ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

VERİLEN BİR ORANDA A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Mustafa GÜLFIRAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2023

ÖZET

Doktora Tezi

VERİLEN BİR ORANDA A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Mustafa GÜLFIRAT

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Bu doktora tezi beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

Orijinal sonuçlarımız iki, üç ve dördüncü bölümlerde verilmiştir.
İkinci bölümün ilk kesimi ihtiyaç duyulacak bazı temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. İkinci bölümün ikinci kesiminde $o(a_n)$ oranıyla $A-$yoğunluk kavramı tanımlanıp belirli özellikleri incelenmiştir. Sonraki kesimde $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaklık aracılığı ile, $o(a_n)$ oranıyla $A-$kuvvetli yakınsaklığın karakterizasyonu verilmiştir. Son kesimde ise $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaklık için kriterler elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde $karma$ dizilerin toplanabilirliği çalışılmış ve $karma$ dizilerin $o(a_n)$ oranıyla $A-$limitinin ayrışımdaki kümelerin $o(a_n)$ oranıyla $A-$yoğunluklarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebileceğini gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde Korovkin Tipi Yaklaşım sonuçları verilmiştir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

Kasım 2023, 38 sayfa

Anahtar Kelimeler: $A-$istatistiksel yakınsaklık, $A-$kuvvetli toplanabilme, $A-$düzgün integrallenebilme, dağılımsal yakınsaklık, $A-$yoğunluk.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

A-STATISTICAL CONVERGENCE WITH A RATE

Mustafa GÜLFIRAT

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

This Ph.D. thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The original results of this thesis are included in the second, third and fourth chapters. In the first part of the second chapter, some definitions and theorems have been given. In the second part of the second chapter, the concept of $A-$density with the rate of $o\left(a_n\right)$ is defined and certain properties are examined. In the next part, $A-$strong convergence with the rate of $o\left(a_n\right)$ via $A-$statistical convergence with the rate of $o\left(a_n\right)$ has been characterized. In the last part, some criteria for $A-$statistical convergence with the rate of $o\left(a_n\right)$ have been obtained.

In the third chapter, the summability of spliced sequences has been studied and the $A-$limit with the rate of $o\left(a_n\right)$ of spliced sequences may be expressed as a linear combination of $A-$densities with the rate of $o\left(a_n\right)$ of the sets in the partition.

Finally, the last chapter is devoted to the analysis of the results obtained in the thesis.

November 2023, 38 pages

Key Words: $A-$statistical convergence, $A-$strong summability, $A-$uniform integrability, distributional convergence, $A-$density.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarımda ve lisansüstü öğrenimim boyunca tecrübeleriyle bana yol gösteren, benden hiçbir desteği esirgemeyen ve her anlamda yardımcı olan kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim ve doktora öğrenimimin ilk 4 yılında tez danışmanlığımı yürütmüş olan, tez konumu ve akademik çalışmalarımızdaki problemleri bize öneren ve çözüm sürecinde bize eşlik eden, emeklilik sebebiyle tez danışmanlığımdan ayrılan, kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a, hayata ve matematiğe ilişkin öğrendiğim ve öğreneceğim herşey için en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Teze katkılarından dolayı tez izleme kurulu üyesi hocam Sayın Prof. Dr. Oktay Duman (TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü öğrenimimin her aşamasında değerli bilgilerini benimle paylaşan, tez izleme kurulu üyesi hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca öğretim elemanı olarak görev aldığım, akademik çalışmalarımı yürüttüğüm Ankara Üniversitesi Matematik Bölümüne teşekkürlerimi sunarım.

Varını yoğunu çocuklarına adayan annem Perihan Gülfırat'a ve babam Erol Gülfırat'a, destekleriyle yanımda olan eşim Yelda Gülfırat'a ve oğlum Cihan Ege Gülfırat'a teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK 2211-E Doğrudan Yurtiçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Akademik çalışmalarıma sağladığı destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa GÜLFIRAT
Ankara, Kasım 2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

w	Reel terimli dizilerin vektör uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
c	Reel terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	Reel terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
ℓ_∞	Reel terimli sınırlı diziler uzayı
E^c	E kümesinin tümleyeni
$\delta_A(E)$	$E \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin $A-$yoğunluğu
$\delta_{A,a}(E)$	$E \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin $o(a_n)$ oranıyla $A-$yoğunluğu
$W_a(A)$	$o(a_n)$ oranıyla $A-$kuvvetli toplanabilir diziler uzayı
$U_{A,a}$	$o(a_n)$ oranıyla $A-$düzgün integrallenebilir diziler uzayı
χ_E	E kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\mathrm{Re}(z)$	z karmaşık sayısının reel kısmı
$\mathrm{Im}(z)$	z karmaşık sayısının sanal kısmı
$C(X)$	X üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonların uzayı
$\Delta(f)$	f fonksiyonunun köşegeni
$Z(f)$	f fonksiyonunun sıfırlarının kümesi
$\Vert x\Vert_\infty$	$\sup_k \vert x_k\vert$

1. GİRİŞ

Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından tanıtılan istatistiksel yakınsaklık kavramı Šalát (1980), Fridy (1985), Connor (1988, 1989), Fridy ve Miller (1991), Fridy ve Orhan (1993) tarafından geliştirilmiştir.

Yoğunluk kavramı Freedman ve Sember (1981) tarafından tanıtılmış ve bir A kümesinin yoğunluğunun Cesàro matrisi ile ilişkisi incelenmiştir. Yoğunluk kavramında Cesàro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir $A = (a_{nk})$ matrisi alarak $A-$yoğunluk kavramı Freedman ve Sember (1981) tarafından geliştirilmiş ve

$$E(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin $A-$yoğunluğunun sıfır olması Connor (1989), Kolk (1991) ve Miller (1995) tarafından $A-$istatistiksel yakınsaklık tanımı olarak verilmiştir. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olmak üzere 2003 yılında Duman vd. tarafından her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k - L| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

olması, x dizisinin L sayısına $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaması olarak tanımlanmış ve 2003 yılında Demirci vd. tarafından $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsak diziler uzayının bir lokal konveks $FK-$topolojisi ile donatılıp donatılamayacağı incelenmiştir.

$A-$kuvvetli yakınsaklık ve $A-$istatistiksel yakınsaklığın denkliği sınırlı diziler için Connor (1989), Kolk (1991), Fridy ve Orhan (1993) tarafından gösterilmiştir. Bu denklikte dizilerin sınırlılık şartını hafifletebilmek için Khan ve Orhan (2010) reel terimli diziler için $A-$düzgün integrallenebilme kavramını tanımlamışlardır ve bir dizinin $A-$kuvvetli yakınsak olması için gerek ve yeter şartın $A-$istatistiksel yakınsak ve $A-$düzgün integrallenebilir olması gerektiğini ispatlamışlardır.
Schoenberg (1959) ve Šalát (1980) tarafından istatistiksel yakınsaklık için verilen kriterlerin bazı benzerleri, Demirci (1998) tarafından doktora çalışmasında $A-$istatistiksel yakınsaklık için genişletilmiştir.

$Karma$ (*spliced*) diziler Ohio'da Kent State Üniversitesinde Osikiewicz (1997, 2005) tarafından, doktora tezinde tanımlanmış ve hangi negatif olmayan matrislerin bu karma dizleri toplayabileceği incelenmiştir. 2013 yılında Ünver vd. metrik uzaylarda karma dizilerin toplanabilirliğini çalışmış ve Banach uzaylarında karma dizilerin $A-$limitlerinin Bochner integral gösterimini vermişlerdir. 2016 yılına gelindiğinde Yurdakadim ve Ünver, yakınsak diziler yerine sınırlı diziler alarak karma dizilerin toplanabilirliğini incelemiştir.

Fonksiyon yaklaşımı teorisinde en etkileyici sonuçlardan biri sürekli fonksiyonlar uzayında pozitif lineer operatörlerin yakınsamasına ilişkin Bohman-Korovkin Teoremidir. Korovkin Teoremi olarak bilinen bu teorem, Weierstrass'ın klasik yaklaşım teoreminin S. Bernstein tarafından verilen ispatının genelleştirilmesinden ortaya çıkar. Aslında Korovkin tipi teoremler, bir fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisinin bir "yaklaşım süreci" olup olmadığını veya buna eşdeğer olarak "özdeşlik operatörüne" kuvvetli yakınsak olup olmayacağını belirleyen teoremlerdir. Bu konuda ilk çalışma P.P. Korovkin tarafından 1953 yılında yapılmıştır (bkz. Korovkin 1960). 2006 yılında Lomeli ve Garcia tarafından sınırlayıcı fonksiyonlar tanımlanmış ve bu yeni kavram sayesinde yaklaşım teoriye ilişkin mevcut bazı sonuçlara alternatif ispatlar verilmiştir.

Üzerinde çalıştığımız bu doktora tezinde $A-$istatistiksel yakınsaklığa ilişkin bilinen bazı sonuçların verilen bir oranda $A-$istatistiksel yakınsaklığı ile ilgileneceğiz. Bu amaçla ilk önce $o\left(a_n\right)$ oranıyla $A-$yoğunluk kavramını tanımlayacağız ve belirli özelliklerini inceleyeceğiz. Sonrasında $o\left(a_n\right)$ oranıyla kuvvetli toplanabilme, dağılımsal yakınsaklık ve düzgün integrallenebilme kavramlarını tanımlayacağız ve bu kavramları karakterize eden sonuçlar sunacağız. Ayrıca karma dizilere ilişkin Osikiewicz (1997, 2005) tarafından verilen sonuçların $o\left(a_n\right)$ oranlı benzerlerini çalışacağız. Son olarak $o\left(a_n\right)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaklık için yaklaşım sonuçlarını elde edeceğiz.

2. VERİLEN BİR ORANDA A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümün ilk kesiminde toplanabilme teorisinden yararlanılan bazı temel kavramlardan ve notasyonlardan bahsedilecektir. Sonraki kesimlerde $o(a_n)$ oranıyla $A-$yoğunluk, $o(a_n)$ oranıyla $A-$kuvvetli toplanabilme kavramları tanımlanacak ve belirli özellikleri incelecektir.

2.1 Temel Bilgiler

w tüm reel terimli dizilerin vektör uzayı olsun. Bir toplanabilme metodu, basit olarak, $E \subseteq w$ alt vektör uzayı (dizi uzayı) olmak üzere, E üzerinde tanımlanmış kompleks (reel) değerli lineer bir fonksiyonel olarak ifade edilir. Böylece $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) lineer fonksiyoneli bir toplanabilme metodu olacaktır.
Aslında en yaygın toplanabilme metotları sonsuz matrislerle yapılan metotlardır.
$x = (x_k)$ bir reel terimli dizi ve $A = (a_{nk})$ reel terimli bir sonsuz matris olmak üzere her n için $(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ şeklinde tanımlı genel terime sahip diziye x dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi denir ve bu dizi $Ax = ((Ax)_n)$ ile gösterilir (burada her n için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ serisinin yakınsak olduğunu kabul ediyoruz) (Boos 2000). Bu doktora tezimizde sonsuz matrislerle ilgileneceğiz.

Tanım 2.1 E ve F dizi uzayları verilsin. Her $x \in E$ için Ax mevcut ve F dizi uzayına ait ise $A = (a_{nk})$ matrisi E dizi uzayından F dizi uzayı içine bir matris dönüşümü tanımlar. E dizi uzayını F dizi uzayı içine dönüştüren tüm matrislerin kümesi (E, F) ile gösterilir ve ek olarak limiti koruyan matrislerin kümesi $(E, F; p)$ ile gösterilir (Boos 2000).

ℓ_∞, c ve c_0 ile sırasıyla reel terimli sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak diziler uzayını gösteriyoruz.

Tanım 2.2 Yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren matrislere konservatif matris denir (Boos 2000).

Tanım 2.3 Konservatif bir $A = (a_{nk})$ matrisi limiti koruyan bir matris ise, yani $A \in (c, c; p)$ ise A matrisine regülerdir denir (Boos 2000).

Tanım 2.4 A matrisi bir konservatif matris olmak üzere A matrisinin karakteristiği

$$\chi(A) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nk}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\chi(A) \neq 0$ ise A matrisine coregüler matris, aksi durumda conull matris denir (Boos 2000).

Tanım 2.5 $A = (a_{nk})$ konservatif bir matris olsun. Her $x \in c$ için $\lim Ax = t \lim x$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}$ mevcut ise A matrisine $t-$çarpımsal matris denir (Boos 2000).

Tanım 2.6 $A \in (c_0, c_0)$ olması durumunda A matrisine sıfır limitleri koruyan matris denir (Boos 2000).

Şimdi regüler matrisleri karakterize eden Silverman-Töeplitz teoremini verelim.

Teorem 2.1 Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

(ST_1) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,

(ST_2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, $k = 1, 2, 3...$,

(ST_3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ şartlarının gerçeklenmesidir (Boos 2000).

Teorem 2.2 Bir A matrisinin sıfır limitleri koruyan matris olması için gerek ve yeter şart (ST_1) ve (ST_2) koşullarını gerçeklemesidir (bkz. Teorem 2.3.6, Boos 2000).

Teorem 2.3 Bir A matrisinin $t-$çarpımsal matris olması için gerek ve yeter şart A matrisinin sıfır limitleri koruyan bir matris olması ve $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = t$ olmasıdır (Boos 2000).

2.2 $o\,(a_n)$ Oranıyla $A-$Yoğunluk

Orijinal sonuçlarımızın ilk kısmı bu kesimde verilmektedir.

Tanım 2.7 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. $E \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere E kümesinin $o\,(a_n)$ oranıyla üst ve alt yoğunluğu, sırasıyla

$$\overline{\delta}_{A,a}\,(E) = \limsup_{n} \tfrac{1}{a_n} \sum_{k\in E} a_{nk} \quad \text{ve} \quad \underline{\delta}_{A,a}\,(E) = \liminf_{n} \tfrac{1}{a_n} \sum_{k\in E} a_{nk}$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer $\overline{\delta}_{A,a}(E) = \underline{\delta}_{A,a}(E)$ ise E kümesinin $o(a_n)$ oranıyla $A-$yoğunluğu mevcuttur denir ve E kümesinin $o(a_n)$ oranıyla $A-$yoğunluğu $\delta_{A,a}(E)$ şeklinde gösterilir.

Bundan sonraki kısımlarda $\delta_{A,a}(\mathbb{N}) = \alpha$ sonlu olarak kabul edilecektir. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olduğu için α sayısı pozitiftir.

Tanım 2.8 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta_{A,a}(E(\varepsilon)) = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaktır denir, bu durumu $st_{A,a} - \lim x = L$ ile göstereceğiz (Duman vd.,2003).

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olmak üzere $A_a := (\frac{a_{nk}}{a_n})$ şeklinde tanımlansın. Dikkat edilirse A_a matrisi regüler bir matris olmak zorunda değildir. Ayrıca $\delta_{A,a}(\mathbb{N}) = \alpha < \infty$ kabulü ile A_a matrisi Teorem 2.1'in (ST_1) şartını gerçeklemektedir.

Fridy ve Khan (1998) $A-$istatistiksel yakınsaklık metodunun regüler bir metot olması için gerek ve yeter şartın A matrisinin kolonlarının sıfıra gitmesi gerektiğini ispatlamıştır. Benzer bir sonuç olarak $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaklık metodunun regüler bir metot olması için gerek ve yeter şart her $k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} = o(a_n)$, $(n \to \infty)$ olmasıdır. Bu tez boyunca $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaklık metodu regüler bir metot olarak kabul edilecektir, yani A_a matrisinin Teorem 2.1'in (ST_2) şartını gerçeklediği kabul edilecektir. Bu kabuller ile A_a matrisi bir coregüler matristir.

Şimdi tanımladığımız yoğunluk kavramının temel özelliklerini inceleyelim.

Önerme 2.1 $E \subseteq \mathbb{N}$ ve $G \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Aşağıdakiler gerçeklenir.

i) $E \subseteq G \Rightarrow \overline{\delta}_{A,a}(E) \leq \overline{\delta}_{A,a}(G)$,

ii) $\overline{\delta}_{A,a}(\varnothing) = 0$,

iii) $\overline{\delta}_{A,a}(E)$ veya $\overline{\delta}_{A,a}(\mathbb{N} \backslash E)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise $\overline{\delta}_{A,a}(\mathbb{N} \backslash E) = \alpha - \overline{\delta}_{A,a}(E)$ eşitliği sağlanır.

İspat. Kolayca elde edilebilir. ■

Demirci (2002) tarafından verilen bir sonucun bir benzerini ispatlıyoruz.

Teorem 2.4 $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ negatif olmayan regüler matrisler ve $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Eğer

$$\limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}| = 0$$

eşitliği gerçekleniyorsa, her $K \subseteq \mathbb{N}$ için $\overline{\delta}_{A,a}(K) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{\delta}_{B,a}(K) = 0$ olmasıdır.

İspat. Eğer $\overline{\delta}_{A,a}(K) = 0$ ise,

$$\limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k \in K} a_{nk} = 0 \tag{2.1}$$

gerçeklenir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \tfrac{1}{a_n} \sum_{k \in K} a_{nk} - \tfrac{1}{a_n} \sum_{k \in K} b_{nk} \right| &\leq \tfrac{1}{a_n} \sum_{k \in K} |a_{nk} - b_{nk}| \\ &\leq \tfrac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}| \end{aligned}$$

olmasından, hipotez ile

$$\limsup_n \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k \in K} a_{nk} - \frac{1}{a_n} \sum_{k \in K} b_{nk} \right| = 0$$

elde edilir. O halde (2.1) ile

$$\limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k \in K} b_{nk} = 0$$

gerçeklenir ve $\overline{\delta}_{B,a}(K) = 0$ elde edilir.

Yeter koşulun gerçeklendiği benzer şekilde görülebilir. ■

2.3 $o(a_n)$ Oranıyla $A-$Kuvvetli Toplanabilme

Bu kesimde verilen bir oranda $A-$kuvvetli toplanabilme, $A-$dağılımsal yakınsaklık ve $A-$düzgün integrallenebilme kavramlarını tanımlayacağız. İlk olarak M.K.

Khan'ın 21 Ağustos-1 Eylül 2006 tarihleri arasında Ankara Üniversitesi'nde "Probabilistic Methods in the Theory of Summability" başlıklı yaz semineri derslerinde sunduğu bir lemmanın bir benzerini vereceğiz. Sonrasında $o(a_n)$ oranıyla $A-$kuvvetli toplanabilmeyi karakterize eden bir başka teorem ispatlayacağız.

Tanım 2.9 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun.

$$W_a(A) := \{x = (x_k) : \text{bir } L \in \mathbb{R} \text{ için; } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k - L| = 0 \ \}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $x \in W_a(A)$ ise x dizisi L sayısına $o(a_n)$ oranıyla $A-$kuvvetli toplanabilirdir denir. Bu tanım, bilinen kuvvetli toplanabilmenin bir genişlemesidir.

Aşağıdaki iki tanım Khan ve Orhan (2010) tarafından verilen tanımların birer genişlemesidir.

Tanım 2.10 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{t\to\infty} \sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k|>t} a_{nk} |x_k| = 0$$

gerçekleniyor ise, $x = (x_k)$ dizisine $o(a_n)$ oranıyla $A-$düzgün integrallenebilirdir denir. $o(a_n)$ oranıyla $A-$düzgün integrallenebilir dizilerin uzayını $U_{A,a}$ ile göstereceğiz.

Dikkat edilirse her sınırlı $x = (x_k)$ dizisinin $o(a_n)$ oranıyla $A-$düzgün integrallenebilir olduğu tanımdan açıktır.
Şimdi olasılık teorisinden kullanacağımız bir kavramı hatırlatalım.

Tanım 2.11 $F : (-\infty, \infty) \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $F(-\infty) = 0$ ve $F(\infty) = 1$ olmak üzere azalmayan ve sağdan sürekli ise "dağılım fonksiyonu" adını alır. Burada $\lim_{t\to-\infty} F(t) = F(-\infty)$ ve $\lim_{t\to\infty} F(t) = F(\infty)$ ile gösterilir (Chung 2001).

Tanım 2.12 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi ve $x = (x_k)$ bir reel terimli dizi olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir F

olasılık dağılım fonksiyonunun sürekli olduğu her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} = \alpha F(t)$$

gerçekleniyor ise, $x = (x_k)$ dizisi αF fonksiyonuna $o(a_n)$ oranıyla $A-$dağılımsal yakınsaktır denir.

İlk olarak $o(a_n)$ oranıyla $A-$düzgün integrallenebilmeyi karakterize eden aşağıdaki teoremi sunuyoruz. Bu teorem Khan (21 Ağustos-1 Eylül 2006) tarafından verilen Lemma 4.2.1'nin bir benzeridir.

Teorem 2.5 $x = (x_k)$ bir reel terimli dizi, $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

(1) $x \in U_{A,a}$,

(2)(*i*) $\sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| < \infty$,

(*ii*) her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ mevcut öyle ki

$$\sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k\in E} a_{nk} < \delta$$

şartını gerçekleyen keyfi $E \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi için

$$\sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k\in E} a_{nk} |x_k| < \varepsilon$$

olmasıdır.

İspat. **(1) ⇒ (2)**: $x \in U_{A,a}$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $t_0 \in \mathbb{N}$ mevcut öyleki her $t > t_0$ için

$$\sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k|>t} a_{nk} |x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gerçeklenir.

Buradan

$$\begin{aligned}
\sup_n \tfrac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| &\leq \sup_n \tfrac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k|\leq t_0}^{\infty} a_{nk} |x_k| + \sup_n \tfrac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k|>t_0}^{\infty} a_{nk} |x_k| \\
&\leq t_0 \sup_n \tfrac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq t_0 \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olup (i) şartı elde edilir.

Şimdi de (ii) şartının gerçeklendiğini gösterelim.

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2t_0}$ alalım ve keyfi bir $E \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi için

$$\sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k \in E} a_{nk} < \delta$$

olsun.

Böylece

$$\begin{aligned}
\sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k \in E} a_{nk} |x_k| &\leq \sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{\substack{k:|x_k|>t_0 \\ k \in E}} a_{nk} |x_k| + \sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{\substack{k:|x_k|\leq t_0 \\ k \in E}} a_{nk} |x_k| \\
&\leq \sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k|>t_0} a_{nk} |x_k| + t_0 \sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k \in E} a_{nk} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + t_0 \delta \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

olması ile (ii) şartı elde edilir.

<u>**(2) ⇒ (1)**</u>: (i) hipotezi ile

$$M := \sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| < \infty$$

olsun ve (ii) hipotezi ile her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ mevcut olsun öyleki

$$\sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k \in E} a_{nk} < \delta$$

şartını gerçekleyen keyfi $E \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi için

$$\sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k \in E} a_{nk} |x_k| < \varepsilon$$

gerçeklensin.
$t_0 = \dfrac{M}{\delta}$ alalım ve $E(t) := \{k : |x_k| \geq t\}$ şeklinde tanımlansın.
$t \geq t_0$ şartını sağlayan her t için

$$\begin{aligned}
\sup_n \tfrac{1}{a_n} \sum_{k \in E(t)} a_{nk} &= \sup_n \tfrac{1}{a_n} \sum_{k \in E(t)} a_{nk} 1 \\
&\leq \tfrac{1}{t} \sup_n \tfrac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| \\
&\leq \tfrac{M}{t} \\
&\leq \tfrac{M}{t_0} \\
&= \delta
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

O halde (ii) hipotezi ile $t \geq t_0$ iken

$$\sup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k \in E(t)} a_{nk} |x_k| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $x \in U_{A,a}$ olmasıdır ve böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi de $o(a_n)$ oranıyla $A-$kuvvetli yakınsaklığı karakterize eden aşağıdaki teoremi sunuyoruz. Bu sonuç Khan ve Orhan (2010)'nın bir sonucunun bir benzeridir.

Teorem 2.6 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi ve $x = (x_k)$ bir reel terimli dizi olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| = 0,$

(ii) $st_{A,a} - \lim x = 0$ ve $x \in U_{A,a}$,

(iii) $F = \chi_{[0,\infty)}$ şeklinde tanımlı olasılık dağılım fonksiyonu olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi αF fonksiyonuna $o(a_n)$ oranıyla $A-$dağılımsal yakınsaktır ve $x \in U_{A,a}$.

İspat. ***(ii)*** $\Rightarrow$ ***(i)***: $x \in U_{A,a}$ ve $st_{A,a} - \lim x = 0$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
\limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k| \le t} a_{nk} |x_k| &\le \limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k:\varepsilon<|x_k|\le t} a_{nk} |x_k| \\
&\quad + \limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k|\le \min(t,\varepsilon)} a_{nk} |x_k| \\
&\le t \limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k|>\varepsilon} a_{nk} \\
&\quad + \varepsilon \limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \\
&\le 0 + \varepsilon \limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \\
&\le \varepsilon\alpha
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| &\le \limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k|\le t} a_{nk} |x_k| \\
&\quad + \limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k|>t} a_{nk} |x_k| \qquad (2.2) \\
&\le \varepsilon\alpha + \limsup_n \frac{1}{a_n} \sum_{k:|x_k|>t} a_{nk} |x_k|
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür.

Hipotezden $x \in U_{A,a}$ olması ile eşitsizlik (2.2)'de $t \to \infty$ üzerinden limit alınırsa

$$\limsup_n \frac{1}{a_n} a_{nk} |x_k| \le \varepsilon\alpha$$

gerçeklenir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| = 0$$

elde edilir.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}\sum_{k:|x_k|>\varepsilon} a_{nk} &= \frac{1}{a_n}\sum_{k:\frac{|x_k|}{\varepsilon}>1} a_{nk}1 \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left|x_k\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir ve (i) hipotezi ile $st_{A,a} - \lim x = 0$ sonucuna varılır.

Şimdi $x \in U_{A,a}$ olduğunu gösterelim.

Keyfi $\varepsilon > 0$ olsun. (i) hipotezi ile her $n \geq N$ için

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left|x_k\right| < \varepsilon$$

eşitsizliği gerçeklenecek şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

Üstelik $\sup_n \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left|x_k\right| < \infty$ olmasından her $n = 1, 2, ..., N-1$ için

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k>K} a_{nk}\left|x_k\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde yeterince büyük $K \in \mathbb{N}$ seçilebilir.

$t > \max\{\left|x_1\right|, \left|x_2\right|, ..., \left|x_K\right|\}$ olduğunda

$$\sup_n \frac{1}{a_n}\sum_{k:|x_k|>t} a_{nk}\left|x_k\right| < \varepsilon$$

olup $x \in U_{A,a}$ elde edilir ve (i) ve (ii) önermelerinin denk olduğu görülür.

İspatı tamamlamak için (ii) ve (iii) önermelerinin denk olduğunu gösterelim.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: (i) ve (ii) önermelerinin denk olması ile

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left|x_k\right| = 0 \tag{2.3}$$

olur.

Durum I: $t < 0$ olsun. Eğer $x_k \leq t$ ise $|x_k| \geq |t| = -t \geq 0$ olacağından $-\dfrac{|x_k|}{t} \geq 1$ gerçeklenir.

Böylece

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k\leq t} a_{nk} &\leq -\frac{1}{t}\frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k\leq t} a_{nk}|x_k| \\ &\leq -\frac{1}{t}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}|x_k|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve denklem (2.3) ile

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k\leq t} a_{nk} = 0$$

elde edilir. Bu ise $t < 0$ için $F(t) = 0$ olmasıdır.

Durum II: $t > 0$ olsun.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} &= \frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k\leq t} a_{nk} + \frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k>t} a_{nk} \\ &\leq \frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k\leq t} a_{nk} + \frac{1}{t}\frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k>t} a_{nk}x_k \\ &\leq \frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k\leq t} a_{nk} + \frac{1}{t}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}|x_k|.\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ üzerinden limit alınırsa denklem (2.3) ile

$$\begin{aligned}\alpha &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k\leq t} a_{nk} \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \\ &\leq \alpha\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $t > 0$ için $F(t) = 1$ olmasıdır.

$\underline{\boldsymbol{(iii)} \Rightarrow \boldsymbol{(ii)}}$: Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}\sum_{k:|x_k|>\varepsilon} a_{nk} &= \frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k<-\varepsilon} a_{nk} + \frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k>\varepsilon} a_{nk} \\ &\leq \frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k\leq-\varepsilon} a_{nk} + \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \\ &\quad -\frac{1}{a_n}\sum_{k:x_k\leq\varepsilon} a_{nk}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu arada hatırlatalım ki $F = \chi_{[0,\infty)}$ olduğundan $F(-\varepsilon) = 0$ ve $F(\varepsilon) = 1$ olur. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ üzerinden limit alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k:|x_k|>\varepsilon} a_{nk} &\leq \alpha F(-\varepsilon) + \alpha - \alpha F(\varepsilon) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $st_{A,a} - \lim x = 0$ olmasıdır.

Böylece (ii) ve (iii) önermelerinin denk olduğuda görülür ve ispat tamamlanır. ∎

2.4 $o(a_n)$ Oranıyla $A-$İstatistiksel Yakınsaklık için Kriterler

Schoenberg (1959) ve Šalát (1980) tarafından istatistiksel yakınsaklık için verilen kriterlerin bazı benzerleri, Demirci (1998) tarafından doktora çalışmasında $A-$istatistiksel yakınsaklık için genişletilmiştir. Biz de bu kesimde Demirci'nin (1998) sonuçlarını $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaklık için genişleteceğiz.

Bu amaçla ilk olarak bir x dizisinin $o(a_n)$ oranıyla $A-$toplanabilirliğini tanımlıyoruz.

Tanım 2.13 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan bir regüler matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Her n için $(A_a x)_n = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ mevcut ve

$$\lim_n \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k = L$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L değerine $o(a_n)$ oranıyla $A-$toplanabilir denir ve $A_a - \lim x = L$ ile gösterilir.

Teorem 2.7 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Her $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsak sınırlı dizi, limit değerinin α katına, $o(a_n)$ oranıyla $A-$toplanabilirdir. (Yani; sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi için $st_{A,a} - \lim x = L$ olduğunda $A_a - \lim x = \alpha L$ olmasıdır.)

İspat. Keyfi bir $x \in \ell_\infty$ için $st_{A,a} - \lim x = L$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için $K := \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$\lim_n \frac{1}{a_n} \sum_{k \in K} a_{nk} = 0$$

gerçeklenir. Her $x \in \ell_\infty$ için

$$\begin{aligned}
\left|(A_a x)_n - \alpha L\right| &= \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} L + \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} L - \alpha L \right| \\
&\leq \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k - L| + |L| \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \alpha \right| \\
&= \frac{1}{a_n} \sum_{k \in K} a_{nk} |x_k - L| + \frac{1}{a_n} \sum_{k \notin K} a_{nk} |x_k - L| + |L| \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \alpha \right| \\
&\leq \sup_k |x_k - L| \frac{1}{a_n} \sum_{k \in K} a_{nk} + \varepsilon \frac{1}{a_n} \sum_{k \notin K} a_{nk} + |L| \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \alpha \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ üzerinden limit alınırsa

$$\left|(A_a x)_n - \alpha L\right| \leq \varepsilon \alpha$$

olduğu görülür. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olup $A_a - \lim x = \alpha L$ elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki lemmanın ispatında, Schoenberg (1959) ve Demirci (1998) tarafından verilen tekniğin bir benzerinden yararlanıyoruz (ayrıca bkz. Connor ve Grosse-Erdmann 2003) .

Lemma 2.1 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan bir regüler matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Eğer $st_{A,a} - \lim x = L$ ve $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı g fonksiyonu her reel $y = L$ noktasında sürekli ise $st_{A,a} - \lim g(x) = g(L)$ gerçeklenir.

İspat. $st_{A,a} - \lim x = L$ olsun. g fonksiyonu $y = L$ reel noktasında sürekli olduğundan $|y - L| < \delta$ olduğunda $|g(y) - g(L)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur.
Böylece, özel olarak,

$$|g(x_k) - g(L)| \geq \varepsilon \text{ iken } |x_k - L| \geq \delta$$

elde edilir ve buradan

$$E := \{k \in \mathbb{N} : |g(x_k) - g(L)| \geq \varepsilon\} \subseteq E' := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \delta\}$$

olduğu görülür. Hipotez ile $\overline{\delta}_{A,a}(E') = 0$ olup Önerme 2.1 ile $\overline{\delta}_{A,a}(E) = 0$ olup istenilen elde edilir. ■

İlk kriter olarak Schoenberg (1959) tarafından verilen bir sonucun bir benzerini veriyoruz.

Teorem 2.8 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisinin L değerine $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her t reel sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} = \alpha e^{itL} \tag{2.4}$$

olmasıdır.

İspat. Gerek şart: $st_{A,a} - \lim x = L$ olsun. Verilen bir $t \in \mathbb{R}$ için $g(x) = e^{itx}$ şeklinde tanımlanmak üzere g fonksiyonu x'in bir sürekli fonksiyonudur. Böylece Lemma 2.1 ile

$$st_{A,a} - \lim e^{itx_k} = e^{itL}$$

elde edilir. $|e^{itx_k}| = |\cos(tx_k) + i\sin(tx_k)| = 1$ olup $(\mathrm{Re}(e^{itx_k})), (\mathrm{Im}(e^{itx_k})) \in l_\infty$ olmasından Teorem 2.7 ile

$$A_a - \lim e^{itx_k} = \alpha e^{itL}$$

gerçeklenir ve gerek şart ispatlanır.

Yeter şart: Şimdi de her t reel sayısı için denklem (2.4) gerçeklensin. Schoenberg 1959'daki gibi;

$$M(y)=\begin{cases} 0 & , \quad y\leq -1 \\ 1+y & , \quad -1<y<0 \\ 1-y & , \quad 0\leq y<1 \\ 0 & , \quad 1\leq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlı, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli bir $M:\mathbb{R}\rightarrow[0,1]$ fonksiyonunu ele alalım. M fonksiyonu Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olduğundan, Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} f(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M(y)\, e^{-ity}dy \qquad ,t\in\mathbb{R} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Dahası f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} M(y) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ity}dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\right)^2 e^{ity}dt \end{aligned} \tag{2.5}$$

olacaktır. İspatın geri kalanında $st_{A,a}-\lim x=0$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Keyfi $\varepsilon>0$ ve $K:=K(\varepsilon):=\{k\in\mathbb{N}:|x_k|\geq\varepsilon\}$ olsun.
$\frac{t}{\varepsilon}=u$ dönüşümü ile

$$M\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)}{\frac{\varepsilon t}{2}}\right)^2 e^{ity}dt$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}M\left(\frac{x_k}{\varepsilon}\right)=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)}{\frac{\varepsilon t}{2}}\right)^2 e^{ity}\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}e^{itx_k}\right)dt$$

olması ve (2.5)'nin bir mutlak yakınsak integral olması nedeniyle Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{1}{a_n}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}M\left(\tfrac{x_k}{\varepsilon}\right) &= \tfrac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)}{\frac{\varepsilon t}{2}}\right)^2\left(\lim_n \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}e^{itx_k}\right)dt \\
&= \frac{\varepsilon}{2\pi}\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)}{\frac{\varepsilon t}{2}}\right)^2 dt \\
&= \alpha M(0) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

olur. M fonksiyonu göz ününe alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_n}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}M\left(\tfrac{x_k}{\varepsilon}\right) &= \frac{1}{a_n}\sum_{k:-1<\frac{x_k}{\varepsilon}<0} a_{nk}M\left(\tfrac{x_k}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{a_n}\sum_{k:0\leq\frac{x_k}{\varepsilon}<1} a_{nk}M\left(\tfrac{x_k}{\varepsilon}\right) \\
&\leq \frac{1}{a_n}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{nk} - \frac{1}{a_n}\sum_{k\in K} a_{nk}
\end{aligned}$$

olup

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k\in K} a_{nk} \leq \frac{1}{a_n}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{nk} - \frac{1}{a_n}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}M\left(\tfrac{x_k}{\varepsilon}\right)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ üzerinden limit alındığında $\delta_{A,a}(K) = 0$ olup istenilen elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Şimdi de Šalát (1980) ve Demirci (1998) tarafından verilen kriterlerin bir benzerini veriyoruz.

Teorem 2.9 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olmak üzere

$$S^*_{A,a} := \left\{ x = (x_k) : \left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}|x_k| \right) \in \ell_\infty \right\}$$

şeklinde bir dizi uzayı tanımlansın. Bir $x \in S^*_{A,a}$ dizisinin L değerine $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her t rasyonel sayısı için

$$\lim_n \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}e^{itx_k} = \alpha e^{itL} \tag{2.6}$$

olmasıdır.

İspat. Gerek şart: $x \in S^{*}_{A,a}$ ve $st_{A,a} - \lim x = L$ olsun. Teorem 2.8'den her t rasyonel sayısı için

$$\lim_n \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} = \alpha e^{itL}$$

gerçeklenir.

Yeter şart: Her t rasyonel sayısı için (2.6) eşitliği gerçeklensin ve t_0 bir reel sayı olsun.

$$\lim_n \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} e^{it_0 x_k} = \alpha e^{it_0 L} \tag{2.7}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini göstererek, Teorem 2.8 yardımı ile, ispat tamamlanacaktır. Keyfi bir t rasyonel sayısı için

$$C_n(t_0, t) := \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} e^{it_0 x_k} - \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k}$$

şeklinde yazılsın. Buradan $\theta \in \mathbb{R}$ için $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ olmak üzere

$$|C_n(t_0, t)| \leq \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{(\cos t_0 x_k - \cos t x_k)^2 + (\sin t_0 x_k - \sin t x_k)^2}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği kolaylıkla görülebilir. Ortalama değer teoreminden

$$|C_n(t_0, t)| \leq |t - t_0| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k|$$

eşitsizliği elde edilir ve $x \in S^{*}_{A,a}$ hipotezi ile

$$|C_n(t_0, t)| \leq |t - t_0| M \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur.

Uygun terimler ekleyip çıkararak, üçgen eşitsizliği yardımıyla;

$$\left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{it_0 x_k} - \alpha e^{it_0 L} \right| \leq \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} - \alpha e^{itL} \right| + \alpha \left| e^{itL} - e^{it_0 L} \right| + |C_n(t_0, t)|$$

eşitsizliğini elde ediyoruz.

Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun. $g(x) := \alpha e^{ixL}$ şeklinde tanımlanmak üzere, $x \in \mathbb{R}$ için g sürekli olduğundan

$$\left| e^{itL} - e^{it_0 L} \right| < \frac{\varepsilon}{3\alpha} \tag{2.9}$$

ve ((2.8) eşitsizliği yardımıyla)

$$\left|C_n\left(t_0,t\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.10}$$

eşitsizlikleri gerçeklenecek şekilde bir t rasyonel sayısı mevcuttur.

Son olarak (2.6) eşitliği ve (2.9), (2.10) eşitsizlikleri ile (2.7) eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

3. $KARMA$ DİZİLERİN VERİLEN BİR ORANDA TOPLANABİLİRLİĞİ

$Karma$ $(spliced)$ dizi, iki veya daha fazla çoklukta yakınsak dizinin, terimlerinin orijinal sırasını bozmadan, karılmasıyla oluşturulan dizidir. Karma diziler ilk olarak 1997 yılında Osikiewicz tarafından doktora tezinin bir bölümünde tanımlanmış ve bu dizilerin toplanabilirliği yine aynı doktora tezinde çalışılmıştır. Bu bölümde bizde karma dizilerin $o\left(a_n\right)$ oranıyla toplanabilirliği üzerine benzer sonuçlar vereceğiz.

3.1 Sonlu Karma Diziler

Bu kesimde sonlu karma dizilerin $o\left(a_n\right)$ oranıyla $A-$toplanabilirliğini çalışacağız ve sonlu ayrışımdaki kümelerin $o\left(a_n\right)$ oranıyla $A-$yoğunluğuna ilişkin çeşitli sonuçlar vereceğiz.

$A=\left(a_{nk}\right)$ bir sonsuz matris ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir sonsuz alt kümesi $E:=\left\{v\left(j\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ olsun. A matrisinin kolon alt matrisi $A^{[E]}:=\left(a_{n,v(k)}\right)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1 N sabit bir doğal sayı olsun. $\mathbb{N}=\cup_{i=1}^{N}E_i$ ve $i\neq k$ için $E_i\cap E_k=\varnothing$ şartlarını gerçekleyen sonsuz çoklukta elemana sahip $E_i:=\left\{v_i\left(j\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, $i=1,2,\ldots,N$ kümelerine $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir $N-$ayrışımı denir (Osikiewicz 1997, 2005).

Tanım 3.2 (Sonlu Karma) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin verilen bir $N-$ayrışımı $\left\{E_1,E_2,\ldots,E_N\right\}$ olmak üzere $i=1,2,\ldots,N$ için $\gamma^{(i)}:=\left(\gamma_j^{(i)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli yakınsak bir dizi ve $\lim_{j\to\infty}\gamma_j^{(i)}=\Gamma^{(i)}$ olsun. O halde $\gamma^{(1)},\gamma^{(2)},\ldots,\gamma^{(N)}$ dizilerinin $\mathbb{N}$'nin bir $N-$ayrışımı olan $\left\{E_1,E_2,\ldots,E_N\right\}$ kümesi üzerindeki $N-$karma dizisi

$$n\in E_i \text{ ise } n=v_i\left(j\right) \text{ olmak üzere } x_n=x_{v_i(j)}:=\gamma_j^{(i)}$$

genel terimine sahip bir $x=\left(x_n\right)$ dizisi olarak tanımlanır (Osikiewicz 1997, 2005).

Dikkat edilirse bir $N-$karma dizi en fazla N tane limit noktasına sahip sınırlı bir dizidir.

Örnek 3.1 Doğal sayıların

$$E_1 \ : \ = \{1,3,5,7,9,11,13,\ldots\}$$
$$E_2 \ : \ = \{2,6,10,14,18,22,26,\ldots\}$$
$$E_3 \ : \ = \{4,8,12,16,20,24,28,\ldots\}$$

$3-$ayrışımını ele alalım ve her $i=1,2,3$ için $\gamma^{(i)} := \left(\gamma_j^{(i)}\right)$ bir yakınsak dizi olsun. $\gamma^{(1)},\gamma^{(2)},\gamma^{(3)}$ dizilerinin $3-$ayrışımlı $\{E_1,E_2,E_3\}$ kümesi üzerindeki $3-$karma dizisinin

$$x=\left(\gamma_1^{(1)},\gamma_1^{(2)},\gamma_2^{(1)},\gamma_1^{(3)},\gamma_3^{(1)},\gamma_2^{(2)},\gamma_4^{(1)},\gamma_2^{(3)},\ldots\right)$$

olduğu kolaylıkla görülür (Osikiewicz 1997, 2005).

Şimdi aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.3 $A=(a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a=(a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sabit bir $N-$ayrışımı $\{E_1,E_2,\ldots,E_N\}$ olsun. $\{E_1,E_2,\ldots,E_N\}$ kümesi üzerinde her $N-$karma dizi $o(a_n)$ oranıyla $A-$toplanabilir ise A matrisi $\{E_1,E_2,\ldots,E_N\}$ kümesi üzerinde $o(a_n)-karılma$ (splicing) özelliğine sahiptir denir.

Bu bölümde elde edeceğimiz sonuçların ispatlarında yararlanacağız ilk teoremi sunuyoruz.

Teorem 3.1 $A=(a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a=(a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sonsuz çoklukta elemana sahip bir alt kümesi $E:=\{v(j)\}$ olsun. Eğer $\delta_{A,a}(E)$ mevcut ise $A_a^{[E]}$ matrisi bir $\delta_{A,a}(E)-$çarpımsal matristir. Tersine eğer $A_a^{[E]}$ matrisi bir $t-$çarpımsal matris ise $\delta_{A,a}(E)$ mevcuttur ve $\delta_{A,a}(E)=t$ gerçeklenir.

İspat. $A_a^{[E]}$ matrisi, A_a matrisinin bir kolon alt matrisi olmak üzere keyfi bir $n\in\mathbb{N}$ için,

$$\left(A_a^{[E]}\,e\right)_n = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,v(k)}$$

$$= \frac{1}{a_n}\sum_{k\in E} a_{nk}$$

elde edilir. Böylece $\delta_{A,a}(E)$ mevcut ise $A_a^{[E]}$ matrisi bir $\delta_{A,a}(E)-$çarpımsal matristir. Tersine, $A_a^{[E]}$ matrisi bir $t-$çarpımsal matris ise

$$\begin{aligned} t &= \lim_{n\to\infty}\left(A_a^{[E]}\,e\right)_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k\in E}a_{nk} \\ &= \delta_{A,a}(E) \end{aligned}$$

olup $\delta_{A,a}(E)$ mevcuttur ve üstelik $\delta_{A,a}(E)=t$ olduğu görülür. ■

Bir sonraki teorem, bir $N-$karma x dizisinin $o(a_n)$ oranıyla $A-$limitinin, sonlu ayrışımdaki kümelerin $o(a_n)$ oranıyla $A-$yoğunluklarının ($\Gamma^{(i)}$ katsayıları ile, $i=1,2,\ldots,N$) lineer kombinasyonu olarak ifade edilebileceğini gösteriyor.

Teorem 3.2 $A=(a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a=(a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sabit bir $N-$ayrışımı $\{E_1,E_2,\ldots,E_N\}$ olsun. Eğer $i=1,2,\ldots,N$ için $\delta_{A,a}(E_i)$ mevcut ise A matrisi, $\{E_1,E_2,\ldots,E_N\}$ kümesi üzerinde her $N-$karma x disizi için

$$\lim_{n\to\infty}(A_a x)_n=\sum_{i=1}^{N}\delta_{A,a}(E_i)\,\Gamma^{(i)}$$

ile $\{E_1,E_2,\ldots,E_N\}$ üzerinde $o(a_n)-$karılma özelliğine sahiptir.

İspat. $i=1,2,\ldots,N$ için $\delta_{A,a}(E_i)$ mevcut ve $\{E_1,E_2,\ldots,E_N\}$ üzerinde x, bir

$N-$karma dizi olsun. O halde, keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
(A_a x)_n &= \frac{1}{a_n} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} x_k \\
&= \frac{1}{a_n} \left(\sum_{k \in \cup_{i=1}^{N} E_i} a_{nk} x_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{a_n} \sum_{k \in E_i} a_{nk} x_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)} x_{v_i(j)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)} \gamma_j^{(i)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(A_a^{[E_i]} \gamma^{(i)} \right)_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.1'den $A_a^{[E_i]}$ matrisi bir $\delta_{A,a}(E_i)-$çarpımsal matristir. Böylece

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} (A_a x)_n &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \left(A_a^{[E_i]} \gamma^{(i)} \right)_n \\
&= \sum_{i=1}^{N} \lim_{n \to \infty} \left(A_a^{[E_i]} \gamma^{(i)} \right)_n \\
&= \sum_{i=1}^{N} \delta_{A,a}(E_i) \Gamma^{(i)}
\end{aligned}$$

sonucuna varılır, bu ise x dizisinin $\sum_{i=1}^{N} \delta_{A,a}(E_i) \Gamma^{(i)}$ sayısına $o(a_n)$ oranıyla $A-$toplanabilir olmasıdır. Üstelik x dizisi keyfi olduğu için A matrisi $\{E_1, E_2, \ldots, E_N\}$ üzerinde $o(a_n)-$karılma özelliğine sahiptir. ■

A_a matrisi üzerine kabullerimiz ile aşağıdaki sonucu verebiliyoruz.

Teorem 3.3 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi ve $N \geq 2$ olsun. A matrisinin üzerinde $o(a_n)-$karılma özelliğine sahip olmayacağı, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir $N-$ayrışımı $\{E_1, E_2, \ldots, E_N\}$ mevcuttur.

İspat. Önceki kısımlarda belirtiğimiz gibi, kabullerimiz ile A_a matrisi bir coregüler matristir. Böylece Steinhaus teoreminden terimleri 0 ve 1'ler den oluşan ve $o(a_n)$ oranıyla $A-$toplanabilir olmayan bir x dizisi mevcuttur. Şimdi sabit bir $N \geq 2$ için $E_1 := \{n : x_n = 1\}$ olsun ve $E_2, ..., E_N$ kümeleri sonsuz çoklukta elemana sahip olmak üzere ayrık ve $\cup_{i=2}^{N} E_i = \mathbb{N} \backslash E_1$ olsun. Açıktır ki $E_1, E_2, \ldots, E_N$ kümeleri $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir $N-$ayrışımıdır. Üstelik x dizisi bu ayrışım üzerinde $\gamma^{(1)} := 1$ ve $i = 2, \ldots, N$ için $\gamma^{(i)} := 0$ sabit dizilerinin $N-$karma dizisi olarak alınabilir. Böylece A matrisi $\{E_1, E_2, \ldots, E_N\}$ üzerinde $o\left(a_n\right)-$karılma özelliğine sahip değildir ve istenilen elde edilir. ■

Sıfır limitleri koruyan matrislere ilişkin Osikiewicz'in bir sonucunu hatırlatalım.

Teorem 3.4 A sıfır limitleri koruyan bir matris olsun. Eğer L sayısına $A-$toplanabilir olan bir $\gamma \in c \setminus c_0$ dizisi mevcut ise $\lim_n \gamma_n = \Gamma \neq 0$ olmak üzere A matrisi bir $L/\Gamma-$çarpımsal matristir (Osikiewicz 1997, 2005).

Şimdi $2-$ayrışımdaki kümelerin $o\left(a_n\right)$ oranıyla $A-$yoğunlukları üzerine bir sonuç veriyoruz.

Teorem 3.5 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi ve $2-$ayrışım $\{E_1, E_2\}$ üzerinde $\gamma^{(1)}$ ve $\gamma^{(2)}$ $(\Gamma^{(1)} \neq \Gamma^{(2)})$ dizilerinin $2-$karma dizisi x olsun. Eğer $2-$karma x dizisi L sayısına $o(a_n)$ oranıyla $A-$toplanabilir ise

$$\delta_{A,a}\left(E_1\right) = \frac{\alpha\Gamma^{(2)} - L}{\Gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}} \quad \text{ve} \quad \delta_{A,a}\left(E_2\right) = \frac{L - \alpha\Gamma^{(1)}}{\Gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}}$$

olacak şekilde $\delta_{A,a}\left(E_1\right)$ ve $\delta_{A,a}\left(E_2\right)$ yoğunlukları mevcuttur.

İspat. $\{E_1, E_2\}$ üzerinde $\gamma^{(1)}$ ve $\gamma^{(2)}$ $(\Gamma^{(1)} \neq \Gamma^{(2)})$ dizilerinin $2-$karma x dizisi L sayısına $o(a_n)$ oranıyla $A-$toplanabilir olsun. Hipotezler gereğince A_a sıfır limitleri koruyan bir matristir. Böylece, $A_a^{[E_1]}$ ve $A_a^{[E_2]}$ kolon alt matrisleri de ayrıca sıfır limitleri korur.

$i=1,2$ için $E_i := \{v_i(j)\}$ olsun. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\left(A_a\left(x-\Gamma^{(1)}\right)\right)_n &= \frac{1}{a_n}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{nk}\left(x_k-\Gamma^{(1)}\right) \\
&= \frac{1}{a_n}\sum_{k\in E_1} a_{nk}\left(x_k-\Gamma^{(1)}\right)+\frac{1}{a_n}\sum_{k\in E_2} a_{nk}\left(x_k-\Gamma^{(1)}\right) \\
&= \frac{1}{a_n}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{n,v_1(j)}\left(\gamma_j^{(1)}-\Gamma^{(1)}\right)+\frac{1}{a_n}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{n,v_2(j)}\left(\gamma_j^{(2)}-\Gamma^{(1)}\right) \\
&= \left(A_a^{[E_1]}\left(\gamma^{(1)}-\Gamma^{(1)}\right)\right)_n+\left(A_a^{[E_2]}\left(\gamma^{(2)}-\Gamma^{(1)}\right)\right)_n
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\gamma^{(1)}-\Gamma^{(1)} \in c_0$ olması ile, son eşitlik düzenlenerek,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(A_a^{[E_2]}\left(\gamma^{(2)}-\Gamma^{(1)}\right)\right)_n &= \lim_{n\to\infty}\left(A_a\left(x-\Gamma^{(1)}\right)\right)_n-\lim_{n\to\infty}\left(A_a^{[E_1]}\left(\gamma^{(1)}-\Gamma^{(1)}\right)\right)_n \\
&= L-\alpha\Gamma^{(1)}
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bu ise $\gamma^{(2)}-\Gamma^{(1)}$ dizisinin $L-\alpha\Gamma^{(1)}$ sayısına $o(a_n)$ oranıyla $A^{[E_2]}$ $-$toplanabilir olmasıdır. Dahası $\gamma^{(2)}-\Gamma^{(1)} \in c \setminus c_0$ olması ile Teorem 3.4 yardımıyla

$$t=\frac{L-\alpha\Gamma^{(1)}}{\Gamma^{(2)}-\Gamma^{(1)}}$$

olmak üzere $A_a^{[E_2]}$ kolon alt matrisinin bir $t-$çarpımsal matris olduğu elde edilir. Böylece Teorem 3.1 gereğince

$$\delta_{A,a}(E_2)=\frac{L-\alpha\Gamma^{(1)}}{\Gamma^{(2)}-\Gamma^{(1)}}$$

olup, $\delta_{A,a}(E_2)$ mevcuttur. Yoğunluk tanımından

$$\begin{aligned}
\delta_{A,a}(E_1) &= \alpha-\delta_{A,a}(E_2) \\
&= \frac{\alpha\Gamma^{(2)}-L}{\Gamma^{(2)}-\Gamma^{(1)}}
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülür ve ispat tamamlanır. ■

3.2 Sonsuz Karma Diziler

Tanım 3.4 $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ ve $i \neq k$ için $E_i \cap E_k = \varnothing$ şartlarını gerçekleyen sonsuz çoklukta elemana sahip $E_i := \{v_i(j)\}_{j \in \mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, kümelerine $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir $\infty-$ayrışımı denir (Osikiewicz 1997, 2005).

Tanım 3.5 (Sonsuz Karma) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir $\infty-$ayrışımı $\{E_i\}$ olmak üzere $i \in \mathbb{N}$ için $\gamma^{(i)} := \left(\gamma_j^{(i)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ kompleks terimli yakınsak bir dizi ve $\lim_j \gamma_j^{(i)} = \Gamma^{(i)}$ olsun. O halde $\gamma^{(i)}$ dizilerinin bir $\infty-$ayrışım olan $\{E_i\}$ kümeleri üzerindeki $\infty-$karma dizisi

$$n \in E_i \text{ ise } n = v_i(j) \text{ olmak üzere } x_n = x_{v_i(j)} := \gamma_j^{(i)}$$

genel terimine sahip bir $x = (x_n)$ dizisi olarak tanımlanır (Osikiewicz 1997, 2005).

Burada dikkat edelim ki $\infty-$karma x dizisi sınırlı olmayabilir.

Tanım 3.6 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sabit bir $\infty-$ayrışımı $\{E_i\}$ olsun. $\{E_i\}$ üzerinde her sınırlı $\infty-$karma dizi, $o(a_n)$ oranıyla $A-$toplanabilir ise A matrisi $\{E_i\}$ üzerinde $o(a_n) - \mathit{karılma}$ (splicing) özelliğine sahiptir denir.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem bir $\infty-$karma x dizisinin $o(a_n)$ oranıyla $A-$limitinin $\infty-$ayrışımdaki kümelerin $o(a_n)$ oranıyla $A-$yoğunluklarının ($\Gamma^{(i)}$ katsayıları ile, $i \in \mathbb{N}$) lineer kombinasyonu olarak ifade edilebileceğini gösteriyor.

Teorem 3.6 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir $\infty-$ayrışımı $\{E_i\}$ olsun. Eğer her $i \in \mathbb{N}$ için $\delta_{A,a}(E_i)$ mevcut ve $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \delta_{A,a}(E_i) = \alpha$ ise A matrisi, $\{E_i\}$ üzerinde her sınırlı $\infty-$karma x disizi için

$$\lim_{n \to \infty} (A_a x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{A,a}(E_i)\, \Gamma^{(i)}$$

ile $\{E_i\}$ üzerinde $o(a_n)$ $-$karılma özelliğine sahiptir.

İspat. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\delta_{A,a}(E_i)$ mevcut, $\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{A,a}(E_i) = \alpha$ olsun ve x dizisi $\{E_i\}$ üzerinde bir sınırlı $\infty-$karma olsun. O halde, keyfi bir n için

$$\begin{aligned}
(A_a x)_n &= \frac{1}{a_n} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{nk} x_k \\
&= \frac{1}{a_n} \sum_{k\in\cup_{i=1}^{\infty} E_i} a_{nk} x_k \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} \sum_{k\in E_i} a_{nk} x_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)} x_{v_i(j)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)} \gamma_j^{(i)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(A_a^{[E_i]} \gamma^{(i)} \right)_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Sabit bir n için,

$$f_n(i) := (A_a^{[E_i]} \gamma^{(i)})_n \quad \text{ve} \quad g_n(i) := \|x\|_\infty (A_a^{[E_i]} e)_n$$

şeklinde $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ ve $g_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyon dizileri tanımlansın, burada $\|x\|_\infty := \sup_k |x_k|$ ile verilmektedir. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\delta_{A,a}(E_i)$ mevcut olduğundan Teorem 3.1 gereğince $A_a^{[E_i]}$ kolon alt matrisi $\delta_{A,a}(E_i)-$çarpımsaldır. Böylece,

$$f(i) := \lim_{n\to\infty} f_n(i) = \lim_{n\to\infty} (A_a^{[E_i]} \gamma^{(i)})_n = \delta_{A,a}(E_i)\, \Gamma^{(i)}$$

ve

$$g(i) := \lim_{n\to\infty} g_n(i) = \lim_{n\to\infty} \|x\|_\infty (A_a^{[E_i]} e)_n = \|x\|_\infty \delta_{A,a}(E_i)$$

sonuçlarına varılır. μ sayma ölçüsünü ele alarak

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}} g_n(i)\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\|x\|_{\infty}(A_a^{[E_i]}e)_n \\
&= \|x\|_{\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k\in E_i}a_{nk}\right) \\
&= \|x\|_{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k\in\mathbb{N}}a_{nk} \\
&= \alpha\|x\|_{\infty}
\end{aligned}$$

elde ediliyor. $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\delta_{A,a}(E_i)=\alpha$ olması ile

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}} g_n(i)\,d\mu &= \alpha\|x\|_{\infty} \\
&= \|x\|_{\infty}\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_{A,a}(E_i) \\
&= \int_{\mathbb{N}} g(i)\,d\mu
\end{aligned}$$

olup, bu ise

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}} g_n(i)\,d\mu=\int_{\mathbb{N}}\lim_{n\to\infty}g_n(i)\,d\mu \tag{3.1}$$

olmasıdır.

Ayrıca, her n için,

$$\begin{aligned}
|f_n(i)| &= \left|(A_a^{[E_i]}\gamma^{(i)})_n\right| \\
&= \left|\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{\infty}a_{n,v_i(j)}\gamma_j^{(i)}\right| \\
&\le \|x\|_{\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{\infty}a_{n,v_i(j)} \qquad (3.2) \\
&= \|x\|_{\infty}(A_a^{[E_i]}e)_n \\
&= g_n(i)
\end{aligned}$$

ile bir üst sınır buluyoruz.

Ayrıca (3.1) ve (3.2) eşitsizlikleri kullanılarak, Genişletilmiş Lebegue Baskın Yakınsaklık Teoremi (Athreya 2006) yardımıyla

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(A_a x)_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(A_a^{[E_i]}\gamma^{(i)})_n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}(A_a^{[E_i]}\gamma^{(i)})_n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\delta_{A,a}(E_i)\,\Gamma^{(i)}\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Bu ise x dizisinin $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\delta_{A,a}(E_i)\,\Gamma^{(i)}$ sayısına $o(a_n)$ oranıyla $A-$toplanabilir olmasıdır. Üstelik x dizisi keyfi olduğu için A matrisi $\{E_i\}$ üzerinde $o(a_n)-$karılma özelliğine sahiptir. ■

4. YAKLAŞIM TEORİYE İLİŞKİN BİR UYGULAMA

Bu son bölümde Korovkin tipi yaklaşım teoriye ilişkin bir uygulama sunuyoruz. Fonksiyon yaklaşımı teorisinde en etkileyici sonuçlardan biri, kuşkusuz, sürekli fonksiyonlar uzayında pozitif lineer operatörlerin yakınsamasına ilişkin Bohman-Korovkin Teoremidir. Yaygın olarak Korovkin Teoremi olarak bilinen bu teorem, Weierstrass'ın klasik yaklaşım teoreminin S. Bernstein tarafından verilen ispatının genelleştirilmesinden ortaya çıkar. Aslında Korovkin tipi teoremler, bir fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisinin bir "yaklaşım süreci" olup olmadığını veya buna eşdeğer olarak "özdeşlik operatörüne" kuvvetli yakınsak olup olmayacağını belirleyen teoremlerdir. Bu konuda ilk çalışma P.P. Korovkin tarafından 1953 yılında yapılmıştır (bkz. Korovkin 1960). 2006 yılında Lomeli ve Garcia sınırlıyıcı (bounding) fonksiyonları tanıtmış ve iyi bilinen bazı klasik yaklaşım sonuçlarını bu fonksiyonlar yardımıyla tekrar kanıtlamıştır.

İlk olarak Lomeli ve Garcia (2006)'dan bazı tanım ve notasyonları hatırlatalım. X kompakt bir metrik uzay olsun. X üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonların uzayını $C(X)$ ile gösteriyoruz ve bu uzayı $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$ normu ile donatıyoruz. Bir $f \in C(X)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $f(x) \geq 0$ şartını gerçekliyorsa pozitif fonksiyon olarak isimlendirilir. Bu durumda $f \geq 0$ gösterimini kullanacağız. $L : C(X) \to C(X)$ şeklinde tanımlı bir operatör olmak üzere her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in C(X)$ fonksiyonları için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa L operatörüne lineerdir denir ve bu lineer operatör için $f \geq 0$ olduğunda $L(f) \geq 0$ gerçekleniyorsa L operatörüne pozitif lineer operatör denir. $f \in C(X)$ olmak üzere f fonksiyonunun sıfırlarının kümesini $Z(f)$ ile göstereceğiz, yani; $Z(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}$ şeklinde tanımlıdır (Lomeli ve Garcia 2006).

Tanım 4.1 $f \in C(X)$ olmak üzere

$$\Delta(f) = \{(x,t) \in X \times X : f(x) = f(t)\}$$

şeklinde tanımlı sıralı ikililerin kümesine X üzerinde f fonksiyonunun köşegeni denir (Lomeli ve Garcia 2006).

Tanım 4.2 $f \in C(X)$ olsun. Bir $\gamma \in C(X \times X)$ pozitif fonksiyonu $Z(\gamma) \subset \Delta(f)$ şartını gerçekliyorsa bu γ fonksiyonu f için bir sınırlayıcı (bounding) fonksiyon olarak isimlendirilir ve her $t \in X$ için $\gamma_t(x) := \gamma(x,t)$ gösterimi kullanılır (Lomeli ve Garcia 2006).

İlk lemmanın ispatında yararlanacağımız Lomeli ve Garcia (2006)'dan bir sonucu hatırlatalım.

Lemma 4.1 $f, g \in C(X)$ fonksiyonları pozitif ve $Z(g) \subset Z(f)$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için

$$f(x) \leq \varepsilon + Mg(x)$$

olacak şekilde $M > 0$ mevcuttur (Lomeli ve Garcia 2006).

Şimdi ana sonucumuzda kullanacağız bir lemma verelim.

Lemma 4.2 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris, $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi ve γ fonksiyonu $f \in C(X)$ için bir sınırlayıcı fonksiyon olsun. $\{L_n\}$, $C(X)$ uzayından $C(X)$ uzayına giden pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere
(i) $st_{A,a} - \lim_n \|L_n(1) - 1\| = 0$,
(ii) $st_{A,a} - \lim_n \|L_n(\gamma_t)\| = 0$,
şartları gerçekleniyor ise $st_{A,a} - \lim_n \|L_n f - f\| = 0$ sağlanır.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve γ, $f \in C(X)$ için bir sınırlayıcı fonksiyon olsun. Lemma 4.1'den her $(x,t) \in X \times X$ için

$$|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon + M\gamma(x,t)$$

gerçeklenecek şekilde $M > 0$ mevcuttur. Böylece $t \in X$ sabit olmak üzere, L_n operatörünün pozitifliği gereğince her $x \in X$ için

$$|L_n(f)(x) - f(t)L_n(1)(x)| \leq \varepsilon L_n(1)(x) + ML_n(\gamma_t)(x)$$

elde edilir. Özel olarak $x = t$ alınırsa,

$$|L_n(f)(t) - f(t)| \leq \varepsilon + (\varepsilon + |f(t)|)|L_n(1)(t) - 1| + ML_n(\gamma_t)(t)$$

olduğu görülür ve $B := \max\{\varepsilon + \|f\|, M\}$ olmak üzere

$$\|L_n(f) - f\| \leq \varepsilon + B(\|L_n(1) - 1\| + \|L_n(\gamma_t)\|) \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir.

$r > 0$ olsun. Arşimet prensibinden $\varepsilon < r$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ mevcuttur.

Şimdi

$D := \{n : \|L_n(1) - 1\| + \|L_n(\gamma_t)\| \geq r - \varepsilon\}$,

$D_1 := \left\{n : \|L_n(1) - 1\| \geq \frac{r-\varepsilon}{2B}\right\}$,

$D_2 := \left\{n : \|L_n(\gamma_t)\| \geq \frac{r-\varepsilon}{2B}\right\}$

şeklinde tanımlansınlar. O halde

$D \subset D_1 \cup D_2$ olduğu açıktır ve böylece (4.1) eşitsizliği ile

$$\frac{1}{a_j} \sum_{n:\|L_n(f)-f\|\geq r} a_{jn} \leq \frac{1}{a_j} \sum_{n\in D} a_{jn} \leq \frac{1}{a_j} \sum_{n\in D_1} a_{jn} + \frac{1}{a_j} \sum_{n\in D_2} a_{jn}$$

yazılır. Son eşitsizliğin iki tarafında $j \to \infty$ üzerinden limit alınırsa, hipotezler ile $st_{A,a} - \lim_n \|L_n f - f\| = 0$ sonucuna varılır ve ispat tamamlanır. ■

$X = [a, b]$ olduğunda ve keyfi bir $f \in C[a, b]$ fonksiyonunun bir sınırlayıcı fonksiyonu $\gamma_t(x) := (x - t)^2$ alındığında Lemma 4.2 ile aşağıdaki sonucu elde edeceğiz.

Teorem 4.1 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $a = (a_n)$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. $\{L_n\}$, $C(X)$ uzayından $C(X)$ uzayına giden pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere

$$st_{A,a} - \lim_{n\to\infty} \|L_n f_i - f_i\| = 0, \quad (i = 0, 1, 2)$$

şartları gerçekleniyor ise keyfi $f \in C(X)$ için

$$st_{A,a} - \lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\| = 0$$

sağlanır (burada $f_i(y) = y^i$).

İspat. $X = [a,b]$ olsun ve keyfi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonunun bir sınırlayıcı fonksiyonu $\gamma_t(x) := (x-t)^2$ alınsın.

$$\begin{aligned} L_n\left((t-x)^2\right)(x) &= L_n(f_2)(x) - 2xL_n(f_1)(x) + x^2 L_n(f_0)(x) \\ &\leq |L_n(f_2)(x) - x^2| + 2|x| |L_n(f_1)(x) - x| + x^2 |L_n(f_0)(x) - 1| \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülüyor.

Böylece

$$\|L_n(\gamma_t)\| \leq \|L_n(f_2) - f_2\| + 2b \|L_n(f_1) - f_1\| + b^2 \|L_n(f_0)(x) - 1\|$$

elde edilir.

Buradan hipotezler gereğince Lemma 4.2'in şartları gerçeklenir ve keyfi $f \in C(X)$ için

$$st_{A,a} - \lim_n \|L_n f - f\| = 0$$

sonucuna varılır, böylece ispat tamamlanır. ■

5. SONUÇ

Bu doktora tezinde ilk olarak Toplanabilme Teorisinde sıklıkla kullanılan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Duman vd. (2003) tarafından $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve bu kavrama ilişkin çeşitli sonuçlar çalışılmıştır. Bu motivasyon ile doğal sayıların bir E alt kümesi için $o(a_n)$ oranıyla $A-$yoğunluk kavramı tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Daha sonra $o(a_n)$ oranıyla $A-$kuvvetli yakınsaklık, $A-$dağılımsal yakınsaklık ve $A-$düzgün integrallenebilme kavramları literatüre kazandırılmış, $o(a_n)$ oranıyla $A-$kuvvetli yakınsaklığı karakterize eden teorem sunulmuştur. Schoenberg (1959) ve Šalát (1980) tarafından verilen kriterlerin benzerleri 1998 yılında Demirci tarafından $A-$istatistiksel yakınsaklık için çalışılmıştır. Bu sonuçlar ışığında bu doktora tezimizde $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaklık için benzer kriterler ortaya konulmuştur. Ayrıca Osikiewicz (1997, 2005) tarafından tanımlanan karma dizi kavramı için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak Lomeli ve Garcia (2006) tarafından sınırlayıcı fonksiyonlar tanımlanmış ve Yaklaşım Teoriye ilişkin mevcut bazı sonuçlar sınırlayıcı fonksiyon yardımı ile yeniden ispatlanmıştır. Bu yeni kavram ile $o(a_n)$ oranıyla $A-$istatistiksel yakınsaklık için yaklaşım sonuçları sunulmuştur.

KAYNAKLAR

Athreya K.B., Lahiri, S.N., 2006. Measure Theory and Probability Theory (Vol. 19). Springer, New York.

Boos, J., 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford University Press. New York.

Chung, K. L., (2001). A Course in Probability Theory. Academic press.

Connor, J., 1988. The statistical and strong p-Cesàro sonvergence of sequences. Analysis, 8, 47-63.

Connor, J., 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canad. Math. Bull., **32**,194-198.

Connor, J., Grosse-Erdmann, K. G., 2003. Sequential definitions of continuity for real functions. Rocky Mt. J. Math., **33(1)**, 93-121.

Demirci, K., 1998. A Criteria for $A-$statistical convergence, Indian J. Pure and Appl. Math., 29(5), 559-564.

Demirci, K., 2002. On $A-$statistical cluster points, Glasnik Matematički, 37(57), 293-301.

Demirci, K., Khan M.K. and Orhan, C., 2003. Subspaces of $A-$statistically convergent sequences, Stud. Sci. Math. Hung., 40, 183-190.

Duman, O., Khan M.K. and Orhan, C., 2003. $A-$statistical convergence of approximating operators, Math. Inequalities &Appl., 6, 689-699.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.

Freedman, A.R., Sember, J.J., 1981. Densities and summability, Pacific J.Math., 95, 293-305.

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.

Fridy, J.A., Khan M.K., 1998. Tauberian theorems via statistical convergence, J. Math. Anal. Appl., 228, 73-95.

Fridy, J. A., Miller, H. I. 1991. A matrix characterization of statistical convergence. Analysis, 11(1), 59-66.

Fridy, J.A., Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math., 160, 43–51.

Gülfirat, M., 2022. $A-$statistical convergence with a rate and applications to approximation, Filomat 36(15), 5325–5337.

Khan M.K., 21 August-1 September 2006. Summer Seminar talks on "Probabilisitic Methods in Summability Theory". Ankara University.

Khan M.K., Orhan, C., 2010. Characterizations of strong and statistical convergences, Publ. Math. Debrecen, **76(1-2)**, 77-88.

Kolk, E., 1991. The statistical convergence in Banach spaces, Tartu Ül. Toimetised 928, 41–52.

Korovkin, P.P., 1960. Linear Operators and Theory of Approximation. Hindustan Publ. Co, Delhi.

Lomeli, H.E., Garcia, C.L., 2006. Variations on a Theorem of Korovkin, Amer. Math. Monthly, 113(8), 744-750.

Miller, H.I., 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Transactions of the American Mathematical Society, 347, 1811-1819.

Osikiewicz, J. A. 1997. Summability of matrix submethods and spliced sequences. Doktora Tezi. Kent State University, Ohio.

Osikiewicz, J.A., 2005. Summability of spliced sequences, Rocky Mt. J. Math. 35, 977–996.

Šalát, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30, 139-150.

Schoenberg, I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly, **66**, 361-375.

Steinhaus, H., 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymtotique, Colloq. Math., 2, 73-74.

Ünver, M., Khan M.K., and Orhan, C., 2013. $A-$distributional summability in topological spaces, Positivity, 18(1), 131-145.

Yardımcı, Ş., Gülfirat, M., 2023. Spliced sequences and summability with a rate, Positivity, 27(1), 17.

Yurdakadim, T., Ünver, M., 2016. Some results concerning the summability of spliced sequences, Turkish. J. Math. 40(5), 1134–1143.