ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LAPLACE-BESSEL DİFERENSİYEL OPERATÖRÜNE KARŞILIK GELEN GENELLEŞTİRİLMİŞ MAKSİMAL FONKSİYON VE GENELLEŞTİRİLMİŞ RIESZ POTANSİYELİ

Hilal KILIÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2007

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LAPLACE-BESSEL DİFERENSİYEL OPERATÖRÜNE KARŞILIK GELEN GENELLEŞTİRİLMİŞ MAKSİMAL FONKSİYON VE GENELLEŞTİRİLMİŞ RIESZ POTANSİYELİ

Hilal KILIÇ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Bu tez, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrıldı ve tez hakkında genel bilgiler verildi. İkinci bölüm, ileri bölümlerde gerekli olan tanım ve teoremleri içermektedir. Üçüncü bölümde Laplace-Bessel diferensiyel operatörü tarafından üretilen maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli tanıtılmış ayrıca varlık ve sınırlılık özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde Genelleştirilmiş öteleme operatörü yardımıyla tanımlanan B-Maksimal fonksiyon ve B-Riesz potansiyeli tanıtılmış ve bunlar için sınırlılık koşulları belirlenmiştir. Son bölümde ise, Laplace-Bessel diferensiyel operatörüne karşılık gelen genelleştirilmiş maksimal fonksiyon ve genelleştirilmiş Riesz potensiyeline yer verilmiştir.

2007, 88 sayfa

Anahtar Kelimeler: Laplace-Bessel diferensiyel operatörü, Genelleştirilmiş öteleme operatörü, B–Maksimal fonksiyon, B-Riesz potansiyeli, Genelleştirilmiş B-Maksimal fonksiyon ve Genelleştirilmiş B-Riesz potansiyeli.

ABSTRACT

Master Thesis

GENERALIZED MAXIMAL FUNCTION AND GENERALIZED RIESZ POTENTIAL ASSOCIATED WITH THE LAPLACE-BESSEL DIFFERENTIAL OPERATOR

Hilal KILIÇ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to introduction and general informations about thesis. The second chapter contains definitions and theorems necessary for next chapters. In the third chapter maximal function and Riesz Potential which are produced by Laplace-Bessel differential operator are introduced and also the properties of existence and boundness are investigated. In the fourth chapter B-Maximal funtion and B-Riesz Potential which are defined by generalized translation operator are introduced,and their boundness conditions are determined. In the last chapter generalized maximal function and generalized Riesz potential associated with the Laplace-Bessel differential operator are mentioned.

2007, 88 pages

Key Words : Laplace-Bessel differential operator,Generalized shift operator, B-Maximal function, B-Riesz potential, Generalized B-Maximal function, Generalized B-Riesz potential.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar insani ilişkilerde de engin fikirleriyle gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye, çalışmalarım süresince bir çok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme ve yardımlarından dolayı sayın Turhan KARAMAN'a en derin duygularla teşekkür ederim**.**

Hilal KILIÇ
Ankara, Kasım 2007

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Maksimal fonksiyon ve Riesz Potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulama alanları vardır.

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Laplace-Bessel diferensiyel operatörü tarafından üretilen integral operatörler Muckenhoupt ve Stein (1985), Kipriyanov (1967), Trimeche (1997), Lyakhov (1997), Stempak (1985), Gadjiev ve Aliyev (1988), Şerbetçi ve Ekincioğlu (2004), Guliyev (2003) gibi bir çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

Levitan (1951) $(0, \infty)$ aralığında Bessel diferensiyel operatörü ile yakından ilgili olan

$$T^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(\gamma)} \int_0^{\pi} f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\alpha}\right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha$$

genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır. Daha sonra Kipriyanov (1967) Levitan'ın tanımladığı genelleştirilmiş ötelemeyi $\mathbb{R}_+^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayına "ilk $(n-1)$ değişkene göre adi ve n. değişkene göre $(0, \infty)$ aralığındaki genelleştirilmiş öteleme alarak " genişletmiş ve Δ_B Laplace-Bessel operatörü ile yakından ilgili olan

$$T^y f(x) = c_\gamma \int_0^{\pi} f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha$$

genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır.

f ve g, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde ölçülebilir iki fonksiyon olmak üzere T^y operatörü yardımıyla $B-$konvolüsyon adı verilen yeni bir konvolüsyon operatörü

$$(f \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) T^y g(x) \, y_n^\gamma dy$$

şeklinde tanımlanır.

Gadjiev ve Aliyev (1988) $I_\alpha f$ Riesz potansiyelindeki adi öteleme yerine genelleştirilmiş öteleme operatörünü alarak

$$I_{\alpha,\gamma}f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} T^y \left|x\right|^{\alpha-n-\gamma} f(y)\, y_n^\gamma dy, \qquad 0<\alpha<n+\gamma$$

$B-$Riesz Potansiyelini tanımlamıştır. Guliyev (2003) Mf Hardy-Littlewood Maksimal fonksiyonunu genelleştirerek T^y genelleştirilmiş operatörü tarafından üretilen

$$M_\gamma f\left(x\right) = \sup_{r>0} \frac{1}{\left|E\left(0,r\right)\right|_\gamma} \int\limits_{E(0,r)} T^y \left|f\left(x\right)\right| y_n^\gamma dy$$

$B-$maksimal fonksiyonunu tanımlamış ve bu fonksiyonun $L_{p,\gamma}-$sınırlılığını ispatlamıştır. Guliev ve Safarov (2002) genelleştirilmiş kesirli $B-$maksimal operatör

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma} f\left(x\right) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+\gamma-\alpha}} \int\limits_{B(0,r)} \left|\Omega(y)\right| T^y \left|f\left(x\right)\right| y_n^\gamma dy$$

ve genelleştirilmiş $B-$Riesz potansiyeli (veya $B-$kesirli integral operatörü)

$$I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\left(x\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\Omega\left(y\right)}{\left|y\right|^{n+\gamma-\alpha}} T^y f\left(x\right) y_n^\gamma dy$$

tanımlamış ve Guliyev, Serbetci ve Safarov (2007) bu operatörlerin $L_{p,\gamma}-$sınırlılığını ispat etmişlerdir.

Tezin amacı, harmonik analizin temel konularından olan maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyelini tanıtmak, bu operatörlerin çeşitli genelleştirmelerini vermektir. Laplace-Bessel diferensiyel operatörüne karşılık gelen maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyelinin ve son olarak genelleştirilmiş $B-$maksimal fonksiyon ve genelleştirilmiş $B-$Riesz potansiyelinin varlık ve sınırlılık gibi önemli özellikleri incelenecektir. Buradaki ispatlarda bir fonksiyonun yeniden düzenlemesi (rearrangement) kavramı kullanılmıştır. Bir fonksiyonun yeniden düzenlemesi kavramı ilk defa sistematik olarak Hardy-Littlewood tarafından kullanılmış ve bir çok eşitsizliğin elde edilmesinde anahtar rol oynamıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, klasik maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli tanıtılmış ve bu operatörlerin varlık ve sınırlılığı gösterilmiştir. Dördüncü bölümde Laplace-Bessel diferensiyel operatörüne karşılık gelen maksimal fonksiyon ($B-$maksimal fonksiyon) ve Riesz potansiyeli ($B-$Riesz potansiyeli) tanıtıl-mış, varlık ve sınırlılık gibi özellikleri incelenmiştir. Son olarak beşinci bölümde, $\gamma-$yeniden düzenleme için O'Neil tipli eşitsizlik ve B-konvolüsyon için O'Neil tipli eşitsizlik ispatlanmıştır. O'Neil tipli eşitsizlik yardımıyla genelleştirilmiş $B-$Riesz potansiyeli ve bunun bir sonucu olarak genelleştirilmiş $B-$maksimal fonksiyonun $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ uzaylarında sınırlılığı elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|.\| : X \to R \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

$(N1)$ $\|x\| \geq 0 \;\; ve \;\; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$(N2)$ $\|ax\| = |a| \, \|x\|$

$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|.\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.2. Bir T lineer operatörü aşağıdaki özellikleri gerçekleyen operatördür:

(i) T nin $D(T)$ tanım bölgesi bir vektör uzayı olup $R(T)$ değer bölgesi, aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.

(ii) Her $x, y \in D(T)$ ve α skaleri için,

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Tanım 2.3. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq A \|x\|$ olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir.

Bir T operatörünün normu $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ ile tanımlanır.

Tanım 2.4. X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(T)$ için, $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T ye x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.5. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır (Kreyszig 1989).

Tanım 2.6. Bir f fonksiyonunun desteği $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışıdır ve $Supp\ f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f kompakt destekli fonksiyon adını alır.

Tanım 2.7. X bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) şartı yerine

$$\text{"Her } n \in N \text{ için } E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}\text{"}$$

şartı konulursa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma-$ cebiri adı verilir.

Tanım 2.8. Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ-cebiri denir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir.

Tanım 2.9. X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma-$cebiri olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$-ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.10. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in R$ için

$$f^{-1}\left(]\alpha, +\infty[\right) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(X, \mathcal{A})$ ile.gösterilir.

Tanım 2.11. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 2.12. Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı adı verilir.

Tanım 2.13. X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Tanım 2.14. (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

biçiminde tanımlanan m^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.

$n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i\ , \quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\ ,\ I_k \text{ bir aralık}\right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E))$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir.

Tanım 2.15. $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$, m^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin sınıfı olsun. m^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$ sınıfına da $B(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, m ile gösterilir.

Tanım 2.16. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme hemen her yerde doğrudur denir.

Tanım 2.17. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L^p uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & , \quad 1 \leq p < \infty \\ ess \ \sup |f(x)| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.18. f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt K kümesi üzerinde

$$\int_K |f| \, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.19. $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L^p$, $g \in L^q$ olsun. Bu durumda $fg \in L^1$ ve

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir (Neri 1971).

Tanım 2.20. $p \geq 1$ için eğer $f,\ g \in L^p$ ise $(f+g) \in L^p$ ve

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

dir. Bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir (Neri 1971).

Tanım 2.21. $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$, $\mathbb{R}^n$ de vektörler olmak üzere $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklidyen uzayı $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu reel uzayıdır. Burada x in mutlak değeri $|x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1...dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int f(x)\, dx = \int \cdots \int f(x_1, ..., x_n)\, dx_1...dx_n$$

ile gösterilir.

Çok katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterelim.
$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx,\ \ dx = dx_1...dx_n$ integralinin hesabı için;

$0 \leq r < \infty,\ \ 0 \leq \theta_1, ..., \theta_{n-2} \leq \pi,\ \ 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ olmak üzere
$x_1 = r\cos\theta_1$
$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$
$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$
...
$x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{n-1}$
dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}) = r^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(\sin\theta_j)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\,dx &= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^{2\pi} f(r)\,J(r,\theta)\,dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
&= \int\limits_0^\infty r^{n-1} f(r)\,dr \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin\theta_j)^{n-1-j}\, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
&= \omega_{n-1} \int\limits_0^\infty f(r)\, r^{n-1} dr
\end{aligned}$$

elde edilir, burada ω_{n-1}, birim kürenin yüzey alanıdır.

Genel olarak

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\,dx &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f(r\sin\theta_1, \dots, r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{n-1})\, r^{n-1} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
&= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f(r,\theta)\, r^{n-1} d\sigma dr
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. dx hacim elemanı $dx = r^{n-1} dr d\sigma$ biçiminde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür.

Tanım 2.22. $f(x)$ ve $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir fonksiyonları olsunlar. Bu durumda $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,dy$ integraline f ile g nin konvolüsyonu denir ve $f * g$ ile gösterilir.

Teorem 2.1. Eğer f, $g \in L^1$ ise bu durumda $h = f * g$ hemen her yerde vardır ve L^1 e aittir. Ayrıca

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

sağlanır (Neri 1971).

Teorem 2.2. (W. H. Young Teoremi). $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer $f \in L^p$ ve $g \in L$

ise bu durumda $h = f * g$ hemen her yerde vardır ve L^p uzayına aittir. Ayrıca

$$\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

eşitsizliği gerçeklenir (Neri 1971).

Teorem 2.3 (Young Teoremi). $f \in L^p$ ve $g \in L^q$ olsun, burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ dir. Eğer $h = f * g$ ise bu durumda $h \in L^r$ ve

$$\|h\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır (Neri 1971).

Tanım 2.23. $f \in L(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-i(x,y)} dy$$

ile verilen $\hat{f}$ fonksiyonu f fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak adlandırılır. Burada $(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ dir. Fourier dönüşümü

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-i(x,y)} dy$$

veya

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-2\pi i(x,y)} dy$$

olarak da alınabilir. Eğer $n = 1$ ve $f \in L(\mathbb{R}^1)$ ise bu durumda

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy} dy$$

olur.

Lemma 2.1. Eğer $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_n(x_n)$ ise

$$\hat{f}(x) = \hat{f}_1(x_1) \hat{f}_2(x_2) ... \hat{f}_n(x_n)$$

sağlanır (Neri 1971).

Teorem 2.4 (Riemann-Lebesgue). Eğer $f \in L(\mathbb{R}^n_+)$ ise bu durumda sınırlı ve düzgün süreklidir. Ayrıca $|x| \to \infty$ iken $\widehat{f}(x) \to 0$ dır.

Teorem 2.5. $f, g \in L$ olsun. Eğer $h = f * g$ ise bu durumda $\widehat{h} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ dır (Neri 1971).

Teorem 2.6. $f, g \in L$ olsun. Bu durumda

$$\int \widehat{f}(x) g(x) dx = \int f(x) \widehat{g}(x) dx$$

dir (Neri 1971).

Teorem 2.7 (Parseval-Plancherel). $f \in L_2(E^n)$ olsun. Bu durumda

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(x,y)} dy$$

Fourier dönüşümü vardır. Ayrıca

$$\left\| \widehat{f} \right\|_2 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_2$$

dir. Eğer Fourier dönüşümünü

$$\widehat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i(x,y)} dy$$

ile tanımlarsak bu durumda

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2 \qquad \text{(Parseval formülü)}$$

$$< \widehat{f}, \hat{g} >=< f, g > \text{ (Plancherel formülü)}$$

olur. Burada $< f, g >$, f ile g nin iç çarpımını gösterecektir ve

$$< f, g >= \int f\bar{g}dx$$

dir.

Teorem 2.8 (Hausdorff-Young Teoremi). $1 < p \leq 2$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ için $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(x,y)}dy$$

vardır ve

$$\left\|\widehat{f}\right\|_q \leq (2\pi)^{-\frac{n}{p}} \|f\|_p$$

dir (Neri 1971).

Tanım 2.24 (İnvers Formülü). $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ve f nin Fourier dönüşümü

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(x,y)}dx$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)e^{i(x,y)}dy$$

formülüne Fourier dönüşümleri için invers formülü denir.

Tanım 2.25. λ ve α reel sayılar olmak üzere $f(\lambda x) = |\lambda|^\alpha f(x)$ oluyorsa f ye α

dereceden homojen fonksiyon denir.

Tanım 2.26. Bir $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(n\geq 1)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(x)=f(|x|)$ ise f ye radyal fonksiyon denir.

Teorem 2.9. $E\subset\mathbb{R}^n$, $|E|<\infty$ olsun. Eğer $r<s$ ise bu durumda $L_s(E)\subset L_r(E)$ sağlanır (Neri 1971).

Tanım 2.27. Bir s fonksiyonunun görüntü kümesi sonlu elemandan meydana geliyorsa s ye bir basit fonksiyondur denir.

Teorem 2.10. Eğer $1\leq p<\infty$ ise L^p deki basit fonksiyonların kümesi L^p de yoğundur (Adams and Fournier 2003).

Tanım 2.28. Bir $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ negatif olmayan α_j tamsayılarının sıralı n-lisine katlı-indis denir.
$|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$ dir. Eğer α ve β iki katlı-indis ise $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_n+\beta_n)$ dir. Benzer şekilde, $D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}...D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$ mertebeden bir diferensiyel operatördür. Özel olarak $D^{(0,...,0)}f=f$ dir. Bir-boyutlu durumda D^α, $\frac{d}{dx}$ e indirgenir.

Tanım 2.29 (Schwarz uzayı). $\mathbb{R}^n$ uzayında sonsuz kez diferensiyellenebilir ve istenilen α ve β katlı-indisleri için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|<\infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına Schwarz uzayı denir. $\mathcal{S}$ ile gösterilir.

Eğer $f\in\mathcal{S}$ ise bu durumda f sınırlıdır, $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\hat{f}(x)\in\mathcal{S}$ dir.

Tanım 2.30. $1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere

$$T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$$

bir operatör olsun. Eğer $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_q \leq A \|f\|_p$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne "(p, q) tipindendir" denir.

μ bir ölçü olmak üzere eğer $\forall \alpha > 0$ için

$$\mu \{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A \|f\|_p}{\alpha} \right)^q, q < \infty$$

olacak biçimde α ve f den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindendir denir.

Teorem 2.11 (Riesz-Torin). $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ olmak üzere T, (p_0, q_0) ve (p_1, q_1) tipli bir operatör olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

olmak üzere T, (p, q) tipli bir operatördür.

Teorem 2.12 (Marcinkiewicz). $p_0 < q_0$, $p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olmak üzere T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun. Ayrıca p ve q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p, q) tipli operatördür.

2.2 Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü ve Özellikleri

Levitan (1951), $(0,\infty)$ aralığında Bessel diferensiyel operatörü ile yakından ilgili olan

$$T^{y}f\left(x\right)=\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\gamma\right)}\int\limits_{0}^{\pi}f\left(\sqrt{x^{2}+y^{2}-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır. Daha sonra Kipriyanov (1967) Levitan'ın tanımladığı genelleştirilmiş ötelemeyi $\mathbb{R}_{+}^{n}$, $n-$boyutlu Öklid uzayına "ilk $(n-1)$ değişkene göre adi ve n. değişkene göre $(0,\infty)$ aralığındaki genelleştirilmiş öteleme alarak " genişletmiş ve

$$T^{y}f\left(x\right)=c_{\gamma}\int\limits_{0}^{\pi}f\left(x'-y',\sqrt{x_{n}^{2}-2x_{n}y_{n}\cos\alpha+y_{n}^{2}}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır.

Tanım 2.2.1 (Bessel operatörü). $\gamma>0$ ve $x>0$ olmak üzere;

$$B=\frac{d^{2}}{dx^{2}}+\frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}$$

şeklinde ifade edilen B operatörüne Bessel diferensiyel operatörü denir.

Tanım 2.2.2 (Laplace-Bessel operatörü). $\gamma>0$ olmak üzere

$$\Delta_{B}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{k}^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial x_{n}^{2}}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial}{\partial x_{n}}$$

şeklinde tanımlanan operatöre Laplace-Bessel diferensiyel operatörü denir.

Tanım 2.2.3. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y\in\mathbb{R}$ olsun.

$$T^{y}f\left(x\right)=f\left(x+y\right)$$

şeklinde tanımlanan operatöre $\mathbb{R}$ de adi öteleme operatörü denir. Adi öteleme operatörü

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ u\left(x,0\right) &= f\left(x\right) \\ u_y\left(x,0\right) &= 0 \end{cases}$$

şeklindeki başlangıç değer probleminin çözümüdür (Ekincioğlu 1994).

Tanım 2.2.4. X bir topolojik uzay, $f : X \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $y \in X$ olmak üzere

$$F\left(x,y\right) = T^y f\left(x\right)$$

operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa genelleştirilmiş öteleme operatörü adını alır.

(i) $\forall f, g \in C\left(X\right),\ a, b \in \mathbb{C}$ için

$$T^y[af\left(x\right) + bg\left(x\right)] = aT^y f\left(x\right) + bT^y g\left(x\right)$$

eşitliği sağlanır.

(ii) $\forall f \in C\left(X\right)$ için bir $y_0 \in X$ vardır $\ni T^{y_0} f\left(x\right) = f\left(x\right)$ sağlanır.

(iii) $\forall f \in C\left(X\right)$ ve $x, y, z \in X$ için

$$T^z T^y f\left(x\right) = T^y T^z f\left(x\right)$$

eşitliği sağlanır.

(iv) $\forall x, y \in X$ için $F\left(x,y\right) = T^y f\left(x\right)$ süreklidir.

B, Bessel diferensiyel operatörü olmak üzere

$$\begin{cases} B_x u & = & B_y u \\ u(x,0) & = & f(x) \\ u_y(x,0) & = & 0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(x,y) = T^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\pi} f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

olarak elde edilir. Bu öteleme $(0, \infty)$ aralığında genelleştirilmiş ötelemedir.

Şimdi Kipriyanov tarafından $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde tanımlanan genelleştirilmiş ötelemeyi verelim.

$x = (x', x_n)$, $y = (y', y_n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, $y' = (y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} (\Delta_B)_x u(x,y) & = & (\Delta_B)_y u(x,y) \\ u(x,0) & = & f(x) \\ u_y(x,0) & = & 0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(x,y) = T^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\pi} f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

fonksiyonudur. Bu öteleme $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde genelleştirilmiş ötelemedir. Şimdi T^y operatörünün aşağıdaki özellikleri sağladığını gösterelim.

(i) Lineerlik özelliği

T^y operatörünün tanımından

$$\begin{aligned}
T^y\left(af\left(x\right)+bg\left(x\right)\right) &= T^y\left(\left(af+bg\right)\left(x\right)\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\gamma\right)}\int\limits_0^\pi \left(af+bg\right)\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&= \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\gamma\right)}\int\limits_0^\pi af\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&\quad +\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\gamma\right)}\int\limits_0^\pi bg\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&= aT^yf\left(x\right)+bT^yg\left(x\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Pozitiflik özelliği

f, pozitif bir fonksiyon olsun.

$$T^yf\left(x\right)=\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\gamma\right)}\int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

olduğunu biliyoruz. f pozitif fonksiyon olduğundan

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\geq 0$$

sağlanır. $0\leq\theta\leq\pi$ iken $\sin\theta\geq 0$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı pozitiftir. O halde

$$T^yf\left(x\right)\geq 0$$

olduğu görülür.

(iii) T^y operatörünün tanımı kullanılarak

$$T^y\left(1\right)=1$$

olduğu kolayca görülür.

(iv) f sınırlı bir fonksiyon olduğunda T^y operatörü sınırlıdır.

$$\begin{aligned}
\left|T^y f(x)\right| &= \left|\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)}\int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha\right| \\
&\leq \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)}\int_0^\pi \left|f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\right|\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&\leq \sup_{x\geq 0}\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)}\int_0^\pi \left|f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\right|\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&\leq \sup_{x\geq 0}\left|f(x)\right|\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)}\int_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left|T^y f(x)\right| \leq T^y\left|f(x)\right| \leq \sup_{x\geq 0}\left|f(x)\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

(v) T^y operatörü süreklidir.

T^y operatörü lineer ve sınırlı olduğundan süreklidir.

(vi) T^y operatörünün yer değiştirme özelliği

$$T^y T^z f(x) = T^z T^y f(x)$$

biçimindedir.

Şimdi T^y genelleştirilmiş operatörü tarafından üretilen $f \otimes g$ konvolüsyonunu ($B-$konvolüsyon) tanımlayıp önemli özelliklerini vereceğiz

Tanım 2.2.5. f ve g, $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde ölçülebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$(f \otimes g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y)\, T^y g(x)\, y_n^{\gamma} dy$$

şeklinde tanımlanan konvolüsyona $B-$konvolüsyon denir.

Lemma 2.2.1. $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ olsun. Bu durumda $\forall y \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$\left\| T^y f(x) \right\|_{L_{p,\gamma}} \leq \left\| f \right\|_{L_{p,\gamma}} \tag{2.2.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Eşitsizliği önce $p = 1$ durumu için ispatlayalım.

$$T^y f(x) = c_\gamma \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

olduğunu biliyoruz. Burada c_γ sabiti

$$c_\gamma = \left(\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha\right)^{-1} = \frac{\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)\sqrt{\pi}}$$

eşitliği ile verilir.

$$\begin{aligned}
\left\| T^y f(x) \right\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R})} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left| T^y f(x) \right| x_n^{\gamma} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left| c_\gamma \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \right| x_n^{\gamma} dx \\
&\leq c_\gamma \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_0^\pi \left| f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \right| \sin^{\gamma-1}\alpha x_n^{\gamma} d\alpha dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= c_\gamma \int\limits_0^\pi \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left| f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \sin^{\gamma-1}\alpha x_n^\gamma dx d\alpha \\
&= c_\gamma \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left| f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| x_n^\gamma dx \\
&= \|f\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Şimdi de $p=\infty$ için $\|T^y f(.)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$ olduğunu gösterelim. $T^y f(.)$ operatörünün L_∞ normu

$$
\|T^y f(.)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = ess \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n} |T^y f(x)|
$$

şeklindedir.

$$
\begin{aligned}
|T^y f(x)| &= \left| c_\gamma \int\limits_0^\pi f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \right| \\
&\leq c_\gamma \int\limits_0^\pi \left| f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&\leq c_\gamma \int\limits_0^\pi \|f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha = \|f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)} c_\gamma \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&= \|f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)}
\end{aligned}
$$

$p=1$ için

$$
\|T^y f(.)\|_{L_{1,\gamma}} \leq \|f\|_{L_{1,\gamma}}
$$

ve $p=\infty$ için

$$
\|T^y f(.)\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_\infty}
$$

sağlandığından, interpolasyon teoreminden $1 \leq p \leq \infty$ için

$$
\|T^y f(.)\|_{L_{p,\gamma}} \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}
$$

elde edilir.

Lemma 2.2.2. $1 \leq p, \quad r \leq q \leq \infty, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, \quad f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right), \quad g \in L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun. Bu durumda $f \otimes g \in L_{r,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\|f \otimes g\|_{L_{r,\gamma}} \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}} \|g\|_{L_{q,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\lambda, \mu, \nu; \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$ olacak şekilde pozitif sayılar olsun.

$$\begin{aligned} |(f \otimes g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y)\, T^y g(x)\, y_n^\gamma dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|\, |T^y g(x)|\, y_n^\gamma dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|^{p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)} |T^y g(x)|^{q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}\right)} |f(y)|^{\frac{p}{\mu}} |T^y g(x)|^{\frac{q}{\nu}} y_n^{\gamma\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)} dy \end{aligned}$$

elde ederiz. λ, μ, ν ye göre Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned} |(f \otimes g)(x)| \leq & \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|^{\lambda p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)} |T^y g(x)|^{\lambda q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}\right)} y_n^\gamma dy \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\ & \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|^p y_n^\gamma dy \right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |T^y g(x)|^q y_n^\gamma dy \right)^{\frac{1}{\nu}} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$|(f \otimes g)(x)| \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{\mu}} \|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|^{\lambda p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)} |T^y g(x)|^{\lambda q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}\right)} y_n^\gamma dy \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

elde edilir.

$\frac{1}{p}=\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\lambda}$ ve $\frac{1}{r}=\frac{1}{\lambda}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}=\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\nu}=1$$

sağlanır.

$$|(f\otimes g)(x)|\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{\mu}}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{\nu}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(y)|^{\lambda p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)}|T^y g(x)|^{\lambda q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}y_n^{\gamma}dy\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$|(f\otimes g)(x)|\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{\mu}}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{\nu}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(y)|^{p}|T^y g(x)|^{q}y_n^{\gamma}dy\right)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliği bulunur. Her iki tarafın r. kökü alınırsa

$$|(f\otimes g)(x)|^r\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{pr}{\mu}}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{qr}{\nu}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(y)|^{p}|T^y g(x)|^{q}y_n^{\gamma}dy\right)$$

olduğu görülür. Şimdi her iki tarafın integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|(f\otimes g)(x)|^r x_n^{\gamma}dx &\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{pr}{\mu}}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{qr}{\nu}}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(y)|^{p}|T^y g(x)|^{q}y_n^{\gamma}dy x_n^{\gamma}dx\\ &= \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{pr}{\mu}}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{qr}{\nu}}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(y)|^{p}y_n^{\gamma}dy\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|T^y g(x)|^{q}x_n^{\gamma}dx\end{aligned}$$

sağlanır. Buradan

$$\|f\otimes g\|_{L_{r,\gamma}}^r\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{pr}{\mu}}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{qr}{\nu}}\|f\|_{L_{p,\gamma}}^{p}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{q}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Her iki tarafın r. kökü alındığında

$$\begin{aligned}\|f\otimes g\|_{L_{r,\gamma}} &\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{\mu}}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{\nu}}\|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{r}}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{r}}\\ &= \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{\mu}+\frac{p}{r}}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{\nu}+\frac{q}{r}}=\|f\|_{L_{p,\gamma}}\|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}\leq\|f\|_{L_{p,\gamma}}\|g\|_{L_{q,\gamma}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.2.3. $\mathcal{A} = (\mathcal{A}', \mathcal{A}_n) \subset \mathbb{R}_+^n$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ herhangi ölçülebilir kümeler, $\mathcal{A}_n \subset (0, \infty)$ ve $y \in \mathbb{R}_+^n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik gerçeklenir.

$$\int\limits_{\mathcal{A}} T^y g(x)\, x_n^\gamma dx = c_\gamma \int\limits_{(y,0)+\overline{\mathcal{A}}} g\left(z', \sqrt{z_n^2 + z_{n+1}^2}\right) d\mu(z, z_{n+1})$$

Burada $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}' \times (-m, m) \times [0, m)$, $m = \sup \mathcal{A}_n$ ve $d\mu(z, z_{n+1}) = z_{n+1}^{\gamma-1} dz dz_{n+1}$ dir (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007).

İspat. Genelleştirilmiş öteleme operatörünün tanımından;

$$T^y f(x) = c_\gamma \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın integralini alırsak;

$$\int\limits_{\mathcal{A}} T^y f(x)\, x_n^\gamma dx = c_\gamma \int\limits_{\mathcal{A}} \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha\, x_n^\gamma d\alpha dx$$

elde edilir.

$$\begin{cases} z' & = & x' - y' \\ z_n & = & y_n - x_n \cos\alpha \\ z_{n+1} & = & x_n \sin\alpha \end{cases}$$

dönüşümünü yapalım. Dönüşümün Jakobiyeni $j = -\frac{1}{x_n}$ dir.

$$\begin{aligned} z_n^2 + z_{n+1}^2 &= (y_n - x_n\cos\alpha)^2 + x_n^2 \sin^2\alpha \\ &= y_n^2 + x_n^2\cos^2\alpha - 2x_n y_n \cos\alpha + x_n^2 \sin^2\alpha \\ &= x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2 \end{aligned}$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{A}} T^{y} f\left(x\right) x_{n}^{\gamma} dx &= c_{\gamma} \int\limits_{\overline{\mathcal{A}}+(y,0)} f\left(z', \sqrt{z_{n}^{2}+z_{n+1}^{2}}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha \frac{1}{x_{n}} x_{n}^{\gamma} dx d\alpha \\
&= c_{\gamma} \int\limits_{\overline{\mathcal{A}}+(y,0)} f\left(z', \sqrt{z_{n}^{2}+z_{n+1}^{2}}\right) z_{n+1}^{\gamma-1} dz dz_{n+1}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2.3 $\gamma-$Dağılım Fonksiyonu ve $\gamma-$Azalan Yeniden Düzenleme

Bu kısımda $\gamma-$dağılım fonksiyonu ve $\gamma-$yeniden düzenlemeyi tanıtıp bunlarla ilgili tamel özellikleri vereceğiz.

$E \subset \mathbb{R}_{+}^{n}$ ölçülebilir bir küme olsun. Bu durumda E nin $\gamma-$ölçüsü

$$
|E|_{\gamma} = \int\limits_{E} x_{n}^{\gamma} dx
$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.3.1 ($\gamma-$dağılım fonksiyonu). $f : \mathbb{R}_{+}^{n} \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $f_{*,\gamma} : [0,\infty) \rightarrow [0,\infty]$,

$$
f_{*,\gamma}\left(t\right) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : \left|f\left(x\right)\right| > t\right\}\right|_{\gamma}
$$

şeklinde tanımlanan $f_{*,\gamma}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun $\gamma-$dağılım fonksiyonu denir.

Aşağıdaki lemma ile $\gamma-$dağılım fonksiyonunun bazı özelliklerini vereceğiz.

Lemma 2.3.1. $f, g : \mathbb{R}_{+}^{n} \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) $|f|_{*,\gamma}(t) = f_{*,\gamma}(t)\,,\ t \geq 0$

(ii) h.h.y. $f = g$ ise $f_{*,\gamma} = g_{*,\gamma}$ dır.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{n}$ için $|f(x)| \leq |g(x)|$ ise $\forall t \in [0,\infty)$ için

$$f_{*,\gamma}(t) \leq g_{*,\gamma}(t)$$

eşitsizliği sağlanır.

(iv) $f_{*,\gamma}$ azalan ve sağdan süreklidir.

(v) $(f+g)_{*,\gamma}(t_1+t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1) + g_{*,\gamma}(t_2)\,;\ t_1,t_2 \geq 0$

(vi) $(fg)_{*,\gamma}(t_1t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1) + g_{*,\gamma}(t_2)\,;\ t_1,t_2 \geq 0$

İspat.

(i) $|f|_{*,\gamma}(t) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |f(x)| > t\right\}\right|_{\gamma} = f_{*,\gamma}(t)$

(ii) f ve g fonksiyonları hemen her yerde eşit olduğundan

$$f_{*,\gamma}(t) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |f(x)| > t\right\}\right|_{\gamma} = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |g(x)| > t\right\}\right|_{\gamma} = g_{*,\gamma}(t)$$

olduğu kolayca görülür.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{n}$ için $|f(x)| \leq |g(x)|$ olduğundan

$$\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |f(x)| > t\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |g(x)| > t\right\}$$

olduğu görülür. Buradan her iki tarafın γ ölçüsü alınırsa

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\left|f\left(x\right)\right|>t\right\}\right|_{\gamma}\leq\left|\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\left|g\left(x\right)\right|>t\right\}\right|_{\gamma}$$

olduğundan $\forall t\geq 0$ için

$$f_{*,\gamma}\left(t\right)\leq g_{*,\gamma}\left(t\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

(iv) İlk olarak $f_{*,\gamma}$ fonksiyonunun azalan olduğunu gösterelim.
$t_1,t_2\in[0,\infty)$ için $t_1>t_2$ olsun. Bu durumda $f_{*,\gamma}\left(t_1\right)\leq f_{*,\gamma}\left(t_2\right)$ olduğunu göstermeliyiz.

$t_1>t_2$ olduğundan her $t\geq 0$ için

$$\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\left|f\left(x\right)\right|>t_1\right\}\subset\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\left|f\left(x\right)\right|>t_2\right\}$$

dir. Her iki tarafın γ ölçüsü alındığında

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\left|f\left(x\right)\right|>t_1\right\}\right|_{\gamma}\leq\left|\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\left|f\left(x\right)\right|>t_2\right\}\right|_{\gamma}$$

elde edilir. Buradan

$$f_{*,\gamma}\left(t_1\right)\leq f_{*,\gamma}\left(t_2\right)$$

olduğundan $f_{*,\gamma}$ azalandır.

Şimdi de $f_{*,\gamma}$ nın sağdan sürekli olduğunu gösterelim. $t_1\geq t_2\geq ...\geq t_n...\geq t$, $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t$ olsun. $f_{*,\gamma}\left(t_n\right)\to f_{*,\gamma}\left(t\right)$ olduğunu göstereceğiz.

$$E_t=\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\left|g\left(x\right)\right|>t\right\}$$

olsun. $t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_n ... \geq t$ olduğundan $E_{t_1} \subset E_{t_2} \subset ... \subset E_t$ dir. Buradan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_t$$

olur.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_{*,\gamma}(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t_n\right\}\right|_\gamma \\
&= \lim_{n\to\infty} |E_{t_n}|_\gamma = |E_t|_\gamma = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t\right\}\right|_\gamma \\
&= f_{*,\gamma}(t)
\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

(v) $t_1, t_2 \geq 0$ için

$$(f+g)_{*,\gamma}(t_1+t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1) + g_{*,\gamma}(t_2)$$

olduğunu göstereceğiz.

$$(f+g)_{*,\gamma}(t_1+t_2) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(f+g)(x)| > t_1+t_2\right\}\right|_\gamma$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)+g(x)| > t_1+t_2\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t_1\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |g(x)| > t_2\right\}$$

olduğu görülür. Her iki tarafın γ ölçüsü alındığında

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)+g(x)| > t_1+t_2\right\}\right|_\gamma &\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t_1\right\}\right|_\gamma \\
&\quad + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |g(x)| > t_2\right\}\right|_\gamma
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(f+g)_{*,\gamma}(t_1+t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1) + g_{*,\gamma}(t_2)$$

olduğu görülür.

(vi) $t_1, t_2 \geq 0$ için

$$(fg)_{*,\gamma}(t_1 t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1) + g_{*,\gamma}(t_2)$$

olduğunu göstereceğiz.

$$(fg)_{*,\gamma}(t_1 t_2) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |(fg)(x)| > t_1 t_2\right\}\right|_\gamma$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)\, g(x)| > t_1 t_2\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t_1\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |g(x)| > t_2\right\}$$

olduğu görülür. γ ölçüsüne geçtiğimiz taktirde

$$\begin{aligned}\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)\, g(x)| > t_1 t_2\right\}\right|_\gamma &\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t_1\right\}\right|_\gamma \\ &+ \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |g(x)| > t_2\right\}\right|_\gamma\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(fg)_{*,\gamma}(t_1 t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1) + g_{*,\gamma}(t_2)$$

elde edilir.

Tanım 2.3.2. $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $\gamma-$yeniden düzenlemesi

$$f_\gamma^*(t) = \inf\left\{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t\right\} \qquad \forall t \in [0, \infty)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdiki teorem $\gamma-$yeniden düzenlemenin temel özelliklerini vermektedir.

Teorem 2.3.1. $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) $s, t \geq 0$ için $f_{\gamma}^{*}(t) > s \Leftrightarrow f_{*,\gamma}(s) > t$ dir.

(ii) f ve f_{γ}^{*} eş ölçülebilirdir. Yani $\forall \lambda \geq 0$ için

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |f(x)| > \lambda\right\}\right|_{\gamma} = m\left(\left\{t \geq 0 : f_{\gamma}^{*}(t) > \lambda\right\}\right)$$

dır. Burada m Lebesgue ölçüsüdür.

(iii) $\forall t \geq 0$ için $|f|_{\gamma}^{*}(t) = f_{\gamma}^{*}(t)$ sağlanır.

(iv) $\mathbb{R}_{+}^{n}$ üzerinde h.h.y $f = g$ ise $[0, \infty)$ üzerinde $f_{\gamma}^{*} = g_{\gamma}^{*}$ gerçeklenir.

(v) f_{γ}^{*} azalan ve sağdan süreklidir.

(vi) $t \geq 0$ için $\left(f_{\gamma}^{*}\right)_{*}(t) = f_{*,\gamma}(t)$ eşitliği sağlanır.

(vii) $0 < p < \infty$ için $\left(|f|^{p}\right)_{\gamma}^{*}(t) = \left(f_{\gamma}^{*}(t)\right)^{p}$ dir.

(viii) A ölçülebilir bir küme ve $f \geq 0$ olmak üzere

$$\left(f\chi_{A}\right)_{\gamma}^{*}(t) \leq f_{\gamma}^{*}(t)\,\chi_{[0,|A|_{\gamma})}(t)\,,\ t \geq 0$$

dır.

İspat.

(i) İlk olarak $f_{\gamma}^{*}(t) > s \Rightarrow t < f_{*,\gamma}(s)$ olduğunu gösterelim.

$$f_{\gamma}^{*}(t) = \inf\left\{z \geq 0 : f_{*,\gamma}(z) \leq t\right\} > s$$

dir. $f_{*,\gamma}$ azalan fonksiyon olduğundan

$$t < \inf\{z \geq 0 : f_{*,\gamma}(z) \leq s\} \Rightarrow t < f_\gamma^*(s)$$

dir. Karşıt olarak

$$t < f_{*,\gamma}(s) \Rightarrow f_\gamma^*(t) > s$$

olduğunu gösterelim. $t < \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > s\right\}\right|_\gamma$ ve $f_{*,\gamma}$ azalan bir fonksiyon olduğundan

$$s < \inf\{z : f_{*,\gamma}(z) \leq t\} \Rightarrow s < f_\gamma^*(t)$$

dir.

(ii) (i) den

$$m\left(\left\{t \geq 0 : f_\gamma^*(t) > \lambda\right\}\right) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : f_{*,\gamma}(\lambda) \leq t\right\}\right|_\gamma$$

olduğu görülür.

(iii) $\gamma-$azalan yeniden düzenlemenin tanımından ve (i) den

$$f_\gamma^*(t) = \inf\{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t\} = \inf\left\{s \geq 0 : |f|_{*,\gamma}(s) \leq t\right\} = |f|_\gamma^*(t)$$

olduğu görülür.

(iv) Lemma 2.3.1 (ii) den

$$f_\gamma^*(s) = \inf\{t \geq 0 : f_{*,\gamma}(t) \leq s\} = \inf\{t \geq 0 : g_{*,\gamma}(t) \leq s\} = g_\gamma^*(s)$$

elde edilir.

(v) f_γ^* ın azalan olduğunu gösterelim. $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ için $t_1 > t_2$ olsun.
$f_\gamma^*(t_1) \leq f_\gamma^*(t_2)$ olduğunu göstereceğiz. Lemma 2.3.1 (iv) den $t_1 > t_2$ ise

$$f_{*,\gamma}(t_1) \leq f_{*,\gamma}(t_2)$$

olduğunu biliyoruz.

$$f_{\gamma}^{*}(t_1)=\inf\{s\geq 0: f_{*,\gamma}(s)\leq t_1\}$$

ve

$$\{s\geq 0: f_{*,\gamma}(s)\leq t_2\}\subset\{s\geq 0: f_{*,\gamma}(s)\leq t_1\}$$

olduğunu biliyoruz. Küme büyüdükçe infimum değeri küçüleceğinden

$$\inf\{s\geq 0: f_{*,\gamma}(s)\leq t_1\}\leq\inf\{s\geq 0: f_{*,\gamma}(s)\leq t_2\}$$

elde edilir. Buradan $f_{\gamma}^{*}(t_1)\leq f_{\gamma}^{*}(t_2)$ sağlanır.

Şimdi f_{γ}^{*} ın sağdan sürekli olduğunu gösterelim.
$t_1\geq t_2\geq ...\geq t_n...\geq t$, $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t$ olsun. $f_{\gamma}^{*}(t_n)\to f_{\gamma}^{*}(t)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\lim_{n\to\infty}f_{\gamma}^{*}(t_n)=\lim_{n\to\infty}\inf\{s\geq 0: f_{*,\gamma}(s)\leq t_n\}=\inf\{s\geq 0: f_{*,\gamma}(s)\leq t\}=f_{\gamma}^{*}(t)$$

olduğu görülür ve istenilen elde edilir.

(vi) $t\geq 0$ için $\left(f_{\gamma}^{*}\right)_{*}(t)=f_{*,\gamma}(t)$ olduğunu göstereceğiz. m, Lebesgue ölçüsü olmak üzere;

$$\begin{aligned}\left(f_{\gamma}^{*}\right)_{*}(t) &= m\left(\left\{s\geq 0: f_{\gamma}^{*}(s)>t\right\}\right)\\ &= m\left(\{s\geq 0: s<f_{*,\gamma}(t)\}\right)=m([0,f_{*,\gamma}(t))=f_{*,\gamma}(t)\end{aligned}$$

dir.

(vii) $0<p<\infty$ için $\left(|f|^{p}\right)_{\gamma}^{*}(t)=\left(f_{\gamma}^{*}(t)\right)^{p}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\left(|f|^{p}\right)_{\gamma}^{*}(t) &= \inf\left\{\lambda\geq 0: |f|_{*,\gamma}^{p}(\lambda)\leq t\right\}\\ &= \inf\left\{\lambda\geq 0: \left|\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}: |f(x)|^{p}>\lambda\right\}\right|_{\gamma}\leq t\right\},\ \lambda^{\frac{1}{p}}=v\\ &= \inf\left\{v^{p}\geq 0: \left|\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}: |f(x)|>v\right\}\right|_{\gamma}\leq t\right\}=\left(f_{\gamma}^{*}(t)\right)^{p}\end{aligned}$$

elde edilir.

(viii) $(f\chi_A)^*_\gamma(t) \leq f^*_\gamma(t)\,\chi_{[0,|A|_\gamma)}(t)\,,\; t \geq 0$ olduğunu göstereceğiz.

$\forall x \in \mathbb{R}^n_+$ için $(f\chi_A)(x) \leq f(x)$ dir. Buradan $(f\chi_A)_{*,\gamma}(t) \leq f_{*,\gamma}(t)\,,\; t \geq 0$ olur. Diğer taraftan

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(f\chi_A)(x)| > \lambda\right\}\right|_\gamma \leq |A|_\gamma \tag{2.3.1}$$

$$(f\chi_A)^*_\gamma(t) = 0, \quad t > |A|_\gamma \tag{2.3.2}$$

olduğu görülür. (2.3.1) ve (2.3.2) den $\forall t \geq 0$ için

$$(f\chi_A)^*_\gamma(t) \leq f^*_\gamma(t)\,\chi_{[0,|A|_\gamma)}(t)$$

elde ederiz.

Tanım 2.3.3 (** operatörü). $f^{**}_\gamma : (0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonu

$$f^{**}_\gamma(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*_\gamma(s)\,ds$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$f^*_\gamma(s) = \inf\left\{t \geq 0 : f_{*,\gamma}(t) \leq s\right\}$$

biçimindedir (Bennett and Sharpley 1988).

Teorem 2.3.2. $f, g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda f^{**} fonksiyonu için aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) f^{**}_γ, $(0,\infty)$ üzerinde azalan ve süreklidir.

(ii) $\forall t \geq 0$ için $f^*_\gamma(t) \leq f^{**}_\gamma(t)$ dir.

(iii) Hemen her $x \in \mathbb{R}_+^n$ için $|f(x)| \leq |g(x)|$ ise $\forall t \geq 0$ için $f_\gamma^{**}(t) \leq g_\gamma^{**}(t)$ dir.

İspat.

(i) İlk olarak f_γ^{**} ın sürekliliğini gösterelim. $\frac{1}{t} \in C(0,\infty)$, $\int\limits_0^t \varphi(s)\,ds \in C(0,\infty)$ ve sürekli iki fonksiyonun çarpımı da sürekli olduğundan $\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(s)\,ds \in C(0,\infty)$ ve buradan da $f_\gamma^{**}(t) \in C(0,\infty)$ olur.

Şimdi de f_γ^{**} ın azalan olduğunu gösterelim. $0 < t_1 < t_2$ keyfi sabitler olsun.

$$\begin{aligned}
f_\gamma^{**}(t_2) &= \frac{1}{t_2}\int\limits_0^{t_2} f_\gamma^*(s)\,ds = \frac{1}{t_2}\int\limits_0^{t_1} f_\gamma^*(s)\,ds + \frac{1}{t_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} f_\gamma^*(s)\,ds \\
&\leq \frac{1}{t_2}\int\limits_0^{t_1} f_\gamma^*(s)\,ds + \frac{1}{t_2} f_\gamma^*(t_1)(t_2-t_1) = \frac{1}{t_2}\int\limits_0^{t_1} f_\gamma^*(s)\,ds + \left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right) t_1 f_\gamma^*(t_1) \\
&\leq \frac{1}{t_2}\int\limits_0^{t_1} f_\gamma^*(s)\,ds + \left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)\int\limits_0^{t_1} f_\gamma^*(s)\,ds = \frac{1}{t_1}\int\limits_0^{t_1} f_\gamma^*(s)\,ds = f_\gamma^{**}(t_1)
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve buradan istenilen elde edilir.

(ii) f_γ^* fonksiyonu azalan olduğundan

$$f_\gamma^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\,ds \geq \frac{1}{t}\int\limits_0^t f_\gamma^*(t)\,ds = f_\gamma^*(t)$$

elde edilir.

(iii) $\forall t \geq 0$ için $f_\gamma^*(t) \leq g_\gamma^*(t)$ dir. Buradan da

$$f_\gamma^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\,ds \leq \frac{1}{t}\int\limits_0^t g_\gamma^*(s)\,ds = g_\gamma^{**}(t)$$

elde edilir.

Teorem 2.3.3. $t \geq 0$ olmak üzere $f_{*,\gamma}^{p}(t) = f_{*,\gamma}\left(t^{\frac{1}{p}}\right)$ eşitliği sağlanır.

İspat. f, $\mathbb{R}_{+}^{n}$ de ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $t \geq 0$ için

$$f_{*,\gamma}^{\ p}(t) = \left(\int\limits_{\{x:|f(x)|>t\}} x_n^{\gamma} dx \right)^{p} = \int\limits_{\{x:|f(x)|^p>t\}} x_n^{\gamma} dx = \int\limits_{\left\{x:|f(x)|>t^{\frac{1}{p}}\right\}} x_n^{\gamma} dx = f_{*,\gamma}\left(t^{\frac{1}{p}}\right)$$

elde edilir.

Lemma 2.3.2. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} |f(x)|^{p} x_n^{\gamma} dx = \int\limits_{0}^{\infty} \left(f_{\gamma}^{*}(t)\right)^{p} dt \tag{2.3.3}$$

eşitliği sağlanır (Safarov 2000).

İspat.

$$\begin{aligned} \left(|f(x)|^{p}\right)^{*}(t) &= \inf\left\{\lambda \geq 0 : \left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |f(x)|^{p} > \lambda\right\}\right|_{\gamma} \leq t\right\}, \quad \lambda^{\frac{1}{p}} = \nu \\ &= \inf\left\{\nu^{p} \geq 0 : \left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |f(x)| > \nu\right\}\right|_{\gamma} \leq t\right\} \\ &= \left(f_{\gamma}^{*}(t)\right)^{p} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} |f(x)|^{p} x_n^{\gamma} dx = \int\limits_{0}^{\infty} \left(|f_{\gamma}(t)|^{p}\right)^{*} dt = \int\limits_{0}^{\infty} \left(f_{\gamma}^{*}(t)\right)^{p} dt$$

ispat tamamlanır.

Lemma 2.3.3. Herhangi $t > 0$ için

$$\sup_{|E|_{\gamma}=t} \int\limits_{E} |f(x)| x_n^{\gamma} dx = \int\limits_{0}^{t} f_{\gamma}^{*}(s) ds \tag{2.3.4}$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma 2.3.4.
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)\, g(x)|\, x_n^{\gamma} dx \leq \int\limits_0^{\infty} f_{\gamma}^{*}(t)\, g_{\gamma}^{*}(t)\, dt$$

eşitsizliği geçerlidir .

İspat. Bu eşitsizliği basit fonksiyonlar için ispatlayıp basit fonksiyonların yoğunluğundan yararlanarak tüm fonksiyonlara genelleştireceğiz.

$$S(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_k > 0$$

olsun. Burada A_j ler ayrık kümelerdir.

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_i, \qquad \beta_j = \alpha_j - \alpha_{j+1}, \qquad \alpha_{k+1} = 0$$

olmak üzere

$$S(x) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{B_j}$$

yazabiliriz. Gerçekten

$$\begin{aligned} S(x) &= \beta_1 \chi_{B_1} + \beta_2 \chi_{B_2} + ... + \beta_k \chi_{B_k} \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2)\, \chi_{A_1} + (\alpha_2 - \alpha_3)\, \chi_{A_1 \cup A_2} + (\alpha_3 - \alpha_4)\, \chi_{A_1 \cup A_2 \cup A_3} \\ &\quad + ... + (\alpha_k - \alpha_{k+1})\, \chi_{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k} \\ &= \alpha_1 \chi_{A_1} - \alpha_2 \chi_{A_1} + \alpha_2 \chi_{A_1 \cup A_2} - \alpha_3 \chi_{A_1 \cup A_2} + \alpha_3 \chi_{A_1 \cup A_2 \cup A_3} \\ &\quad + ... + \alpha_k \chi_{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k} - \alpha_{k+1} \chi_{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k} \\ &= \alpha_1 \chi_{A_1} + \alpha_2 \chi_{A_2} + \alpha_3 \chi_{A_3} + ... + \alpha_n \chi_{A_n} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |s(x)\, g(x)|\, x_n^\gamma dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left|\sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{B_j}\right| |g(x)|\, x_n^\gamma dx = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \int\limits_{\beta_j} |g(x)|\, x_n^\gamma dx \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \beta_j \int\limits_0^{|\beta_j|_\gamma} g_\gamma^*(t)\, dt = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) \int\limits_0^{|\beta_j|_\gamma} g_\gamma^*(t)\, dt \\
&= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int\limits_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} g_\gamma^*(t)\, dt = \int\limits_0^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{[\gamma_{j-1},\gamma_j)}(t)\, g_\gamma^*(t)\, dt \\
&= \int\limits_0^{\infty} s^*(t)\, g_\gamma^*(t)\, dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{j} |A_i|_\gamma, \qquad \gamma_0 = 0$$

dır.

Aşağıdaki lemmada $T^y f$ genelleştirilmiş öteleme operatörü ve f nin $\gamma-$yeniden düzenlemesi arasındaki ilişki verilmektedir.

Lemma 2.3.5. Herhangi ölçülebilir $A \subset \mathbb{R}^n_+$ ve $y \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$\sup_{|A|_\gamma = t} \int\limits_A T^y |f(x)|\, x_n^\gamma dx = c_\gamma \int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\, ds$$

dir (Safarov 2000).

İspat. Lemma 2.2.3 ten

$$\int\limits_A T^y |f(x)|\, x_n^\gamma dx = c_\gamma \int\limits_{(y,0)+\overline{\mathcal{A}}} \left|\bar{f}(z, z_{n+1})\right| d\mu(z, z_{n+1}) \tag{2.3.5}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$\begin{aligned}\bar{f}(z, z_{n+1}) &= f\left(z', \sqrt{z_n^2 + z_{n+1}^2}\right) \quad , \quad z_{n+1} > 0 \\ d\mu(z, z_{n+1}) &= z_{n+1}^{\gamma-1} dz dz_{n+1}\end{aligned}$$

ile verilir. $\bar{f}(z, z_{n+1})$ fonksiyonu için (2.3.4) eşitliğini yazarsak

$$\sup_{\mu(\widetilde{A})=t} \int_{\widetilde{A}} \left|\tilde{f}(z, z_{n+1})\right| d\mu(z, z_{n+1}) = c_\gamma \int_0^t \left(\bar{f}\right)_\mu^* (s)\, ds \tag{2.3.6}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned}\left(\bar{f}\right)_\mu (s) &= \inf\left\{t > 0 : \mu_{\left(\bar{f}\right)_\mu}(t) \le s\right\} \\ &= \inf\left\{t > 0 : \mu\left(\left\{(z, z_{n+1}) : \left|\bar{f}(z, z_{n+1})\right| > t\right\}\right) \le s\right\}\end{aligned}$$

$$\mu\left((y, 0) + \widetilde{A}\right) = |A|_\gamma \qquad \text{ve} \qquad \left(\bar{f}\right)_\mu^* (s) = f_\gamma^* (s)$$

ile verilir.

$$\begin{cases} z' &= x' \\ z_n &= x_n \cos\alpha \\ z_{n+1} &= x_n \sin\alpha \end{cases}$$

dönüşümünü uygularsak

$$\mu\left(\left\{(z, z_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \left|\bar{f}(z, z_{n+1})\right| > t\right\}\right)$$

$$= \int_{\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\right\}} x_n^\gamma dx = \mu\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\right\} = f_{*,\mu}(t)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left(\bar{f}\right)_\mu^* (s) = \inf\{t > 0 : f_*(t) \le s\} = f_\gamma^* (s)$$

dir. (2.3.5) eşitliğinin her iki tarafından supremum alınırsa,

$$\begin{aligned}\sup_{|A|_\gamma=t}\int_A T^y\,|f(x)|\,x_n^\gamma dx &= c_\gamma \sup_{\mu(\widetilde{\mathcal{A}})=t}\int_{(y,0)+\widetilde{\mathcal{A}}}\left|\bar{f}(z,z_{n+1})\right|d\mu(z,z_{n+1}) \\ &= c_\gamma\int_0^t\left(\bar{f}\right)_\mu^*(s)\,ds = c_\gamma\int_0^t f_\gamma^*(s)\,ds\end{aligned}$$

eşitliğini (2.3.6) eşitliğini kullanarak elde ederiz. Böylece Lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.4. $1\le p\le\infty$, $f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun.

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} = \left\|f_\gamma^*\right\|_{L_p(0,\infty)}$$

eşitliği sağlanır (Safarov 2000).

İspat. Açıktır ki

$$\begin{aligned}\left\|f_\gamma^*\right\|_{L_p(0,\infty)}^p &= p\int_0^\infty t^{p-1}\left(f_{*,\gamma}\right)^*(t)\,dt = p\int_0^\infty t^{p-1}f_{*,\gamma}(t)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|^p\,x_n^\gamma dx = \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}^p.\end{aligned}$$

Teorem 2.3.5. $f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $1\le p<\infty$ olsun. Bu durumda

$$f_{*,\gamma}(t)\le\frac{1}{t^p}\int_{\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|f(x)|>t\right\}}|f(x)|^p\,x_n^\gamma dx,\quad t>0$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|f(x)|>t\right\}} |f(x)|^p x_n^\gamma dx &\geq t^p \int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|f(x)|>t\right\}} x_n^\gamma dx \\ &= t^p \left|\left\{x\in\mathbb{R}_+^n : |f(x)|>t\right\}\right|_\gamma = t^p f_{*,\gamma}(t)\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$f_{*,\gamma}(t) \leq \frac{1}{t^p}\|f\|_{L_{p,\gamma}}^p = \left(\frac{\|f\|_{L_{p,\gamma}}}{t}\right)^p, \quad t>0$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}_+^n : |f(x)|>t\right\}\right|_\gamma \leq \left(\frac{\|f\|_{L_{p,\gamma}}}{t}\right)^p$$

elde edilir.

Bu kesimde son olarak zayıf $L_{p,\gamma}$ yani $WL_{p,\gamma}$ uzayını tanımlayalım.

Tanım 2.3.4. $1\leq p<\infty$ olmak üzere zayıf $L_{p,\gamma}$ uzayı

$$WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \left\{f : \|f\|_{WL_{p,\gamma}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_\gamma^*(t) < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.3.6. $1\leq p<\infty$ olsun. $\forall f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için

$$\|f\|_{WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 2.3.4 ten ve f_γ^* fonksiyonunun azalanlığından

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} = \left\|f_\gamma^*\right\|_{L_p(0,\infty)} = \left(\int\limits_0^\infty \left(f_\gamma^*\right)^p(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int\limits_0^t \left(f_\gamma^*\right)^p(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \geq f_\gamma^*(t)\,t^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Buradan

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} \geq \|f\|_{WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}$$

elde edilir.

Lemma 2.3.7. $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty,\ \ \theta \in (0,1)$ ve $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$ olmak üzere

$$\|f\|_{WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} \leq \|f\|_{WL_{p_1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}^{1-\theta} \|f\|_{WL_{p_2,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}^{\theta}$$

sağlanır.

İspat. $WL_{p,\gamma}$ uzayındaki norm tanımından

$$\begin{aligned}
\|f\|_{WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} &= \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f_{\gamma}^{*}(t) = \sup_{t\in[0,\infty)} \left[t^{\frac{1}{p_1}} f_{\gamma}^{*}(t)\right]^{1-\theta} \left[t^{\frac{1}{p_2}} f_{\gamma}^{*}(t)\right]^{\theta} \\
&= \|f\|_{WL_{p_1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}^{1-\theta} \|f\|_{WL_{p_2,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}^{\theta}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. MAKSİMAL FONKSİYON VE RIESZ POTANSİYELİ

Maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır.

Burada klasik maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli tanımlanıp bunların varlık ve sınırlılık özellikleri incelenecektir.

3.1 Maksimal Fonksiyon

f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde hemen her x için integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Temel Lebesgue Teoremi'ne göre

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m\left(B\left(x,r\right)\right)} \int\limits_{B(x,r)} f\left(y\right) dy = f\left(x\right)$$

ifadesi hemen her x için geçerlidir, burada

$$B(x,r) = \{y \,\epsilon R^n : |x-y| < r\}$$

x merkezli r yarıçaplı açık yuvardır. Yukarıdaki limit yerine supremum ve f yerine $|f|$ alınarak f nin maksimal fonksiyonu tanımlanır.

Maksimal fonksiyon $\mathbb{R}^n$ nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy Littlewood tarafından tanımlanmış ve Wiener tarafından $n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir (Stein 1970).

Tanım 3.1.1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f nin maksimal fonksiyonu;

$$Mf\left(x\right) = \sup_{r>0} \frac{1}{m\left(B\left(x,r\right)\right)} \int\limits_{B(x,r)} \left|f\left(y\right)\right| dy$$

biçiminde tanımlanır.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir g fonksiyonunun $m\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \alpha\}$ dağılım fonksiyonunu göz önüne alalım ve bunu da $g_*(\alpha)$ ile gösterelim. Yani

$$m\{x : |g(x)| > \alpha\} = g_*(\alpha)$$

olsun. $g \in L_p$ iken

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |g(y)|^p \, dy = -\int\limits_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha)$$

sağlanır. Gerçekten $\int\limits_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha)$ integraline kısmi integrasyon uygularsak;

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha) &= \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^p g_*(\alpha) - \int\limits_0^\infty g_*(\alpha)\, p\alpha^{p-1} d\alpha = -\int\limits_0^\infty g_*(\alpha)\, p\alpha^{p-1} d\alpha \\
&= -\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \chi\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\}\, dx d\alpha^p \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_0^\infty \chi\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\}\, d\alpha^p dx \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R}^n_+ : |g(x)|>\lambda\right\}} d\alpha^p dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_0^{|g(x)|} d\alpha^p dx \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_0^{|g(x)|} p\alpha^{p-1} d\alpha dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left\{ p\frac{\alpha^p}{p} \Big|_0^{|g(x)|} \right\} dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |g(x)|^p \, dx
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve istenilen eşitlik elde edilir.

Teorem 3.1.1. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

(i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \le \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sınırlıdır.

(ii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall \alpha > 0$ için

$$m\{x : Mf(x) > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|\, dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür.

(iii) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir (Stein 1970).

İspat. Öncelikle teoremin (ii) ifadesini ispatlayalım. $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$ olsun. $\forall x \in E_\alpha$ için $B_x = B(x, r)$, x merkezli yuvarı E_α da bulunsun. Bu durumda

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_x)} \int\limits_{B_x} |f(y)|\, dy$$

olduğundan

$$Mf(x) > \alpha \Rightarrow \int\limits_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha m(B_x) \tag{3.1.1}$$

elde edilir. Buradan $m(B_x) < \frac{1}{\alpha}\|f\|_1$ elde ederiz. $\{B_k\}$, E_α da bulunan ayrık yuvarların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(B_k) \geq cm(E_\alpha) \tag{3.1.2}$$

olur. (3.1.1) eşitsizliğinde B_x yerine $\bigcup\limits_k B_k$ alınırsa bu durumda

$$\int\limits_{\bigcup\limits_k B_k} |f(y)|\, dy > \alpha \sum_k m(B_k) \geq \alpha cm(E_\alpha)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|\, dy > \alpha c m(E_\alpha)$$

elde edilir ki buradan $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$ yerine yazılırsa

$$m\{x : Mf(x) > \alpha\} < \frac{1}{\alpha c} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|\, dy$$

olduğu görülür. Burada $A = 1/c$ seçilirse (ii) ispatlanır.

Şimdi $1 \leq p \leq \infty$ için (i) ve (iii) ifadelerini ispatlayalım. $\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |Mf|^p\, dx$ in sonlu olduğunu gösterelim. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir $g(x)$ fonksiyonunun dağılım fonksiyonu

$$g_*(\alpha) = m\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \alpha\}$$

ile tanımlanır. $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ iken

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |g(y)|\, dy = -\int\limits_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha)$$

dır. Şimdi

$$m(E_\alpha) = m\{x : |Mf(x)| > \alpha\} = g_*(\alpha)$$

alınırsa

$$\|Mf\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (Mf)^p\, dx = p\int\limits_0^\infty \alpha^{p-1} m(E_\alpha)\, d\alpha \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Bu integrali hesaplayabilmek için $m(E_\alpha)$ için bir eşitsizlik elde edelim. Bunun için f_1 fonksiyonunu

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0 & , \quad |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

$$|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow Mf(x) \leq Mf_1(x) + \frac{\alpha}{2}$$

sağlanır. Buradan

$$m(E_\alpha) = m\{x : |Mf(x)| > \alpha\} \subset m\left\{x : Mf_1(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$m(E_\alpha) \leq m\left\{x : Mf_1(x) > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{2A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f_1(x)\, dx$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$m(E_\alpha) \leq \frac{2A}{\alpha} \int\limits_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f(x)|\, dx$$

eşitsizliği sağlanır. Bu son eşitsizliği (3.1.3) te yerine yazarsak

$$\|Mf\|_p^p = p \int\limits_0^\infty \alpha^{p-1} m(E_\alpha)\, d\alpha \leq p \int\limits_0^\infty \alpha^{p-1} \left(\int\limits_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f(x)|\, dx \right) d\alpha$$

elde edilir. Bu iki integralin değerini hesaplamak için integrasyon sırasını değiştirelim. İlk integrali α ya göre alırız. İçteki integral $p > 1$ olduğundan

$$\int\limits_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} d\alpha = \frac{1}{p-1} |2f(x)|^{p-1}$$

olur. Katlı integralin değeri

$$\frac{2A_p}{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f|\, |2f|^{p-1}\, dx = (A_p)^p \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f|^p\, dx$$

olarak elde edilir. Böylece teoremin (iii) ifadesi ispatlanmış olur. Burada A_p;

$$A_p = 2\left(\frac{5^p p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 < p < \infty$$

ile verilir.

3.2 Riesz Potansiyeli

f yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

biçiminde tanımlanır. Laplasyenin Fourier dönüşümü

$$(-\Delta f)^{\hat{}}(x) = (2\pi |x|)^2 \hat{f}(x) \tag{3.2.1}$$

şeklindedir. (3.2.1) ifadesinde kuvvetteki 2 yerine β alınırsa bu durumda Laplasyenin kesirli kuvveti aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} f\right)^{\hat{}}(x) = (2\pi |x|)^{\beta} \hat{f}(x)$$

β kuvvetinin, $-n < \beta < 0$, negatif olması özel bir öneme sahiptir. Bundan dolayı (3.2.1) operatörünü integral operatörü olarak ifade edebiliriz. Yani basit bir notasyon değişikliğiyle;

$$I_\alpha(f) = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}(f), \qquad 0 < \alpha < n$$

yazabiliriz, burada

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_+^n} |x-y|^{-n+\alpha} f(y)\, dy$$

ve

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

ile verilir. I_α operatörüne Riesz Potansiyeli denir.

Teorem 3.2.1 (Riesz Potansiyeli için Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi).

$0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

(i) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |x-y|^{-n+\alpha} f(y)\, dy$$

integrali hemen her x için mutlak yakınsaktır.

(ii) Eğer ek olarak $p > 1$ ise bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir.

(iii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$m\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\} \leq \left(\frac{A\|f\|_1}{\lambda}\right)^q$$

dır (Stein 1970).

İspat. $K(x) = |x|^{-n+\alpha}$ olsun. $f \to I_\alpha f$ dönüşümü yerine $f \to K * f$ dönüşümünü göz önüne alalım (iki dönüşüm arasında bir sabitle çarpım kadar fark vardır). K yı $K_1 + K_2$ olarak ayrıştıralım. Burada

$$K_1(x) = \begin{cases} K(x) & , \ |x| \leq \mu \\ 0 & , \ |x| > \mu \end{cases} \qquad K_2(x) = \begin{cases} K(x) & , \ |x| > \mu \\ 0 & , \ |x| \leq \mu \end{cases}$$

biçimindedir. Buradan

$$K * f = K_1 * f + K_2 * f$$

elde edilir. Şimdi $K_1 * f$ ve $K_2 * f$ nin sınırlı olduğunu gösterirsek $K * f$ nin sınırlı olduğunu, dolayısıyla $I_\alpha f$ nin sınırlı olduğunu göstermiş oluruz.

$$\begin{aligned}(K_1 * f)(x) &= \int\limits_{|x|\leq\mu} K(x-t) f(t)\,dt = \int\limits_{|x|\leq\mu} |x-t|^{-n+\alpha} f(t)\,dt \\ &\leq \|f\|_p \int\limits_{|x|\leq\mu} |x-t|^{-n+\alpha}\,dt < \infty\end{aligned}$$

$$(K_2 * f)(x) = \int\limits_{|x|>\mu} K(x-t) f(t)\,dt = \int\limits_{|x|>\mu} |x-t|^{-n+\alpha} f(t)\,dt$$

dir. p' ile p nin dualini gösterelim. Hölder eşitsizliğinden

$$(K_2 * f)(x) = \int\limits_{|x|\geq\mu} |x-t|^{-n+\alpha} f(t)\,dt \leq \left[\int\limits_{|x|\geq\mu} \left(|x-t|^{-n+\alpha}\right)^{p'} dt\right]^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p$$

ve

$$\int\limits_{|x|\geq\mu} \frac{1}{\left(|t|^{n-\alpha}\right)^{p'}} dt < \infty, \qquad (-n+\alpha)\,p' < -n$$

elde edilir. Böylece teoremin (i) ifadesi ispatlanmış olur. Şimdi (iii) yi ispatlayalım.

$$\begin{aligned}(I_\alpha f)(x) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |x-y|^{-n+\alpha} f(y)\,dy \qquad (y \text{ yerine } x+y \text{ yazılırsa}) \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |y|^{-n+\alpha} f(x+y)\,dy = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{|y|\leq\alpha} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{|y|>\alpha} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \\ &= (I_{\alpha_1} f)(x) + (I_{\alpha_2} f)(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\{x : |(I_\alpha f)(x)| > 2\lambda\} \subset \{x : |(I_{\alpha_1} f)(x)| > \lambda\} \cup \{x : |(I_{\alpha_2} f)(x)| > \lambda\}$$

olduğundan

$$m\left\{x:\left|\left(I_{\alpha}f\right)(x)\right|>2\lambda\right\}\leq m\left\{x:\left|\left(I_{\alpha_1}f\right)(x)\right|>\lambda\right\}+m\left\{x:\left|\left(I_{\alpha_2}f\right)(x)\right|>\lambda\right\}$$

ve

$$\begin{aligned} m\left\{x:\left|\left(I_{\alpha_1}f\right)(x)\right|>\lambda\right\} &= \int\limits_{\left\{x:\left|I_{\alpha_1}f(x)\right|>\lambda\right\}} 1^p dx \leq \int\limits_{\left\{x:\left|I_{\alpha_1}f(x)\right|>\lambda\right\}} \left|\frac{I_{\alpha_1}f(x)}{\lambda}\right|^p dx \\ &= \frac{1}{\lambda^p}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|I_{\alpha_1}f(x)\right|^p dx = \frac{1}{\lambda^p}\left\|I_{\alpha_1}f\right\|_p^p \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$m\left\{x:\left|\left(I_{\alpha_1}f\right)(x)\right|>\lambda\right\}\leq\frac{1}{\lambda^p}\left\|I_{\alpha_1}f\right\|_p^p=\frac{1}{\lambda^p}A\left\|K_1*f\right\|_p^p\leq\frac{A}{\lambda^p}\left\|K_1\right\|_1\left\|f\right\|_p$$

elde edilir. Buradan

$$\left\|K_1\right\|_1=\int\limits_{|x|\leq\mu}|x|^{-n+\alpha}dx=w_n\int\limits_0^{\mu}r^{-n+\alpha}r^{n-1}dr=B\mu^{\alpha}$$

$$m\left\{x:\left|I_{\alpha_1}f(x)\right|>\alpha\right\}\leq\frac{B\mu^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}}\left\|f\right\|_p$$

ise

$$m\left\{x:\left|I_{\alpha_1}f(x)\right|>\alpha\right\}\leq\frac{A'}{\lambda^{\alpha}}\left\|K_2\right\|_1\left\|f\right\|_p^p$$

dir.

$$\left\|K_2*f\right\|_{\infty}\leq\left\|K_2\right\|_{p'}\left\|f\right\|_p$$

$$\left\|K_2\right\|_{p'}=\left(\int\limits_{|x|\geq\mu}\left(|x|^{-n+\alpha}\right)^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}=c_1\mu^{-\frac{n}{q}}$$

ve $\left\|K_2\right\|_{p'}=\lambda$, $c_1\mu^{-\frac{n}{q}}=\lambda$ seçersek $\left\|K_2*f\right\|_{\infty}\leq\lambda$ ve böylece $m\left\{x:\left|K_1*f\right|>\lambda\right\}=0$ olur. Bu durumda

$$m\left\{x:\left|I_{\alpha}f(x)\right|>2\lambda\right\}\leq\frac{B\mu^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}}\left\|f\right\|_p=\left(\frac{B\mu^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}}\right)^p=B_2\left(\frac{\left\|f\right\|_p}{\lambda}\right)^q$$

elde edilir ve (iii) ifadesi ispatlanmış olur.

Şimdi (ii) yi ispatlayalım. İspatı yaparken, Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi'nden yararlanacağız. (iii) den dolayı I_α zayıf $(1, q_0) = \left(1, \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}}\right)$ tipli operatördür.

$(p_1, q_1) = \left(p_1, \frac{1}{\frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}}\right)$ tipli operatör, (p_0, p_1), (q_0, q_1) sayılarını Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi'ne uygun olarak seçelim. I_α zayıf (p_0, q_0) ve (p_1, q_1) tipli operatördür. Bu durumda Marcinkiewicz Teoremi'nden

$$0 < \theta < 1 \text{ ve } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

olmak üzere I_α kuvvetli (p, q) tipli operatördür.

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} = (1-\theta)\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) + \theta\left(\frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}\right) \\ &= 1 - \theta - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{n}\theta + \frac{\theta}{p_1} - \theta\frac{\alpha}{n} = 1 - \theta - \frac{\alpha}{n} + \frac{\theta}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \end{aligned}$$

olduğundan Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoreminden

$$\|I_\alpha f\|_q \leq c\,\|f\|_p\,, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4. $B-$MAKSİMAL FONKSİYON VE $B-$RIESZ POTANSİYELİ

Bu bölümde Guliyev (2003) tarafından tanımlanan $M_{\gamma}f$ $B-$maksimal fonksiyonu ve Gadjiev ve Aliev (1988) tarafından tanımlanan $I_{\alpha,\gamma}f$ $B-$Riesz potansiyeli tanımlanıp bunların varlık ve sınırlılık özellikleri incelenecektir.

4.1 $B-$Maksimal Fonksiyon

Tanım 4.1.1. $f:\mathbb{R}_{+}^{n}\rightarrow\mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$M_{\gamma}f\left(x\right)=\sup_{r>0}\frac{1}{\left|E\left(0,r\right)\right|_{\gamma}}\int\limits_{E(0,r)}T^{y}\left|f\left(x\right)\right|y_{n}^{\gamma}dy$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $B-$maksimal fonksiyon denir (Guliyev 2003).

Teorem 4.1.1.

(i) $f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ve $\forall\alpha>0$ için

$$\left|\left\{x:M_{\gamma}f\left(x\right)>\alpha\right\}\right|_{\gamma}\leq\frac{c}{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}\left|f\left(x\right)\right|x_{n}^{\gamma}dx$$

dir. Burada $c>0$ dır ve f den bağımsızdır.

(ii) $f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$, $1<p\leq\infty$ için $M_{\gamma}f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}\right)$ ve

$$\left\|M_{\gamma}f\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R})}\leq c_{p}\left\|f\right\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)},\qquad c_{p}>0$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. İlk olarak homojen tipli bir uzay üzerinde tanımlı bir maksimal fonksiyon tanımlayacağız. Teoremin ispatını bu fonksiyonun sınırlılığını kullanarak elde edeceğiz. (X,ρ,μ) homojen tipli bir topolojik uzay olsun. Bu durumda ρ bir sürekli bir psedo metriktir ve μ, $\mu(E(x,2r)) \leq C\mu(E(x,r)$ koşulunu sağlayan bir ölçüdür.

X homojen uzayı üzerinde $E(x,r) = \{y \in R_+^n : |x-y| < r\}$ olmak üzere; maksimal fonksiyon

$$M_\mu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(E(x,r))} \int_{E(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

biçiminde tanımlanır.

M_μ operatörünün zayıf $(1,1)$ tipinden olduğu ve $L_p(X, d\mu)$ üzerinde sınırlı olduğu bilinmektedir. Bu sonucu $X = R_+^n$, $\rho = |x-y|$ ve $d\mu(x) = x_n^\gamma dx$ durumu içn kullanacağız. Eğer $M_\gamma f(x) \leq cM_\mu f(x)$ olduğunu gösterirsek M_γ fonksiyonunun $(1,1)$ zayıf tipinden olduğu ve aynı şekilde $L_{p,\gamma}(R_+^n)$ üzerinde sınırlı olduğu görülür.

Aşağıda teoremin ispatında kullanacağımız bazı eşitsizlikler elde edilmiştir.

$$\mu(E(x,r)) = |E(x,r)|_\gamma = \int_{\left\{y \in \mathbb{R}_+^n : |x-y| < r\right\}} y_n^\gamma dy \leq cr^{n+\gamma} \max\left\{1, \left(\frac{x_n}{r}\right)^\gamma\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$|E(x,r)|_\gamma \leq cr^{n+\gamma} \max\left\{1, \left(\frac{x_n}{r}\right)^\gamma\right\}$$

elde ederiz. Şimdi $T^y \chi_{E_+(0,r)}(x)$ için bir eşitsizlik elde edeceğiz.

$$T^y f(x) = \pi^{\frac{-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\pi f\left(x' - y', ..., \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha_n + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha$$

den dolayı

$$
\begin{aligned}
T^{y}\chi_{E(0,r)}(x) &\leq c \int\limits_{\left\{\alpha\in(0,\pi):\left(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2\right)<r^2\right\}} \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&= c\prod_{i=1}^{n} \int\limits_{\left\{\alpha\in(0,\pi):\left(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2\right)<r^2\right\}} \sin^{\gamma-2}\alpha\, d\cos\alpha \\
&= c \int\limits_{\max\left\{-1,\frac{x_n^2+y_n^2-r^2}{2x_ny_n}\right\}} \left(1-t^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1} dt \\
&\leq c\min\left\{1,\frac{r^{\frac{\gamma}{2}}\left(r-|x_n-y_n|\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(x_ny_n\right)^{\frac{\gamma}{2}}}\right\} \leq c\min\left\{1,\left(\frac{r}{x_n}\right)^{-\gamma}\right\}
\end{aligned}
$$

dir. Sonuç olarak, $c>0$, $x\in\mathbb{R}_{+}^{n}$, $r>0$ ve $y\in E(x,r)$

$$
T^{y}\chi_{E(0,r)}(x) \leq c\min\left\{1,\left(\frac{r}{x_n}\right)^{\gamma}\right\}
$$

bulunur.

$$
M_{\gamma}f(x) \leq \sup_{\substack{r>x_j,j=\overline{1,k}\\ r\leq x_j,,j=\overline{k+1,n}\\ i_j\neq i_p,j\neq p}} |E(0,r)|_{\gamma}^{-1} \int\limits_{E(x,r)} |f(y)|\, T^{y}\chi_{E(0,r)}(x)\, y^{\gamma}dy
$$

burada

$$
M_{\gamma,0}f(x) = \sup_{r\leq x_j,,j=\overline{1,n}} |E_{+}(0,r)|_{\gamma}^{-1} \int\limits_{E_{+}(x,r)} |f(y)|\, T^{y}\chi_{E_{+}(0,r)}(x)\, y^{\gamma}dy
$$

ile verilir.

$$
M_{\gamma,n}f(x) = \sup_{r>x_j,,j=\overline{1,n}} |E_{+}(0,r)|_{\gamma}^{-1} \int\limits_{E(x,r)} |f(y)|\, T^{y}\chi_{E_{+}(0,r)}(x)\, y^{\gamma}dy
$$

Genelliği kaybetmeden $i_j\equiv j$, $j=1,2,...,n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$
M_{\gamma}f(x) = \sup_{\substack{r>x_j,,j=\overline{1,k}\\ r\leq x_j,,j=\overline{k+1,n}}} |E(0,r)|_{\gamma}^{-1} \int\limits_{E(x,r)} |f(y)|\, T^{y}\chi_{E(0,r)}(x)\, y^{\gamma}dy
$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\mu\left(E\left(x,r\right)\right) \leq cr^{n+\gamma}, \qquad \left|E\left(0,r\right)\right|_{\gamma} = r^{n+\gamma}$$

ve

$$T^{y}\chi_{E(0,r)}\left(x\right) \leq 1$$

olduğundan

$$\mu\left(E(x,r) \leq cr^{n+\gamma} \max\left\{1, \left(\frac{x_n}{r}\right)^{\gamma}\right\} = cr^{n+\gamma}\left(\frac{x_n}{r}\right)^{\gamma}\right.$$

dir. Buradan

$$T^{y}\chi_{E(0,r)} \leq c \min\left\{1, \left(\frac{r}{x_n}\right)^{\gamma}\right\} = \left(\frac{r}{x_i}\right)^{\gamma_i}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} M_{\gamma}f\left(x\right) &\leq c \sup_{\substack{r>x_j,,j=\overline{1,k} \\ r\leq x_j,,j=\overline{k+1,n}}} \left|E\left(0,r\right)\right|_{\gamma}^{-1} r^{n+\gamma}\left(\frac{x_n}{r}\right)^{\gamma}\left(\frac{r}{x_n}\right)\frac{1}{\mu\left(E\left(x,r\right)\right)}\int\limits_{E(x,r)}\left|f\left(y\right)\right| y_n^{\gamma}\, dy \\ &\leq cM_{\mu}f\left(x\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.2 $B-$Riesz Potansiyeli

Tanım 4.2.1. $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ olsun. Bu durumda $B-$Riesz Potansiyeli

$$I_{\alpha,\gamma}f\left(x\right) = \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} T^{y}\left|x\right|^{\alpha-n-\gamma} f\left(y\right) y_n^{\gamma} dy \qquad 0<\alpha<n+\gamma$$

şeklinde tanımlanır.

$B-$Riesz Potansiyeli, Riesz Potansiyelindeki adi öteleme yerine genelleştirilmiş öteleme operatörü alınarak Gadjiev ve Aliev (1988) tarafından tanımlanmıştır.

Teorem 4.2.1. $0<\alpha<n+\gamma$, $1\leq p<\frac{n+\gamma}{\alpha}$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun.

(i) Eğer $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ise $I_{\alpha,\gamma}$ integrali hemen her yerde mutlak yakınsaktır.

(ii) $1 < p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$ olmak üzere eğer $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ise $I_{\alpha,\gamma} f \in L_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ ve

$$\|I_{\alpha,\gamma}\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R})} \leq c_p \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}, \qquad c_p > 0$$

eşitsizliği sağlanır.

(iii) $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olmak üzere eğer $f \in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ise

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : I_{\alpha,\gamma} f(x) > \beta\right\}\right|_{\gamma} \leq \left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}\right)^{q}, \quad \beta > 0$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

(i) $f_1(x) = f(x)\chi_{E_+(0,1)}$, $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$ olsun. Bu durumda

$$I_{\alpha,\gamma} f(x) = I_{\alpha,\gamma} f_1(x) + I_{\alpha,\gamma} f_2(x) = J_1(x) + J_2(x)$$

olur. Buradan

$$|J_1(x)| \leq \int\limits_{E_+(0,1)} |y|^{\alpha-n-\gamma} T^y f(x)\, y^\gamma dy$$

$$|J_1(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} |y|^{\alpha-n-\gamma} \chi_{E_+(0,1)}(y)\, T^y |f(x)|\, y^\gamma dy$$

elde edilir. Young eşitsizliğinden;

$$\|J_1(.)\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} \leq c \left\||.|^{\alpha-n-\gamma}\chi_{E_+(0,1)}\right\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eşitsizliğin sağ tarafındaki norm

$$\left\| |.|^{\alpha-n-\gamma} \chi_{E_+(0,1)} \right\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} = \int\limits_{E_+(0,1)} |y|^{\alpha-n-\gamma} y^\gamma dy = c \int\limits_0^1 r^{\alpha-1} dr = c_1 < \infty$$

yerine yazılırsa, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için

$$\|J_1(.)\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq c \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} |J_2(x)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus E_+(0,1)} |y|^{\alpha-n-\gamma} T^y |f(x)| y^\gamma dy \\ &\leq \|T^x |f(.)|\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus E_+(0,1)} |y|^{(\alpha-n-\gamma)p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca

$$\|T^x f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

olduğundan

$$|J_2(x)| \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus E_+(0,1)} |y|^{(\alpha-n-\gamma)p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

sağlanır. Böylece $1 \leq p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$, $c > 0$ için $x \in \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere

$$|J_2(x)| \leq c \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

elde edilir.

Sonuç olarak; keyfi $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $1 \leq p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$ için $I_{\alpha,\gamma} f(x)$, $B-$Riesz Potansiyeli hemen her $x \in \mathbb{R}_+^n$ için mutlak yakınsaktır.

(ii)

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\gamma}f(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y |x|^{\alpha-n-\gamma} f(y)\, y^\gamma dy \\ &= \left(\int\limits_{E_+(0,t)} + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \backslash E_+(0,t)} \right) T^y f(x)\, |y|^{\alpha-n-\gamma} y^\gamma dy \\ &= A(x,t) + C(x,t) \end{aligned}$$

olsun. Her $k<0$ için toplam alırsak

$$\begin{aligned} |A(x,t)| &\leq \int\limits_{E_+(0,t)} |T^y f(x)|\, |y|^{\alpha-n-\gamma} y^\gamma dy = \sum_{k=-\infty}^{-1} \int\limits_{2^k t \leq |y| \leq 2^{k+1} t} |T^y f(x)|\, |y|^{\alpha-n-\gamma} y^\gamma dy \\ &\leq c \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(2^k t\right)^{\alpha-n-\gamma} \int\limits_{2^k t \leq |y| \leq 2^{k+1} t} |T^y f(x)|\, y^\gamma dy \leq c t^\gamma (M_B f)(x) \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada f, x ve t den bağımsızdır.

Şimdi $C(x,t)$ ifadesi için bir eşitsizlik elde edelim.

$$C(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \backslash E_+(0,t)} T^y f(x)\, |y|^{\alpha-n-\gamma} y^\gamma dy$$

biçimindedir. Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} |C(x,t)| &\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n \backslash E_+(0,t)} |T^y f(x)|^p y^\gamma dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n \backslash E_+(0,t)} |y|^{(\alpha-n-\gamma)p'} y^\gamma dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \|T^y f\|_{L_{p,\gamma}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n \backslash E_+(0,t)} |y|^{(\alpha-n-\gamma)p'} y^\gamma dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq c t^{-\frac{(n+\gamma)}{q}} \|f\|_{L_{p,\gamma}} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece

$$\left|I_{\alpha,\gamma}f\left(x\right)\right|\leq c\left(t^{\alpha}M_{\gamma}f\left(x\right)+t^{-\frac{(n+\gamma)}{q}}\left\|f\right\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}\right)$$

$$t=\left[\left(M_{\gamma}f\left(x\right)\right)^{-1}\left\|f\right\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}\right]^{\frac{p}{n+\gamma}}$$

alınırsa

$$\left|I_{\alpha,\gamma}f\left(x\right)\right|\leq c\left(M_{\gamma}f\left(x\right)\right)^{\frac{p}{q}}\left\|f\right\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}^{1-\frac{p}{q}}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\int\limits_{E_{+}(0,t)}\left|I_{\alpha,\gamma}f\left(y\right)\right|^{q}y^{\gamma}dy\leq c\left\|f\right\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}^{q-p}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}\backslash E_{+}(0,t)}\left(M_{\gamma}f\left(x\right)\right)^{p}y^{\gamma}dy\leq c\left\|f\right\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}^{q}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

(iii) $f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ olsun.

$$\left|\left\{x:\left|I_{\alpha,\gamma}f\left(x\right)\right|>2\beta\right\}\right|_{\gamma}\leq\left|\left\{x:\left|A\left(x,t\right)\right|>\beta\right\}\right|_{\gamma}+\left|\left\{x:\left|C\left(x,t\right)\right|>\beta\right\}\right|_{\gamma}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.2.1) eşitliğini Teorem 4.1.1 e uygularsak

$$\beta\left|\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\left|A\left(x,t\right)\right|>\beta\right\}\right|_{\gamma}=\beta\int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\left|A(x,t)\right|>\beta\right\}}x^{\gamma}dx\leq\beta\int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:ct^{\alpha}M_{\gamma}f(x)>\beta\right\}}x^{\gamma}dx$$

$$=\beta\left|\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:M_{\gamma}f\left(x\right)>\tfrac{\beta}{ct^{\alpha}}\right\}\right|_{\gamma}\leq\beta\frac{c_{1}t^{\alpha}}{\beta}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}\left|f\left(x\right)\right|x^{\gamma}dx=c_{1}t^{\alpha}\left\|f\right\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\left|C\left(x,t\right)\right| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}\backslash E_{+}(0,t)}\left|T^{y}f\left(x\right)\right|\left|y\right|^{\alpha-n-\gamma}y^{\gamma}dy\\ &\leq t^{\alpha-n-\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}\backslash E_{+}(0,t)}\left|T^{y}f\left(x\right)\right|y^{\gamma}dy=t^{-\frac{(n+\gamma)}{q}}\left\|f\right\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$t^{-\frac{(n+\gamma)}{q}} \|f\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} = \beta$$

alınırsa $|C(x,t)| \leq \beta$ sağlanır. Sonuç olarak

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |I_{\alpha,\gamma} f(x)| > \beta\right\}\right|_{\gamma} = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |I_{\alpha,\gamma} f(x)| > 2\beta\right\}\right|_{\gamma} &\leq \frac{c_1}{\beta} t^{\alpha} \|f\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} \\ &= c_1 t^{n+\gamma} = c_1 \beta^{-q} \|f\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}^{q} = \frac{c}{\beta} \|f\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}^{q} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f \to I_{\alpha,\gamma} f$ operatörü zayıf $(1,q)$ tipindendir.

5. LAPLACE-BESSEL DİFERENSİYEL OPERATÖRÜNE KARŞILIK GELEN GENELLEŞTİRİLMİŞ MAKSİMAL FONKSİYON VE GENELLEŞTİRİLMİŞ RIESZ POTANSİYELİ

Bu bölümde $B-$konvolüsyon için O'Neil tipinden bir eşitsizlik ispat edilecek bu eşitsizlik yardımıyla Laplace-Bessel diferensiyel operatörüne karşılık gelen (rough) kaba çekirdekli kesirli maksimal fonksiyon (genelleştirilmiş kesirli $B-$maksimal fonksiyon) ve kesirli integral (genelleştirilmiş $B-$kesirli integral) operatörlerinin sınırlılığı ispat edilecektir.

Aşağıdaki Hardy eşitsizlikleri ana sonuçlarımızın ispatında önemli bir yere sahiptir.

Lemma 5.1. $1 < p \leq q < \infty$ olsun. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde φ fonksiyonundan bağımsız bir c sabiti vardır.

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \varphi(s)\, ds\right)^q \omega(t)\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_0^\infty \varphi(t)^p \nu(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Leftrightarrow K = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty \omega(t)\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r \nu(t)^{1-p'}\, dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \tag{5.1}$$

Burada $p + p' = pp'$ dir. Ayrıca (5.1) yi sağlayan en iyi c sabiti ise

$$K \leq c \leq k(p,q)\, K \tag{5.2}$$

dir. (5.2) deki $k(p,q)$ sabiti,

$$k(p,q) = p^{\frac{1}{q}} (p')^{\frac{1}{p'}}, \quad k(p,q) = q^{\frac{1}{q}} (q')^{\frac{1}{p'}} \quad \text{veya} \quad k(p,q) = \left(1 + \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

gibi çeşitli biçimlerde verilir (Mazya1985).

Lemma 5.2. $1 < p \leq q < \infty$, ν ve ω ölçülebilir, $(0, \infty)$ üzerinde pozitif iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde φ fonksiyonundan bağımsız bir c sabiti vardır.

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\varphi(s)\,ds\right)^q\omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\leq c\left(\int_0^\infty\varphi(t)^p\,\nu(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Leftrightarrow K_1=\sup_{r>0}\left(\int_0^r\omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_r^\infty\nu(t)^{1-p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty \tag{5.3}$$

(5.3) ü sağlayan en iyi c sabiti $K_1\leq c\leq k(p,q)\,K_1$ aralığındadır (Mazya 1985).

5.1 $B-$Konvolüsyonun $\gamma-$Yeniden Düzenlemesi İçin O'Neil Tipli Eşitsizlik

Aşağıdaki teoremde $B-$konvolüsyonun $\gamma-$yeniden düzenlenmesi için O'Neil tipli eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 5.1.1. f ve g, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde pozitif ölçülebilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda $0<t<\infty$ için,

$$(f\otimes g)_\gamma^{**}(t)\leq c_\gamma\left(f_\gamma^{**}(t)\int_0^t g_\gamma^{**}(u)\,du+\int_t^\infty f_\gamma^{*}(u)\,g_\gamma^{**}(u)\,du\right) \tag{5.1.1}$$

eşitsizliği sağlanır (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007).

İspat. $t>0$ için bir E_t kümesi seçebiliriz öyle ki,

$$\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|f(x)|>f_\gamma^*(t)\right\}\subset E_t\subset\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|f(x)|\geq f_\gamma^*(t)\right\}$$

kapsama bağıntısı gerçeklenir.

$$\begin{aligned}f_1(x)&=\left(f(x)-f_\gamma^*(t)\right)\chi_{E_t}(x)\\ f_2(x)&=f(x)-f_1(x)\end{aligned}$$

ile verilsin. Herhangi ölçülebilir $A \subset \mathbb{R}_+^n$ kümesi için $|A|_\gamma = t$ olsun.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{A}} (g \otimes f_1)(x)\, x_n^\gamma dx &= \int\limits_{\mathcal{A}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f_1(y)\, T^y g(x)\, y_n^\gamma x_n^\gamma dy dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_{\mathcal{A}} f_1(y)\, T^y g(x)\, y_n^\gamma x_n^\gamma dx dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f_1(y)\, y_n^\gamma dy \int\limits_{\mathcal{A}} T^y g(x)\, x_n^\gamma dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.3.5 ten;

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{A}} (g \otimes f_1)(x)\, x_n^\gamma dx &\leq c_\gamma \int\limits_0^t g_\gamma^*(u)\, du \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f_1(y)\, y_n^\gamma dy \\
&\leq c_\gamma \int\limits_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f_1(y)\, y_n^\gamma dy
\end{aligned}$$

olduğu görülür. f_1 değeri yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{A}} (g \otimes f_1)(x)\, x_n^\gamma dx &\leq c_\gamma \int\limits_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \big(f(y) - f_\gamma^*(t)\big)\, \chi_{E_t}(y)\, y_n^\gamma dy \\
&= c_\gamma \int\limits_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du \left(\int\limits_{E_t} f(y)\, y_n^\gamma dy - f_\gamma^*(t)\, t \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (2.3.4) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
(g \otimes f_1)_\gamma^{**}(t) &= \frac{1}{t} \sup_{|A|_\gamma = t} \int\limits_A (g \otimes f_1)(x)\, x_n^\gamma dx \\
&\leq \sup_{|A|_\gamma = t} c_\gamma \int\limits_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du \left(\frac{1}{t} \int\limits_{E_t} f(y)\, y_n^\gamma dy - f_\gamma^*(t) \right) \\
&\leq c_\gamma \big(f_\gamma^{**}(t) - f_\gamma^*(t) \big) \int\limits_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.3.5 ve (2.3.4) eşitliğini kullanarak,

$$(Tg(x))^*_\gamma(s) \le (Tg(x))^{**}_\gamma = \frac{1}{t}\sup_{|A|_\gamma=t}\int_{\mathcal{A}} T^y g(x)\, y_n^\gamma dy = \frac{1}{t}c_\gamma\int_0^t g^*_\gamma(s)\,ds = c_\gamma g^{**}_\gamma(s) \tag{5.1.2}$$

elde edilir. Lemma 2.3.4 ten,

$$\begin{aligned}(g\otimes f_2)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n_+} f_2(y)\,T^y g(x)\,y_n^\gamma dy \le \int_0^\infty f^*_{\gamma,2}(u)\,(Tg)^{**}_\gamma(u)\,du \le \int_0^\infty f^*_{\gamma,2}(u)\,g^{**}_\gamma(u)\,du\\ &= c_\gamma\left(f^*_\gamma(t)\int_0^t g^{**}_\gamma(u)\,du + \int_t^\infty f^*_\gamma(u)\,g^{**}_\gamma(u)\,du\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (2.3.4) eşitliğinden,

$$(g\otimes f_2)^{**}_\gamma(t) \le c_\gamma\left(f^*_\gamma(t)\int_0^t g^{**}_\gamma(u)\,du + \int_t^\infty f^*_\gamma(u)\,g^{**}_\gamma(u)\,du\right)$$

ve

$$f^*_\gamma(t) \le f^{**}_\gamma(t)$$

olduğundan,

$$(g\otimes f_2)^{**}_\gamma(t) \le c_\gamma\left(f^{**}_\gamma(t)\int_0^t g^{**}_\gamma(u)\,du + \int_t^\infty f^*_\gamma(u)\,g^{**}_\gamma(u)\,du\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.1.2. $g \in WL_{r,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, $1 < r < \infty$ olsun.

$$(f\otimes g)^*_\gamma(t) \le (f\otimes g)^{**}_\gamma(t) \le c_1\|g\|_{WL_{r,\gamma}}\left(t^{-\frac{1}{r}}\int_0^t f^*_\gamma(s)\,ds + \int_t^\infty s^{-\frac{1}{r}} f^*_\gamma(s)\,ds\right) \tag{5.1.3}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $c_1 = c_\gamma r'(1+r')$ eşitliği ile verilir (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007).

İspat.

$$\|g\|_{WL_{p,\gamma}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_\gamma^* (t)$$

biçimindedir. Buradan

$$t^{\frac{1}{r}} g_\gamma^* (t) \leq \|g\|_{WL_{r,\gamma}}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$g_\gamma^* (t) \leq t^{-\frac{1}{r}} \|g\|_{WL_{r,\gamma}}$$

elde edilir. Son bulduğumuz eşitsizlikte her iki tarafın integralini alırsak,

$$\frac{1}{t} \int_0^t g_\gamma^* (t)\, dt \leq \|g\|_{WL_{r,\gamma}} \frac{1}{t} \int_0^t t^{-\frac{1}{r}} dt$$

olduğundan

$$g_\gamma^{**} (t) \leq \frac{r}{r-1} \|g\|_{WL_{r,\gamma}} t^{-\frac{1}{r}}$$

sağlanır. Buradan

$$g_\gamma^{**} (t) \leq r' \|g\|_{WL_{r,\gamma}} t^{-\frac{1}{r}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Teorem 5.1.1 den

$$(f \otimes g)_\gamma^{**} (t) \leq c_\gamma \left(f_\gamma^{**} (t) \int_0^t g_\gamma^{**} (u)\, du + \int_t^\infty f_\gamma^* (u)\, g_\gamma^{**} (u)\, du \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_\gamma \left(\frac{1}{t} \int_0^t f_\gamma^* (s)\, ds \int_0^t r' \|g\|_{WL_{r,\gamma}} u^{-\frac{1}{r}} du + \int_t^\infty f_\gamma^* (u)\, r' \|g\|_{WL_{r,\gamma}} u^{-\frac{1}{r}} du \right) \\
&\leq c_\gamma \left(\frac{1}{t} \int_0^t f_\gamma^* (s)\, ds r' \|g\|_{WL_{r,\gamma}} \int_0^t u^{-\frac{1}{r}} du + r' \|g\|_{WL_{r,\gamma}} \int_t^\infty u^{-\frac{1}{r}} f_\gamma^* (u)\, du \right) \\
&\leq c_1 \|g\|_{WL_{r,\gamma}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f_\gamma^* (s)\, ds + \int_t^\infty u^{-\frac{1}{r}} f_\gamma^* (u)\, du \right)
\end{aligned}$$

istenilen eşitsizlik elde edilir.

5.2 $B-$Konvolüsyon İçin O'Neil Tipli Eşitsizlik

Bu kısımda $B-$konvolüsyon için O'Neil tipli eşitsizlik ispatlandı.

Teorem 5.2.1.

(i) $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ve $g \in WL_{r,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ olsun. Bu durumda $f \otimes g \in L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ve

$$\|f \otimes g\|_{L_{q,\gamma}} \leq A_1 \|f\|_{L_{p,\gamma}} \|g\|_{WL_{r,\gamma}} \tag{5.2.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$A_1 = c_\gamma r' \left(1 + r'\right) \left(p^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{p'}} + \left(p'\right)^{\frac{1}{q}} \left(q'\right)^{\frac{1}{p'}}\right)$$

ile verilir.

(ii) $p = 1$, $1 < q < \infty$, $f \in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, $g \in WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ olsun. Bu durumda $f \otimes g \in WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ve

$$\|f \otimes g\|_{WL_{q,\gamma}} \leq A_1 \|f\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \|g\|_{L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \tag{5.2.2}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$A_1 = 2c_\gamma r' \left(1 + r'\right)$$

ile verilir (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007).

İspat.

(i) (2.3.3) eşitliğini kullanarak,

$$\|f\otimes g\|_{L_{q,\gamma}}=\|(f\otimes g)^*\|_{L_q(0,\infty)}=\left(\int_0^\infty ((f\otimes g)^*)^q(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. (5.1.3) eşitsizliğinde her iki tarafın q. kuvvetini alalım. Bu durumda

$$((f\otimes g)^*)^q(t)\le c^q\,\|g\|^q_{WL_{r,\gamma}}\left(t^{-\frac{1}{r}}\int_0^t f^*_\gamma(s)\,ds+\int_t^\infty s^{-\frac{1}{r}}f^*_\gamma(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. Şimdi her iki tarafın integralini alalım.

$$\left(\int_0^\infty ((f\otimes g)^*)^q(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\le c\,\|g\|_{WL_{r,\gamma}}\left[\int_0^\infty\left(t^{-\frac{1}{r}}\int_0^t f^*_\gamma(s)\,ds+\int_t^\infty s^{-\frac{1}{r}}f^*_\gamma(s)\,ds\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c\,\|g\|_{WL_{r,\gamma}}\left[\int_0^\infty t^{-\frac{q}{r}}\left(\int_0^t f^*_\gamma(s)\,ds\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}}+c\,\|g\|_{WL_{r,\gamma}}\left[\int_0^\infty\left[\int_t^\infty s^{-\frac{1}{r}}f^*_\gamma(s)\,ds\right]^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini Hölder eşitsizliğini kullanarak elde ederiz. (2.3.3) ve (5.1.3) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\|f\otimes g\|_{L_{q,\gamma}}=\|(f\otimes g)^*\|_{L_q(0,\infty)}$$

$$\le c_1\left(\int_0^\infty t^{-\frac{1}{r}}\left(\int_0^t f^*_\gamma(s)\,ds\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+c_1\left(\int_0^\infty\left(\int_t^\infty s^{-\frac{1}{r}}f^*_\gamma(s)\,ds\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz.

Lemma 5.1 de $\omega(t) = t^{-\frac{1}{r}}$ ve $\nu(t) = 1$ alalım.

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty t^{-\frac{1}{r}} \left(\int_0^t f_\gamma^*(s)\, ds\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} &\leq c_2 \left(\int_0^\infty \left(f_\gamma^*(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\Leftrightarrow c_2 = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty s^{-\frac{q}{r}} ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t ds\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \sup_{t>0} \left(\frac{s^{1-\frac{q}{r}}}{1-\frac{q}{r}} |_t^\infty\right)^{\frac{1}{q}} t^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Öncelikle $\frac{q}{r} > 1$ olduğunu gösterelim.

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \Rightarrow 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \Rightarrow q - \frac{q}{p} + \frac{q}{q} = \frac{q}{r} \Rightarrow q\left(1 - \frac{1}{p}\right) + 1 = \frac{q}{r}$$

$q\left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq 0$ olduğundan $\frac{q}{r} > 1$ dir. Ohalde c_2 yi yeniden yazarsak,

$$c_2 = \sup \left(\frac{q}{r} - 1\right)^{-\frac{1}{q}} \left(t^{1-\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} t^{\frac{1}{p'}} = \left(\frac{q}{r} - 1\right)^{-\frac{1}{q}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{1}{p'}} = \left(\frac{q}{r} - 1\right)^{-\frac{1}{q}}$$

eşitliği t nin kuvvetinin sıfır olmasıyla elde edilir. Ayrıca Lemma 5.2 den,

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty s^{-\frac{1}{r}} f_\gamma^*(s)\, ds\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq c_3 \left(\int_0^\infty f_\gamma^*(t)^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow \sup_{t>0} \left(\int_0^t ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^\infty s^{-\frac{p'}{r}} ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \left(\frac{p'}{r} - 1\right)^{-\frac{1}{p'}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{r'} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} < \infty$$

Burada

$$c_3 \leq \left(\frac{p'}{r} - 1\right)^{-\frac{1}{p'}} p^{\frac{1}{q}} \left(p'\right)^{\frac{1}{p'}} = p^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{p'}}$$

eşitsizliğini sağlar ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r'}$ dir.

Son olarak bulunan bu eşitsizlikler yerlerine yazılırsa,

$$\|f \otimes g\|_{L_{q,\gamma}} \leq c_1 (c_2 + c_3) \|f\|_{L_{p,\gamma}} \|g\|_{WL_{q,\gamma}}$$

elde edilir.

(ii) $p = 1$, $1 < q < \infty$, $f \in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $g \in WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\|f \otimes g\|_{WL_{q,\gamma}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} (f \otimes g)^* (t) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} \left\{ c_1 \|g\|_{WL_{q,\gamma}} \left(t^{-\frac{1}{r}} \int_0^t f_\gamma^* (s)\, ds + \int_t^\infty s^{-\frac{1}{r}} f_\gamma^* (s)\, ds \right) \right\} \\
&= c_1 \|g\|_{WL_{q,\gamma}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} \left(t^{-\frac{1}{r}} \int_0^t f_\gamma^* (s)\, ds + \int_t^\infty s^{-\frac{1}{r}} f_\gamma^* (s)\, ds \right) \\
&= c_1 \|g\|_{WL_{q,\gamma}} \left(\sup_{t>0} \int_0^t f_\gamma^* (s)\, ds + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} t^{-\frac{1}{q}} \int_t^\infty f_\gamma^* (s)\, ds \right) \\
&= 2c_1 \|g\|_{WL_{q,\gamma}} \left\| f_\gamma^* \right\|_{L_1(0,\infty)} = 2c_1 \|g\|_{WL_{q,\gamma}} \|f\|_{L_1(0,\infty)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

5.3 $L_{p,\gamma}$ Uzaylarında Genelleştirilmiş $B-$Riesz Potansiyeli ve Genelleştirilmiş $B-$Maksimal Operatörlerinin Sınırlılığı

$\Omega \in L_{s,\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)$; $s \geq 1$, $S_+^{n-1} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |x| = 1\right\}$ ve Ω, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen yani, $\forall t > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$ için $\Omega (tx) = \Omega (x)$ olsun.

Tanım 5.3.1. Genelleştirilmiş kesirli $B-$maksimal operatör

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma} f (x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+\gamma-\alpha}} \int_{B(0,r)} |\Omega (y)| T^y |f (x)| y_n^\gamma dy \qquad (5.3.1)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 5.3.2. Genelleştirilmiş $B-$Riesz potansiyeli veya $B-$kesirli integral operatörü

$$I_{\Omega,\alpha,\gamma}f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^{n+\gamma-\alpha}}T^y f(x)\,y_n^{\gamma}dy \tag{5.3.2}$$

ile tanımlanır.

Yukarıdaki iki tanımda $\Omega\equiv 1$ olduğu zaman $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$, $B-$maksimal operatörü $M_{\alpha,\gamma}$ kesirli maksimal fonksiyonu ve $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$, $B-$Riesz Potansiyeli $I_{\alpha,\gamma}$ olur. Kolayca gösterilebilir ki

$$g(x)=|x|^{\alpha-n-\gamma}\in WL_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right),\quad 0<\alpha<n$$

dir. Ayrıca bu durum için;

$$\begin{aligned}
g_{*,\gamma}(t) &= \omega(n,\gamma)\,t^{-\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}\\
g_{\gamma}^{*}(t) &= \left(\omega(n,\gamma)\,t^{-1}\right)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}\\
\|g\|_{WL_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} &= \left(\omega(n,\gamma)\right)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\omega(n,\gamma)=|B(0,1)|_{\gamma}$ ve $B(0,1)=\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|x|<1\right\}$ biçimindedir.

Eğer $g(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^{n+\gamma-\alpha}}$, $0<\alpha<n$,

Burada Ω, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega\in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
g_{*,\gamma}(t) &= \tfrac{A}{n+\gamma}t^{-\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}\\
g_{\gamma}^{*}(t) &= \left(\tfrac{A}{(n+\gamma)t}\right)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}\\
g_{\gamma}^{**}(t) &= \tfrac{n+\gamma}{\alpha}g_{\gamma}^{*}(t)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Burada $A=\|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)}^{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}$ biçimindedir. Ayrıca $g\in WL_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\|g\|_{WL_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}=\left(\frac{A}{(n+\gamma)}\right)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 5.3.1. $0 < \alpha < n+\gamma$ olmak üzere Ω, $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S^{n-1}_+\right)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^*_\gamma(t) &\leq \left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^{**}_\gamma(t) \\ &\leq c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S^{n-1}_+\right)} \left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} \int\limits_0^t f^*_\gamma(s)\,ds + \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} f^*_\gamma(s)\,ds \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$c_4 = \alpha^{-2}(n+\gamma)^{\frac{\alpha}{n+\gamma}+1} c_\gamma$$

ile verilir.

İspat. Teorem 5.1.2 de $g(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^{n+\gamma-\alpha}}$ olarak seçelim.

$$\|g\|_{WL_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} = \left(\frac{A}{n+\gamma}\right)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}} = \left[\frac{\|\Omega\|^{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}}{n+\gamma}\right]^{\frac{n+\gamma-\alpha}{n+\gamma}} = \frac{\|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}}{(n+\gamma)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}}$$

Burada

$$A = \|\Omega\|^{\frac{(n+\gamma)}{n+\gamma-\alpha}}_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}$$

dir. Teorem 5.1.2 de yerine yazarsak,

$$\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^*_\gamma(t) \leq \left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^{**}_\gamma(t)$$

$$\leq c_4 (n+\gamma)^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \left[t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} \int\limits_0^t f^*_\gamma(s)\,ds + \int\limits_t^\infty t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} f^*_\gamma(t)\,dt \right]$$

elde edilir.

Lemma 5.3.2. $\Omega \in L_{s,\gamma}\left(S^{n-1}_+\right)$, $s \geq 1$, $0 < \alpha < n+\gamma$ olsun. Bu durumda

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma}f(x) \leq \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}(|f|)(x)$$

eşitsizliği vardır.

İspat.

$$I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}(|f|)(x)=\int\limits_{B(0,2^j)\setminus B(0,2^{j-1})}\frac{|\Omega(y)|}{|y|^{n+\gamma-\alpha}}T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy$$

ve

$$I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}(|f|)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\frac{|\Omega(y)|}{|y|^{n+\gamma-\alpha}}T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy$$

olsun.

$$I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}(|f|)(x)=\sum_{j\in z}I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}(|f|)(x) \tag{5.3.3}$$

$$I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}(|f|)(x)\geq(2^j)^{(\alpha-n-\gamma)}\int\limits_{\frac{B(0,2^j)}{B(0,2^{j-1})}}|\Omega(y)|T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy$$

$$\begin{aligned}
&= \left(2^j\right)^{(\alpha-n-\gamma)}\left[\int\limits_{B(0,2^j)}|\Omega(y)|T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy-\int\limits_{B(0,2^{j-1})}|\Omega(y)|T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy\right]\\
&= \frac{1}{2^{j(n+\gamma-\alpha)}}\int\limits_{B(0,2^j)}|\Omega(y)|T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy\\
&\quad-\frac{2^{\alpha-n-\gamma}}{2^{(j-1)(n+\gamma-\alpha)}}\int\limits_{B(0,2^{j-1})}|\Omega(y)|T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}(|f|)(x)+\frac{2^{\alpha-n-\gamma}}{2^{(j-1)(n+\gamma-\alpha)}}\int\limits_{B(0,2^{j-1})}|\Omega(y)|T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy\\
\geq\ &\frac{1}{2^{j(n+\gamma-\alpha)}}\int\limits_{B(0,2^j)}|\Omega(y)|T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy
\end{aligned}$$

elde edilir. $j\in\mathbb{Z}$ üzerinden supremum alırsak,

$$\begin{aligned}
&\sup_{j\in\mathbb{Z}}I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}(|f|)(x)+\sup_{j\in\mathbb{Z}}\frac{2^{\alpha-n-\gamma}}{2^{(j-1)(n+\gamma-\alpha)}}\int\limits_{B(0,2^{j-1})}|\Omega(y)|T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy\\
\geq\ &\sup_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2^{j(n+\gamma-\alpha)}}\int\limits_{B(0,2^j)}|\Omega(y)|T^y|f(x)|y_n^{\gamma}dy
\end{aligned}$$

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}\left(|f|\right)(x) \geq \left(1-2^{\alpha-n-\gamma}\right)\sup_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2^{j(n+\gamma-\alpha)}}\int\limits_{B(0,2^j)}|\Omega(y)|\,T^y\,|f(x)|\,y_n^{\gamma}dy \tag{5.3.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} M_{|\Omega|,\alpha,\gamma}f(x) &= \sup_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2^{j(n+\gamma-\alpha)}}\int\limits_{B(0,2^j)}|\Omega(y)|\,T^y\,|f(x)|\,y_n^{\gamma}dy \\ &\leq 2^{(n+\gamma-\alpha)}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2^j)^{(n+\gamma-\alpha)}}\int\limits_{B(0,2^j)}|\Omega(y)|\,T^y\,|f(x)|\,y_n^{\gamma}dy \quad (5.3.5)\end{aligned}$$

elde ederiz.

Sonuç olarak (5.3.3) ve (5.3.5) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$M_{|\Omega|,\alpha,\gamma}f(x) \leq \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}}\sup_{j\in\mathbb{Z}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}\left(|f|\right)(x) \leq \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}\left(|f|\right)(x)$$

elde ederiz.

Sonuç 5.3.1. Ω, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)$, $0<\alpha<n+\gamma$ olsun. Bu durumda her $0<t<\infty$ için;

$$\left(M_{\Omega,\alpha}f\right)_\gamma^*(t) \leq \left(M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)_\gamma^{**}(t) \leq c_4'\left(t^{\frac{n}{n+\gamma}-1}\int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\,ds + \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} f_\gamma^*(s)\,ds\right)$$

eşitsizliği geçerlidir, burada

$$c_4' = \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}}c_4$$

ile verilir.

Sonuç 5.3.2. $B-$Riesz Potansiyelinin

$$I_{\alpha,\gamma}f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y\,|x|^{\alpha-n-\gamma} f(y)\,y_n^{\gamma}dy, \qquad 0<\alpha<n+\gamma$$

eşitliği ile verildiğini daha önce belirtmiştik. $0<t<\infty$ için,

$$\left(I_{\alpha,\gamma}f\right)_{\gamma}^{*}(t)\leq\left(I_{\alpha,\gamma}f\right)_{\gamma}^{**}(t)\leq c_5\left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}\int\limits_0^t f_{\gamma}^{*}(s)\,ds+\int\limits_t^{\infty}s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}f_{\gamma}^{*}(s)\,ds\right)$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$c_5=c_{\gamma}\left(\frac{n+\gamma}{\alpha}\right)\left(1+\frac{n+\gamma}{\alpha}\right)\omega(n,\gamma)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}$$

ile verilir.

Sonuç 5.3.3. Ω, $\mathbb{R}_{+}^{n}$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega\in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}\left(S_{+}^{n-1}\right)$, $0<\alpha<n$ olsun. Bu durumda

(i) $1<p<\frac{n+\gamma}{\alpha}$, $f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ve $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\in L_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ ve

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}}\leq A_3\|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}\left(S_{+}^{n-1}\right)}\|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$A_3=c_{\gamma}\alpha^{-2}(n+\gamma)^{\frac{\alpha}{n+\gamma}+1}\left(p^{\frac{1}{q}}q^{\frac{1}{p'}}+(p')^{\frac{1}{q}}(q')^{\frac{1}{p'}}\right)$$

ile verilir.

(ii) $p=1$, $f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ve $1-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\in WL_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ ve

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}}\leq A_4\|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_{+}^{n-1}\right)}\|f\|_{L_{1,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$A_4=c_{\gamma}c^{-2}(n+\gamma)^{\frac{\alpha}{n+\gamma+1}}$$

ile verilir.

İspat.

(i) Lemma 5.3.1 den,

$$\begin{aligned}\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^*_\gamma(t) &\leq \left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^{**}_\gamma(t)\\ &\leq c_4\left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)}\left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}\int\limits_0^t f^*_\gamma(s)\,ds+\int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}f^*_\gamma(s)\,ds\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte önce her iki tarafın p. kuvveti alınıp integre edilirse ve daha sonra da Lemma 5.1 ve Lemma 5.2 kullanılırsa,

$$\left(\int\limits_0^\infty\left[\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^*_\gamma(t)\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq c_4\left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}$$

$$\left[\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}\right)^p\left(\int\limits_0^t f^*_\gamma(s)\,ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}f^*_\gamma(s)\,ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\leq c_4\left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}\left\{\left(\int\limits_0^\infty\left(f^*_\gamma(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_0^\infty\left(f^*_\gamma(s)\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$=2c_4\left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}\left\|f^*_\gamma\right\|_{L_{p,\gamma}}=2c_4\left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}\left\|f\right\|_{L_{p,\gamma}}$$

elde ederiz.

(ii) Lemma 5.3.1 den,

$$\begin{aligned}\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^*_\gamma(t) &\leq \left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^{**}_\gamma(t)\\ &\leq c_4\left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}\left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}\int\limits_0^t f^*_\gamma(s)\,ds+\int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}f^*_\gamma(s)\,ds\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $t^{\frac{1}{q}}$ ile çarpıp supremum alırsak,

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{q}}\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^{*}_{\gamma}(t) &\leq c_4\left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}\left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1+\frac{1}{q}}\int\limits_0^t f^{*}_{\gamma}(s)\,ds+t^{\frac{1}{q}}\int\limits_t^{\infty}s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}f^{*}_{\gamma}(s)\,ds\right)\\ &\leq c_4\left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}}\left(\int\limits_0^t f^{*}_{\gamma}(s)\,ds+\int\limits_t^{\infty}s^{\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}f^{*}_{\gamma}(s)\,ds\right)\\ &\leq 2c_4\left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}\left\|f^{*}_{\gamma}\right\|_{L_{1,\gamma}}=2c_4\left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}\left\|f\right\|_{L_{1,\gamma}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.3.4. $0<\alpha<n$ olsun.

(i) $1<p<\frac{n+\gamma}{\alpha}$, $f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ve $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $I_{\alpha,\gamma}f\in L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}\right)$ ve

$$\left\|I_{\alpha,\gamma}f\right\|_{L_{q,\gamma}}\leq A_5\left\|f\right\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$A_5=c_{\gamma}\left(pq+q-p\right)\left(\frac{pq}{\left(q-p\right)^2}\right)\omega\left(n,\gamma\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}\left(p^{\frac{1}{q}}q^{\frac{1}{p'}}+\left(p'\right)^{\frac{1}{q}}\left(q'\right)^{\frac{1}{p'}}\right)$$

ile verilir.

(ii) $p=1$, $f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ve $1-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun. Bu durumda $I_{\alpha,\gamma}f\in WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}\right)$ ve

$$\left\|I_{\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}\leq A_6\left\|f\right\|_{L_{1,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır, burada A_6 katsayısı

$$A_6=c_{\gamma}\left(pq+q-p\right)\left(\frac{pq}{\left(q-p\right)^2}\right)\omega\left(n,\gamma\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}$$

ile verilir.

Teorem 5.3.1. $0<\alpha<n+\gamma$ olmak üzere, Ω, $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde sıfırıncı dereceden

homojen ve $\Omega \in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_{+}^{n-1}\right)$, olsun. Bu durumda

(i) Eğer $1 < p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$ ise bu durumda $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ nın $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olmasıdır.

(ii) Eğer $p = 1$ ise bu durumda $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ nın $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olmasıdır. (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007).

İspat. $1 < p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun. Sonuç 5.3.3 ten

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} \le A_3 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $f \in L_{p,\gamma}$ ise $\|f\|_{L_{p,\gamma}} < \infty$ olduğundan $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} < \infty$ olacaktır. Bu da bize $I_{\Omega,\alpha,\gamma} \in L_{q,\gamma}$ olduğunu gösterir. Yani $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{p,\gamma}$ uzayından $L_{q,\gamma}$ uzayına sınırlı bir operatördür.

Karşıt olarak kabul edelim ki $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı bir operatör ve $1 < p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$ olsun. $t > 0$ için $f_t(x) = f(tx)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan kolayca görülebilir ki

$$\begin{aligned} \|f_t\|_{L_{p,\gamma}} &= t^{-\left(\frac{n+\gamma}{p}\right)} \|f\|_{L_{p,\gamma}} \\ (I_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t)(x) &= t^{-\alpha} I_{\Omega,\alpha,\gamma}f(tx) \end{aligned}$$

ve

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\|_{L_{q,\gamma}} = t^{-\alpha-\frac{n+\gamma}{q}} \|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}}$$

eşitlikleri vardır. İlk olarak

$$\|f_t\|_{L_{p,\gamma}} = t^{-\left(\frac{n+\gamma}{p}\right)} \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|f_t\|_{L_{p,\gamma}} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f_t(x)|^p x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(tx)|^p x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(u)|^p \frac{t^\gamma x_n^\gamma}{t^\gamma} \frac{du}{t^n}\right)^{\frac{1}{p}} = t^{-\frac{(n+\gamma)}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(u)|^p u^\gamma du\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= t^{-\frac{(n+\gamma)}{p}} \|f\|_{L_{p,\gamma}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de

$$(I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t)(x) = t^{-\alpha} I_{\Omega,\alpha,\gamma} f(tx)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^{n+\gamma-\alpha}} T^y f_t(x) y_n^\gamma dy = t^{n+\gamma-\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\Omega(u)}{|u|^{n+\gamma-\alpha}} T^y f(u) \frac{u^\gamma}{t^\gamma} \frac{du}{t^n} \\
&= t^{-\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\Omega(u)}{|u|^{n+\gamma-\alpha}} T^y f(u) u^\gamma du = t^{-\alpha} I_{\Omega,\alpha,\gamma} f(tx)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak;

$$\begin{aligned}
\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\|_{L_{q,\gamma}} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t(x)|^q x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(t^{-\alpha} I_{\Omega,\alpha,\gamma} f(tx)\right)^q x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= t^{-\alpha} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (I_{\Omega,\alpha,\gamma} f(u))^q \frac{u^\gamma}{t^\gamma} \frac{du}{t^n}\right)^{\frac{1}{q}} = t^{-\alpha} t^{-\frac{n+\gamma}{q}} \|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{L_{q,\gamma}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$, $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ uzayından $L_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı bir operatör olduğundan

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} \leq c\,\|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada c, f den bağımsız bir sabittir.

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} = t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\,\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\|_{L_{q,\gamma}} \leq ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}t^{-\frac{n+\gamma}{p}}\,\|f_t\|_{L_{p,\gamma}} = ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}-\frac{n+\gamma}{p}}\,\|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

elde edilir. İki durum söz konusudur.

1. durum: $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $\forall f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için $t \to \infty$ iken $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} = 0$ olacaktır. Çünkü

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n+\gamma} > 0 \Rightarrow \frac{n+\gamma}{q} - \frac{n+\alpha}{p} + \alpha > 0$$

olduğundan t nin kuvveti pozitiftir.

2. durum: $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $\forall f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için $t \to \infty$ iken $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} = 0$ olacaktır. Çünkü

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n+\gamma} < 0 \Rightarrow \frac{n+\gamma}{q} - \frac{n+\alpha}{p} + \alpha < 0$$

olduğundan t nin kuvveti negatiftir.

Sonuç olarak $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ eşitliğini elde ederiz.

(ii) $p = 1$, $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun. Sonuç 5.3.3 ten

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} \leq A_4\,\|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}\,\|f\|_{L_{1,\gamma}}$$

eşitsizliği vardır. Eğer $f \in L_{1,\gamma}$ ise $\|f\|_{L_{1,\gamma}} < \infty$ olduğundan $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} < \infty$ olur. Yani $I_{\Omega,\alpha,\gamma} \in WL_{q,\gamma}$ dır. Bunu her f için yazabileceğimizden $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}\right)$ uzayına sınırlı bir operatör olur.

Karşıt olarak $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı bir operatör olduğunu kabul edelim. Kolayca gösterilebilir ki,

$$\begin{aligned} \|f_t\|_{L_{1,\gamma}} &= t^{-n-\gamma}\|f\|_{L_{1,\gamma}} \\ \left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\right)(x) &= t^{-\alpha}\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)(tx) \end{aligned}$$

ve

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\|_{WL_{q,\gamma}} = t^{-\alpha-\frac{n+\gamma}{q}}\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}}$$

eşitlikleri sağlanır. $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayına $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlılığından,

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} \le c\,\|f_t\|_{L_{1,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada c, f den bağımsız bir sabittir.

$$\begin{aligned} \left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\right)_*(\tau) &= t^{-n-\gamma}\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)_*(t^{\alpha}\tau) \\ \|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\|_{WL_{q,\gamma}} &= t^{-\alpha-\frac{n+\gamma}{q}}\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} &= t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\|_{WL_{q,\gamma}} \\ &\le ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\|f_t\|_{L_{1,\gamma}} = ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}t^{-n-\gamma}\|f\|_{L_{1,\gamma}} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer $1 < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $\forall f \in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ için $t \to 0$ iken $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} = 0$ elde edilir. Eğer $1 > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $\forall f \in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ için $t \to \infty$ iken $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $1 = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ elde ederiz.

Sonuç 5.3.5. $0 < \alpha < n+\gamma$ olsun.

(i) Eğer $1 < p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$ ise, bu durumda $I_{\alpha,\gamma}$ nın $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olmasıdır.

(ii) Eğer $p = 1$ ise bu durumda $I_{\alpha,\gamma}$ nın $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olmasıdır.

Sonuç 5.3.6. $0 < \alpha < n + \gamma$, Ω, $\mathbb{R}_{+}^{n}$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_{+}^{n-1}\right)$ olsun.

(i) $1 < p < r'$ olsun. Bu durumda $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ nın $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olmasıdır.

(ii) $p = 1$ olsun. Bu durumda $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ nın $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olmasıdır.

İspat.

(i) $1 < p < r'$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun. $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlı olduğunu göstereceğiz. Teorem 5.3.1 (i) den $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlı olduğu görülür. Lemma 5.3.2 den

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma}f(x) \leq \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1 - 2^{\alpha-n-\gamma}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}(|f|)(x)$$

eşitsizliği sağlanır. $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü sınırlı olduğundan $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün de yukarıdaki eşitsizlikten dolayı sınırlı olduğu görülür.

Karşıt olarak $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı bir operatör ve $1 < p < r'$ olsun. $t > 0$ için $f_t(x) = f(tx)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t(x) = t^{-\alpha} M_{\gamma}^{\alpha} f(tx)$$

ve

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\right\|_{L_{q,\gamma}} = t^{-\alpha-\frac{n+\gamma}{q}} \left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{L_{p,\gamma}}$$

olduğu kolayca görülür. $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı bir operatör olduğundan

$$\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\|_{L_{q,\gamma}} \leq c\,\|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği gerçeklenecek şekilde f den bağımsız bir c sabiti vardır.

$$\begin{aligned}\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} &= t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\|_{L_{q,\gamma}} \leq ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\|f_t\|_{L_{q,\gamma}} \\ &= ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}t^{-\frac{n+\gamma}{q}}\|f\|_{L_{p,\gamma}} = ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}-\frac{n+\gamma}{p}}\|f\|_{L_{p,\gamma}}\end{aligned}$$

olduğu

$$\|f_t\|_{L_{p,\gamma}} = t^{-\frac{n+\gamma}{p}}\|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitliğinin sağlanmasıyla kolaylıkla görülür.

Eğer $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise ozaman her $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ için $t \to 0$ iken

$$\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} = 0$$

olduğu görülür. Çünkü $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n+\gamma} > 0$ iken $\frac{n+\gamma}{q} - \frac{n+\alpha}{p} + \alpha > 0$ olduğundan t nin kuvveti pozitiftir.

Eğer $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise ozaman her $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ için $t \to \infty$ iken

$$\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} = 0$$

olur. Çünkü $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n+\gamma} < 0$ iken $\frac{n+\gamma}{q} - \frac{n+\alpha}{p} + \alpha < 0$ olduğundan t nin kuvveti negatiftir. Bu nedenle $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ eşitliği sağlanır.

(ii) $p = 1$ ve $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun. Göstereceğiz ki $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlıdır. Teorem 5.3.1 (ii) den $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlı olduğu görülür. Lemma 5.3.2 deki

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma}f(x) \leq \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}(|f|)(x)$$

eşitsizliğinin kullanılmasıyla $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün de sınırlı olduğu kolayca görülür.

Tersine $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}\right)$ uzayına sınırlı bir operatör olsun.

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma}f_{t}\left(x\right)=t^{-\alpha}M_{\Omega,\alpha,\gamma}^{\alpha}f\left(tx\right)$$

ve

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f_{t}\right\|_{WL_{q,\gamma}}=t^{-\alpha-\frac{n+\gamma}{q}}\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}$$

eşitlikleri sağlanır. $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}\right)$ uzayına $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlılığından

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}\leq c\left\|f\right\|_{L_{1,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}=t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f_{t}\right\|_{WL_{q,\gamma}}\leq ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\left\|f_{t}\right\|_{L_{1,\gamma}}=ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}t^{-n-\gamma}\left\|f\right\|_{L_{1,\gamma}}$$

olduğu görülür. Eğer $1<\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise her $f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ için $t\to0$ iken

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}=0$$

olur. Eğer $1>\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise her $f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ için $t\to\infty$ iken

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}=0$$

olur. Bu nedenle $1=\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n+\gamma}$ eşitliği gerçeklenir.

KAYNAKLAR

Adams, R.A. and Fournier, J.F.F. 2003. Sobolev spaces. Academic Press, 301 p. , Amsterdam.

Aliyev, I.A. and Gadjiev, A.D. 1988. On classes of operators of potential types, generated by a generalized shift. Reports of enlarged Session of the Semi nars of I.N. Vekua Inst. of Applied Mathematics, Tbilisi, 3(2); 21-24.

Bennett, C.C. and Sharpley, R. 1988. Interpolation of operators, 469 p. Academic Press, Boston.

Ekincioğlu, İ. 1994. Genelleştirilmiş öteleme ile elde edilen Riesz dönüşümleri. Dok tora tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ankara.

Garakhanova, N.N. 2000a. The boundedness of $B_{k,n}-$maximal functions in $L_{p,\gamma_{k,n}}$ spaces. Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 20(4); 64–72.

Garakhanova, N.N. 2000b. Integral characteristics of maximal functions. Proc. Inst. Math. Mech. Acad. Sci. Azerb. 13, 50–54.

Grafakos, L. and Stefanov, A. 1998. L^p bounds for singular integrals and maximal singular integrals with rough kernels. Indiana Univ. Math. J., 47(2); 455-469.

Guliyev, V.S. 1998. Sobolev's theorem for Riesz B-potentials. (Russian) Dokl. Akad. Nauk, 358(4); 450-451.

Guliyev, V.S.and Safarov, Z.V. 2002. On generalized fractional integrals, associated with the Bessel differential expansions. Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser.

Phys.-Tech. Math. Sci. 22(4); Math. Mech.,75-90.

Guliyev, V.S. 2003. On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator. Math. Inequal. Appl., 6(2); 317-330.

Guliyev, V.S., Şerbetçi, A. and Safarov, Z.V. 2007. Inequality of O'Neil-type for convolutions associated with the Laplace-Bessel differential operator and applications. Math. Inequal. Appl., in press.

Kipriyanov, I.A. 1967. Fourier-Bessel transformations and imbedding theorems. Trudy Math. Inst. Steklov, 89, 130-213.

Kristiansson, E. 2002. Decreasing rearragement and Lorentz $L(p,q)$ spaces. Master thesis, Lulea University of Technology, Sweden.

Levitan, B.M. 1951. Bessel function expansions in series and Fourier integrals, Us pekhi Mat. Nauk, 6, 2(42), 102-143.

Lyakhov, L.N. 1997. Multipliers of the mixed Fourier-Bessel transformation. Proc. Steklov Inst. Math., 214, 234-249.

Maz'ya, V.G. 1985. Sobolev Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 486 p.

Muckenhoupt, B. and Stein, E.M. 1965. Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 118, 17-92.

Neri, U. 1971. Singular Integrals, Springer Verlag, New York.

Safarov, Z.V. 2000. Some properties of an integral of Riesz-Bessel-Fourier poten tial type. (Russian) Tr. Ross. Assots. "Zhenshchiny-Mat.",7,1, Izdat. Chuvash. Gos. Univ., Cheboksary.101-105.

Serbetci, A. and Ekincioglu, I. 2004. , Boundedness of Riesz potential generated by generalized shift operator on Ba spaces, Czech. Math. J., 54(3); 579-589.

Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, 297 p.

Stempak, K. 1985. The Littlewood-Paley theory for the Fourier-Bessel transform, Mathematical Institute of Wroslaw, Preprint no. 45.

Torchinsky, A. 1986. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, 457 p. Orlando.

Trimeche, K. 1997. Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets, Applied and Computational Harmonic Analysis, 4, 97-112.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hilal KILIÇ

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 1984

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Fatih Sultan Mehmet Lisesi (2001)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2005)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2005-Aralık 2007)

Çalıştığı Kurum

ODTÜ Bilgisayar Mühendisliği Bölümü ÖYP Araştırma Görevlisi (2007-)