edilir. □

3.3. Klasik Eşitsizliklerin Bazı Uygulamaları

Bu alt bölümde Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri olarak bilinen klasik integral eşitsizliklerinin v -gama ve v -poligama fonksiyonları için uygulamalarına yer vereceğiz. İşe önce Hölder eşitsizliğini vererek başlayalım.

Teorem 3.25. (Hölder İntegral Eşitsizliği) (Mitrinovic ve Vasic, 1970) $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. α ve β , $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı iki gerçel fonksiyon ve $|\alpha|^p$ ve $|\beta|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde integrallenebilir ise

$$\int_a^b |\alpha(x)\beta(x)| dx \leq \left(\int_a^b |\alpha(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |\beta(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.27)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.26. (Djabang vd., 2020) $r, s, v > 0$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$\Gamma_v \left(\frac{s}{p} + \frac{r}{q} \right) \leq [\Gamma_v(s)]^{\frac{1}{p}} [\Gamma_v(r)]^{\frac{1}{q}} \quad (3.28)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

$$\Gamma_v(r) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{r}{v}-1} e^{-t} dt$$

eşitliğinde r yerine $\frac{s}{p} + \frac{r}{q}$ yazıldığında

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left(\frac{s}{p} + \frac{r}{q} \right) &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{s}{pv} + \frac{r}{qv} - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{s}{pv} + \frac{r}{qv} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} e^{-t(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{s}{pv} - \frac{1}{p}} \left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{r}{qv} - \frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{p}} e^{-\frac{t}{q}} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{1}{p}(\frac{s}{v}-1)} e^{-\frac{t}{p}} \left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{1}{q}(\frac{r}{v}-1)} e^{-\frac{t}{q}} dt \end{aligned}$$

olur. Son integral Hölder integral eşitsizliği için gerekli şartları sağladığından

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left(\frac{s}{p} + \frac{r}{q} \right) &\leq \left[\int_0^\infty \left(\left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{1}{p}(\frac{s}{v}-1)} e^{-\frac{t}{p}} \right)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^\infty \left(\left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{1}{q}(\frac{r}{v}-1)} e^{-\frac{t}{q}} \right)^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\int_0^\infty \left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{s}{v}-1} e^{-t} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^\infty \left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{r}{v}-1} e^{-t} dt \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

ve böylece

$$\Gamma_v \left(\frac{s}{p} + \frac{r}{q} \right) \leq [\Gamma_v(s)]^{\frac{1}{p}} [\Gamma_v(r)]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir. \square

Not 3.27. *Tanım 3.8 ve Teorem 3.26 birlikte göz önüne alındığında Γ_v fonksiyonunun logaritmik konveks olduğu elde edilir.*

Tanım 3.28. (Djabang vd., 2020) $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere gama fonksiyonunun v -analoğunun k . mertebeden türevi, $r, v > 0$ değerleri için

$$\Gamma_v^{(k)}(r) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{r}{v}-1} \left(\ln \left(\frac{t}{v} \right) \right)^k \frac{e^{-t}}{v^k} dt \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.29. $A, B \geq 0$ ve $k \geq 1$ olmak üzere

$$(A + B)^k \geq A^k + B^k \quad (3.30)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.30. (Minkowski İntegral Eşitsizliği) (Mitrinovic ve Vasic, 1970) α ve β , $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı gerçel değerli iki fonksiyon ve $p > 1$ için $\int_a^b |\alpha|^p dt < \infty$ ve $\int_a^b |\beta|^p dt < \infty$ ise

$$\left[\int_a^b |\alpha(t) + \beta(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_a^b |\alpha(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |\beta(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \quad (3.31)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.31. (Djabang vd., 2020) $r, s, v > 0$, $p \geq 1$ ve $k, l \in \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ olduğunda

$$[\Gamma_v^{(k)}(r) + \Gamma_v^{(l)}(s)]^{\frac{1}{p}} \leq [\Gamma_v^{(k)}(r)]^{\frac{1}{p}} + [\Gamma_v^{(l)}(s)]^{\frac{1}{p}} \quad (3.32)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. (3.29) eşitliği ve (3.30) eşitsizliği kullanılırsa

$$[\Gamma_v^{(k)}(r) + \Gamma_v^{(l)}(s)]^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} \left(\ln\left(\frac{t}{v}\right)\right)^k \frac{e^{-t}}{v^k} dt + \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{s}{v}-1} \left(\ln\left(\frac{t}{v}\right)\right)^l \frac{e^{-t}}{v^l} dt \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_0^\infty \left(\left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{1}{p}(\frac{r}{v}-1)} \left(\ln\left(\frac{t}{v}\right)\right)^{\frac{k}{p}} \frac{e^{-\frac{t}{p}}}{v^{\frac{k}{p}}} \right)^p dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(\left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{1}{p}(\frac{s}{v}-1)} \left(\ln\left(\frac{t}{v}\right)\right)^{\frac{l}{p}} \frac{e^{-\frac{t}{p}}}{v^{\frac{l}{p}}} \right)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int_0^\infty \left(\left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{1}{p}(\frac{r}{v}-1)} \left(\ln\left(\frac{t}{v}\right)\right)^{\frac{k}{p}} \frac{e^{-\frac{t}{p}}}{v^{\frac{k}{p}}} + \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{1}{p}(\frac{s}{v}-1)} \left(\ln\left(\frac{t}{v}\right)\right)^{\frac{l}{p}} \frac{e^{-\frac{t}{p}}}{v^{\frac{l}{p}}} \right)^p dt \right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

olur. Minkowski integral eşitsizliği için gerekli koşullar son eşitsizlikte sağlandığından (3.31) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left[\Gamma_v^{(k)}(r) + \Gamma_v^{(l)}(s) \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \left[\int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} \ln\left(\frac{t}{v}\right) \left(\frac{e^{-t}}{v^k}\right) dt \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left[\int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{s}{v}-1} \ln\left(\frac{t}{v}\right) \left(\frac{e^{-t}}{v^l}\right) dt \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\Gamma_v^{(k)}(r) \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\Gamma_v^{(l)}(s) \right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

olur ve böylece istenen elde edilir. \square

Teorem 3.32. (Djabang vd., 2020) r, s pozitif gerçel sayı, k, l pozitif tam sayılar ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\frac{k}{p} + \frac{l}{q} \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \psi_v^{\left(\frac{k}{p} + \frac{l}{q}\right)}\left(\frac{r}{p} + \frac{s}{q}\right) \right| \leq \left| \psi_v^{(k)}(r) \right|^{\frac{1}{p}} \left| \psi_v^{(l)}(s) \right|^{\frac{1}{q}} \quad (3.33)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

$$\psi_v^{(k)}(r) = (-1)^{k+1} \int_0^\infty \frac{t^k e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt$$

eşitliğinde k yerine $\frac{k}{p} + \frac{l}{q}$ ve r yerine $\frac{r}{p} + \frac{s}{q}$ yazılır ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left| \psi_v^{\left(\frac{k}{p} + \frac{l}{q}\right)} \left(\frac{r}{p} + \frac{s}{q} \right) \right| &= \int_0^\infty \frac{t^{\frac{k}{p} + \frac{l}{q}} e^{-\left(\frac{r}{p} + \frac{s}{q}\right)t}}{1 - e^{-vt}} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{t^{\frac{k}{p} + \frac{l}{q}} e^{-\left(\frac{r}{p} + \frac{s}{q}\right)t}}{(1 - e^{-vt})^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}} dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{t^{\frac{k}{p}} e^{-\frac{rt}{p}}}{(1 - e^{-vt})^{\frac{1}{p}}} \frac{t^{\frac{l}{q}} e^{-\frac{st}{q}}}{(1 - e^{-vt})^{\frac{1}{q}}} \right) dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{t^k e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t^l e^{-st}}{1 - e^{-vt}} \right)^{\frac{1}{q}} dt \\
&\leq \int_0^\infty \left(\frac{t^k e^{-rt}}{1 - e^{-vt}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^\infty \left(\frac{t^l e^{-st}}{1 - e^{-vt}} \right)^{\frac{1}{q}} dt \\
&\leq \left| \psi_v^{(k)}(r) \right|^{\frac{1}{p}} \left| \psi_v^{(l)}(s) \right|^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

□

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde gama fonksiyonunun bir parametrelili deformatyonu bazı negatif değerler için tanımlanarak Bohr-Mollerup tipi bir teorem ispatlanmıştır. Ayrıca v -gama fonksiyonunun asimptotik açılımı ve v -digama fonksiyonunun bazı integral gösterimlerine yer verilmiştir.

4.1. V -gama Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

İşe $\Gamma_v(r+v) = rv^{-2}\Gamma_v(r)$ özelliği kullanılarak Γ_v fonksiyonunu bazı negatif değerler için tanımlayarak başlayalım.

$$\Gamma_v(r) = v^2 \frac{\Gamma_v(r+v)}{r} \quad (4.1)$$

eşitliğin sağ tarafı $-v < r < 0$ değerleri için iyi tanımlıdır. Böylece $\Gamma_v(r)$ fonksiyonu $r > 0$ değerleri için tanımlıdır. Ayrıca, $r > 0$ için $\Gamma_v(r)$ pozitif değerli olduğundan $-v < r < 0$ için $\Gamma_v(r)$ negatif değerlidir. Şimdi $-2v < r < -v$ için

$$\begin{aligned} \Gamma_v(r+2v) &= \Gamma_v((r+v)+v) \\ &= (r+v)v^{-2}\Gamma_v(r+v) \\ &= r(r+v)(v^{-2})^2\Gamma_v(r) \end{aligned}$$

yazarsak buradan $\Gamma_v(r) = (v^2)^2 \frac{\Gamma_v(r+2v)}{r(r+v)}$ elde edilir.

$-2v < r < -v$ için $\Gamma_v(r+2v)$ pozitif değerli olduğundan $\Gamma_v(r)$ fonksiyonu da $-2v < r < -v$ için pozitif değerli olur. Bu işlem tekrarlandığında $-nv < r < (-n+1)v$ değerleri için $\Gamma_v(r)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1. (Ege, 2022) $r, v > 0$, $-nv < r < (-n+1)v$ ve $n = 1, 2, \dots$ değerleri için

$$\Gamma_v(r) = v^{2n} \frac{\Gamma_v(r+nv)}{r(r+v)\dots(r+(n-1)v)} \quad (4.2)$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdi de Gel'fand ve Shilov (Gel'fand ve Shilov, 1964) tarafından geliştirilen regülerizasyon metodunu kullanarak Γ_v fonksiyonu için bir ifade elde edelim. Bunun için e^{-t} fonksiyonunun Taylor seri açılımından yeteri kadar terimi çıkarılarak

$-nv < r < (-n + 1)v$ değerleri için

$$\Gamma_v(r) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} \left[e^{-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right] dt \quad (4.3)$$

yakınsak integrali elde edilir.

Gama fonksiyonunun farklı gösterimlerinin birbirine denkliği Bohr-Mollerup teoremi ile kesin olarak belirlenmiştir (Rudin, 1964). Aşağıda gama fonksiyonunun v -analoğu için Bohr-Mollerup tipi bir teorem verilmiştir.

Teorem 4.2. (Ege, 2022) f fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde pozitif tanımlı ve $v > 0$ olmak üzere

1. $f(v) = 1$
2. $f(r + v) = rv^{-2}f(r)$
3. $\ln f(r)$ konvektir

özelliklerini sağlasın. Bu durumda her $r \in (0, \infty)$ için $f(r) = \Gamma_v(r)$ biçimindedir.

İspat. Γ_v fonksiyonunun tanımından 1. ve 2. özellikleri $f(r) = \Gamma_v(r)$ için sağlanır. Ayrıca $\ln \Gamma_v$ konveks olduğundan 3. özellik $f(r) = \Gamma_v(r)$ fonksiyonu için geçerlidir. Şimdi de $\Gamma_v(r)$ fonksiyonunun 1., 2. ve 3. özellikleri sağlayan tek olarak belirli fonksiyon olduğunu gösterelim. $\ln f$ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\begin{aligned} \frac{\ln f(nv + v) - \ln f(nv)}{v} &\leq \frac{\ln f(nv + v + r) - \ln f(nv + v)}{r} \\ &\leq \frac{\ln f(nv + 2v) - \ln f(nv + v)}{v} \end{aligned} \quad (4.4)$$

yani

$$\frac{1}{v} \ln \left(\frac{f(nv + v)}{f(nv)} \right) \leq \frac{1}{r} \ln \left(\frac{f(nv + v + r)}{f(nv + v)} \right) \leq \frac{1}{v} \ln \left(\frac{f(nv + 2v)}{f(nv + v)} \right) \quad (4.5)$$

olur. Kabulümüzden

$$f(v + nv) = n!v^{-n} \quad (4.6)$$

ve

$$f(nv + v + r) = v^{-2(n+1)}(nv + r)(nv + r - v)(nv + r - 2v) \dots rf(r) \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7) eşitlikleri (4.5) eşitsizliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} \frac{r}{v} \ln(nv^{-1}) &\leq \ln \left(\frac{v^{-2(n+1)}(nv + r)(nv + r - v)(nv + r - 2v) \dots rf(r)}{n!v^{-n}} \right) \\ &\leq \frac{r}{v} \ln((nv + v)v^{-2}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

olur. Böylece

$$0 \leq \ln \left(\frac{(nv+r)(nv+r-v)(nv+r-2v)\dots rf(r)}{n!v^{2n+2}(nv^{-1})^{\frac{r}{v}}} \right) \leq \ln \left(\frac{nv+v}{nv} \right)^{\frac{r}{v}}$$

elde edilir. Son ifade $n \rightarrow \infty$ için 0'a yakınsadığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{(nv+r)(nv+r-v)(nv+r-2v)\dots rf(r)}{n!v^{2n+2}(nv^{-1})^{\frac{r}{v}}} \right) = 0 \quad (4.9)$$

olur.

Son olarak \ln fonksiyonu ile limit ifadesini yer değiştirir ve (4.9) eşitliğinin her iki tarafına üstel fonksiyonu uygularsak $f(r) = \Gamma_v(r)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. \square

Şimdi de

$$\Gamma_v(r) = v^{1-\frac{r}{v}} \Gamma\left(\frac{r}{v}\right) \quad (4.10)$$

eşitliğini kullanarak aşağıdaki formülleri verelim.

Önerme 4.3. (Ege, 2022) $r, v > 0$ olmak üzere

$$\Gamma_v(r)\Gamma_v(v-r) = \frac{v\pi}{\sin\left(\frac{\pi r}{v}\right)}, \quad r \neq 0, -v, -2v, \dots, v, 2v, \dots \quad (4.11)$$

(*v*-yansıma)

$$\Gamma_v(r)\Gamma_v\left(r + \frac{v}{2}\right) = 2^{1-\frac{2r}{v}} \sqrt{v\pi} \Gamma_v(2r), \quad r \neq 0, \frac{-v}{2}, -v, \frac{-3v}{2}, -2v, \dots \quad (4.12)$$

(*v*-Legendre)

$$\Gamma_v(r) = \sqrt{2\pi} v^{-\frac{2r}{v} + \frac{3}{2}} r^{\frac{r}{v} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{v}} + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r > 0 \quad (4.13)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. (4.10) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \Gamma_v(r)\Gamma_v(v-r) &= v^{1-\frac{r}{v}} \Gamma\left(\frac{r}{v}\right) v^{1-\frac{v-r}{v}} \Gamma\left(\frac{v-r}{v}\right) \\ &= v \Gamma\left(\frac{r}{v}\right) \Gamma\left(1 - \frac{r}{v}\right) \end{aligned}$$

olur. Euler yansıma formülü (Duren, 2012)

$$\Gamma(r)\Gamma(1-r) = \frac{\pi}{\sin(\pi r)}, \quad r \notin \mathbb{Z} \quad (4.14)$$

uygulandığında (4.11) elde edilir. (4.10) eşitliği ve

$$\Gamma(r)\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2r}\sqrt{\pi}\Gamma(2r), \quad r \neq 0, \frac{-1}{2}, -1, \frac{-3}{2}, \dots \quad (4.15)$$

Legendre çoğaltma formülü (Legendre, 2010) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma_v(r)\Gamma_v\left(r + \frac{v}{2}\right) &= v^{1-\frac{r}{v}}\Gamma\left(\frac{r}{v}\right)v^{1-\frac{r+\frac{v}{2}}{v}}\Gamma\left(\frac{r+\frac{v}{2}}{v}\right) \\ &= v^{\frac{3}{2}-\frac{2r}{v}}\Gamma\left(\frac{r}{v}\right)\Gamma\left(\frac{r}{v} + \frac{1}{2}\right) \\ &= v^{\frac{3}{2}-\frac{2r}{v}}2^{1-\frac{2r}{v}}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2r}{v}\right) \\ &= v^{\frac{3}{2}-\frac{2r}{v}}2^{1-\frac{2r}{v}}v^{\frac{2r}{v}-1}\sqrt{\pi}\Gamma_v(2r) \\ &= v^{\frac{1}{2}}2^{1-\frac{2r}{v}}\sqrt{\pi}\Gamma_v(2r) \\ &= 2^{1-\frac{2r}{v}}\sqrt{\pi v}\Gamma_v(2r) \end{aligned}$$

elde edilir.

Gama fonksiyonu için Stirling asimptotik formülü (Whittaker ve Watson, 1952)

$$\Gamma(r) = \sqrt{2\pi}r^{r-\frac{1}{2}}e^{-r} + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4.16)$$

ve

$$\Gamma_v(r) = v^{1-\frac{r}{v}}\Gamma\left(\frac{r}{v}\right) \quad (4.17)$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma_v(r+v) &= v^{1-\frac{r+v}{v}}\Gamma\left(\frac{r}{v} + 1\right) \\ &= v^{\frac{-r}{v}}\frac{r}{v}\Gamma\left(\frac{r}{v}\right) \\ &= v^{\frac{-r}{v}}\frac{r}{v}\sqrt{2\pi}\left(\frac{r}{v}\right)^{\frac{r}{v}-\frac{1}{2}}e^{\frac{-r}{v}} + O\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= \sqrt{2\pi}v^{\frac{-r}{v}-1+\frac{1}{2}-\frac{r}{v}}r^{1+\frac{r}{v}-\frac{1}{2}}e^{\frac{-r}{v}} + O\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= \sqrt{2\pi}r^{\frac{r}{v}+\frac{1}{2}}v^{\frac{-2r}{v}-\frac{1}{2}}e^{\frac{-r}{v}} + O\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\Gamma_v(r+v) = rv^{-2}\Gamma_v(r)$ eşitliği ile (4.13) eşitliği elde edilir. \square

4.2. V -gama Fonksiyonunun Bir Asimptotik Genişlemesi

Bu alt bölümde aşağıdaki teorem kullanılarak Γ_v fonksiyonu için bir asimptotik genişleme elde edilecektir.

Teorem 4.4. (Etingof, 2002) $a, b \in [0, \infty)$ olmak üzere $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f''(c) > 0$ koşulunu sağlayan tek bir $c \in (a, b)$ yerel minimumuna sahip olsun. O zaman

$$\int_a^b g(r) e^{-\frac{f(r)}{h}} dr = h^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{f(c)}{h}} \sqrt{2\pi} \frac{g(c)}{\sqrt{f''(c)}} + O(h) \quad (4.18)$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 4.5. (Ege, 2022) $r, v > 0$ değerleri için

$$\Gamma_v(r+v) = \sqrt{2\pi} v^{-\frac{2r}{v}-\frac{1}{2}} r^{\frac{r}{v}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{v}} + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4.19)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $\Gamma_v(r+v) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}} e^{-t} dt$ integralinde $t = ur$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma_v(r+v) &= v^{-\frac{r}{v}} r^{\frac{r}{v}+1} \int_0^\infty u^{\frac{r}{v}} e^{-ur} du \\ &= v^{-\frac{r}{v}} r^{\frac{r}{v}+1} \int_0^\infty \left(e^{-r(u-\frac{1}{v} \ln u)}\right) du \end{aligned}$$

elde edilir. $f(u) = u - \ln u^{\frac{1}{v}}$ olsun. O zaman $f'(u) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $u = \frac{1}{v}$ olmasıdır. Ayrıca $f''(\frac{1}{v}) = v > 0$ biçimindedir. Bu durumda (4.18) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-r(u-\frac{1}{v} \ln u)} du &= \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{v}(1+\ln v)} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{v}} + O\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{r}} v^{-\left(\frac{r}{v}+\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{r}{v}} + O\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

ve böylece

$$\Gamma_v(r+v) = \sqrt{2\pi} v^{-\left(\frac{2r}{v}-\frac{1}{2}\right)} r^{\left(\frac{r}{v}+\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{r}{v}} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

4.3. Beta Fonksiyonunun Bir Parametrelili Deformasyonu V -beta Fonksiyonu

Aşağıdaki teoremden ψ_v fonksiyonunun integral gösterimi verilmiştir.

Teorem 4.6. (Ege, 2022) $r, v > 0$ değerleri için

$$\psi_v(r) = \frac{1}{v} \int_0^\infty \frac{1}{z} \left[e^{-z} - \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{v}\right)^{\frac{r}{v}}} \right] dz \quad (4.20)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (3.12) eşitliğinin r değişkenine göre türevi alınır ve $\ln\left(\frac{t}{v}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-r} - e^{-\frac{t}{v}r}}{r} dr$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma'_v(r) &= \frac{1}{v} \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} \ln\left(\frac{t}{v}\right) e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{v} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} \frac{e^{-t-z} - e^{-t(1+\frac{z}{v})}}{z} dz dt \\ &= \frac{1}{v} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} \frac{e^{-t-z} - e^{-t(1+\frac{z}{v})}}{z} dt dz \\ &= \frac{1}{v} \int_0^\infty \frac{1}{z} \left[e^{-z} \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} e^{-t} dt - \int_0^\infty \left(\frac{t}{v}\right)^{\frac{r}{v}-1} e^{-t(1+\frac{z}{v})} dt \right] dz \end{aligned}$$

olur. Şimdi, $\left(1 + \frac{z}{v}\right)t = s$ değişken değiştirmesi yapıp $\psi_v(r) = \frac{\Gamma'_v(r)}{\Gamma_v(r)}$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \Gamma'_v(r) &= \frac{1}{v} \int_0^\infty \frac{1}{z} \left[e^{-z} \Gamma_v(r) - \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{v}\right)^{\frac{r}{v}}} \Gamma_v(r) \right] dz \\ &= \frac{1}{v} \Gamma_v(r) \int_0^\infty \frac{1}{z} \left[e^{-z} - \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{v}\right)^{\frac{r}{v}}} \right] dz \end{aligned}$$

olur ve böylece istenen elde edilir. □

Teorem 4.7. (Ege, 2022) $r, v > 0$ değerleri için

$$\psi_v(r) = \frac{1}{v} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-\frac{tr}{v}}}{1 - e^{-t}} \right] dt \quad (4.21)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (4.20) eşitliğinde $1 + \frac{z}{v} = e^t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}\psi_v(r) &= \frac{1}{v} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\int_t^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz + \int_{\ln(\frac{t}{v}+1)}^\infty \frac{e^{-\frac{tr}{v}}}{1 - e^{-t}} dt \right] \\ &= \frac{1}{v} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\int_t^{\ln(\frac{t}{v}+1)} \frac{e^{-z}}{z} dz + \int_{\ln(\frac{t}{v}+1)}^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-\frac{tr}{v}}}{1 - e^{-t}} \right) dt \right]\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $t \rightarrow 0$ iken

$$\left| \int_t^{\ln(\frac{t}{v}+1)} \frac{e^{-z}}{z} dz \right| \leq \int_t^{\ln(\frac{t}{v}+1)} \left| \frac{e^{-z}}{z} \right| dz \leq \int_{\ln(\frac{t}{v}+1)}^t \frac{dz}{z} \rightarrow 0$$

olur ve böylece ispat tamamlanır. \square

Not 4.8. *Teorem 4.6 ve Teorem 4.7'de $v = 1$ alınırsa ψ fonksiyonunun sırasıyla Dirichlet ve Gauss gösterimleri elde edilir.*

şimdi de klasik beta fonksiyonu B 'ye benzer olarak beta fonksiyonunun v -analoğunu tanımlayalım.

Tanım 4.9. (Ege, 2022) $v > 0$ olmak üzere B fonksiyonunun v -analoğu (v -deformasyonu, v -genellemesi)

$$B_v(r, s) = \frac{\Gamma_v(r)\Gamma_v(s)}{\Gamma_v(r+s)}, \quad r, s > 0 \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlanır.

$$\Gamma_v(r) = v^{1-\frac{r}{v}} \Gamma\left(\frac{r}{v}\right)$$

özelliği kullanılarak

$$B\left(\frac{r}{v}, \frac{s}{v}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{v}\right)\Gamma\left(\frac{s}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{v} + \frac{s}{v}\right)}$$

ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned}B\left(\frac{r}{v}, \frac{s}{v}\right) &= \frac{v^{\frac{r}{v}-1}\Gamma_v(r)v^{\frac{s}{v}-1}\Gamma_v(s)}{\Gamma_v(r+s)v^{\left(\frac{r+s}{v}-1\right)}} \\ &= \frac{1}{v}B_v(r, s)\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$B_v(r, s) = vB\left(\frac{r}{v}, \frac{s}{v}\right)$$

ve B_v fonksiyonunun integral gösterimi

$$B_v(r, s) = v \int_0^1 t^{\frac{r}{v}-1} (1-t)^{\frac{s}{v}-1} dt \quad (4.23)$$

olur.

Şimdi de B_v fonksiyonunu kullanarak ψ_v fonksiyonu için bir ifade elde edelim.

Teorem 4.10. (Ege, 2022) $r, v > 0$ değerleri için v -digama fonksiyonunun seri gösterimi

$$\psi_v(r) = -\frac{\gamma}{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(nv)n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{r}{v} - k\right) \quad (4.24)$$

biçimindedir.

İspat. Türevin tanımından

$$\Gamma'_v(r) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma_v(r+s) - \Gamma_v(r)}{s}$$

yazılabilir. B_v fonksiyonu simetrik yani $B_v(r, s) = B_v(s, r)$, $r, s > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \psi_v(r) &= \frac{\Gamma'_v(r)}{\Gamma_v(r)} \\ &= \frac{1}{\Gamma_v(r)} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma_v(r+s) - \Gamma_v(r)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma_v(s) - B_v(r, s)}{sB_v(r, s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma_v(s) - B_v(s, r)}{sB_v(s, r)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

olur. (3.17) eşitliği ile verilen v -Weierstrass kanonik çarpımı ve e^r üstel fonksiyonunun seri gösterimi;

$$e^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$$

kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \Gamma_v(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{s} v^{2-\frac{s}{v}} e^{-\frac{\gamma s}{v}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{nv}\right)^{-1} e^{\frac{s}{nv}} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{\gamma s}{v} + O(s^2)\right) \lim_{s \rightarrow 0} \left(v^{2-\frac{s}{v}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{nv}\right)^{-1} e^{\frac{s}{nv}} \right) \\ &= v^2 \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} - \frac{\gamma}{v} \right) \\ &= v^2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} - \gamma v \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.23) eşitliğinde $r = -t$ ve $q = \frac{s}{v} - 1$ değişken değiştirmesi yapar ve

$$(1+r)^q = 1 + qr + \frac{q(q-1)}{2!}r^2 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!}r^k + \dots$$

seri gösterimi (Gradshteyn ve Ryzhik, 2014) kullanılırsa

$$\begin{aligned} B_v(r, s) &= v \int_0^1 t^{\frac{r}{v}-1} (1-t)^{\frac{s}{v}-1} dt \\ &= v \int_0^1 t^{\frac{r}{v}-1} \left[1 - \left(\frac{s}{v}-1\right)t + \left(\frac{s}{v}-1\right)\left(\frac{s}{v}-2\right)\frac{t^2}{2!} - \dots \right] dt \\ &= v \left[\left(\frac{v}{r}\right) - \left(\frac{s}{v}-1\right)\frac{v}{r+v} + \left(\frac{s}{v}-1\right)\left(\frac{s}{v}-2\right)\dots \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

olur. (4.25), (4.26) ve (4.27) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \psi_v(r) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma_v(s) - B_v(s, r)}{sB_v(s, r)} \\ &= \frac{v^2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} - \gamma v - v^2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} + v^2 \left(\frac{r}{v}-1\right) \frac{1}{s+v} - \frac{v^2}{2!} \left(\frac{r}{v}-1\right) \left(\frac{r}{v}-2\right) \dots}{\lim_{s \rightarrow 0} s \left[\left(\frac{v^2}{s}\right) - \frac{v^2}{s+v} \left(\frac{r}{v}-1\right) + \frac{v^2}{2!(s+2v)} \left(\frac{r}{v}-1\right) \left(\frac{r}{v}-2\right) - \dots \right]} \\ &= \frac{-\gamma v + v^2 \left(\frac{r}{v}-1\right) \frac{1}{v} - \frac{v^2}{2!} \left(\frac{r}{v}-1\right) \left(\frac{r}{v}-2\right) \frac{1}{2v} + \dots}{v^2} \\ &= \frac{-\gamma}{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nv(n!)} \prod_{k=1}^n \left(\frac{r}{v}-k\right) \end{aligned}$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır. □

4.4. V -gama ve V -beta Fonksiyonları İçin Bir Limit

Bu alt bölümde Önerme 4.3 kullanılarak gama ve beta fonksiyonlarının v -analogları için limit ifadeleri verilmiştir.

Teorem 4.11. (Ege, 2022) $r, v > 0$ ve $a, b > 0$ değerleri için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{v}\right)^{\frac{b-a}{v}} \left[\frac{\Gamma_v(ar+v)}{\Gamma_v(br+v)} \right]^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{v}} v^{\frac{b-a}{v}} e^{\frac{b-a}{v}} \quad (4.28)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$\Gamma_v(r+v) = rv^{-2}\Gamma_v(r)$$

ve Önerme 4.3’de verilen

$$\Gamma_v(r) = \sqrt{2\pi} v^{-\frac{2r}{v} + \frac{3}{2}} r^{\frac{r}{v} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{v}} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\Gamma_v(ar + v) = \sqrt{2\pi} v^{-\frac{2ar}{v} - \frac{1}{2}} (ar)^{\frac{ar}{v} + \frac{1}{2}} e^{-\frac{ar}{v}} \left(1 + O\left(\frac{1}{ar}\right)\right) \quad (4.29)$$

ve

$$\Gamma_v(br + v) = \sqrt{2\pi} v^{-\frac{2br}{v} - \frac{1}{2}} (br)^{\frac{br}{v} + \frac{1}{2}} e^{-\frac{br}{v}} \left(1 + O\left(\frac{1}{br}\right)\right) \quad (4.30)$$

elde edilir. Böylece (4.29) ve (4.30) eşitliklerinden

$$\left[\frac{\Gamma_v(ar + v)}{\Gamma_v(br + v)}\right]^{\frac{1}{r}} = \frac{(ar)^{\frac{a}{v} + \frac{1}{2r}} v^{-\frac{2a}{v} - \frac{1}{2r}} e^{-\frac{a}{v}}}{(br)^{\frac{b}{v} + \frac{1}{2r}} v^{-\frac{2b}{v} - \frac{1}{2r}} e^{-\frac{b}{v}}} \times \left[\frac{\left(1 + O\left(\frac{1}{ar}\right)\right)}{\left(1 + O\left(\frac{1}{br}\right)\right)}\right]^{\frac{1}{r}}$$

olur.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{r}} = 1, \quad 0 < A, B < \infty$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[1 + O\left(\frac{1}{Ar}\right)\right]^{\frac{1}{r}} = 1, \quad A > 0$$

olduğundan

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{b-a}{v}} \left[\frac{\Gamma_v(ar + v)}{\Gamma_v(br + v)}\right]^{\frac{1}{r}} = \frac{a^{\frac{a}{v}} v^{-\frac{2(a-b)}{v}} e^{-\frac{a-b}{v}}}{b^{\frac{b}{v}}}$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.12. (Ege, 2022) $r, v > 0$ ve $a, b, c, d > 0$ değerleri için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [B_v(ar + c, br + d)]^{\frac{1}{r}} = \frac{a^{\frac{a}{v}} b^{\frac{b}{v}}}{(a + b)^{\frac{a+b}{v}}} \quad (4.31)$$

eşitliği doğrudur.

İspat. (4.22) ve (4.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
B_v(ar + c, br + d) &= \frac{\Gamma_v(ar + c) \Gamma_v(br + d)}{\Gamma_v((a + b)r + c + d)} \\
&= \sqrt{2\pi} v^{-\frac{2(ar+c)}{v} + \frac{3}{2}} (ar + c)^{\frac{ar+c}{v} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{ar+c}{v}} \left(1 + O\left(\frac{1}{ar + c}\right)\right) \\
&\times \sqrt{2\pi} v^{-\frac{2(br+d)}{v} + \frac{3}{2}} (br + d)^{\frac{br+d}{v} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{br+d}{v}} \left(1 + O\left(\frac{1}{br + d}\right)\right) \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi} v^{-\frac{2((a+b)r+c+d)}{v} + \frac{3}{2}} ((a + b)r + c + d)^{\frac{(a+b)r+c+d}{v} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{(a+b)r+c+d}{v}}} \\
&\times \frac{1}{\left(1 + O\left(\frac{1}{(a + b)r + c + d}\right)\right)}
\end{aligned}$$

olur.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (Br + C)^{\frac{1}{r}} = 1, \quad B > 0, C > 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{Ar + B}{Cr + D} = \frac{A}{C}, \quad A, C > 0, B, D \geq 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + O\left(\frac{1}{Dr + E}\right)\right) = 1, \quad D > 0, E \geq 0$$

eşitliklerinden

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [B_v(ar + c, br + d)]^{\frac{1}{r}} = \frac{v^{-\frac{2a}{v}} v^{-\frac{2b}{v}}}{v^{-\frac{2(a+b)}{v}}} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{a}{v}} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{\frac{b}{v}} = \frac{a^{\frac{a}{v}} b^{\frac{b}{v}}}{(a+b)^{\frac{a+b}{v}}}$$

istenen elde edilir. \square

4.5. V -gama Fonksiyonunu İçeren Bazı Eşitsizlikler

Bu bölümde, v -gama fonksiyonunun logaritmik konvekslik özelliği ile v -digama ve v -poligama fonksiyonlarının monotonluk özelliğinden faydalanarak v -gama, v -digama ve v -poligama fonksiyonlarını içeren eşitsizliklere yer verilmiştir.

Lemma 4.13. $r \in [0, 1]$ olmak üzere a ve b pozitif gerçel sayıları için $a \geq b$ olsun. Bu durumda,

$$\psi_v(a + br) \geq \psi_v(b + ar) \quad (4.32)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $r \in [0, 1]$ ve a ve b pozitif gerçel sayıları için $a \geq b$ olduğunda; $a + br \geq 0$ ve $b + ar \geq 0$ olduğu görülür. (3.23) eşitliğinden

$$\psi_v(a + br) = -\frac{\ln v + \gamma}{v} - \frac{1}{a + br} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{nv} - \frac{1}{a + br + nv} \right]$$

ve

$$\psi_v(b + ar) = -\frac{\ln v + \gamma}{v} - \frac{1}{b + ar} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{nv} - \frac{1}{b + ar + nv} \right]$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{b + ar} - \frac{1}{a + br} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b + ar + nv} - \frac{1}{a + br + nv} \right) \\ &= \frac{(a - b)(1 - r)}{(b + ar)(a + br)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a - b)(1 - r)}{(a + br + nv)(b + ar + nv)} \geq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\psi_v(a + br) - \psi_v(b + ar) \geq 0$$

yani

$$\psi_v(a + br) \geq \psi_v(b + ar)$$

elde edilir. □

Lemma 4.14. $r \in [0, 1]$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \geq b$, $\psi_v(b + ar) \geq 0$ ve $c, d \in \mathbb{R}^+$ için $bc \geq ad \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$bc\psi_v(a + br) \geq ad\psi_v(b + ar) \tag{4.33}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $a \geq b$ için

$$\psi_v(a + br) \geq \psi_v(b + ar)$$

ve $ad > 0$ olduğundan

$$ad\psi_v(a + br) \geq ad\psi_v(b + ar)$$

elde edilir. $bc \geq ad$ kabulünden,

$$bc\psi_v(a + br) \geq ad\psi_v(a + br) \geq ad\psi_v(b + ar)$$

ve böylece

$$bc\psi_v(a + br) \geq ad\psi_v(b + ar)$$

$$bc\psi_v(a + br) - ad\psi_v(b + ar) \geq 0$$

olur. □

Teorem 4.15. $r \in [0, 1]$ olmak üzere $a \geq b > 0$, $\psi_v(b + ar) \geq 0$ ve $c, d \in \mathbb{R}^+$ için $bc \geq ad > 0$ olsun. Bu durumda, $f(r) = \frac{\Gamma_v(a + br)^c}{\Gamma_v(b + ar)^d}$ fonksiyonu artan fonksiyondur ve

$$\frac{\Gamma_v(a)^b}{\Gamma_v(c)^d} \leq \frac{\Gamma_v(a + br)^c}{\Gamma_v(b + ar)^d} \leq \frac{\Gamma_v(a + b)^c}{\Gamma_v(a + b)^d} \quad (4.34)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $g(r) = \log f(r)$ yazılırsa

$$\begin{aligned} g(r) &= \log \frac{\Gamma_v(a + br)^c}{\Gamma_v(b + ar)^d} \\ &= c \log \Gamma_v(a + br) - d \log \Gamma_v(b + ar) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} g'(r) &= \frac{cb\Gamma'_v(a + br)}{\Gamma_v(a + br)} - \frac{ad\Gamma'_v(b + ar)}{\Gamma_v(b + ar)} \\ &= bc\psi_v(a + br) - ad\psi_v(b + ar) \geq 0 \end{aligned}$$

yani g artandır. $g(r) = \log f(r)$ olduğundan $f(r)$ fonksiyonu da artandır. O zaman, $0 \leq r \leq 1$ ise $f(0) \leq f(r) \leq f(1)$ olur.

Bu durumda,

$$\frac{\Gamma_v(a)^b}{\Gamma_v(c)^d} \leq \frac{\Gamma_v(a + br)^c}{\Gamma_v(b + ar)^d} \leq \frac{\Gamma_v(a + b)^c}{\Gamma_v(a + b)^d}$$

istenilen elde edilir. □

Lemma 4.16. $r \geq 1$ ve a, b pozitif gerçel sayıları için, $b \geq a$ olsun. Bu durumda

$$\psi_v(a + br) \geq \psi_v(b + ar) \quad (4.35)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.13'den

$$\psi_v(a + br) - \psi_v(b + ar) = \frac{(a - b)(1 - r)}{(b + ar)(a + br)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a - b)(1 - r)}{(a + br + nv)(b + ar + nv)}$$

idi. $r \geq 1$ ve $b \geq a$ olduğundan $(a - b)(1 - r) \geq 0$ olur. $r \geq 1$ ise $1 - r \leq 0$ ve $b \geq a$ ise $a - b \leq 0$ olduğundan

$$\psi_v(a + br) \geq \psi_v(b + ar)$$

elde edilir. \square

Lemma 4.17. $r \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \geq a$, $\psi_v(b + ar) \geq 0$ ve $c, d \in \mathbb{R}^+$ için $bc \geq ad > 0$ olsun. Bu durumda,

$$bc\psi_v(a + br) \geq ad\psi_v(b + ar) \quad (4.36)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.16'dan $r \geq 0$ için $\psi_v(a + br) \geq \psi_v(b + ar)$ olduğu gösterilmiştir. Bu durumda $ad > 0$ için $ad\psi_v(a + br) \geq ad\psi_v(b + ar)$ olur.

$bc > ad$ kabulü uygulandığında,

$$bc\psi_v(a + br) \geq ad\psi_v(a + br) \geq ad\psi_v(b + ar)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.18. $r \geq 1$, $b \geq a > 0$, $\psi_v(b + ar) \geq 0$ ve $c, d \in \mathbb{R}^+$ için $bc \geq ad > 0$ olduğunda

$$f(r) = \frac{\Gamma_v(a + br)^c}{\Gamma_v(b + ar)^d} \quad (4.37)$$

fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında artandır.

İspat. Teorem 4.15'de $g(r) = \log f(r)$ iken $g'(r) = \frac{cb\Gamma'_v(a + br)}{\Gamma_v(a + br)} - \frac{ad\Gamma'_v(b + ar)}{\Gamma_v(b + ar)}$ olduğu gösterilmiştir. Buradan Lemma 4.17'ye göre

$$bc\psi_v(a + br) - ad\psi_v(b + ar) \geq 0$$

elde edilir. Bu durumda, $r \geq 1$ için $g(r)$ artandır. $g(r) = \log f(r)$ olduğundan $f(r)$ artan fonksiyondur. \square

Teorem 4.19. (Ege, 2023) $v > 0$ olmak üzere

$$0 < a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \leq d_i + \sum_{k=1}^l e_k r, \left(\sum_{k=1}^l e_k \right) f_i \geq \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) c_i$$

$a_i, c_i, d_i, f_i > 0$ ve $\left(\sum_{j=1}^p b_j \right) c_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ olsun. Eğer

$$\psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) > 0, \psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) > 0$$

ise

$$F(r) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right)^{c_i}}{\Gamma_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right)^{f_i}} \quad (4.38)$$

fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında azalandır. Ayrıca,

$$\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j \right)^{c_i}}{\Gamma_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k \right)^{f_i}} \leq F(r) \leq \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma_v(a_i)^{c_i}}{\Gamma_v(d_i)^{f_i}}, \quad r \in [0, 1] \quad (4.39)$$

ve

$$F(r) \leq \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j \right)^{c_i}}{\Gamma_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k \right)^{f_i}}, \quad r \in (1, \infty) \quad (4.40)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. $G(r) = \ln F(r)$ olsun. Bu durumda

$$G(r) = \sum_{i=1}^n c_i \ln \Gamma_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) - \sum_{i=1}^n f_i \ln \Gamma_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right)$$

ve

$$\begin{aligned} G'(r) &= \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) \sum_{i=1}^n \left[c_i \psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) \right] - \left(\sum_{k=1}^l e_k \right) \sum_{i=1}^n \left[f_i \psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^p b_j \right) c_i \psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) - \left(\sum_{k=1}^l e_k \right) f_i \psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) \right] \end{aligned}$$

olur. $\psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ olsun. $[0, \infty)$ aralığında ψ_v fonksiyonu artan olduğundan

$$\psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) \leq \psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right)$$

ve böylece $\psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) > 0$ elde edilir. O zaman

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) c_i \psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) &\leq \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) c_i \psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^l e_k \right) f_i \psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) \end{aligned}$$

ve böylece $i = 1, 2, \dots, n$ değerleri için

$$\left(\sum_{j=1}^p b_j \right) c_i \psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) - \left(\sum_{k=1}^l e_k \right) f_i \psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) \leq 0 \quad (4.41)$$

olur. Şimdi, $\psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) > 0$ olsun. $\psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) > 0$ ise bu durumda (4.41) eşitsizliği elde edilir.

Eğer $\psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) \leq 0$ ve $\psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) > 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^l e_k \right) f_i \psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) &\geq \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) c_i \psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) \\ &\geq \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) c_i \psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) \end{aligned}$$

ve böylece (4.41) eşitsizliği elde edilir. O zaman $G'(r) \leq 0$ olur. Yani $[0, \infty)$ aralığında G fonksiyonu azalandır. $G(r) = \ln F(r)$ olduğundan F fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında

azalandır. O zaman $r \in [0, 1)$ için

$$F(1) \leq F(r) \leq F(0)$$

ve $r \in (1, \infty)$ için

$$F(r) \leq F(1)$$

olur ve ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.20. (Ege, 2023) $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i, c_i, d_i, f_i > 0$, ve $\sum_{k=1}^l e_k f_i > 0$ olmak üzere

$$0 < a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \leq d_i + \sum_{k=1}^l e_k r, \quad \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) c_i \geq \left(\sum_{k=1}^l e_k \right) f_i,$$

olsun. $\psi_v \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) < 0$ veya $\psi_v \left(d_i + \sum_{k=1}^l e_k r \right) < 0$ ise $r \in [0, \infty)$ için Teorem 4.19'da tanımlanan F fonksiyonu azalandır ve (4.39) ile (4.40) eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. Teorem 4.19'a benzer şekilde ispatlanabilir. \square

Not 4.21. Eğer Γ_v fonksiyonunun yerine Teorem 4.19 ve Teorem 4.20'nin koşullarını sağlayacak şekilde $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, türevlenebilir, logaritmik konveks fonksiyon alınırsa Teorem 4.19 ve Teorem 4.20'nin sonuçları geçerli olur. Çünkü F fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında logaritmik konveks olması $[0, \infty)$ üzerinde F 'nin logaritmik türevinin artan olduğunu gösterir. Örneğin Γ_v fonksiyonunun yerine logaritmik konveks olan Γ fonksiyonu ya da Γ fonksiyonunun genellemeleri olan $\Gamma_k, \Gamma_{q,k}, \Gamma_{p,q,k}$ fonksiyonlarından herhangi biri seçilebilir.

Şimdi de v -poligama fonksiyonlarını içeren bazı eşitsizlikler verelim.

Teorem 4.22. (Ege, 2023) $0 < a + br \leq c + dr$, $a, c, \alpha, \beta > 0$, $\alpha\beta > 0$ ve

$$H(r) = \frac{\left[\psi_v^{(m)}(a + br) \right]^\alpha}{\left[\psi_v^{(m)}(c + dr) \right]^\beta}.$$

olsun. Eğer $\alpha b \leq \beta d$ ve $m = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ise $[0, \infty)$ aralığında H fonksiyonu azalandır ve $r \in [0, 1]$ için

$$\frac{\left[\psi_v^{(m)}(a + b) \right]^\alpha}{\left[\psi_v^{(m)}(c + d) \right]^\beta} \leq H(r) \leq \frac{\left[\psi_v^{(m)}(a) \right]^\alpha}{\left[\psi_v^{(m)}(c) \right]^\beta} \quad (4.42)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Ayrıca $\alpha b \geq \beta d$ ve $m = 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $[0, \infty)$ aralığında H fonksiyonu artandır ve (4.42) eşitsizliğinin tersi geçerlidir.

İspat. $I(r) = \ln H(r)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
I'(r) &= \frac{H'(r)}{H(r)} \\
&= \frac{\alpha \left[\psi_v^{(m)}(a+br) \right]^{\alpha-1} \psi_v^{(m+1)}(a+br) b \left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^\beta \left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^\beta}{\left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^{2\beta} \left[\psi_v^{(m)}(a+br) \right]^\alpha} \\
&\quad - \frac{\left[\psi_v^{(m)}(a+br) \right]^\alpha \beta \left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^{\beta-1} \psi_v^{(m+1)}(c+dr) d \left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^\beta}{\left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^{2\beta} \left[\psi_v^{(m)}(a+br) \right]^\alpha} \\
&= \frac{\alpha b \left[\psi_v^{(m)}(a+br) \right]^{\alpha-1} \psi_v^{(m+1)}(a+br) \left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^\beta \left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^\beta}{\left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^{2\beta} \left[\psi_v^{(m)}(a+br) \right]^\alpha} \\
&\quad - \frac{\beta d \left[\psi_v^{(m)}(a+br) \right]^\alpha \beta \left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^{\beta-1} \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^\beta}{\left[\psi_v^{(m)}(c+dr) \right]^{2\beta} \left[\psi_v^{(m)}(a+br) \right]^\alpha} \\
&= \frac{\alpha b \psi_v^{(m+1)}(a+br)}{\psi_v^{(m)}(a+br)} - \frac{\beta d \psi_v^{(m+1)}(c+dr)}{\psi_v^{(m)}(c+dr)} \\
&= \frac{\alpha b \psi_v^{(m+1)}(a+br) \psi_v^{(m)}(c+dr) - \beta d \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \psi_v^{(m)}(a+br)}{\psi_v^{(m)}(a+br) \psi_v^{(m)}(c+dr)}.
\end{aligned}$$

(3.25) eşitliğinden $m = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\psi_v^{(m)} > 0$ ve $m = 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\psi_v^{(m)} < 0$ olduğu görülür. İlk olarak $\alpha b \leq \beta d$ ve $m = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun. O zaman $\psi_v^{(m)}(a+br) > 0, \psi_v^{(m)}(c+dr) > 0, \psi_v^{(m+1)}(a+br) < 0, \psi_v^{(m+1)}(c+dr) < 0$ ve $\psi_v^{(m)}$ azalan ve $\psi_v^{(m+1)}$ artandır. O zaman

$$\psi_v^{(m)}(a+br) \geq \psi_v^{(m)}(c+dr)$$

ve

$$\psi_v^{(m+1)}(a+br) \leq \psi_v^{(m+1)}(c+dr)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\psi_v^{(m)}(c+dr) \psi_v^{(m+1)}(a+br) &\leq \psi_v^{(m)}(c+dr) \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \\
&\leq \psi_v^{(m)}(a+br) \psi_v^{(m+1)}(c+dr)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha b \leq \beta d$ koşulundan

$$\begin{aligned} \alpha b \psi_v^{(m)}(c+dr) \psi_v^{(m+1)}(a+br) &\leq \alpha b \psi_v^{(m)}(c+dr) \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \\ &\leq \alpha b \psi_v^{(m)}(a+br) \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \\ &\leq \beta d \psi_v^{(m)}(a+br) \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \end{aligned}$$

ve böylece

$$\alpha b \psi_v^{(m)}(c+dr) \psi_v^{(m+1)}(a+br) - \beta d \psi_v^{(m)}(a+br) \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \leq 0$$

elde edilir. Bu durumda $I'(r) \leq 0$ olur. Bu ise I fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında azalan olduğunu gösterir. Buradan H fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında azalan olduğu elde edilir.

Böylece $r \in [0, 1]$ için $H(1) \leq H(r) \leq H(0)$ yani (4.42) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de $\alpha b \geq \beta d$ ve $m = 2k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun. Bu durumda $\psi_v^{(m)}(a+br) < 0$, $\psi_v^{(m)}(c+dr) < 0$, $\psi_v^{(m+1)}(a+br) > 0$, $\psi_v^{(m+1)}(c+dr) > 0$, $\psi_v^{(m)}$ artan ve $\psi_v^{(m+1)}$ azalandır. O zaman

$$\begin{aligned} \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \psi_v^{(m)}(a+br) &\leq \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \psi_v^{(m)}(c+dr) \\ &\leq \psi_v^{(m+1)}(a+br) \psi_v^{(m)}(c+dr), \end{aligned}$$

ve $\alpha b \geq \beta d$ kabulünden

$$\begin{aligned} \alpha b \psi_v^{(m+1)}(a+br) \psi_v^{(m)}(c+dr) &\geq \alpha b \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \psi_v^{(m)}(c+dr) \\ &\geq \alpha b \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \psi_v^{(m)}(a+br) \\ &\geq \beta d \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \psi_v^{(m)}(a+br) \end{aligned}$$

ve böylece

$$\alpha b \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \psi_v^{(m)}(a+br) - \beta d \psi_v^{(m+1)}(c+dr) \psi_v^{(m)}(a+br) \geq 0$$

olur. Buradan $I'(r) \geq 0$ elde edilir. Böylece $[0, \infty)$ aralığında I fonksiyonunun artan olduğu görülür. O zaman H , $[0, \infty)$ aralığında artandır. Buradan (4.42) eşitsizliğinin tersinin geçerli olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.23. (Ege, 2023) $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i > 0, i = 1, 2 \dots n$ için

$$0 < a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \leq c_i \sum_{k=1}^l d_k r \text{ ve}$$

$$J(r) = \prod_{i=1}^n \frac{\left[\psi_v^{(m)} \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right) \right]^{\alpha_i}}{\left[\psi_v^{(m)} \left(c_i + \sum_{k=1}^l d_k r \right) \right]^{\beta_i}} \quad (4.43)$$

olsun. Eğer $\left(\sum_{j=1}^p b_j \right) \alpha_i < 0$ ve $\left(\sum_{k=1}^l d_k \right) \beta_i > 0, i = 1, 2 \dots n$ ise J fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığında artandır ve $[0, 1]$ aralığı üzerinde

$$\prod_{i=1}^n \frac{\left[\psi_v^{(m)}(a_i) \right]^{\alpha_i}}{\left[\psi_v^{(m)}(c_i) \right]^{\beta_i}} \leq J(r) \leq \prod_{i=1}^n \frac{\left[\psi_v^{(m)} \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j \right) \right]^{\alpha_i}}{\left[\psi_v^{(m)} \left(c_i + \sum_{k=1}^l d_k \right) \right]^{\beta_i}} \quad (4.44)$$

eşitsizlikleri doğrudur. Ayrıca $\left(\sum_{j=1}^p b_j \right) \alpha_i > 0$ ve $\left(\sum_{k=1}^l d_k \right) \beta_i < 0, i = 1, 2 \dots n$ ise J fonksiyonu artandır ve bu durumda (4.44) eşitsizliklerinin tersi geçerlidir.

İspat. $K(r) = \ln J(r)$ olsun. O zaman

$$K'(r) = \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^p b_j \right) \alpha_i \frac{\psi_v^{(m+1)} \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right)}{\psi_v^{(m)} \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right)} \right] - \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^l d_k \right) \beta_i \frac{\psi_v^{(m+1)} \left(c_i + \sum_{k=1}^l d_k r \right)}{\psi_v^{(m)} \left(c_i + \sum_{k=1}^l d_k r \right)} \right]$$

elde edilir.

$$\frac{\psi_v^{(m+1)} \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right)}{\psi_v^{(m)} \left(a_i + \sum_{j=1}^p b_j r \right)} < 0 \text{ ve } \frac{\psi_v^{(m+1)} \left(c_i + \sum_{k=1}^l d_k r \right)}{\psi_v^{(m)} \left(c_i + \sum_{k=1}^l d_k r \right)} < 0 \text{ olduğundan}$$

$\left(\sum_{j=1}^p b_j\right) \alpha_i < 0$ ve $\left(\sum_{k=1}^l d_k\right) \beta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ için $K'(r) > 0$ 'dır. Bu durumda J fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artandır. Böylece $[0, 1]$ aralığı üzerinde (4.44) eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca $\left(\sum_{j=1}^p b_j\right) \alpha_i > 0$ ve $\left(\sum_{k=1}^l d_k\right) \beta_i < 0, i = 1, 2, \dots, n$ için J fonksiyonu azalandır. Bu durumda da (4.44) eşitsizliğinin tersi $[0, 1]$ aralığı üzerinde geçerli olur ve böylece ispat tamamlanmış olur. \square



5. SONUÇ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında; Gama fonksiyonunun bir genellemesi olan v -gama fonksiyonu tanıtılmış, özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Beta, digama ve poligama fonksiyonlarının v -genellemeleri tanımlanmıştır. V -gama fonksiyonu bazı negatif değerler için tanımlanmış ve Bohr-Mollerup tipi bir teorem ispatlanmıştır. Ayrıca v -gama fonksiyonunun asimptotik açılımı ve v -digama fonksiyonunun bazı integral gösterimlerine yer verilmiştir. Ayrıca v -gama ve v -beta fonksiyonları için limit ifadeleri verilmiştir. Son olarak v -gama fonksiyonunun logaritmik konveksliğinden, v -digama ve v -poligama fonksiyonlarının monotonluk özelliğinden faydalanarak v -gama, v -digama, v -poligama fonksiyonlarını içeren bazı eşitsizliklere yer verilmiştir. Gama fonksiyonunun ve genelleştirmelerinin literatürdeki önemi ve bu konuda yapılan yoğun çalışmalar göz önüne alındığında, bu yüksek lisans tez çalışması daha sonra yapılacak çalışmalara yol gösterici olabilecektir. Ayrıca bu konu hakkında temel bilgilere sahip olmak isteyen araştırmacılara da öğretici bir kaynak olacaktır.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun, Irene A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ninth dover printing, tenth gpo printing edition.
- Alsina, C. and Tomás, M.S. (2005). A geometrical proof of a new inequality for the gamma function. *J. Ineq. Pure Appl. Math*, 6(2).
- Andrews, G.E., Askey, R., and Roy, R. (1999). *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press.
- Djabang, E., Nantomah, K., and Iddrisu, M. (2020). On a v -analogue of the gamma function and some associated inequalities. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 11(1):74–86.
- Duren, P. (2012). *Invitation to classical analysis*, volume 17. American Mathematical Soc.
- Ege, İ. (2022). Some results on the v -analogue of gamma function. *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, 10(1):109–123.
- Ege, İ. (2023). On inequalities for the ratio of v -gamma and v -polygamma functions. *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, 13(1):121–131.
- Etingof, P. (2002). Mathematical ideas and notions of quantum field theory, available from [www-math](http://www-math.berkeley.edu/~etingof/).
- Gel'fand, I.M. and Shilov, G.E. (1964). *Generalized Functions: Properties and operations*, by I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, translated by E. Saletan. Generalized Functions. Academic Press.
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (2014). *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier Science.
- Iddrisu, M. and Tetteh, K. (2017). The gamma function and its analytical applications. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 23:1–16.
- Legendre, A.M. (2010). Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendentes et sur les quadratures. tome 1. *Livres*.
- Mitrinovic, D.S., Pecaric, J., and Fink, A.M. (1993). *Classical and New Inequalities in Analysis*, volume 61. Springer Science & Business Media.

- Mitrinovic, D.S. and Vasic, P.M. (1970). *Analytic inequalities*, volume 1. Springer.
- Rudin, W. (1964). *Principles of Mathematical Analysis, Voll.3*. McGraw-Hill, New York.
- Sandor, J. (2005). A note on certain inequalities for the gamma function. *JIPAM. Journal of Inequalities in Pure & Applied Mathematics [electronic only]*, 6.
- Shabani, A. (2007). Some inequalities for the gamma function. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 8(2).
- Shabani, A. (2008). Generalization of some inequalities for the gamma function. *Mathematical Communications*, 13(2):271–275.
- Spiegel, M. R. (1965). *Laplace transforms*. McGraw-Hill New York.
- Whittaker, E.T. and Watson, G.N. (1952). A course of modern analysis. *WhittakerA course of modern analysis1952*.

ÖZ GEÇMİŞ

Soyadı, Adı : YEŞİL ÇAKMAK, Meryem

Yabancı Dil : İngilizce

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Lisans:	Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2001

İŞ DENEYİMİ

Yıl	Yer/Kurum	Unvan
2001-2004	Eskişehir Çifteler Atatürk İlköğretim Okulu	Öğretmen
2004-2005	Ordu Akkuş Akpınar Çok programlı Lisesi	Öğretmen
2005-2010	Aydın Söke Bağarası Çok Programlı lisesi	Öğretmen
2010-2024	Aydın Söke Hilmi Fırat Anadolu Lisesi	Öğretmen