

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA DEJENERE ÜSTEL
SİSTEMLERİN FRAME ÖZELLİKLERİ

Kader ŞİMŞİR ACAR

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Eş Danışman
Prof. Dr. Migdad I. İSMAİLOV

Aralık, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA DEJENERE ÜSTEL
SİSTEMLERİN FRAME ÖZELLİKLERİ**

Kader ŞİMŞİR ACAR tarafından hazırlanan tez çalışması 15.12.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programında **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Prof. Dr. Migdad I. İSMAİLOV
Bakü Devlet Üniversitesi
Eş-Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Yusuf ZEREN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Yonca TURGUT SEZER, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK, Üye
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Prof. Dr. Murat KİRİŞÇİ, Üye
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

Danışmanım Prof. Dr. Yusuf ZEREN sorumluluğunda tarafımda hazırlanan Grand Lebesgue Uzaylarında Dejenere Üstel Sistemlerin Frame Özellikleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Kader ŞİMŞİR ACAR



Bu alışma, TÜBİTAK-ANAS ULUSLARARASI İKİLİ İşBİRLİĞİ PROJESİ
(Proje No: 118F447) kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma
Kurumu (TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir.



Buğra Atlas'a

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim sürecinde bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, destekleriyle her zaman motive eden, öncülüklerinde tecrübe etmiş olduğum birçok akademik çalışma ile kendimi geliştirmeme ve ilerlememe imkân veren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Yusuf ZEREN ve eş danışmanım Sayın Prof. Dr. Migdad I. İSMAİLOV'a, Doktora sürecim boyunca bilgisi ve tecrübesi ile bana değer katan, desteğini ve sabrını esirgemeyen, akademik alanda ufkumu genişleten, bana farklı bakış açıları kazandıran, kendimi geliştirmem için beni yönlendiren, her zaman örnek aldığım Sayın Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK'e,

Tez aşamasında tavsiye ve önerileri ile desteklerini her zaman hissettiğim, tezimdaki katkıları için Sayın Prof. Dr. Bilal T. BİLALOV ve Sayın Doç. Dr. Yonca TURGUT SEZER'e,

Ve tüm hayatım boyunca bana her türlü maddi manevi destek olan biricik babam Mustafa Niyazi ŞİMŞİR'e, canım annem Fikriye ŞİMŞİR'e, hayat arkadaşım Burak ACAR'a ve hayata bambaşka bir pencereden bakmamı sağlayan oğlum Buğra Atlas'a,

Sonsuz saygı, şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Minnettarım.

Kader ŞİMŞİR ACAR

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	5
1.3 Hipotez	5
2 GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA ÜSTEL VE TRİGONOMETRİK SİSTEMLERİN BAZLIK VE FRAME ÖZELLİKLERİ	6
2.1 Bazı Temel İfadeler	6
2.2 Grand Lebesgue Uzayları	17
2.3 Grand Lebesgue Uzaylarında Üstel Sistemin Bazlık Özellikleri	21
2.4 Grand Lebesgue Uzaylarında Trigonometrik Sistemlerin Bazlık Özellikleri	29
2.5 Klasik Lebesgue Uzaylarında Dejenere Üstel Sistemin Frame Özelliği ...	37
3 GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA DEJENERE ÜSTEL SİSTEMİN BAZLIK VE FRAME ÖZELLİKLERİ	51
3.1 Dejenere Üstel Sistemin Tamlığı ve Minimallığı	51
3.2 Dejenere Üstel Sistemin Bazlığı	54
3.3 Dejenere Üstel Sistemin Frame Özellikleri	56
4 SONUÇ	61
KAYNAKÇA	62
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	68

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Reel Öklid uzayı
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir
$C_0^\infty(\Omega)$	Ω 'da sonsuz mertebeden türevlenebilen, sınırlarda sıfır olan sürekli fonksiyon uzayı
L_p	Klasik Lebesgue uzayı
$l_2(\mathbb{N})$	Lebesgue dizi uzayı
$L_p)$	Grand Lebesgue uzayı
$L_p)'$	Grand Lebesgue uzayının dual uzayı
$G_p)$	Grand Lebesgue uzayının ayrılabilir alt uzayı
$L[M]$	M kümesinin lineer germesi
$\bar{M}$	M kümesinin kapanışı
δ_{ij}	Kronecker delta
$B(t, r)$	t merkezli r yarıçaplı yuvar
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç çarpım fonksiyonu
χ_E	Karakteristik fonksiyon
A_p	Muckenhoupt sınıfı

KISALTMA LİSTESİ

vb.	ve benzeri
h.h.y	hemen her yerde



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 4.1 Carleson eğrisi.....	27
--------------------------------	----



Grand Lebesgue Uzaylarında Dejenere Üstel Sistemlerin Frame Özellikleri

Kader ŞİMŞİR ACAR

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Eş-Danışman: Prof. Dr. Migdad I. İSMAİLOV

Bu tez çalışmasında grand Lebesgue uzayı ve özellikleri verilmiş, Ayrılabilir olmayan grand Lebesgue uzayının ayrılabilir bir alt uzayı ele alınarak bu uzayda üstel ve dejenere üstel sistemlerin tamlık, minimallik, bazlık ve frame özellikleri incelenmiştir. Üstel ve dejenere üstel sistemlerin tam, minimal, baz ve frame oldukları ispatlanmıştır. Dejenere üstel sistemden bir eleman çıkarılarak elde edilen yeni sistemin benzer özellikleri incelenmiş, bazı koşullar altında tam ve minimallik şartlarını sağladığı ancak baz ve frame olmadığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Grand Lebesgue uzay, tamlık, minimallik, bazlık, frame, üstel sistem, dejenere üstel sistem.

Frame Properties of Degenerate Exponential Systems in Grand Lebesgue Spaces

Kader ŞİMŞİR ACAR

Department of Mathematics

Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Co-supervisor: Prof. Dr. Migdad I. İSMAİLOV

In this thesis, the grand Lebesgue space and its properties are given. By considering a separable subspace of the non-separable grand Lebesgue space, the completeness, minimality, basicity and frame properties of the exponential and degenerate exponential systems are investigated. It has been proven that exponential and degenerate exponential systems are complete, minimal, basis and frame. The similar properties of the new system, which is obtained by removing an element from the degenerate exponential system, are examined, and it has been proven that under some conditions it satisfies the completeness and minimality conditions, but not the basicity and frame.

Keywords: Grand Lebesgue space, completeness, minimality, basicity, frame, exponential system, degenerate exponential system.

1.1 Literatür Özeti

Yaklaşım teorisinin önemli problemlerinden biri, uzayın elemanlarının bazlar ve framelerle ayrışımının incelenmesidir. Bu teori 20. yüzyılın başlarında sinyal analizi, bir sinyalin iletimi ve devamlılığına ilişkin ciddi bilgi eksiklikleri barındırmaktaydı. Gabor (1946) sinyal ayrışımına yeni bir yaklaşım getirerek bu eksiklikleri gidermiş ve bu çalışmayla frame kavramının temellerini atmıştır ancak isimlendirmemiştir. Gabor'un yeni yaklaşımı sinyal aktarımında bilgi kayıplarını önlemesi, nicelemede esneklik sağlaması, parazitlere karşı direnç sağlaması ve bunları yaparken sinyalin önemli karakteristik özelliklerini koruması sayesinde kısa sürede bu alanda kabul görüp yayılmıştır.

Frame kavramı ilk olarak 1952 yılında Duffin ve Schaeffer tarafından “A class of nonharmonic Fourier series” başlıklı çalışmada kullanılmıştır. Bu çalışmada, Hilbert uzaylarında frame kavramı verilmiş ve temel özellikleri incelenmiştir (Duffin ve Schaeffer, 1952). Hilbert uzaylarındaki frameler; Bari (1951) tarafından tanıtilen ve incelenen Riesz bazlarının, yani ortonormal bazlara eşdeğer bazların genellemeleridir.

$\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı olmak üzere her bir $f \in \mathcal{H}$ için

$$A\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|_{\mathcal{H}}^2$$

eşitsizliğini sağlayan $A > 0$ ve $B > 0$ sabit sayıları varsa, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayının sıfırdan farklı elemanlarının oluşturduğu boş olmayan $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemine $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında bir frame denir. Bir frame'in avantajı, uzayın her bir elemanının bir frame ile ayrılabilmesidir ve bu ayrım bazlarda olduğu gibi tek türlü olmak zorunda değildir.

Son zamanlarda, nümerik uygulamalar nedeniyle, framelere olan ilgi büyük ölçüde artmıştır. Frameler sayesinde, kristaller ve nano-nesnelerin yüzeylerinin özellikleri ve diğer alanlar incelenirken sinyalizasyon süreçlerinde, veri sıkıştırma ve bilgi işlemede yeni uygulamalar bulunmuştur. Genel olarak Hilbert uzayları için verilen

frame teorisi, soyut matematikteki araştırma alanlarında oldukça işe yarar olmasının yanı sıra, veri işleme, kablosuz iletişim, wavelet teorisi, örnekleme teorisi, sinyal iletimi, optik, hatalı bilgi taşınması, filterbank, sinyal tespiti, bilgi depolama, görüntü tanıma, jeofizik, kuantum tekniği ve gelişen teknolojiye bağlı olarak her geçen yıl yeni pek çok farklı uygulamayı içeren çok geniş çaplı alanlarıyla mühendislikte ve matematikte kullanılmaktadır.

1986'da Daubechies, Grossmann ve Meyer'in çalışmasıyla framelerin daha genel kullanım alanlarına yayılmaları sağlamış ve bu çalışma framelerin dönüm noktası olmuştur (Daubechies, Grossmann ve Meyer, 1986).

Gröchening (1991) Hilbert framelerini Banach uzaylarına genelleştirerek atomik ayrışım ve Banach frame tanımlarını vermiş ve aralarındaki ilişkiyi incelemiştir. p -framelerin ayrışımına göre sonuçları ve onların q -Riesz bazları ile ilişkileri çalışılmıştır (Christensen ve Stoeva, 2003). Ayrılabilir Banach uzaylarında frame genişlemeleri incelenmiş, Banach uzaylarında X_d -frameleri ve dualleri çalışılmıştır (Casazza, Christensen ve Stoeva, 2005; Stoeva, 2009).

L_p , ($p \neq 2$) Lebesgue uzayında Banach frame, atomik ayrışım ve stabiliteeleri incelenmiş, önemli sonuçlar elde edilmiştir (Casazza, Han ve Larson 1999; Casazza ve Christensen, 2005; Christensen ve Heil, 1997). L_p Lebesgue uzayının alt uzaylarının ötelenmesine ilişkin p -frame ve atomik ayrışım, Banach uzaylarındaki framelerin ve Riesz bazlarının genelleştirilmesi olarak elde edilmiştir (Aldroubi, Sun ve Tang, 2001).

g -frame ve g -Riesz baz kavramları tanıtılmış ve Hilbert uzaylarında framelerin ve Riesz bazlarının çeşitli özellikleri vermiştir (Sun, 2006; 2007). Hilbert uzaylarındaki framelerin bir başka genellemesi, t -frame kavramı ve birçok özelliği incelenmiştir (Bilalov ve Guliyeva, 2014; Ismailov, Guliyeva ve Nasibov, 2016). Ortonormal bazların stabilite teoremlerine benzer şekilde, Hilbert uzaylarındaki framelerin stabilitesi incelenmiştir (Balan, 1997; Casazza, 2000; Christensen, 2002, Golubeva, 2011).

Vektör değerli dizilerin Banach uzaylarındaki framelerinin Banach genellemesi düşünülmüş, $X^\sim$ -frame ve $X^\sim$ -Riesz g -baz kavramları tanımlanmış, gerekli ve yeterli koşul teoremleri oluşturulmuştur (Ismailov, Guliyeva ve Nasibov, 2016; Ismailov ve Jabrailova, 2014; Ismailov ve Nasibov, 2016).

Frame teori üzerine ilk basit, anlaşılabilir ve ayrıntılı bir çalışma “The Art of Frame Theory” başlıklı çalışmasıyla Casazza (2000) tarafından, daha kapsamlı bir çalışma ise Christensen (2002) tarafından yapılmıştır. Frameler daha sonra Hilbert ve Banach uzaylarındaki farklı yapılar genelleştirilmiştir (Abdollahpour, Faroughi ve Rahimi, 2007; Aldroubi vd., 2001; Astafieva, 1996; Bilalov ve Guliyeva, 2012; Bilalov ve Guseinov, 2008; 2009; Bilalov ve Mamedova, 2012; Christensen, 1996; Chui, 1992; Daubechies, 1992; Dremine, Ivanov ve Nechitailo, 2001; Feichtinger, 1989; Feichtinger ve Gröchening, 1989a, 1989b; Gabardo ve Han, 2003; Han ve Larson, 1997; Malat, 1999; Meyer, 1990; Najati, Faroughi ve Rahimi, 2008; Rudin, 1974; Young, 1980; Walnut, 1989).

Klasik fonksiyon uzayları; elektrolojik ve termolojik akışkanların modellenmesinde, görüntü işleme çalışmasında, standart olmayan büyümeye sahip diferansiyel denklemler vb. pek çok çeşitli uygulamaların modellenmesinde yeterli olmadığından, standart olmayan Banach fonksiyon uzaylarına olan ilgi son zamanlarda önemli ölçüde artmıştır. Bu uzaylarda harmonik analiz problemleri ve yaklaşım teorisi farklı seviyelerde çalışılmıştır (Adams, 2016; Bilalov ve Guseinov, 2012; Bilalov ve Guliyeva, 2014; Castilo ve Rafeiro, 2016; Cruz-Urbe ve Fiorenza, 2013; Diening, Harjulehto, Hästö ve Ruzicka, 2011; D’Onofrio, Sbordon ve Schiattarella, 2013; Fiorenza, 2000; Fiorenza ve Karadzhov, 2004; Fiorenza ve Krbeç, 2000; Israfilov ve Tozman, 2008, 2011; Kokilashvili, Meskhi, Rafeiro ve Samko, 2016; Sharapudinov, 1979, 2014; Xianling ve Dun, 2001; Zorko, 1986).

Standart olmayan Banach fonksiyon uzaylarından Grand Lebesgue uzayı, ilk olarak 1992 yılında Iwaniec ve Sbordon tarafından tanımlanmıştır (Iwaniec ve Sbordon, 1992). Bu uzayların kısmi diferansiyel denklemler teorisi, enterpolasyon teorisi vb. önemli uygulamaları vardır (Bilalov, 2016; D’Onofrio vd., 2013; Greco, 1993; Iwaniec ve Sbordon, 1998). Harmonik analiz ile ilgili özellikler bu uzayda çalışılmıştır (Kokilashvili, 2010; Rafeiro ve Vargas, 2015).

Grand Lebesgue uzaylarının ilişkili uzayları, Small Lebesgue uzayı ve aralarındaki ilişki iyi çalışılmıştır (Capone ve Fiorenza, 2005; Di Fratta ve Fiorenza, 2009; Fiorenza, 2000; Fiorenza ve Karadzhov, 2004). Diferansiyel denklemler

teorisindeki uygulamalarla ilgili olarak, integral operatörlerinin sınırlılığı Grand Lebesgue uzaylarında incelenmiştir. Ağırlıklı grand Lebesgue uzayındaki maksimal operatörün sınırlılığının Muckenhoupt koşuluna eşdeğerliği kanıtlanmıştır (Fiorenza ve Krbeç, 2000; Gupta, Fiorenza ve Jain, 2008; Kokilashvili, 2009; 2010; Kokilashvili ve Samko, 2010).

Dualite ve yansımalar, Capone ve Fiorenza tarafından çalışılmıştır (Fiorenza, 2000; Capone ve Fiorenza, 2005). Kompaktlık konusu Rafeiro ve Vargas tarafından gösterilmiştir (Rafeiro ve Vargas, 2015). Ayrılabilir olmayan Grand Lebesgue uzayının ayrılabilir alt uzayı tanımlanmıştır (Zeren, Ismailov ve Karacam, 2020; Zeren, Ismailov ve Şirin, 2020).

Harmonik analizle ilgili birçok klasik özellik Grand Lebesgue uzaylarına genişletilmiştir (Bilalov, 2001; 2004; 2019; Bilalov ve Guseinov, 2009; Bilalov ve Guliyeva, 2012; 2014; Bilalov ve Quliyeva, 2014; Bilalov ve Mamedova, 2012; Cruz-Uribe ve Fiorenza, 2013; Di Fratta ve Fiorenza, 2009; Greco, 1993; Gröchening, 1991; Fiorenza ve Karadzhov, 2004; Fiorenza ve Krbeç, 2000; Israfilov ve Tozman, 2008; 2011; Kokilashvili, 2009; 2010; Kokilashvili ve Samko, 2010; Zeren, Ismailov ve Karacam, 2020, Zeren, Ismailov ve Şirin, 2020).

$\{|t|^\alpha e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin L_2 Lebesgue uzayındaki bazlık özellikleri Babenko (1948) tarafından çalışılmış, Gaposchkin (1958) çalışmasıyla bu çalışma genişletilmiştir.

$\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$, $(1 \leq p < \infty)$ Lebesgue uzayındaki bazlık özellikleri Edwards ve Zigmund tarafından çalışılmıştır (Edwards, 1985a; 1985b; Zigmund, 1965a; 1965b). Üstel sistemin, ağırlıklı Lebesgue uzaylarında bazlık özellikleri Kazaryan ve Lizorkin (1989) tarafından çalışılmıştır.

Dejenere üstel sistemin $L_p(-\pi, \pi)$, $(1 \leq p < \infty)$ Lebesgue uzayındaki bazlık özellikleri ise Moiseev (1998; 1999), Pukhov ve Sedletskiı (2009), Shukurov (2018) tarafından çalışılmıştır.

$\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin ağırlıklı Lebesgue uzayında bazlık özellikleri Bilalov ve Veliyev (2005;2006) tarafından incelenmiştir.

$\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin grand Lebesgue uzayındaki bazlık özellikleri Ismailov, Zeren, Şimşir Acar ve Aliyarova tarafından 2022 yılında çalışılmış, $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere sisteminin grand Lebesgue uzayındaki bazlık özellikleri ise Ismailov, Şimşir Acar ve Zeren tarafından 2023 yılında çalışılmıştır.

$\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere sisteminin grand Lebesgue uzayındaki frame özellikleri Ismailov, Zeren ve Şimşir Acar tarafından gösterilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında, $L_p(-\pi, \pi)$ grand Lebesgue uzayının, öteleme operatörü tarafından üretilen ayrılabilir $G_p(-\pi, \pi)$ alt uzayında $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemin ve $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemin bazlık ve frame özellikleri incelenecektir. Ayrıca bu sistemden sonlu sayıda elemanın çıkartılmasıyla elde edilen yeni sistemin tamlık ve minimallik özellikleri incelenecektir.

1.3 Hipotez

$\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemi ve $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ grand Lebesgue uzayında baz ve framedir.

Tez çalışmasında ilk olarak $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin Grand Lebesgue uzayındaki tamlık, minimallik ve bazlık özellikleri incelenecek, sonrasında aşağıdaki ağırlık fonksiyonuyla elde edilen $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin tamlık, minimallik, baz ve frame özellikleri incelenecektir.

$\alpha_k \in \mathbb{R}$ ve $t_k \in [-\pi, \pi]$ olmak üzere $\rho(t)$ ağırlık fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$$

GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA ÜSTEL VE TRİGONOMETRİK SİSTEMLERİN BAZLIK VE FRAME ÖZELLİKLERİ

2.1 Bazı Temel İfadeler

2.1.1 Baz

Schauder (1927) tarafından tanımlanan baz kavramı; bir Banach uzayından alınan her bir elemanın, lineer bağımsız bir vektör ailesi tarafından benzersiz bir genişlemeye sahip olması özelliğine dayanır.

X Banach uzay olmak üzere, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ kümesi bu uzayda sıralı bir küme olsun. Yani; $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{e_1, e_2, \dots\}$. Her $x \in X$ elemanı için;

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$$

olacak şekilde bir tek $\{c_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ skaler dizisi varsa $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ sistemine X 'de (Schauder) bazı denir. Buradaki $\{c_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ katsayılarına $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bazının ilişkili fonksiyonel katsayıları denir. X Banach uzayından alınan $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi X uzayında baz ise $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sisteminin lineer girmesinin kapanışı X uzayına eşittir, yani

$$\overline{L[\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}]} = X$$

dir. Bazlar hakkında çok daha fazla bilgi için bu kaynaklar verilebilir; (Heil, 2011; Lindestrauss, 1977; Singer 1970). Bazı olan bir Banach uzayı zorunlu olarak ayrılabilir. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Bilinen ayrılabilir Banach uzaylarının çoğunun bir bazı vardır; bazı olmayan ayrılabilir bir Banach uzayının ilk örneği Enflo (1973) tarafından oluşturulmuştur. Üstel sistemlerle ilişkili daha genel bir baz kavramını tanımlamak için tamlık ve minimallik tanımları verilecektir.

Tanım 2.1. (Tamlık)

X Banach uzay olmak üzere $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset X$ sistemi verilsin.

$$\overline{L[\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}]} = X$$

ise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset X$ sistemine X 'de tamlıdır denir (Christensen, 2002).

Tanım 2.2. (Minimallik)

X Banach uzay olmak üzere $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset X$ sistemi verilsin. Sistemden keyfi bir x_k elemanı çıkarıldığında, geri kalan sistemin lineer gemesinin kapanışında çıkarılan x_k elemanı bulunmuyorsa, yani $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k \notin \overline{L[\{x_n\}_{n \neq k}]}$$

ise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemine X 'de minimaldir denir (Christensen, 2002).

Tanım 2.3. X Banach uzayı ve X^* , X 'in dual uzayı olsun. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ve $\{x_m^*\}_{m \in \mathbb{N}} \subset X^*$ sistemleri verilsin.

$$x_m^*(x_n) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

ise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ve $\{x_m^*\}_{m \in \mathbb{N}} \subset X^*$ sistemlerine biortogonal sistemler denir (Lindenstrauss ve Tzafriri, 1996).

Teorem 2.1. (Minimallik Kriteri)

X Banach uzayı ve X^* , X 'in dual uzayı olsun. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sisteminin X 'de minimal olması için gerek ve yeter şart $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x_k) = \delta_{nk}$$

olacak şekilde $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sisteminin $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ biortogonal sisteminin olmasıdır (Lindenstrauss ve Tzafriri, 1996).

Teorem 2.2. X Banach uzayı ve X^* , X 'in dual uzayı olsun. $f \in X^*$ verilsin. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sisteminin tam olması için gerek ve yeter şart $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) = 0$ iken $f = 0$ olmasıdır (Christensen, 2002).

Teorem 2.3. X Banach uzay olmak üzere, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi X için bir baz olsun. O halde $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ve $\{e_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$ bazının ilişkili $\{c_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ fonksiyonel katsayıları biortogonaldır (Christensen, 2002).

Teorem 2.4. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi X uzayında sıfırdan farklı vektörlerin oluşturduğu tam bir vektör dizisi olsun. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ sisteminin baz olması için gerek ve yeter şart; $n \leq m$ olacak şekilde her $n, m \in \mathbb{N}$ tam sayıları ve seçilen her skaler değerli $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi için

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^m c_k e_k \right\|$$

olacak şekilde bir K sabit sayısının olmasıdır (Christensen, 2002).

Teorem 2.5. X Banach uzay olmak üzere, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi X için bir baz ve $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bu bazın ilişkili fonksiyonel katsayıları olsun.

- i. $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sisteminin lineer germesinin kapanışı X^* uzayına eşittir ve biortogonal sistemi $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemidir,
- ii. X uzayı refleksif (yansımali) uzay ise $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi X^* uzayında bazdır

(Christensen, 2002).

Tanım 2.4. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı olmak üzere, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ sistemi verilsin. Her $k, j \in \mathbb{N}$ için

$$\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı için bir ortonormal sistemdir denir. Bir tam ortonormal sistem, $\mathcal{H}$ için bir ortonormal bazdır (Christensen, 2002).

Önerme 2.1. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi $\mathcal{H}$ Hilbert uzayının normalleştirilmiş vektör dizisi ve her $f \in \mathcal{H}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2$$

olsun. O halde $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi $\mathcal{H}$ Hilbert uzayının bir ortonormal bazıdır (Christensen, 2002).

Tanım 2.5. (Riesz Bazı)

$\mathcal{H}$ Hilbert uzayı ve $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi $\mathcal{H}$ uzayı için bir ortonormal baz olsun. $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sınırlı bijektif (birebir ve örten) operatörü tanımlansın. $\{U e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemine $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı için Riesz bazı denir (Christensen, 2002).

Teorem 2.6. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı ve $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi $\mathcal{H}$ uzayı için bir Riesz bazı olsun.

Her $f \in \mathcal{H}$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k$$

eşitliği yazılabilecek şekilde $\mathcal{H}$ uzayında bir tek $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi vardır. $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi de $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı için Riesz bazıdır. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi ve $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi biortogondur (Christensen, 2002).

Önerme 2.2. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı ve $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{U f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi $\mathcal{H}$ uzayı için bir Riesz bazı olsun. O halde her $f \in \mathcal{H}$ için

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $A, B > 0$ sabit sayıları vardır. Burada A 'nın alabileceği en büyük değer $\frac{1}{\|U^{-1}\|^2}$ ve B 'nin alabileceği en küçük değer $\|U\|^2$ 'dir.

2.1.2 Frame Teori

$\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı olmak üzere her $f \in \mathcal{H}$ için

$$A \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|_{\mathcal{H}}^2$$

eşitsizliğini sağlayan $A > 0$ ve $B > 0$ sabit sayıları varsa, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayının sıfırdan farklı elemanlarının oluşturduğu boş olmayan $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemine $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında bir frame denir. Burada A ve B sayılarına sırasıyla alt ve üst frame sınırı denir.

Özel olarak $A = B$ ise tight frame, $A = B = 1$ ise parseval frame denir. Sistemden herhangi bir eleman kaldırılamıyorsa exact (tam) frame denir. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi exact frame ise

$$\overline{L[\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}]} = \mathcal{H}$$

eşitliği sağlanır. Sistemden en az bir eleman kaldırıldığı halde sistem hala bir frame oluşturuyorsa overcomplete (nonexact veya redundant) frame denir (Christensen, 2002).

Teorem 2.7. Bir sistemin exact frame olabilmesi için gerek ve yeter şart sistemin Riesz bazı olmasıdır (Christensen, 2002).

Tanım 2.6. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi $\mathcal{H}$ uzayında bir frame olsun. $l_2(\mathbb{N}) = \{\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} : x_k \in \mathbb{C}, \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^2 < \infty\}$ olmak üzere,

$$T : l_2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$$

$$T\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

şeklinde tanımlanan operatöre sentez operatörü (pre-frame operatör) denir. Sınırlı operatördür. Sentez operatörünün eşlenik (adjoint) operatörü;

$$T^* : \mathcal{H} \rightarrow l_2(\mathbb{N})$$

$$T^*f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$$

şeklinde tanımlanır ve T^* operatörüne analiz operatörü denir. Eğer $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı için bir frame ise analiz ve sentez operatörlerinden frame operatörü elde edilir;

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

$$Sf = TT^*f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k.$$

Lemma 2.1. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı olmak üzere, $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi A ve B sınırları ile birlikte $\mathcal{H}$ uzayı bir frame olsun. $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ frame operatörü tanımlansın. O halde

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2$$

eşitliği sağlanır. S operatörü sınırlı, terslenebilir, kendine eşlenik ve pozitif operatördür. $\{S^{-1}f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi B^{-1} ve A^{-1} sınırlarıyla birlikte bir framedir. $\{S^{-1}f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sisteminin frame operatörü S^{-1} operatörüdür (Christensen, 2002).

Önerme 2.3 Eğer $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi bir exact frame ise $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ve $\{S^{-1}f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ biortogonaldır ve $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı için bir bazdır (Christensen, 2002).

Aşağıdaki lemma, bir sistemin frame olup olmama durumunu uzayın yoğun bir kümesinde kontrol etmenin yeterli olduğunu göstermektedir.

Lemma 2.2. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında bir dizi ve $\mathcal{H}$ uzayının yoğun bir alt kümesi V olsun. Her $f \in V$ için

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

eşitsizliğini sağlayacak $A, B > 0$ sabit sayıları varsa, $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi A ve B sınırlarıyla $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında bir framedir (Christensen, 2002).

Lemma 2.3. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında bir frame olsun. Eğer bazı $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ katsayıları için $f \in \mathcal{H}$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

şeklinde temsil edilebiliyorsa;

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1} f_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k - \langle f, S^{-1} f_k \rangle|^2$$

ifadesi doğrudur (Christensen, 2002).

Teorem 2.8. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında bir $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ Riesz bazı olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı için frame olmasıdır. Riesz bazının sınırları frame sınırlarıyla çakışır (Christensen, 2002).

Riesz bazı olmayan framelere overcomplete frame de denir.

Teorem 2.9 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında bir frame olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir;

- i. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı için bir Riesz bazıdır,
- ii. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bir exact framedir,
- iii. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi minimaldir,
- iv. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sisteminin biortogonal sistemi vardır,
- v. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi ve $\{S^{-1} f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi biortogonaldır,
- vi. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi ω – bağımsızdır,
- vii. Eğer bazı $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ için $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ ise her $k \in \mathbb{N}$ için $c_k = 0$
- viii. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bir bazdır (Christensen, 2002).

Tanım 2.7. X Banach uzay ve $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ X uzayının bazı olsun. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bazının ilişkili fonksiyonel katsayıları $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ olmak üzere, $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ilişkili skaler değerli dizilerinin uzayı;

$$K = \left\{ \{c_k\}: \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, X' \text{ de yakınsak} \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\|\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}\|_K = \sup \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\|_X$$

normuyla birlikte K uzayı, Banach uzaydır (Christensen, 2002).

Tanım 2.8. X Banach uzay, X^* dual uzay ve K ise $\mathbb{N}$ ile indekslenen Banach dizi uzayı olsun. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X^*$ olsun. $\forall f \in X$ ve $\exists A, B > 0$ için,

$$\begin{aligned} & i) \{g_k(f)\}_{k \in \mathbb{N}} \in K \\ & ii) A\|f\|_X \leq \|\{g_k(f)\}_{k \in \mathbb{N}}\|_K \leq B\|f\|_X \\ & iii) f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(f) f_k \end{aligned}$$

özellikleri sağlanırsa $(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}})$ çiftine K 'ya göre bir atomik ayrışım (atomic decomposition) denir (Christensen, 2002). $(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, K)$ şeklinde de gösterilir. Bir Banach uzayının bazı varsa atomik ayrışımı da vardır ancak tersi her zaman doğru değildir. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında $X = \mathcal{H}$ ve $K = l_2(\mathbb{N})$ kabulleriyle (i) ve (ii) koşulları frame oluşturmaktadır. Ancak bu durum; Banach uzayının dualinde $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gibi bir dizinin varlığı göstermeye yeterli değildir.

Tanım 2.9. X bir Banach uzayı, X^* dual uzay ve $K, \mathbb{N}$ ile indekslenen Banach dizi uzayı olsun. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X^*$ ve $S: K \rightarrow X$ sınırlı operatörü tanımlansın. $\forall f \in X$ ve $\exists A, B > 0$ için,

$$\begin{aligned} & i) \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in K \\ & ii) A\|f\|_X \leq \|\{g_k(f)\}_{k \in \mathbb{N}}\|_K \leq B\|f\|_X \\ & iii) S\{g_k(f)\} = f \end{aligned}$$

özellikleri sağlanırsa $(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}, S)$, X için K uzayına göre bir Banach framedir denir (Gröchening, 1991).

Banach frame ile atomik ayrışım karşılaştırılacak olursa;

Atomik ayrışım, Hilbert uzaylarındaki framelerde olduğu gibi $f \in X$ 'in bir seri açılımını elde etme isteğini ifade eder. Ancak Banach frame; sonsuz bir dizi tarafından verilmeden yeniden yapılandırmaya ve $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ katsayıları yardımıyla $f \in X$ 'e geri dönülmesine imkan sağlar. Casazza, Han ve Larson (1999), $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ birim vektörlerin K dizi uzayına ait olması ve K için bir baz oluşturması durumunda, Banach frameler ile atomik ayrışım arasında basit bir ilişki olduğunu göstermişlerdir.

Önerme 2.4. X bir Banach uzayı, X^* dual uzay ve $K, \mathbb{N}$ ile indekslenen Banach dizi uzayı olsun. $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X^*$ ve $S: K \rightarrow X$ sınırlı operatörü tanımlansın. $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, K uzayını oluşturan bazın kanonik birim vektörlerinden oluşmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir (Christensen, 2002).

- $(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}, S)$, X için K 'ya göre bir Banach framedir,
- $(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{S(\delta_k)\}_{k \in \mathbb{N}})$, X 'in K 'ye göre bir atomik ayrışımıdır.

Yani, bir Banach frame'in atomik ayrışım olması için gerek ve yeter koşul kanonik birim vektörlerin K uzayı için bir baz oluşturmasıdır.

Önerme 2.5. Her ayrılabilir X Banach uzayı, uygun bir şekilde seçilmiş dizi uzayı K 'ya göre bir Banach frame ile donatılabilir (Casazza, Han ve Larson, 1999).

Ayrılabilir bazı Banach uzaylarının bazı olmasına rağmen, Banach frameleri vardır ve bu durum frameleri daha iyi yapmaktadır.

Bir Banach frame'in pratik olarak kullanışlı olması için, uygun ve kolayca tanımlanabilir bir dizi uzayı K 'ya göre tanımlanması gerekmektedir. İyi bir dizi uzayları sınıfına göre Banach framelerin varlığı göz önüne alındığında; Banach framelerin, Hilbert framelerinin özelliklerini sağladıkları görülmektedir. (Casazza, Christensen ve Stoeva, 2005) Bu bakış açısı, Stoeva (2009) tarafından aşağıdaki örnekle desteklenmektedir:

X Banach uzayının dualindeki her tam $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistemi, bazı K dizi uzaylarına göre X için bir Banach framedir. Örneğin; $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ortonormal baz olsun. Bu uzayda $\{e_k + e_{k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ailesini ele alınsın;

- $\{e_k + e_{k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$, K dizi uzayına göre $\mathcal{H}$ için bir Banach framedir.
- $\{e_k + e_{k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{H}$ için bir frame değildir.

Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı gibi Banach framelerin tanımı, Hilbert uzaylarındaki frame tanımıyla eşleşmemekte olup Banach framelerin daha genel olduğu anlaşılmaktadır.

2.1.3 Klasik Lebesgue Uzayı

(X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve $1 < p < \infty$ için $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ 'de tanımlı bir bölge olmak üzere

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

özellğine sahip tüm ölçülebilir $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına, p . mertebeden Lebesgue-integrallenebilir uzayı veya kısaca Lebesgue uzayı denir ve $L_p(\Omega)$ ile gösterilir (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Tanım 2.10. $1 < p < \infty$ olmak üzere $L_p(\Omega)$ uzayının normu,

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu ile tanımlanır. $\|f\|_p$ ifadesine f fonksiyonunun L_p normu denir. $L_p(\Omega)$ uzayı bu normla birlikte normlu uzaydır (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Örnek. $2 < p < \infty$ ve $\Omega = (0, \infty)$ olsun.

$$f(x) = (1 + x)^{-1/2}$$

şeklinde tanımlanan $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $L_p(\Omega)$ uzayının elemanıdır.

Teorem 2.10. $\mu(X) < \infty$ olmak üzere (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. O halde her $1 \leq p \leq q \leq \infty$ için

$$L_q(X, \Sigma, \mu) \subseteq L_p(X, \Sigma, \mu)$$

kapsaması sağlanır (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Teorem 2.11. $L_p(\Omega)$ uzayı $\|f\|_p$ normuyla bir Banach uzayıdır (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Teorem 2.12. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $L_p(\Omega)$ Lebesgue uzayının dual uzayı $L_q(\Omega)$ uzayıdır (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Teorem 2.13. $L_p(\Omega)$ uzayı refleksif (yansımali) uzaydır. Yani dualinin duali kendisidir (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Teorem 2.14. (Hölder Eşitsizliği)

$1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L_p, g \in L_q$ ise $f \cdot g \in L_1$ olur ve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Teorem 2.15. (Minkowski Eşitsizliği)

$1 < p < \infty$ için $f, g \in L_p$ iken $f + g \in L_p$ olur ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Teorem 2.16. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L_p(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Riesz temsil teoremi, Lebesgue uzayları arasındaki karakterizasyonu kolay bir şekilde sağladığından fonksiyonel analizde önemli bir teoremdir.

Teorem 2.17. (Riesz Temsil Teoremi)

$1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $L_p(X)$ uzayında T lineer fonksiyoneli tanımlansın. O halde $\forall f \in L_p(X)$ için

$$T(f) = \int_X f g d\mu$$

olacak şekilde bir tek $g \in L_q(X)$ vardır ve $\|T\| = \|g\|_q$ 'dir (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Theorem 2.18. (Konvolüsyon için Young Teoremi)

$k \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. O halde

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} k(x-t)f(t)dt \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|k\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsiliği sağlanır. (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Theorem 2.19. (Riesz-Thorin İnterpolasyon Teoremi)

$L_p(X)$ Lebesgue uzayında $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty, p_0 \neq p_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olmak üzere

$$T: L_{p_0} \rightarrow L_{q_0}$$

$$T: L_{p_1} \rightarrow L_{q_1}$$

lineer operatörü sınırlı olsun. Yani,

$$\|Tf\|_{L_{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L_{p_0}}$$

$$\|Tf\|_{L_{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L_{p_1}}$$

eşitsizlikleri sağlansın. O halde $\theta \in (0,1)$ için

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

olacak şekilde T operatörü $L_p(X)$ Lebesgue uzayından $L_q(X)$ Lebesgue uzayına sınırlıdır ve

$$\|Tf\|_{L_q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L_p}$$

eşitsizliği sağlanır (Kokilashvili vd., 2016).

2.2 Grand Lebesgue Uzayları

$1 < p < +\infty$ olmak üzere grand Lebesgue uzay;

$$L_p(-\pi, \pi) = \left\{ f : f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R} \text{ ölçülebilir, } \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Grand Lebesgue uzayı,

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

normuyla bir normlu uzaydır (Iwaniec ve Sbordone, 1992).

Teorem 2.20. $1 < p < \infty$ olmak üzere, $L_p(\Omega)$ uzayı, Banach uzaydır (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Teorem 2.21. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir küme olmak üzere $p > 1$ için

$$L_p(\Omega) \subsetneq L_p(\Omega)$$

kapsaması sağlanır (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Örnek. $\Omega = (0,1)$ ve $p > 1$ olsun.

$$f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu seçilsin.

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_0^1 \left| x^{-\frac{1}{p}} \right|^p dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = \infty$$

olup $f \notin L_p(0,1)$ ve

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 \left| x^{-\frac{1}{p}} \right|^{p-\varepsilon} dx \right) &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 x^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dx \right) = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon x^{\frac{\varepsilon}{p}}}{\frac{\varepsilon}{p}} \Big|_0^1 \right) \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p x^{\frac{\varepsilon}{p}} \Big|_0^1 \right) = p < \infty \end{aligned}$$

olur $f \in L_p(0,1)$ 'dir.

Grand Lebesgue uzayının en önemli özelliklerinden biri yuvarlama (nesting) özelliğidir:

$p > 1$ ve $0 < \varepsilon < p - 1$ olmak üzere,

$$L_\infty(\Omega) \subsetneq L_p(\Omega) \subsetneq L_p(\Omega) \subsetneq L_{p-\varepsilon}(\Omega)'dir.$$

Tanım 2.11. (Small Lebesgue Uzayı)

$\Omega \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$ ve $|\Omega| < +\infty$ olmak üzere $\mathcal{M}_0, [-\infty, +\infty]$ aralığında tanımlı tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. Her $g, g_k \in \mathcal{M}_0, k \in \mathbb{N}$, için

$$\|g\|_{p)' = \inf_{g=\sum_{k=1}^{\infty} g_k} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |g_k|^{(p-\varepsilon)'} dt \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \right\}$$

olmak üzere small Lebesgue uzayı

$$L_{p)'(\Omega) = \{g \in \mathcal{M}_0 : \|g\|_{p)' < +\infty\}$$

şeklinde tanımlanır (Capone ve Fiorenza, 2005).

Teorem 2.22. $L_{p)'(\Omega)$ small Lebesgue uzayı Banach Fonksiyon uzayıdır (Capone ve Fiorenza, 2005).

Teorem 2.23. $L_{p)'(\Omega)$ small Lebesgue uzayı, $L_p(\Omega)$ grand Lebesgue uzayının dualidir (Capone ve Fiorenza, 2005).

Teorem 2.24. $L_{p)'(\Omega)$ uzayı refleksif (yansımali) uzay değildir (Capone ve Fiorenza, 2005).

Teorem 2.25. (Hölder Eşitsizliği)

$1 < p < +\infty$ ve $\Omega \in \mathbb{R}^n, n \geq 1, |\Omega| < +\infty$ olsun. Her $f \in L_p(\Omega)$ ve her $g \in L_{p)'(\Omega)$ için;

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f g dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p)'}$$

Hölder eşitsizliği sağlanır (Capone ve Fiorenza, 2005).

Teorem 2.26. $L_p(\Omega)$ uzayı, ayrılabilir uzay değildir. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı L_p uzayında yoğun değildir. C_0^∞ uzayının grand Lebesgue uzayına kısıtlanması;

$$\overline{C_0^\infty}|_p = \left\{ f \in L_p(\Omega) : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Omega} |f|^{p-\varepsilon} dx = 0 \right\}$$

uzayıdır (Castilo ve Rafeiro, 2016).

Örnek. $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere,

$$f_\lambda(t) = f(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t < \lambda \\ (t - \lambda)^{-\frac{1}{p}} & , \lambda \leq t \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyon ailesini ele alınsın.

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\lambda}^1 \left| (t - \lambda)^{-\frac{1}{p}} \right|^{p-\varepsilon} dt \right) &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\lambda}^1 (t - \lambda)^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dt \right) \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(t - \lambda)^{\frac{\varepsilon}{p}} \Big|_{\lambda}^1 \right) \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(1 - \lambda)^{\frac{\varepsilon}{p}} \right) < \infty \end{aligned}$$

olup f_λ grand Lebesgue uzayının elemanıdır. $\lambda < \mu < 1$ için

$$\begin{aligned} \|f_\mu - f_\lambda\|_p &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\lambda}^{\mu} (t - \lambda)^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(t - \lambda)^{\frac{\varepsilon}{p}} \Big|_{\lambda}^{\mu} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(\mu - \lambda)^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &> p^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

olup $L_p(\Omega)$ uzayının yoğun bir alt uzayı yoktur, ayrılabilir uzay değildir.

2.2.1 Grand Lebesgue Uzaylarında Öteleme Operatörün Ürettiği Alt Uzayın Bazı Özellikleri

$\forall f \in L_p(-\pi, \pi)$ ve $T_\delta f(x) = \begin{cases} f(x + \delta), & x + \delta \in [-\pi, \pi] \\ 0, & x + \delta \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$ öteleme (kaydırma, shift) operatörü olmak üzere

$$\widetilde{G_p}(-\pi, \pi) = \{f \in L_p(-\pi, \pi) : \|T_\delta f(x) - f(x)\|_p \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0\}$$

uzayı tanımlansın. $\widetilde{G_p}(-\pi, \pi)$ kapanışı olan $\overline{\widetilde{G_p}(-\pi, \pi)} = G_p(-\pi, \pi)$ uzayı; $f \in L_p$ olmak üzere;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt = 0$$

özellikli fonksiyonlardan oluşur.

Teorem 2.27. $1 < p < +\infty$ olmak üzere $C_0^\infty[-\pi, \pi]$ uzayı $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında yoğundur.

$$G_p(-\pi, \pi) = \{f \in L_p(-\pi, \pi) : \|f(\cdot + \delta) - f(\cdot)\|_p \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0\}$$

Burada $\overline{C_0^\infty} = G_p$ 'dir. $G_p(-\pi, \pi)$ uzayı ayrılabilir uzaydır (Zeren, Ismailov ve Karacam, 2020).

Teorem 2.28. $G_p(-\pi, \pi)$ uzayı, $\|f\|_p$ normuyla Banach uzaydır (Zeren, Ismailov ve Sirin, 2020).

Lemma 2.4. $G_p(-\pi, \pi)$ uzayı klasik Lebesgue uzayını kapsar. Yani,

$$L_p(-\pi, \pi) \subset G_p(-\pi, \pi)$$

olup $G_p(-\pi, \pi) \setminus L_p(-\pi, \pi) \neq \emptyset$ 'dır (Zeren, Ismailov ve Sirin, 2020).

Lemma 2.5. $\forall f \in L_p(\Omega)$ için;

$$\|f\|_{G_p} \leq (p-1) \cdot \|f\|_{L_p}$$

eşitsizliği sağlanır. $L_p(\Omega)$ uzayı $G_p(\Omega)$ uzayında yoğundur (Zeren, Ismailov ve Sirin, 2020).

Örnek. $p > 1, \Omega \in [0,1], n \in \mathbb{N}$ ve $f_n(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, -e^{n^{2p}}) \\ t^{-\frac{1}{p}}, & t \in [-e^{n^{2p}}, 1] \end{cases}$ fonksiyonu seçilsin.

$$\|f_n\|_p = \left(\int_0^1 t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p}} = n^2$$

olup $f_n \notin L_p(0,1)$ 'dir ve

$$\sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 \left| t^{-\frac{1}{p}} \right|^{p-\varepsilon} dt \right) = p < \infty$$

olup $f_n \in L_p(0,1)$ 'dir.

2.3 Grand Lebesgue Uzaylarında Üstel Sistemin Bazlık Özellikleri

2.3.1 Üstel Sistemin Normu

$1 < p < +\infty$ olmak üzere $G_p(-\pi, \pi) \subset L_p(-\pi, \pi)$ uzayında $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin normu;

$$\begin{aligned} \|e^{int}\|_{p)} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{int}|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p - 1 \end{aligned}$$

dir.

2.3.2 Üstel Sistemin Bazlık Özellikleri

Bu bölümde $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında bazlık özellikleri incelenecektir.

Teorem 2.29 X bir Banach uzay olsun. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin X uzayı için bir baz olması için gerek ve yeter koşul

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi X 'de tamdır,
2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi X 'de minimaldir,
3. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin biortogonal sistemi olsun. $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$ ve $\forall x \in X$ için

$$\left\| \sum_{k=-m}^n f_k(x) x_k \right\|_X \leq M \|x\|_X.$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ sayısı vardır,

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi X uzayında baz olsun.

1. Baz tanımından $L[\overline{\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}}] = X$ olup, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi X uzayında tamdır.

2. Keyfi $x \in X$ için

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x_n$$

yazılabilir. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $f_k(x) = a_k$ olacak şekilde f_k lineer fonksiyoneli tanımlansın. Her $k, n \in \mathbb{Z}$ için $f_k(x_n) = \delta_{kn}$ 'dir.

$$F: K \rightarrow X$$

$$F(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x_n$$

operatörü tanımlansın. $\|F\| \leq 1$ 'dir ve F operatörü K uzayından X uzayına bir izomorfizm oluşturur.

Her $n, m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \frac{1}{\|x_n\|_X} \|a_n x_n\|_X \\
&= \frac{1}{\|x_n\|_X} \left\| \sum_{k=-m}^n a_k x_k - \sum_{k=-m}^{n-1} a_k x_k \right\|_X \\
&\leq \frac{1}{\|x_n\|_X} \left\| \sum_{k=-m}^n a_k x_k \right\|_X + \frac{1}{\|x_n\|_X} \left\| \sum_{k=-m}^{n-1} a_k x_k \right\|_X \\
&\leq \frac{2\|a\|_K}{\|x_n\|_X} \leq \frac{2\|F^{-1}\|_{L(X,K)}}{\|x_n\|_X} \|x\|_X
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|f_{-m}(x)| &= \frac{1}{\|x_{-m}\|} \|a_{-m} x_{-m}\|_X \\
&= \frac{1}{\|x_{-m}\|_X} \left\| \sum_{k=-m}^n a_k x_k - \sum_{k=-m+1}^n a_k x_k \right\|_X \\
&\leq \frac{2\|a\|_K}{\|x_{-m}\|_K} \leq \frac{2\|F^{-1}\|_{L(X,K)}}{\|x_{-m}\|_X} \|x\|_X
\end{aligned}$$

yani f_k , X 'de sınırlıdır, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ biortogonal sistemdir. Dolayısıyla $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi X 'de minimaldir.

3. Her $x \in X$ ve her $n, m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=-m}^n f_k(x) x_k \right\|_X &\leq \sup_{n, m \in \mathbb{N}_0} \left\| \sum_{k=-m}^n f_k(x) x_k \right\|_X \\
&= \|F^{-1}x\| \\
&\leq \|F^{-1}\|_{L(X,K)} \|x\|_X.
\end{aligned}$$

Tersine; $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin X 'de baz olduğu gösterilsin;

Keyfi $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ alınsın. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi X 'de tam olduğundan, $n, m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\|x - y\|_X < \varepsilon$$

olacak şekilde

$$y = \sum_{k=-m}^n f_k(y)x_k$$

vardır. Her $n_1 > n, m_1 > m \in \mathbb{N}_0$ için

$$y = \sum_{k=-m_1}^{n_1} f_k(y)x_k$$

eşitliği sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=-m_1}^{n_1} f_k(x)x_k \right\|_X &= \left\| x - y + y - \sum_{k=-m_1}^{n_1} f_k(x)x_k \right\|_X \\ &\leq \|x - y\|_X + \left\| \sum_{k=-m_1}^{n_1} f_k(x - y)x_k \right\|_X \\ &\leq \|x - y\|_X + M\|x - y\|_X < \varepsilon (1 + M). \end{aligned}$$

O halde $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x)x_n$ 'dir.

Not. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, X$ 'de baz olsun. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ bazının $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ilişkili skaler dizilerinin uzayı K ile gösterilsin. K uzayı,

$$\|\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_K = \sup_{n, m \in \mathbb{N}_0} \left\| \sum_{k=-m}^n a_k x_k \right\|_X$$

normuyla Banach uzaydır.

2.3.3 Üstel Sistemin Grand Lebesgue Uzayında Bazlığı Hakkında Bazı Sonuçlar

Teorem 2.30. $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ grand Lebesgue uzayında minimaldir (Ismailov, Zeren, Şimşir Acar ve Aliyarova, 2022).

İspat. $f \in L_p(-\pi, \pi)$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$v_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt$$

fonksiyoneli sınırlıdır;

Her $\varepsilon \in (0, p - 1)$ için,

$$\begin{aligned}
|v_n(f)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} (2\pi)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \varepsilon^{\frac{-1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq \varepsilon^{\frac{-1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L_p(-\pi, \pi)}.
\end{aligned}$$

Yani, $v_n(\cdot)$ fonksiyoneli sınırlıdır. Diğer taraftan her $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$v_n(e^{imt}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)t} dt = \delta_{nm}$$

olup $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemi ile $v_n(\cdot)$ fonksiyoneli biortogonaldır. $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimaldir.

Teorem 2.31. $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tamdır (Ismailov, Zeren, Şimşir Acar ve Aliyarova, 2022).

İspat. Keyfi $\eta > 0$ ve keyfi $f \in G_p(-\pi, \pi)$ fonksiyonunu seçilsin. $C_0^\infty[-\pi, \pi]$, $G_p(-\pi, \pi)$ 'de yoğun olduğundan

$$\|f - g_\eta\|_{G_p(-\pi, \pi)} < \eta$$

olacak şekilde $g_\eta \in C_0^\infty[-\pi, \pi]$ fonksiyonu vardır. g_η fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi g_η fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan

$$P_m(t) = \sum_{n=-m}^m v_n(g_\eta) e^{int}, m \in \mathbb{N}_0$$

olacak şekilde en az bir m_0 sabit sayısı vardır öyle ki $\forall m > m_0$ için

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} |g_\eta(t) - P_m(t)| < \eta$$

eşitsizliği sağlanır. O halde

$$\begin{aligned} \|g_\eta - P_m\|_{G_p(-\pi, \pi)} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_\eta(t) - P_m(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &< \eta \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \eta(p-1). \end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \|f - P_m\|_{G_p(-\pi, \pi)} &\leq \|f - g_\eta\|_{G_p(-\pi, \pi)} + \|g_\eta - P_m\|_{G_p(-\pi, \pi)} \\ &< \eta + \eta(p-1) \\ &= \eta p \end{aligned}$$

dir. O halde $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tamdır.

Tanım 2.12. (Carleson Eğrisi)

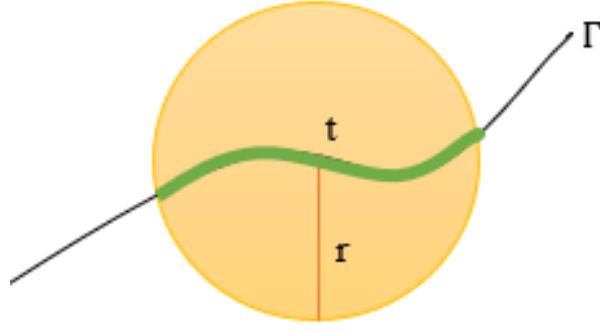
Γ basit düzeltilebilir bir eğri olsun. $t \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} B(t, r) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - t| < r\} \\ D(t, r) &= \Gamma \cap B(t, r) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$|D(t, r)| \leq c_0 \cdot r$$

olacak şekilde en az bir $c_0 > 0$ tam sayısı varsa Γ eğrisine Carleson eğrisi (sürekli eğri) denir (Kokilashvili, 2009).



Şekil 4.1 Carleson eğrisi

Teorem 2.32. Γ basit düzeltilebilir bir eğri olsun.

$$S_{\Gamma}f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi, t \in \Gamma$$

formülüyle tanımlı S_{Γ} singüler operatörünün $L_p(-\pi, \pi)$ grand Lebesgue uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter koşul Γ eğrisinin Carleson eğrisi olmasıdır (Kokilashvili, 2009).

$\gamma = \{\tau : |\tau| = 1\}$ birim çember olsun. $t \in [-\pi, \pi]$ için

$$T : L_p(\gamma) \rightarrow L_p(-\pi, \pi)$$

$$Tf(t) = f(e^{it})$$

özdeşlik dönüşümü tanımlansın. $G_p(\gamma)$ uzayı ile $G_p(-\pi, \pi)$ uzayının T operatörü altındaki ters görüntüsü gösterilsin.

Teorem 2.33. S_{γ} süngüler operatörü, $G_p(\gamma)$ uzayında sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.32 ‘den S_{γ} operatörü, $L_p(\gamma)$ grand Lebesgue uzayında sınırlıdır.

$M = \|S_{\gamma}\|_{L(L_p(-\pi, \pi))}$ olsun. $\forall f \in G_p(\gamma)$ için $S_{\gamma}f \in G_p(\gamma)$ olduğu gösterilsin;

Keyfi $\varepsilon > 0$ ve $f \in G_p(\gamma)$ için $L_p(\gamma), G_p(\gamma)$ ’da yoğun olduğundan

$$\|f - g\|_{G_p(-\pi, \pi)} \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

olacak şekilde $g \in L_p(\gamma)$ vardır. O halde

$$\|S_\gamma f - S_\gamma g\|_{L_p(-\pi, \pi)} \leq \|S_\gamma\|_{L(L_p(-\pi, \pi))} \|f - g\|_{G_p(-\pi, \pi)} < \varepsilon$$

yazılabilir. $S_\gamma g \in L_p(\gamma)$ olduğundan $S_\gamma f \in \overline{L_p(\gamma)}$ yani $S_\gamma f \in G_p(\gamma)$ 'dır.

Teorem 2.34. $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında bazdır (Ismailov, Zeren, Şimşir Acar ve Aliyarova, 2022).

İspat. Teorem 2.30 ve Teorem 2.31'den $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tam ve minimaldir. Üstel sistemin, Teorem 2.29'un 3. şartını sağladığı gösterilmelidir.

Keyfi bir $\eta > 0$ sayısı ve keyfi bir $f \in G_p(-\pi, \pi)$ fonksiyonu alınsın.

$$S_{nm}(f)(x) = \sum_{k=-m}^n v_k(f) e^{ikx}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0$$

operatörünün sınırlı olduğu gösterilmelidir. Bu durum $f \in G_p(-\pi, \pi), m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$P_m(f)(x) = \sum_{n=-m}^m v_n(f) e^{inx}$$

projektör operatörünün düzgün sınırlı olduğunu göstermeye denktir;

$$\begin{aligned} P_m(f)(x) &= \sum_{n=-m}^m \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-m}^m e^{-in(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_m(x-t) dt. \end{aligned}$$

Burada $K_m(t) = \frac{e^{-imt} - e^{i(m+1)t}}{1 - e^{it}}$ 'dir.

$$\begin{aligned} K_m(t) &= \frac{e^{-im(x-t)} - e^{i(m+1)(x-t)}}{1 - e^{i(x-t)}} \\ &= \frac{e^{i(m+1)t}}{e^{it} - e^{ix}} e^{-imx} - \frac{e^{imt}}{e^{it} - e^{ix}} e^{i(m+1)x} \end{aligned}$$

Böylece, $e_m(t) = e^{imt}$, $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
P_m(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_m(x-t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{i(m+1)t}}{e^{it} - e^{ix}} dt e^{-imx} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-imt}}{e^{it} - e^{ix}} dt e^{i(m+1)x} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{T^{-1}(f e_m)(\tau)}{\tau - e^{ix}} d\tau e^{-imx} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{T^{-1}(f e_{-(m+1)})(\tau)}{\tau - e^{ix}} d\tau e^{i(m+1)x} \\
&= e^{-imx} S_{\gamma} T^{-1}(f e_m)(e^{ix}) - e^{i(m+1)x} S_{\gamma} T^{-1}(f e_{-(m+1)})(e^{ix}) \\
&= e^{-imx} T S_{\gamma} T^{-1}(f e_m)(x) - e^{i(m+1)x} T S_{\gamma} T^{-1}(f e_{-(m+1)})(x)
\end{aligned}$$

olup, S_{γ} singüler operatörü $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında sınırlılığı olduğundan;

$$\begin{aligned}
\|P_m\|_{G_p(-\pi, \pi)} &= \|e^{-imx} T S_{\gamma} T^{-1}(f e_m)(x) \\
&\quad - e^{i(m+1)x} T S_{\gamma} T^{-1}(f e_{-(m+1)})(x)\|_{G_p(-\pi, \pi)} \\
&\leq \|S_{\gamma} T^{-1}(f e_m)\|_{G_p(\gamma)} + \|S_{\gamma} T^{-1}(f e_{-(m+1)})\|_{G_p(\gamma)} \\
&\leq M \|f e_m\|_{G_p(-\pi, \pi)} + M \|f e_{-(m+1)}\|_{G_p(-\pi, \pi)} \\
&= 2M \|f\|_{G_p(-\pi, \pi)}
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında bazdır.

2.4 Grand Lebesgue Uzaylarında Trigonometrik Sistemlerin Bazlık Özellikleri

Bu bölümde $\{\sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{\cos nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ trigonometrik sistemlerin bazlık özellikleri incelenecektir.

Teorem 2.35. $\{\sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ trigonometrik sistemi $G_p(0, \pi)$, $1 < p < \infty$, uzayında bazdır (İsmailov, Zeren, Simsir Acar ve Aliyarova, 2022).

İspat. İlk olarak minimallik gösterilsin.

$\{\sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi $L_p(0, \pi)$, $1 < p < \infty$, grand Lebesgue uzayında minimaldir;

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $f \in L_p(0, \pi)$ olmak üzere,

$$g_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

lineer fonksiyoneller sistemi tanımlansın. $\varepsilon \in (0, p-1)$ olmak üzere her $f \in L_p(0, \pi)$ için

$$\begin{aligned} |g_n(f)| &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(t)| \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} \, dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \pi^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\ &= 2 \left(\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} \, dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &\leq 2\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Böylece $g_n, L_p(0, \pi)$ uzayında sürekli lineer fonksiyoneldir. Diğer taraftan $m \neq n$ için;

$$\begin{aligned} g_n(\sin mt) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mt \sin nt \, dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(m+n)t - \cos(m-n)t] \, dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m+n)t \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m-n)t \, dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(m+n)t}{m+n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(m-n)t}{m-n} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi} (0 - 0) + \frac{1}{\pi} (0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

$m = n$ için;

$$\begin{aligned}
g_n(\sin mt) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mt \sin nt \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mt \sin mt \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin mt)^2 \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2mt) \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left[t - \frac{\sin 2mt}{2m} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.
\end{aligned}$$

Olduğundan

$$g_n(\sin mt) = \delta_{mn}$$

olup $\{\sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi ile $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ biortogonaldır. Sonuç olarak $\{\sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi $L_p(0, \pi)$ uzayında minimaldir.

Keyfi $f \in G_p(0, \pi)$ tek fonksiyonu alınsın. Bu f fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığına aşağıdaki şekilde genişletilsin.

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, \pi] \\ -f(-t) & t \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$F \in G_p(-\pi, \pi)$ olduğu açıktır ve

$$\begin{aligned}
\|F\|_{L_p(-\pi, \pi)} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^{p-\varepsilon} \, dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} \, dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}
\end{aligned}$$

$$= \|f\|_{L_p(0,\pi)}.$$

$\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında baz olduğundan, $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

yazılabilir. Burada

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int} dt$$

dir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere c_n katsayısından;

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) e^{-int} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) e^{int} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) (e^{int} - e^{-int}) dt \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt \\ &= \frac{1}{2i} g_n(f) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan f tek fonksiyon olduğundan $c_{-n} = -c_n$ 'dir. O halde her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=-m}^m c_n e^{int} &= \sum_{n=1}^m c_n e^{int} - \sum_{n=1}^m c_n e^{-int} \\ &= \sum_{n=1}^m c_n (e^{int} - e^{-int}) \\ &= 2i \sum_{n=1}^m c_n \sin nt \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^m g_n(f) \sin nt$$

elde edilir. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$f(t) - \sum_{n=1}^m g_n(f) \sin nt$$

ifadesinin genişlemesi

$$F(t) - \sum_{n=-m}^m c_n e^{int}$$

olduğundan

$$\left\| f - \sum_{n=1}^m g_n(f) \sin nt \right\|_{G_p(0,\pi)} = \left\| F - \sum_{n=-m}^m c_n e^{int} \right\|_{G_p(-\pi,\pi)}$$

yazılabilir. $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(f) \sin nt$$

elde edilir. $\{\sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi $G_p(0, \pi)$ uzayında bazdır.

Teorem 2.36. $\{\cos nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ trigonometrik sistemi $G_p(0, \pi)$, $1 < p < \infty$, uzayında bazdır (İsmailov, Zeren, Simsir Acar ve Aliyarova, 2022).

İspat. İlk olarak minimallik gösterilsin. $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in L_p(0, \pi)$ olmak üzere,

$$g_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt \, dt$$

lineer fonksiyoneller sistemi tanımlansın. $\varepsilon \in (0, p-1)$ olmak üzere her $f \in L_p(0, \pi)$ için

$$\begin{aligned} |g_n(f)| &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi f(t) \cos nt \, dt \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(t)| \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\pi |f(t)|^{p-\varepsilon} \, dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \pi^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= 2 \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_p.
\end{aligned}$$

Böylece $g_n, L_p(0, \pi)$ uzayında sürekli lineer fonksiyoneldir. Diğer taraftan $m \neq n$ için;

$$\begin{aligned}
g_n(\cos mt) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos mt \cos nt \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(m+n)t + \cos(m-n)t] \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m+n)t \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m-n)t \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(m+n)t}{m+n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(m-n)t}{m-n} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} (0 - 0) + \frac{1}{\pi} (0 + 0) = 0.
\end{aligned}$$

$m = n$ için;

$$\begin{aligned}
g_n(\cos mt) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos mt \cos nt \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos mt \cos mt \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos mt)^2 \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos 2mt + 1) \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin 2mt}{2m} + t \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $g_n(\cos mt) = \delta_{mn}$ olup $\{\cos nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi ile $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ biortogonaldır. Sonuç olarak $\{\cos nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi $L_p(0, \pi)$ uzayında minimaldir.

Keyfi $f \in G_p(0, \pi)$ çift fonksiyonu alınsın. Bu f fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığına aşağıdaki şekilde genişletilsin.

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, \pi] \\ f(-t), & t \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$F \in G_p(-\pi, \pi)$ olduğu açıktır ve

$$\begin{aligned} \|F\|_{L_p(-\pi, \pi)} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \|f\|_{L_p(0, \pi)}. \end{aligned}$$

$\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında baz olduğundan, $n \in \mathbb{Z}$ için

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int} dt$$

olmak üzere,

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

genişlemesi yazılabilir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere c_n katsayısından;

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(-t) e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) e^{int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) (e^{int} + e^{-int}) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \\
&= \frac{1}{2} g_n(f)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan f çift fonksiyon olduğundan $c_{-n} = c_n$ olduğu açıktır. O halde her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-m}^m c_n e^{int} &= \sum_{n=0}^m c_n e^{int} + \sum_{n=0}^m c_n e^{-int} \\
&= \sum_{n=0}^m c_n (e^{int} + e^{-int}) \\
&= 2 \sum_{n=0}^m c_n \cos nt \\
&= \sum_{n=0}^m g_n(f) \cos nt
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$f(t) - \sum_{n=0}^m g_n(f) \cos nt$$

ifadesinin genişlemesi

$$F(t) - \sum_{n=-m}^m c_n e^{int}$$

olduğundan

$$\left\| f - \sum_{n=1}^m g_n(f) \cos nt \right\|_{G_p(0,\pi)} = \left\| F - \sum_{n=-m}^m c_n e^{int} \right\|_{G_p(-\pi,\pi)}$$

yazılabilir. $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(f) \cos nt$$

elde edilir. $\{\cos nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi $G_p(0, \pi)$ uzayında bazdır.

2.5 Klasik Lebesgue Uzaylarında Dejenere Üstel Sistemin Frame Özelliği

$L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, klasik Lebesgue uzayı olsun. H.h.y. sıfırdan farklı olmak üzere $\omega: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$ ağırlık fonksiyonu tanımlansın. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistem ele alınsın. Sırasıyla sistemin tamlık, minimallik, bazlık ve frame özellikleri incelenecektir.

Teorem 2.37 $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ Lebesgue uzayında tam olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\omega \in L_p(-\pi, \pi)$ olmasıdır.

İspat. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında tam olsun. Tamlık tanımından $\omega \in L_p(-\pi, \pi)$ olduğu aşıkardır.

Tersine, $\omega \in L_p(-\pi, \pi)$ olsun. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_q(-\pi, \pi)$ fonksiyonu $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemine ortogonal seçilsin. $f \in L_q(-\pi, \pi)$ fonksiyonu $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin elemanlarını sıfırlar, yani $n \in \mathbb{Z}$ için;

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\omega(t)e^{-int} dt = 0 \quad (2.1)$$

dır. $f(t)\omega(t) \in L_1(-\pi, \pi)$ olup $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi bu uzayda tam olduğundan (2.1) denkleminde

$$f(t)\omega(t) = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada $f = 0$ olup, $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında tamdır.

Sonuç 2.1. $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \pi$ olmak üzere

$$\omega: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$$

$$\omega(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$$

ağırlık fonksiyonu olsun. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ Lebesgue uzayında tam olabilmesi için gerek ve yeter koşul $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ olmak üzere

$$\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, +\infty\right)$$

olmasıdır.

Teorem 2.38. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ Lebesgue uzayında minimal olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\omega \in L_p(-\pi, \pi)$$

ve

$$\frac{1}{\omega} \in L_q(-\pi, \pi)$$

olmasıdır.

İspat. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimal olsun. O halde $\omega \in L_p(-\pi, \pi)$ olduğu açıktır ve bu sistemin biortogonal sistemi vardır. Bu biortogonal sistem $\{b_n(t)\}$ ile gösterilsin.

$b_n \in L_q(-\pi, \pi)$ olup, $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n(t)\omega(t)e^{-imt} dt = \delta_{nm}$$

yazılabilir. Buradan

$$b_n(t) = \frac{e^{int}}{\omega(t)} \quad (2.2)$$

elde edilir ve böylece $\frac{1}{\omega} \in L_q(-\pi, \pi)$ 'dir.

Tersine, $\omega \in L_p(-\pi, \pi)$ ve $\frac{1}{\omega} \in L_q(-\pi, \pi)$ olsun. (2.2) eşitliğindeki gibi tanımlanmış $b_n(t)$ fonksiyonları $L_q(-\pi, \pi)$ uzayının elemanları olurlar. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} b_n(t) \omega(t) e^{-imt} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{int}}{\omega(t)} \omega(t) e^{-imt} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n,m)t} dt = \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Buradan $\{b_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin biortogonal sistemidir. O halde $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimaldir.

Sonuç 2.2. $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \pi$ olmak üzere

$$\omega: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$$

$$\omega(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$$

ağırlık fonksiyonu olsun. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ Lebesgue uzayında minimal olabilmesi için gerek ve yeter koşul $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ olmak üzere

$$\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$$

olmasıdır.

Tanım 2.13. (Muckenhoupt Koşulu)

$\omega(t)$ tüm $\mathbb{R}$ ekseninde negatif olmayan, 2π periyotlu ağırlık fonksiyonu olsun. $I \subset \mathbb{R}$ üzerinde

$$\sup_{I \subset \mathbb{R}} \left(\left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(t) dt \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} \right) < +\infty$$

eşitsizliğini sağlayan $\omega(t)$ ağırlık fonksiyonlarına A_p Muckenhoupt sınıfındandır denir (Hunt, Muckenhoupt ve Wheeden, 1973).

Teorem 2.39. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında baz olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\omega \in A_p$ olmasıdır.

Hunt, Muckenhoupt ve Wheeden (1973) çalışmasından $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında bazlığı hakkındaki Teorem 2.39 sağlanır.

A_p koşulunu sağlamayan ağırlık fonksiyonları aşağıda incelenecektir.

Tanım 2.14. X Banach uzayı ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ herhangi bir elemanlar sistemi olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

olacak şekilde $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ skalerler dizisi varsa $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemine bir ayrılış sistemi denir.

$\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin ayrılış sistemi olmasını araştırmak için bu sistemden sonlu sayıda elemanın çıkartıldıktan sonra elde edilen sistemin bazlık özellikleri lazım olacaktır.

$n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z} / \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ ile tanımlansın. $\omega(t)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında

$$\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$$

üstel sistemi incelensin.

Teorem 2.40. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\frac{(t - t_0)^{k-1}}{\omega(t)} \notin L_q(-\pi, \pi)$$

ve

$$\frac{(t - t_0)^k}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$$

olacak şekilde $t_0 \in [-\pi, \pi]$ elemanları varsa $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında tamdır.

İspat. $f \in L_q(-\pi, \pi)$ ve $m \in \mathbb{Z}_k$ için;

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\omega(t)e^{-imt} dt = 0 \quad (2.3)$$

olur. $\bar{k} \in \{1, 2, \dots, k\}$ için

$$c_{\bar{k}} = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\omega(t)e^{-in_{\bar{k}}t} dt$$

olup, (2.3) eşitliğinden $m \in \mathbb{Z}$ için;

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t)\omega(t) - c_1e^{in_1t} - c_2e^{in_2t} - \dots - c_ke^{in_kt})e^{-imt} dt = 0$$

yazılabilir bu eşitlikten

$$f(t)\omega(t) = c_1e^{in_1t} + c_2e^{in_2t} + \dots + c_ke^{in_kt}$$

yani

$$f(t) = \frac{c_1e^{in_1t} + c_2e^{in_2t} + \dots + c_ke^{in_kt}}{\omega(t)} \quad (2.4)$$

elde edilir. Sadelik için $t_0 = 0$ seçilir ve e^{int} fonksiyonunda $t = 0$ civarında Taylor serisine açılırsa;

$$e^{int} = a_0 + a_1nt + a_2n^2t^2 + \dots + a_{k-1}n^{k-1}t^{k-1} + O(t^k) \quad (2.5)$$

(2.4) ve (2.5) den;

$$\begin{aligned} f(t) &= \omega^{-1}(t) \left(c_1(a_0 + a_1n_1t + a_2n_1^2t^2 + \dots + a_{k-1}n_1^{k-1}t^{k-1}) \right. \\ &\quad + c_2(a_0 + a_1n_2t + a_2n_2^2t^2 + \dots + a_{k-1}n_2^{k-1}t^{k-1}) + \dots \\ &\quad \left. + c_k(a_0 + a_1n_kt + a_2n_k^2t^2 + \dots + a_{k-1}n_k^{k-1}t^{k-1}) + O(t^k) \right) \\ &= \omega^{-1}(t)(b_0 + b_1t + \dots + b_{k-1}t^{k-1}) + \omega^{-1}(t)O(t^k), t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dir. Burada,

$$b_0 = a_0(c_1 + c_2 + \dots + c_k)$$

$$b_1 = a_1(c_1 n_1 + c_2 n_2 + \dots + c_k n_k)$$

$$b_2 = a_2(c_1 n_1^2 + c_2 n_2^2 + \dots + c_k n_k^2)$$

...

$$b_{k-1} = a_{k-1}(c_1 n_1^{k-1} + c_2 n_2^{k-1} + \dots + c_k n_k^{k-1}).$$

Böylelikle,

$$f(t) \approx \omega^{-1} g_1(t) + g_2(t), \quad t \rightarrow 0.$$

Yeterince küçük $\delta > 0$ için,

$$f(t) = \omega^{-1} g_1(t) + g_2(t), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

$\frac{t^k}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$ ve $f(t) \in L_q(\pi, \pi)$ olduğundan $g_2(t) \in L_q(-\delta, \delta)$ ve $\omega^{-1} g_1(t) \in L_q(-\delta, \delta)$ yazılabilir. Fakat $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ için,

$$|\omega^{-1}(t) g_1(t)| \geq \frac{|b_i| |t|^i}{\omega(t)} \geq \frac{|b_i| |t|^{k-1}}{\omega(t)}$$

yani $\omega^{-1} g_1(t) \notin L_q(-\pi, \pi)$ 'dir. Çelişki oluşur ve

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 0$$

olur. Böylelikle $c_1, c_2, \dots, c_k$ sayıları aşağıdaki tamlıklar sisteminin durumları olur,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_k = 0 \\ n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k = 0 \\ \dots \\ n_1^{k-1} c_1 + n_2^{k-1} c_2 + \dots + n_k^{k-1} c_k = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Burada açıktır ki,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ n_1 & n_2 & \dots & n_k \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ n_1^{k-1} & n_2^{k-1} & \dots & n_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

O halde (2.6) tamlıklar sisteminin genel çözümü olur, yani $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ 'dır. Böylece, $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ olmak üzere $c_i = 0$, sayıları (2.4)'de yerine yazılırsa $f(t) = 0$ olur, yani $\{\omega(t) e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ üstel sistemi tamdır.

Sonuç 2.3. $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ ve $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \pi$ olsun.

$$\omega: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$$

$$\omega(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$$

ağırlık fonksiyonu tanımlansın. $\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ ve $k \neq k_0$ olmak üzere

$\alpha_{k_0} \in \left[\frac{1}{q} + k - 1, \frac{1}{q} + k\right)$ ise $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ Lebesgue

uzayında tamdır.

Teorem 2.41. $t_0 \in [-\pi, \pi]$ olmak üzere $\omega \in L_p(-\pi, \pi)$ ve

$\frac{(t-t_0)^k}{\omega(t)} \in L_q(\pi, \pi)$ olsun. O halde $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$

Lebesgue uzayında minimaldir.

İspat. Sadelik için $t_0 = 0$ kabul edilsin. $c_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{kn}$ dizileri

$$\begin{cases} c_{1n} + c_{2n} + \dots + c_{kn} = 1 \\ n_1 c_{1n} + n_2 c_{2n} + \dots + n_k c_{kn} = n \\ \dots \\ n_1^{k-1} c_{1n} + n_2^{k-1} c_{2n} + \dots + n_k^{k-1} c_{kn} = n^{k-1} \end{cases}$$

amlıklar sisteminin bir durumu olarak kabul edilsin.

$$b_n(t) = \frac{e^{int} - c_{1n}e^{in_1 t} - c_{2n}e^{in_2 t} - \dots - c_{kn}e^{in_k t}}{\omega(t)} \quad (2.7)$$

olsun. (2.5) eşitliği dikkate alınır,

$$b_n(t) \approx c_n \omega^{-1} t^k, \quad t \rightarrow 0$$

olur. $\omega^{-1}(t)t^k \in L_q(-\pi, \pi)$ olduğundan $b_n(t) \in L_q(-\pi, \pi)$ elde edilir. Shukurov

(2018) çalışmasına istinaden (2.7) eşitliği ile atanan $\{b_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ fonksiyonlar

sistemi $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ dejenere üstel sisteminin biortogonal sistemi olur, yani

$n, m \in \mathbb{Z}_k$ için,

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n(t) \omega(t) e^{-imt} dt = \delta_{mn}$$

dir. Böylece $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ sistemi minimaldir.

Sonuç 2.4. $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ ve $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \pi$ olsun. $\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ ve $\exists k_0 \in \{0, 1, \dots, r\}$ olmak üzere $\alpha_{k_0} \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q} + k\right)$ için

$$\omega: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$$

$$\omega(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$$

ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimaldir.

Sonuç 2.5. $\omega \in L_p(-\pi, \pi)$ olsun. $\frac{(t-t_0)^{k-1}}{\omega(t)} \notin L_q(\pi, \pi)$ ve $\frac{(t-t_0)^k}{\omega(t)} \in L_q(\pi, \pi)$ olacak şekilde $t_0 \in [-\pi, \pi]$ elemanları varsa $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında tam ve minimaldir.

Sonuç 2.6. $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ ve $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \pi$ olsun.

$$\omega: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$$

$$\omega(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$$

ağırlık fonksiyonu olmak üzere $\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ ve $k \neq k_0$ için $\alpha_{k_0} \in \left(\frac{1}{q} + k - 1, \frac{1}{q} + k\right)$ olacak şekilde en az bir $k_0 \in \{0, 1, \dots, r\}$ elemanı vardır. Bu durumda $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında tam ve minimaldir, $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sisteminin defekti k olur.

Teorem 2.42. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ Lebesgue uzayında baz değildir.

İspat. Aksi kabul edilsin. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında baz olsun. O halde bazlık kriterlerine göre keyfi $a_{-(m+s)}, a_{-(m+s-1)}, \dots, a_{(n+r-1)}, a_{(n+r)} \in \mathbb{C}$ elemanları için,

$$\left\| \sum_{\substack{l=-m \\ l \neq n_j}}^n a_l \omega e^{int} \right\|_p \leq M \left\| \sum_{\substack{l=-(m+s) \\ l \neq n_j}}^{n+r} a_l \omega e^{int} \right\|_p$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=-m}^n a_l \omega e^{int} \right\|_p &= \left\| \sum_{l=-m}^n a_l \omega e^{int} e^{ijt} \right\|_p \\ &= \left\| \sum_{l=-m}^n a_l \omega e^{i(n+j)t} \right\|_p \\ &\leq M \left\| \sum_{l=-(m+s)}^{n+r} a_l e^{i(n+j)t} \right\| \\ &\leq M^2 \left\| \sum_{l=-(m+s)}^{n+r} a_l e^{int} \right\| \end{aligned}$$

yazılabilir bu durumda $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi baz olur ki bu mümkün değildir, kabul yanlış $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}_k}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ Lebesgue uzayında baz değildir.

Teorem 2.43. $\omega \in L_p(-\pi, \pi)$ olsun. Eğer $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimal değil fakat sonlu sayıda elemanı çıkarılmış sistem minimal olursa, $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında ayrılış sistemi değildir.

İspat. Tersini kabul edilsin. O halde her $f \in L_p(-\pi, \pi)$ için

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \omega(t) e^{int} \quad (2.8)$$

yazılabilir. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi baz olmadığından

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \omega(t) e^{int} = 0 \quad (2.9)$$

yazılabilir. $n_0 \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_{n_0} \neq 0$ olsun. Eğer (2.9) denkleminde

$$|\lambda_{n_1}|^2 + |\lambda_{n_2}|^2 + \dots + |\lambda_{n_k}|^2 = 0$$

olursa $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z_k}$ sisteminin minimalliğinden $\lambda_{n_0} = 0$ olur. O halde,

$$|\lambda_{n_1}|^2 + |\lambda_{n_2}|^2 + \dots + |\lambda_{n_k}|^2 \neq 0$$

olmalıdır. Böylece herhangi bir $\lambda_{n_j} \neq 0$ olur. Buradan (2.8) eşitliğinden

$$\omega(t)e^{in_j t} = -\frac{1}{\lambda_{n_j}} \sum_{n \neq n_j} \lambda_n e^{int}$$

yazılabilir. Bu eşitlik (2.8) denkleminde yerine yazılırsa her $f \in L_p(-\pi, \pi)$ için

$$f(t) = \sum_{n \neq n_j} b_n \omega(t) e^{int}$$

elde edilir. Böylece $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \neq n_i}$ sistemi ayrış sistemidir. Kabul yanlıştır. Benzer şekilde $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \neq n_i, n_k}$ sistemi ayrış sistemidir. Bu süreç devam ettirildiğinde $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z_k}$ sisteminin ayrış sistemi olduğu açıktır. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z_k}$ sistemi minimal olduğundan $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında baz olur. Bu ise Teorem 2.42 ile çelişir.

Sonuç 2.7 $\omega \in L_p(-\pi, \pi)$ olsun. O halde

1. Eğer $\frac{1}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$ ise, $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z}$ sisteminin ayrış sistemi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\omega \in A_p$ olmasıdır.
2. Eğer $\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(-\pi, \pi)$ ve $\frac{(t-t_0)^k}{\omega(t)} \in L_q(\pi, \pi)$ olacak şekilde $t_0 \in [-\pi, \pi]$ varsa, $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z}$ sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında ayrış sistemi olamaz.

İspat. Eğer (1.) şartı sağlanırsa $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z}$ sistemi minimal olur. Bu durumda minimal ayrış sistemi ve bazlık aynı anda mümkündür.

(2.) şartında; Teorem 2.41 ve Teorem 2.42 'den $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z}$ üstel sistemi ayrış sistemi olamaz. Bu sonuçtan aşağıdaki bilinen teorem elde edilir.

Teorem 2.44. $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ olmak üzere

$$\omega(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}, \alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$$

olsun. O halde $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında ayrılış sistemi olması için gerek ve yeter koşul $\alpha_{k_0} \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ olmasıdır. (Bilalov, 2004)

Teorem 2.45. $\alpha \in \left(-\frac{1}{p}, +\infty\right)$ olmak üzere $\{|x|^\alpha e^{inx}\}_{n \in \mathbb{N}}$ üstel sisteminin $L_2(-\pi, \pi)$ uzayında frame olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = 0$ olmasıdır. (Golubeva, 2011)

Bu teoremin $L_p(-\pi, \pi)$ uzaylarına genellemesi için Banach uzaylarındaki frame genişlemesi lazım olacaktır.

Tanım 2.15. X Banach uzay, X^* onun dual uzayı olsun. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ ve K ilişkili skaler dizilerinin herhangi bir sürekli Banach dizi uzayı olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(\{x_n\}, \{f_n\})$ ikilisine Atomik ayrışım denir:

1. $\forall x \in X, \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$;
2. $\exists A, B > 0, \forall x \in X$ için $A\|x\| \leq \|\{f_n(x)\}\| \leq B\|x\|$;
3. $\forall x \in X$ için $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)x_n$.

Not. $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$ bir frame olsun $f \in \mathcal{H}$ için,

$$Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n,$$

operatörü maksimal, birebir, sürekli ve tersi olan operatördür. $\forall f \in \mathcal{H}$ için

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_n \rangle f_n$$

eşitliği yazılabilir. Eğer 1. ve 2. şartları sağlanırsa $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemine X uzayında K-frame denir. Burada A ve B sabitlerine K-frame'in sırasıyla alt ve üst sınırları denir.

Teorem 2.46. $\omega(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ ve $\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(-\pi, \pi)$ olsun. $t_0 \in [-\pi, \pi]$ olmak üzere $\frac{(t-t_0)^k}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$ olsun. O halde $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında hiçbir sisteme göre atomik ayrışım olamaz.

İspat. Tersini kabul edilsin. Eğer $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi herhangi bir $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L_q(-\pi, \pi)$ sistemine ve K uzayına göre atomik ayrışım olsun. O halde $L_q(-\pi, \pi)$ uzayının ayrışım sistemi olur. Teorem 2.42 ve Teorem 2.43 'ten kabul yanlış, atomik ayrışım değildir.

Şimdi ise Teorem 2.45'in $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$ uzaylarına genişlemesi gösterilsin.

$L_p(-\pi, \pi)$ uzayındaki $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{int}$ toplamındaki tüm $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizilerinin uzayı K_p ile gösterilsin. K_p uzayı

$$\|\{a_n\}\|_{K_p} = \sup_{m, n \geq 0} \left\| \sum_{k=-m}^n a_k e^{ikt} \right\|_p$$

normuyla birlikte Banach uzayıdır.

Teorem 2.47. H.h.y. $\omega \neq 0$ olmak üzere $\omega(t) \in L_q(-\pi, \pi)$ olsun. O halde $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında K_p -frame olması için gerek ve yeter şart

$$c_1 \leq \omega(t) \leq c_2$$

olacak şekilde $c_1, c_2 > 0$ sabitlerinin olmasıdır.

İspat. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında $A > 0$ ve $B > 0$ sınırlarıyla K_p -frame olsun. $n \in \mathbb{Z}$ için

$$v_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \omega(t) e^{-int} dt$$

fonksiyoneli tanımlansın. O halde $f \in L_p(-\pi, \pi)$ için

$$A\|f\|_{L_p} \leq \|\{v_n(f)\}\|_{K_p} \leq B\|f\|_{L_p} \quad (2.10)$$

eşitliği yazılabilir.

$$a_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

olarak tanımlansın. $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ Lebesgue uzayında baz olduğundan

$$a\|f\|_p \leq \|\{v_n(f)\}\|_{K_p} \leq b\|f\|_p \quad (2.11)$$

eşitsizliğini sağlayan $a, b > 0$ sabit sayıları vardır.

$$g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n(f) e^{int}$$

olacak şekilde tanımlansın. $g(t) = \omega(t)f(t)$ olduğu açıktır. (2.10) ve (2.11) eşitsizliklerinden

$$A\|f\|_p \leq \|\{v_n(f)\}\|_{K_p} = \|\{a_n(g)\}\|_{K_p} \leq b\|g\|_p = b\|\omega f\|_p,$$

$$a\|\omega f\|_p = a\|g\|_p \leq \|\{a_n(g)\}\|_{K_p} = \|\{v_n(f)\}\|_{K_p} \leq B\|f\|_p$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{A}{b}\|f\|_p \leq \|\omega f\|_p \leq \frac{B}{a}\|f\|_p \quad (2.12)$$

eşitsizliği elde edilir.

$0 < c_1 < \frac{A}{b}$ seçilsin ve $E_1 = \{t : \omega < c_1\}$ tanımlansın. E_1 kümesinin karakteristik fonksiyonunu (2.12) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{A}{b}\|\chi_{E_1}\|_p \leq \|\omega \chi_{E_1}\|_p \leq c_1\|\chi_{E_1}\|_p$$

elde edilir. Bu ise $\|\chi_{E_1}\|_p = 0$ olduğunda yani $|E_1| = 0$ olduğunda mümkündür.

Buradan, h.h.y. $\omega \geq c_1$ elde edilir.

Bu sefer $c_2 > \frac{B}{a}$ seçilsin ve $E_2 = \{t : \omega > c_2\}$ olsun. E_2 kümesinin karakteristik fonksiyonunu (2.12) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$c_2\|\chi_{E_2}\|_p \leq \|\omega \chi_{E_2}\|_p \leq \frac{B}{a}\|\chi_{E_2}\|_p$$

elde edilir. Bu ise $\|\chi_{E_2}\|_p = 0$ olduğunda yani $|E_2| = 0$ olduğunda mümkündür.

Böylece h.h.y. $\omega \leq c_2$ elde edilir.

Tersine, $c_1 \leq \omega(t) \leq c_2$ olsun. $\forall f \in L_p(-\pi, \pi)$ için $g(t) = \omega(t)f(t)$ olsun.

Buradan $g \in L_p(-\pi, \pi)$ olduğu açıktır. O halde (2.11) eşitsizliğinden

$$ac_1\|f\|_p = ac_1\left\|\frac{g}{\omega}\right\|_p \leq a\|g\|_p \leq \|\{a_n(g)\}\|_{K_p} = \|\{v_n(f)\}\|_{K_p}$$

ve

$$\|\{v_n(f)\}\|_{K_p} = \|\{a_n(g)\}\|_{K_p} \leq b\|g\|_p \leq bc_2\|f\|_p$$

yazılabilir. Son iki eşitlikten,

$$ac_1\|f\|_p \leq \|\{v_n(f)\}\|_{K_p} \leq bc_2\|f\|_p$$

elde edilir.

Sonuç 2.8. $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ için $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_r = \pi$ ve $\alpha_k \in \left(-\frac{1}{q}, +\infty\right)$ olmak üzere

$$\omega: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$$

$$\omega(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$$

ağırlık fonksiyonu olsun. O halde $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ uzayı için K_p -frame olabilmesi için gerek ve yeter şart $\alpha_k = 0$ olmasıdır.

3

GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA DEJENERE ÜSTEL SİSTEMİN BAZLIK VE FRAME ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında bazlık ve frame özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1. (Ağırlık Fonksiyonu)

$\alpha_k \in \mathbb{R}$ ve $t_k \in [-\pi, \pi]$ olmak üzere;

$$\rho: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$$
$$\rho(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$$

fonksiyonu dejenere üstel sistemin ağırlık fonksiyonudur.

Lemma 3.1. $\rho(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha_k \in \left[-\frac{1}{p}, +\infty\right)$ olmasıdır. (İsmailov, 2020)

3.1 Dejenere Üstel Sistemin Tamlığı ve Minimallığı

Teorem 3.1. $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tam olması için gerek ve yeter şart $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ olmak üzere

$$\alpha_k > -\frac{1}{p}$$

olmasıdır (İsmailov, Şimşir Acar ve Zeren, 2023).

İspat. $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tam olsun. O halde $\rho(t) \in G_p(-\pi, \pi)$ 'dir ve Lemma 3.1'den $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ olmak üzere

$$\alpha_k \geq -\frac{1}{p}$$

dır.

$\alpha_0 = -\frac{1}{p}$ olacak şekilde $k \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ elemanı alınsın, yeterince küçük $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |\rho(t)|^{p-\varepsilon} dt &\geq c \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_0^{\delta} t^{-\frac{p-\varepsilon}{p}} dt \\ &= cp \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta^{\frac{\varepsilon}{p}} \\ &= cp. \end{aligned}$$

Benzer şekilde $k \neq 0$ olmak üzere $\alpha_k = -\frac{1}{p}$ için de gösterilebilir. O halde $\rho(t) \notin G_p(-\pi, \pi)$ 'dir ve dolayısıyla $\alpha_k > -\frac{1}{p}$ 'dir.

Tersine; $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ olmak üzere $\alpha_k > -\frac{1}{p}$ olsun. $\rho(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ 'dır ve $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında tamdır. $L_p(-\pi, \pi)$ uzayı $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında yoğun olduğundan $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tamdır.

Teorem 3.2. $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimal olması için gerek ve yeter şart $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$-\frac{1}{p} < \alpha_k < \frac{1}{q}$$

olmasıdır (İsmailov, Şimşir Acar ve Zeren, 2023).

İspat. $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimal olsun. $L_p(-\pi, \pi)$ uzayının $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında sürekli gömmesi ve $\rho(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ olduğundan; $-\frac{1}{p} < \alpha_k < \frac{1}{q}$ koşulu sağlanır.

Tersine; $-\frac{1}{p} < \alpha_k < \frac{1}{q}$ koşulu sağlansın. $\forall f \in G_p(-\pi, \pi), n \in \mathbb{Z}$ için

$$g_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \rho^{-1}(t) e^{-int} dt$$

lineer fonksiyoneli tanımlansın. g_n fonksiyonelin sınırlı olduğunu gösterilmelidir.

$\alpha_k < \frac{1}{(p-\varepsilon)'}$, $\frac{1}{(p-\varepsilon)'} = 1 - \frac{1}{p-\varepsilon}$, olacak şekilde $\varepsilon \in (0, p-1)$ vardır. Çünkü,
 $\alpha_k \geq \frac{1}{(p-\varepsilon)'}$ olmuş olsaydı;

$$\alpha_k \geq 1 - \frac{1}{p-\varepsilon} = \frac{p-\varepsilon-1}{p-\varepsilon}$$

olup limite geçilirse;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_k \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{p-\varepsilon-1}{p-\varepsilon} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$$

elde edilir. Bu ise $\alpha_k < \frac{1}{q}$ olması ile çelişir. O halde $\varepsilon \in (0, p-1)$ için

$\alpha_k < \frac{1}{(p-\varepsilon)'}$, $\frac{1}{(p-\varepsilon)'} = 1 - \frac{1}{p-\varepsilon}$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$\rho^{-1}(t) \in L_{(p-\varepsilon)' }(-\pi, \pi)$$

ve

$$\begin{aligned} |g_n(f)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \rho^{-1}(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \rho^{-1}(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \rho^{-(p-\varepsilon)'}(t) dt \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\ &\leq c \|f\|_p \end{aligned}$$

elde edilir, yani g_n sınırlıdır.

$$\begin{aligned} g_n(\rho e^{imt}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)t} dt \\ &= \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Böylece $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin biortogonal sistemi $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemidir ve $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimaldir.

3.2 Dejenere Üstel Sistemin Bazlığı

Teorem 3.3. $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında baz olması için gerek ve yeter şart $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$-\frac{1}{p} < \alpha_k < \frac{1}{q} \quad (3.1)$$

olmasıdır (İsmailov, Şimşir Acar ve Zeren, 2023).

İspat. $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında bir baz olsun. O halde Teorem 2.29 ‘dan $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimaldir, Teorem 3.2. ‘den (3.1) koşulu sağlanır.

Tersine, $-\frac{1}{p} < \alpha_k < \frac{1}{q}$ koşulu sağlansın. Teorem 3.1 ve 3.2’den $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tam ve minimaldir. Sınırlılığın gösterilmesi için;

Her $m \in \mathbb{Z}_+$ ve $f \in G_p(-\pi, \pi)$ olmak üzere;

$$S_m(f)(t) = \sum_{n=-m}^m g_n(f) \rho(t) e^{int}$$

projektör operatörü tanımlansın. S_m projektör operatörünün $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında düzgün sınırlı olduğu gösterilsin.

(3.1) koşulu sağlandığından $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında bir bazdır. $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ olmak üzere

$$-\frac{1}{p - \varepsilon} < \alpha_k < \frac{1}{(p - \varepsilon)'}$$

olacak şekilde $\varepsilon \in (0, p - 1)$ vardır. O halde $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin $L_{p-\varepsilon}(-\pi, \pi)$ uzayında bir bazdır.

Sonuç olarak,

S_m projektör operatörler sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ ve $L_{p-\varepsilon}(-\pi, \pi)$ uzaylarında düzgün sınırlıdır. Yani; her $m \in \mathbb{Z}_+$ için

$$\|S_m(f)\|_p \leq c_p \|f\|_p$$

ve

$$\|S_m(f)\|_{p-\varepsilon} \leq c_{p-\varepsilon} \|f\|_{p-\varepsilon}$$

olacak şekilde $c_p > 0$ ve $c_{p-\varepsilon} > 0$ sayıları vardır.

Riesz-Thorin interpolasyon teoremi uygulanırsa (Kokilashvili vd., 2016);

- $0 < \eta \leq \varepsilon$ için $\{S_m\}$ sisteminin $L_{p-\eta}(-\pi, \pi)$ uzayında düzgün sınırlıdır. Yani Her $m \in \mathbb{Z}_+$ için

$$\|S_m(f)\|_{p-\eta} \leq c_1 \|f\|_{p-\eta} \quad (3.2)$$

olacak şekilde m 'den bağımsız $c_1 > 0$ sayısı vardır.

- $\varepsilon < \eta < p - 1$ durumu için; Hölder Eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |S_m(f)(t)|^{p-\eta} dt \right)^{\frac{1}{p-\eta}} &\leq (2\pi)^{\frac{\eta-\varepsilon}{(p-\varepsilon)(p-\eta)}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |S_m(f)(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &\leq c_2 \|f\|_{p-\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.3)$$

olacak şekilde c_2 ε 'dan bağımsız bir sabittir. (3.2) ve (3.3) eşitsizlikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|S_m(f)\|_p &\leq \sup_{0 < \eta \leq \varepsilon} \left(\frac{\eta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p-\eta}} \|S_m(f)\|_{p-\eta} + \sup_{\varepsilon < \eta < p-1} \left(\frac{\eta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p-\eta}} \|S_m(f)\|_{p-\eta} \\ &\leq c_1 \|f\|_p + c_2 \sup_{\varepsilon < \eta < p-1} \left(\frac{\eta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p-\eta}} \|f\|_{p-\varepsilon} \\ &\leq c \|f\|_p \end{aligned}$$

yani $\|S_m\| \leq c$ elde edilir. O halde $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında bir bazdır.

3.3 Dejenere Üstel Sistemin Frame Özellikleri

$k \in \{0, 1, \dots, r\}, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ve $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = \pi$ olmak üzere

$$\rho: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$$

$$\rho(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$$

ağırlık fonksiyonu olsun. Bu bölümde ilk olarak $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminden $n_0 \in \mathbb{Z}$ elemanının çıkarılmasıyla elde edilen $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sisteminin $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tamlık minimallik özellikleri incelenecektir. Sonrasında $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında frame özellikleri incelenecektir.

Burada $\{t_k\}_0^r, -\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_r = \pi$ özelliğinde birbirinden farklı sayılardır.

Lemma 3.2. n_0 keyfi bir tam sayı ve $\omega(t)$ keyfi bir ölçülebilir fonksiyon olsun. $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ sisteminin $L_p(-\pi, \pi), 1 < p < +\infty$, uzayında tam ve minimal olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve

$$\omega(t) \in L_p(-\pi, \pi), \quad \frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(-\pi, \pi)$$

olmak üzere aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır (Shukurov, 2018).

- i. $\frac{t-s}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$ olacak şekilde bir tek $s \in [-\pi, \pi]$ vardır,
- ii. $\frac{(t+\pi)(t-\pi)}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$.

Burada ξ_n kompleks sayılar olmak üzere; $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ sisteminin biortogonal sistemi $\forall n \neq n_0$ olmak üzere

$$b_n(t) = \frac{e^{int} - \xi_n e^{in_0 t}}{\omega(t)}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4. $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sisteminin $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tam ve minimal olması için gerek ve yeter şart

(i) $k \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ için $\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ olacak şekilde bir tek

$\alpha_{k_0} \in \left[\frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{q}\right), (k_0 \neq k)$ sayısı vardır

veya

(ii) $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $\{\alpha_0, \alpha_r\} \cap \left[\frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{q}\right) \neq \emptyset$ olmak üzere

$\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ ve $\alpha_0, \alpha_r \in \left(-\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{q}\right)$ 'dır

şartının sağlanmasıdır.

İspat. $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tam ve minimal olsun.

$\rho(t) \in G_p(-\pi, \pi)$ olduğundan $\alpha_k > -\frac{1}{p}$ 'dir. Lemma 3.2 'den $\rho(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ yazılabilir.

$\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ ise $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimaldir.

Ancak bu sistemin tamlığı ile çelişir. Sonuç olarak, $\alpha_{k_0} \in \left[\frac{1}{q}, +\infty\right)$ olacak şekilde $k_0 \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ vardır ve $\rho^{-1}(t) \notin L_q(-\pi, \pi)$ 'dir.

$L_p(-\pi, \pi) \subset G_p(-\pi, \pi)$ sürekli gömmesinden $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sisteminin $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimal olduğu açıktır. Böylece Lemma 3.2'den

$$(t - t_0)\rho^{-1}(t) \in L_q(-\pi, \pi) \quad (3.4)$$

veya

$$(\pi - t)(\pi + t)\rho^{-1}(t) \in L_q(-\pi, \pi) \quad (3.5)$$

olacak şekilde bir tek $t_0 \in [-\pi, \pi]$ vardır.

(3.4) ifadesi sadece

$$|t - t_0|\rho^{-1}(t) = |t - t_{k_0}|^{1-\alpha_{k_0}} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^r |t - t_k|^{-\alpha_k} \in L_q(-\pi, \pi)$$

durumunda sağlanır ve böylece (i) koşulu sağlanır.

(3.5) ifadesi ise $\alpha_{k_0} = 0$ veya $\alpha_{k_0} = \alpha_r$ olmasına denktir. Böylece

$$|\pi - t|^{1-\alpha_0} |\pi + t|^{1-\alpha_r} \prod_{k=1}^{r-1} |t - t_k|^{-\alpha_k} \in L_q(-\pi, \pi)$$

yani (ii) koşulu sağlanır.

Tersine, (i) ve (ii) koşulları sağlansın. O halde

$$\rho(t) \in L_p(-\pi, \pi), \rho^{-1}(t) \notin L_q(-\pi, \pi)$$

veya

$$(t - t_{\alpha_{k_0}}) \rho^{-1}(t) \in L_q(-\pi, \pi) \text{ veya } (\pi - t)(\pi + t) \rho^{-1}(t) \in L_q(-\pi, \pi)$$

yazılabilir. Lemma 3.2'den $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ sistemi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimaldir ve her $n \neq n_0$ için

$$g_n(t) = \frac{e^{int} - e^{i(n-n_0)t_{k_0}} e^{in_0 t}}{\rho(t)} \quad (3.6)$$

biortogonal sistemdir.

$$g_n(t) = \frac{e^{int} - e^{i(n-n_0)t_{k_0}} e^{in_0 t}}{\rho(t)} \cdot \frac{t - t_{k_0}}{\rho(t)} \sim |t - t_{k_0}|^{1-\alpha_{k_0}} \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^r |t - t_k|^{-\alpha_k}$$

O halde, (i) koşulundan fonksiyonel, $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında sınırlıdır. (Ismailov, 2020; Lemma 2). Yani $\{g_n(t)\}$, sistemi $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ sisteminin biortogonal sistemidir. Benzer şekilde (ii) koşulu da gösterilir. Böylece $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında minimaldir. $L_p(-\pi, \pi)$ uzayı, $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında yoğun olduğundan $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tamdır.

Teorem 3.5 $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında baz değildir.

İspat. Tersini kabul edilsin. $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında baz olsun. O halde (3.6) biortogonal sistemiyle $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tam ve minimaldir.

$$\rho(t)e^{in_0t} \in G_p(-\pi, \pi)$$

elemanı bu baza göre

$$\rho(t)e^{in_0t} = \sum_{n \neq n_0} c_n \rho(t)e^{int} \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir. Biortogonal sistemden, her $n \neq n_0$ için

$$-e^{i(n-n_0)t_{k_0}} = c_n \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.7) serisi yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n \rho(t)e^{int}\|_p \\ &= \|\rho(t)\|_p \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|. \end{aligned}$$

Buradan (3.8) eşitliği dikkate alındığında $\|\rho(t)\|_p = 0$ olur. Çelişki elde edilir.

Kabul yanlıştır. Benzer şekilde (ii) koşulu da gösterilebilir. Böylece $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında baz ve frame değildir.

Teorem 3.6. $1 < p < +\infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $n_0, k \in \{0, 1, \dots, r\}$ ve $t_k \in [-\pi, \pi]$ olsun.

$$\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$$

ve $k \neq n_0$ için

$$\alpha_{n_0} \in \left(-\frac{1}{p}, +\infty\right)$$

olsun.

$$\rho(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$$

ağırlık fonksiyonu olmak üzere $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin $G_p(-\pi, \pi)$ grand Lebesgue uzayında frame olması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha_{n_0} \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$$

olmasıdır.

İspat. $\alpha_{n_0} \in \left[\frac{1}{q}, \frac{1}{q} + 1\right)$ olsun. O halde $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ grand Lebesgue uzayında tam ve minimal olur. Böylece $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ grand Lebesgue uzayında minimaldir.

$\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $G_p(-\pi, \pi)$ grand Lebesgue uzayında atomik ayrışım olsun. O halde $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi baz olmadığından öyle bir $a_{k_0} \neq 0$ vardır ki

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \rho(t) e^{ikt} = 0 \quad (3.9)$$

yazılabilir.

$\alpha_{n_0} = 0$ durumunda $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ sistemi minimal olduğundan $\alpha_{k_0} = 0$ olur.

$\alpha_{n_0} \neq 0$ durumunda (3.9)'da yerine yazılırsa,

$$\sum_{k \neq n_0} \frac{a_k}{\alpha_{n_0}} \rho(t) e^{ikt} = \rho(t) e^{in_0 t}$$

yani $\forall f \in G_p(-\pi, \pi)$ için

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}} b_n \rho(t) e^{int}$$

ve $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ sistemi baz olur bu ise mümkün değildir.

Benzer şekilde, $\alpha_{n_0} \in \left[\frac{1}{q} + k, \frac{1}{q} + 1 + k\right), k \in \mathbb{N}$, için $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin atomik ayrışım olmadığı gösterilir. Buradan $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi $\alpha_{n_0} \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ için atomik ayrışım yani framedir.

Tersine $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ ve $\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ olsun. O halde $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sistemi Teorem 3.3'ten $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında bazdır. Buna göre tanım gereği $\alpha_k \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ iken atomik ayrışım, framedir.

Bu tez çalışmasında $L_p(-\pi, \pi)$ grand Lebesgue uzaylarının ayrılabilir bir alt uzayı $G_p(-\pi, \pi)$ grand Lebesgue uzayında $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ üstel sistemin ve $\rho(t) = \prod_{k=0}^r |t - t_k|^{\alpha_k}$ olmak üzere $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminin minimallik, tamlık, bazlık ve frame özellikleri incelenmiştir. $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dejenere üstel sisteminden bir elemanın çıkarılmasıyla elde edilen yeni $\{\rho(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}}$ sistemin tam ve minimal olduğu ancak baz ve frame olmadığı gösterilmiştir.

Dejenere üstel sistemin genel ağırlık fonksiyonu ile Banach Fonksiyon Uzaylarındaki tamlık, minimallik ve frame özelliklerinin incelenmesi literatüre önemli katkı sağlayacaktır. Benzer şekilde üstel sistemlerin, trigonometrik veya pertübe sistemlerin Banach Fonksiyon Uzaylarındaki tamlık, minimallik ve frame özelliklerinin incelenmesi ise literatüre büyük katkı sağlayacaktır.

- Abdollahpour, M. R., Faroughi, M. H. ve Rahimi, A. (2007). P G-frames in Banach spaces. *Methods of functional Analysis and Topology*, 13(3), 201-210.
- Adams, D.R. (2016). *Morrey spaces*. Switzerland: Springer Intern. Publ.
- Aldroubi, A., Sun, Q. ve Tang, W. (2001). p-frames and shift invariant subspaces of L_p , *J. Fourier Anal. Appl.*, 7, 2001, 1-21.
- Astafieva, N.M. (1196). Wavelet-analysis: fundamentals of theory and examples of the application, *The Successes of the Physical Sciences*, 166(1),1-26.
- Babenko, K. I. (1948). On conjugate functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 62(2), 157–160.
- Balan, R. (1997). Stability theorems for Fourier frames and wavelet Riesz bases. *J. Fourier Anal. Appl.*, 3(5), 499-504.
- Bari, N. K. (1951). Biorthogonal systems and bases in Hilbert space, (Russian), *Ucheniye Zapiski MGU*, 158(4), 69-107.
- Bilalov, B.T. (2001). On the basis property of systems of exponents, cosines and sines. *Dokl. RAS*, 365(2), 7–9.
- Bilalov, B.T. (2004). Basic properties of some systems of exponents, cosines and sines. *Siberian Mathematical Journal*, 45(2), 264–273.
- Bilalov, B.T. (2016). *Some questions of approximation*, Baku: Elm.
- Bilalov, B.T. (2019). On the basis property of a perturbed exponential system. *Siberian Mathematical Journal*, 45(2), 264–273.
- Bilalov, B.T. ve Guliyeva, F.A. (2012). On the Frame properties of degenerate system of sines. *Journal of Function Spaces and Applications*, 1-12.
- Bilalov, B.T. ve Guliyeva, F.A. (2014). t-Frames and their Noetherian Perturbation. *Complex Anal. Oper. Theory*, 8(7), 1405-1418.
- Bilalov, B.T. ve Guseinov, Z.G. (2008). p-Bessel and p-Hilbert systems and pbases. *Dokl. NANA*, 64(4), 3-8.
- Bilalov, B.T. ve Guseinov, Z.G. (2009). K-Bessel and K-Hilbert systems and Kbases, *Doklady Mathematics*, 80(3), 826-828.
- Bilalov, B.T. ve Guseinov, Z.G. (2012). Basicity of a system of exponents with a piecewise linear phase in variable spaces, *Mediterr. J. Math.* 9(3), 487-498.
- Bilalov, B.T. ve Mamedova, Z.V. (2012). On the Frame properties of some degenerate trigonometric system, *Dokl. Acad. Nauk*, 68(5), 14-18.
- Bilalov, B.T. ve Quliyeva, A.A. (2014). On basicity of exponential systems in Morrey-type spaces, *International J. of mathematics*, 25(6), 1-10.
- Bilalov, B. T. ve Veliyev, S. G. (2005). On completeness of exponent system with complex coefficients in weight spaces, *Transactions of NAS of Azerbaijan*, 25(7), 9–14.

- Bilalov, B. T. ve Veliyev, S. G. (2006). Bases of the eigenfunctions of two discontinuous differential operators. *Differentsial'nye Uravneniya*, 42(10), 1503–1506.
- Capone, C. ve Fiorenza, A. (2005). On small Lebesgue spaces. *J. Funct. Spaces Appl.*, 3, 73–89.
- Casazza, G.P. (2000). The art of frame theory, *Taiwanese Journal of Math.*, 4(2), 129-202.
- Casazza, P.G. ve Christensen, O. (2005). Perturbation of operators and applications to frame theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 307, 710-723.
- Casazza, P.G., Christensen, O. ve Stoeva, D.T. (2005). Frame expansions in separable Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 307(2), 710-723.
- Casazza, P.G., Han, D. ve Larson, D.R. (1999). Frames for Banach space, *Contemp. Math.*, 247, 149-182.
- Castilo, R.E. ve Rafeiro, H. (2016). *An introductory course in Lebesgue spaces*. Boston: Springer International Publishing.
- Christensen, O. (1996). Atomic decomposition via projective group representations. *Rocky Mountain J. of Math.* 26(4), 1289-1312.
- Christensen, O., (2002). *An introduction to frames and Riesz Bases*, *Appl. Numer. Harmon. Anal.*, Boston: Birkhauser.
- Christensen, O. ve Heil, N. (1997) Perturbations of frames and atomic decompositions. *Math. Nachr.* 185, 33-47.
- Christensen, O. ve Stoeva, D.T. (2003) p-frames in separable Banach spaces. *Adv. Comp. Math.*, 18, 117-126.
- Chui, C., (1992). *Wavelets: A tutorial in theory and applications*. Boston: Academic Press.
- Cruz-Urbe, D.V. ve Fiorenza, A. (2013). *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*. New York: Springer.
- Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia: SIAM.
- Daubechies, I., Grossmann, A. ve Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math Phys.*, 27, 1271-1283.
- Diening, L., Harjulehto, P., Hästö P., ve Ruzicka, M. (2017). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents – Berlin: Lecture Notes in Math.*
- Di Fratta, G. ve Fiorenza, A. (2009). A direct approach to the duality of grand and small Lebesgue spaces, *Nonlinear Anal.* 70(7), 2582–2592.
- Dremin, I.M., Ivanov, O.V. ve Nechytailo, V.I.A. (2001). Wavelets and their uses, *Usp. Physics Nauk.*, 171(6), 465-501.
- Duffin, R. ve Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72(2), 341-366.
- D'onofrio, L., Sbordone, C. ve Schiattarella, R. (2013). Grand Sobolev spaces and their application in geometric function theory and PDEs, *J. Fixed Point Theory Appl.* 13, 309-340.

- Edwards, R. (1985). *Fourier series in a modern exposition*, (Cilt 1-2). Moscow: Mir.
- Enflo, P. (1973). A counterexample to the approximation property in Banach spaces. *Acta Math.*, 130, 309–317.
- Feichtinger, H.C. (1989). Atomic characterizations of modulation spaces through Gabor-type representations, *Rocky Mountain J. of Math.*, 19, 113-126.
- Feichtinger, H.C. ve Gröchening, K. (1989a). Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions, I, *J. Funct. Anal.*, 86, 305-340.
- Feichtinger, H.C. ve Gröchening, K. (1989b). Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions, II, *Monatshefte für Mathematik*, 108, 129-148.
- Fiorenza, A. (2000). Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces, *Collect. Math.*, 51(2), 131–148.
- Fiorenza, A. ve Karadzhov, G. E. (2004). Grand and small Lebesgue spaces and their analogs. *Z. Anal. Anwend.*, 23(4), 657–681.
- Fiorenza, A. ve Krbeć, M. (2000). On the domain and range of the maximal operator. *Nagoya Math. J.* 158, 43-61.
- Gabor, D. (1946). Theory of communication. *J. Inst. Electr. Eng.*, 93(26), 429-441.
- Gabardo, J.-P. ve Han, D., (2003). Frames associated with measurable spaces. *Advances in Computational Mathematics*, 18, 127–147.
- Gaposchkin, V. F. (1958). One generalization of M.Riesz theorem on conjugated functions. *Matematicheskii Sbornik*, 46(88-3), 359–372.
- Golubeva, E. S. (2011). The system of weighted exponentials with power weights. *Herald of Samara State University Natural Sciences*, 83(2), 15–25.
- Greco, L. (1993). A remark on the equality $\det Df = \det Df^*$. *Differential Integral Equations*, 6, 1089–1100.
- Gröchening, K. (1991). Describing functions: Atomic decompositions versus frames. *Monatshefte für Math.*, 112(1991), 1-41.
- Gupta, B., Fiorenza, A. ve Jain, P. (2008). The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces. *Studia Math.*, 188(2), 123–133.
- Han, D. ve Larson, D. R. (1997). *Frames, bases and group representations. Memoirs of AMS.* 27 Ekim 2023 tarihinde, <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=710e708244082f95ea95ba060848e51b0c96a687> adresinden erişildi.
- Heil, C.(2011). *A basis theory primer. Applied and Numerical Harmonic Analysis*, (Expanded ed.). New York: Birkhauser/Springer.
- Hunt, R. A., Muckenhoupt, B. ve Wheeden, R. L. (1973). Weighted norm inequalities for conjugate functions and Hilbert transform. *Trans. Am. Math. Soc.*, 176, 227-250.
- Ismailov, M. I. (2020). On the solvability of Riemann problems in grand Hardy classes. *Mathematical Notes*, 108(2), 55–69.

- Ismailov, M.I., Guliyeva, F.A. ve Nasibov, Y.I. (2016). On a generalization of the Hilbert frame generated by the bilinear mapping. *Jornal of Function Spaces*, 2016, 1-8.
- Ismailov, M.I. ve Jabrailova, A. N. (2014). On $X^\sim$ -frames and conjugate systems in Banach spaces, *Sahand Communications in Mathematical Analysis (SCMA)*, 2014, 19-29.
- Ismailov, M.I. ve Nasibov, Y.I. (2016). On one generalization of Banach frame. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 6(2), 143-159.
- Ismailov, M., Zeren Y., Simsir Acar, K. ve İlayarova, İ. (2022). On basicity of exponential and trigonometric systems in grand Lebesgue spaces, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 51, 1577-1587.
- Ismailov, M. I., Şimşir Acar, K. ve Zeren, Y. (2023). Criterion for basicity properties of the weighted exponential system with excess in the grand Lebesgue spaces. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*. In Press.
- Israfilov, D.M. ve Tozman, N.P. (2008). Approximation by polynomials in Morrey–Smirnov classes, *East Journal Approximations*, 14(3), 255–269.
- Israfilov, D.M. ve Tozman, N.P. (2011). Approximation in Morrey–Smirnov classes. *Azerbaijan J. Math.*, 1(1), 99–113.
- Iwaniec, T., ve Sbordone, C. (1992). On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 119, 129–143.
- Iwaniec, T. ve Sbordone, C. (1994). Weak minima of varitional integrals. *J. Reine Angew.*, 454, 143-141.
- Iwaniec, T. ve Sbordone, C. (1998). Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefcients. *J. Anal. Math.*, 74, 183-212.
- Kazaryan, K. S. ve Lizorkin, P. I. (1989). Multipliers, bases and unconditional bases of the weighted spaces B and SB. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 187, 111–130.
- Kokilashvili, V. (2009). Boundedness criterion for the Cauchy singular integral operator in weighted grand Lebesgue spaces and application to the Riemann problem. *Proc. A.Razmadze Math. Inst.* 151, 129–133.
- Kokilashvili, V. (2010). Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand Lebesgue spaces. *J. Math. Sci.* 170, 20–33.
- Kokilashvili, V., Meskhi, A., Rafeiro, H. ve Samko, S. (2016). *Integral operators in non-standard function spaces*, Boston: Birkhäuser.
- Kokilashvili, V. ve Samko, S. (2010) Boundedness of weighted singular integral operators on a Carleson curves in Grand Lebesgue spaces, *Intern. Conf. Numer. Anal. Appl. Math. AIP Confer. Proc.*, 1281, 490–493.
- Lindenstrauss, J. ve Tzafriri, L. (1996). *Classical Banach Spaces*. New York: Springer.
- Malat S. (1999). *A wavelet tour of signal processing*. San Diego: Academic Press.
- Meyer, S. (1990). *Wavelets and operators*. Paris:Herman.

- Moiseev, E. I. (1998). On basicity of systems of cosines and sines in weight space. *Differentsial'nye Uravneniya*, 34(1), 40–44.
- Moiseev, E. I. (1999). The basicity in the weight space of a system of eigen functions of a differential operator. *Differentsial'nye Uravneniya*, 35(2), 200–205.
- Najati, A., Faroughi, M. H. ve Rahimi, A. (2008). G-frames and stability g-frames in Hilbert space. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 271-286.
- Walnut, D. (1989). *Weyl-Heisenberg wavelet expansions: Existence and stability in weighted spaces*. (Doktora Tezi), University of Maryland, Collage Park, MD.
- Pukhov, S. S. ve Sedletskii, A. M. (2009). Bases of exponentials, sines, and cosines in weighted spaces on a finite interval. *Rossiiskaya Akademiya Nauk. Doklady Akademii Nauk*, 425(4), 452–455.
- Rafeiro, H. ve Vargas, A. (2015). On the compactness in grand spaces, *Georgian Math. J.*, 22(1), 141-152.
- Rudin, W. (1974). *Functional Analysis*, New York: Mc Graw-Hill.
- Sadigova, S. R., Hasanli, R. R. ve Karacam, C. (2018). On a space of μ -statistical continous functions. *Proceeding of the Institute of Mathematics and Mechanics*, 44(1), 70-80.
- Schauder, J. (1927). Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. *Mathematische Zeitschrift*, 26, 47–65.
- Sharapudinov, I.I. (1979). On the topology of the space $L_p(\cdot)(0, 1)$. *Mat. Zametki*, 26(4), 613-632.
- Sharapudinov, I.I. (2014). On direct and inverse theorems of approximation theory in variable Lebesgue and Sobolev spaces. *Azerbaijan J. Math.*, 4(1), 55–72.
- Shukurov, A.Sh. (2028). Basis of the properties of weighted exponential systems with excess. *Bulletin of the Samara University. Vestn. SamGU. Natural Science ser.*, 24, 14–19.
- Stoeva, D.T. (2009). Xd-frames in Banach spaces and their duals. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 52(1), 1-14.
- Singer, I. (1970). *Bases in Banach Spaces 1*. New York: Springer.
- Sun, W. (2006). G-frames and G-Riesz bases. *J. Math. Anal. Appl.* 322, 437-452.
- Sun, W. (2007). Stability of G-frames. *J. Math. Anal. Appl.*, 326, 858-868.
- Xianling, F. ve Dun, Z. (2001). On the spaces $L_p(x)(\Omega)$ and $W_{m,p}(x)(\Omega)$. *J. Math. Anal. Appl.*, 263, 424-446.
- Young, R.M. (1980). *An introduction to nonharmonic Fourier series*. New York: Academic Press.
- Zeren, Y., Ismailov, M.I. ve Karacam, C. (2020). Korovkin-type theorems and their statistical versions in grand Lebesgue spaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 44, 1027-1041.

- Zeren, Y., Ismailov, M.I. ve Sirin, F. (2020). On basicity of the system of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem for second order differential equation for grand-Lebesgue space. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(5), 1995–1612.
- Zorko, C.T. (1986). Morrey spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 98(4), 586-592.
- Zigmund, A. (1965). *Trigonometric Series*. (Cilt 1-2). Moscow:Mir.



TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. Zeren, Y., Ismailov, M.I., Şimşir Acar, K. (2022). On the basis property of a weighted exponential system in grand Lebesgue spaces. 5th International ONLINE Conference on Mathematical Advances and Applications, 11-14 Mayıs, İstanbul, Türkiye.
2. Zeren, Y., İsmailov, M.I., Simsir Acar, K. (2023). On the completeness and minimality in the space $L_p(0, \pi)$ of a weighted system of sines with a power-law weight with an excluded arbitrary element, 6th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications, 10-13 Mayıs, İstanbul, Türkiye.
3. Acar, K.S., Ismailov, M.I., Zeren, Y. (2023). Criterion for completeness and minimality of the weighted exponential system with excess in the grand Lebesgue spaces. Modern Problems of Mathematics and Mechanics. 26-28 Nisan, Bakü, Azerbaycan.

Makaleler

1. Ismailov, M. I., Zeren, Y., Şimşir Acar, K., Aliyarova I. F. (2022). On basicity of exponential and trigonometric systems in grand Lebesgue spaces. Hacettepe Journal of Mathematics And Statistics. 51(6), 1577-1587.
2. Ismailov, M. I., Şimşir Acar, K., Zeren, Y., (2024). Criterion for basicity Properties of the weighted exponential system with excess in the grand Lebesgue spaces. Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute. Basımda.

Projeler

1. Tübitak-Anas Uluslararası İkili İşbirliği Projesi (Proje No: 118f447)