

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Dilek ÜSTÜNDAĞ

Dang Humması Modelinin Caputo-Fabrizio Operatörü İle Analizi

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

AĞRI – 2023

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
DANG HUMMASI MODELİNİN CAPUTO-FABRIZIO OPERATÖRÜ İLE
ANALİZİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jüri: Prof .Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. İlknur KOCA

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Bu tez çalışmasında sivrisineklerden insana bulaşan ve ağır grip semptomları gösterecek ölümcül sonuçlara sebep olabilen "Dang Humması" hastalığı için hazırlanmış matematiksel bir model Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımı ile genişletilecektir. Elde edilen bu yeni modelin analizi yapılacak, bu denklem sisteminin sabit nokta teoremi kullanılarak çözümünün varlığı ve Picard-Lindelöf teoremi kullanılarak ise çözümünün tekliği incelenecektir. Son olarak matematiksel modeldeki her bir fonksiyonun farklı mertebeden kesirli türev değerleri için grafikler gösterilerek yorumlanacaktır.

2023, 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü, Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü, Picard-Lindelöf teoremi, Dang Humması

ABSTRACT
MASTER'S THESIS
ANALYSIS OF DENGUE FEVER MODEL WITH CAPUTO-FABRIZIO
FRACTIONAL DERIVATIVE

Advisor Of Thesis: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jury: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Assoc. Prof. Dr. İlknur KOCA

Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

In this thesis, a mathematical model prepared for Dengue fever disease, which is transmitted from mosquitoes to humans and can cause severe flu symptoms and cause fatal results, will be expanded with the Caputo-Fabrizio fractional derivative definition. This new model will be analyzed. The existence of the solution of this system of equations using the fixed point theorem and the uniqueness of the solution using the Picard-Lindelöf theorem will be examined. Finally, graphs for fractional derivative values of different order of each function in the mathematical model will be shown and interpreted.

2023, 44 pages

Key Words: Caputo-Fabrizio fractional derivative, Caputo-Fabrizio fractional integral, Picard-Lindelöf approach, Dengue Fever.

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu çalışmanın ortaya çıkmasında en büyük payı olan değerli danışmanım Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU'ya yol göstericiliği, hoşgörüsü ve bu süreçte bana kattığı tüm bilgiler için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteğini eksik etmeyen sevgili eşim M. Akif ÜSTÜNDAĞ'a, çalışmalarım ile birlikte büyüyen biricik oğlum M. Emre'ye ve hayatımın her döneminde yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Haziran 2023

Dilek ÜSTÜNDAĞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Gamma Fonksiyonu	4
2.2. Beta Fonksiyonu	5
2.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu	5
2.4. Laplace Dönüşümü	6
2.5. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Türevi ve İntegrali	7
2.5.1. Gröndwald-Letnikov Kesirli Türevi	7
2.5.2. Riemann- Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali	8
2.5.3. Caputo Kesirli Türevi	10
2.5.4. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi ve İntegrali	12
3. MATERYAL VE YÖNTEM	17
3.1. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi	17
3.2. Caputo-Fabrizio Kesirli İntegrali	18
3.3. Kesirli Diferansiyel Denklemler	19
3.4. Varlık -Teklik	21
3.4.1. Çözümün Varlığı	22
3.4.2. Çözümün Tekliği	22
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	28
4.1. Dang Humması Modeli	28
4.1.1. Dang Humması Modeli İçin Çözümün Varlığı	30
4.1.2. Dang Humması Modeli İçin Çözümün Tekliği	36
4.1.3. Dang Humması Modelinin Nümerik Çözümü	37
5. SONUÇ	42



ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 S fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği	39
4.2 X fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği	39
4.3 I fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği	40
4.4 X_V fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği	40
4.5 I_V fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği	41



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\leq$	Küçük veya eşittir
Σ	Toplam
$\int$	İntegral
Γ	Gamma fonksiyonu
β	Beta fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}$	Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathcal{L}$	Laplace fonksiyonu
I_x^α	α . mertebeden Rieemann-Liouville kesirli integrali
D_x^α	α . mertebeden Rieemann-Liouville kesirli türevi
${}^C I_x^\alpha$	α . mertebeden Caputo kesirli integrali
${}^C D_x^\alpha$	α . mertebeden Caputo kesirli türevi
${}^{CF} I_x^\alpha$	α . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli integrali
${}^{CF} D_x^\alpha$	α . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi
$M(\alpha)$	Normalleştirme sabiti

1. GİRİŞ

Analiz, matematiğin en temel alanı olup ana kollarından olan türev ve integral kavramları oldukça geniş kapsamlıdır. Klasik anlamda türev, reel değişkenli bir fonksiyonun aldığı değerlerde meydana gelen değişim olarak ifade edilebilir. Kesirli analiz ise tamsayı mertebeden olmayan türev ve integralin özelliklerini araştırır. Kesirli türev ve integral ile klasik anlamdaki türev ve integral kavramları daha genel ve kapsamlı hale gelmiştir.

Kesirli analizin geçmişi neredeyse klasik analiz kadar eskidir. Leibnitz, Newton ve Gauss bu tür hesaplamalar yapmıştır. Bilinen en eski kesirli türev kavramının görüldüğü yer L'Hospital'in Leibnitz'e 1695 yılında yazdığı mektuptur. L'Hospital mektubunda " $\frac{d^n f}{dx^n}$ " ifadesinde $n = 1/2$ olursa ne olur?" diye sorar. Leibnitz ise "Bir gün faydalı sonuçların çıkarılacağı bariz bir paradoks." şeklinde cevap verir. 1697'de Leibnitz $d^{(1/2)}y$ notasyonunu kullanırken Lacroix 1819'da ilk defa kendi diferansiyel ve integral metinlerinde herhangi mertebeden türevden bahsetmiştir. Euler ve Fourier herhangi mertebeden türevden bahsetmiş ancak bir örnek ya da uygulama vermemişlerdir. Niels Henrik Abel 1823 yılında analiz ile ilgili ilk uygulamayı vermiştir. 1832'de J. Liouville ilk olarak kesirli türevin en temel mantıksal tanımını vermiştir. Yıllar içinde pek çok matematikçi kendi notasyon ve yaklaşımlarıyla tamsayı olmayan mertebeden türev ve integral için çeşitli tanımlamalar yapmışlardır. Yapılan çalışmalarda belirli şartlar altında bazı tanımların eş değer olduğu gösterilmiştir. Birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımların fiziksel yorumları farklılık göstermektedir.

Kesirli analizde birden fazla türev ve integral tanımının olması problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar. Matematikçiler, günlük yaşam problemlerini insanlığa en faydalı olacak şekilde çözüme ulaştırmaya çalışırken kesirli analizden de oldukça yararlanmaktadır. Covid-19 salgınıyla bir kez daha gündeme gelen bulaşıcı hastalık modelleri ve bu modellerin çözümü ile elde edilebilecek sonuçların önemi fark edilmiştir. Bu çalışmada Caputo-Fabrizio kesirli türev ve integral modelin çözümünde kullanılacaktır. Farklı modeller ve problemler için farklı kesirli türev ve integral tanımları kullanılabilir (Koca ve dig. (2020), Koca (2018b), Koca (2018a), Koca ve Atangana (2017), Dokuyucu Ali ve dig. (2018), Dokuyucu (2020), Dokuyucu ve Dutta (2020), Dokuyucu ve Celik (2021), Dokuyucu ve Dutta (2021)).

Dünya üzerindeki her canlıyı etkileyip tüm dünyayı ilgilendiren büyük bir problem haline gelebilmesi sebebiyle bulaşıcı hastalıklar, insanlar için her zaman tehdit olmuştur. Bulaşıcı hastalıklar birçok farklı mikrop ya da patojen kaynaklı oluşabilir. En yaygın patojenler farklı türlerdeki virüsler ve bakterilerdir. Bulaşıcı hastalık olarak nitelendirilen patojenlerin kolaylıkla hasta olan kişiden hasta olmayan kişiye bulaşması sonucu hastalıklar yayılım gösterir. Bu durum için en yaygın olan ve en çok bilinen influenza ya da grip örnek olarak verilebilir. HIV, sıtma, çiçek hastalığı, kızamıkçık gibi pek çok bulaşıcı hastalık milyonlarca enfeksiyona hatta ölüme sebep olmaktadır. Bu hastalıkların pek çoğu halâ bölgesel ya da global ölçüde toplum sağlığını tehdit etmektedir.

Bulaşıcı hastalıklar farklı şekillerde yayılabilir ve patojenler farklı bulaşma yollarıyla enfeksiyonlara sebep olabilir. Bazı enfeksiyonlar direkt temasla bulaşırken bazıları için taşıyıcı bir canlı gerekebilir. Örneğin grip, SARS hava yoluyla; sıtma, dang humması, Batı Nil virüsü vb. hastalıklar sivrisinekler aracılığıyla bulaşır.

Bulaşıcı hastalıkları kontrol altına almanın etkili yollarından biri, olabildiğince insanlarla olan teması azaltmak olsa da günümüzde bunu mümkün kılmanın uzun vadede ne kadar zor olduğu kısa zaman önce tüm dünya tarafından tecrübe edildi. Aşılama ve ilaçlar ise bulaşmayı azaltmak ve hastalığı kontrol altına almak için kullanılan en önemli araçlardır. Hastalıkların ilerlemesinin enfekte kişilerin viral yükleri ile ilişkili olması, enfekte bireylerin farklı aşamalarındaki bulaşma oranlarının farklı olması, enfeksiyonların saptanması, tedaviye uygunluk, tedavi süresi ve birçok belirsiz etken, tedaviyi ya da bulaşın önlenmesini büyük ölçüde etkileyebilir. Bu sebeple gelecekte alınması gereken önlemlere rehberlik etmesinde ve olası senaryoların keşfedilmesinde matematiksel modeller oldukça önemli rol oynamaktadır.

Yüzyıldan daha uzun süredir bulaşıcı hastalıkların dinamiklerini incelemek için matematiksel modeller kullanılmaktadır. Son yıllarda matematiğin bulaşıcı hastalıklardaki uygulamaları dikkat çekici şekilde artmış olup matematiksel epidemiyoloji gibi ayrı dalların ortaya çıkmasını sağlamıştır. Hızlı teşhis testi, mevcut klinik veriler, bilimsel hipotezlerin ve işe yarar stratejilerin matematiksel modellere uyarlanmasını kolaylaştırmıştır. Ortaya yeni çıkan hastalıklar matematiksel modellemeye olan ilgiyi arttırmıştır.

Modeller, deney yoluyla ya da başka bir şekilde elde edilmesi zor veya pahalı olan günlük yaşam problemleri için belirli parametreler altında tahminler yapar. Modelle ilgili hastalığın yayılma hızını, popülasyonda yayılıp yayılmayacağını ya da yok olup olmayacağını aynı zamanda bir kontrol önleminin etkisini de tahmin edebilir. Hastalıkların ortadan kaldırılması adına gereken daha fazla çaba için halk sağlığına faydalı kılavuz olur. Mo-

delleme hangi müdahalelerin denemeye değer olup hangi müdahalelerden kaçınılabileceğine dair karar vermeye de yardımcı olur.

Bir salgın modeli bulaşma aşamalarını ve enfekte olan popülasyon sayısını tarif eder. Böyle bir model salgının sonunda enfekte olmayan nüfusun sayısını veya oranını belirleyebilir. Salgın modellerinde popülasyon grupları kavramı yaygın olarak kullanılır. Matematiksel kolaylık için bu gruplar S,E,I ve R gibi harflerle sırasıyla duyarlı, maruz kalmış, bulaşıcı ve iyileşmiş popülasyonlar olarak gösterilir.

Enfeksiyona karşı savunmasız olan bireyler duyarlı olarak bilinir ve S (hassas, duyarlı) grubuna, enfekte olmuş ancak semptom göstermeyen veya başkalarına bulaştırmayan popülasyon E (maruz kalan) grubuna, enfekte bir kişi başkalarına bulaştırmaya başladığında o kişi bulaşıcıdır ve I grubuna, bir kişi enfeksiyondan iyileştiğinde R (iyileşmiş) grubuna aittir. İyileşen bir kişi ya kalıcı olarak iyileşir orda kalır ya da tekrar duyarlı hâle gelip S grubuna geri dönebilir.

Patojenlerin doğasına bağlı olarak gruplar açısından SIS, SIR, SIRS gibi modeller geliştirilebilir. Enfekte bir kişi tedaviden sonra yine duyarlı hale gelirse hastalık dinamiği için SEIS veya SIS tipi bir model uygun olur. SIS modeli için bakteriyel enfeksiyonlar örnek verilebilir. Diğer taraftan eğer kalıcı bir iyileşme sağlanır, iyileşen bireyler artık o patojene karşı duyarlı hâle gelmezse SIR şeklindeki model uygun olur ve genelde viral enfeksiyonlarda görülür.

Bu çalışmada viral enfeksiyon olan Dang hummasına ait bir matematiksel model incelenecektir. Son zamanlarda oldukça önemli sağlık problemlerinden biri haline gelen Dang humması, ağır seyreden grip ile benzerlik gösteren bir hastalıktır. Özellikle "Aedes Aegypti" cinsi dişi sivrisineklerin ısırması sonucu insana bulaşan viral bir enfeksiyondur. Dang humması Afrika, Asya ve Güney Amerika'daki tropikal ülkelerde sık görülür. Ancak enfekte bir insanın seyahat etmesi sonucu başka ülkelerde de görülmesi olasıdır. Dang humması bulaşıcı değildir, yani insandan insana bulaşmaz. Hasta olan bireyi sivrisinek ısırıldığında enfekte olur. Enfekte sinek başka bir insanı daha ısırıldığında virüsü yaymış olur. Bu hastalığa yakalanan çoğu insan yaklaşık olarak bir hafta içinde iyileşirken bazı durumlarda enfeksiyon ciddi seyreterek ölümcül olabilmektedir.

Bundan sonraki bölümlerde sırasıyla bazı tanım ve temel kavramlar verilecek, Caputo-Fabrizio kesirli türevi detaylandırılacak, incelenecek olan matematiksel model Caputo-Fabrizio kesirli türevi ile genişletilip yeni bir model elde edilecek, bu yeni modelin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde bize gerekli, kesirli analizle bağlantılı olan birkaç önemli fonksiyondan bahsedilecektir. Bu fonksiyonlardan bazıları Gamma, Beta, Mittag-Leffler fonksiyonlarıdır. Gamma fonksiyonu, faktöriyeli genelleştirmek için kullanılırken Beta fonksiyonu, kuvvet fonksiyonlarının kesirli türevlerini hesaplarken gereklidir. Mittag-Leffler fonksiyonu ise lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde karşımıza çıkar.

2.1. Gamma Fonksiyonu

Faktöriyel temel ve kullanışlı araçlardan biri olduğu için tam sayı mertebeli analizde oldukça önemli yer tutar. Gamma fonksiyonu ise faktöriyelin genişletilmiş bir hali olarak düşünüldüğünde aynı öneme sahip olup temel olarak $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Üstel olması sonsuza yaklaşırken integralinin sıfıra yaklaşması kompleks düzlemin sağ yarısındaki bütün z kompleks değerleri için aşıkardır ($\Re(z) > 0$).

Kompleks düzlemin sol yarısındaki değerler için diğer genelleştirmeler aşağıdaki gibi yapılabilir. Eğer (2.1) denkleminde e^{-t} yerine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

limiti yazılıp n defa integrali alınırsa Gamma fonksiyonunun aşağıdaki limit tanımı elde edilir.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! z^n}{z.(z+1) \dots (z+n)} \quad (2.2)$$

Bu ifade $\Re(z) > 0$ için türevlenebilir olsa da Gamma fonksiyonunun tanımını negatif tam sayılar hariç negatif taraf için de kullanmak mümkün olur. O halde Gamma fonksiyonu her $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ için tanımlı olur. Negatif tam sayı probleminden kurtulmak için Gamma fonksiyonunu

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z.(z+1) \dots (z+n)}{n! z^n} \quad (2.3)$$

şeklinde yazarsak böylece $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ifadesi bütün kompleks sayılar için tanımlı olmuş olur. Faktöriyelin $(n+1)! = (n+1)n!$ özelliği Gamma fonksiyonu için de geçerlidir. Yani

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.4)$$

olup (2.1) eşitliğinin kısmi integrasyonu ile kolayca kanıtlanabilir.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = [e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \quad (2.5)$$

Gamma fonksiyonu ile faktöriyel arasında bağlantı beklemek oldukça doğaldır. (2.4) eşitliğinden ve $\Gamma(1) = 1$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$ yazılabilir.

2.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu, kuvvet fonksiyonlarının kesirli türevlerini hesaplamak için oldukça önemlidir. Beta fonksiyonu $\Re(z) > 0$ ve $\Re(w) > 0$ olmak üzere

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır. $\beta(z, w) = \beta(w, z)$ olup Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında $\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$ olacak şekilde bir ilişki vardır. Beta fonksiyonu sayesinde Gamma fonksiyonunun bazı kullanışlı özellikleri elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \beta(z) &= \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} \\ \beta(z, w) &= \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt, \Re(z), \Re(w) > 0 \\ \beta\left(\frac{1}{2}\right) &= \pi \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!} \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

e^z üstel fonksiyonu, tam sayı mertebeli diferansiyel denklemler teorisinde oldukça önemlidir. Bu fonksiyon seri olarak

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)}$$

yazılabilir. Bu fonksiyonun genelleştirilmiş hali yani Mittag-Leffler şekli kesirli diferansiyel denklemler teorisinde önemli rol oynar. $\alpha > 0$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ için iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. α ve β 'nin bazı özel değerleri için bu fonksiyon hesaplanırsa bilinen klasik fonksiyonlar elde edilir:

$$E_{1,1}(z) = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^{z-1}}{z}$$

$$E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}$$

$$E_{\frac{1}{2},1}(z) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z)$$

Mittag-Leffler fonksiyonun klasik türevlerine kesirli diferansiyel denklemlerinin çözümlerinde karşılaşılr.

2.4. Laplace Dönüşümü

Sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümü önemli ve kullanışlı bir araçtır. Lineer diferansiyel denklemleri lineer cebirsel denklemlere dönüştürerek kolayca çözülebilmelerini sağlar. Bu yaklaşımın en zor tarafı, genellikle son adım olarak sonucun ters dönüşümünü yapmaktır. Lineer sabit katsayılı kesirli diferansiyel denklemlerde de durum tamamen benzerdir. Laplace dönüşümü ile ilgili daha detaylı bilgiye (Kilbas ve dig. (2006)) dan ulaşılabilir.

$f(t)$ tek reel değişkenli kompleks bir fonksiyon olsun. Aşağıda gösterilen Lebesgue integrali

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.9)$$

en az bir s kompleks sayısına yakınsar. $f(t)$ orijinal fonksiyon, $F(s)$ ise $f(t)$ fonksiyonunun Laplace görüntüsü olarak adlandırılır ve $\mathcal{L}\{f(t), t, s\}$ şeklinde gösterilir.

Özellikler:

Özelliklerin hepsi (2.9) denkleminde gözlemlenebilir, ters Laplace fonksiyonu gibi daha fazla içeriğe ve detaylı bilgiye (Kilbas ve dig. (2006)) dan ulaşılabilir. Fonksiyonların gerekli uygun koşulları sağladığı kabul edilmiştir.

1) Lineerliğin genelleştirilmesi (Eğer $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t)$ düzgün yakınsak ise):

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t), t, s\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(s)$$

2) Türevin görüntüsü:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}, t, s\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

3) İntegralin görüntüsü:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau, t, s\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

2.5. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Türevi ve İntegrali

2.5.1. Gröndwald-Letnikov Kesirli Türevi

Klasik anlamda bilinen doğal sayı mertebeden türev tanımı her $K \in \mathbb{N}$ için genelleştirilirse;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\ \frac{d^2}{dx^2} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)] \\ \frac{d^3}{dx^3} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} [f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)] \\ &\vdots \\ \frac{d^K}{dx^K} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h}\right)^K \sum_{L=0}^K (-1)^L \binom{K}{L} f(x-Lh) \end{aligned}$$

elde edilir. Kesirli mertebeden türev alabilmek için amaç bu genelleştirilmiş denklemdeki $K \in \mathbb{N}$ değerini $\alpha \in \mathbb{R}^+$ yapabilmektir. Bu genel tanım üzerinde yeniden düzenleme yapılırsa;

$$\frac{d^K}{dx^K} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h}\right)^K \sum_{L=0}^K (-1)^L \frac{K!}{L!(K-L)!} f(x - Lh)$$

yazılabilir. Burada K doğal sayısı herhangi bir reel sayıya genişletilmek istendiğinde denklemdeki faktöriyel olan ifadeleri Gamma fonksiyonu kullanılarak yeniden yazılırsa

$$\frac{d^K}{dx^K} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h}\right)^K \sum_{L=0}^K (-1)^L \frac{\Gamma(K+1)}{L!\Gamma(K+1-L)} f(x - Lh)$$

elde edilir. Toplam içindeki K hariç diğer bütün K değerleri $\alpha \in \mathbb{R}$ değerine analitik olarak genişletilirse;

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h}\right)^\alpha \sum_{L=0}^K (-1)^L \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-L)L!} f(x - Lh)$$

elde edilir. Toplam içinde K değeri için ξ sabit sayı olmak üzere $Kh := x - \xi$ olarak tanımlanırsa $h \rightarrow 0$ iken $\xi < x \neq 0$ ise $k = \frac{x-\xi}{h} \rightarrow +\infty$ olur. Buradan $h = \frac{x-\xi}{K}$ ise $\frac{1}{h} = \frac{K}{x-\xi}$ ve $k \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ olarak genişletildiğinden $\frac{1}{h} = \frac{\alpha}{x-\xi}$ yazılabilir.

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{K}{x-\xi}\right)^\alpha \sum_{L=0}^K (-1)^L \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-L)L!} f\left(x - \frac{L}{K}(x-\xi)\right)$$

ifadesi daha genel notasyonlar kullanılarak yeniden yazılırsa;

$$f^\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{x-\xi}\right)^\alpha \sum_{L=0}^n (-1)^L \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-L)L!} f\left(x - \frac{L}{n}(x-\xi)\right) \quad (2.10)$$

elde edilir. Bu tanıma "*Grünwald- Letkinov Kesirli Türevi*" denir. Aslında bu tanım, içerisindeki limitin varlığından dolayı oldukça karmaşıktır. Yani bu tanım sadece limitin varlığında anlamlıdır. Bu nedenle tanımdaki limiti bütün fonksiyonlara uygulanabilir hale getirmek, geliştirmek gereklidir.

2.5.2. Riemann- Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali

Grünwald- Letkinov kesirli türev tanımı daha kullanışlı hale dönüştürmek için farklı α değerleri için tanım yeniden yazılır, bazı uygulanabilir benzerlikler bulunarak temel fonksiyonların kesirli integrali yazılabilir.

$$f^\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h}\right)^\alpha \sum_{L=0}^n (-1)^L \binom{\alpha}{L} f(x - Lh), \quad h = \frac{x-\xi}{n}, \quad \xi < x \quad (2.11)$$

formu ele alınsın. İlk olarak temel anlamda integral kavramı türevin tersi olarak düşünüldüğünde (2.11) denklemindeki α değeri $(-\alpha)$ ile değiştirilebilir.

$$\binom{\alpha}{L} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-L)L!} \text{ ise } \binom{-\alpha}{L} = \frac{(-1)^L \Gamma(\alpha+L)}{\Gamma(\alpha)L!} \text{ olur. O halde;}$$

$$\begin{aligned} f^{(-\alpha)}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h}\right)^{-\alpha} \sum_{L \rightarrow 0}^n (-1)^L \binom{-\alpha}{L} f(x - Lh) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h^\alpha \sum_{L \rightarrow 0}^n (-1)^L (-1)^L \frac{\Gamma(\alpha+L)}{\Gamma(\alpha)L!} f(x - Lh) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h^\alpha \sum_{L \rightarrow 0}^n \frac{\Gamma(\alpha+L)}{\Gamma(\alpha)L!} f(x - Lh) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$I^{(\alpha)}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^\alpha \sum_{L \rightarrow 0}^n \frac{\Gamma(\alpha+L)}{\Gamma(\alpha)L!} f(x - Lh), \quad h = \frac{x - \xi}{n}, \quad \xi < x$$

integrali yazılabilir ve $\alpha = 1$ için integral yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} I^1(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h^1 \sum_{L \rightarrow 0}^n \frac{\Gamma(1+L)}{\Gamma(1)L!} f(x - Lh) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{L \rightarrow 0}^n h \cdot f(x - Lh), \quad h = \left(\frac{(x - \xi) - 0}{n}\right) \\ &= \int_0^{x-\xi} f(x - t) dt, \quad (x - t = u; -dt = du) \\ &= - \int_x^\xi f(u) du \\ I^1(f) &= \int_\xi^x f(u) du \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde;

$$\begin{aligned} \alpha = 2 \text{ için } I^2(f) &= \int_\xi^x (x - u) f(u) du \\ \alpha = 3 \text{ için } I^3(f) &= \frac{1}{2!} \int_\xi^x (x - u)^2 f(u) du \\ &\vdots \\ \alpha = n \text{ için } I^n(f) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_\xi^x (x - u)^{n-1} f(u) du. \end{aligned}$$

şeklinde genelleştirilebilir. Elde edilen bu

$$I_x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\xi^x (x - u)^{\alpha-1} f(u) du, \quad \xi < x \quad (2.12)$$

integraline "*Riemann- Liouville Kesirli İntegrali*" denir. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $n - 1 < \alpha < n$ olmak üzere Riemann-Liouville (2.12) integrali üzerinden türevi yazarsak;

$$\begin{aligned} {}_{\xi}D_x^{\alpha} f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} I_x^{n-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\xi}^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

ifadesine "*Riemann- Liouville Kesirli Türevi*" denir. (Podlubny (1998))

2.5.3. Caputo Kesirli Türevi

$\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $n - 1 < \alpha < n$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} {}_{\xi}^C D_x^{\alpha} f(x) &= {}_{\xi}I_x^{(n-\alpha)} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\xi}^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t) dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

ifadesine "*Caputo Kesirli Türevi*" denir.

Sadece (Caputo (1966)) değil, başka alanlardaki farklı çalışmalarda da aynı tanıma ulaşılmıştır. (Caputo ve Mainardi (1971), Kilbas ve dig. (2006), Bagley ve Torvik (1986), Hilfer ve dig. (2000)).

Örnek: $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \mathbf{c}$ sabit fonksiyonunu Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev tanımına uygulayalım.

$$\begin{aligned} {}_{\xi}^{RL} D_x^{\alpha}(\mathbf{c}) &= \frac{d^n}{dx^n} I_x^{n-\alpha}(\mathbf{c}) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\xi}^x (x-t)^{n-\alpha-1}(\mathbf{c}) dt \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{x-t^{n-\alpha}}{(n-\alpha)(-1)} \Big|_{\xi}^x = \frac{d^n}{dx^n} \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[0 + \frac{(x-\xi)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right] \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{(x-\xi)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \\ &= \frac{\mathbf{c}}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} (x-\xi)^{n-\alpha} \right\} \\ &= \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(1+n-\alpha)} \frac{(n-\alpha)!(x-\xi)^{n-\alpha-n}}{(n-\alpha-n)!} \\ &= \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(1+n-\alpha)} \frac{\Gamma(1+n-\alpha)(x-\xi)^{-\alpha}}{(-\alpha)!} \\ &= \frac{\mathbf{c}}{\Gamma(1-\alpha)(x-\xi)^{\alpha}} \neq 0. \end{aligned}$$

Klasik analizde bilindiği üzere sabitin türevi sıfırdır ancak burada sıfırdan farklı bir sonuç elde edilmiştir. Ayrıca paydada $(x - \xi)$ bulunduğundan $x = \xi$ olduğunda ifade sonsuz olacak yani bu noktada süreksiz olup türev tanımsız olacaktır. Bu sebeple Riemann-Liouville kesirli türevi kullanışlı değildir.

$$\begin{aligned} {}^C D_x^\alpha(\mathbf{c}) &= {}_\xi I_x^{(n-\alpha)} \left\{ \frac{d^n}{dx^n}(\mathbf{c}) \right\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_\xi^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[\frac{d^n}{dt^n} \mathbf{c} \right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_\xi^x (x-t)^{n-\alpha-1} \mathbf{0} dt \\ {}^C D_x^\alpha(\mathbf{c}) &= 0 \end{aligned}$$

Caputo kesirli türeviyle elde edilen sonuç, klasik analizde elde edilen sonuçla aynı olmuştur.

Örnek: $\kappa > -1$ olmak üzere $f(x) = x^\kappa$ polinom fonksiyonunu Caputo kesirli türev tanımına uygulayalım.

$$\begin{aligned} {}^C D_x^\alpha(x^\kappa) &= {}_\xi I_x^{(n-\alpha)} \left[\frac{d^n}{dx^n}(x^\kappa) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_\xi^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n}(t^\kappa) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_\xi^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[\frac{\kappa!}{(\kappa-n)!} t^{\kappa-n} \right] dt \\ &= \frac{\Gamma(1+\kappa)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\kappa-n)} \int_\xi^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\kappa-n} dt \\ &= \frac{\Gamma(1+\kappa)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\kappa-n)} \int_\xi^x (x)^{n-\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} t^{\kappa-n} dt \end{aligned}$$

ifadesinde $\frac{t}{x} = y$ yazılırsa $t = xy$ ve $dt = xdy$ olur. Dolayısıyla $t \rightarrow \xi$ iken $y \rightarrow \frac{\xi}{x}$ ve $t \rightarrow x$ iken $y \rightarrow 1$ elde edilir.

$$\begin{aligned} {}^C D_x^\alpha(x^\kappa) &= \frac{\Gamma(1+\kappa)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\kappa-n)} \int_{\xi/x}^1 (x)^{n-\alpha-1} (1-y)^{n-\alpha-1} (xy)^{\kappa-n} x dy \\ &= \frac{\Gamma(1+\kappa)(x)^{n-\alpha-1+\kappa-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\kappa-n)} \int_{\xi/x}^1 (1-y)^{n-\alpha-1} (y)^{\kappa-n} dy \end{aligned}$$

$\xi = 0$ olarak alınırsa Beta fonksiyonu elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(1+\kappa)(x)^{\kappa-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\kappa+n)} \beta(n-\alpha, \kappa-n+1) \\ &= \frac{\Gamma(1+\kappa)(x)^{\kappa-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\kappa+n)} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\kappa+n)}{\Gamma(n-\alpha+\kappa-n+1)} \\ {}^C_\xi D_x^\alpha(x^\kappa) &= \frac{\Gamma(1+\kappa)}{\Gamma(1+\kappa-\alpha)} x^{\kappa-\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç bize Caputo kesirli türevinin bütün polinom fonksiyonlar için kullanılabılır olduğunu söyler.

2.5.4. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi ve İntegrali

$\alpha \in [0, 1]$ ve $\xi < b$ için $f(x) \in H^1(\xi, b)$ olsun.

$${}^{CF}_\xi D_x^\alpha f(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_\xi^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt, \quad M(0) = M(1) = 1 \quad (2.15)$$

ifadesine "*Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi*" denir (Caputo ve Fabrizio (2015)).

Caputo kesirli türevi ile Caputo-Fabrizio (C-F) kesirli türevi arasındaki temel fark ilk olarak görünen Caputo kesirli türev tanımındaki integralin çekirdek fonksiyonu diyebileceğimiz $(x-t)^{-\alpha}$ fonksiyonunun değişmiş olmasıdır. Caputo-Fabrizio kesirli türevinde çekirdek fonksiyonu olarak üstel bir fonksiyon olan $e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}}$ vardır.

$\xi < t < x$ ve $0 < \alpha \leq 1$ aralıkları için $\frac{1}{(x-t)^\alpha}$ çekirdek fonksiyonu $x = t$ olduğunda tanımsız olur yani bu fonksiyonun $x = t$ noktasında tekilliği vardır. Ancak yeni tanım tekilliği olmayan bir çekirdek fonksiyonuna sahiptir yani x yerine hangi değeri verirse verelim fonksiyon hiçbir zaman sıfır değerini almaz.

C-F kesirli türev tanımına bakıldığında farklı olarak $M(\alpha)$ fonksiyonu ve $H^1(\xi, b)$ uzayı görülür. Bir önceki tanımda integrallenebilir fonksiyonlar vardı ve onların kesirli türevleriyle ilgilenildi. Şimdi elimizde farklı koşullar ve fonksiyonlar var. Dolayısıyla bu ifadelerin anlamlarına bakılmalıdır. İlk olarak mertebesi 1 olan H uzayına bakılırsa;

$$H^1(\xi, b) = \{f \in L^2(\xi, b) : f' \in L^2(\xi, b)\}$$

uzayına "*Sobolev uzayı*" denir. Bu uzay (ξ, b) aralığında kendisi L^2 de ve türevi de $L^2(\xi, b)$ bulunan bütün fonksiyonları içerir. $L^2(\xi, b)$ ise (ξ, b) aralığında $\int_\xi^b |f(t)|^2 dt < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonları içerir.

C-F tanımında yeni olan bir diğer ifade ise $M(\alpha)$ dır. Bu ifadeye "*normalleştirme sabiti*" ya da "*normalleştirme fonksiyonu*" denir. Bu öyle bir sabittir ki bazen istatistikte olduğu gibi bazı belirli koşulları ayarlamak için olasılık yoğunluk fonksiyonu gibi bir fonksiyona ihtiyacımız vardır. Biliyoruz ki olasılık yoğunluk fonksiyonlarının integrali bütün etki alanında 1'e eşittir. Ancak bu durum bütün fonksiyonlar için geçerli değildir. Eğer Gaussian fonksiyonunu alırsak;

$$g(x) = e^{-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \sqrt{2\pi}$$

integrali 1 olmadığından bu bir olasılık yoğunluk fonksiyonu değildir.

$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot g(x)$ olacak şekilde bir $h(x)$ fonksiyonu alırsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{2\pi}) = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $h(x)$ fonksiyonu bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Bu, buradaki $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ sabiti sayesinde olmuştur. Bu sabite "*normalleştirme sabiti*" denir. C-F tanımındaki denklemde bulunan $M(\alpha)$ da buna benzer bir fonksiyondur.

$\alpha = 1$ daha doğrusu $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \alpha = 1$ olduğunda C-F kesirli türevini incelemek için

$$k_{\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha} e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}}$$

fonksiyonunu alalım. $x = t$ olduğunda $k_{\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} k_{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \alpha} = \infty$$

olur. $x > t$ ($x - t > 0$) olduğunda

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} k_{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha} e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{\frac{1}{1-\alpha}}{e^{\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}}} \right\} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{belirsizliği} \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{\frac{1}{1-\alpha^2}}{e^{\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} \frac{x-t}{1-\alpha}} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{e^{\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} \frac{x-t}{1-\alpha}} \right\} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} k_{\alpha} = \begin{cases} \infty, & x = t \\ 0, & x > t \end{cases} = \delta(x - t) \quad (\text{Dirac delta fonksiyonu})$$

yazılabilir. Delta fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - t) dt &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(x - t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - t) dt = f(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabildiğinden Caputo-Fabrizio kesirli türevi için

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 1} {}^{CF}_\xi D_x^\alpha f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_\xi^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt \right\} \quad (M(1) = 1) \\
&= 1. \int_\xi^x \left\{ \frac{1}{1-\alpha} e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} \right\} f'(t) dt \\
&= \int_\xi^x \lim_{\alpha \rightarrow 1} (k_\alpha) f'(t) dt = \int_\xi^x \delta(x-t) f'(t) dt \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu da bize $\alpha = 1$ olduğunda Caputo - Fabrizio kesirli türevi ile klasik türevin aynı sonucu verdiğini görülür.

$\alpha = 0$ olduğu durum düşünüldüğünde aslında hiçbir türev alınmaması yani klasik anlamdaki türev için $f(x)$ fonksiyonunun yine $f(x)$ olarak elde edilmesidir. Ancak $\alpha = 0$ için C-F kesirli türev tanımı incelendiğinde

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 0} {}^{CF}_\xi D_x^\alpha f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_\xi^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt \right\}, \quad (M(0) = 1) \\
&= f(x) - f(\xi)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $f(\xi)$ limiti sıfır olan bir fonksiyon ya da sıfırdaki değeri sıfır olan bir fonksiyon değilse yeni kesirli türev tanımının klasik anlamdan farklı bir sonuca ulaştığı görülür (Guillemine ve dig. (1980), Hewitt ve Stromberg (2013)).

Örnek: $M(\alpha) = 1, \xi = 0$ koşulları altında farklı n değerleri için ${}^{CF}_\xi D_x^\alpha \{x^n\}$ türevini inceleyelim.

n=1 olsun.

$$\begin{aligned}
{}^{CF}_0 D_x^\alpha \{x\} &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} (1) dt = \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}}}{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \right\}_{t=0}^{t=x} \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(1 - e^{\frac{-\alpha}{1-\alpha} \cdot x} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-\alpha}{1-\alpha} \cdot x}
\end{aligned}$$

n=2 olsun.

$$\begin{aligned}
{}_0^{CF}D_x^\alpha\{x^2\} &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} (2t) dt \\
&= \frac{2}{1-\alpha} \left\{ t \left| \frac{e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right|_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1) dt \right\} \\
&= \frac{2}{1-\alpha} \left\{ \frac{1-\alpha}{\alpha} (x \cdot (1) - 0) - \frac{1-\alpha}{\alpha} \int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} dt \right\} \\
&= \frac{2}{\alpha} x - 2 \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} (t)' dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_0^{CF}D_x^\alpha\{x^2\} &= \frac{2}{\alpha} x - 2 \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \cdot {}_0^{CF}D_x^\alpha\{x\} \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{2-1} (-1)^{k+1} \frac{2!}{(2-k)!} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k \cdot x^{2-k} \\
&\quad + (-1)^{k-1} 2! \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{2-1} \cdot {}_0^{CF}D_x^\alpha\{x\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hareketle $n > 0$ için genelleştirilirse;

$$\begin{aligned}
{}_0^{CF}D_x^\alpha\{x^n\} &= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k \cdot x^{n-k} \\
&\quad + (-1)^{k-1} n! \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \cdot {}_0^{CF}D_x^\alpha\{x\}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

${}_0^{CF}D_x^\alpha f(x)$ Caputo-Fabrizio kesirli türevinin Laplace dönüşümünü incelenirse;

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{{}_0^{CF}D_x^\alpha\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{1-\alpha} \int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt\right\} \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt\right\}
\end{aligned}$$

$$f * g = \int_0^t f(x-t)g(x)dx$$

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} = F(s) \cdot G(s)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{{}^{CF}D_x^\alpha\right\} &= \frac{1}{1-\alpha}\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-\alpha t}{1-\alpha}} * f'(t)\right\} \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left\{\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}t}\right\}.\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left\{\frac{1}{s+\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot s \cdot \mathcal{L}\{f(t)-f(0)\}\right\} \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1-\alpha}{s(1-\alpha)+\alpha}(sF(s)-f(0))\right] \\
&= \frac{sF(s)-f(0)}{s+\alpha(1-s)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(2.15) eşitliği ile verilen Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımı aynı zamanda $0 < \alpha < 1, x > 0$ ve $M(\alpha)$ normalleştirme fonksiyonu olmak üzere

$${}^{CF}D_x^\alpha f(x) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir (Losada ve Nieto (2015)).

Bu denklemin Laplace dönüşümü yapıldığında

$$\mathcal{L}\left\{{}^{CF}D_x^\alpha f(x)\right\}(s) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(s+\alpha(1-s))}(s\mathcal{L}\{f(x)\}(s)-f(0)), \quad s > 0$$

elde edilir. Bu da kesirli integral tanımının yapılmasını kolaylaştırır. $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$${}^{CF}I^\alpha f(x) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}u(x) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^x u(t)dt, \quad x \geq 0 \quad (2.17)$$

eşitliğine "*Caputo-Fabrizio Kesirli İntegrali*" denir (Losada ve Nieto (2015)).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Klasik analizde fonksiyonların türevi ve integrali iki çok önemli araçtır. Bir bakıma bu iki araç birbirinin tersidir diyebiliriz. Kesirli analiz ise bu klasik anlamdaki türevi ve integrali rastgele bir mertedeben olacak şekilde genelleştirmek için çalışır.

Matematikçilerin yaklaşımına göre kesirli türevi ve integrali tanımlamak için birçok farklı yol vardır. Örneğin Grünwald-Letnikov tanımı küçük sonsuz parçalanışına ve limite dayanan klasik türev ve integral tanımı ile başlar. Bu yaklaşımın dezavantajı fonksiyonların üzerindeki büyük kısıtlamalar olması, ispatlar ve hesaplamalardaki teknik zorluklardır. Neyse ki Caputo-Fabrizio gibi daha kullanışlı ve pratik yaklaşımlar da mevcuttur.

Bu çalışmada biz (Caputo ve Fabrizio (2015)) ve (Losada ve Nieto (2015)) yaklaşımlarını kullanacağız. Bu yaklaşımları formüle edip bu yaklaşımların gerekli koşullarını ve özelliklerini vereceğiz.

3.1. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi

Caputo kesirli türev tanımını hatırlarsak $\alpha \in [0, 1]$, $f \in H^1(0, b)$ ve $b > 0$ olmak üzere

$${}^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x - t)^\alpha} dt, \quad t > 0$$

şeklindedir. $(x - t)^\alpha$ çekirdek fonksiyonunu $e^{\{\frac{-\alpha(x-t)}{(1-\alpha)}\}}$ fonksiyonu ile $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ ifadesini $\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)^2}}$ değiştirildiğinde mertebesi $0 < \alpha < 1$ ve $M(\alpha)$ normalleştirme fonksiyonu olmak üzere

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{(2 - \alpha)M(\alpha)}{2(1 - \alpha)} \int_0^x e^{\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt, \quad x > 0$$

elde edilir.

Bu yeni tanıma göre f fonksiyonu eğer sabit bir fonksiyon ise Caputo tanımında olduğu gibi ${}^{CF} D^\alpha f = 0$ olur. Bu iki tanım arasındaki temel fark eski tanımdaki çekirdek fonksiyonunun tersine yeni çekirdek fonksiyonun $x = t$ noktasında tekilliğinin olmamasıdır.

Bilindiği üzere Laplace dönüşümü diferansiyel denklemlerle yapılan çalışmalarda önemli rol oynar. Yeni kesirli tanımı için $0 < x < 1$ ve $\mathcal{L}[g(x)]$ ifadesi g fonksiyonunun Laplace dönüşümü olmak üzere

$$\mathcal{L}\left\{ {}^{CF}D^\alpha f(x) \right\}(s) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(s+\alpha(1-s))}(s\mathcal{L}\{f(x)\}(s) - f(0)), \quad s > 0 \quad (3.1)$$

yazılabilir. Eğer Caputo-Fabrizio kesirli türevi ile çalışılacaksa Laplace dönüşümünün kullanışlı bir araç olduğu aşikârdır.

3.2. Caputo-Fabrizio Kesirli İntegrali

Mertebesi $0 < \alpha < 1$ aralığında herhangi bir değer olan kesirli türev tanımından sonra mertebesi $0 < \alpha < 1$ aralığında herhangi bir değer olan kesirli integral tanımından bahsetmek doğal bir gerekliliktir. Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımıyla ilişkilendirerek kesirli integral tanımını verelim.

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$${}^{CF}D_x^\alpha f(x) = u(x), \quad x \geq 0 \quad (3.2)$$

diferansiyel denkleminin Laplace dönüşümü yapıldığında

$$\mathcal{L}\left\{ {}^{CF}D^\alpha f(x) \right\}(s) = \mathcal{L}\{u(x)\}(s), \quad s > 0$$

elde edilir. (3.1) eşitliği kullanılarak

$$\frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(s+\alpha(1-s))}(s\mathcal{L}\{f(x)\}(s) - f(0)) = \mathcal{L}\{u(x)\}(s)$$

ya da buna denk olarak

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \frac{1}{s}f(0) + \frac{2\alpha}{s(2-\alpha)M(\alpha)}\mathcal{L}\{u(x)\}(s) + \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}\mathcal{L}\{u(x)\}(s), \quad s > 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan ters Laplace dönüşümünün bilinen özellikleri kullanılarak

$$f(x) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}u(x) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}\int_0^x u(s)ds + f(0), \quad x \geq 0 \quad (3.3)$$

eşitliği elde edilir. Diğer bir deyişle $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu fonksiyon

$$f(x) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}u(x) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}\int_0^x u(s)ds + c, \quad x \geq 0$$

olarak tanımlanabilir ve bu eşitlik (3.2) denkleminin bir çözümüdür.

Ayrıca (3.2) diferansiyel denklemi yeniden

$$\frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)}\int_0^x e^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}(x-s)}f'(s)ds = u(x), \quad x \geq 0$$

ya da bu eşitliğe denk olarak

$$\int_0^x e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}s} f'(s) ds = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}x} u(x), \quad x \geq 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu ikinci denklemin her iki tarafının türevi alınırsa;

$$f'(x) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} (u'(x) + \frac{\alpha}{1-\alpha} u(x)), \quad x \geq 0$$

elde edilir. Buradan 0 dan x e integrali alınırsa;

$$f(x) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} [u(x) - u(0)] + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^x u(s) ds + f(0), \quad x \geq 0$$

olur ve (3.3) eşitliğine benzer bir sonuca ulaşılır.

O halde sonuç olarak Caputo-Fabrizio tipinde kesirli integral tanımı aşağıdaki gibi olmalıdır.

Tanım: $0 < \alpha < 1$ olmak üzere mertebesi α olan f fonksiyonunun kesirli integrali

$${}^{CF}I_x^\alpha f(x) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} u(x) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^x u(s) ds, \quad x \geq 0$$

şeklindedir.

Bir önceki tanıma göre mertebesi $0 < \alpha < 1$ olan bir f fonksiyonun Caputo-Fabrizio kesirli integrali f fonksiyonu ile birinci mertebeden integralinin arasındadır.

$$\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} = 1$$

Dolayısıyla buradan $M(\alpha)$ için

$$M(\alpha) = \frac{2}{2-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

eşitliği elde edilir.

3.3. Kesirli Diferansiyel Denklemler

$0 < \alpha < 1$ ve h fonksiyonu

$${}^{CF}D^\alpha h(x) = 0, \quad x \geq 0 \tag{3.4}$$

diferansiyel denkleminin çözümü olsun. (3.3) eşitliğinden (3.4) denkleminin çözümü her $x \geq 0$ için $h(x) = h(0)$ eşitliğini sağlamalıdır. Buradan h çözümünün sabit fonksiyon olması gerektiği sonucuna ulaşılır.

Önerme 3.1 $0 < \alpha < 1$ olsun.

$${}^{CF}D^\alpha h(x) = \rho(x), \quad x \geq 0 \quad (3.5)$$

$$h(0) = h_0 \in \mathbb{R}; \quad (3.6)$$

başlangıç değer probleminin tek bir çözümü vardır, $I^1 \rho$ ifadesi ρ nun ilkel ve

$$v_\alpha = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}, \quad w_\alpha = \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \quad (3.7)$$

olmak üzere bu çözüm

$$h(x) = h_0 + v_\alpha(\rho(x) - \rho(0)) + w_\alpha I^1 \rho(x), \quad x \geq 0 \quad (3.8)$$

şeklindedir.

İspat : Kabul edelim ki h_1 ve h_2 (3.5) ve (3.6) denklemlerinin iki ayrı çözümü olsun. Bu durumda

$${}^{CF}D^\alpha h_1(x) - {}^{CF}D^\alpha h_2(x) = [{}^{CF}D^\alpha h_1 - h_2](x) = 0$$

buradan $(h_1 - h_2)(0) = 0$ olur. Dolayısıyla daha önce bahsedildiği gibi $h_1 - h_2 = 0$ elde edilir. Bu da her $x \geq 0$ için $h_1(x) = h_2(x)$ demektir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

(3.3) eşitliğinden açıkça görülür ki (3.8) ile tanımlanan fonksiyon (3.5) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Dahası eğer (3.8) denklemindeki x yerine 0 yazılırsa h_0 elde edilir.

Dolayısıyla (3.8) ile tanımlanan fonksiyon(3.5) ve (3.6) ile verilen başlangıç değer probleminin tek bir çözümüdür. $\alpha = 1$ olduğunda (3.5) denkleminin çözümü ρ nun olağan ilkelidir.

Şimdi $\varphi \in \mathbb{R}, \varphi \neq 0$ ($\varphi = 0$ olduğu durum daha önce çalışılan duruma karşılık gelir) olduğunda

$${}^{CF}D^\alpha h(x) = \varphi h(x) + u(x), \quad x \geq 0 \quad (3.9)$$

diferansiyel denklemini inceleyelim.

Önerme 3.1 'den (3.9) denklemini çözmek demek v_α, w_α (3.7) de verilen eşitlikler olmak üzere

$$h(x) = h_0 + v_\alpha[\varphi(h(x) - h_0) + u(x) - u(0)] + w_\alpha \int_0^x [\varphi h + u](s)ds, \quad x \geq 0$$

olacak şekilde bir h fonksiyonu bulmak demektir. Buna denk olarak

$$(1 - \varphi v_\alpha)h(x) - \varphi w_\alpha I^1 h(x) = (1 - \varphi v_\alpha)h_0 + v_\alpha(u(x) - u(0)) + w_\alpha I^1 u(x), \quad x \geq 0$$

olacak şekilde h fonksiyonu bulmalıyız.

Eğer $\varphi v_\alpha = 1$ olarak alınırsa;

$$h(x) = -\frac{v_\alpha}{\varphi v_\alpha} u'(x) - \frac{w_\alpha}{\varphi} u(x), \quad x \geq 0$$

elde edilir. Diğer durum yani $\varphi v_\alpha \neq 1$ ise;

$$\tilde{\rho}(x) = h_0 + \frac{v_\alpha}{1 - \lambda v_\alpha} (u(x) - u(0)) + \frac{w_\alpha}{1 - \lambda v_\alpha} I^1 u(x), \quad x \geq 0$$

olduğunda

$$h(x) - \frac{\varphi w_\alpha}{1 - \varphi v_\alpha} I^1 h(x) = \tilde{\rho}(x), \quad x \geq 0 \quad (3.10)$$

eşitliği elde edilir.

$\varphi = 0$ olduğu durum aşikârdır, $h = \tilde{\rho}$ elde edilir. Eğer $\varphi \neq 0$ ise;

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda b_\alpha}{1 - \lambda b_\alpha}$$

için (3.10) eşitliği

$$h(x) - \tilde{\varphi} I^1 h(x) = \tilde{\rho}(x), \quad x \geq 0$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla,

$$h'(x) = \tilde{\varphi} h(x) + \tilde{\rho}(x), \quad x \geq 0$$

olduğundan başlangıç koşul değerlerine sahip basit diferansiyel denklemlerin tek bir çözümü olduğu sonucuna ulaşılır.

Sonuç olarak bir sonraki önerme kanıtlanmış olur.

Önerme 3.2 $0 < \alpha < 1$ olsun.

$${}^{CF}D^\alpha h(x) = \varphi h(x) + u(x), \quad x \geq 0$$

$$h(0) = h_0 \in \mathbb{R}$$

başlangıç değer probleminin her $\varphi \in \mathbb{R}$ tek bir çözümü vardır.

3.4. Varlık -Teklik

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{ve} \quad y(t_0) = y_0$$

olan bir başlangıç değeri probleminin çözümünü bulmaya çalışmadan önce iki soru sorulmalıdır:

- 1) Bu diferansiyel denklemin bir çözümü var mı?
- 2) Eğer çözümü varsa bu çözüm tek midir?

Özellikle diferansiyel denklem sistemi günlük yaşam problemine aitse tek bir çözümünün olması tutarlı bir öngörüde bulunabilmek adına çok önemlidir. Diğer taraftan birden fazla çözüm varsa doğru tahminde bulunabilmek için hangi çözümün kullanılacağını bulmak oldukça zordur.

Başlangıç değeri problemleri için kabaca teorem eğer $f(t, y)$ fonksiyonu (t_0, y_0) aralığının komşuluğunda sürekli ise çözümü vardır ve eğer $f(t, y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonları (t_0, y_0) aralığının komşuluğunda sürekli ise çözüm tektir, der.

3.4.1. Çözümün Varlığı

Teorem 3.1 $R : \{(x, y) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$ dikdörtgensel bölge olmak üzere her $(x, y) \in R$ için $f(x, y)$ bu dikdörtgensel bölgede sürekli ve sınırlı ise yani $\exists k \in \mathbb{R}$ ve $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $|f(x, y)| < k$ ise $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ başlangıç değeri probleminin en az bir $y(x)$ çözümü vardır.

Tanım: $R : \{(x, y) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$ olacak şekilde dikdörtgensel bir bölge olsun. Her (x, y_1) ve $(x, y_2) \in R(a, b)$ için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \omega |y_1 - y_2|$$

olacak şekilde bir ω sabiti var ise f fonksiyonu "*Lipschitzs koşulunu*" sağlar.

Teorem 3.2 R açık veya kapalı bir bölge olmak üzere her $(x, y) \in R$ için f fonksiyonunun $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevi var ve her $(x, y) \in R$ için sınırlı ise f fonksiyonu R bölgesinde Lipschitz koşulunu sağlar.

3.4.2. Çözümün Tekliği

Teorem 3.3 $R : \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$ dikdörtgensel bölge olsun. $f(x, y)$ fonksiyonu R bölgesinde sürekli olsun ve y ye göre Lipschitz koşulunu sağlasın. (x_0, y_0) , R dikdörtgeninin bir iç noktası olmak üzere problem $|x - x_0| \leq h$ aralığında türevlenebilir bir tek çözümü vardır. Burada $M = \max |f(x, y)|$ ve $(x, y) \in R$ olmak üzere $h = \min(a, \frac{b}{M})$ dir.

İspat: Bu teoremi ardışık yaklaşımlar yani Picard yöntemi ile ispatlayalım.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \\ \int_{x=x_0}^x \frac{dy}{dt} dt &= \int_{x=x_0}^x f(t, y(t)) dt \\ y(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \end{aligned}$$

olduğundan $|x - x_0| \leq h$ olmak üzere $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \\ \Phi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_1(t)) dt \\ &\vdots \\ \Phi_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi_{n-1}(t)) dt \end{aligned} \tag{3.11}$$

İspatı 5 basamağa bölebiliriz.

1) (3.11) ile tanımlanan $\{\Phi_n\}$ fonksiyonları vardır. Sürekli türevlenebilirdir ve $|x - x_0| \leq h$ aralığında $|\Phi_n(x) - y_0| \leq b$ eşitsizliğini sağlar. Böylece $f[x, \Phi_n(x)]$ bu aralıkta tanımlıdır.

2) $\{\Phi_n\}$ fonksiyonları $|x - x_0| \leq h$ aralığında $|\Phi_n(x) - \Phi_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{\omega} \frac{(\omega h)^n}{n!}$ eşitsizliğini sağlar.

3) $n \rightarrow \infty$ iken $|x - x_0| \leq h$ aralığında $\{\Phi_n\}$, Φ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

4) Φ limit fonksiyonu $|x - x_0| \leq h$ aralığında $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denklemini ve $\Phi(x_0) = y_0$ eşitliğini sağlar.

5) Φ , $|x - x_0| \leq h$ aralığında $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denklemini sağlayan ve $\Phi(x_0) = y_0$ koşu-

lunu gerçekleyen tek türevlenebilir fonksiyondur.

→ 1) İlk basamakta tümevarım yöntemi kullanabilir. Dolayısıyla (3.11) ile tanımlanan $\{\Phi_n\}$ fonksiyonları için $\{\Phi_{n-1}\}$ var olsun öyle ki $\forall x \in [x_0, x_0 + h]$ için $|\Phi_{n-1}(x) - y_0| \leq b$ sağlansın. Böylece $[x, \Phi_{n-1}(x)]$ aralığı $\mathbf{R}$ dikdörtgenindedir. Dolayısıyla $f[x, \Phi_{n-1}(x)]$ tanımlı sürekli ve $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $|f[x, \Phi_{n-1}(x)]| \leq M$ eşitsizliği sağlanır. Böylece $\Phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \Phi_{n-1}(t)]dt$ olduğundan Φ_n fonksiyonunun var ve $[x_0, x_0 + h]$ aralığında sürekli olduğu görülür.

$$\begin{aligned}\Phi_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \Phi_{n-1}(t)]dt \\ |\Phi_n - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f[t, \Phi_{n-1}(t)]dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f[t, \Phi_{n-1}(t)]|dt \\ &\leq M \int_{x_0}^x dt \leq M(x - x_0) \leq M.h \leq b\end{aligned}$$

olup $[x, \Phi_n(x)]$ aralığı $\mathbf{R}$ bölgesindedir ve $f[x, \Phi_n(x)]$ fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ aralığında sürekli ve tanımlıdır.

$$\Phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$$

ile tanımlanan Φ_1 fonksiyonu vardır ve bu bölgede sürekli türevlere sahiptir. Ayrıca $|\Phi_1 - y_0| \leq M|x - x_0| \leq b$ dir ve $f[x, \Phi_1(x)]$ fonksiyonu tanımlı ve bu aralıkta sürekli dir. Böylece tümevarım yoluyla (2.19) ile tanımlı her bir Φ_n fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ aralığında istenen özellikleri sağlar.

→ 2) $\{\Phi_n\}$ fonksiyonlarının $|x - x_0| \leq h$ aralığında $|\Phi_n(x) - \Phi_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{\omega} \frac{(\omega h)^n}{n!}$ eşitsizliğini sağladığını göstermek için tümevarım yöntemi kullanılırsa $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $|\Phi_{n-1}(x) - \Phi_{n-2}(x)| \leq \frac{M \cdot \omega^{n-2}}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1}$ (*) olduğu kabul edilir.

$$\begin{aligned}|\Phi_{n-1}(x) - \Phi_{n-2}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[t, \Phi_{n-1}(t)] - f[t, \Phi_{n-2}(t)]\}dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |\{f[t, \Phi_{n-1}(t)] - f[t, \Phi_{n-2}(t)]\}|dt\end{aligned}$$

Ayrıca $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $\Phi_{n-1}(x)$ ve $\Phi_{n-2}(x)$ fonksiyonları Lipschitz koşulunu sağlar. Buradan

$$|f[t, \Phi_{n-1}(t)] - f[t, \Phi_{n-2}(t)]| \leq \omega |\Phi_{n-1}(t) - \Phi_{n-2}(t)|$$

olur. Öyleyse;

$$|\Phi_n(x) - \Phi_{n-1}(x)| \leq \omega \int_{x_0}^x |\{f[t, \Phi_{n-1}(t)] - f[t, \Phi_{n-2}(t)]\}| dt$$

yazılabilir ve (*) denklemini kullanılarak

$$\leq \omega \int_{x_0}^x \frac{M \cdot \omega^{n-2}}{(n-1)!} (t - x_0)^{n-1} dt = \frac{M \cdot \omega^{n-1}}{n!} (x - x_0)^n \quad (**)$$

elde edilir.

$n = 1$ için

$$|\Phi_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[t, y_0] dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f[t, y_0]| dt \leq M \int_{x_0}^x dt = M(x - x_0)$$

olduğu açıktır. Böylece (**) eşitsizliğinin $[x_0, x_0 + h]$ kapalı aralığındaki her n için sağlandığı görülür.

$$\frac{M \cdot \omega^{n-1}}{n!} (x - x_0)^n \leq \frac{M \cdot \omega^{n-1}}{n!} \cdot h^n = \frac{M \cdot \omega^n}{\omega \cdot n!} \cdot h^n = \frac{M}{\omega} \frac{(\omega h)^n}{n!}$$

olduğundan $[x_0, x_0 + h]$ aralığındaki her $n = 1, 2, \dots, n$ için $|\Phi_n(x) - \Phi_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{\omega} \frac{(\omega h)^n}{n!}$ dir.

$\rightarrow 3) n \rightarrow \infty$ iken $|x - x_0| \leq h$ aralığında $\{\Phi_n\}$, Φ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterebilmek için Weierstrass M-testini kullanalım.

Tanım: (Weierstrass M-Testi)

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, sabitlerin yakınsak serisi olacak şekilde $\{M_n\}$ pozitif sabitlerin dizisi ve $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ her bir $n = 1, 2, \dots$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $|U_n(x)| < M_n$ olacak şekilde reel değerli fonksiyonların serisi ise $[a, b]$ aralığında $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ serisi düzgün yakınsaktır.

$$\frac{M}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\omega h)^n}{n!} = \frac{M}{\omega} \omega h + \frac{M}{\omega} \frac{(\omega h)^2}{2!} + \dots$$

pozitif sabitlerin serisi $\frac{M}{\omega} (e^{\omega h} - 1)$ değerine yakınsar.

$\sum_{i=1}^{\infty} [\Phi_i(x) - \Phi_{i-1}(x)]$ serisi $\forall x \in [x_0, x_0 + h]$ ve $n = 1, 2, 3, \dots$ için $|\Phi_n(x) - \Phi_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{\omega} \frac{(\omega h)^n}{n!}$ eşitsizliğini sağladığından ve M-Weierstrass testinden $y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [\Phi_i(x) - \Phi_{i-1}(x)]$ serisi $[x_0, x_0 + h]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Böylece $\{S_n\}$ kısmi toplam dizisi $[x_0, x_0 + h]$ aralığında Φ limit fonksiyonuna düzgün yakınsar. Yani $S_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n [\Phi_i(x) - \Phi_{i-1}(x)] = \Phi_n(x)$ olur. Başka bir deyişle, Φ_n dizisi $[x_0, x_0 + h]$ aralığında Φ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Her Φ_n fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ aralığında sürekli olduğundan Φ limit fonksiyonu da $[x_0, x_0 + h]$ aralığında süreklidir.

→ 4) Φ limit fonksiyonunun $|x - x_0| \leq h$ aralığında $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denklemini ve $\Phi(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağladığını gösterelim.

Her bir Φ_n , $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $|\Phi_n(x) - y_0| \leq b$ eşitsizliğini sağladığında $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $|\Phi(x) - y_0| \leq b$ dir. Böylece $f[x, \Phi(x)]$ bu aralıkta tanımlıdır. $y_1 = \Phi(x)$ ve $y_2 = \Phi_n(x)$ için Lipschitz koşulunu uygulanırsa $x \in [x_0, x_0 + h]$ için

$$|f[x, \Phi(x)] - f[x, \Phi_n(x)]| \leq \omega |\Phi(x) - \Phi_n(x)| \quad (3.12)$$

elde edilir. Φ_n fonksiyonunun Φ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan verilen her $\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi_n(x)| &\leq \frac{\epsilon}{\omega} \\ \omega |\Phi(x) - \Phi_n(x)| &< \epsilon \end{aligned} \quad (3.13)$$

yazılabilir. Böylece $n = 1, 2, 3, \dots$ için (3.12) ve (3.13) denklemlerinden $\{f[x, \Phi_n(x)]\}$ fonksiyon dizisi $\{f[x, \Phi(x)]\}$ fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca $n = 1, 2, 3, \dots$ için $f[x, \Phi_n(x)]$ ile tanımlı her fonksiyon bu aralıkta süreklidir.

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \Phi_n(t)] dt \right] \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f[t, \Phi_n(t)] dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \Phi(t)] dt \end{aligned}$$

olur. Yani, Φ limit fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \Phi(t)] dt$ integral denklemini sağlar. Böylece başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı gösterilmiş olur.

→ 5) Φ çözümünün tekliğini gösterelim. Ψ , $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ denkleminin $\Psi(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümü olsun. Dolayısıyla $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $\Psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \Psi(t)] dt$ integral denklemi sağlanır. Tümevarım yöntemiyle $[x_0, x_0 + h]$ aralığında

$$|\Psi(x) - \Phi(x)| \leq \frac{\omega^n \cdot b \cdot h^n}{n!} \quad (3.14)$$

olup $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(\omega h)^n}{n!}$ serisi yakınsaktır. Öyleyse $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(\omega h)^n}{n!} = 0$ dir. Böylece (3.14) eşitsizliğinden $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $\Psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x)$ olduğu görülür. Fakat bu aralıkta $\Phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x)$ ti. O halde $\Psi(x) = \Phi(x)$ olur. Buradan $[x_0, x_0 + h]$ aralığında Φ fonksiyonunun başlangıç değer probleminin tek çözümü olduğu görülür.

Benzer işlemlerle $[x_0 - h, x_0]$ aralığında da ispat yapılabilir. Dolayısıyla $|x - x_0| \leq h$ aralığında $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denkleminin $\Phi(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümü vardır ve tektir.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Dang Humması Modeli

Bu bölümde çalışılacak olan model tanıtılıp, bu model Caputo-Fabrizio kesirli türevi ile genişletilerek yeni bir model elde edilecektir.

Modelde insandaki ve sivrisinekteki kuluçka süresi dikkate alınmıştır. Bu çalışmada sivrisinek popülasyonu vektör popülasyonu olarak adlandırılmıştır. Dang humması hastaları "maruz kalan" ve "bulaşıcı" olarak sınıflandırılmıştır. Bulaşıcı durumunda olan insan, hastalığı duyarlı sivrisineklere bulaştırabilirken maruz kalanlar bulaştıramaz. İnsan popülasyonu duyarlı, maruz kalan, bulaşıcı ve iyileşmiş olarak; vektör (sivrisinek) popülasyonu duyarlı, maruz kalan ve bulaşıcı olarak sınıflandırılmıştır. Sadece bulaşıcı olan sivrisinekler hastalığı duyarlı insanlara bulaştırabilir.

$\bar{S}_h$ fonksiyonu t anında duyarlı insan popülasyonunu, $\bar{X}_h$ fonksiyonu t anında maruz kalan insan popülasyonunu, $\bar{I}_h$ fonksiyonu t anında bulaşıcı insan popülasyonunu, $\bar{R}_h$ fonksiyonu t anında iyileşmiş insan popülasyonunu, $\bar{S}_v$ fonksiyonu t anında duyarlı vektör popülasyonunu, $\bar{X}_v$ fonksiyonu t anında maruz kalan vektör popülasyonunu, $\bar{I}_v$ fonksiyonu t anında bulaşıcı vektör popülasyonunu olmak üzere insan ve vektör popülasyonu için Dang humması modeli $N_T = \bar{S}_h + \bar{X}_h + \bar{I}_h + \bar{R}_h$ ve $N_v = \bar{S}_v + \bar{X}_v + \bar{I}_v$ koşulları altında

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{S}_h &= \lambda N_T - \beta_h \bar{S}_h \bar{I}_v - \mu_h \bar{S}_h \\
\frac{d}{dt}\bar{X}_h &= \beta_h \bar{S}_h \bar{I}_v - \alpha_h \bar{X}_h - \mu_h \bar{X}_h \\
\frac{d}{dt}\bar{I}_h &= \alpha_h \bar{X}_h - r \bar{I}_h - \mu_h \bar{I}_h \\
\frac{d}{dt}\bar{R}_h &= r \bar{I}_h - \mu_h \bar{R}_h \\
\frac{d}{dt}\bar{S}_v &= C - \beta_v \bar{I}_h \bar{S}_v - \mu_v \bar{S}_v \\
\frac{d}{dt}\bar{X}_v &= \beta_v \bar{I}_h \bar{S}_v - \alpha_v \bar{X}_v - \mu_v \bar{X}_v \\
\frac{d}{dt}\bar{I}_v &= \alpha_v \bar{X}_v - \mu_v \bar{I}_v
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Modeldeki λ insan popülasyonundaki doğum oranını, N_T toplam insan popülasyonunu, μ_h insan popülasyonundaki ölüm oranını, β_h vektör popülasyonundan insan popülasyonuna bulaş oranını, α_h , maruz kalan insan popülasyonunun bulaşıcı insan popülasyonuna dönüşme oranını, α_v maruz kalan vektör popülasyonunun bulaşıcı vektör popülasyonuna dönüşme oranını, C vektör popülasyonun sabit iyileşme oranını, μ_v vektör popülasyonundaki ölüm oranını, β_v insan popülasyonundan vektör popülasyonuna bulaş oranını, r insan popülasyonundaki iyileşme oranını ifade etmektedir.

Toplam insan ve vektör popülasyonunun sabit olduğu düşünülürse her iki popülasyondaki değişim oranı sıfırdır. Böylece

$$\frac{d}{dt}N_T = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dt}N_v = 0$$

elde edilir. Buradan insan popülasyonu için $\lambda = \mu_h$ ve $N_v = \frac{C}{\mu_v}$ sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki model

$$S = \frac{\bar{S}_h}{N_T}, \quad X = \frac{\bar{X}_h}{N_T}, \quad I = \frac{\bar{I}_h}{N_T}, \quad R = \frac{\bar{R}_h}{N_T}, \quad S_v = \frac{\bar{S}_v}{N_v}, \quad X_v = \frac{\bar{X}_v}{N_v}, \quad I_v = \frac{\bar{I}_v}{N_v},$$

eşitlikleri kullanılarak normalleştirilirse;

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu_h - \beta_h S I_v (C/\mu_v) - \mu_h S \\
\frac{dX}{dt} &= \beta_h S I_v (C/\mu_v) - \alpha_h X - \mu_h X \\
\frac{dI}{dt} &= \alpha_h X - r I - \mu_h I \\
\frac{dX_v}{dt} &= \beta_v I N_T (1 - X_v - I_v) - \alpha_v X_v - \mu_v X_v \\
\frac{dI_v}{dt} &= \alpha_v X_v - \mu_v I_v
\end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklindeki denklem sistemine indirgenmiş olur (Pongsumpun (2008)).

Caputo-Fabrizio türev operatörünün tanımını kullanarak orijinal model değiştirilmeden (4.1) denklem sistemi daha geniş bir denklem sistemi haline getirilerek (4.2) denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
{}^{CF}D_t^\xi S(t) &= \mu_h - \beta_h S(t) I_v(t) (C/\mu_v) - \mu_h S(t) \\
{}^{CF}D_t^\xi X(t) &= \beta_h S(t) I_v(t) (C/\mu_v) - \alpha_h X(t) - \mu_h X(t) \\
{}^{CF}D_t^\xi I(t) &= \alpha_h X(t) - r I(t) - \mu_h I(t) \\
{}^{CF}D_t^\xi X_v(t) &= \beta_v I(t) N_T (1 - X_v(t) - I_v(t)) - \alpha_v X_v(t) - \mu_v X_v(t) \\
{}^{CF}D_t^\xi I_v(t) &= \alpha_v X_v(t) - \mu_v I_v(t)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1.1. Dang Humması Modeli İçin Çözümün Varlığı

Bu bölümde elde edilen (4.2) denklem sisteminin çözümünün varlığı incelenecektir. Başlangıç koşulları $S_0(0) = S(0)$, $X_0(0) = X(0)$, $I_0(0) = I(0)$, $X_{v0}(0) = X_v(0)$, $I_{v0}(0) = I_v(0)$ olmak üzere Caputo-Fabrizio integral operatörü yardımıyla (4.2) denklem sistemi yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
S(t) - S(0) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mu_h - \beta_h S(t) I_v(t) (C/\mu_v) - \mu_h S(t)) \\
&\quad + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mu_h - \beta_h S(y) I_v(y) (C/\mu_v) - \mu_h S(y)) dy \\
X(t) - X(0) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\beta_h S(t) I_v(t) (C/\mu_v) - \alpha_h X(t) - \mu_h X(t)) \\
&\quad + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\beta_h S(y) I_v(y) (C/\mu_v) \\
&\quad - \alpha_h X(y) - \mu_h X(y)) dy \\
I(t) - I(0) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\alpha_h X(t) - r I(t) - \mu_h I(t)) \\
&\quad + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\alpha_h X(y) - r I(y) - \mu_h I(y)) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_v(t) - X_v(0) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\beta_v I(t) N_T (1 - X_v(t) - I_v(t)) - \alpha_v X_v(t) \\
&\quad - \mu_v X_v(t)) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\beta_v I(y) N_T (1 - X_v(y) - I_v(y)) \\
&\quad - \alpha_v X_v(y) - \mu_v X_v(y)) dy \\
I_v(t) - I_v(0) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\alpha_v X_v(t) - \mu_v I_v(t)) \\
&\quad + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\alpha_v X_v(y) - \mu_v I_v(y)) dy
\end{aligned} \tag{4.3}$$

denklem sistemi elde edilir.

Yapılanları daha iyi anlamak ve denklemleri sadeleştirmek için $i = 1, \dots, 5$ olmak üzere A_i çekirdek fonksiyonları ;

$$\begin{aligned}
A_1(t, S) &= \mu_h - \beta_h S(t) I_v(t) (C/\mu_v) - \mu_h S(t) \\
A_2(t, X) &= \beta_h S(t) I_v(t) (C/\mu_v) - \alpha_h X(t) - \mu_h X(t), \\
A_3(t, I) &= \alpha_h X(t) - r I(t) - \mu_h I(t), \\
A_4(t, X_v) &= \beta_v I(t) N_T (1 - X_v(t) - I_v(t)) - \alpha_v X_v(t) - \mu_v X_v(t), \\
A_5(t, I_v) &= \alpha_v X_v(t) - \mu_v I_v(t)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ve γ_i sabitleri

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \beta_h \varepsilon_5 (C/\mu_v) + \mu_h \\
\gamma_2 &= \alpha_h + \mu_h \\
\gamma_3 &= r + \mu_h \\
\gamma_4 &= \beta_v \varepsilon_6 \varepsilon_3 + \alpha_v + \mu_v \\
\gamma_5 &= \mu_v
\end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanırsa $F : S(t), S_1(t), X(t), X_1(t), I(t), I_1(t), X_v(t), X_{v_1}(t), I_v(t), I_{v_1}(t)$ ve $N_T(t)$ sürekli fonksiyonları için $\|S(t)\| \leq \varepsilon_1, \|X(t)\| \leq \varepsilon_2, \|I(t)\| \leq \varepsilon_3, \|X_v(t)\| \leq \varepsilon_4, \|I_v(t)\| \leq \varepsilon_5$ ve $\|N_T(t)\| \leq \varepsilon_6$ sınırlamaları yapılabilir.

Varlık-teklik ispatlarını yapmadan önce A_i çekirdek fonksiyonlarının Lipschitz koşulunu sağladığı gösterilmelidir.

Teorem 4.1 A_i çekirdek fonksiyonları $i = 1, \dots, 5$ için Lipschitz koşulunu sağlıyorsa $i = 1, \dots, 5$ olmak üzere F asimptotu üzerinde $\gamma_i < 1$ olur.

İspat : (4.5) denklem sistemini kullanarak sırasıyla A_i fonksiyonlarının Lipschitz koşulunu sağladığını göstereceğiz.

$S(t)$ ve $S_1(t)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
\|A_1(t, S) - A_1(t, S_1)\| &= \|(\mu_h - \beta_h S I_v(C/\mu_v) - \mu_h S) \\
&\quad - (\mu_h - \beta_h S_1 I_v(C/\mu_v) - \mu_h S_1)\| \\
&= \|(S - S_1)(\beta_h I_v(C/\mu_v) + \mu_h)\| \\
&\leq (\beta_h \varepsilon_5(C/\mu_v) + \mu_h) \|S - S_1\| \\
&= \gamma_1 \|S - S_1\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bize A_1 fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağladığını gösterir.

$X(t)$ ve $X_1(t)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
\|A_2(t, X) - A_2(t, X_1)\| &= \|(\beta_h S I_v(C/\mu_v) - \alpha_h X - \mu_h X) \\
&\quad - (\beta_h S I_v(C/\mu_v) - \alpha_h X_1 - \mu_h X_1)\| \\
&\leq (\alpha_h + \mu_h) \|X - X_1\| \\
&= \gamma_2 \|X - X_1\|.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bize A_2 fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağladığını gösterir.

$I(t)$ ve $I_1(t)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
\|A_3(t, I) - A_3(t, I_1)\| &= \|(\alpha_h X(t) - r I(t) - \mu_h I(t)) \\
&\quad - (\alpha_h X(t) - r I_1(t) - \mu_h I_1(t))\| \\
&\leq (-r - \mu_h) \|I - I_1\| \\
&= \gamma_3 \|I - I_1\|.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bize A_3 fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağladığını gösterir.

$X_v(t)$ ve $X_{v_1}(t)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
\|A_4(t, X_v) - A_4(t, X_{v_1})\| &= \|(\beta_v I(t) N_T (1 - X_v(t) - I_v(t)) - \alpha_v X_v(t) - \mu_v X_v(t)) \\
&\quad - (\beta_v I(t) N_T (1 - X_{v_1}(t) - I_v(t)) - \alpha_v X_{v_1}(t) - \mu_v X_{v_1}(t))\| \\
&\leq (\beta_v \varepsilon_6 \varepsilon_3 + \alpha_v + \mu_v) \|X_v - X_{v_1}\| \\
&= \gamma_4 \|X_v - X_{v_1}\|.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bize A_4 fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağladığını gösterir.

$I_v(t)$ ve $I_{v_1}(t)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_5(t, I_v) - \mathbf{A}_5(t, I_{v_1})\| &= \|(\alpha_v X_v(t) - \mu_v I_v(t)) \\ &\quad - (\alpha_v X_{v_1}(t) - \mu_v I_{v_1}(t))\| \\ &\leq (\mu_v) \|I_v - I_{v_1}\| \\ &= \gamma_5 \|I_v - I_{v_1}\|. \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bize $\mathbf{A}_5$ fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağladığını gösterir.

O halde $\mathbf{A}_i$ çekirdek fonksiyonları $i = 1, \dots, 5$ için $i = 1, \dots, 5$ olmak üzere $\gamma_i < 1$ olma koşulunu sağlar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Varlık çözümünü yapmak için tüm başlangıç değerleri sıfır alınıp $\mathbf{A}_i$ çekirdek fonksiyonları kullanılarak (4.1) denklem sistemi yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mathbf{A}_1(t, S(t))) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mathbf{A}_1(y, S(y))) dy \\ X(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mathbf{A}_2(t, X(t))) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mathbf{A}_2(y, X(y))) dy \\ I(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mathbf{A}_3(t, I(t))) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mathbf{A}_3(y, I(y))) dy \quad (4.6) \\ X_v(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mathbf{A}_4(t, X_v(t))) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mathbf{A}_4(y, X_v(y))) dy \\ I_v(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mathbf{A}_5(t, I_v(t))) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mathbf{A}_5(y, I_v(y))) dy. \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler özyinelemeli formül ile yeniden düzenlenerek aşağıdaki denklem sistemi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mathbf{A}_1(t, S_{n-1}(t))) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mathbf{A}_1(y, S_{n-1}(y))) dy \\ X_n(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mathbf{A}_2(t, X_{n-1}(t))) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mathbf{A}_2(y, X_{n-1}(y))) dy \\ I_n(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mathbf{A}_3(t, I_{n-1}(t))) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mathbf{A}_3(y, I_{n-1}(y))) dy \\ X_{v_n}(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mathbf{A}_4(t, X_{v_{n-1}}(t))) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mathbf{A}_4(y, X_{v_{n-1}}(y))) dy \\ I_{v_n}(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (\mathbf{A}_5(t, I_{v_{n-1}}(t))) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (\mathbf{A}_5(y, I_{v_{n-1}}(y))) dy. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Bu denklem sistemindeki her bir denklemin fark denklemlerini yazarsak;

$$(S_{n+1} - S_n)(t) = \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (A_1(t, S_n(t)) - A_1(t, S_{n-1}(t))) \\ + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (A_1(y, S_n(y)) - A_1(y, S_{n-1}(y))) dy$$

$$(X_{n+1} - X_n)(t) = \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (A_2(t, X_n(t)) - A_2(t, X_{n-1}(t))) \\ + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (A_2(y, X_n(y)) - A_2(y, X_{n-1}(y))) dy$$

$$(I_{n+1} - I_n)(t) = \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (A_3(t, I_n(t)) - A_3(t, I_{n-1}(t))) \\ + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (A_3(y, I_n(y)) - A_3(y, I_{n-1}(y))) dy$$

$$(X_{v_{n+1}} - X_{v_n})(t) = \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (A_4(t, X_{v_n}(t)) - A_4(t, X_{v_{n-1}}(t))) \\ + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (A_4(y, X_{v_n}(y)) - A_4(y, X_{v_{n-1}}(y))) dy$$

$$(I_{v_{n+1}} - I_{v_n})(t) = \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} (A_5(t, I_{v_n}(t)) - A_5(t, I_{v_{n-1}}(t))) \\ + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t (A_5(y, I_{v_n}(y)) - A_5(y, I_{v_{n-1}}(y))) dy.$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemdeki eşitliklerin her iki tarafının normu alındığında

$$\begin{aligned} \|(S_{n+1} - S_n)(t)\| &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \|(\mathbf{A}_1(t, S_n(t)) - \mathbf{A}_1(t, S_{n-1}(t)))\| \\ &+ \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t \|(\mathbf{A}_1(y, S_n(y)) - \mathbf{A}_1(y, S_{n-1}(y)))\| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(X_{n+1} - X_n)(t)\| &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \|(\mathbf{A}_2(t, X_n(t)) - \mathbf{A}_2(t, X_{n-1}(t)))\| \\ &+ \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t \|(\mathbf{A}_2(y, X_n(y)) - \mathbf{A}_2(y, X_{n-1}(y)))\| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(I_{n+1} - I_n)(t)\| &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \|(\mathbf{A}_3(t, I_n(t)) - \mathbf{A}_3(t, I_{n-1}(t)))\| \\ &+ \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t \|(\mathbf{A}_3(y, I_n(y)) - \mathbf{A}_3(y, I_{n-1}(y)))\| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(X_{v_{n+1}} - X_{v_n})(t)\| &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \|(\mathbf{A}_4(t, X_{v_n}(t)) - \mathbf{A}_4(t, X_{v_{n-1}}(t)))\| \\ &+ \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t \|(\mathbf{A}_4(y, X_{v_n}(y)) - \mathbf{A}_4(y, X_{v_{n-1}}(y)))\| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(I_{v_{n+1}} - I_{v_n})(t)\| &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \|(\mathbf{A}_5(t, I_{v_n}(t)) - \mathbf{A}_5(t, I_{v_{n-1}}(t)))\| \\ &+ \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t \|(\mathbf{A}_5(y, I_{v_n}(y)) - \mathbf{A}_5(y, I_{v_{n-1}}(y)))\| dy. \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayarak genişletilmiş (4.2) denklem sistemimizin çözümünün varlığını gösterebiliriz.

Teorem 4.2 *Eğer δ*

$$\delta = \max\{\gamma_i\} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, 5. \quad (4.8)$$

koşulunu sağlarsa Dang humması modelinin çözümü vardır.

İspat : İspatın daha rahat anlaşılması için aşağıdaki fark fonksiyonlarını tanımlayalım:

$$E_{1n}(t) = S_{n+1}(t) - S(t)$$

$$E_{2n}(t) = X_{n+1}(t) - X(t)$$

$$E_{3n}(t) = I_{n+1}(t) - I(t)$$

$$E_{4n}(t) = X_{v_{n+1}}(t) - X_v(t)$$

$$E_{5n}(t) = I_{v_{n+1}}(t) - I_v(t).$$

Eğer $E_{1n}(t)$ fonksiyonunun normunu alırsak;

$$\begin{aligned} \|E_{1n}(t)\| &\leq \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \|A_1(t, S_n(t)) - A_1(t, S(t))\| \\ &\quad + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t \|A_1(y, S_n(y)) - A_1(y, S(y))\| dy \\ &\leq \left(\frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \right) \gamma_1 \|S_n - S\| \\ &\leq \left(\frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \right)^n \delta^n \|S - S_1\|. \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Aynı şekilde diğer E fonksiyonları için aynı hesaplamaları yaparsak;

$$\begin{aligned} \|E_{2n}(t)\| &\leq \left(\frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \right)^n \delta^n \|X - X_1\|, \\ \|E_{3n}(t)\| &\leq \left(\frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \right)^n \delta^n \|I - I_1\|, \\ \|E_{4n}(t)\| &\leq \left(\frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \right)^n \delta^n \|X_v - X_{v_1}\|, \\ \|E_{5n}(t)\| &\leq \left(\frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \right)^n \delta^n \|I_v - I_{v_1}\|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

eşitsizlikleri elde edilir. O halde $n \rightarrow \infty$ iken bütün tanımladığımız $E_{in}(t)$ fonksiyonları $\delta < 1$ ve $i = 1, 2, \dots, 5$ için $E_{in}(t) \rightarrow 0$ olur. Bu sayede ispat tamamlanmış olup genişletilmiş modelimizin çözümünün varlığı gösterilmiş olur.

4.1.2. Dang Humması Modeli İçin Çözümün Tekliği

Bu bölümde Dang Humması modelinin yalnız bir çözümünün olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.3

$$\left(\frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \right) \gamma_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 5. \quad (4.11)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa Dang Humması Caputo-Fabrizio kesirli modelinin yalnız bir çözümü vardır.

İspat : Bu teoremi çelişki ile ispatlamak için her denklemin iki çözümünün olduğu kabul edelim ve bu çözümler $S(t), X(t), I(t), X_v(t), I_v(t)$, ve $\tilde{S}(t), \tilde{X}(t), \tilde{I}(t), \tilde{X}_v(t), \tilde{I}_v(t)$ şeklinde olsun. Dolayısıyla bu çözümlerin her biri denklemleri sağlamak zorunda olduğundan

$$\begin{aligned}\tilde{S}(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} A_1(t, \tilde{S}(t)) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t A_1(y, \tilde{S}(y)) dy, \\ \tilde{X}(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} A_2(t, \tilde{X}(t)) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t A_2(y, \tilde{X}(y)) dy, \\ \tilde{I}(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} A_3(t, \tilde{I}(t)) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t A_3(y, \tilde{I}(y)) dy, \\ \tilde{X}_v(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} A_4(t, \tilde{X}_v(t)) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t A_4(y, \tilde{X}_v(y)) dy, \\ \tilde{I}_v(t) &= \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} A_5(t, \tilde{I}_v(t)) + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t A_5(y, \tilde{I}_v(y)) dy.\end{aligned}$$

eşitlekleri yazılabilir. $S(t)$ ve $\tilde{S}(t)$ çözümlerinin farklarının normu alınırsa;

$$\begin{aligned}\|S(t) - \tilde{S}(t)\| &\leq \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \|A_1(t, S(t)) - A_1(t, \tilde{S}(t))\| \\ &\quad + \frac{2\xi}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \int_0^t \|A_1(y, S(y)) - A_1(y, \tilde{S}(y))\| dy \\ &\leq \frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \gamma_1 \|S - \tilde{S}\| + \frac{2\xi\gamma_1}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \|S - \tilde{S}\|.\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

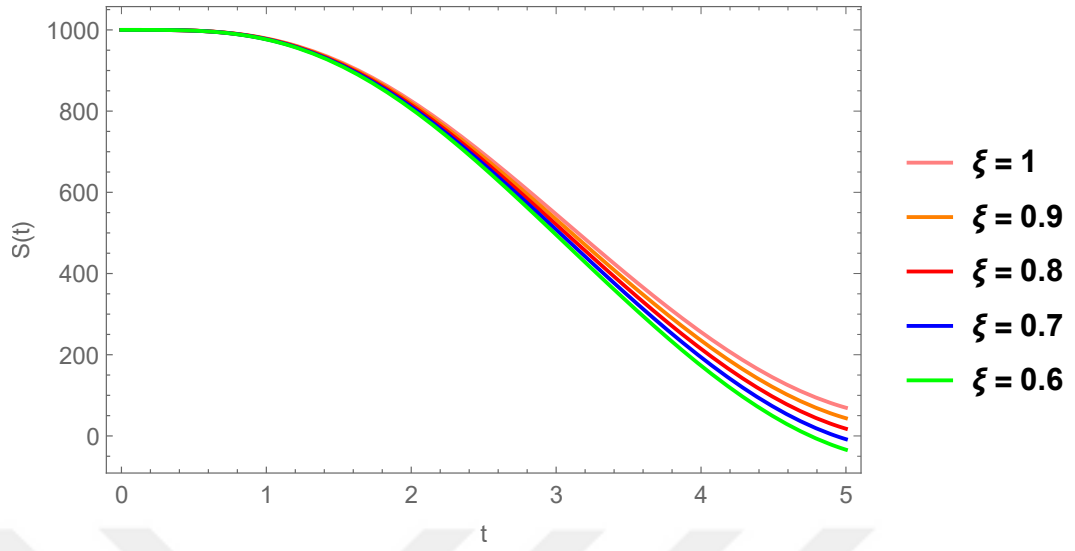
$$\left(\frac{2(1-\xi)}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} \gamma_1 + \frac{2\xi\gamma_1}{2M(\xi) - \xi M(\xi)} - 1 \right) \|S - \tilde{S}\| \geq 0. \quad (4.12)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Bu eşitsizlik ancak ve ancak $\|S - \tilde{S}\| = 0$ olmasıyla mümkün olur. O halde teoremdeki koşul S fonksiyonu için sağlanmış olur. Eğer aynı tekniği diğer fonksiyonlar için uygularsak $X(t) = \tilde{X}(t), I(t) = \tilde{I}(t), X_v(t) = \tilde{X}_v(t), I_v(t) = \tilde{I}_v(t)$ eşitlikleri elde edilerek ispat tamamlanır. Dang humması matematiksel modelinin yalnız bir çözümü vardır.

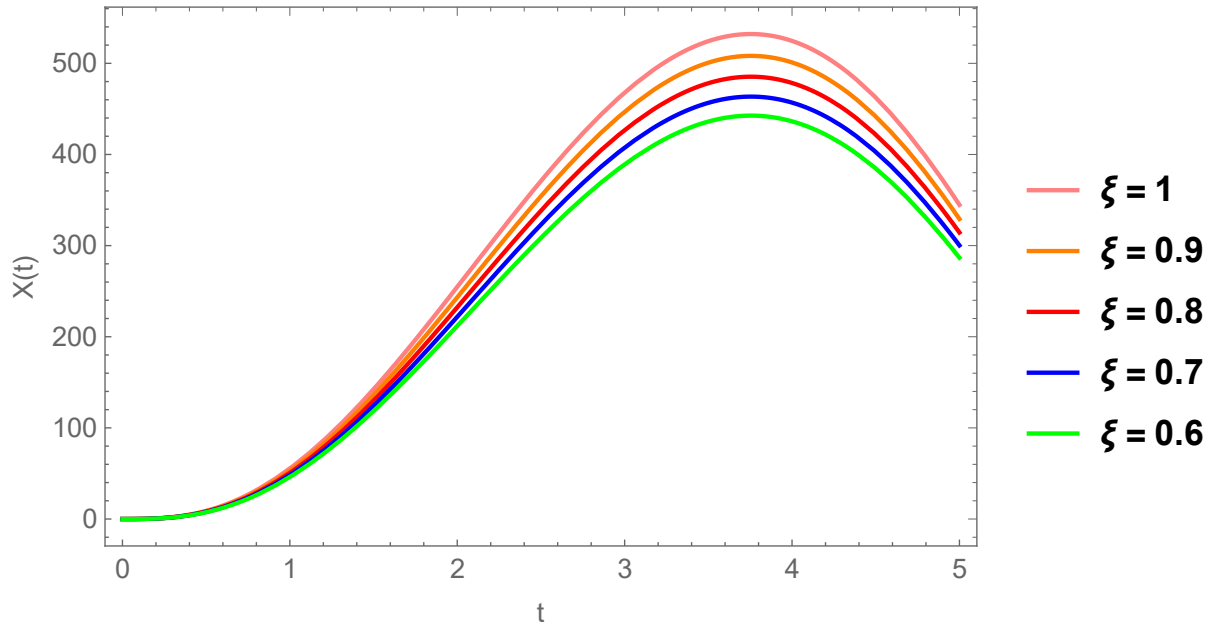
4.1.3. Dang Humması Modelinin Nümerik Çözümü

Bu bölümde Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörüne genişletilmiş olan Dang Humması matematiksel modelindeki her bir fonksiyonun farklı mertebeden kesirli türev değerleri için grafikler gösterilerek yorumlanmıştır.

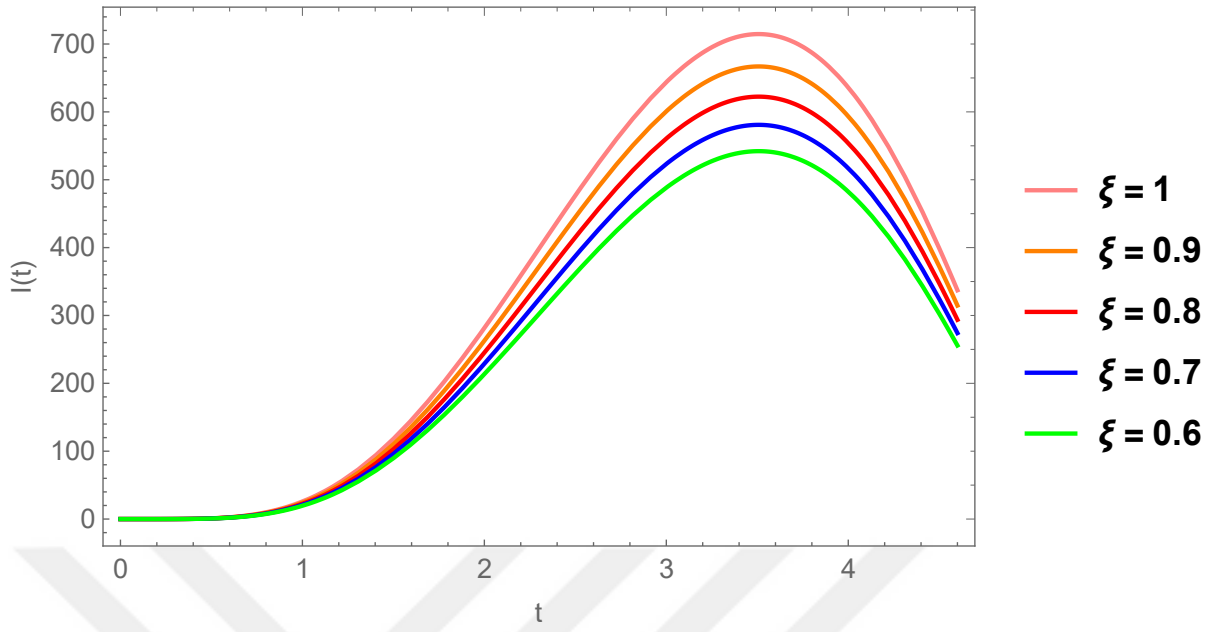
Şekil (4.1) de popülasyon değeri 1000 alınarak farklı mertebeden türev değerleri için S duyarlı yani enfeksiyona karşı savunmasız olan insan popülasyonundaki değişim izlenmiştir. Zamanla duyarlı insan popülasyonunun azaldığı gözlenmiştir. Şekil (4.2) de farklı mertebeden türev değerleri için X maruz kalan yani enfekte olmuş ancak semptom göstermeyen veya başkalarına bulaştırmayan insan popülasyonundaki değişim izlenmiştir. Hastalığa maruz kalan sayısının ani bir şekilde hızla yükselip maksimum değere ulaşarak pik yaptıktan sonra düşüşe geçtiği gözlenmiştir. Şekil (4.3) te farklı mertebeden türev değerleri için I bulaşıcı yani enfekte olup başkalarına bulaştırmaya başlayan insan popülasyonundaki değişim izlenmiştir. Bir süre bu popülasyonun yükselmeye devam edip sonrasında azaldığı gözlenmiştir. Şekil (4.4) te farklı mertebeden türev değerleri için X_v maruz kalan yani enfekte olmuş ancak semptom göstermeyen veya başkalarına bulaştırmayan vektör (sivrisinek) popülasyonundaki değişim izlenmiştir. Bir süre bu popülasyon yükselmeye devam edip sonrasında popülasyonun azaldığı gözlenmiştir. Şekil (4.5) te farklı mertebeden türev değerleri için I_v bulaşıcı yani enfekte olup başkalarına bulaştırmaya başlayan vektör (sivrisinek) popülasyonundaki değişim izlenmiştir. Bir süre bu popülasyon yükselmeye devam edip sonrasında azaldığı ancak bu azalmanın maruz kalan vektör popülasyonu kadar hızlı ve büyük olmadığı gözlenmiştir.



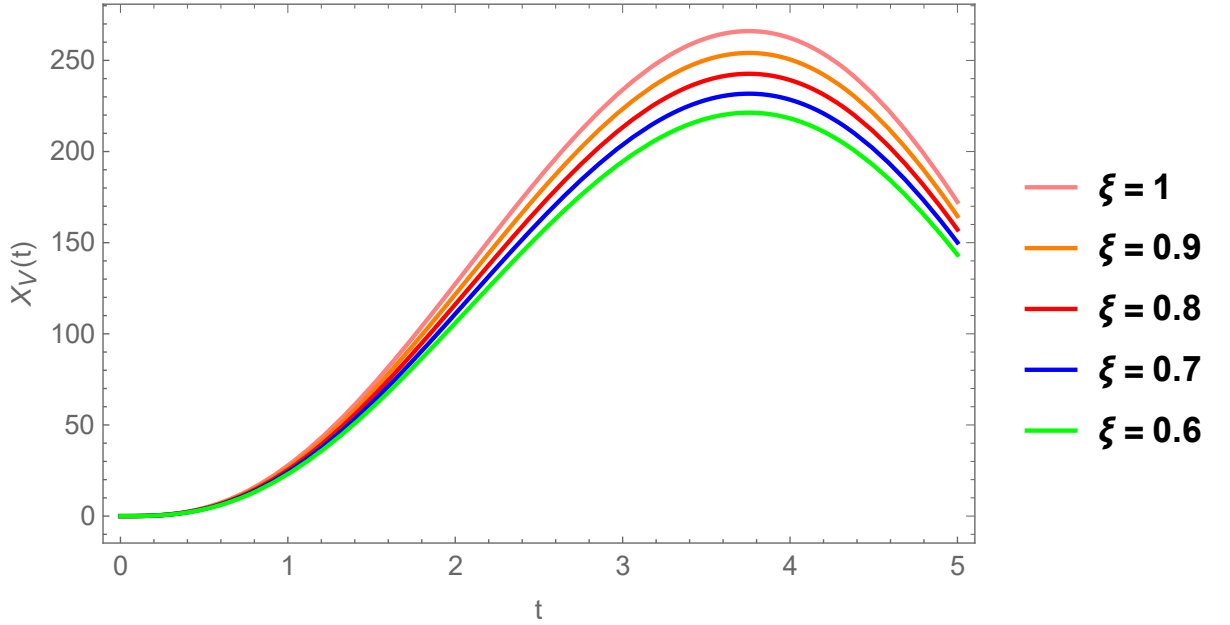
Şekil 4.1. S fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği



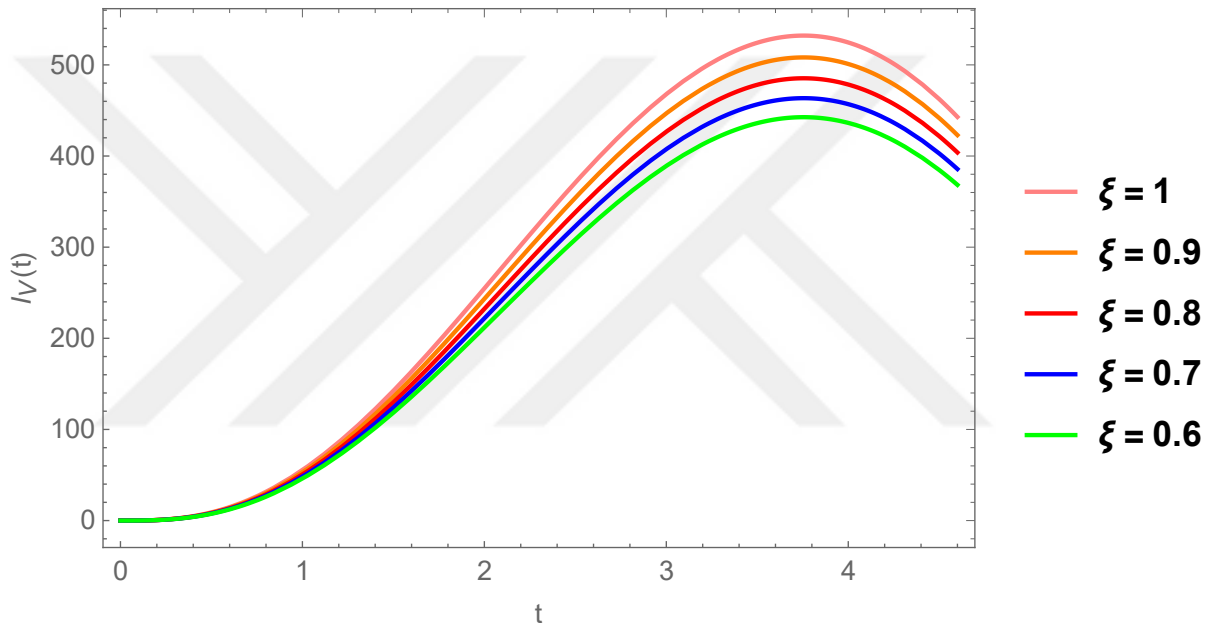
Şekil 4.2. X fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği



Şekil 4.3. I fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği



Şekil 4.4. X_V fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği



Şekil 4.5. I_V fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği

5. SONUÇ

Bu çalışmada Dang Humması hastalığına ait matematiksel bir model Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü yardımıyla genişletilerek daha genel ve kapsamlı hale getirildi. Elde edilen yeni modelin gerekli teoremler yardımıyla çözümünün var olduğu ve çözümün tek olduğu gösterildi. Farklı mertebe değerleri için modele ait fonksiyonların grafikleri çizildi. Bu grafiklere göre duyarlı insan popülasyonu azalırken bulaşıcı ve maruz kalan insan ve vektör popülasyonları artış göstermiştir. Uygulanan tedaviler, yapılan çalışmalar ile bir süre sonra bulaşıcı ve maruz kalan insan ve vektör popülasyonlarındaki sayı azalmıştır. Bulaşıcı vektör popülasyonundaki azalışın kuluçka süresinin göz önünde bulundurulması sebebiyle daha yavaş gerçekleştiği sonucuna ulaşılmıştır.

Buradan hareketle kesirli mertebeden türev ile bir durumun süreç içerisindeki değişimi incelendiğinde daha detaylı ve daha güvenilir sonuçlara ulaşıldığı anlaşılmıştır. Bilindiği üzere matematiksel modeller günlük yaşam problemlerinin çözümlerini bulmada yol gösterir. Kesirli mertebeden türevle bu modeller toplum için daha güvenilir ve faydalı olmuştur. Dang Humması modelinin Caputo-Fabrizio kesirli türev ve integral operatöründen farklı operatörlere uygulayarak burada elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmasının iyi bir çalışma olabileceğini düşünmekteyiz.

KAYNAKLAR

- Bagley, R. L. ve Torvik, P. J. (1986). On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 30(1):133–155.
- Caputo, M. (1966). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent. *Annals of Geophysics*, 19(4):383–393.
- Caputo, M. ve Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13.
- Caputo, M. ve Mainardi, F. (1971). A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 91(1):134–147.
- Dokuyucu, M. ve Celik, E. (2021). Analyzing a novel coronavirus model (covid-19) in the sense of caputo-fabrizio fractional operator. *Applied and Computational Mathematics*, 20(1).
- Dokuyucu, M. A. (2020). Caputo and atangana-baleanu-caputo fractional derivative applied to garden equation. *Turkish Journal of Science*, 5(1):1–7.
- Dokuyucu, M. A. ve Dutta, H. (2020). A fractional order model for ebola virus with the new caputo fractional derivative without singular kernel. *Chaos, Solitons & Fractals*, 134:109717.
- Dokuyucu, M. A. ve Dutta, H. (2021). Analysis of a fractional tumor-immune interaction model with exponential kernel. *Filomat*, 35(6):2023–2042.
- Dokuyucu Ali, M., Celik, E., Bulut, H., ve Mehmet Baskonus, H. (2018). Cancer treatment model with the caputo-fabrizio fractional derivative. *The European Physical Journal Plus*, 133:1–6.
- Guillemin, V. ve dig. (1980). Im gel fand and ge shilov, generalized functions. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 3(1, Part 1):758–762.
- Hewitt, E. ve Stromberg, K. (2013). *Real and abstract analysis: a modern treatment of the*

theory of functions of a real variable. Springer-Verlag.

Hilfer, R. ve others (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific Singapore.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., ve Trujillo, J. J. (2006). North-holland mathematics studies 204. *Theory and applications of fractional differential equations*.

Koca, I. (2018a). Analysis of rubella disease model with non-local and non-singular fractional derivatives. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, 8(1):17–25.

Koca, I. (2018b). Modelling the spread of ebola virus with atangana-baleanu fractional operators. *The European Physical Journal Plus*, 133:1–11.

Koca, İ., Akçetin, E., ve Yaprakdal, P. (2020). Numerical approximation for the spread of siqr model with caputo fractional order derivative. *Turkish Journal of Science*, 5(2):124–139.

Koca, I. ve Atangana, A. (2017). Solutions of cattaneo-hristov model of elastic heat diffusion with caputo-fabrizio and atangana-baleanu fractional derivatives. *Thermal Science*, 21(6 Part A):2299–2305.

Losada, J. ve Nieto, J. J. (2015). Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):87–92.

Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.

Pongsumpun, P. (2008). Mathematical model of dengue disease with the incubation period of virus. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 44:328–332.