

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MATEMATİKSEL FİZİKTE KULLANILAN BAZI
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN N-DALGA ÇÖZÜMLERİNİN
BULUNMASI

Emine TEKDAĞ

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

KASIM 2023

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

**MATEMATİKSEL FİZİKTE KULLANILAN BAZI DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN N-DALGA ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI**

Tez Yazarı
Emine TEKDAĞ

Danışman
Doç. Dr. Münevver TUZ

KASIM 2023
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Matematiksel Fizikte Kullanılan Bazı Diferansiyel Denklemlerin N-Dalga Çözümlerinin Bulunması
Yazarı:	Emine TEKDAĞ
İlk Teslim Tarihi:	15.06.2023
Savunma Tarihi:	15.11.2023

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Doç. Dr. Münevver TUZ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Doç. Dr. Serbay DURAN Adıyaman Üniversitesi, Eğitim Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Asif YOKUŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Matematiksel Fizikte Kullanılan Bazı Diferansiyel Denklemlerin N-Dalga Çözümlerinin Bulunması” başlıklı Yüksek Lisans Tezi içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum verileri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

15.11.2023

Emine TEKDAĞ



ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım danışman hocam Doç. Dr. Münevver TUZ' a ve her zaman destekleriyle çalışmamıza katkıda bulunan Doç. Dr. Asıf YOKUŞ' a sonsuz teşekkürlerimi borç bilirim. Ayrıca her zaman yanımda olan annem ve babama teşekkür ederim.

Emine TEKDAĞ
ELAZIĞ, 2023



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR	3
2.1. Adi Diferansiyel Denklemler.....	3
2.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler	3
2.3. Diferansiyel Denklemlerde Derece ve Mertebe Kavramı.....	3
2.4. Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler.....	4
2.5. Homojen ve Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemler.....	4
2.6. Diferansiyel Denklemlerde Genel ve Özel Çözüm.....	5
2.7. Dengeleme Terimi	5
3. SOLİTON VE SOLİTARY DALGALAR	6
4. MATERYAL VE METOT	8
4.1. $(1/G')$ -Açılım Metodu.....	8
5. METODUN UYGULANMASI	10
5.1. Joseph-Egri (JEE) Denklemleri	10
5.2. Benjamin-Bona-Mahony-Burgers(BBMB) Denklemleri	11
5.3. Joseph-Egri (JEE) Denklemine $(1/G')$ -Açılım Metodunun Uygulanması	13
5.4. Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) Denklemine $(1/G')$ - Açılım metodunun uygulanması.....	15
6. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	19
7. SONUÇLAR	22
ÖNERİLER	23
KAYNAKLAR.....	24
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Matematiksel Fizikte Kullanılan Bazı Diferansiyel Denklemlerin N-Dalga Çözümlerinin Bulunması

Emine TEKDAĞ

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Kasım 2023, Sayfa: ix + 28

Çalışmamızda bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem çözümleri $\frac{1}{G'}$ -açılım metoduyla incelenmiştir. Bu bölümde $\frac{1}{G'}$ -açılım metoduyla Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) ve Joseph-Egri (JEE) denklemleri üzerinde bu yöntem çalışılmıştır. Hazır bilgisayar paket programlarıyla çözüm fonksiyonları oluşturulup iki ve üç boyutlu çizimleri yapılmıştır. Bu çalışmanın birinci bölümünde tezle ilgili genel bilgi verilmiştir. İkinci bölümünde, tez aşamasında gerekli olan tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, soliton ve solitary dalgalar hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, $\frac{1}{G'}$ -açılım metodu tanıtılmıştır. Beşinci bölümde, BBMB ve JEE denklemleri tanıtılmış ve çözüm fonksiyonları verilmiştir. Bulunan çözümlerin paket programları yardımıyla grafikleri oluşturulmuştur. Altıncı bölümde, yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen bulgular verilmiştir. Yedinci bölümde, elde edilen çözümler için geniş bir sonuç verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: $\frac{1}{G'}$ -açılım metodu, Gezici dalga çözümü, Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denklemi, Joseph-Egri denklemi, Soliton çözüm

ABSTRACT

Finding N-Wave Solutions of Some Differential Equations Used in Mathematical Physics

Emine TEKDAĞ

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

November 2023, Pages: ix + 28

Detecting the solutions of some nonlinear sum equations containing these components by $\frac{1}{G'}$ expansion method. In this section, Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) and Joseph-Egri (JEE) equations are studied with $\frac{1}{G'}$ expansion method with this method. Solution functions were created with ready-made computer package programs and two, three dimensional drawings were made. In the first part of this study, general information about the thesis is given. In the second part, the definitions required in the thesis phase are given. In the third chapter, information about soliton and solitary waves is given. In the fourth chapter, $\frac{1}{G'}$ expansion method. In the fifth chapter, BBMB and JEE equations are introduced and solution functions are given. The graphics of the solutions found were created with the help of package programs. In the sixth chapter, the findings obtained as a result of the studies are given. In the seventh episode, abroad conclusion is given for the solutions obtained.

Keywords: $\frac{1}{G'}$ expansion method, Traveling wave solution, Benjamin-Bona-Mahony-Burger's equation, Joseph-Egri equation, soliton solution

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Basit bir dalga salınımı ve özellikleri	6
Şekil 5.1. (5.9) çözümündeki $\lambda=1$, $\mu=0.4$, $c = 2$, $A=-1$ sabitleri için (5.3) denkleminin 3 boyutlu ve 2 boyutlu grafikleri.	15
Şekil 5.2. (5.15) çözümündeki $\lambda=0.4$, $\mu=0.8$, $c = 1$, $A=-3$ sabitleri için (5.4) denkleminin 3 boyutlu ve 2 boyutlu grafikleri	17
Şekil 5.3. (5.18) çözümündeki $\lambda=0.4$, $\mu=0.8$, $c = 1$, $A=-3$ sabitleri için (5.4) denkleminin 3 boyutlu ve 2 boyutlu grafikleri.	18



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

δ	: Dalga sayısı
d	: Dalganın genliği
v	: Dalga hızı
μ	: Sabit sayı
c_i	: İntegrasyon sabitleri $i = (1,2,3, \dots)$
ξ	: Geçiş değişkeni
A	: İntegrasyon sabiti

Kısaltmalar

KdV	: Korteweg de Vries denklemi
JEE	: Joseph-Egri denklemi
BBMB	: Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denklemi

1. GİRİŞ

Bilim, var olan olayları gerçek dünyada gözlemleyerek anlamlandırma ve öngörüsül olarak tahmin ederek dünya ve yaşam hakkında bize bilgiler sunar. Matematik, bu bilimler arasında bize elimizdeki değerlerin nasıl daha iyi şekilde kullanıp anlamlandırmamız gerektiğini öğretir. Evrenin varoluşu ve yaşamın sürdürülmesi için birçok bilimden yararlanarak olayları çözümlemeye ve doğanın işlevini anlamaya çalışırız. Matematikteki gelişmeler, insan yaşamını etkileyen bu olayları anlamak için matematiksel modellemeler olarak kullanılan kısmi diferansiyel denklemlere yöneltmiştir. Böylelikle mühendislik, kimya, fizik, biyoloji, tıp gibi çeşitli bilim alanlarıyla ilgili çeşitli olguların anlaşılmasında ve yorumlanmasında matematiksel modellerden yararlanılarak olayları yorumlamak kolaylaşmıştır.

Farklı görünen birçok fenomenin aynı denklemleri tanımladığı bulunmuştur. Doğadaki ve teknolojiadaki birçok doğa olayı, diferansiyel denklemler ve bunlara dayalı matematiksel modellerle temsil edilebilmektedir. Diferansiyel geometride yüzeylerin yapısı, akışkanlar mekaniğinde akışların hareketi, ekonomik büyüme analizi, Astronomide gök cisimlerinin yörüngeleri, reaksiyonların kinetiği, elektrik devrelerinin enerji akışı, evrim süreci gibi örnekler verilebilir. Bu örneklerde görebileceğimiz gibi, mevcut araştırmaların çoğu, diferansiyel denklemlerin varlığı ve kararlılığı ile birçok bilimde uygulama bulmuştur. Günlük uygulamalarda, bilimsel deneylerde veri hacmi on yıl öncesine kıyasla önemli ölçüde artmış olup, ancak büyük analiz veriler pahalı ve zaman alıcıdır. Veriye dayalı yöntemler, son on yılda sensörlerin kullanılabilirliği, veri depolama ve hesaplama kaynakları, birçok disiplinde merkezi olmaya başlamıştır. Artık nesne sorunları için yüksek oranda ölçeklenebilir çözümler mevcuttur. Algılama ve tanıma, makine çevirisi, metinden konuşmaya dönüştürme, öneri sistemleri ve bilgi alma gibi çözümler, büyük miktarda veri ile eğitildiklerinde en son teknolojiye sahip performansa ulaşır. Bununla birlikte, makine öğrenimi için tamamen veriye dayalı yaklaşımlar, sistemin karmaşıklığına göre veriler az olduğunda zorluklar ortaya çıkarır. Daha az anlaşılan ise, küçük modellerden kalıpları çıkarmak için temeldeki fiziksel yasaların ve/veya yönetici denklemlerin nasıl kullanılacağı önemlidir. Kısmi diferansiyel ile ifade edilen koruma yasalarını, fiziksel ilkeleri ve/veya fenomenolojik davranışları harmanlamayı sağlayan modelleme çerçevesi mühendislik, teknoloji gibi birçok alanda mevcut olan veri kümeleriyle denklemlere dönüşür. Çok sayıda ve çeşitli faaliyetlerinden bir kısmına örnek verecek olursak; solitonların anormal saçılma ve öz durum geçişindeki denge nedeniyle parlak liflerde de kullanılabileceği bulundu [1]. Ayrıca, parlak solitonların varlığına ilişkin bir matematiksel rapor hazırlanmıştır ve soliton tabanlı iletim sisteminin ışıklı iletişimin hızını ve performansını artıracacağı belirlenmiştir [2].

Yakın zamanda bilim insanları, Raman etkisi adı verilen bir olguyu kullanarak 4000 kilometreden fazla soliton titreşimini iletmışler ve fiberde ışık kazancı sağlamak için yapılan bu deney, adını ilk

tanımlamayı yapan Sir C.V.'den almıştır [3]. Daha sonra optik fiber kullanarak çok daha fazla bir alana hatasız solitonlar iletilmiştir. Aydınlik yükselticilerle eşleştirilmiş aktif pompa lazerleri, ışık titreşimlerine enerji vermiştir. Başka bir çalışmada, farklı dalga boylarındaki parlak solitonların birleştirilerek iletilmesi sağlanmıştır [4]. Buna benzer başarılı ve etkileyici deneyler devam etmiş, fiber boşluğu boyunca kilitli pasif şekilli çift kırılmalı vektör solitonlarının varlığı bulunmuştur. Yine birçok deneye ve sayısal sonuçlara dayanarak yeni bir yüksek mertebeden vektör solitonları ve vektör solitonlarının polarizasyon durumları incelenmiştir [5]. Kuantum mekaniğinde, parçaların davranışı da dalgalarla tanımlanır. Salınım yönüne bağlı olarak enine ve boyuna dalgalar oluşur. Enerji transfer yönüne dik açılarda bir titreşim varsa enine dalgalar oluşur. Boyuna dalgalar, titreşimler enerji transfer yönüne paralel olduğunda meydana gelir [6].

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler çeşitli açılım yöntemleri ve sayısal metotlar yardımıyla çözümleri elde edilebilir. Tüm açılım yöntemlerin temelinde kısmi diferansiyel denklemin uygun dönüşümler yapılarak adi diferansiyel denkleme indirgenmesine dayanır. Kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümünün elde edilmesi için çeşitli bilgisayar programlarının kullanımı sayesinde karmaşık matematiksel işlemler kolaylıkla çözülebilmektedir. Bu tez çalışmasında, Mathematica programı ile verilen denklemlerin grafiklerinin çözümleri elde edilmiştir.

Lineer olmayan fiziksel problemleri çözmek için pek çok analitik metot literatüre kazandırılmıştır. Bu metotların birkaçını şu şekilde verebiliriz: deneme denklemi yöntemi [7], Adomian ayrıştırma yöntemi [8], He yöntemi [9], Exp-fonksiyon yöntemi [10], homotopi analiz yöntemi [11], kübik spline sıralama yöntemi [12], quartic spline yöntemi [13], Homotopi pertürbasyon yöntemi (HPM) [14], ayrıştırma yöntemi [15], varyasyon yineleme yöntemi (VIM) [16], the sine-Gordon expansion methodu [17], diferansiyel dönüşüm yöntemi (DTM) [18] Cole-Hopf dönüşümü [19], Ters saçılma metodu [20], Üstel fonksiyon metodu [21]. Tanh fonksiyon metodu [22], Jacobi elliptic fonksiyon metodu [23], Weierstrass Jakobi eliptik fonksiyon açılım metodu [24]. Guo ve Zhou bu metodu geliştirerek genişletilmiş (G'/G) -açılım metodunu [25] çalıştılar. Daha sonra Lü ve arkadaşları ise genelleştirilmiş (G'/G) -açılım açılım metodunu [26] oluşturdular. Yakın zamanda Li ve arkadaşları (G'/G) -açılım metodundan esinlenerek $(G'/G, 1/G')$ -açılım metodunu [27] geliştirdiler. Bunlardan başka yeni geliştirilmiş metotlardan biri de $(1/G')$ -açılım metodu olup, bu metot ilk defa Yokuş [28] tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu tez de $(1/G')$ -açılım açılım metodu ele alınarak Joseph-Egri (JEE) [29] ve Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) [30] denklemlerinin açılım metodu yardımı ile çözümleri incelenmiştir. Bu metotlar, literatürde matematiksel modellerin temsil ettiği problemlere yeni özellikler katarak problemi farklı yeni analitik çözümlerle sunup farklı yanlarını ortaya çıkarmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılan temel kavramlar hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Bu tezin içeriğinde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri, uygun dönüşümler yardımı ile adi diferansiyel denklemlere dönüştürmektedir. $\frac{1}{G'}$ -açılım metodunda kullanılan dengeleme terimi, derece ve mertebe kavramlarından yararlanılarak elde edilir. Kullanılan çözüm fonksiyonlarında, $\frac{1}{G'}$ değişkenine göre cebirsel ve homojen denklemler elde edilmiştir. Bu çalışmada odaklandığımız önemli kavramlar aşağıda tanımlarıyla birlikte verilmiştir.

2.1. Adi Diferansiyel Denklemler

Fonksiyon veya fonksiyonlarda bir veya daha çok bağımlı değişken, bir ya da daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklemde bir bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevini içeren denklemlere de adi diferansiyel denklemler denir [28]. Burada x bağımsız değişken y bağımlı değişken olmak üzere denklemin kapalı formda n . mertebeden yazılan bir adi bir diferansiyel denklem şöyledir;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

2.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklemlerde iki veya daha fazla bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklemler denir [28]. Burada x, y, t bağımsız değişken u bağımlı değişken olmak üzere denklemin kapalı formda n . mertebeden yazılan kısmi diferansiyel denklem şöyledir;

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right) = 0.$$

2.3. Diferansiyel Denklemlerde Derece ve Mertebe Kavramı

Bir diferansiyel denklemde, mertebesi en yüksek olan türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir. Örneğin, $y''' + 2y'' + y = 0$ denkleminin üçüncü mertebeden diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin üssüne, yani derecesine, diferansiyel denklemin derecesi denir. Örneğin, $(y''')^2 + 2y = 0$ denkleminin ise üçüncü mertebeden ikinci dereceden diferansiyel denklem denir.

2.4. Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişkenin kendisi ve türevleri ile çarpımı ya da bölüm durumu mevcutsa veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyorsa veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyükse bu tür diferansiyel denklemlere lineer olmayan diferansiyel denklemler denir. Bağımlı değişkenin tüm türevleri birinci dereceden ise, ayrıca bağımlı değişken ve türevlerinin hiçbir zaman çarpım durumunda yazılmadığı denklemlere lineer diferansiyel denklemler denir [28].

2.5. Homojen ve Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemler

$y' = f(x, y)$ denkleminde $f(x, y)$ fonksiyonu değişkenlerine göre homojen bir fonksiyon yani her λ için $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ ise denkleme homojen denklem denir. Bu bağıntıya $\lambda = \frac{1}{x}$ yerine yazarsak sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

O halde birinci dereceden homojen bir denklem

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Örnek verecek olursak,

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

denkleminde P ve Q fonksiyonları x ve y nin aynı dereceden (örneğin n . dereceden) homojen fonksiyonları ise, yani $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ bağıntısını sağlıyorsa bu denklem her zaman (2.1) denklem biçiminde yazılabilir. (2.1) diferansiyel denklem, $y = xu$ değişken dönüşümü ile değişkenlerine ayrılabilir bir diferansiyel denkleme dönüştürülerek çözülebilir. Bu dönüşümü denklemde uygularsak, $x'u + u = g(u)$ biçimde değişkenlerine ayrılabilen bir diferansiyel denkleme dönüştürülür. Bu denklem değişkenlerine ayrılıp gerekli düzenlemeler yaptıktan sonra genel çözüm fonksiyonu elde edilir. Bu denklem sistemlerine homojen diferansiyel denklemler denir. Dereceleri eşit olmayan yani bu dönüşümü sağlamayan diferansiyel denklemlere de homojen olmayan diferansiyel denklemler denir.

Mertebesi birden büyük herhangi bir n . mertebeden lineer diferansiyel denklemde;

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x)$$

şeklinde olup buradan $R(x)$, sıfıra eşit ise denkleme homojen lineer diferansiyel denklem denir. $R(x)$ Sıfırdan farklı bir değer alırsa homojen olmayan lineer denklem elde edilir [31].

2.6. Diferansiyel Denklemlerde Genel ve Özel Çözüm

Çözümü olan bir diferansiyel denklemin bütün çözümlerini sağlayan denkleme genel çözüm denir. Bir diferansiyel denklemin çözümü mertebesi kadar keyfi sabit içerir [32]. Bu çözüm bir eğri ailesini genel çözüme karşılık gelir. Bu denklemden var olan sabit değerlere verilen değerlerle elde edilen çözümlere ise özel çözüm denir. Örnek verecek olursak, $y = c_1 + c_2x + c_3x^2$ denklemini sistemin genel çözümünü temsil eder. Bu denklemden sabitlere değer verildiğinde, $y = 2 - x + x^2$ gibi, sistemin özel çözümü elde edilir.

2.7. Dengeleme Terimi

$\frac{1}{G'}$ -açılım metodunda kullanılan dengeleme terimi, lineer olmayan adi diferansiyel bir denklemden, en yüksek mertebeli lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeli lineer olan terim arasında elde edilen sabit bir tam sayıdır. Lineer olmayan adi diferansiyel bir denklemden, en yüksek mertebeli lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r} \right)^s$ ile en yüksek mertebeli lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ verilir. Burada p, q, r ve s birer sabit sayı ve m dengeleme terimi olmak üzere; $m + q = mp + s(m + r)$ eşitliği yazılabilir [28].

Örneğin;

$$u''c - \alpha u' + \frac{(1+u)^2}{2} - cu = c_1,$$

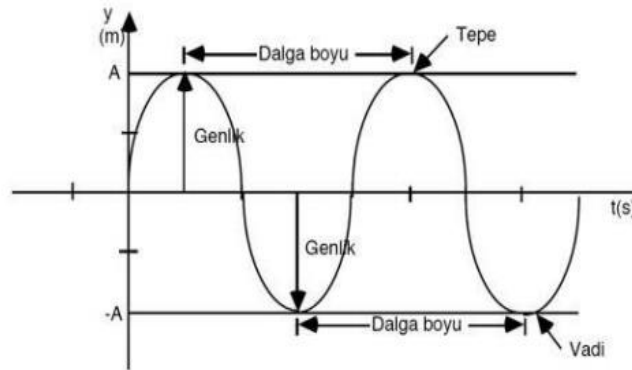
denkleminde $q = 2, p = 2, r = s = 0$ olup dengeleme terimi $m = 2$ dir.

3. SOLİTON VE SOLİTARY DALGALAR

Diferansiyel denklemler, konusunda yapılan ilk çalışmalar, 17. yüzyılın ikinci yarısında, diferansiyel ve integral hesabın keşfinden (ortaya çıkmasından) hemen sonra, İngiliz matematikçi Newton (1642-1727) ve Alman matematikçi Leibniz (1641-1716) ile başlamıştır. Daha sonra farklı matematikçilerin de katkılarıyla gelişip farklı bilimlerle birlikte uygulama alanı bulmuştur [33]. Doğada oluşan çok sayıda olay, diferansiyel denklemler ve matematiksel modellerle tanımlanmıştır. Öyle ki farklı bilimlerde oluşan problemlerin, aynı diferansiyel denklemlere denk geldiği ortaya çıkmıştır. Böyle durumlarda matematiksel teoriler, çeşitli doğa olaylarını, çeşitli bilimleri aynı çatı altında birleştirmiştir. Biyolojide büyüme, akışkanlar, ekonomik büyüme süreçlerinde, astronomide, ışık ve ses sistemleri gibi birçok alanda kısmi diferansiyel denklemlerle yani matematiksel modellerle tanımlamalar yapılabilir [34].

Dalga kavramı en basit anlamda, bir denge noktasında ileri geri hareket veya mekanik bir salınım olarak tanımlanabilir. Çalışma alanına göre farklı tanımlardan oluştuğu için dalga terimi hakkında net bir tanım bulunmamaktadır. Fizikte enerji taşınmasına yarayan titreşim, kuantum mekaniğinde parçaların davranışı, matematikte ise mekanik ve elektromanyetik dalga olarak tanımlanır. Mekanik dalgalar, maddeyi taşımak için kullanılır, yani bir ortamda yayılıp deforme edilip eski haline geri dönebilirler. Elektromanyetik dalgalar ise herhangi bir ortama ihtiyaç duymadan yayılım gösterebilirler. Dalgalar, farklı bilimlerde farklı tanımlardan oluşsa da tüm dalgalar enerji taşır ve enerjiyle dalga aynı yönde hareket eder. Dalgaların oluşması için başlangıç enerjisine ihtiyaç vardır ve dalga tüm enerjisini aktarana kadar ilerleme gösterir. Mekanik dalgalar, boyuna dalgalardan yani titreşimler enerji aktarım yönüne paralel durumunda ilerler. Elektromanyetik dalgalar ise enine yani enerji aktarım yönüne dik olarak oluşan titreşimlerdir [6].

Bir dalga salınımı atma, genlik, frekans, dalga boyu, dalga hızı ve periyottan oluşur (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Basit bir dalga salınımı ve özellikleri [35]

Atma, bir ortamda ilerleyen sarsıntıya denir; sarsıntılar oluşursa dalga oluşur. Genlik ise atmanın denge noktasına uzaklığına denir. Frekans, birim zamanda oluşan dalga sayısına bağlıdır; dalga boyu ise arka arkaya gelen iki dalga çukurunun uzaklığıdır. Dalga hızı ise dalganın birim zamanda aldığı yoldur. Bir tam dalga oluşması için geçen süreye periyot denir. [36].

Dalgalar, ilerleyen ve duran dalgalar olarak ikiye ayrılır. İlerleyen dalgalar, enerjinin taşınması ile oluşan dalgalar ve madde taşınmasına gerek yoktur. Duran dalgalar ise pozisyonu sabit olan dalgalar. Duran dalgalar, durağan bir ortamda birbirleri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşur ya da dalganın bulunduğu ortam, dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde meydana gelir [6].

Solitary dalgalar, sabit hız ve şekille ilerleyen sonlu genliğe sahip lineer olmayan dalgalar. Solitonlar ise çarptıktan sonra hızını ve şeklini koruyan dalgalar. Bir solitary dalganın hızı ile genliği doğru orantılıdır. Dolayısıyla büyük genliğe sahip bir tek dalga (solitary), küçük genliğe sahip bir solitary dalgadan daha hızlı hareket edecektir. Bu özellikten yola çıkarak normal dalga ile solitary dalga arasındaki farkı tekrar görebiliriz. Örneğin, biri yüksek biri alçak tonda iki ses oluştuğunda kulak bu sesleri aynı anda algılar. Fakat solitary dalgalar kullanılsaydı, kulak alçak tonda olan sesi algılayamayacaktı. Solitonları solitary denklemlerinden ayıran en önemli özellik, indirgenebilen denklemler olmasıdır. Yani denklem sistemi, dalganın davranış hakkında bize bilgi verir. Bu yüzden solitonlar integral denklemlerde ve modellemelerde kullanılır. Solitonlar, diğer solitonlarla çarpıştıktan sonra bozulmayan solitary dalgalar [28].

John Scott Russell 1834'te ilk olarak şahit olduğu gözlemle kanaldan geçen botu takip ederek tek dalga yani solitary dalgaların şeklinde ve hızında bir değişme olmadığını gözlemleyerek belgeledi [37-38]. Bu gözleminden bu doğa olayının önemini sezerek çalışmalarına evinin bahçesinde inşa ettiği su havuzunda devam etti. Bu çalışmalarından sonra genişliğin dalganın derinliğine, hızın dalganın boyuna bağlı değiştiğini vurguladı. Normal dalgalar şeklini değiştirirken solitary dalgaların kararlı ve şeklini değiştirmeyen dalgalar olduğunu keşfetti. Normal dalgalar düzleşme yuvarlama eğilimdeyken solitary dalgaların tümsek şeklinde simetrik ilerleyen dalgalar olduğunu keşfetmiştir. Soliton dalgalarla ilgili araştırmalarda 1965 yılından sonra nabız atışlarındaki, girdaplardaki, su yüzeyindeki, kasırgalardaki ve benzer kategoriye giren pek çok olaydaki solitary dalgaların aslında soliton oldukları fark edildi. Solitary dalgalar 1895 yılından sonra matematiksel olarak modellenmeye başlandı [25].

4. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü üretmek için matematiğin önemli metotlarından olan $\frac{1}{G'}$ -açılım metodu genel hatlarıyla açıklanmıştır. Bu metot $\frac{G'}{G}$ -açılım metodundan esinlenerek elde edilmiştir [28]. $\frac{1}{G'}$ -açılım metodu kısmi diferansiyel denklemlerin hiperbolik tipte yürüyen dalga çözümlerini elde etmede etkili ve güçlü bir metot olmuştur.

4.1. $(\frac{1}{G'})$ -Açılım Metodu

x ve t bağımsız değişkenine sahip lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü şu şekilde verilsin:

$$P(U, U_x, U_t, U_{xx}, U_{xt}, U_{tt}, \dots) = 0. \quad (4.1)$$

Bu denklem için $U(x, y) = U(\xi) = U$, $\xi = x + ct$ dönüşümünü uygulayalım. Burada c , dalganın hızını temsil eden fiziksel bir parametredir. Dönüşüm sonucunda;

$$P'(U, U', U'', U''', \dots) = 0, \quad (4.2)$$

$U(\xi)$ için doğrusal olmayan adi bir diferansiyel denklem elde ederiz. (4.2) adi diferansiyel denkleminin çözüm fonksiyonu $\frac{1}{G'}$ - açılım metoduna göre aşağıdaki gibi kabul edilir:

$$U(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{1}{G'}\right)^i, \quad (4.3)$$

buradan $G = G(\xi)$ 'i çözüm kabul eden;

$$G'' + \lambda G' + \mu = 0, \quad (4.4)$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir adi diferansiyel denklemin çözümüne karşılık gelir. Burada λ ve μ keyfi sabitlerdir, m ise homojen balans metoduna göre (4.2) ile verilen adi diferansiyel denklemin en yüksek mertebeli lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeli lineer olan terim arasında elde edilen sabit tam sayıdır. Bu sayı (4.3) de yerine yazılır ve çözüm için

gerekli türevler alınır. (4.3) ile hesaplanan türev değerleri (4.2) denkleminde yerine yazılarak α_i , λ , μ ye bağlı $\frac{1}{G'}$ - değişkenine göre cebirsel ve homojen bir denklem elde edilir.

Cebirsel denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek a_i katsayıları hesaplanır. Burada $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ keyfi sabittir. Burada $(\frac{1}{G'})^i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemleri bilgisayar programları yardımıyla çözülür. Bu denklem (4.3) ile verilen çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılıp, (4.1) de verilen kısmi diferansiyel denklemin çözümleri elde edilmiş olur. Ayrıca bu metotta kullanılan yardımcı denklem

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu = 0, \quad (4.5)$$

şeklinde olup, çözüm yalnızca hiperbolik fonksiyon cinsinden ifade edilebilir.

(4.4) verilen adi diferansiyel denklemin genel çözümü

$$G(\xi) = B + Ae^{-\lambda\xi} - \frac{\mu\xi}{\lambda}, \quad (4.6)$$

A ve B integral sabitleridir. Bu denklemde ξ değişkenine göre türev alındığında ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{G'} = \frac{1}{-Ae^{-\lambda\xi} - \frac{\mu}{\lambda}}, \quad (4.7)$$

denklemini elde edilir. Bu çözüm hiperbolik fonksiyon şeklinde

$$G(\xi) = B + A(\cos h(\lambda\xi) - \sin h(\lambda\xi)) - \frac{\mu\xi}{\lambda},$$

yazılır. (4.7) ile verilen denklemini trigonometrik fonksiyona dönüştürecek olursak

$$\frac{1}{G'(\xi)} = \frac{\lambda}{\lambda A(\cos h(\lambda\xi) - \sin h(\lambda\xi)) - \mu}, \quad (4.8)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu cebirsel denklem sistemleri paket programlar yardımı ile çözülür [38]. Bu çözümler (4.3) ile verilen çözüm fonksiyonunda ve hareketli dalga dönüşümünde yerlerine yazılarak (4.1) ile verilen kısmi diferansiyel denkleminin çözümü bulunur.

5. METODUN UYGULANMASI

Bu bölümde, Joseph-Egri (JEE) ve Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denklemleri tanıtılarak $\frac{1}{G'}$ -açılım metodu uygulanmış ve elde edilen çözüm fonksiyonlarının üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri verilmiştir.

5.1 Joseph-Egri (JEE) Denklemi

Fizik ve diğer alanlardaki olaylar genellikle kısmi diferansiyel denklemler ile tanımlanır. Doğadaki bu tür olayların fiziksel mekanizmasını anlamak için kesin çözümleri olan doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri, dalga fenomeninde olduğu gibi ele alınır. Akışkan dinamiğinde, plazma ve elastik ortamlarda, optik fiber gibi pek çok alanda gözlenir. Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Vries tarafından tek dalgalar için modellenen ve soliton çözüme sahip denklemler için en temel olan Korteweg-de Vries (KdV) denklemi;

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxx} = 0 , \quad (5.1)$$

şeklindedir [39]. Bu denklem, sıg su dalgalarında tek yönlü yayılım için önemli bir model olarak ele alınır. Burada u_t terimi, dalganın zaman gelişimini tanımlar. Doğrusal olmayan uu_x terimi dalga ve doğrusal dağılma terimi u_{xxx} , dalganın yayılmasını veya dağılmasını tanımlar. KdV denkleminde $u(x, t) = e^{ik[x - c(k)t]}$ dönüşümü ile sonsuz küçük dalga çözümleri elde edilebilir. KdV denklemini oluşturmak için, Benjamin, Bona ve Mahoney [40] 1972'de KdV denkleminin bir alternatifini, yani

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxt} = 0 , \quad (5.2)$$

BBM(RLW) denklemi önermiştir [41]. 1997 yılında Joseph ve Egri BBM denklemi için fiziksel olarak kabul edilemez özellikler belirlenmiştir. Fiziksel bir bakış açısıyla eğer u yer değiştirmeyi ve u_t hızı temsil ediyor ise başlangıç değerlerinin birbirinden bağımsız olması beklenir. Ancak BBM denklemi, KdV denklemi gibi t de birinci derecedendir. Joseph ve Egri denklemleri bu açıkları gidermek için KdV denkleminin başka bir alternatifi yani Joseph-Egri (JEE) denklemini oluşturmuştur [29]. Genel olarak denklem;

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xtt} = 0, \quad x, t \in R \quad (5.3)$$

şeklindedir.

Bu denklem t de ikinci derecedendir. Burada $u(x, 0)$ ve $u_t(x, 0)$ bağımsız olarak belirtilmiştir. Denklem (5.3)'ün denklem (5.2) ve (5.1)'a kıyasla bazı avantajları vardır. Hem KdV hem de BBM denklemi tek yönlü olup, Joseph-Egri denklemi birçok özelliği içerir. Dalga yayılımını açıklamada önemli bir model olarak hareket eden dalgalar. Joseph-Egri denklemi geniş çapta incelenmiştir. Bona ve Chen denklemin iyi konumlandığını ve küçük genlikli, uzun dalgalar için çözümlerin KdV denkleminin veya BBM denkleminin çözümleriyle uyumlu olduğunu göstermiştir [29].

İlk olarak $\frac{G'}{G}$ -genişlemesi yöntemi [42]' da Joseph-Egri'nin üç tip kesin çözümünü elde etmek için uygulanmıştır. Hiperbolik fonksiyon çözümleri, trigonometrik fonksiyon çözümleri ve rasyonel fonksiyon çözümleri elde edilmiştir. 2012 yılında Taghizadeh ve Mirzazadeh genişletilmiş rasyonel ve periyodik benzeri çözümler elde edebilmek için homojen denge yöntemini kullanmıştır [43]. 2014 yılında genişletilmiş en basit denklem yöntemi kullanılarak Joseph-Egri denkleminin birkaç soliter dalga çözümü elde edilmiştir [29]. Daha sonra $\exp(-\phi(\xi))$ – aracılığıyla genişletme yöntemi ile İslam ve arkadaşları tarafından bazı yeni yürüten dalga çözümleri türetilmiştir [29]. JEE'nin kesin ve sayısal çözümleriyle ilgili diğer yöntemler, homojen balans yöntemi [42], sinüs fonksiyon yöntemi [44], Jacobi eliptik yaklaşımı [45], tan-cot fonksiyonlar [46] ve genişletilmiş homojen balans yöntemi [47-48] yaklaşımları kullanılarak kesin çözümler elde edilmiştir. Denklem hareket eden dalga sisteminin faz-uzay geometrisini elde etmek için ayrıntılı olarak eşitli sınır ve sınırsız yörüngelerin olduğu parametre çatallanma kümeleri tanımlanmış ve simüle edilmiştir. Joseph-Egri denkleminin seyahat eden dalga çözümlerini yukarıda belirtilen yöntemler ile verimli bir şekilde oluşturmak mümkün olsa da bazı seyahat eden dalga çözümleri kaybolabilir. Joseph-Egri denklemi ile ilgili özellikle sınırsız hareket eden dalgalar literatürde tam olarak bulunmamıştır [46]. Amacımız $\frac{1}{G'}$ -açılım metoduyla Joseph-Egri denkleminin ilerleyen dalga çözümlerini araştırarak sınırlı ve sınırsız tüm hareket eden dalga çözümlerinin seyahatlerini matematiksel yazılımlardan da faydalananarak bulmaktır.

5.2 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers(BBMB) Denklemi

Matematik ve fizik gibi bilimlerde kullanılan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, yerçekiminden akışkanlar dinamiğine kadar birçok farklı fiziksel sistemi tanımlarlar. Sığ su dalgalarının hareketini tasvir eden benzer lineer olmayan denklemlerin tam form çözümlerinin bilinmesi, çözümlerin kararlılık analizine yardımcı olur ve lineer olmayan olayların daha iyi anlaşılmasına sağlar.

(1+1) boyutlarında tek yönlü yayılan küçük genlikli uzun yüzey yerçekimi dalgalarını modellemek için Benjamin – Bona – Mahony (BBM) denklemi

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

ele alınmış olup bu denklem,

$$u_t + uu_x - u_{xxx} = 0,$$

Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin geliştirilmiş halidir. BBM denklemi çözümlerinin kararlılığını ve benzersizliğini gösterir [53]. Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denklemi ise

$$u_t - \alpha u_{xx} + (1 + u)u_x - u_{xxt} = 0, \quad (5.4)$$

şeklindedir. Burada α pozitif sabittir. Bu denklem, küçük genlikli uzun dalgaların yayılmasının matematiksel modelini temsil eder. Korteweg-de Vries denkleminin alternatifi olarak doğrusal olmamanın yanı sıra dağıtıcı etkileri içerir. Lineer olmayan dağıtıcı bir ortamda küçük genlikli uzun dalgaların yayılmasını tanımlamaya çalışırken, genellikle gerçek durumları tamamen yansıtmak için dağıtıcı mekanizmaları dikkate almak gerekir. Çoğunlukla dalgaın bozulmasına yol açan mekanizmalar oldukça karmaşıktır ve iyi anlaşılmamıştır. Düzlemsel dalgaların tek yönlü yayılımının modellenmesinde lineer olmama ve dağılım olaylarına ihtiyaç duyulduğundan ortaya çıkan denklemlerden biri BBM-Burgers denklemidir [50].

Denklem ayrıca, uzun viskoelastik bir arterden kan akışını simgeler. Ağın her bir kenarı ana ağacın bir bölümüne karşılık gelir. Kan damarlarının malzeme özelliklerinde ani değişiklikler, BBMB katsayılarının ağın her bir ucunda farklı değerler almasına izin verir. Kritik olarak formülasyonumuz, BBMB' ye yönelik çözümün toplam kütesinin zaman içinde sabit olmasını sağlar. Doğrusal olmayan bir dağılım ortamında küçük bir genliğe sahip olan dalgaların yayılması, viskoz olmayan sıvılarda tek yönlü düzlemsel dalgaları modellerken BBMB denklemi ile kullanılır [51]. Denklem çözümündeki yöntemler, yerel çözümü tüm pozitifler için geçerli bir çözüme genişletmek için kullanılabilir. Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denklemi, tek yönlü düzlemsel dalgaların modellenmesinde, doğrusal olmayan bir dağılım ortamında küçük genlikli dalgaların yayılmasını açıklar. Daha yüksek pürüzsüzlük nedeniyle doğrusal olmayan ortamlarda küçük genlikli uzun dalgaların yayılmasının çeşitli özelliklerini anlamak için çok önemlidir [52].

BBMB denkleminin özel durumları aynı zamanda mühendislikte çeşitli uygulamalara sahiptir. Dalgalı delikler, termodinamik, çatlaklı kaya, topraktaki nemin hareketi, akustik biliminde sıvılardaki yerçekimi dalgaları, soğuk plazmadaki hidromanyetik dalgalar, uyumsuz kristaldeki akustik dalgalar vb. uygulama alanları vardır [53].

Son yıllarda, BBMB denklemini çözmek için araştırmacılar çeşitli sayısal yöntemler incelemiş ve uygulamıştır. BBMB denkleminin çözümü için sonlu farklar yöntemi, Adomian ayrıştırma yöntemi, He yöntemi, Exp-fonksiyon yöntemi, homotopi analiz yöntemi, kübik spline sıralama yöntemi,

quartic spline yöntemi, Homotopi pertürbasyon yöntemi, Homotopi asimptotik yöntemi, varyasyon yineleme yöntemi, diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Oruç [30], hibridizasyon kullanarak yeni bir hibrit teknik geliştirmiştir. Bu teknikte bir ve iki boyutlu doğrusal olmayan BBMB denklemlerini çözmek için Lucas ve Fibonacci polinomlarının birleşimi gerçekleşir. BBMB denkleminin bazı parametreler için kesin çözümü Chen ve diğerleri tarafından elde edilmiştir [54]. Ayrıca, sayısal çözüm bulmada Hermite spline'ları ile ortogonal sıralama yöntemi uygulanmış, farklı başlangıç değerleri için BBMB denkleminin çözümünde ağırlıklı sonlu farklar yöntemi ve beşli Hermite kollokasyon yöntemini içeren etkili bir sayısal teknik kullanılmıştır [55]. Araştırmacılar 2 boyutlu genelleştirilmiş bir BBMB denklemini çözmek için element içermeyen Galerkin yöntemini önermişlerdir [53]. BBMB denklemini çözmek için Legendre spektral eleman yöntemi kullanılmıştır [56]. BBMB denklemini çözmek için temel ağırsız bir yöntem vermişlerdir [57]. Spline tabanlı kollokasyon yöntemleri solitory dalga çözümlerinde çok ünlüdür. Spline sıralama yöntemiyle ilgili tartışma [58-52]'da verilmiştir. Son yıllarda büyük saygı gören bu tür sayısal yöntemlerin belirli bir sınıfı, geometrik yöntemlerdir [59,60]. Bir Lie grubu kavramı, değişmez özelliklerini korurken ODE'leri entegre etmek için bazı güvenilir ve güçlü sayısal yaklaşımlar yaratmada çok faydalıdır. Gerçekten de Lie grup yapısını korumak altında ayrıklaştırma, hata minimizasyonunda uygun bir davranışın geliştirilmesinde ciddi rol oynar [61]. Bu yaklaşımlar, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin geniş bir sınıfını çözmüştür. Denklemlerde lineer olmayan terimlerin varlığından dolayı bunların kesin ve analitik çözümleri verilen bazı sabit koşullar ve parametreler için mevcuttur. Bu gibi durumlarda, denklemlerin sayısal çözümü etkin rol alır.

5.3 Joseph-Egri (JEE) Denkleminin $(\frac{1}{G'})$ -Açılım Metodunun Uygulanması

Bu bölümde, soliton teorisinde önemli bir yere sahip olan Joseph-Egri (JEE) denklemi, gezici dalga çözümlerini üretmek için etkin, kullanışlı, uygulanabilir ve zamandan tasarruf sağlayan $\frac{1}{G'}$ -açılım metodu dikkate alınmıştır.

(5.3) ile verilen JEE denklemini ele alalım. Bu denkleme (4.2) dönüşümünü uygularsak;

$$c^2 U'' + \frac{U^2}{2} + (1 - c)U = c_1, \quad (5.5)$$

adi diferansiyel denklemini elde ederiz. (5.3) denkleminin (4.2) dönüşümünü uygulandıktan sonra bir kez integral alınmıştır ve c_1 integral sabittir.

(5.5) de $q = 2, p = 2, r = s = 0$ olup,

$$m + q = m.p + s.(m + r)$$

denkleme yerine yazılırsa, dengeleme terimi $m = 2$ bulunur. O halde

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{G'}\right) + a_2 \left(\frac{1}{G'}\right)^2, \quad (5.6)$$

yazabiliriz.

Burada $a_0, a_1, a_2, \lambda, \mu, \alpha, c, c_1$ keyfi sabitler olmak üzere (5.6) 'de verilen çözüm (5.5)' da verilen diferansiyel denklemde dikkate alınarak gerekli türevler alınıp düzenlemeler yapılarak ve $\left(\frac{1}{G'}\right)^i$, $(i = 0, 1, 2, 3, \dots, m)$ terimine bağlı polinomunun katsayıları sıfıra eşitlenerek;

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{G'(\xi)}\right)^0 : c + a_0 - ca_0 + \frac{a_0^2}{2} &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'(\xi)}\right)^1 : a_1 - ca_1 + c^2\lambda^2 a_1 + a_0 a_1 &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'(\xi)}\right)^2 : 3c^2\lambda\mu a_1 + \frac{a_1^2}{2} + a_2 - ca_2 + 4\lambda^2 c^2 a_2 + a_0 a_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'(\xi)}\right)^3 : 2c^2\mu^2 a_1 + 10c^2\lambda\mu a_2 + a_1 a_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'(\xi)}\right)^4 : 6c^2\mu^2 a_2 + \frac{a_2^2}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. (5.7) ile verilen denklem sistemlerinin hazır bilgisayar paket programları yardımıyla aranan sabitler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$a_0 = -1 + c - c^2\lambda^2, a_1 = -12c^2\lambda\mu, a_2 = -12c^2\mu^2, m = \frac{1}{2}(1 - 2c + c^2 - c^4\lambda^4), \quad (5.8)$$

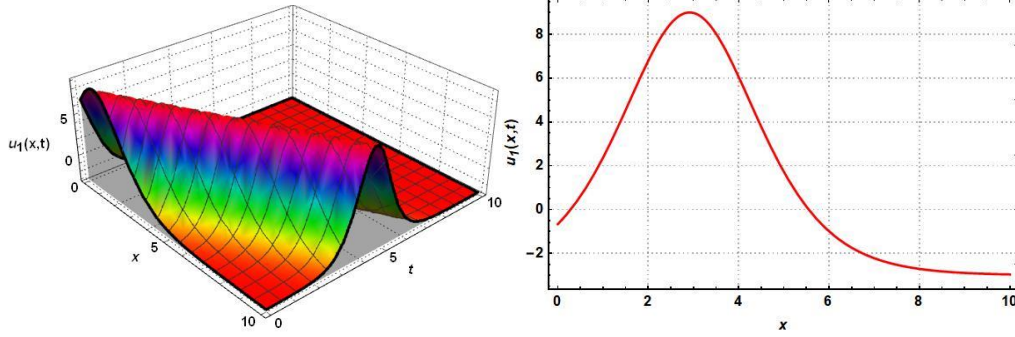
(5.9) denklemindeki hesaplanan sabitler (5.7) çözümünde yerlerine yazılır ve aşağıdaki gezici dalga çözümü elde edilir,

$$u_1(x, t) = \frac{12c^2\lambda\mu}{-\frac{\mu}{\lambda} + A \cosh[(-ct+x)\lambda] - A \sinh[(-ct+x)\lambda]}. \quad (5.9)$$

(5.9) ile sunulan çözüm hiperbolik formda olup bu çözüm üstel formda aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$u_1(x, t) = -1 + c - \frac{c^2\lambda^2(e^{2x^2}\mu^2 + 10e^{(ct+x)^2}\lambda\mu c + e^{2cx^2}\lambda^2 c^2)}{(e^{x^2}\mu - e^{cx^2}\lambda c)^2}. \quad (5.10)$$

(5.9) veya (5.10) gezici dalga çözümündeki sabitlere kararlı durumda ve uygun değerler verilerek dalganın herhangi bir andaki görüntüsü aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1. (5.9) çözümündeki $\lambda=1$, $\mu=0.4$, $c=2$, $A=-1$ sabitleri için (5.3) denkleminin 3 boyutlu ve 2 boyutlu grafikleri.

(5.9) ile verilen denklem gezici dalga çözümüdür. Bu gezici dalga çözümündeki sabitlere kararlı durumda özel değerler verildiğinde, şekil 5.1 ile verilen soliton dalganın herhangi bir andaki görüntüsüdür.

5.4 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) Denklemine $(\frac{1}{G'})$ - Açılım metodunun uygulanması

Bu bölümde, soliton teorisinde farklı özellikler taşıyan Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denklemini, gezici dalga çözümlerini üretmek için etkin ve kullanışlı $\frac{1}{G'}$ -açılım metodu dikkate alınmıştır. (5.4) ile verilen BBMB denklemini ele alalım. (4.2) dönüşümünü uygulayarak aşağıdaki adi diferansiyel denklemi elde ederiz,

$$cU'' - \alpha U' + \frac{(1+U)^2}{2} - cU = c_1. \quad (5.11)$$

(5.11) adi diferansiyel denklemini elde ederiz. (5.4) denklemine (4.2) dönüşümünü uygulandıktan sonra bir kez integral alınmıştır ve c_1 integral sabittir.

Dengeleme terimi;

$$\begin{aligned} m + q &= m.p + s.(m + r) \\ m + 2 &= m.2 + 0 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{G'}\right) + a_2 \left(\frac{1}{G'}\right)^2, \quad (5.12)$$

yazabiliriz.

Burada $a_0, a_1, a_2, \lambda, \mu, \alpha, c, c_1$ keyfi sabitler olmak üzere (5.12) 'de verilen çözüm (5.11)' de verilen diferansiyel denklemde dikkate alınarak gerekli türevler alınıp düzenlemeler yapılarak ve $\left(\frac{1}{G'}\right)^i, (i = 0, 1, 2, 3, \dots, m)$ terimine bağlı polinomunun katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem sistemi inşa edilebilir;

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{G'(\xi)}\right)^0 : c + \frac{1}{2} + a_0 - ca_0 + \frac{a_0^2}{2} &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'(\xi)}\right)^1 : a_1 - ca_1 - \alpha\lambda a_1 + c\lambda^2 a_1 + a_0 a_1 &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'(\xi)}\right)^2 : -\alpha\mu a_1 + 3c\lambda\mu a_1 + \frac{a_1^2}{2} + a_2 - ca_2 - 2\alpha\lambda a_2 + 4c\lambda^2 a_2 + a_0 a_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'(\xi)}\right)^3 : 2c\mu^2 a_1 - 2\alpha\mu a_2 + 10c\lambda\mu a_2 + a_1 a_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'(\xi)}\right)^4 : 6c\mu^2 a_2 + \frac{a_2^2}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. (5.13) ile verilen denklem sistemlerinin hazır bilgisayar paket programları yardımıyla aranan sabitleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

Durum 1

$$a_0 = -1 + c - 6c\lambda^2, a_1 = -24c\lambda\mu, a_2 = -12c\mu^2, n = \frac{1}{2}(-2c + c^2 - 36c^2\lambda^4), \alpha = 5c\lambda, \quad (5.14)$$

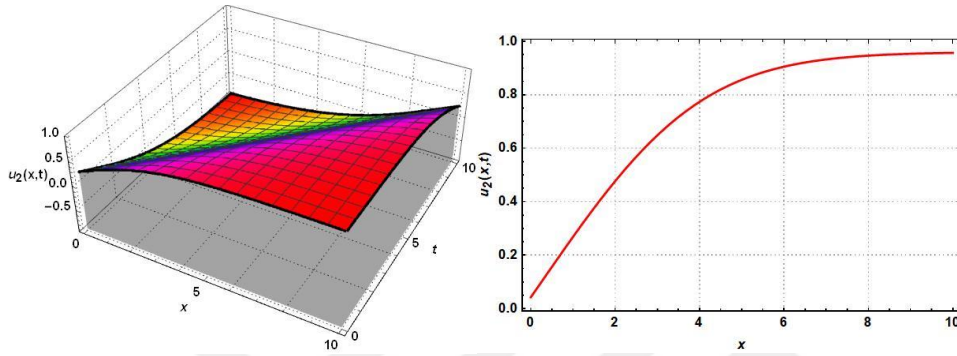
(5.13) denkleminde hesaplanan sabitler (5.12) çözümünde yerlerine yazılır ve aşağıdaki gezici dalga çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = -1 + c - 6c\lambda^2 - \frac{12c\mu^2}{\left(-\frac{\mu}{\lambda} + A \cosh[(-ct+x)\lambda] - A \sinh[(-ct+x)\lambda]\right)^2} \\ - \frac{24c\lambda\mu}{-\frac{\mu}{\lambda} + A \cosh[(-ct+x)\lambda] - A \sinh[(-ct+x)\lambda]} \end{aligned} \quad (5.15)$$

(5.15) ile sunulan çözüm hiperbolik formda olup bu çözüm üstel formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_2(x, t) = -1 + c - \frac{6c\lambda^2 \left(A^2 e^{2cx^2} \lambda^2 + 2Ae^{(ct+x)^2} \lambda \mu - e^{2x^2} \mu^2 \right)}{\left(Ae^{cx^2} \lambda - e^{x^2} \mu \right)^2} \quad (5.16)$$

(5.15) veya (5.16) gezici dalga çözümündeki sabitlere kararlı durumda ve uygun değerler verilerek dalganın herhangi bir andaki görüntüsü aşağıdaki gibidir (Şekil 5.2).



Şekil 5.2. (5.15) çözümündeki $\lambda=0.4$, $\mu=0.8$, $c=1$, $A=-3$ sabitleri için (5.4) denkleminin 3 boyutlu ve 2 boyutlu grafikleri

(5.15) ile verilen denklem gezici dalga çözümüdür. Bu gezici dalga çözümündeki sabitlere kararlı durumda özel değerler verildiğinde, şekil 5.2 ile verilen soliton dalganın herhangi bir andaki görüntüsüdür.

Durum 2

$$a_0 = -1 + c - 6c\lambda^2, a_1 = 0, a_2 = -12c\mu^2, n = \frac{1}{2}(-2c + c^2 - 36c^2\lambda^4), \alpha = 5c\lambda, \quad (5.17)$$

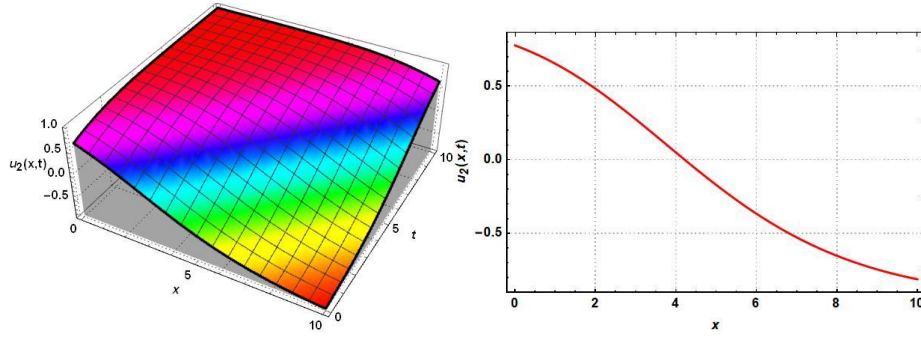
(5.17) deki hesaplanan sabitler (5.12) çözümünde yerlerine yazılır ve aşağıdaki gezici dalga çözümü elde edilir.

$$u_3(x, t) = -1 + c + 6c\lambda^2 - \frac{12c\mu^2}{\left(-\frac{\mu}{\lambda} + A \cosh[(-ct+x)\lambda] - A \sinh[(-ct+x)\lambda] \right)^2} \quad (5.18)$$

(5.18) ile sunulan çözüm hiperbolik formda olup bu çözüm üstel formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_3(x, t) = -1 + c + c\lambda^2 \left(6 - \frac{12\mu^2}{\left(\mu - e^{cx^2 - x^2} \lambda A \right)^2} \right) \quad (5.19)$$

(5.18) veya (5.19) gezici dalga çözümündeki sabitlere kararlı durumda ve uygun değerler verilerek dalganın herhangi bir andaki görüntüsü aşağıdaki gibidir (Şekil 5.3).



Şekil 5.3.(5.18) çözümündeki $\lambda=0.4$, $\mu=0.8$, $c=1$, $A=-3$ sabitleri için (5.4) denkleminin 3 boyutlu ve 2 boyutlu grafikleri.

(5.18) ile verilen denklem gezici dalga çözümüdür. Bu gezici dalga çözümündeki sabitlere kararlı durumda özel değerler verildiğinde, şekil 5.3 ile verilen soliton dalganın herhangi bir andaki görüntüsüdür.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Literatürde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için birçok çözüm metodu geliştirilmiştir. Bu tez çalışmasında, lineer olmayan Joseph-Egri (JEE) ve Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) kısmi diferansiyel denklemlerinin gezici dalga çözümlerini üretmek için $\frac{1}{G'}$ açılım metodu dikkate alınmıştır. Uygulama sonucunda, hiperbolik çözümler elde edilmiştir. Bu metod ile çözümü elde edilen denklemlerin hazır paket bilgisayar programları yardımıyla iki ve üç boyutlu çizilen grafikleri, çözüm fonksiyonlarının hiperbolik fonksiyon özelliği taşıdığını göstermiştir. Keyfi sabitlere verilen değerlerle, dalganın farklı konumdaki grafikleri incelenmiştir. Denklem çözümleri bilgisayar paket programı yardımları ile elde edilen tüm durumların kısmi diferansiyel denklemleri sağladığı görülmüştür. Bu da kullanılan $\frac{1}{G'}$ açılım metodunun güvenilirliğini sağlamıştır. Böylelikle daha sonra yapılacak araştırmalarda, diğer çözüm yöntemleriyle elde edilen bulguların benzerlikleri ve farklılıkları karşılaştırılarak araştırılmalara katkı sağlaması öngörülmektedir. Bu tez çalışmasında, literatürde ilk kez lineer olmayan Joseph-Egri (JEE) ve Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) kısmi diferansiyel denklemlerinin $\frac{1}{G'}$ açılım metodu gezici dalga çözümleri elde edilmiştir.

Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) kısmi diferansiyel denklemi için çeşitli yöntemlerle çözümler elde edilmiştir. [64] doktora çalışmasında, BBMB denklemlerinin $\frac{G'}{G}$ açılım metodu ile çözümleri elde edilmiştir. Çözüm sonucunda BBMB denklemi için rasyonel ve trigonometrik çözümlerin olmadığı sonucuna varılmıştır [64]. Ayrıca bilgisayar paket programlar yardımıyla çözümler yapılmaya çalışırken $\frac{1}{G'}$ açılım metodu ile kıyaslanırsa, çözüme götüren değerleri elde etmek bilgisayarı oldukça zorlamaktadır. Bizim çalışmamızda, $\frac{1}{G'}$ açılım metodu ile BBMB kısmi diferansiyel denklemin hiperbolik çözümler elde edilmiştir ve çözümü elde edilen denklemlerin iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir. $\frac{1}{G'}$ açılım metodu ile ilk kez BBMB denklemi çözüm fonksiyonları, bu tez çalışmasında araştırılmıştır. Benzer kısmi diferansiyel denklemlerin, analitik çözümlerinin hesaplanmasında ve bu denklemlerin fiziksel yapısının incelenmesi konusunda farklı metodlarla çalışmak, denklemlerin fiziksel yapısının incelenmesi konusunda bilim insanlarına yararlı olması öngörülmektedir. Bu uygulamalar sayesinde farklı yöntemlerle çözülen benzer kısmi diferansiyel denklemleri karşılaştırabiliriz. Böylece bu çalışmalarla birlikte, $\frac{1}{G'}$ açılım metodunun doğruluğu görülmüştür.

[50] Yüksek lisans çalışmasında, BBM-Burgers denklemi ile temsil edilen geniş uygulamaları olan fiziksel problemler için kübik B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanmış ile septik B-spline kollokasyon yönteminin doğru, pratik ve güçlü olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu çalışmamızda, $\frac{1}{G'}$ açılım metodu ile BBMB denklemi üzerinde elde edilen sonuçlar benzer şekilde bu tez çalışmasında [50] araştırılan, diğer metotlar gibi güçlü, doğru ve pratik bir yöntemdir.

Joseph-Egri (JEE) kısmi diferansiyel denklemi, çeşitli yöntemlerle çözümler elde edilmiştir. İlk olarak Joseph- Egri denklemi, hiperbolik fonksiyon çözümleri, trigonometrik fonksiyon çözümleri ve rasyonel çözümleri dahil olmak üzere üç tip kesin çözümünü elde etmek için [42]' da $\frac{G'}{G}$ genişletme yöntemi kullanılmıştır. Taghizadeh ve Mirzazadeh rasyonel ve periyodik benzeri çözümler elde edebilmek için genişletilmiş homojen denge yöntemini kullanmıştır [43]. Bu çalışmada [43], Joseph-Egri (TRLW) denkleminin tam ilerleyen dalga çözümlerini oluşturmak için genişletilmiş homojen denge yöntemi kullanılmıştır. Rasyonel ve periyodik benzeri çözümler içeren pek çok tam ilerleyen dalga çözümü başarıyla elde edilmiştir. Bu yöntem integrallenemeyen denklemlere uygulanabildiği gibi integrallenebilen denklemlere de uygulanabilir. Bu çalışmamızda, $\frac{1}{G'}$ açılım metodu ile JEE denklemi üzerinde elde edilen sonuçlar benzer şekilde bu tez çalışmasında [43] araştırılan, diğer metotlar gibi güçlü, doğru ve pratik bir yöntemdir.

JEE denkleminin çeşitli tek dalga çözümleri [29]' da genişletilmiş en basit denklem yöntemi kullanılarak Joseph-Egri denkleminin birkaç soliter dalga çözümü elde edilmiştir. Daha sonra $\exp(-\Phi(\xi))$ – genişletme yöntemi aracılığıyla ile İslam ve arkadaşları tarafından bazı yeni ilerleyen dalga çözümleri türetilmiştir [29]. Son zamanlarda Joseph-Egri denkleminin tek ilerleyen dalga atom çözümlerini oluşturmak için [80]' da polinom tam ayırım sistemi önerildi. [81] 'de JEE 'ye açık tek dalga çözümleri sunmak için genişletilmiş yardımcı yöntemler sunulmuştur. Bu yöntemle JEE için pek çok yeni ve etkili tam ilerleyen dalga çözümü elde edilmiştir. [82]' da denklemin ilerleyen dalgalarını incelemek için dinamik sistemin çatallanma yöntemi uygulanmış ve JEE denkleminin sınırlı sınırsız tüm ilerleyen dalga çözümlerinin tam ifadeleri verilmiştir. Bu belirtilen bu doğrudan yöntemler, Joseph-Egri denkleminin ilerleyen dalga çözümlerini verimli bir şekilde elde etmek için uygulanabilmesine rağmen, bazı ilerleyen dalga çözümleri yine de kaybolabilir. Aslında Joseph-Egri denkleminin ilerleyen dalgalarının, özellikle de sınırsız ilerleyen dalgaları nedeniyle, literatürde tam olarak tartışılmadığını görüyoruz. Bizim çalışmamız bu açığı giderebilmek ve farklı bir yöntemle farklı hiperbolik çözümler elde ederek literatürde çalışmalara ışık tutması açısından önemlidir. $\frac{1}{G'}$ açılım metodu ile ilk kez Joseph-Egri denklemi çözüm fonksiyonları, bu tez çalışmasında araştırılmıştır. Benzer kısmi diferansiyel denklemlerin, analitik

öz mlerinin hesaplanmasında ve bu denklemlerin fiziksel yapısının incelenmesi konusunda farklı metotlarla çalışmak, denklemlerin fiziksel yapısının incelenmesi konusunda bilim insanlarına yararlı olması öngörülmektedir. Bu uygulamalar sayesinde farklı yöntemlerle çözülen benzer kısmi diferansiyel denklemleri karşılaştırabiliriz. Bu alışmalar sonucunda, $\frac{1}{G'}$ açılım metodunun doğruluğu görülmüştür.



7. SONUÇLAR

Matematik ve fizikte doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler, mühendislik ve uygulamalı bilimlerdeki birçok fenomen doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle modellenir. Yerçekiminden, akışkanlar dinamiğine kadar birçok farklı fiziksel sistemi tanımlarlar. Sığ su dalgalarının hareketini tasvir eden benzer doğrusal olmayan denklemlerin tam form çözümlerinin bilinmesi, çözümlerin kararlılık analizine yardımcı olur ve doğrusal olmayan olayların daha iyi anlaşılmasına rehberlik eder. Soliton dalga çözümleri bazı fiziksel problemlerin davranışlarını çözümlemede etkilidir. Bu yüzden uygulamalı matematikte bu tür denklemlerin çözümlerini bulmak oldukça iyi sonuçlar doğurur. Soliton çözümlerinin analitik ve sayısal şekilde yorumlanması, solitonlar hakkındaki çalışmaları daha da değerli kılmıştır. Günümüzde soliton dalgaları akışkanlar mekaniği, lazer fiziği, biyofizik, süper iletkenlik fiziği gibi çok sayıda alanda direkt uygulama alanına sahiptir. Böylece yeterli ve faydalı sonuçlar elde etmek adına birçok analitik metot çalışılmakta olup literatüre kazandırılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, literatürde var olan ve birçok uygulaması bulunan $\frac{1}{G'}$ açılım metodunun analizi şeklindedir. Bu metodun Joseph-Egri (JEE) ve Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) kısmi diferansiyel denklemlerine uygulanması yapılmıştır. Uygulama sonucunda hiperbolik çözümler elde edilmiştir. Elde edilen çözümlerin, denklemi sağladığı bilgisayar paket programları kullanılarak gösterilmiş ve grafikleri çizilmiştir. Sunulan çözümlerde durağan dalgayı temsil eden grafikleri elde etmek için sabitlere özel değerler verilip, farklı sabit değerlerde dalga'nın konumu, genliği, dalga boyu, hızının değişebildiği görülmektedir. Bu çalışmada $\frac{1}{G'}$ açılım metodunun analitik çözümler aramak için yeterli olduğu sonucuna varılmıştır. $\frac{1}{G'}$ açılım metodunun birçok doğrusal olmayan denklem ve denklem sistemlerinde uygulama alanı bulmuştur. Bu uygulamalar sayesinde $\frac{1}{G'}$ açılım metodunun doğruluğu görülmüştür. Böylece lineer olmayan benzer kısmi diferansiyel denklemlerin, analitik çözümlerinin hesaplanmasında ve bu denklemlerin fiziksel yapısının incelenmesi konusunda bilim insanlarına yararlı olması öngörülmektedir.

ÖNERİLER

Bu çalışmada kullanılan denklemler farklı metotlarla çözümlere karşılaştırılabilir. Aynı zamanda çözülmemiş lineer olmayan benzer kısmi diferansiyel denklemler için de $\frac{1}{G'}$ -açılım metodu uygulayarak yeni çözümler elde edilebilir. Böylece lineer olmayan benzer kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin hesaplanmasında ve bu denklemlerin fiziksel yapısının incelenmesi konusunda yeni çalışmalar ortaya çıkabilir. Elde edilen çözümler paket programlar yardımıyla çözümler karşılaştırılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Qin Zhou, Mohammad Mirzazadeh, Essaid Zerrad, Anjan Biswas & Millivoj Belic (2016) Bright, dark, and singular solitons in optical fibers with spatio-temporal dispersion and spatially dependent coefficients, *Journal of Modern Optics*, 63:10, 950-954, DOI:10.1080/09500340.2015.1111456
- [2] Becker, C., Stellmer, S., Soltan-Panahi, P. et al. (2008). Oscillations and interactions of dark and dark-bright solitons in Bose-Einstein condensates. *Nature Phys* 4, 496-501 <https://doi.org/10.1038/nphys962>
- [3] C. Headley and G.P. Agrawal, *Raman Amplification in Fiber Optical Communication Systems*, Academic Press (2004).
- [4] Menyuk, C.R., Marks, B.S. Interaction of polarization mode dispersion and nonlinearity in optical fiber transmission systems. *J Lightwave Technol* 2006; 24:2806-26. Suche in Google Scholar, <https://doi.org/10.1109/JLT.2006.875953>
- [5] B.C. Collings, S.T. Cundiff, N. N. Akhmediev, J.M. Soto-Crepso, K. Bergman, and W.H. Knox, (2000). "Polarization-locked temporal vector solitons in a fiber laser: experiment," *J. Opt. Soc. Am. B* 17(3), 354-365.
- [6] [https://tr.wikipedia.org/wiki/Dalga_\(fizik\)](https://tr.wikipedia.org/wiki/Dalga_(fizik)), Erişim: 7 Nisan 2023
- [7] Bulut H., Baskonus H. M., Pandir Y. (2013). The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized Burgers equation. In *Abstract and applied analysis* (Vol. 2013).
- [8] Al-Khaled K., Momani S., Alawneh A. (2005). Approximate wave solutions for generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Appl. Math. Comput.* 171 (1) pp.281–292.
- [9] Tari H., Ganji D. (2007). Approximate explicit solutions of nonlinear bbmb equations by He's methods and comparison with the exact solution, *Phys. Lett. A* 367 (1–2) pp.95–101.
- [10] Ganji Z., Ganji D., Bararnia H. (2009). Approximate general and explicit solutions of nonlinear bbmb equations by exp-function method, *Appl. Math. Model.* 33 (4) pp.1836–1841.
- [11] Fakhari A., Domairry G. (2007). Approximate explicit solutions of nonlinear bbmb equations by homotopy analysis method and comparison with the exact solution, *Phys. Lett. A* 368 (1–2) pp.64–68.
- [12] Zarebnia M., Parvaz R. (2016). On the numerical treatment and analysis of Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation, *Appl. Math. Comput.* 284 pp.79–88.
- [13] Arora G., Mittal R., Singh B. (2014). Numerical solution of bbm-burger equation with quartic b-spline collocation method, *J. Eng. Sci. Technol.* 9 pp.104–116.
- [14] He J.-H. (1998). Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 167 (1–2) pp.57–68.
- [15] Evans D. J., Bulut H. (2002). A new approach to the gas dynamics equation: an application of the decomposition method. *International journal of computer mathematics*, 79(7), 817-822.
- [16] Tari H., Ganji D. (2007). Approximate explicit solutions of nonlinear bbmb equations by He's methods and comparison with the exact solution, *Phys. Lett. A* 367 (1–2) pp.95–101.

- [17] Ali K.K., Yilmazer R., Yokus A., Bulut H. (2020). Analytical solutions for the (3+ 1)-dimensional nonlinear extended quantum Zakharov–Kuznetsov equation in plasma physics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 124327.
- [18] Rashidi M., Bég O.A., Rahimzadeh N. (2012). A generalized differential transform method for combined free and forced convection flow about inclined surfaces in porous media, *Chem. Eng. Commun.* 199 (2) pp.257–282.
- [19] Shang, Y. (2007). Bäcklund transformation, Lax pairs and explicit exact solutions for the shallow water waves equation, *Applied Mathematics and Computation*, 187, pp. 1286-1297.
- [20] Bock, T.L., Kruskal, M.D. (1979). A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation, *Physics Letters A*, 74, pp. 173-176.
- [21] Feng, Z. S. (2002). The first integral method to study the Burgers-Korteweg –deVries equation *Journal Physics A*, 35, pp.345-349.
- [22] He, J.H., Wu, X.H. (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 30, pp. 700-708.
- [23] Chen, H., Zhang, H. (2004). New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 19, pp. 71-76.
- [24] Chen, Y., Wang, Q. and Li B. (2004). Jacobi elliptic function rational expansion method with plastik symbolic computation to construct new doubly periodic solutions of nonlinear evolution equations, *Zeitschrift für Naturforschung A*, 59, pp. 529-536.
- [25] Guo, S., Zhou, Y. (2010). The extended (G'/G)-expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, 215, pp. 3214-3221
- [26] Lü, H.L., Liu, X.Q. and Niu, L. (2010). A generalized (G'/G) -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, 215, pp. 3811-3816
- [27] Li Z., L. (2010). Constructing of new exact solutions to the GKdV-mKdV equation with any-order nonlinear terms by (G'/G)-expansion method. *Appl. Math. Comput.* 217, 1398–1403.
- [28] Yokuş A. (2011). Bazı özel lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve bu çözümlerin karşılaştırılması/Solutions of some nonlinear partial differential equations and comparison of their solutions, Doktora tezi.
- [29] Islam S. M. R., Khan K. and Akbar M. A. (2015). Exact solutions of unsteady Korteweg-de Vries and time regularized long wave equations, *SpringerPlus* 4, pp.124.
- [30] Oruç, A. (2017). New algorithm based on Lucas polynomials for approximate solution of 1d and 2d nonlinear generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation, *Comput. Math. Appl.* 74 (12) 3042–3057.
- [31] Bozacı, E. (2000), Değişken Katsayılı Diferansiyel Denklemler, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [32] Yaşar, B. İ., 2005, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [33] <https://acikders.ankara.edu.tr/mod/resource/view.php?id=77450>, Erişim: 20 Kasım 2023
- [34] https://tr.wikipedia.org/wiki/Diferansiyel_denklem# , Erişim: 10 Nisan 2023

- [35] <https://tua.gov.tr/tr/blog/havacilik-ve-teknoloji/dalgalar-ve-elektromanyetik-tayf-spektrum>, Erişim: 8 Eylöl 2022
- [36] https://avys.omu.edu.tr/storage/app/public/nevzat/132803/10_HAFTA.pdf , Erişim: 10 Eylöl 2023
- [37] Scott, A. C., Chu, F. Y. F., & McLaughlin, D. W. (1973). "The soliton: A new concept in applied science", *Proceedings of the IEEE*, 61(10), 1443-1483.
- [38] Duran S., (2012), Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Özel Dönüşümler Yardımıyla Dalga Çözümleri ve Bu Çözümlerin Analizleri, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [39] Yokuş A. (2015). An expansion method for finding traveling wave solutions to nonlinear pdes, İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi.
- [40] Özdemir, E. (2009), Korteweg-de Vries Denklemleri Üzerine Bir Çalışma, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [41] Benjamin T.B., Bona J.L. and Mahoney J.J. (1972). Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 272, pp.47.
- [42] M.L. Wang, X.Z. Li and J.L. Zhang, (2008) The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Phys. Lett. A*. 372 417- 423
- [43] Taghizadeh N. and Mirzazadeh M. (2012). Exact travelling wave solutions of Joseph–Egri (TRLW) equation by the extended homogeneous balance method, *Int. J. Appl. Mat. Com.* 4, pp. 96.
- [44] E. Yusufoglu and A. Bekir, (2006). Solitons and periodic solutions of coupled nonlinear evolution equations by using Sine-Cosine method, *Internat. J. Comput. Math.* 83(12) 915-924.
- [45] S.K. Liu; Z. Fu; S.D. Liu and Q. Zhao. (2001). Jacobi elliptic function method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations, *Phys. Lett. A*. 289 69-74
- [46] W. Malfliet; W. Hereman (1996). The tanh method: II. Perturbation technique for conservative systems, *Phys. Scripta*, 54 569-575.
- [47] M.L. Wang., (1995). Solitary wave solution for variant Boussinesq equation. *Phys. Lett. A*. 199 169-172.
- [48] M.L. Wang. (1996) Application of homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equation in mathematical physics. *Phys. Lett. A*. 21667-75.
- [49] N.Taghizadeh, M.Mirzazadeh, F.Farahrooz, (2010) Exact soliton solutions for Equal Width Wave equation. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 4(10) 4802-4809.
- [50] Bozdağ, A. (2021), Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBM-BURGERS) Denkleminin B-spline sonlu eleman yöntemleri ile sayısal çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [51] Morgan, A.G. (2021), A Mass-Conserving Formulation of the Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation on Star Networks. *arXiv preprint arXiv:2103.03907*.
- [52] Shallu, Kukreja V.K. (2022). Numerical treatment of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' equation with fourth-order improvised b-spline collocation method, *J. Ocean Eng. Sci.* 7 (2) pp.99–111.

- [53] Dehghan M., Abbaszadeh M., Mohebbi A. (2015). The use of interpolating element-free Galerkin technique for solving 2d generalized Benjamin-Bona-MahonyBurgers' and regularized long-wave equations on non-rectangular domains with error estimate, *J. Comput. Appl. Math.* 286 pp.211–23.
- [54] Chen, Y., Li B., Zhang H. (2005). Exact solutions for two nonlinear wave equations with nonlinear terms of any order, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 10 (2) pp.133–138.
- [55] Arora S., Kaur I., Potucek, F. (2015). Modelling of displacement washing of pulp fibers using the Hermite collocation method, *Br. J. Chem. Eng.* 32 (2) pp. 563–575.
- [56] Dehghan M., Shafieeabyaneh N., Abbaszadeh M. (2021). Numerical and theoretical discussions for solving nonlinear generalized Benjamin-Bona-Mahony Burgers equation based on the Legendre spectral element method, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* 37 (1) pp.360–382.
- [57] Ebrahimijahan A., Dehghan M. (2021). The numerical solution of nonlinear generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' and regularized long-wave equations via the meshless method of integrated radial basis functions, *Eng. Comput.* 37 (1) pp.93–122.
- [58] Shallu, Kukreja V.K. (2021). Analysis of RLW and MRLW equation using an improvised collocation technique with SSP-RK43 scheme, *Wave Motion* 105 pp.102761.
- [59] Budd C.J., Iserles A. (1999). Geometric integration: numerical solution of differential equations on manifolds, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* 357 pp.945–956.
- [60] Hairer E. (2001). Geometric integration of ordinary differential equations on manifolds, *BIT Numer. Math.* 41 pp.996–1007.
- [61] Iserles A., Zanna, (2000). A Lie-group methods, *Acta Numer.* 9 pp.215–365.
- [62] Yokuş A., Durur, H. (2019). Complex hyperbolic traveling wave solutions of Kuramoto-Sivashinsky equation using $(1/G')$ expansion method for nonlinear dynamic theory. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 21(2), 590-599
- [63] Yokus, A., Durur, H. (2019). $(1/G')$ -Açılım Metoduyla Sawada-Kotera Denkleminin Hiperbolik Yürüyen Dalga Çözümleri. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 19(3), 615-619.
- [64] Özdemir T., (2016). Tanh-Yöntemi ile (G'/G) Açılım Yönteminin Karşılaştırması ve Birleştirilmiş Yöntemin Geliştirilmesi, *Doktora Tezi*, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [65] Yokuş, A., Duran, S., Durur, H. (2022). Analysis of wave structures for the coupled Higgs equation modelling in the nuclear structure of an atom. *The European Physical Journal Plus*, 137(9), 992.
- [66] Duran, S., Durur, H., Yokuş, A. (2023). Traveling wave and general form solutions for the coupled Higgs system. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(8), 8915-8933.
- [67] Yokuş, A., Durur, H., Duran, S. (2021). Simulation and refraction event of complex hyperbolic type solitary wave in plasma and optical fiber for the perturbed Chen-Lee-Liu equation. *Optical and Quantum Electronics*, 53, 1-17
- [68] A. Yokuş (2018). Comparison of Caputo and conformable derivatives for time-fractional Korteweg-de Vries equation via the finite difference method. *International Journal of Modern Physics B*, 32(29), 1850365
- [69] Durur H., Yokuş A., (2019). $(1/G')$ -Açılım Metoduyla Sawada-Kotera Denkleminin Hiperbolik Yürüyen Dalga Çözümleri. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 19(3), 615-619.

- [70] Taghizade N. and Neirameh A. (2010). The solutions of TRLW and Gardner equations by (G'/G) -expansion method, *Int. J. Nonlinear Sci.* 9, pp.305
- [71] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura R.M. (1967). Method for solving the Korteweg-deVries equation, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 19, pp. 1095- 1097.
- [72] Hirota, R. (1971). Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collision of solitons, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 27, pp. 1192-1194.
- [73] Fan, E. (2000). Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. *Phys Lett A.* Vol. 277, No. 4-5, pp. 212-218.
- [74] Wang, M. (1995). Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations, *Phys. Lett. A* Vol. 199, pp. 169-172.
- [75] Ali, A.H.A., Soliman, A.A. and Raslan, K.R. (2007). Soliton solution for nonlinear partial differential equations by cosine-function method, *Physics Letters A*, Vol. 368, pp. 299-304.
- [76] Khan, M. A. (2017). Numerous Exact Solutions of Non-linear Partial Differential Equations by Tan-ot Method, *Evaluation*, 11, pp.3.
- [77] Gai L.T., Sudao B. L. G. and Bao C. L. (2014). Applications of the Extended Simplest Equation Method to two nonlinear evolution equations, *J. Inner Mongolia Univ. Tech.* 1, pp.001.
- [78] Fan, H., (2006). August. Research on a New Type of City Intelligent Traffic Lights, *Proceedings, IEEE 2006 Chinese Control Conference*, Harbin, China, 2006, pp. 1733-1736.
- [79] Durur, H., Yokus, A. (2020). Analytical solutions of Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 22(2), 628-636.
- [80] Y. Na, D.Y. Dai, L.Y. Xiong, H.T. Lu, L.K. Meng, (2016), The single travelling wave solutions to the Joseph—Egri equation *J. Sci. Teachers' Coll. Univ.*, 36 p. 18
- [81] Y.Sabi'u, J., et al: Dynamical Behaviour of the Joseph-Egri Equation *Thermal Science:Year 2023*, Vol.27, Special Issue 1,pp. S19-S28
- [82] Fan, Feiting; Zhou, Yugian;Liu, Oian, Bifurcation of Traveling Wave Solutions for the Joseph-Egri Equation *Reports on Mathematical Physics*, Volume 83, Issue 2, p. 175-19
- [83] Duran S., (2021). An Investigation of the Physical Dynamics of a Traveling wave solution called a Bright soliton. *Physica Scripta* 96(12):125251
- [84] Duran S., (2021). Dynamic Interaction of Behaviors of Time-Fractional Shallow Water Wave Equation System. *Modern Physics Letters B* 35(22):2150353
- [85] Duran S., (2021). Extractions of Travelling Wave Solutions of (2+1)-Dimensional Boiti-Leon-Pempinelli System Via $(G'/G, 1/G')$ -Expansion Method. *Optical and Quantum Electronics* 53(6)

ÖZGEÇMİŞ

Emine TEKDAĞ

Category	Percentage
Very satisfied	10%
Satisfied	25%
Dissatisfied	35%
Very dissatisfied	30%

[REDACTED]
 [REDACTED]

© 2006 The Authors