



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**ÇİFT MERTEBEDEN DAĞILIMLI SAPMA ARGÜMENTLİ NEUTRAL
DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet HÜNERCİ

Danışman: Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR

TOKAT- 2024

JÜRİ KABUL VE ONAY

Mehmet HÜNERCİ tarafından hazırlanan “Çift Mertebeden Dağılımlı Sapma Argümentli Neutral Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı Üzerine” adlı tez çalışmasının savunma sınavı **18.01.2024** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmzası

Üye : Prof. Dr. Ercan TUNÇ
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
(Başkan)

.....

Üye : Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
(Danışman)

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN
Amasya Üniversitesi

.....

ONAY

...../...../.....

Doç. Dr. Yusuf TEMÜR
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Mehmet HÜNERCİ

18/01/2024

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇİFT MERTEBEDEN DAĞILIMLI SAPMA ARGÜMENTLİ NEUTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE

Mehmet HÜNERCİ

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR

Ocak 2024, 67 sayfa

Bu tez çalışmasında, ilk olarak fonksiyonel diferensiyel denklemlerin tanım ve sınıflandırılması yapılmış, bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılık ve salınımsızlık özellikleri üzerinde durulmuştur. Daha sonra dağılımlı sapma argümentleri içeren fonksiyonel diferensiyel denklemler tanımlanarak, bu denklemlerin çeşitli bilim dallarındaki uygulamalarına örnekler verilmiştir. Yüksek mertebeden (özellikle çift mertebeden) adi ve fonksiyonel diferensiyel denklemlerin salınımlılığı üzerine ortaya konulmuş olan bazı sonuçlar özet halinde sunulmuştur. Tez çalışmasının ana sonuçlar bölümünde, çift mertebeden dağılımlı sapma argümentli neutral bir diferensiyel denklem sınıfı göz önüne alınarak bu denklemin çözümlerinin salınım davranışı ile ilgili yeni karşılaştırma teoremleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların önemi ve uygulanabilirliği örneklerle açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Salınımlılık, çift mertebe, neutral diferensiyel denklemler, dağılımlı sapma argümenti.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON THE OSCILLATION OF EVEN ORDER NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRIBUTED DEVIATING ARGUMENTS

Mehmet HÜNERCİ

Tokat Gaziosmanpaşa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Orhan ÖZDEMİR
January, 2024, 67 pages

In this thesis study, firstly the definition and classification of functional differential equations are given, and the oscillatory and non-oscillatory properties of the solutions of these equations are dwelled on. Subsequently, functional differential equations containing distributed deviating arguments are defined and some examples of the applications of distributed deviating arguments in various branches of science are introduced. Then, some existing results in the literature on the oscillation of higher order (especially of even order) of ordinary and/or functional differential equations are presented. In the main results section of the thesis study, by considering a class of even order neutral differential equations with distributed deviating arguments, new comparison theorems have been obtained regarding the oscillatory behavior of the solutions of this equation. Significance and applicability of the results obtained are explained by illustrative examples.

Keywords: Oscillation, even order, neutral differential equations, distributed deviating arguments.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iv
SİMGE ve KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
2.1. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler: Tanım ve Sınıflandırılması	3
2.2. Yüksek Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı Üzerine	6
2.3. Dağılımlı Sapma Argümentli Diferensiyel Denklemler	10
2.4. Yüksek Mertebeden Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler için Salınım Sonuçları	14
3. Çift Mertebeden Neutral Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı	35
3.1. Giriş	35
3.2. Bazı Yardımcı Lemmalar	38
3.3. Temel Sonuçlar	41
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	50
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	59

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanmasındaki süreç boyunca bilgi ve tecrübesi, farklı bakış açısı ve bilimsel katkısı ile yol gösteren, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet HÜNERCİ

Ocak 2024

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümmesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0$	$[0, \infty)$ aralığı
γ	Gamma
λ	Lambda
τ	Tau
η	Eta
ϵ	Epsilon
ρ	Rho
ψ	Psi
ξ	Xi
φ	Varphi
π	Pi
ϕ	Phi
σ	Sigma
α	Alpha
β	Beta
θ	Theta
δ	Delta
χ	Chi
μ	Mu
κ	Kappa
ϑ	Vartheta
υ	Upsilon
ζ	Zeta
Ω	Omega

1. GİRİŞ

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümünde giriş başlığı altında özet olarak tezin yapısı ve işleyişinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde ilk olarak fonksiyonel (sapma argümentli) diferensiyel denklemlerin tanım ve sınıflandırılması üzerinde durulmuştur. Daha sonra yüksek mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemler teorisi üzerinde durulmuş, aşıkâr olmayan çözüm, salınlı ve salınlımsız çözümler tanımlanmış ve bu denklemlerde ortaya çıkan sapma argümentinin salınım etkisi örneklerle açıklanmıştır. Ayrıca yüksek (tek ve çift) mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınım davranışları örneklerle incelenmiştir. Ardından, dağılımlı sapma argümenti içeren diferensiyel denklemlerin çeşitli bilim dallarında ortaya çıkan problemlerine yer verilmiştir.

İkinci bölümün son kısmı, çift meretebeden fonksiyonel diferensiyel denklemler için literatürde mevcut olan ve çalışmamızda bize ışık tutan bazı önemli salınım sonuçlarına ayrılmıştır. Bu bölümde literatürde çalışılan bazı denklemler, bütün özellikleri ile tanıtılarak, denklemlerin hangi yöntemle incelendiği ayrıntılı olarak tanıtılmaya çalışılmış ve elde edilen salınım kriterleri örneklerle açıklanmıştır.

Üçüncü bölüm tez çalışmamızın ana sonuçlarına ayrılmıştır. Bu bölümde, $n \geq 2$ bir tam sayı, $\mathcal{P}$ bütün tek pozitif doğal sayıların oranlarının kümesi olmak üzere $\lambda \in \mathcal{P}$ ve $0 < \alpha < \beta < \infty$ olmak üzere

$$\mathcal{R}(t) = z(t) + r_1(t)z(\xi_1(t)) + r_2(t)z(\xi_2(t)), \quad (\text{NT})$$

formunda hem gecikmeli hem de ileri tipten sapma argümentleri ihtiva eden bir neutral terim ile tanımlı, çift mertebeden dağılımlı sapma argümentli

$$\left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t) \right)' + \int_{\alpha}^{\beta} h(t, u)z^{\lambda}(\chi(t, u))du = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (\text{EQ})$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınmıştır. (EQ) denkleminde görülen bütün fonksiyonların sağladığı özellikler maddeler halinde verilmiş ve bu denklemin bütün çözümlerinin salınlı olmasını garanti eden yeter şartlar (salınım teoremleri) ispatları ile birlikte verilmiştir.

Sonuç bölümünde ise inşa edilen yeni salınım kriterlerinin önemine değinilmiş ve uyguladığımız yöntemin kullanılabileceğı farklı sınıftan denklem türlerine örnekler verilip, açık problemler belirtilerek tez çalışması tamamlanmıştır.



2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilk olarak fonksiyonel diferensiyel denklemler tanıtılarak bu denklemlerin sınıflandırılması yapılacaktır. Daha sonra yüksek mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemlerin genel teorisi üzerine ortaya konulan temel salınım tanımları ve salınım sonuçları üzerinde durulacak, salınım teorisinde adi ve fonksiyonel diferensiyel denklemlerin ortaya çıkardığı problemler karşılaştırılarak örneklerle açıklanacaktır. Ardından dağılımlı sapma argümentleri içeren fonksiyonel diferensiyel denklemler tanımlanarak, çeşitli bilim dallarında matematiksel model olarak dağılımlı sapma argümentlerinin kullanıldığı uygulamalara bazı örnekler verilecektir. Son olarak, yüksek mertebeden (özellikle çift mertebeden) adi ve fonksiyonel diferensiyel denklemlerin salınımlılığı üzerine ortaya konulmuş olan bazı sonuçlar özet halinde sunulacaktır.

2.1. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler: Tanım ve Sınıflandırılması

Pek çok uygulamada, ele alınan sistemin gelecekteki durumunun geçmiş durumlarından bağımsız olarak yalnızca mevcut durumuyla belirlendiği varsayılır. Ayrıca ele alınan sistemin mevcut durumun ve bu durumdaki değişim oranını içeren bir denklemle yönetildiği, bunun için akla ilk olarak adi (ordinary) diferensiyel denklemler ya da kısmi (partial) diferensiyel denklemler gelmektedir. Ne var ki daha dikkatli bir incelemede sistemin durumunun geçmişten bağımsız ve sadece mevcut durumuyla belirlendiğini düşünmek, gerçek duruma sadece bir yaklaşım olduğu ve daha gerçekçi bir modelin sistemin geçmiş durumunu (en azından bir kısmını) da içermesi gerektiği ortaya çıkar. Ayrıca, bazı problemlerde sistemin geçmişle bağının olmaması anlamsızdır ve geçmişin dinamik yapısı da iyi bir şekilde bilinmeli ve kullanılmalıdır. Bu durum bir süredir bilinmesine rağmen bu şekildeki sistemlerin teorisi kapsamlı olarak son yıllarda gelişmiştir. Yani, şuan ki zamana değil de, geçmiş ya da gelecek zamana da bağlı olan sistemler, adi diferensiyel sistemler yerine fonksiyonel diferensiyel sistemler ile daha iyi temsil edilmektedir (Hale ve Verduyn Lunel, 1993).

Tanım 2.1.1. Eğer bir diferensiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri, bağımsız değişkenin (argüment) farklı değerlerine bağlı olarak ortaya çıkıyorsa bu tür denklemlere fonksiyonel diferensiyel denklemler (functional differential equations) veya sapma argümentli diferensiyel denklemler (differential equations with deviating arguments) adı verilir (Zafer, 1992).

Doğa bilimlerinde ortaya çıkan problemlere matematiksel model olarak bir adi ya da kısmi diferensiyel denklem karşılık gelir ve uygulamalarda ortaya çıkan bir çok sistemin matematik modeli oluşturulurken, sistemin gelecekteki davranışının geçmişten bağımsız olarak, bağımsız değişkenin tek bir değerine bağlı biçimde ortaya çıktığı varsayılır. Buna karşılık, daha rafine bir analiz yapılsa, bu fikrin gerçek duruma sadece bir ilk yaklaşım olduğu ve bir sisteme karşılık gelecek modelin daha gerçekçi olması için, geçmiş hafızayı da (en azından belirli bir kısmını) içermesinin gerekli olduğu ortaya çıkar. Üstelik bazı problemlere karşılık gelen sistemlerin geçmişle bağının olmadığını düşünmek modeli anlamsız hale getirir. Bu yüzden de, sapma argümentli diferensiyel denklemlerin teorik olarak incelenmesi kaçınılmazdır. Diferensiyel denklemlerde sapma argümentlerinin bu özellikleri uzun süredir biliniyor olmasına rağmen, ilgili teorinin ayrıntılı olarak geliştirilmesi son yıllarda gerçekleşmiştir.

Tanım 2.1.2. Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı ve en yüksek mertebeden türevde görülen bu argüment, denklemde görülen diğer tüm argümentlerden daha küçük değilse, bu denklemlere gecikmeli (delay, retarded) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992). Örnek olarak,

$$z''(t) = \sqrt{t}z'(t-3) + (1-t^3)z\left(t - \frac{1}{e}\right) - 1$$

ve

$$e^{2t} \ln 3t = z'''(3t) - (1+t^2)z''(2t-5) - (2-t^3)z\left(t - \frac{1}{\pi}\right)$$

denklemleri $t > 0$ için birer gecikmeli diferensiyel denklemdir.

Tanım 2.1.3. Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı ve en yüksek mertebeden türevde görülen bu argüment, denklemde görülen diğer tüm argümentlerden daha büyük değilse, bu tür denklemlere ileri tipten (advanced) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$z''(t) - 16z(3t) = 0$$

ve

$$z''(t) + \sqrt{2}z'(t) + (t - 3)z(t + \sqrt{t}) = 0$$

denklemleri $t > 0$ için birer ileri tipten diferensiyel denklemdir.

Tanım 2.1.4. Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı ise ve denklem, en yüksek mertebeden türevde görülen bu argümentten daha küçük ve daha büyük argümentler içeriyorsa, bu tip denklemlere karma tipten (mixed) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$z'(t) = (\sin t)z(t + 2e) + 3z(t - \pi)$$

ve

$$z''(t) = e^t z'(t + \sqrt{3}) + (1 - t)z(t - 7)$$

denklemleri $t > 0$ için birer karma diferensiyel denklemdir.

Tanım 2.1.5. Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, hem sapma argümentine bağlı hem de sapma argümentine bağlı olmadan ortaya çıkıyorsa, bu tür denklemlere nötral veya neutral diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$z''(t) + e^t z''\left(\frac{t}{2}\right) + e^t z''(2t) + z\left(\frac{t}{3}\right) = \sin t$$

ve

$$z''(t) + \frac{1}{2}z''(t + \pi) - \frac{1}{4}z(t - \pi) = 0$$

denklemleri $t > 0$ için birer neutral diferensiyel denklemdir.

2.2. Yüksek Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı Üzerine

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ gerçekte sayılar kümesini, $\mathbb{R}_0 = [0, \infty)$ aralığını temsil etsin. $F : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarımızı göz önüne alalım. $g, \tau : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ olduğunu kabul edelim. $\delta = \pm 1$ olmak üzere, n 'inci mertebeden

$$z^n(t) + \delta F\left(t, z(t), z[g(t)], z'(t), \dots, z^{(n-1)}(t), z^{(n)}[\tau(t)]\right) = 0 \quad (2.2.1)$$

fonksiyonel diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Tanım 2.2.1. $t \in [t_z, \infty) \subset \mathbb{R}_0$ olmak üzere $[t_z, \infty)$ aralığı üzerinde n kez türevlenebilen ve (2.2.1) denklemini sağlayan bir $z(t)$ fonksiyonuna (2.2.1) denkleminin çözümü denir. Burada $t_z \geq 0$ sayısı $z(t)$ özel çözümüne bağlı bir değerdir (Agarwal ve ark., 2000).

Tanım 2.2.2. $z(t)$ fonksiyonu, (2.2.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer, en az bir $t \in [t_z, \infty)$ için $z(t) \neq 0$ oluyorsa bu çözüme aşikar olmayan (sıfır olmayan) çözüm denir.

(2.2.1) diferensiyel denkleminin tüm çözümlerinin kümesini $\mathcal{S}$ ile gösterelim.

Tanım 2.2.3. Bir $z \in \mathcal{S}$ çözümünün $[t_z, \infty)$ aralığı üzerinde sıfırların kümesi üstten sınırlı değilse (2.2.1) diferensiyel denkleminin bu çözümüne salınımlı çözüm denir. Yani $z(t)$ salınımlı bir çözüm ise nihai olarak pozitif (eventually positive) ya da nihai negatif (eventually negative) bir çözüm değildir (Agarwal ve ark., 2000).

Tanım 2.2.4. Aşık olmayan bir $z(t)$ çözümü $[t_z, \infty)$ aralığında salınım yapan bir çözüm değilse, yani her $t \geq t_1$ için $z(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_z, \infty)$ sayısı mevcutsa, o halde bu çözüme salınımsız (salınım yapmayan) çözüm denir. Yani salınım yapmayan bir çözüm, nihai olarak pozitif (eventually positive) ya da nihai negatif (eventually negative) bir çözümdür (Agarwal ve ark., 2004).

Tanım 2.2.5. Eğer $z \in \mathcal{S}$ fonksiyonlarının (çözümlerin) tümü salınımlı ise o zaman (2.2.1) diferensiyel denklemin salınımlıdır denir (Agarwal ve ark., 2000).

Örnek 2.2.6.

$$z^{(4)}(t) + t^{-4} \ln t z^{1/3} \left(\frac{t}{2} \right) z^{2/3} \left(\frac{t}{3} \right) = 0 \quad (2.2.2)$$

dördüncü mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.2.2) denklemini (Ladde ve ark., 1987, Teorem 5.2.2)'nin koşullarını sağladığından (2.2.2) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır. Dolayısıyla (2.2.2) diferensiyel denklemini salınımlı bir denklemdir (Ladde ve ark., 1987, syf. 202).

Örnek 2.2.7.

$$z^{(4)}(t) = 8z(t - \pi) + 8z(t + \pi) \quad (2.2.3)$$

dördüncü mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.2.3) denklemini (Ladde ve ark., 1987, Teorem 5.3.7)'nin koşullarını sağladığından (2.2.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Dolayısıyla (2.2.3) diferensiyel denklemini salınımlı bir denklemdir. $z(t) = \sin 2t$ fonksiyonunun (2.2.3) denkleminin salınımlı bir çözümü olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (Ladde ve ark., 1987, syf. 207).

Örnek 2.2.8. $t \geq 0$ için

$$(z(t) + z(t - \pi) + 4z(t + 2\pi))^{(4)} + 2z(t - 3\pi) + 2z(t + \pi) = 0 \quad (2.2.4)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Denklem (Thandapani ve ark., 2014a, Teorem 3.2)'nin bütün koşullarını sağlar. Bundan dolayı (2.2.4) denkleminin her çözümü salınımlıdır ve $z(t) = \sin t$ bu denklemin salınımlı çözümlerinden bir tanesidir. Dolayısıyla (2.2.4) denklemi salınımlı bir denklemdir (Thandapani ve ark., 2014a).

Örnek 2.2.9. $t \geq 2$ için

$$\left(e^t u'''(t)\right)' + \left(\frac{e^{t-1/2+e^{t-1}}}{16}\right) z(t-2) + \frac{e^t}{16} z(t+1) = 0 \quad (2.2.5)$$

dördüncü mertebeden diferensiyel denklemini $u(t) = z(t) + z(t-1) + z(t+1)$ neutral terimi ile birlikte göz önüne alalım. $z(t) = e^{-t/2}$ çözümü (2.2.5) denkleminin salınımsız bir çözümüdür, bu yüzden de (2.2.5) diferensiyel denklemi salınımlı bir denklem değildir (Thandapani ve ark., 2014a, Örnek 4.4).

Örnek 2.2.10. $t \geq 0$ için

$$(2(z(t) + z(t-\pi) + z(t+\pi)))''' + z(t-2\pi) + z(t+\pi) = 0 \quad (2.2.6)$$

dördüncü mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklem (Thandapani ve ark., 2014a, Teorem 3.4)'ün bütün koşullarını sağlar. Dolayısıyla (2.2.6) denkleminin her çözümü salınımlıdır ve $z(t) = \sin t$ bu denklemin salınımlı çözümlerinden bir tanesidir. Bundan dolayı (2.2.6) denklemi salınımlı bir denklemdir (Thandapani ve ark., 2014a).

Örnek 2.2.11. $t \geq 0$ için

$$\left(\frac{1}{e^{2t}}(z(t) + z(t-1) + z(t+1))'''\right)' + \frac{1}{e^{4t}}(e^6 + e^7)z^3(t-2) + \frac{1}{e^{4t+10}}z^3(t+3) = 0 \quad (2.2.7)$$

dördüncü mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $z(t) = e^t$ fonksiyonu bu denklemin salınımsız bir çözümüdür. Dolayısıyla (2.2.7) denklemi salınımlı bir denklem değildir (Thandapani ve ark., 2014a).

Örnek 2.2.12. $t \geq 0$ için

$$\left(\frac{1}{e^{2t}}(z(t) + \frac{1}{3}z(t-1) + \frac{1}{3}z(t+1))''' \right)' + \frac{1}{e^{2t}} \left(e^2 + \frac{1}{3}e \right) z(t-2) + \frac{1}{3e^{2t}} z(t+1) = 0 \quad (2.2.8)$$

dördüncü mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $z(t) = e^t$ fonksiyonu bu denklemin salınımsız bir çözümüdür. Dolayısıyla (2.2.8) denklemini salınımlı bir denkleme dönüştürür (Thandapani ve ark., 2014a).

Örnek 2.2.13. $t \geq 0$ için

$$\left((z(t) + \frac{1}{4}z(t-\pi) - \frac{1}{4}z(t+2\pi))^3 \right)^{(5)} = \frac{1}{4}z^3 \left(t - \frac{3\pi}{2} \right) + \frac{1}{8}z^3 \left(t + \frac{3\pi}{2} \right) \quad (2.2.9)$$

beşinci mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.2.9) diferensiyel denklemini (Thandapani ve ark., 2014b, Sonuç 3.2)'nin bütün koşullarını sağlar. Bu nedenle (2.2.9) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Dolayısıyla (2.2.9) denklemini salınımlı bir denklemdir. Gerçekten $z(t) = \sin^{1/3}t$ çözümü bu denklemin salınımlı bir çözümüdür (Thandapani ve ark., 2014b).

Örnek 2.2.14. $t \geq 0$ için

$$\left((z(t) - \frac{e^{\pi/3}}{9}z(t-\pi) + \frac{1}{e^{\pi/3}}z(t+\pi))^3 \right)^{(5)} = \frac{4e^{5\pi/2}}{729}z^3 \left(t - \frac{5\pi}{2} \right) + \frac{4}{729e^{3\pi}}z^3(t+3\pi) \quad (2.2.10)$$

beşinci mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.2.10) denklemini (Thandapani ve ark., 2014b, Sonuç 3.4)'ün bütün koşullarını sağlar. Bu nedenle (2.2.10) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır. Dolayısıyla (2.2.10) denklemini salınımlı bir denklemdir. Gerçekten $z(t) = e^{t/3}\sin^{1/3}t$ çözümü denklemin salınımlı bir çözümüdür (Thandapani ve ark., 2014b).

Örnek 2.2.15. $t \geq 0$ için

$$(z(t) + z(t-\pi) + z(t+\pi))^{(5)} = \frac{5}{t-\pi}z(t-\pi) + \frac{t}{t+3\pi/2}z(t+3\pi/2) \quad (2.2.11)$$

beşinci mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.2.11) denklemini (Thandapani ve ark., 2014b, Sonuç 3.6)'nın bütün koşullarını sağlar. Bu nedenle

(2.2.11) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır. Dolayısıyla (2.2.11) denklemi salınımlı bir denklemdir. Gerçekten $z(t) = tsint$ çözümü denklemin salınımlı bir çözümüdür (Thandapani ve ark., 2014b).

Örnek 2.2.16. $t \geq 0$ için

$$\left(z(t) + \frac{1}{2}z(t - \pi/2) - \frac{1}{2}z(t + 2\pi)\right)^{(7)} = \frac{1}{2}z(t - 7\pi/2) + \frac{1}{2}z(t + 4\pi) \quad (2.2.12)$$

yedinci mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.2.12) denklemi (Thandapani ve ark., 2014b, Sonuç 3.2)'nin bütün koşullarını sağlar. Bu nedenle (2.2.12) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır. Gerçekten $z(t) = \sin t + \cos t$ çözümü denklemin salınımlı bir çözümüdür (Thandapani ve ark., 2014b).

Örnek 2.2.17. $t \geq 0$ için

$$\left((z(t) - \frac{e}{3}z(t - 1) + \frac{1}{e^2}z(t + 2))^3\right)^{(5)} = 1000e^9z^3(t - 3) + \frac{125}{e^9}z^3(t + 3) \quad (2.2.13)$$

beşinci mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $z(t) = e^t$ fonksiyonu bu denklemin salınımsız bir çözümüdür. Dolayısıyla (2.2.13) denklemi salınımlı bir denklem değildir (Thandapani ve ark., 2014b).

2.3. Dağılımlı Sapma Argümentli Diferensiyel Denklemler

Genellikle dağılımlı gecikmeli denklemlerin popülasyon dinamikleri ve genel olarak matematiksel biyoloji modelleri için daha gerçekçi bir tanım sağladığına inanılır. Örneğin, denklemden olgunlaşma gecikmesi varsa, olgunlaşma süresi genellikle sabit değildir, ancak beklenti değeri etrafında dağılımlıdır.

Tarihsel olarak, dağılımlı gecikmeye sahip denklemler, konsantre (yoğun) gecikmelere sahip modeller ortaya çıkmadan önce bile incelenmiştir. Örneğin (Volterra, 1926) çalışmasındaki,

$$N'(t) = rN(t) \int_0^\infty k(\tau) \left[1 - \frac{N(t - \tau)}{K}\right] d\tau$$

dağılımlı gecikmeli lojistik denklemini (Hutchinson, 1948) yılındaki çalışmasında yer alan,

$$N'(t) = rN(t) \left[1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right]$$

yoğun gecikmeli lojistik denkleminde önce tanıtmıştır (Berezansky ve Braverman, 2008).

Bildiğimiz kadarıyla, dağılımlı gecikmeli denklemlerin ilk sistematik çalışması 1972 yılındaki Myshkis'in monografisinde ele alınmıştır (Myshkis, 1972), elde edilen sonuçlar ise 1993 yılında yayımlanan Kuang'ın kitabında özetlenmiştir (Kuang, 1993). Günümüzde ise, dağılımlı gecikmeli denklemler uygulamalı bilimlerde yoğun bir şekilde çalışılmaktadır.

Dağılımlı gecikmeli denklemlerin matematiksel biyoloji modelleri ve konsantre (yoğun) gecikmelere sahip modellerin bazıları Nicholson (yoğunluğa bağlı popülasyon düzenlemesi, 1933), Metz ve Diekmann (yapılandırılmış popülasyon modeli, 1986), Smith (gecikme etkisinin sonlu bir aralık boyunca eşit olarak dağılması, 1992), Fargue (indirgenebilir sistemler-lineer zincir hilesi, 1973), May (kendi kendini düzenleyen mekanizmalar, 1974), Kolmanovskii ve Nosov (integral kararlılık kriterinin bilgisayar hesaplamalarına uygulanması, 1986), Walther (dinamik sistemlerin matematiksel teorisi, 1975), Brauer ve Castillo-Chavez (nüfus biyolojisi ve epidemiyolojisinde matematiksel modeller, 2001), Volterra (1931), May (1973), Wangersky ve Cunningham (1957), Cushing (1979) (av ve avcı sistemleri üzerine çalışmalar), Heiden ve Mackey (üretim ve yıkımda zaman gecikmeli fizyolojik modellerin matematiksel analizi, 1982) gibi pek çok araştırmacı tarafından dikkate alındı (Kuang, 1993). Dağılımlı gecikmeli denklemlerin sistematik çalışmasıyla ilgili nispeten az sayıda sonuç (çalışma) vardır ve elde edilen sonuçların çoğu zamana bağlı modeller için geçerli değildir ve özel bir durum olarak konsantre gecikmeli denklemleri içermez (Berezansky ve Braverman, 2008).

Dağılımlı sapma argümentli denklemler yardımıyla oluşturulan modeller, genellikle mevsimsel değişiklikler gibi faktörlerden etkilenen problemlerin incelenmesinde kullanılmaktadır. İkinci ya da daha yüksek mertebeden neutral diferensiyel

denklemlerin çözümlerinin salınım özelliklerinin incelenmesi, hem teorik hem de pratik açıdan ilgi çekicidir. Dağılımlı sapma argümentine sahip neutral denklem sınıflarının salınım ve asimptotik davranışı hakkında çalışmalar son yıllarda yoğunluk kazanmıştır. (Wang, 2004) ve (Wang ve ark., 2005) çalışmalarında $\tau > 0$ bir sabit ve n bir çift pozitif tam sayı olmak üzere, sırasıyla

$$[a(t)(x(t) + c(t)x(t - \tau))]' + \int_a^b p(t, \xi)x[g(t, \xi)]d\sigma(\xi) = 0, \quad t \geq t_0$$

ve

$$[x(t) + c(t)x(t - \tau)]^{(n)} + \int_a^b p(t, \xi)x[g(t, \xi)]d\sigma(\xi) = 0, \quad t \geq t_0$$

neutral diferensiyel denklemleri incelenmiştir.

Gecikme davranışı farmakokinetikte (PK) ve farmakodinamik (PD) çalışmalarının her yerinde bulunur. Örneğin, ekstravasküler uygulamadan sonra ilacın depo bölgesinden merkezi bölmeye taşınması zaman aldığından, PK absorpsiyon fazı sırasında gecikmeler ortaya çıkabilir. PK ve PD çalışmalarındaki gecikmiş sonuçları tanımlamak için geçiş bölmesi modelleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Aşağıda gösterilen diferensiyel denklem sistemi geçiş bölmesi modelini örneklendirmektedir:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \kappa(S(t) - x_1(t)), \\ x_i'(t) &= \kappa(x_{i-1}(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x_i(0) &= x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Bu sistemde $(x_i'(t) = \frac{dx_i}{dt})$ ifadesi t zamanına göre farklılaşmayı, n bölme sayısını, κ bölmeler arasındaki geçiş oranını, S olması gereken sinyali, $x_i(0)$ değerleri ise sabitleri gösterir. Bu sistem; örneğin, merkezi bölmeyi besleyen giriş işlevi olan son bölme x_n ile PK absorpsiyon gecikmesini modellemek için ve ayrıca x_n gecikmiş ilaç etkisini göstermek üzere, gecikmiş anti-kanser ilaç tepkisini modellemek için kullanılmıştır. Geçiş bölmesi modeli yaklaşımı çeşitli verileri oldukça iyi yakalayabilir, fakat birtakım dezavantajları vardır. Bu dezavantajlardan bariz olanı bölme sayısı için uygun bir değeri manuel olarak bulmayı gerektirmesidir. Bu nedenle, analiz

yapmak imkansız değilsede zaman alıcı ve zordur. Bu durum, özellikle bölme sayısının fazla olduğu durumlarda bireyler arasında farklılık gösterebilir. Ek olarak, bu yaklaşımın verilere uyması için çok sayıda diferensiyel denklem gerektirebilir ve dolayısıyla yaklaşım elverişsiz hale gelebilir. Ayrıca bu yaklaşım, oral uygulamadan sonra çift/çoklu tepe fenomeni (olgusu) gibi bazı karmaşık özellikleri yeterince tanımlayamayabilir.

Bu dezavantajları en aza indirmek, gecikmeli sonuçları modellemek için dağılımlı bir gecikme yaklaşımının kullanılması daha pratik bir öneme sahiptir. Açıkça gecikme sürelerini içeren diferensiyel denklemler, gecikmeli diferansiyel denklemlerdir. Adi ve gecikmeli diferensiyel denklemler arasındaki fark, adi diferensiyel denklemler tarafından yönetilen sistemin gelecekteki durumunu tamamen bugünkü değeri ile belirlerken, gecikme argümentine sahip denklemler sadece bugünkü değeri değil, aynı zamanda geçmişteki durumu da belirlemektedir. Böylece, gecikmeli denklemler ile çok daha zengin ve karmaşık dinamikler üretilebilir. Gecikmeli denklemler, mühendislik ve biyobilimlerde, bir sinyalin kablo boyunca yayılması gibi gecikme süreçlerinin modellenmesinde, malzemelerin viskoelastik özelliklerinin modellenmesinde, inkübasyon viral enfeksiyonlar için dönemlerin modellenmesinde, gebelik süresi ve beyaz ve kırmızı kan hücrelerinin olgunlaşma süresinin modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tür denklemlerin mühendislikteki geri besleme kontrol teorisindeki uygulamaları (1940'larda), gemi stabilizasyonu ve otomatik yönlendirme çalışması gibi sistemlerde, model durumu mevcut gözlem temel alınarak ayarlanır. Ancak bu bilgi sensöre iletildiğinde daima zaman alır. Bu nedenle, gerçekte ayarlanan şey, mevcut değeri yerine geçmiş değerine dayanmaktadır. Bu gecikme süresi nedeniyle, hedefi kaçırmaması veya hedefi aşması muhtemeldir ve bu nedenle gerçek sistem salınımlı davranışa sahiptir. Mühendislik uygulamalarının amaçlarından biri de, istenen salınım türlerini (örneğin, sönümlü veya sürekli salınımlar) elde etmek için gecikme süresini ayarlamanın yollarını bulmaktır.

İnsan vücudunda birçok geri bildirim mekanizması vardır ve bunlar temel fizyolojik değişkenleri normal sınırlar içinde tutar. Dağılımlı gecikmeli diferensiyel denklemlerin

biyolojik uygulaması, Volterra'nın avcı ve av etkileşim dinamiklerini araştırdığı 1920'lere kadar uzansa da, bu yaklaşım 1970'lere kadar yaygın olarak benimsenmedi. Yakın zamanda ise, PK/PD literatüründe ilaç-hastalık etkileşimini modellemek için gecikme diferensiyel denklemleri ortaya çıkmıştır. Ancak, PK/PD modelleme sürecinde hala nadiren kullanılmaktadır (Hu ve ark., 2018).

2.4. Yüksek Mertebeden Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler için Salınım Sonuçları

Tez çalışmasının bu bölümünde, yüksek mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı üzerine ortaya konulan bazı önemli temel sonuçlar tanıtılacaktır.

Agarwal, Grace ve O'Regan, n bir çift doğal sayı, α pozitif bir sabit, $t \geq t_0$ için

- $g : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$;
- $F(t, x) : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve

$$\text{sgn } F(t, x) = \text{sgn } x;$$

- $x \neq 0$ için

$$F(t, x) \text{sgn } x \geq q(t)|x|^\beta \quad (2.4.1)$$

olacak şekilde bir $\beta > 0$ sabiti ve $q(t) \in [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır;

şartları altında, çift mertebeden

$$\left(\left| x^{(n-1)}(t) \right|^{\alpha-1} x^{(n-1)}(t) \right)' + F(t, x[g(t)]) = 0 \quad (2.4.2)$$

fonksiyonel diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınım davranışını inceleyerek aşağıdaki sonuçları elde etmiştir (Agarwal ve ark., 2001).

Teorem 2.4.1. Kabul edelim ki (2.4.1) sağlansın ve $\alpha = \beta$ olsun. Eğer,

$$\lambda = \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)^{\alpha+1} (2(n-1)!)^\alpha$$

olmak üzere, her $t \geq t_0$ için

$$\sigma(t) \leq \inf\{t, g(t)\}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty \quad \text{ve} \quad \sigma'(t) > 0 \quad (2.4.3)$$

ve $T \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^\infty \left[\rho(s)q(s) - \lambda\theta \frac{(\rho'(s))^{\alpha+1}}{(\rho(s)\sigma^{n-2}(s)\sigma'(s))^\alpha} \right] ds = \infty, \quad (2.4.4)$$

şartları sağlanacak şekilde $\sigma, \rho : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli türevlenebilir fonksiyonları ve $\theta > 1$ sabiti varsa, bu takdirde (2.4.2) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Teorem 2.4.1'de $n = 2$ alınırsa, $q : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, ikinci mertebeden yarı lineer

$$\left(|x'(t)|^{\alpha-1} x'(t) \right) + q(t) |x[g(t)]|^{\alpha-1} x[g(t)] = 0 \quad (2.4.5)$$

diferensiyel denklemi için aşağıdaki salınım kriteri elde edilir.

Sonuç 2.4.2. Kabul edelim ki (2.4.1) ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\rho(s)q(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\rho'(s))^{\alpha+1}}{(\rho(s)\sigma'(s))^\alpha} \right] ds = \infty \quad (2.4.6)$$

şartları sağlanacak şekilde $\sigma, \rho : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli türevlenebilir fonksiyonları varsa bu takdirde (2.4.5) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Bu teoremi aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 2.4.3. $\alpha > 0$ bir sabit ve $t > 0$ için $\rho(t) = t^\alpha$ olmak üzere

$$\left(|x'(t)|^{\alpha-1} x'(t) \right)' + \frac{1}{t^{\alpha+1}} |x(t)|^{\alpha-1} x(t) = 0 \quad (2.4.7)$$

ikinci mertebeden yarı lineer diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu durumda, $t \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} & \int_T^t \left[\rho(s)q(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\rho'(s))^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(s)} \right] ds \\ &= \int_T^t \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \right] \frac{1}{s} ds \\ &= \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \right] \ln \frac{t}{T} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç 2.4.2'nin bütün şartları sağlandığından (2.4.7) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Her bir $t \geq t_0$ için $g(t) \leq t$ ve $\gamma(t) = \sup\{s \geq t_0 : g(s) \leq t\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\gamma(t) \geq t$ ve $g \circ \gamma(t) = t$ olduğu açıktır ve aşağıdaki salınım sonucu elde edilir:

Teorem 2.4.4. Kabul edelim ki (2.4.1) sağlansın ve $\alpha = \beta$ olsun. Eğer,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha(n-1)} \int_{\gamma(t)}^{\infty} q(s) ds > ((n-1)!)^\alpha \quad (2.4.8)$$

ise, bu takdirde (2.4.2) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Eğer Teorem 2.4.4'te, $g(t) \geq t$ ve her $t \geq t_0$ için $g'(t) \geq 0$ alınırsa, aşağıdaki salınım kriteri elde edilir.

Teorem 2.4.5. Kabul edelim ki (2.4.1) sağlansın ve $\alpha = \beta$, $g(t) \geq t$ ve $t \geq t_0$ için $g'(t) \geq 0$ olsun. Eğer,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha(n-1)} \int_t^{\infty} q(s) ds > ((n-1)!)^\alpha \quad (2.4.9)$$

ise, bu takdirde (2.4.2) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Örnek 2.4.6. α ve c birer pozitif sabit olmak üzere

$$\left(|x^{(n-1)}(t)|^{\alpha-1} x^{(n-1)}(t) \right)' + ct^{\alpha-\alpha n-1} |x[g(t)]|^{\alpha-1} x[g(t)] = 0, \quad t > 0 \quad (2.4.10)$$

yarı lineer diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Verilen şartlar altında göz önüne alınan yarı lineer diferensiyel denklem için aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

- $g(t) = t/2$ alınır, $\gamma(t) = 2t$ bulunur ve bu durumda

$$c > 2^{\alpha-\alpha n}[\alpha(n-1)((n-1)!)^\alpha]$$

olarak seçilirse (2.4.10) denklemi Teorem 2.4.4'e göre salınımlı olur.

- $g(t) \geq t$ ve $g'(t) \geq 0$ alınır ve

$$c > \alpha(n-1)((n-1)!)^\alpha$$

olarak seçilirse (2.4.10) denklemi Teorem 2.4.5'e göre salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Şimdi aşağıdaki karşılaştırma teoremini verelim.

Teorem 2.4.7. Kabul edelim ki (2.4.1) sağlansın ve her $t \geq t_0$ için

$$\sigma(t) \leq \inf\{t, g(t)\}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty \quad \text{ve} \quad \sigma'(t) \geq 0 \quad (2.4.11)$$

olacak şekilde sürekli türevlenebilir bir $\sigma : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu var olsun. Eğer, $0 < \theta < 1$ olacak şekilde her θ sabiti için,

$$y'(t) + \left(\frac{\theta}{(n-1)!}\right)^\alpha \sigma^{\alpha(n-1)}(t) |y[\sigma(t)]|^{\beta/\alpha} \operatorname{sgn} y[\sigma(t)] = 0 \quad (2.4.12)$$

delay diferensiyel denkleminin her çözümü salınımlı ise bu takdirde (2.4.2) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Sonuç 2.4.8. Kabul edelim ki (2.4.1) ve (2.4.11) sağlansın. Eğer $\alpha = \beta$ olduğunda

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t \sigma^{\alpha(n-1)}(s) q(s) ds > \frac{((n-1)!)^\alpha}{e} \quad (2.4.13)$$

yada $0 < \beta/\alpha < 1$ olduğunda

$$\int_{\sigma(t)}^t \sigma^{\beta(n-1)}(s) q(s) ds = \infty \quad (2.4.14)$$

şartları sağlanıyorsa bu takdirde (2.4.2) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Teorem 2.4.9. Kabul edelim ki (2.4.1) sağlansın, $\alpha > 1$ ve $\beta > 1$ olsun ve her $t \geq t_0$ için

$$\rho'(t) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\rho'(t)}{\sigma^{n-2}(t)\sigma'(t)} \right)' \leq 0 \quad (2.4.15)$$

olacak ve (2.4.3) şartı sağlanacak şekilde sürekli türevlenebilir $\sigma, \rho : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları var olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \rho(s)q(s)ds = \infty \quad (2.4.16)$$

ise, bu takdirde (2.4.2) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Teorem 2.4.10. Kabul edelim ki Teorem 2.4.9'daki (2.4.15) şartı

$$\rho'(t) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \int_{t_0}^{\infty} \left| \left(\frac{\rho'(s)}{\sigma^{n-2}(s)\sigma'(s)} \right)' \right| ds < \infty \quad (2.4.17)$$

koşulu ile değiştirilirse bu takdirde (2.4.2) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Teorem 2.4.11. Kabul edelim ki (2.4.1) şartı sağlansın ve $\beta > \alpha$ olsun. Ayrıca (2.4.3) şartı sağlanacak şekilde sürekli türevlenebilir $\sigma : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu var olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \sigma^{n-2}(s)\sigma'(s) \left(\int_s^{\infty} q(u)du \right)^{\frac{1}{\alpha}} ds = \infty \quad (2.4.18)$$

ise, bu takdirde (2.4.2) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Şimdi, α bir sabit, her $t \geq t_0$ için $g(t), h(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $h(t) \leq t$, $h'(t) > 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ ve $F \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\left(|x^{(n-1)}(t)|^{\alpha-1} x^{(n-1)}(t) \right)' + F \left(t, x[g(t)], \frac{d}{dt} x[h(t)] \right) = 0 \quad (2.4.19)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Teorem 2.4.12. β ve μ pozitif birer sabit olmak üzere her $t \geq t_0$ ve $xy \neq 0$ için

$$F(t, x, y) \operatorname{sgn} x \geq q(t) |x|^\beta |y|^\mu \quad (2.4.20)$$

şartı sağlanacak şekilde $q : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli fonksiyonu var ve $h(t) \leq g(t) \leq t$ olsun. Eğer $\lambda = \beta + \mu \leq \alpha$ ve $H(t) = (h(t))^\beta (h'(t))^\lambda$ olmak üzere $0 < \theta_i < 1$ aralığındaki her θ_i , $i = 1, 2$ için

$$y'(t) + \left[\frac{\theta_1}{((n-2)!)^\lambda (n-1)^\beta} \right] (h(t))^{(n-2)\lambda} H(t) q(t) |y[h(t)]|^\frac{\lambda}{\alpha} \operatorname{sgn} y[h(t)] = 0 \quad (2.4.21)$$

ve

$$\begin{aligned} z'(t) + \left(\frac{\theta_2}{(2^{n-2}(n-2)!)^\lambda} \right) (t-h(t))^{(n-2)\lambda} H(t) q(t) \left| z \left[\frac{t+h(t)}{2} \right] \right|^\frac{\lambda}{\alpha} \\ \times \operatorname{sgn} z \left[\frac{t+h(t)}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

diferensiyel denklemleri salınımlı ise, bu takdirde (2.4.19) diferensiyel denklemini salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Sonuç 2.4.13. Kabul edelim ki (2.4.20) şartı sağlansın ve $t \geq t_0$ için $h(t) \leq g(t) \leq t$ olsun. Eğer,

(I_1) $\lambda = \beta + \mu = \alpha$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{h(t)}^t h^{(n-2)\alpha}(s) H(s) q(s) ds > \frac{(n-1)^\beta ((n-2)!)^\alpha}{e}$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{(t+h(t))/2}^t [s-h(s)]^{(n-2)\alpha} H(s) q(s) ds > \frac{(2^{n-2}(n-2)!)^\alpha}{e}$$

şartları,

(I_2) $\lambda < \alpha$ için

$$\int_{h(t)}^\infty h^{(n-2)\lambda}(s) H(s) q(s) ds = \infty$$

ve

$$\int_{(t+h(t))/2}^\infty [s-h(s)]^{(n-2)\lambda} H(s) q(s) ds = \infty$$

şartları sağlanırsa, bu takdirde (2.4.19) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Aşağıdaki teorem, $\beta \leq \alpha$ ve $\mu \leq \alpha$ olduğu durumda, (2.4.19) denkleminin salınımlılığı için yeter şartlar sunmaktadır.

Teorem 2.4.14. Kabul edelim ki (2.4.20) şartı sağlansın ve her $t \geq t_0$ için $g(t) \leq t$ ve $g'(t) \geq 0$ olsun. Eğer her θ_i , $i = 1, 2$ pozitif sabitleri için

$$y'(t) + \left[\frac{\theta_1}{((n-1)!)^\beta} \right] (h'(t))^\mu g^{(n-1)\beta}(t) q(t) |y[g(t)]|^{\beta/\alpha} \operatorname{sgn} y[g(t)] = 0 \quad (2.4.23)$$

ve

$$\begin{aligned} z'(t) + \frac{\theta_2}{(2^{n-2}(n-2)!)^\mu} (t-h(t))^{(n-2)\mu} (h'(t))^\mu q(t) \left| z \left[\frac{t+h(t)}{2} \right] \right|^{\mu/\alpha} \\ \times \operatorname{sgn} z \left[\frac{t+h(t)}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

diferensiyel denklemleri salınımlı ise bu takdirde (2.4.19) denklemi de salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Aşağıdaki teorem, keyfi β ve μ pozitif sabitleri için, (2.4.19) denkleminin salınımlı olmasını garanti eden yeter şartlar sunmaktadır.

Teorem 2.4.15. Kabul edelim ki (2.4.20) şartı sağlansın ve her $t \geq t_0$ için $g(t) \leq t$ ve $g'(t) \geq 0$ olsun. Eğer her θ_1, θ_2 pozitif sabitleri için

$$\left(|y^{(n-1)}(t)|^{\alpha-1} y^{(n-1)}(t) \right)' + \theta_1 (h'(t))^\mu q(t) |y[g(t)]|^\beta \operatorname{sgn} y[g(t)] = 0 \quad (2.4.25)$$

diferensiyel denklemi salınımlı ve

$$\left(|z^{(n-2)}(t)|^{\alpha-1} z^{(n-2)}(t) \right)' + \theta_2 (h'(t))^\mu q(t) |z[h(t)]|^\mu \operatorname{sgn} z[h(t)] = 0 \quad (2.4.26)$$

diferensiyel denkleminin her sınırlı çözümü salınımlı ise bu takdirde (2.4.19) denklemi de salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Örnek 2.4.16. α, β ve μ pozitif sabitler ve $q : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(|x^{(n-1)}(t)|^{\alpha-1}x^{(n-1)}(t)\right) + q(t)\left|x\left[\frac{t}{2}\right]\right|^{\beta}\left|\frac{d}{dt}x\left[\frac{t}{2}\right]\right|^{\mu}\operatorname{sgn} x\left[\frac{t}{2}\right] = 0 \quad (2.4.27)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $\beta \leq \alpha$ ve $\mu \leq \alpha$ olsun. Bu takdirde her θ_1, θ_2 pozitif sabitleri için

$$y'(t) + \left(\frac{\theta_1}{2^{\mu}(2^{n-1}(n-1)!)^{\beta}}\right)t^{(n-1)\beta}q(t)\left|y\left[\frac{t}{2}\right]\right|^{\beta/\alpha}\operatorname{sgn} y\left[\frac{t}{2}\right] = 0$$

ve

$$z'(t) + \left[\frac{\theta_2}{(2^{2n-3}(n-2)!)^{\mu}}\right]t^{(n-2)\mu}q(t)\left|z\left[\frac{3t}{4}\right]\right|^{\mu/\alpha}\operatorname{sgn} z\left[\frac{t}{2}\right] = 0$$

diferensiyel denklemleri salınımlı ise bu takdirde (2.4.27) denklemi de salınımlıdır. Buna göre,

- $\alpha = \beta = \mu$ ve $0 < k < 1$ için $q(t) = t^{n-2-k}$ alınırsa;
- $\beta < \alpha, \mu < \alpha$ ve $t > 1$ için $q(t) = \frac{1}{t} \min\{t^{(n-1)\beta}, t^{(n-2)\mu}\}$ alınırsa,

bu takdirde (2.4.27) denklemi salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2001).

Şimdi neutral terimli yüksek mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemler için verilen salınım sonuçları üzerinde durulacaktır. $\delta > 0$ tek tam sayıların bölümü olmak üzere,

$$z^{(n)}(t) + \int_a^b q(t, \xi)x^{\delta}(\varphi(t, \xi))d\xi = 0, \quad t \geq t_0 \quad \text{ve} \quad 0 < a < b, \quad (2.4.28)$$

çift mertebeden dağılımlı sapma argümentli diferensiyel denklemini

$$z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$$

ile tanımlanan neutral terim ile birlikte göz önüne alalım. Graef, Grace ve Tunç (2.4.28) denkleminin çözümlerinin salınım davranışlarını incelerken,

- (i) $p : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli sürekli bir fonksiyon, $p(t) \geq 1$ ve yeterince büyük t değerleri için $p(t) \neq 1$;
- (ii) $q : [t_0, \infty) \times [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ reel değerli sürekli bir fonksiyon;
- (iii) $\tau : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli sürekli ve kesin artan bir fonksiyon, $\tau(t) \geq t$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$;
- (iv) $\varphi : [t_0, \infty) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci değişkene göre artmayan bir fonksiyon, ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \xi) = \infty, \quad \xi \in [a, b]$$

şartları altında aşağıdaki sonuçları elde etmiştir (Graef ve ark., 2018). Yazımda kolaylık olması açısından, τ^{-1} fonksiyonu τ fonksiyonunun ters fonksiyonu olmak üzere,

$$\varphi_1(t) := \varphi(t, b) \quad \text{ve} \quad \psi(t) := \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))} \left(1 - \frac{1}{p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \right),$$

ve

$$Q(t) := \int_a^b q(t, \xi) \psi^\sigma(\varphi(t, \xi)) d\xi$$

notasyonları kullanılacaktır ve yeterince büyük bütün t değerleri için $\psi(t) > 0$ olduğu kabul edilecektir.

Teorem 2.4.17. Kabul edelim ki (i) - (iv) şartları sağlansın ve $(t, \xi) \in [t_0, \infty) \times [a, b]$ için $\varphi(t, \xi) \leq \tau(t)$ olsun. Eğer $\lambda_0 \in (0, 1)$ için

$$y'(t) + \frac{\lambda_0}{((n-1)!)^\delta} Q(t) (\tau^{-1}(\varphi_1(t)))^{\delta(n-1)} y^\delta(\tau^{-1}(\varphi_1(t))) = 0 \quad (2.4.29)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı ise bu takdirde (2.4.28) denklemi de salınımlıdır (Graef ve ark., 2018).

Yukarıdaki karşılaştırma teoremi kullanılarak, (2.4.28) denkleminin salınımlılığı için farklı sonuçlar verilebilir. Birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınım davranışı için verilen aşağıdaki lemmayı göz önüne alalım.

Lemma 2.4.18. $P, h : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $P(t) \geq 0$, $h(t) < t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ olsun. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{h(t)}^t P(s) ds > \frac{1}{e} \quad (2.4.30)$$

kalıyorsa, birinci mertebeden

$$u'(t) + P(t)u(h(t)) = 0 \quad (2.4.31)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlıdır (Koplatadze ve Chanturiya, 1982).

Yukarıdaki lemma yardımıyla, Teorem 2.4.17'dan aşağıdaki salınım kriteri kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 2.4.19. Kabul edelim ki (i) - (iv) koşulları sağlansın ve $\delta = 1$ olsun. Ayrıca $(t, \xi) \in [t_0, \infty) \times [a, b]$ için $\varphi(t, \xi) \leq \tau(t)$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau^{-1}(\varphi_1(t))}^t Q(s)(\tau^{-1}(\varphi_1(s)))^{n-1} ds > \frac{(n-1)!}{e} \quad (2.4.32)$$

sağlanırsa bu takdirde (2.4.28) denklemi salınımlıdır (Graef ve ark., 2018).

Teorem 2.4.20. Kabul edelim ki (i) - (iv) koşulları sağlansın ve $\delta < 1$ olsun. Ayrıca $(t, \xi) \in [t_0, \infty) \times [a, b]$ için $\varphi(t, \xi) \leq \tau(t)$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(s)(\tau^{-1}(\varphi_1(s)))^{\delta(n-1)} ds = \infty \quad (2.4.33)$$

sağlanıyorsa bu takdirde (2.4.28) denklemi salınımlıdır (Graef ve ark., 2018).

Teorem 2.4.21. Kabul edelim ki (i) - (iv) koşulları sağlansın ve $\varphi(t, \xi) \leq \tau(t)$ fonksiyonu birinci değişkenine göre azalmayan olsun. Eğer $\delta = 1$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau^{-1}(\varphi_1(t))}^t Q(s)(\tau^{-1}(\varphi_1(s)))^{n-1} ds > (n-1)! \quad (2.4.34)$$

yada $\delta < 1$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau^{-1}(\varphi_1(t))}^t Q(s)(\tau^{-1}(\varphi_1(s)))^{\delta(n-1)} ds = \infty \quad (2.4.35)$$

sağlanıyorsa, bu takdirde (2.4.28) denklemi salınımlıdır (Graef ve ark., 2018).

Teorem 2.4.22. (i) - (iv) koşullarının sağlandığını ve $(t, \xi) \in [t_0, \infty) \times [a, b]$ için $\varphi(t, \xi) \leq \tau(t)$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(s) ds = \infty \quad (2.4.36)$$

sağlanıyorsa bu takdirde (2.4.28) denklemi salınımlıdır (Graef ve ark., 2018).

Örnek 2.4.23. $t \geq 12$ için, çift mertebeden

$$(x(t) + 4tx(2t))^{(n)} + \int_1^2 (t - 5\xi)^{3/7} x^{3/7} \left(\frac{t}{5} - \xi \right) d\xi = 0 \quad (2.4.37)$$

neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $p(t) = 4t$, $\tau(t) = 2t$, $a = 1$, $b = 2$, $q(t, \xi) = (t - 5\xi)^{3/7}$, $\delta = 3/7$ ve $\varphi(t, \xi) = t/5 - \xi$. Bu durumda, (i) - (vi) koşullarının sağlandığı görülmektedir ve

$$\varphi_1(t) = (t - 10)/5, \quad \tau^{-1}(t) = t/2, \quad \tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) = t/4,$$

$$\tau^{-1}(\varphi_1(t)) = (t - 10)/10, \quad \psi(t) = \frac{1}{2t} \left(1 - \frac{1}{t} \right) \geq \frac{11}{24t},$$

$$Q(t) \geq \int_1^2 (t - 5\xi)^{3/7} \left(\frac{55}{24(t - 5\xi)} \right)^{3/7} d\xi = \left(\frac{55}{24} \right)^{3/7},$$

Ayrıca (2.4.33) şartı

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(s)(\tau^{-1}(\varphi_1(s)))^{\delta(n-1)} ds \geq \int_{12}^{\infty} \left(\frac{55}{24} \right)^{3/7} \left(\frac{s - 10}{10} \right)^{3(n-1)/7} ds = \infty$$

kaldığından sağlanmaktadır. Bu nedenle Teorem 2.4.20'ye göre (2.4.37) denklemi salınımlıdır (Graef ve ark., 2018).

Örnek 2.4.24. $t \geq 4$ ve $k \geq 3060$ olmak üzere, dördüncü mertebeden

$$(x(t) + 5x(t+1))^{(4)} + \int_1^2 \frac{k\xi}{t^4} x\left(\frac{t}{6} + \frac{1}{\xi}\right) d\xi = 0 \quad (2.4.38)$$

neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $p(t) = 5$, $\tau(t) = t + 1$, $a = 1$, $b = 2$, $k \geq 3060$ için $q(t, \xi) = k\xi/t^4$, $\delta = 1$, ve $\varphi(t, \xi) = t/6 + 1/\xi$. Bu takdirde (i) - (iv) koşullarının sağlandığı görülmektedir. Ayrıca

$$\varphi_1(t) = (t+3)/6, \quad \tau^{-1}(t) = t-1, \quad \tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) = t-2, \quad \psi(t) = 4/25,$$

$$\tau^{-1}(\varphi_1(t)) = (t-3)/6 \text{ ve } Q(t) = \frac{4}{25} \int_1^2 \frac{k\xi}{t^4} d\xi = \frac{6k}{25t^4}.$$

Bununla birlikte, (2.4.34) şartından

$$\begin{aligned} & \int_{\tau^{-1}(\varphi_1(t))}^t Q(s)(\tau^{-1}(\varphi_1(s)))^{n-1} ds \\ &= \int_{(t-3)/6}^t \frac{6k}{25s^4} \left(\frac{s-3}{6}\right)^3 ds \\ &= \frac{6k}{25 \times 6^3} \int_{(t-3)/6}^t \left(\frac{1}{s} - \frac{9}{s^2} + \frac{27}{s^3} - \frac{27}{s^4}\right) ds \\ &= \frac{k}{900} \left(\ln \frac{6t}{t-3} + \frac{9}{t} - \frac{27}{2t^2} + \frac{9}{t^3} - \frac{54}{t-3} + \frac{486}{(t-3)^2} + \frac{1944}{(t-3)^3} \right) \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

$t \rightarrow \infty$ iken (2.4.39) denkleminde $\limsup$ alınır (2.4.34) koşulunun geçerli olduğu görülür. Bu yüzden de Teorem 2.4.21'ye göre (2.4.38) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Graef ve ark., 2018).

Şimdi, lineer olmayan neutral terimli ve dağılımlı sapma argümentli çift mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemler için verilen salınım sonuçları üzerinde durulacaktır. α pozitif tek tamsayıların oranı, $n \geq 2$ bir çift tam sayı olmak üzere

$$(rz^{(n-1)})'(\zeta) + \int_a^b q(\zeta, s)f(x(g(\zeta, s)))ds = 0, \quad \zeta \geq \zeta_0 \quad (2.4.40)$$

formundaki çift mertebeden neutral diferensiyel denklemini

$$z(\zeta) = x^\alpha(\zeta) + p(\zeta)x(\sigma(\zeta))$$

ile tanımlanan nonlinear neutral terim ile birlikte göz önüne alalım. Moaaz, Elabbasy ve Muhib (2.4.40) denkleminin çözümlerinin salınım davranışlarını incelerken,

(H₁) $p, r : [\zeta_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $r(\zeta) > 0$, $r'(\zeta) \geq 0$ ve $0 \leq p(\zeta) < 1$;

(H₂) $q : [\zeta_0, \infty) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $q(\zeta, s) \geq 0$ ve

$$\int_{\zeta_0}^{\infty} \frac{1}{r(s)} ds = \infty;$$

(H₃) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve k pozitif bir sabit olmak üzere $x \neq 0$ için $|f(x)| \geq k|x^\alpha|$;

(H₄) $\sigma : [\zeta_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon, $\sigma(\zeta) \leq \zeta$ ve $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \sigma(\zeta) = \infty$;

(H₅) $g : [\zeta_0, \infty) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $g(\zeta, s) \leq \zeta$, g negatif olmayan kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} g(\zeta, s) = \infty$,

şartları altında aşağıdaki sonuçları elde etmiştir (Moaaz ve ark, 2019).

Yazımda kolaylık olması açısından, bu çalışmanın sonuçları için aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

$$Q(\zeta) := \int_a^b q(\zeta, s)(1 - p(g(\zeta, s)))ds$$

ve

$$\eta(\zeta) := \frac{r(\zeta)\rho(\zeta)}{Mg^{n-2}(\zeta, s)g'(\zeta, a)}.$$

Teorem 2.4.25. Eğer, $\rho : [\zeta_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $M > 0$ ve $0 < \lambda < 1$ sabitleri için

$$\int_{\zeta_0}^{\infty} \left(k\rho(v)Q(v) - \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{\rho'(v)}{\rho(v)} \right)^2 \eta(v) \right) dv = \infty \quad (2.4.41)$$

ise, bu takdirde (2.4.40) denklemini salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2019).

Teorem 2.4.26. $0 < \mu < 1$ sabiti için,

$$\tilde{A}(\zeta) := \frac{k\mu g^{n-1}(\zeta, a)}{(n-1)!r(g(\zeta, a))}Q(\zeta)$$

olmak üzere, eğer

$$u'(\zeta) + \tilde{A}(\zeta)u(g(\zeta, a)) = 0 \quad (2.4.42)$$

diferensiyel denklemi salınımlı ise bu takdirde (2.4.40) denklemi salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2019).

Lemma 2.4.18 kullanılarak, yukarıdaki teoremden aşağıdaki salınım sonucu elde edilir.

Sonuç 2.4.27. $0 < \mu < 1$ bir sabit olmak üzere, eğer

$$\liminf_{\zeta \rightarrow \infty} \int_{g(\zeta, a)}^{\zeta} \frac{g^{n-1}(s, a)}{r(g(s, a))} Q(s) ds > \frac{(n-1)!}{k\mu e}$$

kahyorsa, bu takdirde (2.4.40) denklemi salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2019).

Bu çalışmanın sıradaki sonucunu vermek için, önce $H \in \mathcal{P}$ ile göstereceğimiz fonksiyonlar sınıfını tanımlayalım.

Tanım 2.4.28. $D_0 = \{(\zeta, s) : \zeta > s > \zeta_0\}$ ve $D = \{(\zeta, s) : \zeta \geq s \geq \zeta_0\}$ olsun. $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer, aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa, bu takdirde H fonksiyonunun $\mathcal{P}$ fonksiyonlar sınıfına ait olduğu söylenir ve $H \in \mathcal{P}$ şeklinde yazılır:

(i) $\zeta \geq \zeta_0$ için $H(\zeta, \zeta) = 0$, D_0 üzerinde $H(\zeta, s) > 0$;

(ii) H fonksiyonunun ikinci değişkene göre sürekli kısmi türevi mevcuttur ve her $(\zeta, s) \in D_0$ için

$$\frac{\partial H(\zeta, s)}{\partial s} = -h(\zeta, s)\sqrt{H(\zeta, s)}$$

olacak şekilde $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

Teorem 2.4.29. $0 < \lambda < 1$ ve $M > 0$ birer sabit olsun. Eğer,

$$\Phi(\zeta, s) = \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{h(\zeta, s)}{\sqrt{H(\zeta, s)}}$$

olmak üzere,

$$\limsup_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{H(\zeta, \zeta_0)} \int_{\zeta_0}^{\zeta} H(\zeta, v) \left(k\rho(v)Q(v) - \frac{1}{4\lambda} \eta(v)\Phi^2(\zeta, v) \right) dv = \infty, \quad (2.4.43)$$

kalacak şekilde $H \in \mathcal{P}$ fonksiyonu ve sürekli türevlenebilir $\rho : [\zeta_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu varsa bu takdirde (2.4.40) denklemi salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2019).

Teorem 2.4.30. Varsayalım ki

$$0 < \inf_{s \geq \zeta} \left(\liminf_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{H(\zeta, s)}{H(\zeta, \zeta_0)} \right) \leq \infty$$

ve

$$\limsup_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{H(\zeta, \zeta_0)} \int_{\zeta_0}^{\zeta} H(\zeta, v) \eta(v) \Phi^2(\zeta, v) dv < \infty$$

sağlansın. Eğer, $\zeta \geq \zeta_0$ için $\psi_+(\zeta) = \max\{\psi(\zeta), 0\}$ olmak üzere,

$$\limsup_{\zeta \rightarrow \infty} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\psi_+^2(s)}{\eta(s)} ds = \infty$$

ve

$$\limsup_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{H(\zeta, \zeta_0)} \int_{\zeta_0}^{\zeta} H(\zeta, v) \left(k\rho(v)Q(v) - \frac{1}{4\lambda} \eta(v) \Phi^2(\zeta, v) \right) dv \geq \sup_{\zeta \geq \zeta_0} \psi(s)$$

kalacak şekilde $\psi : [\zeta_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu varsa, bu takdirde (2.4.40) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2019).

Örnek 2.4.31. $n = 2$, $\alpha = 3$, $r(\zeta) = 1$, $p(\zeta) = 1 - \frac{1}{\zeta}$, $\sigma(\zeta) = \zeta - \sigma$, $q(\zeta, s) = \zeta^2 s$, $f(x) = x^3$, $g(\zeta, s) = \zeta s$, ve $\rho(\zeta) = 1$ olmak üzere,

$$\left(\left(x^3(\zeta) + \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) x(\zeta - \sigma) \right)' \right)' + \int_{1/2}^1 \zeta^2 s x^3(\zeta s) ds = 0, \quad (2.4.44)$$

ikinci mertebeden neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Herhangi $M > 0$ ve $0 < \lambda < 1$ sabitleri için

$$\int_{\zeta_0}^{\infty} \left(k\rho(v)Q(v) - \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{\rho'(v)}{\rho(v)} \right)^2 \eta(v) \right) dv = \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.4.25'e göre (2.4.44) denklemi salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2019).

Örnek 2.4.32. $0 < p_0 < 1$, $0 < \delta < 1$, $0 < \beta < 1$, $q_0 > 0$, $a = 0$, $b = 1$, $r(\zeta) := \zeta$, $q(\zeta) := q_0/\zeta^{n-1}$ ve $f(x) := x^\alpha$ olmak üzere, yüksek mertebeden

$$\left(\zeta(x^\alpha(\zeta) + p_0x(\delta\sigma))^{n-1}\right)' + \frac{q_0}{\zeta^{n-1}}x^\alpha(\beta\zeta) = 0, \quad (2.4.45)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Buradan

$$Q(\zeta) := q_0(1 - p_0)\zeta^{1-n}$$

elde edilir. $\rho(\zeta) := \zeta^n$ olsun. Her pozitif M sabiti için, eğer

$$q_0(1 - p_0)\beta^{n-1} > \frac{n^2}{4\lambda M} \quad (2.4.46)$$

kalıyorsa (2.4.41) şartı sağlanır. O halde, Teorem 2.4.25'den eğer (2.4.46) sağlanırsa (2.4.45) denklemi salınımlıdır. Ancak, M sabitinden dolayı (2.4.46) şartının sağlandığını gösterebilmek uygulamalarda zordur. Fakat, 2.4.27 sonucunu kullanarak, eğer

$$\liminf_{\zeta \rightarrow \infty} \int_{g(\zeta, a)}^{\zeta} \beta^{n-2} q_0(1 - p_0) \frac{1}{s} ds > \frac{(n-1)!}{k\mu e},$$

yani

$$q_0(1 - p_0)\beta^{n-2} \ln \frac{1}{\beta} > \frac{(n-1)!}{\mu e} \quad (2.4.47)$$

sağlanıyorsa (2.4.45) denkleminin salınımlı olduğu görülebilir (Moaaz ve ark, 2019).

Şimdi, neutral terimi hem gecikmeli hem de ileri tipten sapma argümentleri içeren çift mertebeden fonksiyonel denklemler için verilen salınım sonuçları üzerinde durulacaktır. $n \geq 2$ çift tam sayı ve Q pozitif tek tam sayıların bütün bölümlerini içeren küme olacak biçimde $\gamma \in Q$ olmak üzere

$$\left(\vartheta(t)(\mathcal{U}^{(n-1)}(t))^\gamma\right)' + \mathcal{H}(t)\mathcal{F}(x(\Psi(t))) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (2.4.48)$$

çift mertebeden lineer olmayan neutral diferensiyel denklemini

$$\mathcal{U}(t) = x(t) + \mathcal{A}(t)x(\alpha(t)) + \mathcal{B}(t)x(\beta(t)) \quad (2.4.49)$$

ile tanımlanan neutral terimi ile birlikte göz önüne alalım. Tunç ve Özdemir, (2.4.48) denkleminin çözümlerinin salınım davranışlarını incelerken,

- (i) $\mathcal{A}, \mathcal{B} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $\mathcal{A}(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\mathcal{B}(t) \geq 1$ ve yeterince büyük t değerleri için $\mathcal{B}(t) \neq 1$;
- (ii) $\alpha, \beta, \Psi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $\alpha(t) \leq t \leq \beta(t)$, α ve β kesinlikle artan, Ψ azalmayan bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = \infty$;
- (iii) $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\theta \in \mathbb{Q}$ olmak üzere her $\xi \neq 0$ için $F(\xi)/\xi^\theta \geq \kappa$ olacak şekilde bir $\kappa > 0$ vardır;
- (vi) $\mathcal{H} : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli ve $t_h \geq t_0$ olmak üzere herhangi bir $[t_h, \infty)$ aralığı üzerinde $\mathcal{H}$ özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon;
- (v) $\vartheta : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon, $\vartheta'(t) \geq 0$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\vartheta^{1/\gamma}(\eta)} d\eta = \infty$$

şartları altında aşağıdaki sonuçları elde etmiştir (Tunç ve Özdemir, 2023).

Yazımda kolaylık olması açısından β^{-1} , β 'nin ters fonksiyonu olmak üzere,

$$\psi_1(t) := \left[1 - \frac{1}{\mathcal{B}[\beta^{-1} \circ \beta^{-1}(t)]} - \frac{\mathcal{A}[\beta^{-1}(t)]}{\mathcal{B}[\beta^{-1} \circ \alpha \circ \beta^{-1}(t)]} \right] \frac{1}{\mathcal{B}[\beta^{-1}(t)]}$$

notasyonu kullanılacaktır.

Ayrıca $\psi_1(t)$ 'nin negatif olmaması için $t_* \geq t_0$ olmak üzere

$$\frac{1}{\mathcal{B}[\beta^{-1}(t)]} + \frac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}[\beta^{-1} \circ \alpha(t)]} \leq 1, \quad t \geq t_* \quad (2.4.50)$$

olduğu kabul edilecektir.

Teorem 2.4.33. (i)-(v) ve (2.4.50) koşulları geçerli olsun. Bununla birlikte

$$\xi(t) := \beta^{-1} \circ \phi(t) < t, \quad \phi(t) \leq \Psi(t) \quad \text{ve} \quad t \rightarrow \infty \text{ iken } \phi(t) \rightarrow \infty$$

olacak şekilde sürekli türevlenebilir ve azalmayan bir $\phi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varolsun. Eğer, birinci mertebeden

$$\mathcal{W}'(t) + \left(\frac{\Omega_0}{(n-1)!} \right)^\theta \kappa \mathcal{H}(t) \vartheta^{-\theta/\gamma}(\xi(t)) \psi_1^\theta(\Psi(t)) (\xi(t))^{n\theta-\theta} \mathcal{W}^{\theta/\gamma}(\xi(t)) = 0 \quad (2.4.51)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı olacak şekilde bir $0 < \Omega_0 < 1$ sabiti var ise, bu durumda (2.4.48) denklemi salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2023).

Sonuç 2.4.34. Teorem 2.4.33'in tüm koşulları sağlansın ve $\theta \geq \gamma$ olsun. Eğer, $\lambda < \gamma$ olacak biçimdeki $\lambda \in \mathcal{Q}$ ve yeterince büyük bütün $t_* \geq t_0$ değerleri için,

$$\int_{t_*}^{\infty} \mathcal{H}(\eta) \vartheta^{-\lambda/\gamma}(\xi(\eta)) \psi_1^\theta(\Psi(\eta)) (\xi(\eta))^{n\lambda-\lambda} d\eta = \infty \quad (2.4.52)$$

kalıyorsa, bu durumda (2.4.48) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2023).

Sonuç 2.4.35. Teorem 2.4.33'in tüm koşulları sağlansın ve $\theta < \gamma$ olsun. Eğer, yeterince büyük bütün $t_* \geq t_0$ değerleri için,

$$\int_{t_*}^{\infty} \mathcal{H}(\eta) \vartheta^{-\theta/\gamma}(\xi(\eta)) \psi_1^\theta(\Psi(\eta)) (\xi(\eta))^{n\theta-\theta} d\eta = \infty \quad (2.4.53)$$

kalıyorsa, bu durumda (2.4.48) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2023).

Bu çalışmanın sonraki sonuçlarında (i) koşulunun yerine aşağıdaki şart kullanılmıştır:

(vi) $\mathcal{A}, \mathcal{B} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $\mathcal{B}(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\mathcal{A}(t) \geq 1$ ve yeterince büyük t değerleri için $\mathcal{A}(t) \neq 1$.

Yazımda kolaylık olması açısından α^{-1} , α 'nın ters fonksiyonu ve $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &:= \frac{1}{\mathcal{A}[\alpha^{-1}(t)]} \left[1 - \left(\frac{\alpha^{-1} \circ \alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(t)} \right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \frac{1}{\mathcal{A}[\alpha^{-1} \circ \alpha^{-1}(t)]} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(t)} \right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \frac{\mathcal{B}[\alpha^{-1}(t)]}{\mathcal{A}[\alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha^{-1}(t)]} \right], \end{aligned}$$

notasyonu kullanılacaktır. Ayrıca $\psi_2(t)$ 'nin negatif olmaması için,

$$\left(\frac{\alpha^{-1}(t)}{t}\right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \frac{1}{\mathcal{A}[\alpha^{-1}(t)]} + \left(\frac{\alpha^{-1} \circ \beta(t)}{t}\right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \frac{\mathcal{B}(t)}{\mathcal{A}[\alpha^{-1} \circ \beta(t)]} \leq 1, \quad t \geq t_{**} \quad (2.4.54)$$

kalacak şekilde bir $t_{**} \geq t_0$ olduğu kabul edilecektir.

Teorem 2.4.36. (ii)-(vi) koşulları ve (2.4.54) geçerli olsun. Ayrıca

$$\delta(t) := \alpha^{-1} \circ \varphi(t) < t, \quad \varphi(t) \leq \Psi(t) \quad \text{ve} \quad t \rightarrow \infty \text{ iken } \varphi(t) \rightarrow \infty$$

olacak şekilde sürekli türevlenebilir ve azalmayan bir $\varphi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu var olsun. Eğer,

$$\mathcal{W}'(t) + \left(\frac{\Omega_0}{(n-1)!}\right)^\theta \kappa \mathcal{H}(t) \vartheta^{-\theta/\gamma}(\delta(t)) \psi_2^\theta(\Psi(t)) (\delta(t))^{n\theta-\theta} \mathcal{W}^{\theta/\gamma}(\delta(t)) = 0,$$

kalacak şekilde bir $0 < \Omega_0 < 1$ sabiti var ise, o zaman (2.4.48) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2023).

Sonuç 2.4.37. $\theta \geq \gamma$ için Teorem 2.4.45'in bütün koşulları geçerli olsun. Eğer, bazı $\lambda \in \mathcal{Q}$, $\lambda < \gamma$ için ve yeterince büyük bütün $t_* \geq t_0$ için,

$$\int_{t_*}^{\infty} \mathcal{H}(\eta) \vartheta^{-\lambda/\gamma}(\delta(\eta)) \psi_2^\theta(\Psi(\eta)) (\delta(\eta))^{n\lambda-\lambda} d\eta = \infty$$

sağlanıyorsa, o zaman (2.4.48) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2023).

Sonuç 2.4.38. $\theta < \gamma$ için Teorem 2.4.45'in bütün koşulları geçerli olsun. Eğer, yeterince büyük bütün $t_* \geq t_0$ için,

$$\int_{t_*}^{\infty} \mathcal{H}(\eta) \vartheta^{-\theta/\gamma}(\delta(\eta)) \psi_2^\theta(\Psi(\eta)) (\delta(\eta))^{n\theta-\theta} d\eta = \infty$$

sağlanıyorsa, o zaman (2.4.48) denklemini salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2023).

Örnek 2.4.39. $t \geq 7$ için,

* $n = 4, \gamma = 3, \theta = 5/3, \vartheta(t) = t, \kappa = 1$ ve $\mathcal{H}(t) = e^{2t}$;

* $\alpha(t) = t - 2, \mathcal{A}(t) = e^{-t}, \mathcal{B}(t) = e^t, \beta(t) = t + 2$ ve $\Psi(t) = t + 1$;

olmak üzere,

$$\left[t \left(\left(x(t) + e^{-t}x(t-2) + e^tx(t+2) \right)''' \right)^3 \right]' + e^{2t}x^{5/3}(t+1) = 0, \quad t \geq 7 \quad (2.4.55)$$

gecikmeli ve ileri tipten sapma argümentine sahip dördüncü mertebeden neutral diferensiyel denklemini göz alalım.

Bu denklemde (i)-(v) koşulların geçerli ve $\Psi(t) \leq \beta(t)$ olduğu kolayca kontrol edilebilir. Ayrıca $t \geq 7$ için,

$$\psi_1(t) = \frac{1 - e^{8-2t} - e^{4-t}}{e^{t-2}}$$

pozitiftir. $\phi(t) = \Psi(t) = t + 1$ seçilirse $\xi(t) = t - 1 < t$ elde edilir ve $T > 7$ için (2.4.53) koşulu,

$$\int_T^\infty e^{2\eta}(\eta - 1)^{-5/9} \left(\frac{1 - e^{8-2(\eta+1)} - e^{4-(\eta+1)}}{e^{(\eta+1)-2}} \right)^{5/3} (\eta - 1)^5 d\eta = \infty$$

formunu alır. Böylece, Sonuç 2.4.44'ten (2.4.55) neutral diferensiyel denklemi salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2023).

Örnek 2.4.40. $t \geq 2^{19}$ için,

$$\left[t \left(x(t) + tx \left(\frac{t}{2} \right) + x(2t) \right)^{(5)} \right]' + t^2 x^{1/3} \left(\frac{t}{3} \right) = 0, \quad (2.4.56)$$

altıncı mertebeden Emden-Fowler neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Bu denklemde,

* $\gamma = 1, \theta = \frac{1}{3}, \vartheta(t) = t, \kappa = 1$ ve $\mathcal{H}(t) = t^2$;

* $\alpha(t) = t/2, \beta(t) = 2t, \Psi(t) = t/3, \mathcal{A}(t) = t$ ve $\mathcal{B}(t) = 1$.

olduğu görülmektedir. Göz önüne alınan denklem için (ii)-(vi) koşullarının sağlandığı ve $\Psi(t) \leq \alpha(t)$ olduğu açıktır. $\varepsilon = 1/2$ için,

$$\psi_2(t) = \frac{8t - 2^{11} - 4^{10}}{16t^2} > 0, \quad t \geq 2^{19}.$$

$\varphi(t) = \Psi(t) = t/3$ seçilirse $\delta(t) = 2t/3 < t$ sağlanır. Diğer taraftan bütün $T > 2^{19}$ için (3.33),

$$\int_T^\infty \eta^2 \left(\frac{2\eta}{3}\right)^{-1/3} \left(\frac{8(\eta/3) - 2^{11} - 4^{10}}{16(\eta/3)^2}\right)^{1/3} \left(\frac{2\eta}{3}\right)^{5/3} d\eta = \infty$$

formunu alır. Böylece, Sonuç 2.4.47'den (2.4.56) neutral diferensiyel denklemi salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2023).

Örnek 2.4.41. $t \geq 27$ için,

$$\left[x(t) + x(t - \pi) + e^t x(t + 2\pi)\right]^{(6)} + 8e^t x\left(t - \frac{7\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.4.57)$$

altıncı mertebeden neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde,

* $\gamma = \theta = 1$, $\vartheta(t) = \mathcal{A}(t) = 1$ ve $\mathcal{B}(t) = e^t$ ve $\mathcal{H}(t) = 8e^t$;

* $\alpha(t) = t - \pi$, $\beta(t) = t + 2\pi$, $\Psi(t) = t - 7\pi/2$ ve $\Psi(t) \leq \beta(t)$

olduğu görülmektedir. Ayrıca (i)-(v) şartlarının sağlandığı kolayca kontrol edilebilir ve $t \geq 27$ için,

$$\psi_1(t) = \frac{e^{2\pi}}{e^t} \left(\frac{e^t - e^{4\pi} - e^{5\pi}}{e^t}\right) > 0.$$

Eğer, $\lambda = 3/5 < 1$ ve $\phi(t) = t - 7\pi/2 = \Psi(t)$ seçilirse $\zeta(t) = t - 11\pi/2 < t$ elde edilir. Dahası, $T > 27$ için,

$$\int_T^\infty 8e^\eta \frac{e^{11\pi/2}}{e^\eta} \left(\frac{e^{\eta-7\pi/2} - e^{4\pi} - e^{5\pi}}{e^{\eta-7\pi/2}}\right) (\eta - 11/2)^3 d\eta = \infty$$

kalır, yani (2.4.52) koşulu sağlanır. Sonuç 2.4.43 doğrudan uygulaması olduğundan (2.4.57) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu gösterir. Nitekim, $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \sin t$ ve $x_3(t) = \cos t + \sin t$ bu problemin salınımlı çözümleridir.

3. Çift Mertebeden Neutral Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı

Bu bölümde, çift mertebeden belirli sınıftan dağılımlı sapma argümentleri içeren bir neutral diferensiyel denklem sınıfı göz önüne alınarak, bu denklem sınıfının salınımlılığı incelenecektir.

3.1. Giriş

Bu bölümde, $n \geq 2$ bir tam sayı, $\mathcal{P}$ bütün tek pozitif doğal sayıların oranlarının kümesi olmak üzere $\lambda \in \mathcal{P}$ ve $0 < \alpha < \beta < \infty$ olmak üzere

$$\mathcal{R}(t) = z(t) + r_1(t)z(\xi_1(t)) + r_2(t)z(\xi_2(t)), \quad (\text{NT})$$

formunda hem ileri tipten hem de gecikmeli sapma argümentleri içeren bir neutral terim ile tanımlı, çift mertebeden

$$\left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t)\right)' + \int_{\alpha}^{\beta} h(t, u)z^{\lambda}(\chi(t, u))du = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (\text{EQ})$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınacaktır. Ayrıca, çalışmanın geri kalan kısmında tekrar belirtilmese bile, aşağıdaki şartların her zaman sağlandığı kabul edilecektir:

- (i) $r_1, r_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli fonksiyonlar öyle ki $r_1(t)$ negatif değer almayan bir fonksiyon, $r_2(t) \geq 1$ ve yeterince büyük t değerleri için $r_2(t) \neq 1$;
- (ii) $\xi_1, \xi_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli ve kesin artan fonksiyonlar, $\xi_1(t) \leq t \leq \xi_2(t)$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $\xi_1(t) \rightarrow \infty$;
- (iii) $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ olmak üzere $h : [t_0, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon;
- (iv) $\chi : [t_0, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı, ikinci değişkenine göre artmayan bir fonksiyon ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t, u) = \infty, \quad u \in [\alpha, \beta];$$

- (v) $a : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ile tanımlı sürekli türevlenebilir bir fonksiyon, $a'(t) \geq 0$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a(\eta)} d\eta = \infty.$$

$T_z \geq t_0$ olmak üzere $\mathbb{R}$ kümesinin bir alt aralığını $I := [T_z, \infty)$ ile tanımlayalım. (EQ) neutral diferensiyel denkleminin bir çözümü dediğimizde, $\mathcal{R} \in C^{n-1}(I, \mathbb{R})$ ve $a(\mathcal{R}^{(n-1)}) \in C^1(I, \mathbb{R})$ özelliklerine sahip olan ve I alt aralığı üzerinde (EQ) denklemini sağlayan bir $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu kastediyoruz. Bu bölüm boyunca göz önüne alacağımız (EQ) denkleminin herhangi bir çözümünün sağa doğru sürdürülebilir ve aşikar olmayan bir çözüm olduğunu kabul edeceğiz. Yani, bu $z(t)$ çözümünün I aralığı üzerinde tanımlı ve her $T \in I$ için

$$\sup\{|z(t)| : t \geq T\} > 0$$

özellikliğini sağladığını kabul edeceğiz. Ayrıca, (EQ) denkleminin bu özelliklere sahip aşikar olmayan çözümlerinin var olduğu da kabul edilecektir.

(EQ) denkleminin böyle bir $z(t)$ çözümü eğer keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahip ise salınımlıdır denir. Yani $z(t)$ çözümünün sıfırlarının kümesi üstten sınırlı değil ise bu çözüm salınımlı olarak adlandırılır. Aksi taktirde salınımsız çözüm denir, yani $z(t)$ çözümü bir noktadan sonra tamamen pozitif (nihai pozitif, eventually positive) ya da tamamen negatif (nihai negatif, eventually negative) değerler alıyorsa bu çözüm salınımsızdır.

Çeşitli sınıftan çift mertebeden neutral diferensiyel denklemlerin ve zaman skalasında neutral dinamik denklemlerin çözümlerinin salınım davranışlarının incelenmesi, literatürde aktif olarak çalışılan önemli bir araştırma konusudur. Bu konu üzerine yapılan araştırmalara örnek olarak (Agarwal ve ark., 2013; Ruba ve ark., 2014; Bazighifan ve ark., 2019; Gao ve ark., 2017; Grace ve ark., 2017; Graef ve ark., 2018; Han ve ark., 2014; Li ve ark., 2010; Li ve ark., 2016; Moaaz ve ark., 2019; Qaraad ve ark., 2022; Sun ve ark., 2012; Tanaka, 2002; Tunç ve Graef, 2014; Wang, 2004; Wang ve ark., 2005; Zafer, 1998; Zhang ve ark., 2006, 2010) çalışmaları okuyucuya referans olarak verilebilir.

İlgili literatür incelendiğinde dağınıklı sapma argümentli neutral diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili yapılan çalışmaların nispeten daha az sayıda olduğu açıkça görülmektedir, örneğin bkz. (Bazighifan ve ark., 2019;

Grace ve ark., 2017; Graef ve ark., 2018; Moaaz ve ark., 2019; Qaraad ve ark., 2022; Tunç ve Graef, 2014; Wang, 2004; Wang ve ark., 2005; Zhang ve Meng, 2010). Bunun yanında, yapılan bu çalışmaların büyük çoğunluğunun neutral katsayı fonksiyonlarının sabit ya da sınırlı fonksiyon olduğu denklemler için ortaya konulduğu görülmektedir.

2018 yılında Graef, Grace ve Tunç (Graef ve ark., 2018) çift mertebeden dağılımlı sapma argümentli (2.4.28) neutral diferensiyel denklemini göz önüne almıştır. $\tau(t) \geq t$, τ kesin artan, neutral katsayı fonksiyonu $p(t) \geq 1$, $p(t) \not\equiv 1$, ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \xi) = \infty$ şartları altında ve $\delta > 0$ olmak üzere bu denklem için yeni salınım sonuçları elde etti. Ancak dikkat edilmelidir ki, söz konusu çalışmada elde edilen salınım sonuçları $\tau(t) < t$ ve/veya $\varphi(t, \xi) > \tau(t)$ olduğu durumlarda (2.4.28) neutral diferensiyel denkleme uygulanamamaktadır.

2019 yılında Moaaz, Elabbasy ve Muhib, (Moaaz ve ark., 2019), çift mertebeden dağılımlı sapma argümentli nonlinear ve kanonik formdaki lineer olmayan neutral terime sahip (2.4.40) denkleminin salınım sonuçları üzerine çalıştı. Söz konusu çalışmada katsayı fonksiyonu $r(\zeta)$ için $r(\zeta) > 0$, $r'(\zeta) \geq 0$, $\int_{\zeta_0}^{\infty} \frac{1}{r(s)} ds = \infty$, neutral katsayı fonksiyonu $p(\zeta)$ için $0 \leq p(\zeta) < 1$ ve sapma argümentleri için $\sigma(\zeta) \leq \zeta$, $g(\zeta, s) \leq \zeta$ ve $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \sigma(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} g(\zeta, s) = \infty$ şartları altında (2.4.40) denkleminin salınım davranışları incelendi. Dikkat edilmelidir ki söz konusu çalışma, neutral katsayı fonksiyonlarının sınırsız olduğu durumlarda veya neutral terimin hem gecikmeli hem de ileri tipten sapma argümenti içerdiği fonksiyonel diferensiyel denklemlere uygulanabilecek bir salınım kriteri sunmamaktadır.

Ayrıca Tunç ve Özdemir (Tunç ve Özdemir, 2023) çift mertebeden lineer olmayan karma neutral terimli (2.4.48) diferensiyel denkleminin neutral katsayı fonksiyonlarının sınırsız olması ve neutral terimin hem gecikmeli hem de ileri tipten sapma argümenti içermesinden dolayı dikkat çekmektedir.

Yukarıdaki gözlemler ışığında, bu çalışmada neutral terimin hem gecikmeli hem de ileri tipten sapma argümentleri içerdiği, çift mertebeden belirli sınıftan dağılımlı sapma argümentli (EQ) fonksiyonel diferensiyel denkleminin tüm çözümlerinin

salınlımlı olduğunu gösteren yeter şartlar elde etmek hedeflenmiştir. Dolayısıyla bu çalışmada elde edilen sonuçlar, literatürde mevcut olan bazı sonuçları genelleştirmekte ve genişletmektedir.

3.2. Bazı Yardımcı Lemmalar

Ana sonuçlara geçmeden önce, salınım teorisi literatüründe daha önce ortaya konulmuş olan ve tez çalışmamızın teoremlerinin ispatında kullanılacak olan bazı iyi bilinen sonuçları lemmalar halinde tanıtmak istiyoruz. Bu amaç doğrultusunda $p(t)$ negatif değerli olmayan bir fonksiyon ve $p, \varphi \in \mathcal{C}([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $k \in \mathcal{P}$, $\varphi(t) < t$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $\varphi(t) \rightarrow \infty$ olmak üzere, birinci mertebeden

$$\frac{d}{dt}[\omega(t)] + p(t)\omega^k[\varphi(t)] \leq 0, \quad (3.2.1)$$

fonksiyonel diferensiyel eşitsizliğini ve birinci mertebeden

$$\frac{d}{dt}[\omega(t)] + p(t)\omega^k[\varphi(t)] = 0, \quad (3.2.2)$$

fonksiyonel diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Lemma 3.2.1. (Philos, 1981, Theorem 1) Eğer (3.2.1) gecikmeli diferensiyel eşitsizliği nihai pozitif bir çözüme sahipse, bu takdirde (3.2.2) denklemi de nihai pozitif bir çözüme sahiptir.

Lemma 3.2.2. (Kitamura ve Kusano, 1980, Theorem 2) Eğer, $k \in (0, 1)$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} p(\eta) d\eta = \infty$$

ise, bu takdirde (3.2.2) denkleminin bütün çözümleri salınlımlıdır.

Yüksek mertebeden diferensiyel denklemler incelenirken, salınımsız çözümlerin sınıflandırılması yapılırken sıklıkla kullanılan aşağıdaki lemma, (Kiguradze, 1964) çalışmasından alınmıştır.

Lemma 3.2.3. Kabul edelim ki $\omega(t)$ fonksiyonu $[T, \infty)$ aralığında pozitif ve n -defa sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca $[T, \infty)$ aralığında $\omega^{(n)}(t) \leq 0$ ve $T_1 \geq T$ olacak şekilde herhangi bir $[T_1, \infty)$ aralığında $\omega^{(n)}(t) \not\equiv 0$ olsun. Bu takdirde, $0 \leq m \leq n-1$ ve $m+n$ bir tek tam sayı olacak şekilde öyle bir $m \in \mathbb{Z}$ tam sayısı ve öyle bir $T_* \geq T_1$ sabiti vardır ki

$$k = m, m+1, \dots, n-1 \text{ için, } [T_*, \infty) \text{ üzerinde } (-1)^{m+k} \omega^{(k)}(t) > 0,$$

$$m > 1 \text{ olmak üzere } \ell = 1, 2, \dots, m-1 \text{ için } [T_*, \infty) \text{ üzerinde } \omega^{(\ell)}(t) > 0$$

kalır.

Aşağıdaki lemma ile verilen eşitsizlik, (Agarwal ve ark., 2000, sayfa 169)'da bulunabilir.

Lemma 3.2.4. Kabul edelim ki $\omega(t)$ fonksiyonu $T_1 \geq T$ için Lemma 3.2.3'te belirtilen şartları sağlayan bir fonksiyon olsun, ve $t \geq T_1$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) \neq 0$ ve $\omega^{(n)}(t) \omega^{(n-1)}(t) \leq 0$ olsun. Ayrıca, $\Omega \in (0, 1)$ olacak şekilde bir sabit sayı olsun. Bu takdirde, her $t \geq T_\omega$ için

$$\omega(t) \geq \frac{\Omega}{(n-1)!} t^{n-1} \omega^{(n-1)}(t)$$

kalacak şekilde bir $T_\omega \geq T_*/\Omega$ vardır.

Aşağıdaki sonuç (Baculiková ve Džurina, 2013) çalışmasındaki Lemma 1'den adapte edilmiştir, ayrıca bkz. (Kiguradze ve Chanturia, 1993).

Lemma 3.2.5. Kabul edelim ki $\omega(t)$ fonksiyonu $T_1 \geq T$ için Lemma 3.2.3'te belirtilen şartları sağlayan bir fonksiyon ve $T_* \geq T_1$ noktası da $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere Lemma 3.2.3'te belirtilen nokta olsun. Bu takdirde, her $0 < \varepsilon < 1$ ve her $t \geq T_\omega$ için,

$$m\omega(t) \geq \varepsilon t \omega'(t),$$

sağlanacak şekilde bir $T_\omega \geq T_*$ noktası vardır.

Lemma 3.2.6. Kabul edelim ki $z(t)$ fonksiyonu, (EQ) denkleminin $t_1 \geq t_0$ için nihai pozitif bir çözümü olsun. Bu takdirde, her $t \geq t_2$ için $\mathcal{R}(t) > 0$ ve

$$\mathcal{R}'(t) > 0, \quad \dots, \quad \mathcal{R}^{(n-1)}(t) > 0, \quad \mathcal{R}^{(n)}(t) \leq 0 \text{ ve } \left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t) \right)' \leq 0 \quad (3.2.3)$$

kalacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ noktası vardır. Ayrıca, $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere, her $t \geq t_\varepsilon$ için

$$\left(\frac{\mathcal{R}(t)}{t^{(n-1)/\varepsilon}} \right)' \leq 0, \quad (3.2.4)$$

kalacak şekilde bir $t_\varepsilon \geq t_2$ noktası vardır.

İspat. Kabul edelimki $z(t)$ fonksiyonu (EQ) denkleminin nihai pozitif bir çözümü olsun. Bu takdirde, öyle bir $t_1 \geq t_0$ noktası vardır ki her $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$, $z(\xi_1(t)) > 0$, $z(\xi_2(t)) > 0$ ve $z(\chi(t, u)) > 0$ kalır. Bu durumda $\mathcal{R}(t) > 0$ olur ve (EQ) denkleminde,

$$\left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t) \right)' = - \int_{\alpha}^{\beta} h(t, u) z^{\lambda}(\chi(t, u)) du \leq 0$$

elde edilir. Bu yüzden de, $a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t)$ artmayan bir fonksiyondur, dolayısıyla $\mathcal{R}^{(n-1)}(t)$ fonksiyonu da belli bir noktadan sonra (bu noktaya $t_2 \geq t_1$ diyelim) işaret değiştirmeyen bir fonksiyon olur. İddia ediyoruz ki $\mathcal{R}^{(n-1)}(t) > 0$ kalır. Aksine $\mathcal{R}^{(n-1)}(t) \leq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $t \geq t_2 \geq t_1$ için,

$$a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t) \leq a(t_2)\mathcal{R}^{(n-1)}(t_2) = -\kappa$$

olacak şekilde bir κ pozitif sabiti vardır. Yukarıda eşitsizliği t_2 'den t 'ye integrallersek,

$$\mathcal{R}^{(n-2)}(t) \leq \mathcal{R}^{(n-2)}(t_2) - \kappa \int_{t_2}^t \frac{1}{a(\eta)} d\eta$$

elde edilir. Burada $t \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse, $\mathcal{R}^{(n-2)}(t) \rightarrow -\infty$ olduğu görülür ki bu da $z(t)$ 'nin nihai negatif olması anlamına gelir. Bu ise $z(t)$ 'nin pozitif olması ile

çelişir. O halde, $\mathcal{R}^{(n-1)}(t) > 0$ olmalıdır. Diğer taraftan

$$a'(t)\left(\mathcal{R}^{(n-1)}(t)\right) + a(t)\mathcal{R}^{(n)}(t) \leq 0$$

olduğundan, $t \geq t_2$ için $\mathcal{R}^{(n)}(t) \leq 0$ sonucuna varılır. Dolayısıyla Lemma 3.2.3'den dolayı,

$$\mathcal{R}'(t) > 0, \quad \mathcal{R}''(t) > 0, \quad \dots, \quad \mathcal{R}^{(n-1)}(t) > 0, \quad \text{ve} \quad \mathcal{R}^{(n)}(t) \leq 0$$

elde edilir. İspatın geri kalan kısmı, (Chatzarakis ve ark., 2021, Lemma 2.4) ile benzer olduğundan, detaylara yer verilmemiştir.

3.3. Temel Sonuçlar

Şimdi, tez çalışmamızın ilk salınım sonucunu vermeye hazırız. Yazımda kolaylık olması açısından bu bölüm boyunca, ξ_2^{-1} ifadesi ξ_2 fonksiyonunun ters fonksiyonunu belirtmek üzere aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

$$\xi(t) := \xi_2^{-1} \circ \chi(t, \beta)$$

$$\mathcal{A}(t) := \left(\int_{\alpha}^{\beta} h(t, u) \Theta_1^{\lambda}(\chi(t, u)) du \right)$$

$$\Theta_1(t) := \frac{1}{r_2[\xi_2^{-1}(t)]} \left[1 - \frac{1}{r_2[\xi_2^{-1} \circ \xi_2^{-1}(t)]} - \frac{r_1[\xi_2^{-1}(t)]}{r_2[\xi_2^{-1} \circ \xi_1 \circ \xi_2^{-1}(t)]} \right].$$

Ayrıca, $\Theta_1(t)$ fonksiyonunun negatif olmamasını sağlamak adına, her $t \geq t_*$ için

$$\frac{1}{r_2[\xi_2^{-1}(t)]} + \frac{r_1(t)}{r_2[\xi_2^{-1} \circ \xi_1(t)]} \leq 1 \quad (3.3.1)$$

olacak şekilde bir $t_* \geq t_0$ noktasının var olduğu kabul edilecektir.

Teorem 3.3.1. Kabul edelim ki (i) – (v) şartları ve (3.3.1) sağlansın. Ayrıca her $(t, u) \in [t_0, \infty) \times [\alpha, \beta]$ için $\chi(t, u) \leq \xi_2(t)$ olsun. Eğer, birinci mertebeden

$$\mathcal{W}'(t) + \left(\frac{\Omega_0}{(n-1)!} \right)^{\lambda} \mathcal{A}(t) (\xi(t))^{\lambda(n-1)} a^{-\lambda}(\xi(t)) \mathcal{W}^{\lambda}(\xi(t)) = 0 \quad (3.3.2)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı olacak şekilde bir $0 < \Omega_0 < 1$ sabiti varsa, bu takdirde (EQ) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. (EQ) denkleminin salınımsız bir çözümü $z(t)$ olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın her $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$, $z(\xi_1(t)) > 0$, $z(\xi_2(t)) > 0$ olacak, $(t, u) \in [t_1, \infty) \times [\alpha, \beta]$ için $z(\chi(t, u)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ vardır. $z(t)$ çözümü nihai negatif olduğunda ispat benzer olacağından, burada ve tez çalışmasının diğer ispatlarında sadece $z(t)$ 'nin nihai pozitif olduğu durum göz önüne alınacaktır.

Bu takdirde $t \geq t_2$ için, $\mathcal{R}(t)$ neutral terimi (3.2.3) şartını sağlayacak şekilde bir $[t_2, \infty) \subseteq [t_1, \infty)$ vardır. Ayrıca, $\mathcal{R}(t)$ 'nin tanımından

$$\begin{aligned} z(t) \geq & \left(\frac{\mathcal{R}}{r_2}\right) [\xi_2^{-1}(t)] - \frac{1}{r_2[\xi_2^{-1}(t)]} \left(\frac{\mathcal{R}}{r_2}\right) [\xi_2^{-1} \circ \xi_2^{-1}(t)] \\ & - \left(\frac{r_1}{r_2}\right) [\xi_2^{-1}(t)] \left(\frac{\mathcal{R}}{r_2}\right) [\xi_2^{-1} \circ \xi_1 \circ \xi_2^{-1}(t)] \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

elde edilir. Sapma argümentlerinin özelliklerini kullanarak,

$$\xi_2^{-1}(t) \geq \xi_2^{-1} \circ \xi_2^{-1}(t) \quad (3.3.4)$$

ve

$$\xi_2^{-1}(t) \geq \xi_2^{-1} \circ \xi_1 \circ \xi_2^{-1}(t) \quad (3.3.5)$$

yazılabilir. $\mathcal{R}(t)$ artan olduğundan, (3.3.4) ve (3.3.5) eşitsizliklerinden sırasıyla

$$\mathcal{R}[\xi_2^{-1}(t)] \geq \mathcal{R}[\xi_2^{-1} \circ \xi_2^{-1}(t)] \quad (3.3.6)$$

ve

$$\mathcal{R}[\xi_2^{-1}(t)] \geq \mathcal{R}[\xi_2^{-1} \circ \xi_1 \circ \xi_2^{-1}(t)], \quad (3.3.7)$$

elde edilir. (3.3.6) ve (3.3.7) ifadeleri (3.3.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, her $t \in [t_2, \infty)$ için

$$\begin{aligned} z(t) &\geq \frac{\mathcal{R}(\xi_2^{-1}(t))}{r_2(\xi_2^{-1}(t))} \left[1 - \frac{1}{r_2[\xi_2^{-1} \circ \xi_2^{-1}(t)]} - \frac{r_1(\xi_2^{-1}(t))}{r_2(\xi_2^{-1} \circ \xi_1 \circ \xi_2^{-1}(t))} \right] \\ &\geq \Theta_1(t) \mathcal{R}(\xi_2^{-1}(t)) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

sonucuna varılır. $t \rightarrow \infty$ iken $\chi(t, u) \rightarrow \infty$ olduğundan, öyle bir $t_3 \geq t_2$ seçilebilir ki, her $t \geq t_3$ için $\chi(t, u) \geq t_2$ kalır. Bu yüzden de, her $t \geq t_3$ için

$$z(\chi(t, u)) \geq \Theta_1(\chi(t, u)) \mathcal{R}(\xi_2^{-1} \circ \chi(t, u)) \quad (3.3.9)$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlik (EQ) denkleminde kullanılırsa, her $t \geq t_3$ için

$$\left(a(t) \mathcal{R}^{(n-1)}(t) \right)' + \int_{\alpha}^{\beta} h(t, u) \Theta_1^{\lambda}(\chi(t, u)) \mathcal{R}^{\lambda}(\xi_2^{-1} \circ \chi(t, u)) du \leq 0, \quad (3.3.10)$$

elde edilir. Burada, ξ_2 ve $\mathcal{R}$ fonksiyonlarının kesin artan, χ 'nin de ikinci değişkenine göre artmayan olduğu kullanılırsa,

$$\left(a(t) \mathcal{R}^{(n-1)}(t) \right)' + \mathcal{R}^{\lambda}(\xi_2^{-1} \circ \chi(t, \beta)) \left(\int_{\alpha}^{\beta} h(t, u) \Theta_1^{\lambda}(\chi(t, u)) du \right) \leq 0,$$

olduğu görülür ki bu eşitsizlik de

$$\left(a(t) \mathcal{R}^{(n-1)}(t) \right)' + \mathcal{A}(t) \mathcal{R}^{\lambda}(\xi_2^{-1} \circ \chi(t, \beta)) \leq 0, \quad (3.3.11)$$

formunda yazılabilir. Diğer taraftan, $\mathcal{R}(t) > 0$ ve $\mathcal{R}'(t) > 0$ olduğundan $t \rightarrow \infty$ iken $\mathcal{R}(t) \rightarrow 0$ olduğu açıktır. Ayrıca (3.2.3) sağlandığından $\mathcal{R}^{(n)}(t) \mathcal{R}^{(n-1)}(t) \leq 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu yüzden de Lemma 3.2.4'ten dolayı, her $0 < \Omega_0 < 1$ ve $t \geq t_{\Omega_0}$ için

$$\mathcal{R}(t) \geq \frac{\Omega_0}{(n-1)!} t^{n-1} \mathcal{R}^{(n-1)}(t) \quad (3.3.12)$$

kalacak şekilde bir $t_{\Omega_0} \geq t_3$ vardır. Burada (3.3.11) ve (3.3.12) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse,

$$\left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t)\right)' + \left(\frac{\Omega_0}{(n-1)!}\right)^\lambda \mathcal{A}(t)(\xi(t))^{\lambda(n-1)} \left(\mathcal{R}^{(n-1)}(\xi(t))\right)^\lambda \leq 0, \quad (3.3.13)$$

elde edilir. $\mathcal{W}(t) := a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t)$ olarak tanımlanırsa, birinci mertebeden

$$\mathcal{W}'(t) + \left(\frac{\Omega_0}{(n-1)!}\right)^\lambda \mathcal{A}(t)(\xi(t))^{\lambda(n-1)} a^{-\lambda}(\xi(t)) \mathcal{W}^\lambda(\xi(t)) \leq 0, \quad (3.3.14)$$

gecikmeli diferensiyel eşitsizliğinin her $0 < \Omega_0 < 1$ için pozitif bir çözüme sahip olduğu görülür. Dolayısıyla Lemma 3.2.1'den dolayı, birinci mertebeden

$$\mathcal{W}'(t) + \left(\frac{\Omega_0}{(n-1)!}\right)^\lambda \mathcal{A}(t)(\xi(t))^{\lambda(n-1)} a^{-\lambda}(\xi(t)) \mathcal{W}^\lambda(\xi(t)) = 0, \quad (3.3.15)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi de her $0 < \Omega_0 < 1$ için pozitif bir çözüme sahiptir. Bu ise (3.3.2) denkleminin salınımlı olduğu hipoteziyle çelişir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.1 ve Lemma 3.2.2'den aşağıdaki salınım sonucunun elde edilebileceği kolaylıkla görülebilir.

Sonuç 3.3.2. Kabul edelim ki Teorem 3.3.1'in bütün şartları sağlansın ve $\lambda < 1$ olsun. Eğer yeterince büyük her $t_* \in [t_0, \infty)$ için

$$\int_{t_*}^{\infty} \mathcal{A}(\eta)(\xi(\eta))^{\lambda(n-1)} a^{-\lambda}(\xi(\eta)) d\eta = \infty, \quad (3.3.16)$$

kalıyorsa, bu takdirde (EQ) denkleminin her $z(t)$ çözümü salınımlıdır.

Tez çalışmamızın sıradaki iki salınım sonucu için, (i) şartı yerine

- (vi) $r_1, r_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli fonksiyonlar öyle ki $r_2(t)$ negatif değer almayan bir fonksiyon, $r_1(t) \geq 1$ ve yeterince büyük t değerleri için $r_1(t) \neq 1$

şartının sağlandığı kabul edilecektir. Ayrıca yazımda kolaylık olması adına, ε ifadesi Lemma 3.2.6'da belirtilen ε değerini ve, ξ_1^{-1} ifadesi de ξ_1 fonksiyonunun ters fonksiyonunu göstermek üzere

$$\Theta_2(t) := \frac{1}{r_1[\xi_1^{-1}(t)]} \left[1 - \left(\frac{\xi_1^{-1} \circ \xi_1^{-1}(t)}{\xi_1^{-1}(t)} \right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \frac{1}{r_1[\xi_1^{-1} \circ \xi_1^{-1}(t)]} \right. \\ \left. - \left(\frac{\xi_1^{-1} \circ \xi_2 \circ \xi_1^{-1}(t)}{\xi_1^{-1}(t)} \right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \frac{r_2[\xi_1^{-1}(t)]}{r_1[\xi_1^{-1} \circ \xi_2 \circ \xi_1^{-1}(t)]} \right]$$

notasyonu kullanılacaktır ve $\Theta_2(t)$ fonksiyonunun negatif olmamasını sağlamak adına, her $t \geq t_{**}$ için

$$\left(\frac{\xi_1^{-1}(t)}{t} \right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \frac{1}{r_1[\xi_1^{-1}(t)]} + \left(\frac{\xi_1^{-1} \circ \xi_2(t)}{t} \right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \frac{r_2(t)}{r_1[\xi_1^{-1} \circ \xi_2(t)]} \leq 1 \quad (3.3.17)$$

olacak şekilde bir $t_{**} \geq t_0$ noktasının var olduğu kabul edilecektir.

Teorem 3.3.3. Kabul edelim ki (ii) – (vi) şartları ve (3.3.1) sağlansın. Ayrıca her $(t, u) \in [t_0, \infty) \times [\alpha, \beta]$ için $\chi(t, u) \leq \xi_1(t)$ olsun.

$$\xi_*(t) := \xi_1^{-1} \circ \chi(t, \beta) < t$$

$$\mathcal{A}_*(t) := \left(\int_{\alpha}^{\beta} h(t, u) \Theta_2^{\lambda}(\chi(t, u)) du \right)$$

olmak üzere, eğer birinci mertebeden

$$\mathcal{W}'(t) + \left(\frac{\Omega_0}{(n-1)!} \right)^{\lambda} \mathcal{A}_*(t) (\xi_*(t))^{\lambda(n-1)} a^{-\lambda} (\xi_*(t)) \mathcal{W}^{\lambda}(\xi_*(t)) = 0 \quad (3.3.18)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı olacak şekilde bir $0 < \Omega_0 < 1$ sabiti varsa, bu takdirde (EQ) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. (EQ) denkleminin salınımsız bir çözümü $z(t)$ olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın her $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$, $z(\xi_1(t)) > 0$, $z(\xi_2(t)) > 0$ olacak, $(t, u) \in [t_1, \infty) \times [\alpha, \beta]$ için $z(\chi(t, u)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ vardır.

Bu takdirde $t \geq t_2$ için, $\mathcal{R}(t)$ neutral terimi (3.2.3) şartını sağlayacak şekilde bir $[t_2, \infty) \subseteq [t_1, \infty)$ vardır. Ayrıca, Lemma 3.2.6'dan dolayı (3.2.4) eşitsizliği sağlanacak

şekilde bir $[t_3, \infty) \subseteq [t_2, \infty)$ vardır. Diğer taraftan $\mathcal{R}(t)$ 'nin tanımından

$$\begin{aligned} z(t) &\geq \left(\frac{\mathcal{R}}{r_1}\right) [\xi_1^{-1}(t)] - \frac{1}{r_1[\xi_1^{-1}(t)]} \left(\frac{\mathcal{R}}{r_1}\right) [\xi_1^{-1} \circ \xi_1^{-1}(t)] \\ &\quad - \left(\frac{r_2}{r_1}\right) [\xi_1^{-1}(t)] \left(\frac{\mathcal{R}}{r_1}\right) [\xi_1^{-1} \circ \xi_2 \circ \xi_1^{-1}(t)] \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

elde edilir. Sapma argümentlerinin özelliklerini kullanarak,

$$\xi_1^{-1}(t) \leq \xi_1^{-1} \circ \xi_1^{-1}(t) \quad (3.3.20)$$

ve

$$\xi_1^{-1}(t) \leq \xi_1^{-1} \circ \xi_2 \circ \xi_1^{-1}(t) \quad (3.3.21)$$

yazılabilir. (3.2.4) eşitsizliğini kullanarak, (3.3.20) ve (3.3.21) ifadelerinden, sırasıyla, her $t \in [t_\varepsilon, \infty) \subseteq [t_3, \infty)$ için

$$\left(\frac{\xi_1^{-1} \circ \xi_1^{-1}(t)}{\xi_1^{-1}(t)}\right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \mathcal{R}[\xi_1^{-1}(t)] \geq \mathcal{R}[\xi_1^{-1} \circ \xi_1^{-1}(t)] \quad (3.3.22)$$

ve

$$\left(\frac{\xi_1^{-1} \circ \xi_2 \circ \xi_1^{-1}(t)}{\xi_1^{-1}(t)}\right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \mathcal{R}[\xi_1^{-1}(t)] \geq \mathcal{R}[\xi_1^{-1} \circ \xi_2 \circ \xi_1^{-1}(t)] \quad (3.3.23)$$

elde edilir. (3.3.22) ve (3.3.23) ifadeleri (3.3.19) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, her $t \in [t_\varepsilon, \infty)$ için

$$\begin{aligned} z(t) &\geq \frac{\mathcal{R}(\xi_1^{-1}(t))}{r_1(\xi_1^{-1}(t))} \left[1 - \left(\frac{\xi_1^{-1} \circ \xi_1^{-1}(t)}{\xi_1^{-1}(t)}\right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \frac{1}{r_1[\xi_1^{-1} \circ \xi_1^{-1}(t)]} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\xi_1^{-1} \circ \xi_2 \circ \xi_1^{-1}(t)}{\xi_1^{-1}(t)}\right)^{\frac{n-1}{\varepsilon}} \frac{r_2[\xi_1^{-1}(t)]}{r_1[\xi_1^{-1} \circ \xi_2 \circ \xi_1^{-1}(t)]} \right] \\ &\geq \Theta_2(t) \mathcal{R}(\xi_2^{-1}(t)) \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

sonucuna varılır. $t \rightarrow \infty$ iken $\chi(t, u) \rightarrow \infty$ olduğundan, öyle bir $t_4 \geq t_\varepsilon$ seçilebilir ki, her $t \geq t_4$ için $\chi(t, u) \geq t_\varepsilon$ kalır. Bu yüzden de, her $t \geq t_4$ için

$$z(\chi(t, u)) \geq \Theta_2(\chi(t, u))\mathcal{R}(\xi_1^{-1} \circ \chi(t, u)) \quad (3.3.25)$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlik (EQ) denkleminde kullanılırsa, her $t \geq t_4$ için

$$\left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t)\right)' + \int_\alpha^\beta h(t, u)\Theta_2^\lambda(\chi(t, u))\mathcal{R}^\lambda(\xi_1^{-1} \circ \chi(t, u))du \leq 0, \quad (3.3.26)$$

elde edilir. Burada, ξ_1 ve $\mathcal{R}$ fonksiyonlarının kesin artan, χ 'nin de ikinci değişkenine göre artmayan olduğu kullanılırsa,

$$\left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t)\right)' + \mathcal{R}^\lambda(\xi_1^{-1} \circ \chi(t, \beta)) \left(\int_\alpha^\beta h(t, u)\Theta_2^\lambda(\chi(t, u))du \right) \leq 0,$$

olduğu görülür ki bu eşitsizlik de

$$\left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t)\right)' + \mathcal{A}_*(t)\mathcal{R}^\lambda(\xi_1^{-1} \circ \chi(t, \beta)) \leq 0, \quad (3.3.27)$$

formunda yazılabilir. Diğer taraftan, $\mathcal{R}(t) > 0$ ve $\mathcal{R}'(t) > 0$ olduğundan $t \rightarrow \infty$ iken $\mathcal{R}(t) \rightarrow 0$ olduğu açıktır. Ayrıca (3.2.3) sağlandığından $\mathcal{R}^{(n)}(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t) \leq 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu yüzden de Lemma 3.2.4'ten dolayı, her $0 < \Omega_0 < 1$ ve $t \geq t_{\Omega_0}$ için

$$\mathcal{R}(t) \geq \frac{\Omega_0}{(n-1)!} t^{n-1} \mathcal{R}^{(n-1)}(t) \quad (3.3.28)$$

kalacak şekilde bir $t_{\Omega_0} \geq t_4$ vardır. Burada (3.3.27) ve (3.3.28) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse,

$$\left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t)\right)' + \left(\frac{\Omega_0}{(n-1)!}\right)^\lambda \mathcal{A}_*(t)(\xi_*(t))^{\lambda(n-1)} \left(\mathcal{R}^{(n-1)}(\xi_*(t))\right)^\lambda \leq 0, \quad (3.3.29)$$

elde edilir. $\mathcal{W}(t) := a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t)$ olarak tanımlanırsa, birinci mertebeden

$$\mathcal{W}'(t) + \left(\frac{\Omega_0}{(n-1)!} \right)^\lambda \mathcal{A}_*(t)(\xi_*(t))^{\lambda(n-1)} a^{-\lambda}(\xi_*(t)) \mathcal{W}^\lambda(\xi_*(t)) \leq 0, \quad (3.3.30)$$

gecikmeli diferensiyel eşitsizliğinin her $0 < \Omega_0 < 1$ için pozitif bir çözüme sahip olduğu görülür. Dolayısıyla Lemma 3.2.1'den dolayı, birinci mertebeden

$$\mathcal{W}'(t) + \left(\frac{\Omega_0}{(n-1)!} \right)^\lambda \mathcal{A}_*(t)(\xi_*(t))^{\lambda(n-1)} a^{-\lambda}(\xi_*(t)) \mathcal{W}^\lambda(\xi_*(t)) = 0, \quad (3.3.31)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi de her $0 < \Omega_0 < 1$ için pozitif bir çözüme sahiptir. Bu ise (3.3.18) denkleminin salınımlı olduğu hipoteziyle çelişir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.3 ve Lemma 3.2.2'den aşağıdaki salınım sonucunun elde edilebileceği kolaylıkla görülebilir.

Sonuç 3.3.4. Kabul edelim ki Teorem 3.3.3'in bütün şartları sağlansın ve $\lambda < 1$ olsun. Eğer yeterince büyük her $t_* \in [t_0, \infty)$ için

$$\int_{t_*}^{\infty} \mathcal{A}_*(\eta)(\xi_*(\eta))^{\lambda(n-1)} a^{-\lambda}(\xi_*(\eta)) d\eta = \infty, \quad (3.3.32)$$

kalıyorsa, bu takdirde (EQ) denkleminin aşikar olmayan her $z(t)$ çözümü salınımlıdır.

Örnek 3.3.5. $n \geq 2$ bir çift doğal sayı olmak üzere $t \geq 61$ için,

$$\left[z(t) + 2z(t/2) + 4tz(2t) \right]^{(n)} + \int_1^2 (t - 5u)^{3/7} z^{3/7} \left(\frac{t}{5} - u \right) du = 0 \quad (3.3.33)$$

yüksek mertebeden neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde,

$$* \lambda = 3/7, \alpha = 1, \beta = 2, r_1(t) = 2, r_2(t) = 4t \text{ ve } h(t, u) = (t - 5u)^{3/7};$$

$$* a(t) = 1, \xi_1(t) = t/2, \xi_2(t) = 2t, \chi(t, u) = \frac{t}{5} - u \text{ ve } \chi(t, u) \leq \xi_1(t)$$

olduğu görülmektedir ve (i)-(v) şartlarının sağlandığı kolayca görülebilir. $t \geq 61$ için,

$$\chi(t, \beta) = \chi(t, 2) = \frac{t - 10}{5},$$

$$\xi_2^{-1}(t) = \frac{t}{2}, \quad \xi_2^{-1} \circ \xi_2^{-1}(t) = \frac{t}{4},$$

$$\xi(t) = \xi_2^{-1} \circ \chi(t, \beta) = \frac{t-10}{10},$$

$$\Theta_1(t) = \frac{1}{2t} \left[1 - \frac{1}{t} - \frac{4}{t} \right] = \frac{t-5}{2t^2} \geq \frac{28}{61t}$$

$$\mathcal{A}(t) \geq \int_1^2 (t-5u)^{3/7} \left(\frac{140}{61(t-5u)} \right)^{3/7} du = \left(\frac{140}{61} \right)^{3/7}$$

bulunur. Buna göre (3.3.16) ifadesinin

$$\begin{aligned} & \int_{t_*}^{\infty} \mathcal{A}(\eta) (\xi(\eta))^{\lambda(n-1)} a^{-\lambda}(\xi(\eta)) d\eta \\ &= \int_{61}^{\infty} \left(\frac{140}{61} \right)^{3/7} \left(\frac{\eta-10}{10} \right)^{\frac{3n-3}{7}} d\eta = \infty \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, Sonuç 3.3.2'den, (3.3.33) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında,

$$\mathcal{R}(t) = z(t) + r_1(t)z(\xi_1(t)) + r_2(t)z(\xi_2(t)), \quad (\text{NT})$$

olmak üzere, dağılımlı sapma argümentli çift mertebeden

$$\left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t)\right)' + \int_{\alpha}^{\beta} h(t, u)z^{\lambda}(\chi(t, u))du = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (\text{EQ})$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınmış ve çözümlerin salınım davranışı

(*) $r_1, r_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli fonksiyonlar öyle ki $r_1(t)$ negatif değer almayan bir fonksiyon, $r_2(t) \geq 1$ ve yeterince büyük t değerleri için $r_2(t) \neq 1$

ve

(**) $r_1, r_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli fonksiyonlar öyle ki $r_2(t)$ negatif değer almayan bir fonksiyon, $r_1(t) \geq 1$ ve yeterince büyük t değerleri için $r_1(t) \neq 1$

şartları altında ayrı ayrı incelenmiştir. (EQ) denkleminde görülen diğer fonksiyonlar bazı standart şartları sağlamaktadır. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar yardımıyla aşağıda maddeler halinde verilen yeni çalışmalar yapılabilir:

i. (EQ) denklemindeki neutral terim, $\zeta > 1$ olmak üzere

$$\mathcal{R}(t) = z(t) + r_1(t)z^{\zeta}(\xi_1(t)) + r_2(t)z^{\zeta}(\xi_2(t))$$

şeklinde tanımlanarak, süperlineer neutral terimli (EQ) denklemi için yeni salınım sonuçları araştırılabilir.

ii. (EQ) denklemindeki neutral terim, $0 < \zeta < 1$ olmak üzere

$$\mathcal{R}(t) = z(t) + r_1(t)z^{\zeta}(\xi_1(t)) + r_2(t)z^{\zeta}(\xi_2(t))$$

şeklinde tanımlanarak, sublineer neutral terimli (EQ) denklemi için yeni salınım sonuçları araştırılabilir.

iii. (EQ) denklemindeki neutral terim, $0 < \zeta_1 < 1 < \zeta_2$ olmak üzere

$$\mathcal{R}_1(t) = z(t) + r_1(t)z^{\zeta_1}(\xi_1(t)) + r_2(t)z^{\zeta_2}(\xi_2(t))$$

veya

$$\mathcal{R}_2(t) = z(t) + r_1(t)z^{\zeta_2}(\xi_1(t)) + r_2(t)z^{\zeta_1}(\xi_2(t))$$

şeklinde tanımlanarak, hem süperlineer hem de sublineer neutral terim içeren çift mertebeden diferensiyel denklemler için yeni salınım sonuçları araştırılabilir.

iv. (EQ) denklemi, $a : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ile tanımlı sürekli türevlenebilir bir fonksiyon, $a'(t) \geq 0$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a(\eta)} d\eta < \infty$$

şartı altında, yani kanonik olmayan formda tanımlanarak yeni salınım kriterleri oluşturulabilir.

v. Riccati-tipi dönüşümler kullanılarak (EQ) denkleminin salınımı için yeni sonuçlar elde edilebilir.

vi. $b : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere, (EQ) denkleminde $(n-1)$ -inci mertebeden türev içeren bir terim eklenmesiyle elde edilen, çift mertebeden

$$\left(a(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t) \right)' + b(t)\mathcal{R}^{(n-1)}(t) + \int_{\alpha}^{\beta} h(t, u)z^{\lambda}(\chi(t, u))du = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımı için yeni sonuçlar araştırılabilir. Ayrıca, bu denklemdeki neutral terimin süperlineer ve/veya sublineer olması durumları ayrı ayrı göz önüne alınabilir.

vii. Bu tez çalışmasında göz önüne alınan ve yukarıda maddeler halinde araştırma konusu olabileceği belirtilen bütün denklemler, zaman skalasında fonksiyonel dinamik denklemlere genişletilerek, yeni salınım sonuçları araştırılabilir.

viii. $r_1, r_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$-\infty < r_1(t), r_2(t) < -1 \quad \text{veya} \quad -\infty < r_1(t), r_2(t) < 0$$

şartları altında (EQ) denklemi için salınım kriterlerinin elde edilme problemi açıktır.



KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2000. Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Agarwal, R. P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2001. Oscillation criteria for certain n th order differential equations with deviating arguments. J. Math. Anal. Appl., **262**, 601–622.
- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2002. Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Agarwal, R.P., Grace, S.R. ve O'Regan, D., 2003. The oscillation of certain higher-order functional differential equations. Math. Comput. Modelling, **37**, 705–728.
- Agarwal, R.P., Bohner, M. ve Li, W.-T., 2004. Nonoscillation and Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Marcel Dekker Inc., New York.
- Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, T. ve Zhang, C., 2013. A new approach in the study of oscillatory behavior of even-order neutral delay differential equations. Appl. Math. Comput., **225**, 787–794.
- Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, T. ve Zhang, C., 2014. Oscillation of second-order Emden–Fowler neutral delay differential equations. Ann. Math. Pur. Appl., **193**, 1861–1875.
- Agarwal, R.P., Grace, S.R. ve Hassan, T.S., 2015a. Oscillation criteria for higher order nonlinear functional dynamic equations with mixed nonlinearities. Commun. Appl. Anal., **19**, 369–402.
- Agarwal, R.P., Bohner, M. ve Li, T., 2015b. Oscillatory behavior of second-order half-linear damped dynamic equations, Appl. Math. Comput., **254**, 408–418.
- Al-Hamouri, R. ve Zein, A., 2014. Oscillation criteria for certain even order neutral delay differential equations. Int. J. Differ. Equ., **2014**, Article ID 437278, 5 pages.
- Baculíková, B. ve Džurina, J., 2013. On certain inequalities and their applications in the oscillation theory. Adv. Differ. Equ., **2013**, Article ID: 165.
- Bazighifan, O., Elabbasy, E. M. ve Moaaz, O., 2019. Oscillation of higher-order differential equations with distributed delay. J. Inequal. Appl., **2019**, 2019:55.
- Berezansky, L. ve Braverman, E., 2008. Linearized oscillation theory for a nonlinear equation with a distributed delay. Math. Comput. Modelling, **48**, 287–304.
- Brauer, F. ve Castillo-Chavez, C., 2001. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Springer-Verlag, New York,.
- Candan, T., 2014. Asymptotic properties of solutions of third-order nonlinear neutral dynamic equations. Adv. Difference Equ., **2014:35**, 10 pages.
- Cushing, J. M., 1977. On the oscillatory nature of general predator-prey models with time delays. Nonlinear Analysis, **1**, 583–592.

- Chatzarakis, G.E., Jadlovská, I. ve Tunç, E., 2021. Improved oscillation criteria for even-order neutral differential equations. *Analysis*, **41**(4), 213–219.
- Elabbasy, E.M. ve Moaaz, O., 2015. New oscillation results for class of third order neutral delay differential equations with distributed deviating arguments. *Global Journal of Science Frontier Research: F Mathematics and Decision Science*, **15**, 1–9.
- Erbe, L., Kong, Q. ve Zhang, B.G., 1995. *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Fargue, D. M., 1973. Reducibilite des systemes dynamiques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. B*, **277**, 471–473.
- Fu, Y., Tian, Y., Jiang, C. ve Li, T., 2016. On the asymptotic properties of nonlinear third-order neutral delay differential equations with distributed deviating arguments. *Journal of Function Spaces*, **2016**, Article ID 3954354, 5 pages.
- Gao, S., Chen, Z. ve Shi, W., 2017. On the oscillation of even order neutral delay differential equations. *Math. Aeterna*, **7**, No. 2, 177–184.
- Grace, S.R., Graef, J.R. ve Tunç, E., 2016. Oscillatory behavior of a third-order neutral dynamic equation with distributed delays. *Proc. 10th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ., (July 1-4, 2015, Szeged, Hungary)* *Electron. J. Qual. Theory. Differ. Equ.*, **2016**, No. 14, 1–14.
- Grace, S.R., Graef, J.R. ve Tunç, E., 2017. Oscillatory behavior of second order damped neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Miscelc Math. Notes*, **18**, No. 2, 759–769.
- Graef, J.R., Savithri, R. ve Thandapani, E., 2002. Oscillatory properties of third order neutral delay differential equations. *Proceedings of the fourth international conference on dynamical systems and differential equations*, May 24–27, Wilmington, NC, USA. pp. 342–350.
- Graef, J.R., Tunç, E. ve Grace, S.R., 2017. Oscillatory and asymptotic behavior of a third-order nonlinear neutral differential equation. *Opuscula Math.*, **37**(6), 839–852.
- Graef, J. R., Grace, S. R. ve Tunç, E., 2018. Oscillation criteria for even-order differential equations with unbounded neutral coefficients and distributed deviating arguments. *Func. Differ. Equ.*, **25**, No. 3-4, 143–153.
- Graef, J. R., Özdemir, O., Kaymaz, A. ve Tunç, E., 2021. Oscillation of damped second-order linear mixed neutral differential equations. *Monatshefte Für Mathematik*, **194**(1), 85–104.
- Györi, I. ve Ladas, G., 1991. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*. Clarendon Press, Oxford.
- Hale, J. K. ve Verduyn Lunel, S. M., 1993. *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Science Business Media, New York.
- Han, Z., Li, T., Sun, Y., Zhao, Y. ve Yang, D., 2014. Oscillation criteria for certain even order neutral delay differential equations with mixed nonlinearities. *Abstr. Appl. Anal.*, **2014**, Article ID: 629074, 11 pages.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E. ve Polya, G., 1988. *Inequalities*. Reprint of the 1952 edition, Cambridge University Press, Cambridge.

- Heiden, U. an der ve Mackey, M. C., 1982. The dynamics of production and destruction: analytic insight into complex behavior. *J. Math. Biol.*, **16**, 75–101.
- Hu, S., Dunlayev, M., Guzy, S. ve Teuscher, N., 2018. A distributed delay approach for modeling delayed outcomes in pharmacokinetics and pharmacodynamics studies, *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, **2018**.
- Hutchinson, G. E., 1948. Circular causal systems in ecology, *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, **50**, 221–246.
- Jiang, C., Jiang, Y. ve Li, T., 2016. Asymptotic behavior of third-order differential equations with nonpositive neutral coefficients and distributed deviating arguments. *Adv. Difference Equ.*, **2016:105**, 14 pages.
- Jiang, C. ve Li, T., 2016. Oscillation criteria for third-order nonlinear neutral differential equations with distributed deviating arguments. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **9**, 6170–6182.
- Karpuz, B., 2013. Sufficient conditions for the oscillation and asymptotic beaviour of higher-order dynamic equations of neutral type. *Appl. Math. Comput.*, **221**, 453–462.
- Kelley, V.G. ve Peterson, A.C., 2004. *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative*. Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.
- Kiguradze, I. T. 1964. On the oscillatory character of solutions of the equation $d^m u/dt^m + a(t)|u|^n \text{sgn} = 0$. *Mat. Sb.*, **65**, 172–187. (Russian)
- Kiguradze, I.T. ve Chanturia, T.A., 1993. *Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations*. Kluwer Academic, Dordrecht.
- Kitamura, Y. ve Kusano, T., 1980. Oscillation of first-order nonlinear differential equations with deviating arguments. *Proc. Am. Math. Soc.*, **78**, 64–68.
- Kolmanovskii, V. ve Nosov, V. R., 1986. *Stability of Functional Differential Equations*. Academic Press, London.
- Kolmanovskii, V. ve Myshkis, A., 1999. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Koplatadze, R.G. ve Chanturiya, T.A., 1982. Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating argument. *Differ. Uravn.*, **18(8)**, 1463–1465.
- Kuang, Y., 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, in: *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Boston.
- Ladas, G., Sficas, Y.G. ve Stavroulakis, I.P., 1984. Necessary and sufficient conditions for oscillations of higher order delay differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285**, 81–90.
- Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. ve Zhang, B.G., 1987. *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Lakshmikantham, V., Sivasundaram, S. ve Kaymakçalan, B., 1996. *Dynamic systems on measure chains*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Li, T., Agarwal, R.P. ve Bohner, M., 2012. Some oscillation results for second-order neutral dyanmic equations. *Hacet. J. Math. Stat.*, **41**, 715–721.

- Li, T., Han, Z., Zhao, P. ve Sun, S., 2010. Oscillation of even-order neutral delay differential equations. *Adv. Difference Equ.*, **2010**, Article ID 184180, 9 pages.
- Li, T. ve Zhang, C., 2013. Properties of third-order half-linear dynamic equations with an unbounded neutral coefficient. *Adv. Difference Equ.*, **2013:333**, 8 pages.
- Li, T., Zhang, C. ve Xing, G., 2012. Oscillation of third-order neutral delay differential equations. *Abstr. Appl. Anal.*, **2012**, Article ID 569201, 11 pages.
- Li, T. ve Rogovchenko, Y. M., 2016. Oscillation criteria for even-order neutral differential equations. *Appl. Math. Lett.*, **61**, 35–41.
- Liu, H. ve Ma, C., 2013. Oscillation criteria for second-order neutral delay dynamic equations with nonlinearities given by Riemann-Stieltjes integrals. *Abstr. Appl. Anal.*, **2013**, Article ID 530457, 9 pages.
- May, R. M., 1973. Time delay versus stability in population models with two and three trophic levels. *Ecology*, **54**, 315–325.
- May, R. M., 1974. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton U. Press, Princeton.
- Metz, J. A. J. ve Diekmann, O., 1986. *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*. Lecture Notes in Biomath, **68**, Springer-Verlag.
- Moaaz, O., Elabbasy, E. M. ve Muhib, A., 2019. Oscillation criteria for even-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Adv. Differ. Equ.*, **2019:297**, 10 pages.
- Myshkis, A. D., 1972. *Linear Differential Equations with Delayed Argument*. Nauka, Moscow.
- Nicholson, A. J., 1933. The balance of animal populations. *Journal of Animal Ecology*, **2(1)**, 131–178.
- Özdemir, O. ve Tunç, E., 2018. Asymptotic behavior and oscillation of solutions of third order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. *Bull. Math. Anal. Appl.*, **10(2)**, 31–52.
- Özdemir, O., 2023. Oscillation criteria for noncanonical neutral Emden-Fowler differential equations. *Quaestiones Mathematicae*, **46:8**, 1653–1668.
- Panigrahi, S. ve Basu, R., 2012. Oscillation of nonlinear neutral differential equations of fourth order with several delays. *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.*, **4**, 59–89.
- Pinelas, S., 2014. Asymptotic behavior of solutions to mixed type differential equation. *Electron. J. Diff. Equ.*, **2014**, No. 210, 1–9.
- Philos, Ch.G., 1981. On the existence of nonoscillatory solutions tending to zero at ∞ for differential equations with positive delays. *Arch. Math.*, **36**, 168–178.
- Philos, Ch.G., 1984. Some comparison criteria in oscillation theory. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **36**, no:2, 176–186.
- Philos, Ch.G., 1989. Oscillation theorems for linear differential equations of second order. *Arch. Math.*, **53**, 482–492.
- Rășvan, V., 2006. Functional differential equations of lossless propagation and almost linear behavior. *IFAC Proceedings Volumes*, **39(10)**, 138–150.
- Qaraad, B., Bazighifan, O., Nofal, T. A. ve Ali A. H., 2022. Neutral differential equations with distribution deviating arguments: oscillation conditions. *J. Ocean Eng. Sci.*, **2022**, 19:35.

- Sun, Y., Han, Z., Sun, S. ve Zhang, C., 2012. Oscillation criteria for even order nonlinear neutral differential equations. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **2012**, No. 30, 1-12.
- Sharkovsky, A.N., Maistrenko Y.L. ve Romanenko, E.Y., 1993. *Difference Equations and Their Applications*. Springer Science+Business Media, Dordrecht.
- Smith, H. L., 1992. A structured population model and a related functional differential equation. *Global attractors and uniform persistence*, preprint.
- Sturm, C., 1836. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **1**, 106-186.
- Tanaka, S., 2002. A oscillation theorem for a class of even order neutral differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **273**, 172–189.
- Thandapani, E., Padmavathi, S. ve Pinelas, S., 2014a. Oscillation criteria for even-order nonlinear neutral diferential equations of mixed taype. *Bull. Math. Anal. Appl.*, **6(1)**, 9–22.
- Thandapani, E., Padmavathi, S. ve Pinelas, S., 2014b. Oscillation criteria for odd-order nonlinear diferential equations with advanced and delayed arguments. *Electron. J. Differ. Eq.*, **2014**, No. 174, 1-13.
- Tian, Y., Cai, Y., Fu, Y. ve Li, T., 2015. Oscillation and asymptotic behavior of third-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Adv. Difference Equ.*, **2015:267**, 14 pages.
- Tunç, E. ve Graef, J.R., 2014. Oscillation results for second order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. *Dynam. Systems Appl.*, **23**, 289–303.
- Tunç, E., 2017. Oscillatory and asymptotic behavior of third-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Electron. J. Differ. Eq.*, **2017**, No. 16, 1–12.
- Tunç, E. ve Özdemir, O., 2019. On the oscillation of second-order half-linear functional differential equations with mixed neutral term. *J. Taibah Univ. Sci.*, **13(1)**, 481–489.
- Tunç, E. ve Özdemir, O., 2023. Comparison theorems on the oscillation of even order nonlinear mixed neutral differential equations. *Math Meth Appl Sci.*, **46**, 631–640.
- Volterra, V., 1926. Fluctuations in the abundance of species considered mathematically. *Nature*, **118**, 558–560.
- Volterra, V., 1931. *Lecons sur la the'orie mathe'matique de la lutte pour la vie*. Gauthiers-Villars, Paris.
- Walther, H. O., 1975. Asymptotic stability for some functional differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **74a**, 253–255.
- Wang, P., 2004. Oscillation criteria for second-order neutral equations with distributed deviating arguments. *Comput. Math. Appl.*, **47**, 1935–1946.
- Wang, P., Teo, K. L. ve Liu, Y., 2005. Oscillation properties for even order neutral equations with distributed deviating arguments. *J. Comput. Appl. Math.*, **182**, 290–303.
- Wang, H., Chen, G., Jiang, Y., Jiang, C. ve Li, T., 2017. Asymptotic behavior of third order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *J. Math. Computer Sci.*, **17**, 194–199.

- Wang, P., Teo, K. L., Jiang, Y., Jiang, C. ve Li, T., 2017. Asymptotic behavior of third order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *J. Math. Computer Sci.*, **17**, 194–199.
- Wangersky, P. L. ve Cunningham, J. W., 1957. Time lag in prey-predator population models. *Ecology*, **38**, 136–139.
- Xiang, H., 2016. Oscillation of third-order nonlinear neutral differential equations with distributed time delay. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **36**, 769–782.
- Zafer, A., 1992. Oscillatory and nonoscillatory properties of solutions of functional differential equations and difference equations. Ph.D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa.
- Zafer, A., 1998. Oscillation criteria for even order neutral differential equations. *Appl. Math. Lett.*, **11**, No. 3, 21–25.
- Zhang, C., Baculikova, B., Duzurina, J. ve Li, T., 2016. Oscillation results for second-order mixed neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Math. Slovaca*, **66**, No. 3, 1–12.
- Zhang, Q., Yan, J., 2006. Oscillation behavior of even order neutral differential equations with variable coefficients. *Appl. Math. Lett.*, **19**, 1202–1206.
- Zhang, Q., Yan, J. ve Gao, L., 2010. Oscillation behavior of even-order nonlinear neutral differential equations with variable coefficients. *Comput. Math. Appl.*, **59**, 426–430.
- Zhang, S. ve Meng, F., 2010. Oscillation criteria for even order neutral equations with distributed deviating argument. *Int. J. Differ. Equ.*, Article ID 308357, 14 pages.
- Zhang, Q., Gao, L. ve Yu, Y., 2012. Oscillation criteria for third-order neutral differential equations with continuously distributed delay. *Appl. Math. Lett.*, **25**, 1514–1519.