

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİNELY MEROMORF FONKSİYONLARIN
SINIR ÖZELLİKLERİ

Tuğba AKYEL
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2007

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİNELY MEROMORF FONKSİYONLARIN
SINIR ÖZELLİKLERİ

Tuğba AKYEL
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU

GEBZE

2007



GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18.06.07 tarih ve 2007/21 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 27/08/2007 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Tuğba AKYEL'in tez çalışması Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Muammer KALYON

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

..... tarih ve / sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZ BAŞLIĞI: Finely Meromorf Fonksiyonların Sınır Özellikleri

YAZAR ADI: Tuğba AKYEL

Dört bölümden oluşan bu tezde kompleks düzlemin fine açık alt kümelerinde tanımlanmış finely meromorf fonksiyonların Hardy-Littlewood tipi teoremlerle verilen sınır özellikleri incelenmiştir. Bu teoremlerde fonksiyonun yalınkat olmamasının etkisi ve fonksiyon ile majorantın uç noktalardaki davranışı dikkate alınmıştır. Standart topolojide holomorf fonksiyonlar için verilen bu özellik aşağıdaki gibidir:

G bölgesinde analitik, $\overline{G}$ -de sürekli olan f fonksiyonu ve tezin birinci bölümünde bahsedilen özellikleri sağlayan $\mu : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ majorantı için sınırdaki

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

özelliklerinden

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \overline{G}, \zeta \neq z$$

bölge özelliği elde edilir.

Bu tezde bu tip problemler standart topolojiden farklı olarak fine topolojide tanımlanmış finely meromorf fonksiyonlar için incelenmiştir.

Tezin birinci bölümünde problemin kısa tarihçesi ve ortaya konuluşu ele alınmıştır. İkinci bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, konkav fonksiyonun tanımı verilmiş ve bilogaritmik konkav majorantlar sınıfı tanıtılmıştır. İkinci kısımda dağınıklık kavramının tanımı, hipoharmonik, finely holomorf, finely meromorf fonksiyonların tanımları ve kullanılan temel özellikleri hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde finely meromorf fonksiyonlar için Hardy-Littlewood tipi teoremler verilmiştir. Dördüncü bölüm de iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda yerel karakterli teoremler, ikinci kısımda ise, global karakterli teoremler ispatlanmıştır.

SUMMARY

THESIS TITLE: Contour-Solid Theorems for Finely Meromorphic Functions

THESIS AUTHOR: Tuğba AKYEL

In this thesis which is divided into four parts, boundary properties of finely meromorphic functions, defined on finely open subsets of complex plane, given with theorems of Hardy-Littlewood type, are investigated. In these theorems the effect of multivalence and the behaviours of the function and majorant on the end points are taken into account. In Standard topology, for holomorphic functions these properties are given as follows:

The function f is holomorphic in open set G and continuous in $\overline{G}$, the majorant $\mu : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ is satisfying the mentioned properties in the second part of the thesis. Using the following property at the boundary

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

the domain property

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \overline{G}, \zeta \neq z$$

is obtained.

In this thesis, such types of problems are examined for the finely meromorphic functions, defined on the fine topology differently from standard topology.

In the first part of the thesis, brief history and display of the problem exist. The second part consists of two sections. In the first section, the definition of concave function is given and the class of bilogarithmic concave majorant is introduced. In the second section, the information about the term thinness, the definition and the used basic characteristics of the finely hypoharmonic, finely holomorphic, finely meromorphic functions is given. In the third part, theorems of Hardy-Littlewood types are given. The fourth part consists of two sections. In the first section, theorems with local character, in the second section, theorems with global character are proved.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada beni tez öğrencisi olarak kabul eden, bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan, değerli eleştiri ve fikirleri ile beni yönlendiren Sayın Hocam Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca deneyimlerinden ve değerli bilgilerinden faydalandığım Sayın Doç. Dr. Mansur İSMAİLOV'a, deneyimlerini benimle paylaştığı için çalışma arkadaşım Araştırma Görevlisi Işıl ÖNER'e teşekkür ederim.

Tez jürimde yer almayı kabul edip, değerli vakitlerini bana ayırdıkları için Sayın Prof. Dr. Muammer KALYON'a ve Sayın Yrd. Doç Dr. Coşkun YAKAR'a çok teşekkür ederim.

Sonsuz sabırlarını, güvenlerini, maddi ve manevi desteklerini her daim hissettiğim beni her zaman, her konuda destekleyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR	4
1.1. Majorantlar	4
1.2. Finely Hipoharmonik ve Finely Meromorf Fonksiyonlar	6
3. HARDY-LITTLEWOOD TİPİ TEOREMLER	13
3.1. Yerel Karakterli Teoremler	13
3.2. Global Karakterli Teoremler	14
4. İSPATLAR	16
5. SONUÇ	21
KAYNAKLAR	25
ÖZGEÇMİŞ	26

1 GİRİŞ

Bu tezde, finely meromorf fonksiyonların yalınkat olmamasının etkisi ve uç noktalarda fonksiyon ile majorantın davranışı dikkate alınarak bilogaritmik konkav majorantlı Hardy-Littlewood tipi teoremler yerel ve global karakterli olarak incelenmiştir.

Bu tip teoremler öncelikle holomorf fonksiyonlar için ele alınmıştır. Holomorf fonksiyonlar için bu teoremlerin uygulandığı alanlar olarak Riemann sınır değer problemi, Cauchy tipi ve singüler integraller, yaklaşım teorisinin düz ve ters problemleri v.s. gösterilebilir.

$\widehat{\mathbb{C}}$ genelleştirilmiş kompleks düzlem, $G \subset \mathbb{C}$ açık küme, f fonksiyonu $\overline{G}$ -da sürekli ve G -de analitik olsun. $G \subset \mathbb{C}$ kümesi ve $\mu : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ şeklinde tanımlanan $\mu(\delta)$ majorantı hangi özellikleri sağlamalıdır ki, aşağıdaki gerektirmeler doğru olsunlar:

1. Eğer

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

ise,

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq C\mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \overline{G}, \zeta \neq z \quad (1.1)$$

elde edilir; burada $C \geq 1$ sabiti ζ ve z -den bağımsızdır.

2. $z_0 \in \partial G$ sabit noktası için

$$|f(\zeta) - f(z_0)| \leq \mu(|\zeta - z_0|) \quad \forall \zeta \in \partial G, \zeta \neq z_0$$

ise,

$$|f(\zeta) - f(z_0)| \leq C\mu(|\zeta - z_0|) \quad \forall \zeta \in \overline{G}, \zeta \neq z_0$$

elde edilir; burada $C \geq 1$ sabiti ζ -den bağımsızdır.

Holomorf fonksiyonlar için bu tip problemler ilk G. H. Hardy, J.E. Littlewood, S. E. Warschawski, J. L. Walsh, W. E. Sewell tarafından ortaya konmuştur. G. H. Hardy [6], J.E. Littlewood 1 gerektirmesini, G daire ve $\mu(\delta) = \delta^\alpha$ ($\alpha \in (0, 1]$) durumunda ispatlamışlardır. Ayrıca S. E. Warschawski [21] 2 gerektirmesini, J. L. Walsh ve W. E. Sewell [22] 1 gerektirmesini G Jordan bölgesi ve $\mu(\delta) = \delta^\alpha$

durumunda ispatlamışlardır, öyle ki, her iki sonuçta da $C = 1$ elde edilmiştir. $\mu(\delta) = \delta |\ln \delta|$ için de benzer sonuçlara ulaşılmıştır.

W. E. Sewell 1942 yılında yayınlanan [23] monografında, şimdi Warschawski-Walsh-Sewell problemleri olarak adlandırılan bir dizi açık problem ortaya koymuştur. Bunlardan birisi Warschawski-Walsh-Sewell'in yukarıdaki koşullar altında elde ettikleri sonuçlarını Jordan bölgelerinden daha genel bölgelere ve $\mu(\delta) = \delta^a$, $\mu(\delta) = \delta |\ln \delta|$ gibi majorantlarından daha genel olan süreklilik tipi majorantlara genelleştirilmesi problemidir.

Bu konuda L. G. Magranadze, M.B.Gagua, Y. L. Geronimus, Y. A. Brudny ve I. E. Hopenhaus tarafından bazı sonuçlar elde edilmiştir. Jordan bölgeleri (bazı sınırlamalar ile) ve $\mu(\delta) = |\ln \delta|^{-p}$ majorantı ($p > 0$) (ve buna benzer diğer somut majorantlar) için de sonuçlar alınmıştır [8,24]. Daire için genellikle kesin olmayan (süreklilik modülü üzerine ek şartlar konulduğunda kesin olan) bazı sonuçlar elde edilmiştir [26-20].

Warschawski-Walsh-Sewell problemleri 1971 yılında P. M. Tamrazov tarafından tam olarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar fonksiyonlar teorisi, tekil integral operatörler teorisi, sınır problemleri gibi çeşitli uygulamalarda yer almıştır. Ayrıca P. M. Tamrazov, problemin çözümü için yeni metotlar ortaya koymuştur. Bu metodlar problemi daha genel olarak formüle etmeye imkan vermiştir. P. M. Tamrazov çok genel olan çok bağlantılı (hatta sonsuz bağlantılı) bölge sınıfları ve sınırının aşağı kapasite yoğunluğu pozitif olan açık kümeler ve normal majorantlar sınıfı (bu sınıf süreklilik modülü tipli majorantlar sınıfından çok daha geniştir) için yukarıdaki sonuçları elde etmiştir [27-28].

1979 yılından başlayarak yukarıdaki problemler kuvvet majorantları (yani $\mu(\delta) = \delta^\alpha$) için Y. Y. Trahimchuck [25], A. I. Schekorskii [30], P. M. Tamrazov [18], F.W. Gehring, W. K. Hayman ve A. Hinkkanen [29] tarafından tam çözülmüşlerdir.

1984 yılında T .H. Aliyev ve P. M. Tamrazov tarafından aşağıdaki problemler ortaya konmuştur:

1. (1.1) ve (1.2) eşitsizliklerinde fonksiyonun yalınkat olmamasının etkisinin incelenmesi,
2. Yukarıdaki sonuçların meromorf fonksiyonlara genelleştirilmesi.

Kuvvet ve daha genel olan bilogaritmik konkav majorantlar için her iki problem T. H. Aliyev ve P. M. Tamrazov [1,8] tarafından Green fonksiyonu dilinde tam çözülmüştür. Ayrıca (1.1) ve (1.2)-de sınırda yalınkat olmamanın etkisi problemi de çözülmüştür [17]. 1 ve 2 problemleri normal majorantlar ve yeterince geniş kümeler için T. H. Aliyev tarafından çözülmüştür. T. H. Aliyev ve P. M. Tamrazov tarafından çok katlı meromorf fonksiyonlar için yukarıdaki problem incelenmiş ve geniş koşullar altında teoremler ispatlanmıştır. [1] çalışmasında meromorf fonksiyonlar için fonksiyonun yalınkat olmamasının ve sıfırlarının etkisi de göz önünde bulundurularak kesin sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bu çalışmada ispatlanan eşitsizlikler daha kesindir. Çünkü burada uç noktalarda fonksiyonun ve majorantın davranışı da göz önüne alınmıştır. [30,31] çalışmalarında meromorf fonksiyonlar ve normal majorantlar sınıfı için sonuçlar elde edilmiştir. Yine [11,12,15] çalışmalarında yukarıdaki sonuçlar meromorf fonksiyonlara genelleştirilmiştir ve kesin sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca Öklid topolojisi üzerinde ortaya konulan bu problemler ve elde edilen tüm bu sonuçlar, ondan daha kuvvetli olan fine topolojiye genelleştirilmiştir. Holomorf ve meromorf fonksiyon için elde edilen sonuçlara benzer sonuçlar, fine topolojide tanımlı finely holomorf ve finely meromorf denilen fonksiyonlar için de elde edilmiştir. [2] çalışmasında elde edilen sonuçlar, [16] çalışmasında finely meromorf fonksiyonlara genelleştirilmiştir; öyle ki, ele alınan fonksiyonun yakıncat olmaması ve sıfırlarının etkisi göz önüne alınmıştır.

Bu tezde 1 ve 2 problemi, uç noktalarda fonksiyon ile majorantın davranışı da hesaba katılarak, bilogaritmik konkav majorantlar sınıfı ve kompleks düzlemin fine açık kümesinde tanımlanmış finely meromorf fonksiyonlar için incelenmiş olup, daha kesin sonuçlar elde edilmiştir.

2 TEMEL TANIMLAR

2.1 Majorantlar

Majorantlar, fonksiyonların sonlu fark, düzgünlük ve aproksimatif özelliklerine göre sınıflandırılması amacıyla kullanılırlar.

Tanım 1 $v(t)$ fonksiyonu (a, b) aralığında tanımlanmış olsun. Eğer

$$v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \geq \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2}, \forall t_1, t_2 \in (a, b)$$

özellği sağlanıyorsa $v(t)$ -ye konkav fonksiyon denir.

Tanım 2 $\mu : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonu için $\log \mu(e^t)$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında konkav ise, $\mu(t)$ -ye bilogaritmik konkav fonksiyon denir.

$\mathfrak{M}$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan μ fonksiyonlar sınıfını işaretleyeceğiz:

- i. $\mu : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$;
- ii. $I_\mu = \{x : \mu(x) > 0\}$ bağlantılı kümedir;
- iii. $\log \mu(x)$ fonksiyonunun I_μ -ye kısıtlanması $\log x$ fonksiyonuna göre konkavdır.

μ majorant olarak isimlendirilir. I_μ kümesinin boş olmadığı bütün $\mu \in \mathfrak{M}$ -lerin sınıfını $\mathfrak{M}^*$ ile işaretleyelim. $\mu \in \mathfrak{M}^*$ için I_μ aralığının sol ve sağ uç noktalarını sırasıyla x_μ^- ve x_μ^+ ile işaretleyelim. Açık ki, $0 \leq x_\mu^- \leq x_\mu^+ \leq +\infty$ eşitsizliği sağlanır.

$x_\mu^- < x_\mu^+$ olduğunda kastedilen konkavlık koşulu aşağıdaki koşulların kombinasyonuna denktir:

- i. $\log \mu(x)$ fonksiyonu (x_μ^-, x_μ^+) aralığında $\log x$ fonksiyonuna göre konkavdır;
- ii. $\log \mu(x)$ fonksiyonu I_μ kümesinde alttan yarı süreklidir.

$\mu \in \mathfrak{M}$ için

$$\mu_0 := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \mu(x)}{\log x}, \quad \mu_\infty := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(x)}{\log x}$$

limitleri mevcut olup,

$$-\infty < \mu_0 \leq +\infty, \quad -\infty \leq \mu_\infty < +\infty, \quad \mu_0 \geq \mu_\infty. \quad (2.1.1)$$

$x_\mu^- > 0$ (benzer olarak $x_\mu^+ < +\infty$) ise, $\mu_0 = +\infty$ (uygun olarak $\mu_\infty = -\infty$) kabul edeceğiz. Eğer $\mu \equiv 0$ ise, μ_0 ve μ_∞ olarak (2.1.1) eşitsizliklerini sağlayan keyfi sonlu sayıları kabul etmek olur. $\mu_0 < +\infty$ eşitsizliği sağlandığında, m_0 ile $m_0 - 1 < \mu_0 \leq m_0$ koşulunu sağlayan tam sayısını, $\mu_\infty > -\infty$ eşitsizliği sağlandığında m_∞ ile $m_\infty \leq \mu_\infty < m_\infty + 1$ koşulunu sağlayan tam sayısını işaretleyeceğiz.

Her sabitlenmiş $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in (0, +\infty)$ için $\mu(x) := \beta x^\alpha$ fonksiyonu $\mathfrak{M}^*$ sınıfındandır ve buradan $\mu_0 = \mu_\infty = \alpha$ alırız. Eğer α tamsayı ise, $m_0 = m_\infty = \alpha$ olur. M ve M^* sınıfları [18]-de incelenmiştir.

Açıktır ki, $\mu(\delta) = \delta^\alpha$ kuvvet majorantları $\mathfrak{M}$ sınıfındandır.

Teoremlerin ispatlarında da kullanılacak olan ve [16]-da yer alan aşağıdaki notasyonları verelim:

- i. $\lambda : (0, +\infty) \rightarrow [-\infty, +\infty)$;
- ii. $I_\lambda = \{x : \lambda(x) > -\infty\}$ bağlantılı kümedir;
- iii. $\lambda(x)$ fonksiyonunun I_λ -ya kısıtlanmış $\log x$ fonksiyonuna göre konkavdır.

I_λ kümesinin boş olmadığı bütün $\mu \in L$ -lerin sınıfını L^* ile işaretleyelim. $\mu \in L^*$ için I_λ aralığının sol ve sağ uç noktalarını sırasıyla x_μ^- ve x_μ^+ ile işaretleyelim. Açıktır ki, $0 \leq x_\mu^- \leq x_\mu^+ \leq +\infty$ eşitsizliği sağlanır. $\lambda(\cdot)$ fonksiyonu L veya L^* sınıfındayken, $\exp \lambda(\cdot)$ fonksiyonu $\mathfrak{M}$ veya $\mathfrak{M}^*$ sınıflarında yer alır.

$x_\mu^- < x_\mu^+$ olduğunda kastedilen konkavlık koşulu aşağıdaki koşulların kombinasyonuna denktir:

- i. $\lambda(x)$ fonksiyonu (x_μ^-, x_μ^+) aralığında $\log x$ fonksiyonuna göre konkavdır;
- ii. $\log \lambda(x)$ fonksiyonu I_λ kümesinde alttan yarı süreklidir.

$\mu \in L$ için

$$\lambda^0 := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda(x)}{\log x}, \quad \lambda^\infty := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda(x)}{\log x}$$

limitleri mevcut olup,

$$\lambda^0 \geq \lambda^\infty, \quad \lambda^0 > -\infty, \quad \lambda^\infty < +\infty.$$

Her sabitlenmiş $\alpha \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ sayıları ve L^* -dan olan $\lambda(x) := \alpha \log x + \theta$ fonksiyonu için $\lambda_0 = \lambda_\infty = \alpha$ eşitliği elde edilir.

2.2 Finely Hipoharmonik ve Finely Meromorf Fonksiyonlar

Fine topoloji, 1940 yılında Henri Cartan tarafından bütün subharmonik fonksiyonların sürekli olduğu topolojilerin en zayıfı olarak tanımlanmıştır. O halde, sürekli olmayan fonksiyonların varlığından dolayı, fine topoloji bildiğimiz Euclid topolojisinden daha kuvvetlidir. Marcel Brelot [4, s.6, 9-17] tarafından tanımlanmış dağınıklık kavramıyla fine civarları karakterize etmek mümkündür. Fine topoloji Hausdorff özelliğini sağlar ve tam regülerdir. Öte yandan fine topoloji sayılabilirliğin birinci aksiyomunu da, ikinci aksiyomunu da sağlamaz [9, s.21]. Standart topolojide kapalı olan fine civarlar, fine civarların bazını oluşturmaktadır.

Tanım 3 *Aşağıdaki koşullardan biri sağlandığında $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ kümesi x_0 noktasında dağınıktır diyeceğiz:*

- i. $\widehat{\mathbb{C}}$ kapalı düzleminin standart topolojisinde x_0 noktası $E \setminus \{x_0\}$ kümesinin sınır noktası değil;
- ii. x_0 noktası $E \setminus \{x_0\}$ kümesinin sınır noktasıdır ve x_0 -ın bir civarında subharmonik olan öyle u fonksiyonu mevcuttur ki,

$$u(x_0) > \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0, x \in E \setminus \{x_0\}} u(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 4 *E kümesi $x_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ noktasında dağınık olmak üzere $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E := CE$ biçimindeki kümeye x_0 -ın fine civarı denir [4, s.11].*

Tanım 5 E kümesinin dağınık olmadığı $x \in \widehat{\mathbb{C}}$ noktaları kümesine E -nin $\widehat{\mathbb{C}}$ -daki bazı denir ve $b(E)$ ile işaretlenir. $\widetilde{E} := E \cup b(E)$ kümesine E -nin $\widehat{\mathbb{C}}$ -daki fine kapanışı denir. $\widehat{E}$ ile E -nin $\widehat{\mathbb{C}}$ -daki standart kapanışını gösterilir. Açıktır ki, $\widetilde{E} \subset \widehat{E}$. $\overline{E}$ ile $E \subset \mathbb{C}$ -nin $\mathbb{C}$ -deki standart kapanışı, $\widehat{\partial}_f E$ ile ise, E -nin $\widehat{\mathbb{C}}$ -daki fine sınırı işaretlenir. $\partial_f E := \mathbb{C} \cap \widehat{\partial}_f E$ olsun. $(E)_i := E \setminus b(E)$ kümesi, E -nin bütün irregular noktaları kümesini, $(E)_r := E \setminus (E)_i$ ise, bütün regüler noktaları kümesini göstermektedir.

Aşağıdaki özellik ancak iki boyutlu hal için geçerlidir. Eğer G fine açık ve fine bağlantılı küme ise (yani fine bölge), $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ noktasının G için fine dış nokta olması için gerek ve yeter koşul bu noktanın G için standart topolojide dış noktası olmasıdır. Yani fine bölgenin fine kapanışı standart topolojide de kapalıdır.

$E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ kümesi $x_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ noktasında dağınık ise, x_0 merkezli, istenildiği kadar küçük yarıçaplı ve E ile ortak noktası olmayan çemberler mevcuttur [4, s.97].

$z \in \mathbb{C}$ noktası için $\{z\}$ -de toplanmış Dirac ölçüsünü ε_z ile, ε_z -in $W \subset \widehat{\mathbb{C}}$ kümesine balayage (=sweeping out) ını ε_z^W ile işaretleyelim [3, s.25].

Tanım 6 Fine açık $D \subset \mathbb{C}$ kümesinde tanımlanmış, $u : D \rightarrow [-\infty, +\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağladığında, ona D -de finely hipoharmonik fonksiyon denir:

- i. u fonksiyonu D -de yukarıdan finely yarı süreklidir;
- ii. Fine topolojinin D -ye izi, fine kapanışları D -ye dahil olan sınırlı fine açık V kümelerinin oluşturduğu

$$u(z) \leq \int_* u d\varepsilon_z^{CV} \quad \forall z \in V$$

eşitsizliğini sağlayan bir baza sahiptir.

Yukarıdaki $\int_*$ ile aşağı integral işaretlenmektedir (değişken işaretli fonksiyonların aşağı ve yukarı integralleri için [29, s.163-164]).

Tanım 7 Fine açık D kümesinde tanımlanmış ve D -nin fine yoğun alt kümesinde sonlu olan hipoharmonik fonksiyona finely subharmonik fonksiyon denir.

Tanım 8 $E \subset \mathbb{C}$ için, E -de $-\infty$ değerini alıp, $\mathbb{C}$ -da subharmonik olan bir fonksiyon mevcut ise, E -ye polar küme denir.

$E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ için $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E := FE$ ve $E \subset \mathbb{C}$ için $\mathbb{C} \setminus E := CE$ olsun.

$G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ fine açık küme ve $z \in G$ olsun.

Eğer FG polar olmayan küme ise, ω_z^G ile G -ye göre genelleştirilmiş harmonik ölçüyü işaretleyeceğiz. Eğer FG polar küme ise, G -ye göre harmonik ölçüyü $\omega_z^G = 0$ eşitliği ile tanımlayacağız. Açıktır ki, FG polar değil ise, o halde, $\omega_z^G \neq 0$. ω_z^G için herhangi durumda $z \in G$ noktasında G -ye göre harmonik ölçü terimini kullanacağız.

Tanım 9 Eğer G -nin her finely bağlantılı bileşeni T için, $Q \cap \partial_f T$ kümesi, $z \in T$ noktalarında pozitif harmonik ölçüye ($\omega_z^T(K) > 0$) sahip hiçbir K kompakt içermiyorsa, $Q \subset FG$ kümesine G -e nazaran nearly negligible-dır denir. Bu gerektirme aşağıdaki duruma denktir: Ya FG polardır (o halde, Q -da polardır) yada G -nin her finely bağlantılı bileşeni T için $\partial_f T$ polar değildir ve Q kümesi iç harmonik ölçüsü sıfır olan bir kümedir ve $z \in T$. Eğer $E \subset FG$ kümesi G -nin her finely bağlantılı bileşeni T için logaritmik kapasitesi pozitif olan ($Cap(K) > 0$) $K \subset \partial_f T$ kompakt alt kümesi içermiyorsa, E kümesine G -e nazaran nearly negligible-dır denir. Özel halde iç logaritmik kapasitesi sıfır olan herhangi $E \subset FG$ kümesi G -e nazaran nearly negligible-dır.

Eğer T , G -nin finely bağlantılı bileşeni ve $z \in G$ ise, $\omega_z^G = \omega_z^T(K)$ eşitliği doğrudur.

Tanım 10 $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ fine açık cümle olsun. $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağladığı taktirde ona D -de finely holomorf fonksiyon denir: Keyfi $z \in D$ noktasının $\widehat{\mathbb{C}}$ -da kompakt olan öyle $V \subset D$ fine civarı mevcuttur ki, φ -nin V -ye izi, V -nin bir açık civarında holomorf olan fonksiyonun V -ye izi ile çakışıyor [8].

$\widehat{\mathbb{C}}$ -da finely D açık kümesini ele alalım.

B.Fuglede aşağıdakini ispatlamıştır [3, s.96], [3, Teorem 4].

Önerme 1 E , fine açık D kümesinin polar alt kümesi, u fonksiyonu $D \setminus E$ -de hipoharmonik ve E -nin her noktasının bir fine civarında yukarıdan sınırlı olsun.

Bu takdirde u fonksiyonunun $D \setminus E$ —ye tek hipoharmonik devamı vardır ve bu devam

$$u(z) = \text{fine} \lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in D \setminus E} u(\zeta) \quad \forall z \in E$$

formülü ile belirlenir.

Finely holomorf fonksiyonların sıfırları hakkındaki aşağıdaki önerme Fuglede'nin [3] çalışmasında yer almaktadır.

Eğer f fonksiyonu G —de finely holomorf ise, $k(f, w)$ ile $f(w)$ değerinin w noktasındaki mertebesi gösterilsin.

Önerme 2 D fine bölgesinde tanımlanmış finely holomorf fonksiyonun sıfırları kümesinin kuvveti sayılabilir den fazla değildir. Fine açık D kümesinde finely holomorf fonksiyonun her a sıfırının mertebesi sonlu olup aşağıdaki eşdeğer koşullarla belirlenir:

- i. $f^n(a) \neq 0$ ve $\forall k < n$ için $f^k(a) = 0$;
- i'. D —de finely holomorf olan $\exists F$ fonksiyonu vardır ki, $F(a) \neq 0$ ve $f(z) = (z - a)^k F(z)$, $\forall z \in D$;
- ii. $k(f, a)$, f fonksiyonunun sıfırının mertebesi.

Tanım 11 a noktası civarında tanımlanan $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, k negatif tam sayı ve F , $F(a) \neq 0$ fonsiyonu bu civarda finely holomorf olmak üzere $f(\zeta) = (\zeta - a)^k F(\zeta)$ şeklinde yazılabiliyorsa, ona a noktasında finely meromorf fonksiyon denir. D —nin her noktasında finely meromorf olan fonksiyona D —de finely meromorf fonksiyon denir.

Tümleyeni (yani CG) polar olmayan fine açık $G \subset \mathbb{C}$ kümesi için, $w, z \in \mathbb{C}$, $w \neq \zeta$ olmak üzere,

$$g_G(w, z) = \int \log \frac{|w - z|}{|w - \zeta|} d\varepsilon_\zeta^{CG}(z)$$

formülü ile tanımlanan Green fonksiyonu mevcuttur.

$g_G(w, \zeta)$ ile sınırının logaritmik kapasitesi pozitif olan fine açık $G \subset \mathbb{C}$ kümesinin genelleştirilmiş Green fonksiyonunu işaretleyelim.

$B \subset \mathbb{C}$ açık küme $t \in (0, 1)$, $w, z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $l_t(w, z) = \log \max \{t, |w - z|\}$ olsun.

$$H_B(l_t(w, \cdot), \zeta) := \int l_t(w, \cdot) d\varepsilon_\zeta^{CB}(z) \quad (2.2.1)$$

işaretleyelim.

Aşağıdaki önerme P.M.Tamrazov 'un [18] çalışmasındaki önermenin benzeridir.

Önerme 3 *Keyfi $\zeta \in B$ ve $w \in \mathbb{C}$ değişkeni için*

$$\lim_{t \rightarrow 0} H_B(l_t(w, \cdot), \zeta) =: h_B(w, \zeta) \quad (2.2.2)$$

limiti mevcut olup, $w \in \mathbb{C}$ değişkenine göre finely subharmoniktir ve

$$h_B(w, \zeta) - \log |w - \zeta| = g_G(w, \zeta) \quad \forall \zeta \in B, w \in \mathbb{C} \quad (2.2.3)$$

formülü sağlanır.

İspat. $\zeta, w \in B$ için $t \rightarrow 0$ koşulunda $l_t(w, \zeta)$ monoton azalarak $\log |w - \zeta|$ -ye yaklaşır. (2.2.1)-e göre (2.2.2) limiti mevcut olup,

$$h_B(w, \zeta) = \int \log |w - \zeta| d\varepsilon_\zeta^{CB}(z) \quad \forall \zeta \in B, w \in \mathbb{C}$$

koşulunu sağlar. Green fonksiyonunun tanımına göre, (2.2.3) formülünü alırız. ■

G kümesi $\widehat{\mathbb{C}}$ -da fine açık ve $z \in \widehat{\partial}_f G$ olsun. $u : G \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ve $f : G \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ fonksiyonları için aşağıdaki fine üst limitleri tanıtalım:

$$f \text{ inel} \sup_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G} u(\zeta) =: \widetilde{u}_{G,f}(z)$$

$$f \text{ inel} \sup_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G} |f(\zeta)| =: \overline{f}_G(z)$$

G kümesi $\mathbb{C}$ -da fine açık ve $a \in CG$ sabit bir nokta olsun.ve $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu için

$$f_{a,G} := \begin{cases} \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow a, \zeta \in G} \frac{\log|f(\zeta)|}{|\log|\zeta-a||}, & a \in \partial_f G \\ 0, & a \notin \partial_f G \end{cases} \quad (2.2.4)$$

$$f_{\infty,G} := \begin{cases} \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow \infty, \zeta \in G} \frac{\log|f(\zeta)|}{\log|\zeta|}, & \infty \in \widehat{\partial}_f G \\ 0, & \infty \notin \widehat{\partial}_f G \end{cases} \quad (2.2.5)$$

işaretleyelim.

Eğer f fonksiyonu G -de finely meromorf bir fonksiyon ise, $k(f, w)$ ile $f(w)$ değerinin w noktasındaki mertebesi gösterilsin.

$z \in \widehat{\mathbb{C}}$, G , $\mu \in \mathfrak{M}^*$ ve f fonksiyonu için aşağıdaki formüllerle belirlenen $s(z, f(\cdot)) =: s(z, f(\cdot), G, \mu)$ sayılarını işaretleyelim.

$$s(z, f(\cdot)) := \begin{cases} \left(\frac{f(\cdot)}{\mu(|\cdot - z|)} \right)_{z,G}, & x_\mu^- = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ 0, & x_\mu^- > 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$s(\infty, f(\cdot)) := \begin{cases} \left(\frac{f(\cdot)}{\mu(|\cdot|)} \right)_{\infty,G}, & x_\mu^+ = +\infty \\ 0, & x_\mu^+ < +\infty \end{cases}$$

Eğer $\mu = 0$ ise, $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ için $s(z, f(\cdot)) = 0$ varsayılır. $\mu \in \mathfrak{M}$ için eğer $\mu_0 \neq +\infty$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise, $s(z, f(\cdot)) = f_{z,G} + \mu_0$; eğer $\mu_\infty \neq -\infty$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise, $s(\infty, f(\cdot)) = f_{\infty,G} - \mu_\infty$.

$G \subset \mathbb{C}$ fine açık küme, $f : G \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ şeklinde tanımlanmış meromorf fonksiyon ve $\mu \in \mathfrak{M}$ olsun. Aşağıdaki koşullara bakalım:

$(A, \infty) \in b(CG)$ ve $\infty \in b(T)$ olmak üzere G kümesinin fine bağlantılı T bileşeni için $f_{\infty,G} < +\infty$ eşitsizliği sağlanır;

$(B, \infty) \notin b(CG)$, $\mu_\infty > -\infty$ ve $f(\zeta) = fineo(|\zeta|^{m_\infty+1})$, $\zeta \rightarrow \infty$, $\zeta \in G$;

$(B_0, \infty) \notin b(CG)$, $\mu_\infty \geq 0$ ve $f(\zeta) = fineo(|\zeta|^{m_\infty+1})$, $\zeta \rightarrow \infty$, $\zeta \in G$

ve $z \in \mathbb{C}$ sabit bir nokta ise, aşağıdaki koşullara bakalım:

$(A, z) \in b(CG)$ ve $z \in b(T)$ olmak üzere G kümesinin fine bağlantılı T bileşeni için $f_{z,G} < +\infty$ eşitsizliği sağlanır;

$(B, z) \notin b(CG)$, $\mu_0 < +\infty$ ve $f(\zeta) = fineo(|\zeta - z|^{m_0-1})$, $\zeta \rightarrow z$, $\zeta \in G$;

$(B_1, z) \quad z \notin b(CG), \mu_0 \leq 1$ ve $f(\zeta) = fineo(|\zeta - z|^{m_0-1}), \zeta \rightarrow z, \zeta \in G$.

G kümesi $\mathbb{C}$ -de fine açık, $a \in CG$ sabit bir nokta ve $u : G \rightarrow [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu için

$$u_{G,f}^a := \begin{cases} \overline{\lim_{\zeta \rightarrow a, \zeta \in G}} \frac{u(\zeta)}{|\log|\zeta - a||} & a \in \partial_f G, \\ 0 & a \notin \partial_f G. \end{cases}$$

$$u_{G,f}^\infty := \begin{cases} \overline{\lim_{\zeta \rightarrow \infty, \zeta \in G}} \frac{u(\zeta)}{|\log|\zeta||} & \infty \in \widehat{\partial}_f G, \\ 0 & \infty \notin \widehat{\partial}_f G. \end{cases}$$

olsun.

$\lambda \in L$ olsun. Aşağıdaki koşulları göz önüne alalım:

$(A', \infty) \quad \infty \in b(CG)$ ve $\infty \in b(T)$ olmak üzere G kümesinin fine bağlantılı T bileşeni için $u_{T,f}^\infty < +\infty$ eşitsizliği sağlanır;

$(B', \infty) \quad \infty \notin b(CG)$ ve ∞ -un $u(\zeta) \leq \lambda(|\zeta - a|) + t, \forall \zeta \in G \cap V$ özelliğinin sağlandığı bir V fine komşuluğu, ayrıca $t \in \mathbb{R}$ sabiti mevcuttur;

$(A', a) \quad a \in b(CG)$ ve $a \in b(T)$ olmak üzere G kümesinin fine bağlantılı T bileşeni için $u_{z,G}^a < +\infty$ eşitsizliği sağlanır;

$(B', a) \quad a \notin b(CG)$ ve a -nın $u(\zeta) \leq \lambda(|\zeta - a|) + t, \forall \zeta \in G \cap V$ özelliğinin sağlandığı bir V fine komşuluğu, ayrıca $t \in \mathbb{R}$ sabiti mevcuttur.

3 HARDY-LITTLEWOOD TİPİ TEOREMLER

3.1 Yerel Karakterli Teoremler

Teorem 4 $a \in \mathbb{C}$ sabit nokta; $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ fine sınırı $(\partial_f G)$ polar olmayan fine açık küme; $\mu \in \mathfrak{M}$; $f : G \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ sonlu sayıda kutba sahip finely meromorf fonksiyon ve $p_1, p_2, \dots, p_N$, f – in tüm farklı kutup noktaları olsun. Varsayalım ki,

$$\overline{\lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G}} |f(\zeta)| \leq \mu(|z - a|) \quad \forall z \in (\partial_f G) \setminus \{a\}. \quad (3.1.1)$$

$z_1 := a$, $z_2 := \infty$ olmak üzere, birbirinden bağımsız olarak her $s = 1, 2$ için (A, z_s) veya (B, z_s) koşullarından biri sağlansın.

Bu taktirde $\forall \zeta \in G \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ için

$$\begin{aligned} |f(\zeta)| \leq \mu(|\zeta - a|) \exp \left[\sum_{\gamma=1}^N g_G(p_\gamma, \zeta) k(f, p_\gamma) - \sum_{w: f(w)=0} g_G(w, \zeta) k(f, w) + \right. \\ \left. + g_G(a, \zeta) s(a, f(\cdot)) + g_G(\infty, \zeta) s(\infty, f(\cdot)) \right] \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

Not 5 $g_G(a, \zeta) s(a, f(\cdot))$ ve $g_G(\infty, \zeta) s(\infty, f(\cdot))$ ifadeleri pozitif değildir ve bundan dolayı (2.1) eşitsizliği genellikle [16] çalışmasındaki (3) eşitsizliğinden daha kesindir.

Teorem 6 $a \in \mathbb{C}$ sabit nokta; $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ fine sınırı $(\partial_f G)$ polar olmayan fine açık küme; $Q \subset FG$ kümesi a ve ∞ noktalarını içersin; $\mu \in \mathfrak{M}$; $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ finely meromorf fonksiyon olsun. $z_1 := a$, $z_2 := \infty$ olmak üzere, birbirinden bağımsız olarak her $s = 1, 2$ için (A, z_s) veya (B, z_s) koşullarından biri sağlansın. f – in G – deki tüm kutup noktaları kümesi P ve

$$\lambda(x) := \log \mu(x) \quad \forall x > 0,$$

$$u(\zeta) := \log |f(\zeta)| - \sum_{p \in P} g_G(p, \zeta) k(f, p) \quad \forall \zeta \in G$$

olsun. Varsayalım ki, G kümesinin her fine bağlantılı T bileşeni için aşağıdaki koşullar sağlanıyor:

Q kümesi T -ye nazaran *nearly negligible* olup,

$$\tilde{u}_{T,f} < \infty \quad \forall z \in (\partial_f T) \setminus \{a\};$$

$$\tilde{u}_{T,f}(z) \leq \lambda(|z - a|) \quad \forall z \in (\partial_f T) \setminus Q.$$

Bu taktirde

$$\tau(b) = s \left(b, f(\cdot) \exp \left[- \sum_{p \in P} g_G(p, \zeta) k(f, p) \right], G, \mu \right), b \in \hat{\mathbb{C}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & |f(\zeta)| \exp \left[- \sum_{p \in P} g_G(p, \zeta) k(f, p) \right] \leq \mu(|\zeta - a|) \times \\ & \times \exp \left[- \sum_{w: f(w)=0} g_G(w, \zeta) k(f, w) + g_G(a, \zeta) \tau(a) + g_G(\infty, \zeta) \tau(\infty) \right] \quad \forall \zeta \in G \setminus P \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2 Global Karakterli Teoremler

Teorem 7 $G \subset \mathbb{C}$ fine açık küme; $\mu \in \mathfrak{M}$; $f : \tilde{G} \cap \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ise, $\tilde{G} \cap \mathbb{C}$ -deki tüm kutup noktaları kümesi P olan G -de finely meromorf bir fonksiyon olsun ve

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq \mu(|z - \zeta|) \quad \forall z, \zeta \in \partial_f G, \zeta \neq z$$

koşulunu sağlasın.

f -in G -ye kısıtlanması (A, ∞) veya (B_0, ∞) koşullarından birini sağlasın.

Varsayalım ki, G kümesinin her fine bağlantılı T bileşeni için f -in $(\tilde{T} \cap \mathbb{C}) \setminus P$ kümesine kısıtlanması finely süreklidir. Bu taktirde

$$|f(\zeta) - f(z)| \exp \left[- \sum_{p \in P} (g_G(p, \zeta) + g_G(p, z)) k(f, p) \right] \leq \mu(|\zeta - z|) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left[- \sum_{w \in G, f(w)=f(\zeta)} g_G(w, z) k(f, w) + g_G(z, \zeta) s(z, (f(\cdot) - f(z))) + \right. \\ & \left. + g_G(\infty, \zeta) s(\infty, (f(\cdot) - f(z))) \right] \quad \forall z \in (\partial_f G)_r, \quad \forall \zeta \in (\tilde{G} \cap \mathbb{C}) \setminus P, \quad z \neq \zeta. \end{aligned}$$

Teorem 8 G, μ, f Teorem 7-nin tüm koşullarını sağlasın. Ek olarak varsayalım ki, $z_0 \in (CG)_i \cup G$ sabit bir nokta, $\mu_0 < +\infty$ ve

$$|f(\zeta) - f(z_0)| = \text{fineo}(|\zeta - z_0|^{m_0-1}) \quad (\zeta \rightarrow z_0, \quad \zeta \in G \setminus P).$$

Bu taktirde

$$\begin{aligned} & |f(\zeta) - f(z_0)| \exp \left[- \sum_{p \in P} (g_G(p, \zeta) + g_G(p, z_0)) k(f, p) \right] \leq \mu(|\zeta - z_0|) \times \\ & \times \exp - \left[\sum_{w \in G, f(w)=f(\zeta)} g_G(w, z_0) k(f, w) + g_G(z_0, \zeta) s(z_0, (f(\cdot) - f(z_0))) \right. \\ & \left. + g_G(\infty, \zeta) s(\infty, (f(\cdot) - f(z_0))) \right] \quad \forall \zeta \in \tilde{G} \setminus P, \quad \zeta \neq z_0, \infty. \end{aligned}$$

Teorem 9 G, μ, f Teorem 7-nin tüm koşullarını sağlasın. Ek olarak varsayalım ki, $\mu_0 < 1$. Bu taktirde

$$\begin{aligned} & |f(\zeta) - f(z)| \exp \left[- \sum_{p \in P} (g_G(p, \zeta) + g_G(p, z)) k(f, p) \right] \leq \mu(|\zeta - z|) \times \\ & \times \exp - \left[\sum_{w \in G, f(w)=f(\zeta)} g_G(w, z) k(f, w) + g_G(z, \zeta) s(z, (f(\cdot) - f(z))) \right. \\ & \left. + g_G(\infty, \zeta) s(\infty, (f(\cdot) - f(z))) \right] \quad \forall z, \zeta \in (\tilde{G} \cap \mathbb{C}) \setminus P \quad z \neq \zeta. \end{aligned}$$

[16] çalışmasında yer alan aşağıdaki önermeyi verelim:

Lemma 10 $a \in \mathbb{C}$ sabit nokta; $G \setminus \{a\}$ finely açık küme; $\mu \in \mathfrak{M}$; $f : \tilde{G} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ fonksiyonu finely meromorf olsun. $z_1 := a$, $z_2 := \infty$ olmak üzere, birbirinden bağımsız olarak her $s = 1, 2$ için (A, z_s) ve ya (B, z_s) koşullarından biri sağlansın. O halde, G kümesi, $\log |f(\zeta)|$, $\lambda(x) := \log \mu(x)$, ve aynı $s = 1, 2$ için (A', z_s) veya (B', z_s) koşulları sağlanır ve z_s , f -in G 'deki tüm kutup noktaları kümesi P -den finely ayrık ve f fonksiyonunun z_s -e finely holomorf devamı mevcuttur.

4 İSPATLAR

İspat. (Teorem 6) ■

G kümesine ve f fonksiyonuna Lemma 10-u uygularsak, G kümesi, $u(\zeta) := \log |f(\zeta)|$, $\lambda(x) := \log \mu(x)$ fonksiyonları ve $s = 1, 2$ için (A', z_s) veya (B', z_s) koşulları sağlanır. $\sum_{p \in P \cap G(\zeta)} g_G(p, \zeta) k(f, p)$ serisinin G -nin bağlantılı bileşenlerindeki ıraksak olduğu noktaları göz önüne almayacağız. Bu taktirde genelliği kaybetmeden varsayacağız ki, seri $G \setminus P$ kümesinde yakınsaktır. Şimdi varsayalım ki, Z kümesi f fonksiyonunun G -deki sonlu sayıda herhangi sıfırları kümesidir. G -de aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$v_Z(\zeta) := u(\zeta) + \sum_{z \in Z} g_G(w, \zeta) k(h, w), \quad \zeta \in G.$$

$Q_Z := Q \cup (FG)_i$ şeklinde işaretlenen Q_Z kümesi, G kümesinin her fine bağlantılı T bileşenine nazaran nearly negligible olur. $v_Z(\zeta)$ fonksiyonu G -de hipoharmoniktir ve

$$\check{u}_{G,f}(z) = (\check{v}_Z)_{G,f}(z) \quad \forall z \in (\partial_f G) \setminus Q_Z.$$

Bu taktirde $v_Z(\zeta)$ fonksiyonu [2]-deki Teorem 8.2-nin tüm koşullarını gerçekler ve

$$v_Z(\zeta) \leq \lambda(|\zeta - a|), \quad \forall \zeta \in G \setminus P \quad (4.1)$$

eşitsizliği sağlar. Bu taktirde $\forall \zeta \in G \setminus P$ için

$$|f(\zeta)| \exp \left[- \sum_{p \in P} g_G(p, \zeta) \cdot k(h, p) \right] \leq \mu(|\zeta - a|) \exp \left[- \sum_{z \in Z} g_G(w, \zeta) k(h, w) \right]. \quad (4.2)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan $\tau(a) \leq 0$ ve $\tau(\infty) \leq 0$ elde edilir. $\tau(a) := \tau^1$ ve $\tau(\infty) := \tau^2$ işaretleyelim. $i = 1, 2$ olmak üzere ya $\tau_i = 0 = \tau^i$ ya da $\tau_i \in (\tau^i, 0]$ şeklindedir.

$$\mu(x) \leq \sigma x^\alpha \quad \forall x > 0 \quad (4.3)$$

$\forall x > 0$ olmak üzere herhangi $\sigma > 0$ ve $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ sayılarını ele alalım. Yeni

bir fonksiyon dahil edelim:

$$v_{Z,\tau_1,\tau_2}(\zeta) := v_Z(\zeta) - \log(\sigma |\zeta - a|^\alpha) - g_G(a, \zeta) \tau_1 - g_G(\infty, \zeta) \tau_2.$$

v_{Z,τ_1,τ_2} fonksiyonu G -de hipoharmoniktir ve G -nin a ve ∞ dan fine ayrık her fine alt bölgesinde üstten sınırlıdır. Ayrıca tüm regüler $z \in (\partial_f G) \setminus \{a\}$ sınır noktalarında (2.2.3) eşitliğini de göz önüne alırsak, aşağıdakini alırız:

$$\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G} v_{Z,\tau_1,\tau_2}(\zeta) \leq 0.$$

(4.2)-den

$$v_Z(\zeta) \leq \log(\sigma |\zeta - a|^\alpha) \quad (4.4)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\forall \zeta \in G : |\zeta - a| \geq 1$ için $g_G(a, \zeta) \leq C_1$ ve $g_G(\infty, \zeta) \leq C_2 + \log |\zeta - a|$ eşitsizliklerini sağlayan C_1 ve C_2 sabit sayıları mevcuttur.

Eğer $\tau_2 = 0$ ise, v_{Z,τ_1,τ_2} fonksiyonunda (4.4) eşitsizliğini de kullanırsak

$$v_{Z,\tau_1,\tau_2}(\zeta) \leq -\tau_1 C_1 \quad \forall \zeta \in G : |\zeta - a| \geq 1 \ (r \geq 1)$$

eşitsizliğini alırız.

Eğer $\tau^2 < \tau_2 \leq 0$ ise, $\zeta \rightarrow \infty, \zeta \in G$ için

$$v_{Z,\tau_1,\tau_2}(\zeta) \leq u(\zeta) - \log(\sigma |\zeta - a|^\alpha) - C_1 \tau_1 - [C_2 + \log |\zeta - a|] \tau_2 \leq O(1).$$

Çünkü

$$u^\infty = \left(f(.) \exp \left[- \sum_{p \in P} g_G(p, \zeta) k(f, p) \right] \right)_{\infty, G}$$

ya $-\infty - a$ eşittir ve o halde, yeterince büyük $|\zeta|$ için, ∞ -un

$$u(\zeta) < (\alpha + \tau_2) \log |\zeta - a|$$

özellığının sağlandığı bir fine komşuluğu mevcuttur ya da $u^\infty \neq -\infty, \lambda^\infty \neq -\infty$ ve yeterince büyük $|\zeta|$ için, ∞ -un $u(\zeta) < (u_{G,f}^\infty + \tau_2 - \tau^2)$ özelliğinin sağlandığı

bir fine komşuluğu mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned} u(\zeta) - (\alpha + \tau_2) \log |\zeta - a| &< (u^\infty - \tau^2 - \alpha) \log |\zeta - a| = (\mu_\infty - \alpha) \log |\zeta - a| \leq 0 \\ u(\zeta) &< (\alpha + \tau_2) \log |\zeta - a| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\forall \zeta \in G : 0 < |\zeta - a| \leq 1$ için $g_G(\infty, \zeta) \leq C_3$ ve $g_G(a, \zeta) \leq C_4 - \log |\zeta - a|$ eşitsizliklerini sağlayan C_3 ve C_4 sabit sayıları mevcuttur.

Eğer $\tau_1 = 0$ ise, V_{Z, τ_1, τ_2} fonksiyonunda (4.4) eşitsizliğini de kullanırsak

$$v_{Z, \tau_1, \tau_2}(\zeta) \leq -\tau_2 C_3 \quad \forall \zeta \in G : 0 < |\zeta - a| \leq 1 \quad r \in (0, 1]$$

eşitsizliğini alırız.

Eğer $\tau^1 < \tau_1 \leq 0$ ise, $\zeta \rightarrow a$, $\zeta \in G$ için

$$v_{Z, \tau_1, \tau_2}(\zeta) \leq u(\zeta) - \log(\sigma |\zeta - a|^\alpha) - [C_4 - \log |\zeta - a|] \tau_1 - C_3 \tau_2 \leq O(1).$$

Çünkü

$$u^a = \left(f(\cdot) \exp \left[- \sum_{p \in P} g_G(p, \zeta) k(f, p) \right] \right)_{a, G}$$

ya $-\infty$ -a eşittir ve o halde, a -nın $u(\zeta) < (\alpha - \tau_1) \log |\zeta - a|$ özelliğinin sağlandığı bir fine komşuluğu mevcuttur ya da $u^a \neq -\infty$, $\lambda^a \neq +\infty$ ve a -nın

$$u(\zeta) < (-u_{G, f}^a - \tau_1 + \tau^1)$$

özelliğinin sağlandığı bir fine komşuluğu mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned} u(\zeta) - (\alpha - \tau_1) \log |\zeta - a| &< (-u^a + \tau^1 - \alpha) \log |\zeta - a| = (\mu_0 - \alpha) \log |\zeta - a| \leq 0 \\ u(\zeta) &< (\alpha - \tau_1) \log |\zeta - a| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece gösterdik ki, $v_{Z, \tau_1, \tau_2}(\zeta)$ fonksiyonu a -nın ve ∞ -un fine komşuluk-

larında üstten sınırlıdır. Bu taktirde,

$$\tilde{v}_{Z, \tau_1, \tau_2}(z) \leq 0 \quad \forall z \in \widehat{\partial}_f G.$$

Regüler sınır noktalarında da $\tilde{v}_{z, \tau_1, \tau_2}(z) \leq 0$ eşitsizliği doğrudur. Buradan [2]-deki Lemma 1-den (finely hipoharmonik fonksiyonlar için maksimum prensibi) $\forall \zeta \in G$ için $v_{Z, \tau_1, \tau_2}(\zeta) \leq 0$ eşitsizliğini alırız. $\tau_1 \rightarrow \tau^1$ ve $\tau_2 \rightarrow \tau^2$ işlemlerini yapalım. Bu taktirde

$$v_z(\zeta) \leq \log(\sigma |\zeta - a|^\alpha) + g_G(a, \zeta) \tau^1 + g_G(\infty, \zeta) \tau^2 \quad (4.5)$$

eşitsizliği elde edilir.

$\zeta_0 \in G \setminus P$ olsun. (4.2)-ye dayanarak sadece $\mu \in \mathfrak{M}^*$ durumunu göz önüne almamız yeterlidir. Eğer $x_\mu^- < |\zeta_0 - a| < x_\mu^+$ ise, o halde, (4.3) eşitsizliğini ve $\mu(|\zeta_0 - a|) = \sigma |\zeta_0 - a|^\alpha$ eşitliğini sağlayacak $\sigma > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ sayıları seçebiliriz. Buradan ve (4.5) eşitsizliğinden

$$v_z(\zeta_0) \leq \log \mu(|\zeta_0 - a|) + g_G(a, \zeta_0) \tau^1 + g_G(\infty, \zeta_0) \tau^2 \quad (4.6)$$

elde edilir. Eğer $|\zeta_0 - a| \notin [x_\mu^-, x_\mu^+]$ ise, $\sigma > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ sayılarını, (4.3)-ü sağlayacak ve $\sigma |\zeta_0 - a|^\alpha$ sayısını, büyüklüğü önceden verilmiş keyfi $\varepsilon > 0$ sayısını aşmayacak şekilde seçmek mümkündür. Bundan dolayı (4.4)-den $v_z(\zeta) = -\infty$ olur. O halde (2.10) $\zeta_0 \in G \setminus P$ için sağlanır. Bu sonucudan Z -in keyfi sonlu sıfırlar kümesi olduğu göz önüne alınarak, (3.1.3) eşitsizliği elde edilir.

İspat. (Teorem 7) ■

Keyfi bir $\omega \in (\partial_f G)_r$ alıp sabitleyelim. a yerine ω alarak, Teorem 6-nın $\phi(\zeta) := f(\zeta) - f(\omega)$ ($\zeta \in G$) fonksiyonuna uygulanabilirliğini kontrol ederim. Gerçekten $\forall z, \zeta \in \partial_f G$ için sağlanan özellikten, (2.1) eşitsizliğine benzer eşitsizlik (yani $\lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G} |\phi(\zeta)| \leq \mu(|z - \omega|)$, $\forall z \in (\partial_f G) \setminus \{\omega\}$) elde edilir. G kümesinin her fine bağlantılı T bileşeni için f fonksiyonunun $(\tilde{T} \cap \mathbb{C}) \setminus P$ kümesine kısıtlanması finely sürekli ve $\omega \in (\partial_f G)_r \subset b(CG)$ olduğundan açıktır ki, f fonksiyonu (A, ω) koşulunu sağlar (yani, $\omega \in b(CG)$ ve $\omega \in b(T)$ olmak üzere G kümesinin fine bağlantılı T bileşeni için $f_{z, G} < +\infty$ eşitsizliği sağlanır). Dolayısıyla ϕ fonksiyonu da bu koşulu sağlar. $z = \infty$ noktası için (A, ∞) koşu-

lundan $\phi_{\infty,G} < +\infty$ koşulunu alırız. Eğer $\infty \in \left(\widehat{\partial}_f G\right)_i$ ve $\mu_\infty \geq 0$ ise, (B_0, ∞) (yani $\infty \notin b(CG)$, $\mu_\infty \geq 0$ ve $f(\zeta) = fineo(|\zeta|^{m_\infty+1})$, $\zeta \rightarrow \infty$, $\zeta \in G$) koşulu $\phi(\zeta) = fineo(|\zeta|^{m_\infty+1})$, $\zeta \rightarrow \infty$, $\zeta \in G$ koşuluna eşdeğerdir. Demek ki, $\phi(\zeta)$ fonksiyonu Teorem 6-nın koşullarını sağlar. (3.1.1)-e benzer bir koşulun sağlandığı açıktır. Teorem 6-a göre $\omega \in (\partial_f G)_r$, $\forall \zeta \in \left(\tilde{G} \cap \mathbb{C}\right) \setminus P$ için

$$|f(\zeta) - f(\omega)| \exp \left[- \sum_{p \in P} (g_G(p, \zeta) + g_G(p, \omega)) k(f, p) \right] \leq \mu(|\zeta - \omega|)$$

$$\exp \left[- \sum_{w \in G: f(w)=f(\zeta)} g_G(w, \omega) k(f, w) + g_G(\omega, \zeta) s(\omega, (f(\cdot) - f(\omega))) \right. \\ \left. + g_G(\infty, \zeta) s(\infty, (f(\cdot) - f(\omega))) \right]$$

elde ederiz. ω yerine z yazarsak, (ω -nın seçiminden bunu yapabiliriz) istenilen eşitsizliği alırız.

Teorem 8 ve Teorem 9-u ispatlamak için Teorem 7-den faydalanarak, [2]-deki Teorem 4 ve Teorem 5-in ispatındaki benzer işlemleri yapmak gerekiyor.

5 SONUÇ

Bu tezde kompleks düzlemin fine açık kümelerinde tanımlanmış finely meromorf fonksiyonlar için, yalınkat olmamanın etkisi de hesaba katılarak, uç noktalarda fonksiyonun ve majorantın davranışına bağımlı olarak daha kesin eşitsizlikler ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

1. T.G. Aliyev and P.M. Tamrazov, A contour--solid problem for meromorphic functions, taking into account nonunivalence, Ukrainian Math. Zh. 39 (1987), 683--690 (Russian).
2. P.M. Tamrazov, Finely holomorphic and subharmonic functions in contour-solid problems. Annales Academia Scientiarum Fennica Mathematica, Vol. 26, 2001, 325-360.
3. Fuglede B. Finely harmonic functions // Lect. Notes Math.- Berlin etc.: Springer, 1972.- No 289.- 188 p.
4. M. Brelot, On topologies and boundaries in potential theory, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
5. P.M. Tamrazov "contour and solid problems for holomorphic functions and mappings" Preprint 83.75 Ins. Nac. Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev (1983).
6. Hardy G.H. and Littlewood J.E. Some properties of fractional integrals, II.- Math. Zs. 34, 1923, 3.
7. P.M. Tamrazov, Contour--solid results for holomorphic functions. Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 50(1986) no.4, 193-205; English transl. in Math. USSR Izvestiya Vol. 29(1987), N1.
8. P.M. Tamrazov and T.G. Aliyev, A "contour--solid" problem for meromorphic functions, taking into account zeros and non-univalence, Dokl. Akad. Nauk SSSR 228 (1986), no. 2; English transl. in Soviet Math. Dokl. Vol. 33 (1986), no. 3.
9. P.M. Tamrazov, Contour and solid structural properties of holomorphic functions of a complex variable, Uspekhi Mat. Nauk 28 (1973), no. 1 (169), 131 - 161; English transl. in Russian Math. Surveys 28 (1973), 131 - 173.

10. Fuglede B. Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.- 1976.- 2.- P. 113-127.
11. Tamrazov P.M., Aliyev T., Contour and solid problem for meromorphic functions with regard to zeros and multivalence. -Kiev, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint 1984, no.78, 16 pp. MR 87a:30052.
12. Aliyev T., Tamrazov P.M., Meromorphic functions in a contour- solid problem taking into account zeros and nonunivalence. -Kiev, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint 1985, no.46, 16 pp. MR 86k:30036.
13. P.M. Tamrazov,"Local contour and solid problem for subharmonic functions" Preprint 84.52 Ins. Nac. Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev (1984).
14. P. M. Tamrazov,"Local contour and solid problem for subharmonic functions" Complex Variables Theory Appl., 1986, 7, 235. 246.
15. Aliyev T., Tamrazov P.M., Contour-solid Theorem for Meromorphic Functions, taking into account multivalence // Progress in Analysis, vol.1, p.469- 476, World Sci.PubliShing River Edge, NJ, 2003. MR2032715.
16. Aliyev T., Finely meromorphic functions in contour-solid problems, 5-th ISAAC Congress , July 25-30, 2005 University of Catania, Italy, Abs. 125.
17. T.G. Aliyev, Irregular boundary zeros of analytic functions in contour--solid theorems, Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz \ 49 Ser .Rech. Deform. 28(1999), 45-53.
18. P.M. Tamrazov, Contour--solid results for holomorphic functions. Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 50(1986) no.4, 193-205; English transl. in Math. USSR Izvestiya Vol. 29(1987), N1.
19. Fuglede B. Value distribution of harmonic and finely harmonic morphisms and applications in complex analysis // Ibid.- 1986.- 11.- P. 11-136.

20. Geronimus Y. L., O nekotorykh svoistvakh funktsii, neprerivnykh v zamknutom kruge (Russian).-DAN USSR, 1954, v.98, No 6, p.889-891.
21. Warschawski S. Uber ein satz von O.D. Kellog.- Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, 1932, 1.
22. Walsh J.L. and Sewell W.E. Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials.- Duke Math. J., 6, 1940, 3.
23. Sewell W.E. Degree of approximation by polynomials in the complex domain, Princeton, 1942.
24. Tsuji M., Potential Theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.
25. Trohimchuk Y. Y., O differentsialnykh svoistvakh deistvitelnykh i kompleksnykh funktsii (Russian)- Ukr. Math. Zh., 1979, p.31, No 4, p.889-891.
26. Brudnyi Y. A., Gopengauz I. E. Obobshchenie odnoi teoremy Hardy and Littlewood (Russian) 1960, v.52, No 3/94/, p.891-894.
27. P.M. Tamrazov, Smoothness and polynomial approximation, Naukova Dumka, Kiev, 1975 (Russian).
28. P.M. Tamrazov, Solid inverse theorems of polynomial approximation for regular compact in the complex plane, Sov. Math. Dokl. 12 (1971), 855-858.
29. Bourbaki N., Integration-M.: Nauka, 1977, 600p.
30. Meromorphic functions in contour and solid problems with normal majorants. Reports of extended seminar of applied Mathem. Inst. I.N. Vekua, Tbilisi University, 1988, t.3, nl, p.21-24.

31. Tamrazov P.M., Aliyev T., Contour and solid theorem for meromorphic functions taking multivalence into account. 3-th ISAAC Congress , August 20-25, 20015 Freie Universitat Berlin, Germany,

ÖZGEÇMİŞ

1982 Zonguldak doğumlu Tuğba AKYEL, 2005 Maltepe Üniversitesi Matematik Bölümü mezunudur. Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü Yüksek Lisans eğitimine 2005-2006 Eğitim-Öğretim Yılı güz döneminde başlamıştır ve Geometri Anabilim dalında halen araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.