

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OPERATÖRLERİN BEREZİN SAYISI İÇİN BAZI YENİ
EŞİTSİZLİKLER**

Duygu USLU

**Danışman
Doç. Dr. Ulaş YAMANCI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2024**



© 2024 [Duygu USLU]

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETİ.....	3
3. TEMEL KAVRAMLAR.....	6
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	13
4.1. Berezin Sayı Eşitsizlikleri	13
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	23
KAYNAKLAR	24
ÖZGEÇMİŞ	29

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

OPERATÖRLERİN BEREZİN SAYISI İÇİN BAZI YENİ EŞİTSİZLİKLER

Duygu USLU

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ulaş YAMANCI

Bu yüksek lisans tezi dört ana başlıktan oluşmaktadır. Giriş kısmında, üretici çekirdek, Berezin sembolü ve eşitsizliklerin tarihçesinden bahsedilmiştir. Kaynaklar bölümünde, Berezin sayısı ile ilgili daha önce yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Temel kavramlar kısmında, Berezin sembolü ve Berezin sayısı kavramlarının rahatlıkla algılanabilmesi için bazı terim ve notasyonlara yer verilmiştir. Daha sonra, Berezin sayısı kavramını tanımlayabilmek için üretici çekirdekli Hilbert uzay, üretici çekirdek, normalleştirilmiş üretici çekirdek, Berezin sembolü gibi bazı kavramlar ele alınmıştır. Berezin sayısını bazı özelliklerinden bahsedilmiş ve buna örnek verilmiştir. Aynı zamanda teoremlerin ispatını vermek için bazı yardımcı teoremler verilmiştir.

Genel olarak eşitsizliklerin matematiksel teorisi ve özel olarak Hilbert tipi eşitsizlikler ve bunların uygulamaları son yüzyıl boyunca önemli ölçüde gelişmiştir. Yeni fikir ve kanıtların, yeni sonuçların ve uygulamaların ortaya çıkmasıyla birlikte, matematiksel eşitsizlikler konusuna sürekli olarak çalışmalar eklenmekte, bunlar da eşitsizlikler konusunu geliştirmektedir. Berezin sembolü ve Berezin sayısı, üretici çekirdekli Hilbert uzayında, kuantum fiziğinde ve değişmeli olmayan geometride operatör teorisinin çeşitli sorunlarının incelenmesinde geniş uygulamaya sahip olmuştur. Ayrıca bir operatörün sayısal yarıçapı ve Berezin sayısı kavramları diferansiyel denklemler, mühendislik, sayısal analiz, kuantum mekaniği alanlarındaki uygulamaları nedeniyle kapsamlı bir yere sahiptir.

Son birkaç yılda operatörlerin Berezin sayısı için ters kuvvet eşitsizliğini bulmaya yönelik önemli çalışmalar yapılmıştır. Çoğu araştırmacı bunu yapmak için Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler kullanmışlardır. Ana sonuç kısmında

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n+1} < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ayrık tipli Hardy-Hilbert tipli eşitsizliklerden faydalanılarak Teorem 4.1.1 de üretici çekirdekli Hilbert uzayları üzerinde, pozitif sürekli fonksiyonlar kullanılarak self-adjoint operatörlerin Berezin sembolleri için eşitsizlik verilmiştir. Bu teoremin bir uygulaması olarak Berezin sayısı için Sonuç 4.1.2 elde edilmiştir. Teorem 4.1.3 de $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayları üzerinde yine ayrık tipli Hardy-Hilbert

tipli eşitsizlikten faydalanılarak konveks ve sürekli fonksiyon kullanılarak self-adjoint operatörler için Berezin $f(t)g(t) = t$, $t \geq 0$ olacak şekilde $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olmak üzere n sayı eşitsizliği verilmiştir. Ayrıca, f ve g fonksiyonları, “Temel Kavramlar” kısmında verilen Yardımcı Teoremler kullanılarak operatörlerin Berezin sayısı için bazı geliştirilmiş üst sınırlar elde edilmiştir (Teorem 4.1.5, Teorem 4.1.8 ve Teorem 4.1.10).

Anahtar Kelimeler: Berezin sayısı, Berezin sembolü, üretici çekirdek, self-adjoint operatör, konveks fonksiyon.

2024, 29 sayfa



ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME NEW INEQUALITIES FOR THE NUMBER OF OPERATORS

Duygu USLU

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ulaş YAMANCI

This master's thesis consists of four main headings. In the introduction, the reproducing kernel, the Berezin symbol and the history of inequalities are mentioned. In the resources section, previous studies on the Berezin number are included. In the basic concepts section, some terms and notations are included so that the concepts of Berezin symbol and Berezin number can be easily perceived. Then, in order to define the concept of Berezin number, some concepts such as Hilbert space with reproducing kernel, normalized reproducing kernel, Berezin symbol are discussed. Some features of the Berezin number are mentioned and examples are given. At the same time, some auxiliary theorems are given to prove the theorems. The mathematical theory of inequalities in general, and Hilbert-type inequalities in particular, and their applications have developed significantly over the last century. With the emergece of new ideas and evidence, new results and applications, studies are constantly being added to the subject of mathematical inequalities, which in turn improve the subject of inequalities. The Berezin symbol and the Berezin number have had wide application in the study of various problems of operator theory in Hilbert space with reproducing kernels, in quantum physics and in non-commutative geometry. In addition, the concepts of numerical radius of an operator and Berezin number have a comprehensive place due to their applications in the fields of differential equations, engineering, numerical analysis and quantum mechanics.

In the last few years, significant work has been done to find the inverse force inequality for the Berezin number of operators. Many researchers have used Hardy-Hilbert type inequalities to do this. In the main conclusion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n+1} < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

by making use of discrete type Hardy-Hilbert type inequalities, the theorem gives inequality for Berezin symbols of self-adjoint operators on Hilbert spaces with reproducing kernels, using positive continuous fuctions. Theorem 4.1.2. for the number of Berezins as an application of this theorem has been obtained. In theorem 4.1.3, Berezin number inequality is given for self-adjoint operators by using convex and continuous functions on Hilbert spaces with $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ generating kernels, again making use of discrete type Hardy-Hilbert type inequality. In addition , the

functions f and g are non-negative continuous functions on $[0, \infty)$ such that $f(t)g(t) = t$, $t \geq 0$. Using the auxiliary theorems given in the basic concepts section, some improved upper bounds have been obtained (Theorem 4.1.5, Theorem 4.1.8, Theorem 4.1.10)

Keywords: Berezin number, Berezin symbol, reproducing kernel, self-adjoint operator, convex function.

2023, 29 pages



TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Ulaş YAMANCI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Duygu USLU
ISPARTA, 2024



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\tilde{R}$	R operatörünün Berezin sembolü
$ber(R)$	R operatörünün Berezin sayısı
$Ber(R)$	R operatörünün Berezin kümesi
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ Hilbert uzayındaki sınırlı lineer operatörler
$\mathcal{H}(\Omega)$	Üretici çekirdekli Hilbert uzay
k_λ	Üretici çekirdek
$\hat{k}_\lambda$	Normalleştirilmiş üretici çekirdek



1. GİRİŞ

Tarihsel olarak matematiksel analiz son üç yüz yıldır matematiğin en önemli dalı olmuştur. Aslında eşitsizlikler matematiksel analizin kalbi haline gelmiştir. Birçok büyük matematikçi, konunun gelişimine önemli katkılarda bulunmuştur, bu da matematiksel fizik, uygulamalı ve teorik matematiğin çeşitli alanında yararlı uygulamalarla birçok yeni eşitsizliğin bulunmasına yol açmıştır. Aslında matematiksel eşitsizlikler yirminci yüzyılda, Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılmış olan ve 1934 yılında yayınlanmış “Eşitsizlikler” başlıklı öncü çalışmasıyla modern matematiğin kayda değer bir alanı haline gelmiştir. Bu önemli eser, kesin kanıtlarla ve matematikteki yararlı uygulamalarla zarif eşitsizliklerle dolu, kesin mantığın bir paradigmasını temsil etmektedir.

Yirminci yüzyılda, ayırık ve integral eşitsizlikler matematikte temel bir rol oynamış, teorik ve uygulamalı matematiğin birçok alanında geniş bir uygulama yelpazesine sahip olmuştur. Özellikle, David Hilbert integral denklemler üzerine derslerinde sabitin tam olarak belirlenmesi olmadan Hilbert’in çift seri eşitsizliğini ilk kez kanıtlamıştır. Eğer $\{a_m\}$ ve $\{b_m\}$ iki dizi, $0 < \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 < \infty$ ve $0 < \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$ ise Hilbert’in çift seri eşitsizliği aşağıdaki şekilde verilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} < \pi \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

Bu ünlü eşitsizlik 1900’lerin başında Hilbert tarafından 2π sabiti kullanılarak ispatlanmıştır. Hilbert’in ispatından birkaç yıl sonra Schur 1911’de yeni bir ispat vermiş ve bu ispat (1.1)’in aslında mümkün olan en iyi sabit π için geçerli olduğunu ortaya çıkarmıştır.

1908 yılında Weyl (1.1) Hilbert eşitsizliğinin ispatını yayınlamıştır ve Schur aynı zamanda (1.1)’in integral eşitsizliğini aşağıdaki formda elde etmiştir:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy < \pi \left\{ \int_0^{\infty} f^2(x) dx \int_0^{\infty} g^2(y) dy \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Genel olarak eşitsizliklerin matematiksel teorisi ve özel olarak Hilbert tipi eşitsizlikler ve bunların uygulamaları son yüzyıl boyunca önemli ölçüde gelişmiştir. Yeni fikir ve kanıtların, yeni sonuçların ve uygulamaların ortaya çıkmasıyla birlikte, matematiksel eşitsizlikler konusuna sürekli olarak çalışmalar eklenmekte, bunlar da gelişmekte ve bütünleşmektedir. Matematikçiler için Hilbert tipi eşitsizlikleri bir

bütün olarak incelemek giderek daha fazla arzu edilir hale gelmiştir. Ancak büyük ve önemli makaleler sıklıkla birçok farklı dergide yayınlandığı için bunu yapmak giderek zorlaşıyor.

Üretici çekirdekli Hilbert uzaylar, yaklaşım teorisinde, makine öğrenme teorisinde, integral operatörler teorisinde önemli bir araç haline gelmiş ve karmaşık analizde değerli bir rol oynamıştır. Berezin sembolü ve Berezin sayısı, üretici çekirdekli Hilbert uzayında, kuantum fiziğinde ve değişmeli olmayan geometride operatör teorisinin çeşitli sorunlarının incelenmesinde geniş uygulamaya sahip olmuştur (Berezin, 1972; 1974; Englis, 2006; Fricain, 2000; Hedenmalm, 2000; Karaev ve Saltan; 2005; Karaev, 2013). Bunlar, özellikle Toeplitz ve Hankel operatörleri için, Hardy ve Bergman uzaylarındaki operatörleri incelemek için önemli araçlardır. Bir operatörün Berezin sembolünün özellikleri o operatör hakkında önemli bilgiler verir. Hardy ve Bergman uzayları gibi en bilindik üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında, Berezin sembolleri operatörleri tek olarak belirler. Yani, tüm $\lambda \in \Omega$ için $\tilde{R}(\lambda) = \tilde{T}(\lambda)$ ise $R=T$ dır. Ayrıca bir operatörün üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında tersinirliği operatörün Berezin sembolü ile ilişkilidir (Karaev, 2006).

Üretici çekirdekli Hilbert uzayları, makine öğrenimindeki çekirdek yöntemlerinde temeldir. Bu çekirdek fonksiyonlarının tekrar tekrar ortaya çıktığı aktif bir araştırma alanıdır. Çekirdekler, mikrodizi veri analizi ve görüntü gürültü giderme dahil olmak üzere birçok gerçek dünya uygulamasında kullanılmıştır. Çekirdek yöntemlerinin performansı, pratik uygulamalarda büyük ölçüde çekirdek seçimine bağlıdır. Belirli bir uygulama için uygun çekirdeği bulmak kolay bir iş değildir.

2. KAYNAK ÖZETİ

Üretici çekirdekler genel teorisi Aronszajn tarafından 1950 yılında oluşturulmuş ve daha sonra bu teori Schwartz (1964) tarafından geliştirilmiştir.

Bir operatörün sayısal yarıçapı ve Berezin sayısı kavramları diferansiyel denklemler, mühendislik, sayısal analiz, kuantum mekaniği alanlarındaki uygulamaları nedeniyle kapsamlı bir yere sahip olmuştur.

Üretici çekirdekler ile tanımlı olan Berezin sembolleri kavramı, Berezin (1972; 1974) tarafından “Covariant and contravariant symbols for operators” adlı çalışmasında ele alınmıştır. Berezin sembolü operatörler teorisinde, özellikle Toeplitz operatörlerini, Hankel operatörlerini ve bileşke operatörlerini incelemek için önemli rol oynamaktadır (Karaev, 2004; 2012; 2013; Karaev vd., 2014; Yamancı, 2018). Operatörler teorisindeki diğer önemli bir kavramda Berezin sayısıdır. Berezin sembolü kullanılarak, Karaev tarafından Berezin kümesi ve Berezin sayısı tanımlanmıştır (Karaev, 2006). Bir operatörün Berezin sayısı $ber(A)$ ile gösterilir ve $\mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayında tanımlanır. Aslında herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ için $0 \leq ber(A) \leq w(A) \leq \|A\|$ ve $ber(A) \neq 0$ ise $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$ber(A^n) \leq \left(\frac{w(A)}{ber(A)} \right)^n ber(A)^n.$$

Son birkaç yılda operatörlerin Berezin sayısı için ters kuvvet eşitsizliğini bulmaya yönelik önemli çalışmalar yapılmıştır. Çoğu araştırmacı bunu yapmak için Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler kullanmışlardır (Garayev vd., 2016; Garayev vd., 2017; Garayev ve Alomari, 2021; Yamancı vd., 2017; Yamancı vd., 2019). Diğer taraftan literatürde sıkça kullanılan bazı eşitsizliklerden faydalanan operatörlerin Berezin sayısı için yeni eşitsizlikler verilmiştir (Bakherad, 2018; Bakherad vd., 2019; Bakherad ve Garayev, 2019; Hajmohamadi vd., 2020; Sahoo vd., 2020; Yamancı ve Garayev, 2019; Yamancı vd., 2020).

Hardy-Hilbert eşitsizliklerini kullanarak Yamancı ve Gürdal (2017) Berezin sayısı için aşağıdaki eşitsizliği elde etmişlerdir:

$$ber^2(f(A)) < \frac{36\pi^2}{53} ber(f(A)^2) \approx 6.7039 ber(f(A)^2)$$

Garayev vd. (2017) tarafından Berezin sayısı için bazı ters eşitsizlikler aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$ber(f(A))^2 \leq \frac{3(8\pi - 3)}{8} ber(f(A)^2).$$

Garayev ve diğerleri aynı çalışmada üstteki eşitsizlik için aşağıdaki gibi daha iyi bir yaklaşım sunmuştur:

$$ber(A)^2 \leq \frac{2\pi}{17} ber(A^2).$$

Garayev vd. (2018) başka bir çalışmada pozitif bir A operatörü ve sürekli bir f fonksiyonu

$$\alpha = \alpha(p, q) = 2 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^p + 1 \right]^{-1} \text{ ve } (pq)^p > 1 \text{ ve } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ ile } p, q > 1$$

olmak üzere Berezin sayısı için aşağıdaki eşitsizliği elde etmişlerdir:

$$ber(f(A))^p \leq \alpha ber(f(A)^p).$$

Özel olarak $p=2$ için

$$ber(f(A))^2 \leq \frac{128}{13} ber(f(A)^2)$$

eşitsizliğini vermişlerdir.

$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ self-adjoint operatör ve f fonksiyonu $\Delta \subset (0, \infty)$ aralığında tanımlanan herhangi bir pozitif fonksiyon için Garayev vd. (2018) aşağıdaki şekilde bir eşitsizlik vermişlerdir: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$ için

$$ber(f(A))^2 \leq 4(pq - 1) ber(f(A)^2).$$

Yamancı vd. (2017) ve Yamancı vd. (2019) konveks fonksiyonlar için sırasıyla

$$f^2(berA) < \left(\frac{12}{7}\pi - \frac{3}{14} \right) ber(f^2(A))$$

ve

$$f^2(berA) < \frac{15}{4} ber(f^2(A)).$$

eşitsizliklerini vermişlerdir.

$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ pozitif operatör ve f fonksiyonu $\Delta \subset (0, \infty)$ aralığında tanımlanan herhangi bir pozitif fonksiyon için Majee vd. (2023) aşağıdaki eşitsizliği elde etmişlerdir:

$$\text{ber}(f(A))^2 \leq \frac{24}{2\pi^2 - 9} \text{ber}(f(A)^2).$$

Aynı çalışmada yazarlar konveks f fonksiyonu için $f^2(\text{ber}A) < \frac{24}{2\pi^2 - 9} \text{ber}(f^2(A))$ eşitsizliğini vermişlerdir.



3. TEMEL KAVRAMLAR

Teorem 3.1. $\mathcal{H}$ Hilbert uzay ve $\{e_n\}$ dizisi $\mathcal{H}$ uzayında ortonormal bir dizi olsun. O halde aşağıdaki koşullar birbirine denktir (Rynne ve Youngson, 2000).

- (i) $\overline{\text{span}}\{e_n: n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{H}$;
- (ii) $\{e_n: n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$;
- (iii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, (\forall x \in \mathcal{H})$;
- (iv) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, (\forall x \in \mathcal{H})$.

Tanım 3.2. Yukarda verilen teoremin şartlarından herhangi biri sağlanırsa $\{e_n\}$ ortonormal dizisine $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında ortonormal baz denir (Rynne ve Youngson, 2000).

Teorem 3.3. (Riesz Temsil Teoremi) Her sınırlı lineer f fonksiyoneli $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında iç çarpım olarak ifade edilebilir. Yani, k, f fonksiyoneline bağlı olmak üzere

$$f(x) = \langle x, k \rangle$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir tek k vektörü vardır ve

$$\|f\| = \|k\|$$

dir (Rynne ve Youngson, 2000).

Tanım 3.4. $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzay ve $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ olmak üzere her $x, y \in \mathcal{H}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ sağlarsa T ye lineer operatör denir.

Değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar olan operatörlere fonksiyonel denir. Buna göre T nin çekirdeği $\text{Core}(T)$ ile gösterilirse

$$\text{Core}(T) = \{x \in \mathcal{H}: Tx = 0\}$$

olur (Kreyszing, 1978; Rynne ve Youngson, 2000).

Tanım 3.5. $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ Hilbert uzay olmak üzere $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ sınırlı lineer operatör olsun. T nin T^* adjoint opeatörü her $x \in \mathcal{H}_1$ ve $y \in \mathcal{H}_2$ için

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

olacak şekilde bir

$$T^*: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$$

operatörüdür (Rynne ve Youngson, 2000).

Aşağıdaki bazı özel operatörler adjoint operatör yardımıyla tanımlanacaktır.

Tanım 3.6. $R: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ Hilbert uzayı olsun

- (i) $R^*R = RR^*$ ise R operatörü normal operatör;
- (ii) $R^* = R$ ise R operatörüne self-adjoint operatör;
- (iii) $R^*R = RR^* = I$ ise R operatörüne üniter operatör denir (Rynne ve Youngson, 2000).

Tanım 3.7. $[a, b]$ aralığında herhangi w_1, w_2 noktaları ve $0 \leq \mu \leq 1$ aralığındaki herhangi μ değeri için

$$f(\mu w_1 + (1 - \mu)w_2) \leq \mu f(w_1) + (1 - \mu)f(w_2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f(w)$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Kreyszing, 1978).

Tanım 3.8. A değişmeli Banach cebirindeki her $x \in A$ elamanı için $\hat{x}(\phi) = \phi(x)$ olarak tanımlanan $\hat{x}: \Sigma_A \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümüne x in Gelfand dönüşümü denir.

Tanım 3.9. $X \neq \{0\}$ kompleks, normlu bir uzay ve $T: D(T) \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. T nin bir λ regüler değeri,

- (i) $R_\lambda(T)$ mevcut,
- (ii) $R_\lambda(T)$ sınırlı,
- (iii) X de yoğun bir küme üzerinde $R_\lambda(T)$ tanımlı

olacak şekilde kompleks bir sayıdır. T operatörünün tüm regüler değerleri olan λ ların oluşturduğu kümeye T operatörünün resolvent kümesi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir. $\rho(T)$ resolvent kümesinin $\mathbb{C}$ kompleks düzlemdeki tümleyeni olan $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ kümesine T operatörünün spektrumu ve bir $\lambda \in \sigma(T)$ değerine de T operatörünün spektral değeri denir (Kreyszing, 1978).

Tanım 3.10. R , kompleks bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde self adjoint lineer operatör olsun. Gelfand dönüşümü, R 'nin spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli $C(\mathfrak{G}_p(R))$ fonksiyonlar kümesi ile $\mathcal{H}$ uzayında $1_{\mathcal{H}}$ operatörü ve R tarafından üretilen $C^*(R)$ kümeleri arasında aşağıdaki gibi *-izometrik olarak ϕ izomorfizmi oluşturur:

Herhangi $f, g \in C(\mathfrak{G}_p(R))$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

- (i) $\phi(\alpha f + \beta g) = \alpha \phi(f) + \beta \phi(g)$
- (ii) $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$ ve $\phi(\bar{f}) = \phi(f)^*$
- (iii) $\|\phi(f)\| = \|f\| = \sup_{t \in \mathfrak{G}_p(R)} |f(t)|$
- (iv) $\phi(f_0) = 1_{\mathcal{H}}$ ve $\phi(f_1) = R$.

Burada $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$, $t \in \mathfrak{G}_p(R)$.

Bu kavramlarla her $f \in \mathfrak{G}_p(R)$ için $f(R) = \phi(f)$ olarak tanımlanır ve buna R self-adjoint operatörü için sürekli fonksiyonel kalkülüs adı verilir.

Tanım 3.11. θ herhangi bir küme ve $\mathcal{F}(\theta)$ ise θ üzerinde tanımlanan tüm kompleks değerli fonksiyonların kümesi olsun. θ kümesi üzerinde üretici çekirdekli Hilbert uzayı, $k_\mu: \theta \times \theta \rightarrow \mathcal{H}$ fonksiyonuna sahip bir $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\theta) \subset \mathcal{F}(\theta)$ Hilbert uzayıdır. Burada her $\mu \in \theta$ için $k_\mu := k(., \mu) \in \mathcal{H}$ ve her $\mu \in \theta$ ve $f \in \mathcal{H}$ için

$$f(\mu) = \langle f, k_\mu \rangle_{\mathcal{H}}$$

dır (Saitoh ve Sawano, 2016).

Tanım 3.12. $\mathcal{H}(\theta)$ uzayının herhangi $\{e_n(z)\}_{n \geq 0}$ ortonormal bazı yardımıyla üretici çekirdek

$$k_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(\mu)} e_n(z)$$

formülü ile tanımlanır (Aronzajn, 1950; Saitoh ve Sawano, 2016).

Tanım 3.13. $\hat{k}_\mu = \frac{k_\mu}{\|k_\mu\|}$ fonksiyonu üretici çekirdekli $\mathcal{H}$ Hilbert uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. $\mathcal{H}$ uzayında herhangi sınırlı lineer R operatörünün Berezin sembolü $\tilde{R}$

$$\tilde{R}(\mu) := \langle R\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu \rangle_{\mathcal{H}} \quad (\mu \in \Theta)$$

ile tanımlanır (Berezin, 1972; Nordgern ve Rosenthal, 1994).

Berezin sembolü, Hardy, Bergman ve Fock uzaylarını içeren üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında operatörlerin incelenmesinde çok yararlı bir araçtır. Örneğin operatörlerin sınırlılığı, tersinirliği, kompaktlığı ve pozitifliği, Berezin sembolleriyle karakterize edilir veya bunlarla ilişkilendirilir (Karaev, 2006; Zhu, 2007; Das ve Sahoo, 2013; Karaev vd., 2013; Zhao ve Zheng, 2016).

Tanım 3.14. $ber(A)$ ve $\|A\|_{ber}$ olarak gösterilen A operatörünün Berezin sayısı ve Berezin normu sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$ber(A) = \sup\{|\tilde{A}(\lambda)| : \lambda \in \Omega\} = \sup\{|\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle| : \lambda \in \Omega\}$$

ve

$$\|A\|_{ber} = \sup\{|\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle| : \lambda \in \Omega\}.$$

$R, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ için Berezin sayısı ve normu için aşağıdaki özellikler sağlanmaktadır:

- (i) $ber(\alpha R) = |\alpha|ber(R)$ tüm $\alpha \in \mathbb{C}$,
- (ii) $ber(R + B) \leq ber(R) + ber(B)$,
- (iii) $ber(R) \leq \|R\|_{ber}$
- (iv) $\|\alpha R\|_{ber} = |\alpha|\|R\|_{ber}$ tüm $\alpha \in \mathbb{C}$
- (v) $\|R + B\|_{ber} \leq \|R\|_{ber} + \|B\|_{ber}$
- (vi) $\|R\|_{ber} = \|R^*\|_{ber}$ ve $ber(R) = ber(R^*)$.

dır (Bhunia vd., 2023).

Örnek 3.15. $\{e_1, e_2\}$, $\mathbb{C}^2$ nin standart ortonormal bazı olsun. $\mathbb{C}^2$ uzayı $\{1, 2\}$ kümesinde bir üretici çekirdekli Hilbert uzay olsun. O halde e_1, e_2 her $i, j \in \{1, 2\}$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan çekirdek fonksiyonlardır:

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$U: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ operatörü aşağıdaki tanımlanmış bir operatör olsun:

$$U(e_1) = e_2$$

$$U(e_2) = e_1$$

O halde U operatörü $\mathbb{C}^2$ üretici çekirdekli Hilbert uzayında self-adjoint ve üniter bir operatördür. Berezin sayısı ve Berezin normu tanımından

$$ber(U) = \sup\{|\langle Ue_1, e_1 \rangle|, |\langle Ue_2, e_2 \rangle|\} = 0$$

$$\|U\|_{ber} = \sup\{\|Ue_i\| : i = 1, 2\} = 1$$

$$w(U) = \|U\| = 1$$

dır (Majee vd., 2023).

Tanım 3.16. R operatörü için Berezin kümesi ve Berezin sayısı sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır (Karaev, 2006; 2013):

$$Ber(R) := Range(\tilde{R}) = \{\tilde{R}(\mu) : \mu \in \Theta\}.$$

Tanım 3.17. R operatörünün $B(H)$ deki nümerik aralığı ve nümerik yarıçapı sırasıyla tanımlanır:

$$W(R) := \{\langle Rf, f \rangle : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\}$$

ve

$$w(R) := \sup\{|\langle Rf, f \rangle| : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\}.$$

Berezin seti, Berezin sayısı, nümerik aralık ve nümerik yarıçap arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$Ber(R) \subset W(R) \text{ ve } ber(R) \leq w(R) \leq \|R\|.$$

Nümerik yarıçap ve uygulamaları için (Gustafson ve Rao, 1997; Kittaneh, 2005; El-Haddad ve Kittaneh, 2007; Dragomir, 2017) referanslarına bakılabilir.

Nümerik yarıçap için temel eşitsizlik kuvvet eşitsizliğidir.

$$w(R^n) \leq w(R)^n, n \geq 1,$$

(Halmas, 1982; Gustafson ve Rao, 1997). Dolayısıyla aşağıdaki sorular doğal olarak ortaya çıkar:

-Operatörlerin Berezin sayısı için yukarıdaki eşitsizlik doğru mu?

-Operatörlerin hangi sınıfları için

$$ber(R)^n \leq C(ber(R^n)) \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı var mı?

Sıfırdan farklı nilpotent operatörü, (3.1) eşitsizliğinin her zaman sağlamadığını gösterir.

Eğer $\{a_m\}$ ve $\{b_m\}$ iki reel dizi ve $0 < \sum_{m=0}^{\infty} a_m^2 < \infty$ ve $0 < \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < \infty$ ise Hardy-Hilbert eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n+1} < \pi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Burada π sabiti en iyi ihtimaldir (Hardy vd., 1967). Son zamanlarda matematikçiler tarafından Hardy-Hilbert eşitsizliğinin uygulamalarıyla ilgili birçok sonuç elde edilmiştir (Hansen, 2009; Hansen vd., 2010 ve Kian, 2012).

$T_p: \ell^p \rightarrow \ell^p$ lineer operatör ve $a = \{a_m\}_{m=1}^\infty \in \ell^p$ negatif olmayan bir dizi olsun. O zaman

$$c_n = (T_p a)(n) = \sum_{m=1}^\infty \frac{a_m}{m+n+1}, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (3.3)$$

olacak şekilde $T_p a = c = \{c_n\}_{n=1}^\infty$ operatörü vardır. $\mathcal{H}$ ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sınırlı bir self-adjoint operatör olsun. 2002 yılında Zhang aşağıdaki eşitsizliği kanıtlamıştır:

$$\langle a, Tb \rangle^2 \leq \frac{\|T\|^2}{2} (\|a\|^2 \|b\|^2 + \langle a, b \rangle^2). \quad (3.4)$$

Burada $\langle a, b \rangle$, a ve b iç çarpımıdır. (3.3) ile tanımlanan T_p operatörü ($p=q=2$) (3.4) koşulunu sağladığından (3.2) eşitsizliği aşağıdaki formda geliştirilmiştir.

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{a_m b_n}{m+n+1} < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \{ \sum_{n=0}^\infty a_n^2 \sum_{n=0}^\infty b_n^2 + (\sum_{n=0}^\infty a_n b_n)^2 \}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Burada, üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında self-adjoint operatörler için Hardy-Hilbert tipli eşitsizliği kullanarak (3.1) eşitsizliği incelenecektir. Ayrıca, bir üretici çekirdekli $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Theta)$ Hilbert uzayında self-adjoint operatörlerin Berezin sembolü için (3.5) eşitsizliğinin benzeri elde edilecektir. Bu sonuçlar (Yamancı vd., 2017; Yamancı ve Gürdal, 2017; Yamancı vd., 2019; Yamancı, 2022) makalelerindeki bazı sonuçları geliştirecektir.

Aşağıda, tezdeki sonuçları geliştirmek için kullanılacak bazı yardımcı teoremler verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.18. $a, b \geq 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $p, q > 1$ olsun. O zaman

$$ab + \min \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right\} \left(a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{q}{2}} \right) \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

dır (Kittaneh, 2010).

Yardımcı Teorem 3.19. $a, b, x \in \mathcal{H}$ ve $\|x\| = 1$ olsun. O halde

$$|\langle a, x \rangle \langle x, b \rangle| \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 (\|a\| \|b\| + |\langle a, b \rangle|)$$

dır (Buzano, 1974).

Yardımcı Teorem 3.20. $R \in B(\mathcal{H})$ pozitif operatör ve $\|x\| = 1$ olacak şekilde $x \in \mathcal{H}$ olsun. O zaman

$$\langle Rx, x \rangle^r \leq \langle R^r x, x \rangle, r \geq 1$$

$$\langle R^r x, x \rangle \leq \langle Rx, x \rangle^r, r \leq 1$$

dır (Simon, 1979).

Yardımcı Teorem 3.21. $R \in B(\mathcal{H})$ ve f, g fonksiyonları tüm $t \in [0, \infty)$ değerleri için $f(t)g(t) = t$ olacak şekilde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman her $x, y \in \mathcal{H}$ için

$$|\langle Rx, y \rangle|^2 \leq \langle f^2(|R|)x, x \rangle \langle g^2(R^*)y, y \rangle$$

dır (Kittaneh, 1988).

Özel olarak, eğer $f(t) = g(t) = \sqrt{t}$ ise o zaman

$$|\langle Rx, y \rangle|^2 \leq \langle |R|x, x \rangle \langle |R^*|y, y \rangle$$

olur (Kittaneh, 1988).

Yardımcı Teorem 3.22. $x, y, z \in \mathcal{H}$ olsun. O halde

$$\left| \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, z \rangle}{\|z\|^2} \langle z, y \rangle \right|^2 + \frac{|\langle x, z \rangle|^2}{\|z\|^2} \|y\|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

dır (Fujii ve Nakamoto, 1998).

Yardımcı Teorem 3.23. $x, y, z \in \mathcal{H}$ olsun. O halde

$$|\langle z, x \rangle|^2 + |\langle z, y \rangle|^2 \leq (|\langle x, z \rangle| + \max(\|x\|^2, \|y\|^2)) \|z\|^2$$

dır (Dragomir, 2013).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Berezin Sayı Eşitsizlikleri

Bu bölümde üretici çekirdekli Hilbert uzayları üzerinde, pozitif sürekli fonksiyonlar kullanılarak self-adjoint operatörlerin Berezin sembolleri için (3.5) eşitsizliğinin benzeri verilecektir.

Teorem 4.1.1. $\Delta \subset (0, \infty)$ aralığında f, g pozitif sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer $R, Q: \mathcal{H}(\Theta) \rightarrow \mathcal{H}(\Theta)$ operatörleri Δ aralığında spektruma sahip $\mathcal{H}(\Theta)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayları üzerinde self-adjoint operatörler ise o zaman her $\mu, \nu \in \Theta$ için

$$\begin{aligned} & f(R)\overline{g(R)}(\mu) + \frac{1}{2}\overline{f(Q)}(\mu)\overline{g(R)}(\mu) + \frac{1}{2}\overline{f(R)}(\mu)\overline{g(Q)}(\mu) + \frac{1}{3}\overline{f(Q)}(\mu)\overline{g(Q)}(\mu) < \\ & \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left\{(f^2(R)(\mu) + f^2(Q)(\mu))(g^2(R)(\mu) + g^2(Q)(\mu)) + (f(R)\overline{g(R)}(\mu) + \right. \\ & \left. f(Q)\overline{g(Q)}(\mu))^2\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

dır.

İspat. (3.5) eşitsizliğinde her $n \geq 2$ için $a_n, b_n = 0$ olsun. $a_n, b_n \geq 0$ olduğundan (3.5) eşitsizliğinden

$$a_0b_0 + \frac{a_1b_0}{2} + \frac{a_0b_1}{2} + \frac{a_1b_1}{3} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}\{(a_0^2 + a_1^2)(b_0^2 + b_1^2) + (a_0b_0 + a_1b_1)^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

elde edilir.

$z, w \in \Delta$ olsun. Teoremin hipotezinden $f, g \geq 0$ olduğundan (4.2) eşitsizliğinde $a_0 = f(z)$, $a_1 = f(w)$, $b_0 = g(z)$, $b_1 = g(w)$ şeklinde yazılabilir. Buradan her $z, w \in \Delta$ için

$$\begin{aligned} & f(z)g(z) + \frac{1}{2}f(w)g(z) + \frac{1}{2}f(z)g(w) + \frac{1}{3}f(w)g(w) < \\ & \frac{\pi}{\sqrt{2}}\{(f^2(z) + f^2(w))(g^2(z) + g^2(w)) + (f(z)g(z) + \\ & f(w)g(w))^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

dır. (4.3) eşitsizliğine R operatörü için fonksiyonel kalkülüs uygulandığında

$$\begin{aligned}
& f(R)g(R) + \frac{1}{2}f(w)g(R) + \frac{1}{2}f(R)g(w) + \frac{1}{3}f(w)g(w) \\
& < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \{ (f^2(R) + f^2(w))(g^2(R) + g^2(w)) \\
& \quad + (f(R)g(R) + f(w)g(w))^2 \}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ve her $\mu \in Q$ ve $w \in \Delta$ için

$$\begin{aligned}
& f(\overline{R})\overline{g(R)}(\mu) + \frac{1}{2}f(w)\overline{g(R)}(\mu) + \frac{1}{2}\overline{f(R)}(\mu)g(w) + \frac{1}{3}f(w)g(w) \\
& < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \{ (\overline{f^2(R)}(\mu) + f^2(w))(\overline{g^2(R)}(\mu) + g^2(w)) \\
& \quad + (\overline{f(R)}(\mu)\overline{g(R)}(\mu) + f(w)g(w))^2 \}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğe Q için fonksiyonel kalkülüs uygulandığında (çünkü Q self-adjoint operatör) aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
& f(\overline{R})\overline{g(R)}(\mu) + \frac{1}{2}f(Q)\overline{g(R)}(\mu) + \frac{1}{2}\overline{f(R)}(\mu)g(Q) + \frac{1}{3}f(Q)g(Q) \\
& < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \{ (\overline{f^2(R)}(\mu) + f^2(Q))(\overline{g^2(R)}(\mu) + g^2(Q)) \\
& \quad + (f(\overline{R})\overline{g(R)}(\mu) + f(Q)g(Q))^2 \}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlikten her $R, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ self-adjoint operatörleri ve $\mu, v \in \Theta$ için

$$\begin{aligned}
& f(\overline{R})\overline{g(R)}(\mu) + \frac{1}{2}f(\overline{Q})\overline{g(R)}(\mu) + \frac{1}{2}\overline{f(R)}(\mu)\overline{g(Q)}(\mu) + \frac{1}{3}f(\overline{Q})\overline{g(Q)}(\mu) \\
& < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \{ (\overline{f^2(R)}(\mu) + \overline{f^2(Q)}(\mu))(\overline{g^2(R)}(\mu) + \overline{g^2(Q)}(\mu)) \\
& \quad + (f(\overline{R})\overline{g(R)}(\mu) + (f(\overline{Q})\overline{g(Q)}(\mu)))^2 \}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da istenilen sonucu verir.

Sonuç 4.1.2. Δ aralığında spektruma sahip olan $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ self-adjoint operatör için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$(ber(R))^2 < \left[2\pi - \frac{4}{3}\right] ber(f^2(R)).$$

İspat. (4.1) eşitsizliğinde $Q = R$, $g = f$ ve $v = \mu$ alındığında

$$\begin{aligned} \widehat{f^2(R)}(\mu) + \frac{1}{2} [\widehat{f(R)}(\mu)]^2 + \frac{1}{2} [\widehat{f(R)}(\mu)]^2 + \frac{1}{3} \widehat{f^2(R)}(\mu) \\ < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left\{ 4 \left(\widehat{f^2(R)}(\mu) \right)^2 + 4 \left(\widehat{f^2(R)}(\mu) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla her $\mu \in Q$ için

$$[\widehat{f(R)}(\mu)]^2 < \left[2\pi - \frac{4}{3}\right] \widehat{f^2(R)}(\mu)$$

elde edilir. $\widehat{f(R)}(\mu) \geq 0$ ve $\widehat{f^2(R)}(\mu) \geq 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten her $\mu \in Q$ için

$$\sup_{\mu \in \Theta} [\widehat{f(R)}(\mu)]^2 < \left[2\pi - \frac{4}{3}\right] \sup_{\mu \in \Theta} \widehat{f^2(R)}(\mu)$$

olur. Böylece herhangi $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ self-adjoint operatörü için aşağıdaki eşitsizlik ispatlanmış olur:

$$(ber(R))^2 < \left[2\pi - \frac{4}{3}\right] ber(f^2(R)).$$

Şimdi $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayları üzerinde, konveks ve sürekli fonksiyon kullanılarak self-adjoint operatörler için Berezin sayı eşitsizliği verilecektir.

Teorem 4.1.3. $f: \Delta \rightarrow (0, \infty)$ konveks ve sürekli fonksiyon ve $R: \mathcal{H}(\Theta) \rightarrow \mathcal{H}(\Theta)$ operatörü Δ aralığında spektruma sahip olan üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde self-adjoint operatör olsun. O halde

$$[f(ber(R))]^2 < \left(\pi - \frac{1}{6}\right) ber(f^2(R))$$

dır.

İspat. (4.2) eşitsizliğinden her $z, w \in \Delta$ için

$$f(z)g(z) + \frac{1}{2}f(w)g(z) + \frac{1}{2}f(z)g(w) + \frac{1}{3}f(w)g(w) < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left\{ (f^2(z) + f^2(w))(g^2(z) + g^2(w)) + (f(z)g(z) + f(w)g(w))^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

dır. (4.3) eşitsizliğinde $z = \tilde{R}(\mu)$ alındığında her $\mu \in \Theta$ ve $w \in \Delta$ için

$$f(\tilde{R}(\mu))g(\tilde{R}(\mu)) + \frac{1}{2}f(w)g(\tilde{R}(\mu)) + \frac{1}{2}f(\tilde{R}(\mu))g(w) + \frac{1}{3}f(w)g(w) < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left\{ (f^2(\tilde{R}(\mu)) + f^2(w))(g^2(\tilde{R}(\mu)) + g^2(w)) + (f(\tilde{R}(\mu))g(\tilde{R}(\mu)) + f(w)g(w))^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğe Q operatörü için fonksiyonel kalkülüs uygulandığında (çünkü Q self-adjoint operatör)

$$f(\tilde{R}(\mu))g(\tilde{R}(\mu)) + \frac{1}{2}f(Q)g(\tilde{R}(\mu)) + \frac{1}{2}f(\tilde{R}(\mu))g(Q) + \frac{1}{3}f(Q)g(Q) < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left\{ (f^2(\tilde{R}(\mu)) + f^2(Q))(g^2(\tilde{R}(\mu)) + g^2(Q)) + (f(\tilde{R}(\mu))g(\tilde{R}(\mu)) + f(Q)g(Q))^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$f(\tilde{R}(\mu))g(\tilde{R}(\mu)) + \frac{1}{2}\overline{f(Q)}(v)g(\tilde{R}(\mu)) + \frac{1}{2}f(\tilde{R}(\mu))\overline{g(Q)}(v) + \frac{1}{3}\overline{f(Q)}(v)\overline{g(Q)}(v) < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left\{ (f^2(\tilde{R}(\mu)) + \overline{f^2(Q)}(v))(g^2(\tilde{R}(\mu)) + \overline{g^2(Q)}(v)) + (f(\tilde{R}(\mu))g(\tilde{R}(\mu)) + \overline{f(Q)g(Q)}(v))^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

elde edilir. f ve g fonksiyonlarının konveksliği göz önünde bulundurularak aşağıdaki eşitsizliklere sahip olunur:

$$f(\tilde{Q}(v)) \leq \overline{f(Q)}(v) \text{ ve } g(\tilde{Q}(v)) \leq \overline{g(Q)}(v) \quad (4.6)$$

ve

$$f^2(\tilde{R}(\mu)) \leq \widetilde{f^2(R)}(\mu) \text{ ve } g^2(\tilde{R}(\mu)) \leq \widetilde{g^2(R)}(\mu) \quad (4.7)$$

(4.5) eşitsizliğinde (4.6) ve (4.7) eşitsizlikleri yazılarak her $\mu, v \in \Theta$ için

$$\begin{aligned} & f(\tilde{R}(\mu))g(\tilde{R}(\mu)) + \frac{1}{2}f(\tilde{Q}(v))g(\tilde{R}(\mu)) + \frac{1}{2}f(\tilde{R}(\mu))g(\tilde{Q}(v)) + \\ & \frac{1}{3}f(\widetilde{Qg(Q)})(v) < \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left\{\left(\widetilde{f^2(R)}(\mu) + \widetilde{f^2(Q)}(v)\right)\left(\widetilde{g^2(R)}(\mu) + \widetilde{g^2(Q)}(v)\right) + \right. \\ & \left. \left(f(\widetilde{Rg(R)})(\mu) + f(\widetilde{Qg(Q)})(v)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

sonucuna ulaşılır.

Özellikle (4.8) eşitsizliğinde $Q=R$, $g=f$ ve $v = \mu$ alındığında $\mu \in \Theta$ için

$$\begin{aligned} & \left[f(\tilde{R}(\mu))\right]^2 + \frac{1}{2}\left[f(\tilde{R}(\mu))\right]^2 + \frac{1}{2}\left[f(\tilde{R}(\mu))\right]^2 + \frac{1}{3}\widetilde{f^2(R)}(\mu) \\ & < \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left\{4\left(\widetilde{f^2(R)}(\mu)\right)^2 + 4\left(\widetilde{f^2(R)}(\mu)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ve

$$\left[f(\tilde{R}(\mu))\right]^2 < \left(\pi - \frac{1}{6}\right)\widetilde{f^2(R)}(\mu)$$

elde edilir. $\left[f(\tilde{R}(\mu))\right]^2 \geq 0$ ve $\widetilde{f^2(R)}(\mu) \geq 0$ olduğu için son eşitsizlikte supremum alındığında her R self-adjoint operatörü ve $\mu \in \Theta$ için

$$\left[f(ber(R))\right]^2 < \left(\pi - \frac{1}{6}\right)ber(f^2(R))$$

elde edilir.

Aşağıda $ber(R) \leq \|R\|_{ber}$ eşitsizliğinin bazı genellemeleri verilecektir.

Teorem 4.1.4. $R \in B(\mathcal{H}(\theta))$ tersinir bir operatör olsun. O zaman

$$ber^2(R) \leq \|R\|_{ber}^2 - \inf_{v \in \theta} \eta^2(\hat{k}_v)$$

dır. Burada $\eta^2(\hat{k}_v) = \left(\frac{|\widetilde{R^2}(v) - (\tilde{R}(v))^2|}{\|R^*\hat{k}_v\|} \right)^2$ dır.

İspat. $\hat{k}_v$ fonksiyonu $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. Yardımcı Teorem 3.22 de $x = R\hat{k}_v, y = R^*\hat{k}_v$ alındığında

$$\left(\frac{|\widetilde{R^2}(v) - (\tilde{R}(v))^2|}{\|R^*\hat{k}_v\|} \right)^2 + |\tilde{R}(v)|^2 \leq \|R\hat{k}_v\|^2$$

elde edilir. Bu yüzden

$$|\tilde{R}(v)|^2 \leq \|R\hat{k}_v\|^2 - \inf_{v \in \theta} \left(\frac{|\widetilde{R^2}(v) - (\tilde{R}(v))^2|}{\|R^*\hat{k}_v\|} \right)^2$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlikte tüm $v \in \theta$ üzerinde supremum alındığında istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.5. $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\theta))$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $p, q > 1$ olsun. Eğer f ve g fonksiyonları $f(t)g(t) = t, t \geq 0$ olacak şekilde $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ise o zaman

$$ber^{2r}(R) \leq \left\| \frac{1}{p} f^{2pr}(|R|) + \frac{1}{q} g^{2qr}(|R^*|) \right\|_{ber} - r_0 \inf_{v \in \theta} \delta(\hat{k}_v)$$

dır. Burada $\delta(\hat{k}_v) = \left(\langle f^{2p}(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} \langle g^{2q}(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} \right)^2$ ve $r_0 = \max \left\{ \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right\}$ dır.

İspat. $\hat{k}_v$ fonksiyonu $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. O zaman

$$\begin{aligned} |\tilde{R}(v)|^{2r} &\leq \langle f^2(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^r \langle g^2(R^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^r \\ &= \langle f^{\frac{2}{p}}(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^r \langle g^{\frac{2}{q}}(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^r \\ &\leq \left(\langle f^{2p}(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{1}{p}} \langle g^{2q}(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{1}{q}} \right)^r \\ &\leq \left(\frac{1}{p} \langle f^{2pr}(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^r + \frac{1}{q} \langle g^{2qr}(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^r \right) \\ &\quad - r_0 \left(\langle f^{2p}(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} - \langle g^{2q}(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{p} \langle f^{2pr}(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^r + \frac{1}{q} \langle g^{2qr}(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^r \right) \\ &\quad - r_0 \left(\langle f^{2p}(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} - \langle g^{2q}(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $v \in \theta$ üzerinde supremum alındığında

$$\begin{aligned} ber^{2r}(R) &\leq ber\left(\frac{1}{p}f^{2pr}\left(|R| + \frac{1}{q}g^{2qr}(|R^*|)\right)\right) - r_0 \inf_{v \in \theta} \delta(\hat{k}_v) \\ &\leq \left\| \frac{1}{p}f^{2pr}(|R|) + \frac{1}{q}g^{2qr}(|R^*|) \right\|_{ber} - r_0 \inf_{v \in \theta} \delta(\hat{k}_v) \end{aligned}$$

dır. Burada $\delta(\hat{k}_v) = \left(\langle f^{2p}(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} - \langle g^{2q}(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} \right)^2$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5 için $p = q = 2$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.6. $R \in (\mathcal{H})\mathcal{B}$ olsun. f, g fonksiyonları $f(t) = g(t) = t$ ($t \geq 0$) olacak şekilde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ise o zaman

$$ber^2(R) \leq \frac{1}{2} \|f^{4r}(|R|) + g^{4r}(|R^*|)\|_{ber} - \frac{1}{2} \inf_{v \in \theta} \delta(\hat{k}_v)$$

dır. Burada $\delta(\hat{k}_v) = \left(\langle f^4(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} - \langle g^4(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} \right)^2$ dir.

Sonuç 4.1.6 da $f(t) = g(t) = \sqrt{t}$ olarak düşünüldüğünde aşağıdaki eşitlik verilebilir.

Sonuç 4.1.7. $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\theta))$ ve $r \geq 1$ ise

$$ber^{2r}(R) \leq \frac{1}{2} \|(RR^*)^r + (R^*R)^r\|_{ber} - \frac{1}{2} \inf_{v \in \theta} \delta(\hat{k}_v)$$

dır. Burada $\delta(\hat{k}_v) = \left(\langle |R|^2 \hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} - \langle |R^*|^2 \hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^{\frac{r}{2}} \right)^2$ dir.

Şimdi aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 4.1.8. $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\theta))$ ve $[0, \infty)$ aralığında f fonksiyonu negatif olmayan artan konveks bir fonksiyon olsun. O zaman

$$f(ber^2(R)) \leq \frac{1}{4} (f(\|R^*R + RR^*\|_{ber}) + f(\|R^*R - RR^*\|_{ber})) + \frac{1}{2} f(ber(R^2))$$

dır.

İspat. $\hat{k}_v$ fonksiyonu $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. Yardımcı Teorem 3.23' de $x = R\hat{k}_v, y = R^*\hat{k}_v$ ve $z = \hat{k}_v$ alındığında ve $\max\{a, b\} = (|a + b| + |a - b|) / 2$ ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} & |\langle \hat{k}_v, R\hat{k}_v \rangle| |\langle \hat{k}_v, R^*\hat{k}_v \rangle| \\ & \leq \frac{1}{2} (|\langle \hat{k}_v, R\hat{k}_v \rangle|^2 + |\langle \hat{k}_v, R^*\hat{k}_v \rangle|^2) \end{aligned}$$

(aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği ile)

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{2} (\max \{ \|R\hat{k}_v\|^2, \|R^*\hat{k}_v\|^2 \} + |\langle R\hat{k}_v, R^*\hat{k}_v \rangle|) \\ & = \frac{1}{4} (|\langle (R^*R + RR^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle| + |\langle (R^*R - RR^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|) + \frac{1}{2} |\langle R^2\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle| \end{aligned}$$

dır ve böylece

$$\begin{aligned} & f(|\langle \hat{k}_v, R\hat{k}_v \rangle| |\langle \hat{k}_v, R^*\hat{k}_v \rangle|) \\ & \leq f \left(\frac{1}{4} (|\langle (R^*R + RR^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle| + |\langle (R^*R - RR^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|) + \frac{1}{2} |\langle R^2\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle| \right) \\ & = f \left(\frac{\frac{1}{2} (|\langle (R^*R + RR^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle| + |\langle (R^*R - RR^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|) + |\langle R^2\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|}{2} \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(f \left(\frac{|\langle (R^*R + RR^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle| + |\langle (R^*R - RR^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|}{2} \right) + f(|\langle R^2\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|) \right) \\ & \leq \frac{1}{4} (f(|\langle R^*R + RR^*\rangle\hat{k}_v, \hat{k}_v|) + f(|\langle R^*R - RR^*\rangle\hat{k}_v, \hat{k}_v|)) + \frac{1}{2} f(|\langle R^2\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\begin{aligned} & f(|\langle \hat{k}_v, R\hat{k}_v \rangle| |\langle \hat{k}_v, R^*\hat{k}_v \rangle|) \\ & \leq \frac{1}{4} (f(|\langle (RR^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|) + f(|\langle (R^*R - RR^*)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|)) \\ & \quad + \frac{1}{2} f(|\langle R^2\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|) \end{aligned}$$

dır.

Yukarıdaki eşitsizlikte $v \in \theta$ üzerinde supremum alındığında istenilen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.8' de $f(t) = t^r, r \geq 1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.9. $r \geq 1$ için

$$ber^{2r}(R) \leq \frac{1}{4}(\|R^*R + RR^*\|_{ber}^r + \|R^*R - RR^*\|_{ber}^r) + \frac{1}{2}ber^r(R^2)$$

dır.

Aşağıdaki teorem, yukarıdaki sonucun daha geliştirilmiş halidir.

Teorem 4.1.10. $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\theta))$ ve f, g fonksiyonları $f(t)g(t) = t$ olacak şekilde $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyon olsun. O zaman herhangi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} ber^{2r}(R) &\leq \frac{1}{4}ber(f^{4r}(|R|) + g^{4r}(|R^*|)) \\ &\quad + \frac{1}{4}ber(f^{2r}(|R|)g^{2r}(|R^*|) + g^{2r}(|R^*|)f^{2r}(|R|)) \end{aligned}$$

dır.

İspat. $\hat{k}_v$ fonksiyonu $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. O zaman

$$\begin{aligned} |\langle R\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|^{2r} &\leq \langle f^2(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^r \langle g^2(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^r \\ &\leq \langle f^{2r}(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle \langle g^{2r}(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle \\ &\leq \left(\frac{\langle f^{2r}(|R|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle + \langle g^{2r}(|R^*|)\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

(aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \langle (f^{2r}(|R|) + g^{2r}(|R^*|))\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \langle (f^{2r}(|R|) + g^{2r}(|R^*|))^2 \hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle (f^{4r}(|R|) + g^{4r}(|R^*|) + f^{2r}(|R|)g^{2r}(|R^*|) + g^{2r}(|R^*|)f^{2r}(|R|))\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle \\ &\leq \frac{1}{4}ber(f^{4r}(|R|) + g^{4r}(|R^*|) + f^{2r}(|R|)g^{2r}(|R^*|) + g^{2r}(|R^*|)f^{2r}(|R|)) \\ &\leq \frac{1}{4}ber(f^{4r}(|R|) + g^{4r}(|R^*|)) + \frac{1}{4}ber(f^{2r}(|R|)g^{2r}(|R^*|) + g^{2r}(|R^*|)f^{2r}(|R|)) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
|\langle R\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|^{2r} &\leq \frac{1}{4} \text{ber}(f^{4r}(|R|) + g^{4r}(|R^*|)) \\
&\quad + \frac{1}{4} \text{ber}(f^{2r}(|R|)g^{2r}(|R^*|) + g^{2r}(|R^*|)f^{2r}(|R|))
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}
|\langle R\hat{k}_v, \hat{k}_v \rangle|^{2r} &\leq \frac{1}{4} \text{ber}(f^{4r}(|R|) + g^{4r}(|R^*|)) \\
&\quad + \frac{1}{4} \text{ber}(f^{2r}(|R|)g^{2r}(|R^*|) + g^{2r}(|R^*|)f^{2r}(|R|))
\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlikte $v \in \theta$ üzerinde supremum alındığında istenilen eşitsizlik elde edilir. Teorem 4.1.10' da $f(t) = t^{1-p}$ ve $g(t) = t^p$ ($0 \leq p \leq 1$) alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.11. $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\theta))$ olsun. O halde herhangi $p \in [0,1]$ ve $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\text{ber}^{2r}(R) &\leq \frac{1}{4} \text{ber}(|R|^{4(1-p)r} + |R^*|^{4pr}) \\
&\quad + \frac{1}{4} \text{ber}(|R|^{2(1-p)r} |R^*|^{2pr} + |R^*|^{2pr} |R|^{2(1-p)r})
\end{aligned}$$

dır.

Özel olarak $p = \frac{1}{2}$ için

$$\text{ber}^2(R) \leq \frac{1}{4} \text{ber}(|R|^{2r} + |R^*|^{2r}) + \frac{1}{4} \text{ber}(|R|^r |R^*|^r + |R^*|^r |R|^r)$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde, ayrık tipli Hardy-Hilbert tipli eşitsizliklerden faydalanarak operatörlerin Berezin sembolü ve Berezin sayısı için pozitif sürekli ve konveks fonksiyonlar kullanılarak bazı eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca, Dragomir, Fujii ve Nakamoto gibi yazarların elde ettiği bazı teoremler kullanılarak operatörlerin Berezin sayısı için yeni bazı üst sınırlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasını gözönünde bulundurarak ileride yapılacak çalışmalar için aşağıdaki öneri verilebilir:

-Farklı ayrık tipli eşitsizlikler kullanılarak daha önce elde edilen Berezin sembolü ve Berezin sayısı eşitsizlikleri geliştirilebilir mi?

KAYNAKLAR

- Aronzajn, N., 1950. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68, 337-404.
- Bakherad, M., 2018. Some Berezin number inequalities for operator matrices. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 68, 997-1009.
- Bakherad, M., Lashkaripour, R., Hajmohamadi, M., Yamancı, U., 2019. Complete refinements of the Berezin number inequalities. *Journal of Mathematical Inequalities*, 13, 1117-1128.
- Bakherad, M., Garayev, M.T., 2019. Berezin number inequalities for operators. *Concrete Operators*, 6, 33-43.
- Bakherad, M., Hajmohamadi, M., Lashkaripour, R., Sahoo, S., 2021. Some extensions of Berezin number inequalities on operators. *Rocky Mountain Journal Mathematical*, 51, 1941-1951.
- Berezin, F.A., 1972. Covariant and contravariant symbols for operators. *Mathematics USSR-Izvestiya*, 6, 1117-1156.
- Berezin, F.A., 1974. Quantization. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 8, 1109-1163.
- Bhunia, P., Paul, K., Sen, A., 2023. Inequalities involving Berezin norm and Berezin number. *Complex Analysis and Operator Theory*, 17, 1-15.
- Buzano, M.L., 1974. Generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. *Rend Sem Mathematics Univ e Politech Torino*, 31, 405-409.
- Das, A., Sahoo, M., 2013. Positive Toeplitz operators on the Bergman space. *Annals of Functional Analysis*, 4, 171-182.
- Dragomir, S.S., 2007. A survey of some recent inequalities for the norm and numerical radius of operators in Hilbert spaces. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 1, 154-175.
- Dragomir, S.S., 2013. Inequalities for the numerical radius of linear operators in Hilbert spaces, *Springer Briefs in Mathematics*.
- Edmunds, D.E., Kokilashvili, V., Meskhi, A., 2002. Bounded and compact integral operators. *Kluwer Academic Publishers*. Dordrecht, pp. 643.
- El-Haddad, M., Kittaneh, F., 2007. Numerical radius inequalities for Hilbert space operators II., *Studia Mathematica*, 182, 133-140.
- Englis, M., 2006. Berezin and Berezin-Toeplitz quantizations for general function spaces. *Review Mathematics Computing*, 19, 385-4030.

- Furuta, T., Mick Hot, J., Pecaric, J., Seo, Y., 2005. Mond-Pecaric method in operator inequalities. (inequalities for bounded selfadjoint operators on Hilbert space), Elemet, Zagreb.
- Fujii, M., Nakamoto, R., 1998. Simultaneous extensions of Selberg inequality and Heinz-Kato-Furuta inequality. *Nihonkai Mathematical Journal*, 9(2), 219-225.
- Fricain, E., 2000. Uniqueness theorems for analytic vector valued functions. *Journal of Mathematical Society*, 101, 3193-3210.
- Garayev, M.T., Gürdal, M., Saltan, S., 2017. Hardy type inequality for reproducing kernel Hilbert space operators and related problems. *Positivity*, 21, 1615-1623.
- Garayev, M.T., Saltan, S., Doğdu, D., 2018. On the inverse power inequality for the Berezin number of operators. *Journal of Mathematical Inequalities*, 2, 997-1003.
- Garayev, M.T., Alomari, M.W., 2021. Inequalities for the Berezin number of operators and related questions. *Complex Analysis and Operator Theory*, 15, 1-30.
- Guesba, M., 2023. Some Euclidean Berezin number inequalities of a pair of operators and their applications, *Filomat*, 37, 8777-8790.
- Gustafson, K.E., Rao, D.K.M., 1997. *Numerical Range*. Springer-Verlag New York.
- Hajmohamadi, M., Laskaripour, R., Bakherad, M., 2020. Improvements of Berezin number inequalities. *Linear Multilinear Algebra*, 68, 1218-1229.
- Halmos, P., 1982. *A Hilbert Space Problem Book*. Springer-Verlag, Berlin.
- Hansen, F., 2009. Non-commutative Hardy inequalities. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 41(6), 1009-1016.
- Hansen, F., Krulic, K., Pecaric, J., Persson, L.E., 2010. Generalized non commutative Hardy and Hardy-Hilbert type inequalities. *International Journal of Mathematics*, 21(10), 1283-1295.
- Hardy, G., Littlewood, J.E., Polya, G., 1967. *Inequalities*, 2nd edition Cambridge University Press, Cambridge.
- Hedenmalm, H., Korenblum, B., Zhu, K., 2000. *Theory of Bergman spaces*. Springer, Berlin.
- Karaev, M.T., 2004. Functional analysis proofs of Abel's theorems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132, 2327-2329.
- Karaev, M.T., Saltan, S., 2005. Some results on Berezin symbols. *Complex Variables: Theory and Applications*, 50, 185-193.

- Karaev, M.T., 2006. Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces. *Journal of Functional Analysis*, 238, 181-192.
- Karaev, M.T., 2012. Use of reproducing kernels and Berezin symbols technique in some questions of operator theory. *Forum Mathematicum*, 24(3), 553-564.
- Karaev, M.T., 2013. Reproducing kernels and Berezin symbols techniques in various questions of operator theory. *Complex Analysis and Operator Theory*, 7, 983-1018.
- Karaev, M.T., Gürdal, M., Yamancı, U., 2013. Special operator classes and their properties. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 7(2), 75-86.
- Karaev, M.T., Gürdal, M., Yamancı, U., 2014. Some results related with Berezin symbols and Toeplitz operators. *Mathematical Inequalities and Applications*, 17(3), 1031-1045.
- Kian, M., 2012. Hardy-Hilbert type inequalities for Hilbert space operators. *Annals of Functional Analysis*, 3(2), 128-134.
- Kittaneh, F., 1988. Notes on some inequalities for Hilbert space operators. *Publ RIMS Kyoto*, 24, 298-293.
- Kittaneh, F., 2005. Numerical radius inequalities for Hilbert space operators. *Studia Mathematica*, 168, 73-80.
- Kittaneh, F., 2010. Numerical radius inequalities for Hilbert space operators. *Studia Mathematica*, 361(1), 262-269.
- Kufner, A., Maligranda, L., Persson, L.E., 2006. The prehistory of the Hardy inequality. *American Mathematical Monthly*, 113, 715-732.
- Kreyszing, E., 1978. *Introductory functional analysis with applications*. New York, London-Sydney.
- Majee, S., Maji, A., Manna, A., 2023. Numerical radius and Berezin number inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 517, 1-20.
- Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary values of Berezin symbols. *Operator Theory: Advances and Applications*, 73, 362-368.
- Opic, B., Kufner, A., 1990. *Hardy-Type Inequalities*. Pitman Research Notes in Mathematics, no. 219, Harlow.
- Rynne, B. P., Youngson, M. A., 2000. *Linear Functional Analysis*. Springer-Verlag, London.
- Sahoo, S., Das, N., Mishra, D., 2020. Berezin number and numerical radius inequalities for operators on Hilbert spaces. *Advances in Operator Theory*, 5, 714-727.

- Sahoo, S., Das, N., Rout, N.C., 2021. On Berezin number inequalities for operator Matrices. *Acta mathematica sinica english series*, 37, 873-892.
- Sahoo, S., Bakherad, M., 2021. Some extended Berezin number inequalities. *Filomat*, 35, 2043-2053.
- Saitoh, S., Sawano, Y., 2016. *Theory of reproducing kernels and applications*. Springer.
- Schur, I., 1911. Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen. *Journal of Mathematics*, 140, 1-28.
- Schwartz, L., 1964. Sous espaces Hilbertiens des espaces vectoriels topologiques et Noyaux Associes (Noyaux Reproductibles). *Journal d'Analyse Mathématique*, 13, 115-256.
- Simon, B., 1979. *Trace ideals and their applications*, Cambridge University Press.
- Weyl, H., 1908. Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems. *Inaugural-Dissertation*, Göttingen.
- Wilhelm, M., 1950. On the spectrum of Hilbert's matrix. *American Journal of Mathematics*, 72, 699-704.
- Yamancı, U., 2018. On the summability methods of logarithmic type and the Berezin symbol. *Turkish Journal of Mathematics*, 42, 2417-2422.
- Yamancı, U., Gürdal, M., Garayev, M.T., 2017. Berezin number inequality for convex function in reproducing kernel Hilbert space. *Filomat*, 31, 5711-5717.
- Yamancı, U., Gürdal, M., 2017. On numerical radius and Berezin number inequalities for reproducing kernel Hilbert space. *New York Journal of Mathematics*, 23, 1531-1537.
- Yamancı, U., Garayev, M.T., Çelik, C., 2019. Hardy-Hilbert type inequality in reproducing kernel Hilbert space: its applications and related results, *Linear and Multilinear Algebra*, 67, 830-842.
- Yamancı, U., Garayev, M.T., 2019. Some results related with the Berezin number inequalities. *Turkish Journal of Mathematics*, 43, 1940, 1952.
- Yamancı, U., Tunç, R., Gürdal, M., 2020. Berezin number, Grüss-type inequalities and their applications. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43, 2287-2296.
- Yamancı, U., 2022. Operator inequalities in reproducing kernel Hilbert spaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara series A1 Mathematics and Statistics*, 71, 204-211.
- Zhang, K.W., 2002. A bilinear inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 271, 288-296.

Zhao, X., Zheng, D., 2016. Invertibility of Toeplitz operators via Berezin transforms. *J Oper Theory*, 75, 475-495.

Zhu, K., 2007. *Operator theory in function spaces*, 2nd edition. Mathematical Surveys and Monographs: American Mathematical Society.

