

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HASARLI MALZEMELERİN MİKRO ELASTİK TEORİLERLE
MODELLENMESİ VE ESHELBY TANSÖRLERİ**

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Ahmet KIRIŞ

Anabilim Dalı: MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ

Programı: MEKANİK

OCAK 2007

A. KIRIŞ	HASARLI MALZEMELERİN MİKRO ELASTİK TEORİLERLE MODELLENMESİ VE ESHELBY TANSÖRLERİ	2006
A. KIRIŞ	HASARLI MALZEMELERİN MİKRO ELASTİK TEORİLERLE MODELLENMESİ VE ESHELBY TANSÖRLERİ	2006
A. KIRIŞ	HASARLI MALZEMELERİN MİKRO ELASTİK TEORİLERLE MODELLENMESİ VE ESHELBY TANSÖRLERİ	2006
A. KIRIŞ	HASARLI MALZEMELERİN MİKRO ELASTİK TEORİLERLE MODELLENMESİ VE ESHELBY TANSÖRLERİ	2006
A. KIRIŞ	HASARLI MALZEMELERİN MİKRO ELASTİK TEORİLERLE MODELLENMESİ VE ESHELBY TANSÖRLERİ	2006

**HASARLI MALZEMELERİN MİKRO ELASTİK TEORİLERLE
MODELLENMESİ VE ESHELBY TANSÖRLERİ**

DOKTORA TEZİ
Y. Müh. Ahmet KIRIŞ
(Enstitü No: 509992117)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Kasım 2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 24 Ocak 2007

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Esin İNAN (Işık Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hilmi DEMİRAY (Kadir Has Ü.)
Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG (İTÜ)
Prof. Dr. Yalçın AKÖZ (Maltepe Ü.)
Doç. Dr. Fikret BALTA (İTÜ)

OCAK 2007

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında hasarlı malzeme mikromorfik teori ile modellenerek, malzeme özelliklerinin belirlenmesi amacıyla kullanılan homojenleştirme tekniklerinin çoğunda temel adım olarak kabul edilen Eshelby tansörleri mikromorfik teori ile elde edilmiştir. Doktora öncesi hep kaçmayı tercih ettiğim Mekanik konularına ilgi duymamı sağlayan, tez çalışmam süresince desteklerini esirgemeyen ve olabildiğince önümü açmaya çalışarak bana yeni bakış açıları kazandıran, kendisiyle çalışmanın bir zevk olduğunu özellikle belirtmek istediğim Sayın Hocam Prof. Dr. Esin İNAN' a ve tüm hayatım boyunca maddi manevi her konuda yanımda olan aileme ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kasım, 2006

Ahmet KIRIŞ

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ	1
2. KLASİK ESHELBY ÇÖZÜMÜ VE MORI-TANAKA YÖNTEMİ	12
2.1. Klasik Eshelby Tansörleri	12
2.1.1. Katkı maddesinden kaynaklanan elastik alanlar	13
2.1.2. Elipsoidal katkı maddesinden kaynaklanan elastik alanlar	16
2.2. Mori-Tanaka Homojenleştirme Yöntemi	20
2.2.1. Genel teori	21
2.2.2. Uygulama	24
3. MİKROMORFİK TEORİ	26
3.1. Mikromorfik Ortamın Lineer Bünye Denklemleri	27
3.2. Mikrogermeli Ortamın Lineer Bünye Denklemleri	29
3.3. Mikropolar Ortamın Lineer Bünye Denklemleri	31
3.4. Mikrojenleşen Ortamın Lineer Bünye Denklemleri	33
4. MİKROPOLAR ORTAM İÇİN ESHELBY ÇÖZÜMÜ	35
4.1. Temel Çözümler	35
4.1.1. Sınırsız elastik malzeme için temel çözüm	41
4.2. Katkı Maddesinden Kaynaklanan Elastik Alanlar	44
4.3. Eshelby Tansörleri	51
5. MİKROGENLEŞEN ORTAM İÇİN ESHELBY ÇÖZÜMÜ	54
5.1. Temel Çözümler	55
5.1.1. Sınırsız elastik malzeme için temel çözüm	58
5.2. Katkı Maddesinden Kaynaklanan Elastik Alanlar	61
5.3. Eshelby Tansörleri	66
6. MİKROGERMELİ ORTAM İÇİN ESHELBY ÇÖZÜMÜ	68
6.1. Temel Çözümler	69
6.1.1. Sınırsız elastik malzeme için temel çözüm	77

6.2. Katkı Maddesinden Kaynaklanan Elastik Alanlar	80
6.3. Eshelby Tansörleri	88
7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	90
KAYNAKLAR	94
ÖZGEÇMİŞ	103

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1 : Elementer ΔV hacminin boyutlandırılması.....	2
Şekil 1.2 : Mikromorfik teori ile hasarın modellenmesi.....	4
Şekil 2.1 : Ω Elipsoidal katkı maddesi, Σ , \mathbf{x} noktasında merkezlenmiş birim küre.....	17
Şekil 2.2 : Sınırlarda $\bar{\sigma}$ gerilmesine maruz bırakılmış kompozit, karşılaştırma malzemesi ve homojen durum	21
Şekil 3.1 : Mikro elemanın şekil değiştirmesi.....	26

SEMBOL LİSTESİ

$\varepsilon, \mathbf{e}, \gamma$: Mikromorfik elastisitede genleme tansörleri
\mathbf{S}	: Klasik Eshelby tansörü
\mathbf{u}	: Yerdeğiştirme vektörü
ϕ	: Uzaysal koordinatlarda mikro şekil değiştirme tansörü, (mikromorfik durum), mikro dönme vektörü (mikropolar ve mikrogermeli durum)
θ	: Hacimsel mikrogenleşme skaleri
\mathbf{t}	: Gerilme tansörü
\mathbf{s}	: Moment tansörü
\mathbf{m}	: Mikromorfik gerilme moment tansörü (mikromorfik durum), Mikrogerme vektörü (mikrogermeli durum)
ξ, Σ	: Mikroelemanın uzaysal ve maddesel koordinatlardaki konumları
χ, \mathcal{K}	: Mikro şekil değiştirme ve ters mikro şekil değiştirme tansörleri
$\mathbf{L}, \mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1$: Kompozit, matris ve katkı maddesinin malzeme özellikleri tansörleri
\mathbf{f}	: Kütle kuvvetleri vektörü
\mathbf{l}	: Kütle momentleri tansörü (mikromorfik durum) Kütle moment yoğunluğu vektörü (mikropolar, mikrogermeli durum)
l	: Kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğu
δ_{kl}	: Kronecker deltası
e_{klm}	: Permütasyon sembolü
λ, μ	: Lamé sabiti ve kayma modülü
ν	: Poisson oranı
σ, ν, η, τ	: Mikromorfik ortamın malzeme sabitleri
$\tau_i (i = 1, \dots, 11)$: Mikromorfik ortamın malzeme sabitleri
$\lambda_0, a_0, b_0, \lambda_1$: Mikrogenleşen ortamın malzeme sabitleri
$\kappa, \alpha, \beta, \gamma$: Mikropolar ortamın malzeme sabitleri

HASARLI MALZEMELERİN MİKRO ELASTİK TEORİLERLE MODELLENMESİ VE ESHEBY TANSÖRLERİ

ÖZET

Mühendislik alanlarının hemen hepsinde kullanılan malzemelerin dayanıklılık sınırlarının belirlenmesi problemi geçmişten günümüze önemini yitirmeyen temel mühendislik uğraşlarından biridir. Malzemelerin mukavemeti doğal olarak malzemenin iç yapısındaki atomik bağların zamanla kopması sonucu oluşan ve ortamda yayılı olduğu kabul edilen mikro kusurlarla ve bu kusurların giderek gelişmesi ve birleşerek makro yapıda kusur ve çatlaklar oluşturması sonucu ortaya çıkan hasarla yakından ilişkilidir. Güvenlik için malzemede hasar her durumda kontrol edilebilmeli, hasar oluşumu ve gelişimi izlenerek, malzemenin kalan ömrü ve taşıyabileceği yük ile ilgili öngörü hesapları yapılabilir. Bunun için de öncelikle malzemenin bünye denklemlerinin bilinmesi gerekmektedir. Bu gerekçe ile öncelikle malzemede hasar durumu uygun büyüklüklerle tanımlanarak, bu büyüklükleri yönetici denklemler bulunmalıdır. Yukarıda verilen tanımlarla hasarın malzemede oluşturduğu davranış değişikliğini inceleyen bilim dalı Hasar Mekaniği olarak isimlendirilir.

Malzemeler klasik Sürekli Ortamlar teorisinde her ne kadar homojen malzeme olarak tanımlansa da gerçekte mikro boyuta inildiğinde bu homojen yapıyı bozan çok sayıda ve farklı boyut ve nitelikte mikro kusurlara sahip olduğu açıktır. Bu mikro ölçekteki kusurlar, yapı ve dağılımlarına bağlı olarak dış etkilerin de varlığı ile zaman içinde gelişerek, büyüyerek, birleşerek çatlak, yırtık, boşluk gibi mikro yapı özelliğinden ayrılıp makro yapıda bozukluklar haline dönüşmekte ve malzeme mukavemetinin çok önemli bir problemini oluşturmaktadırlar. Bu nedenle de klasik teoride göz önüne alınmayan iç yapıdaki bu mikro kusurların bir biçimde işleme katılması gerekmektedir. İşte mikro yapıdan kalkarak gözle görülür, makro yapıda bozukluklar halini alabilen ve malzeme mukavemetini büyük ölçüde azaltan bu problem Sürekli Hasar Mekaniğinin konusunu oluşturmaktadır.

Yukarıda değinildiği gibi öncelikle malzemede hasarı tanımlayabilmek için bir kavrama veya bir büyüklüğe gereksinim vardır. İlk kez bu kavram “*hasar parametresi*” olarak Kachanov tarafından malzemenin kesit alanındaki boşluk yoğunluğu göz önünde tutularak yerel olarak ölçülen ve malzemenin bütünlüğü içinde tanımlanan yeni ve skaler bir değişken olarak tanımlanmıştır. Bu konuda farklı tanımlar da yapılabilir. Örneğin Nunziato ve Cowin malzemedeki boşluğun hacim oranını bağımsız bir kinematik değişken kabul ederek lineer elastik malzemelerde hasarı bu orandaki değişim olarak tanımlamışlardır.

Mikro yapısal hasar modelleri farklı bakış açılarıyla birçok araştırmacı tarafından incelenmiş ve skaler hasar parametresi kavramı pek çok basit problemde başarı ile kullanılmıştır. Ancak çok eksenli yükleme durumlarında oluşan hasarı tek bir sayıyla

yani bir skaler olarak tanımlamak çok zordur. Bu nedenle hasarın vektörel ve tansörel bir büyüklük olarak tanımlanması daha gerçekçi görünerek bu alanda çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Ancak yapısal nedenlere dayanmadan yapılan bu tür tanımlamalar dar çerçevede uygulama alanı bulmuş ve genel bir teori kurabilmek için mikro yapıya inmenin gerekliliği konu üzerinde çalışan pek çok araştırmacı tarafından kabul edilmiştir.

Mikro yapıya inerek konuyu ele alan ilk çalışmalardan biri Markov tarafından yapılmıştır. Markov mikro boyuttaki kusurların ortamda bir mikro distorsiyon oluşturduğu öngörüsünden yola çıkarak “hasar tansörü” olarak tanımlanabilecek olan “mikro distorsiyon” tansörünü ortamın makro boyuttaki yerdeğiştirme alanından tamamen bağımsız ve elementer hacim içinde ek bir serbestlik derecesi olarak tanımlamıştır. Bu hasar tansörü kavramı Eringen ve Şuhubi tarafından geliştirilen mikromorfik teoride verilen mikro şekil değiştirme tansörü ile benzeşmektedir. Bu teori malzemenin her parçacığının klasik şekil değiştirmeden bağımsız olarak ek bir mikro şekil değiştirme yapabildiği fikrine dayanmaktadır ve tüm malzemeler gerçekte heterojen bir yapıya sahip oldukları için klasik teoriye oranla fiziksel gerçekleri çok daha iyi yansıtmaktadır. Ancak lineer izotrop durumda bile gerek malzeme sabiti sayısının fazlalığı gerekse ek bünye denklemlerine olan gereksinim mikromorfik teorisinin uygulama alanını çok kısıtlamış, bu nedenle parçacıkların mikro hareketi üzerine bazı kısıtlar getirilerek mikropolar, mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam gibi alt teoriler geliştirilmiştir. Böylece mikromorfik teorisinin özel durumları elde edilerek tanımları verilen bu alt teorilerle yeni modellemeler yapılabilme olanağı doğmuştur. Yine de bu alt teorilerin bilinmeyen malzeme katsayılarını elde etme konusunda zorluklar içerdiğini vurgulamak gerekir.

Bilinmeyen malzeme sabitlerinin bulunabilmesi için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan biri yapı olarak benzeşimi göz önüne alınarak geliştirilen kompozit malzeme analogisi ve kompozit malzemelerde kullanılan homojenleştirme yöntemleridir. Yukarıda verilen tanımı ile hasara bir mikro boşluklar dizisi olarak bakılabilir. Başlangıçta bozulmamış homojen katı bu bozulmaların etkisiyle heterojen hale gelir. Heterojen hale geldiğinde de ortam parçacık tipli bir kompozit malzeme gibi düşünülebilir.

Heterojen mikro yapıya sahip elastik bir ortamın etkin malzeme sabitlerinin belirlenmesi ile ilgili olarak yukarıda sözü edilen homojenleştirme yöntemlerinin başlıcaları “differential scheme”, “self-consistent” ve “Mori-Tanaka” yöntemleridir. Bu homojenleştirme yöntemlerinin birçoğunun temelinde, konunun öncülerinden Eshelby’ nin tanımladığı “eşdeğer dönüşüm tansörü” kavramı yatmaktadır. Eshelby eşdeğer dönüşüm tansörü katkı maddesinin (inclusion) serbest genlemesi ile matris genlemesi arasındaki ilişkiyi vermektedir ve elipsoidal bir katkı maddesi içinde homojendir. Bu homojen olma özelliği nedeniyle de Mori-Tanaka gibi homojenleştirme yöntemlerinde ilgili genlemeler analitik olarak yazılabilmekte ve bu da yöntemin genel kullanılabilirliği artırmakta ve matematiksel işlemlerde büyük ölçüde basitlik sağlayarak Mori-Tanaka yöntemini avantajlı hale getirmektedir.

Kompozit malzeme ile mikromorfik teori kullanılarak modellenen hasarlı malzeme arasındaki analogi ilk kez İnan tarafından kullanılmış ve etkin malzeme sabitlerini belirlemek için kompozitlerdeki gibi Mori-Tanaka yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca mikromorfik modellerle tanımlanan hasarlı malzemelerde malzeme sabitlerini

belirlemek için Eshelby' nin eşdeğerlik ilkesini ve ünlü “elipsoidal boşluk” çözümü çalışmasını, Mori-Tanaka anlamında ortalama gerilme ile birleştirmiştir.

Bu tez çalışması kapsamında İnan tarafından önerilen modele benzer şekilde hasarlı malzemeler ile kompozit malzemeler arasındaki benzerlikten yararlanarak kompozitlerde kullanılan homojenleştirme yöntemleri ile hasarlı malzemelerin malzeme sabitlerinin bulunması için gerekli olan Eshelby tansörleri kavramı mikro elastik ortama genelleştirilmiştir. Bunun için öncelikle ortamın klasik şekil değiştirmeye ek olarak yalnız mikrodönme yapabildiği varsayılarak, mikropolar teoride katkı maddesinden kaynaklanan elastik alanlar verilerek literatürde Cheng ve He tarafından elde edilmiş olan mikropolar Eshelby tansörlerine değinilmiştir. Ancak mikropolar teori sıvı kristaller veya malzemeyi sağlamlaştırmak için daha rijit elastik özelliklere sahip katkı maddelerinin malzemeye katıldığı parçacıklı kompozitler gibi malzemelerin modellenmesi için uygunsa da, başlangıçta mikro düzeyde bulunan hasarın zamanla gelişeceği gerçeğini modele yansıtamaması nedeniyle hasarlı malzemelerin modellenmesi için uygun olmamaktadır.

Bu doğrultuda malzemede hasarın zamanla büyüyerek çoğalması nedeniyle, boşlukların dönmesi yerine genişleşeceğini varsaymak, dolayısıyla da hasarı mikropolar ortam teorisi ile değil de mikrogenleşen ortam teorisi ile modellemek çok daha anlamlı olmaktadır. Ortamın klasik teoriye ek olarak hacimsel mikrogenleşme ve mikrodönme yapabildiği varsayılan Eringen' in mikrogermeli ortam teorisinde mikropolar etkilerin ihmal edilmesiyle elde edilen mikrogenleşen ortam teorisi Cowin ve Nunziato tarafından geliştirilen boşluklu lineer elastik malzeme teorisine de tam olarak örtüşmektedir. Bu amaçla tez kapsamında öncelikle hasarın bu mikrogenleşmesini modele daha iyi yansıtacağı düşüncesi ile mikrogenleşen ortam teorisi ile modelleme yapılmıştır. Bu nedenle öncelikle mikrogenleşen ortam için yerdeğiştirme ve mikrogenleşme skaleri için temel çözümler elde edilmiştir. Ayrıca ilk olarak bu çalışmada “ekgenleme” ve “mikroekgenleme” kavramları mikrogenleşen ortam teorisine genişletilerek Green fonksiyonları yardımıyla katkı maddesinden kaynaklanan elastik alanlar hesaplanmıştır. Cheng ve He tarafından mikropolar ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine benzer şekilde mikrogenleşen ortam için Eshelby tansörleri bu tez çalışması kapsamında elde edilerek yayınlanmıştır. Cheng ve He tarafından mikropolar ortam için dört tane dört boyutlu Eshelby tansörü elde edilirken, Kırış ve İnan tarafından mikrogenleşen ortam için beklentilere uygun şekilde biri dört, ikisi iki ve biri de skaler olmak üzere toplam dört Eshelby tansörü hesaplanmıştır. Ayrıca bu tansörlerin yine mikropolar ortamda olduğu gibi küresel katkı maddeleri içinde bile homojen olmadıkları ve mikrogenleşen ortam sabitlerinin sıfır alınması durumunda klasik Eshelby tansörlerine indirgendikleri gösterilmiştir.

Hasarlı malzemelerin mikrogenleşen ortam teorisi ile modellemesinin, mikropolar ortam modeline göre daha gerçekçi olduğu açıktır. Ancak bu halde özellikle mikro hasarlar düşünüldüğünde malzemede hasarlı yani boşluklu kısmın malzemenin kalan kısmının hacmine oranı hayli düşüktür. Bu durumda malzemeyi mikrogenleşen ortam teorisi ile modelleme düşüncesi yani hasarlı kısmın mikrogenleşmeye maruz kalacağını düşünerek hareket etmek, hasarın dışındaki bölgelerin şekil değiştirmesinin de klasik şekil değiştirmeye ek olarak yalnız mikrogenleşme yapabileceği kısıtını getirdiğinden hem pratikte hem de teoride sıkıntılar ortaya çıkarmaktadır. Gerçekte yukarıda da değinildiği gibi tüm malzemeler heterojen yapıya sahiptir ve bu nedenle de mikromorfik teori malzeme modellemesi için en

uygun teoridir. Ancak mikromorfik modelde yukarıda sözü edilen güçlükler ortaya çıktığından, hasarlı malzemeyi mikrodönme ve mikrogenleşen ortam teorilerinin birleşimi olan mikrogermeli ortam teorisi ile modellemek daha gerçekçi bir model olan mikromorfik modele göre eksik kalsa da, yalnız mikropolar veya yalnız mikrogenleşen ortam modeline göre daha anlamlı olacağı açıktır.

Mikrogermeli ortam teorisi malzeme parçacıklarının klasik şekil değiştirmeden bağımsız olarak hem mikrodönme hem de hacimsel bir mikrogenleşme yapabildiği fikrine dayanmaktadır. Mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorilerinin hasarlı malzemeyi modellemedeki eksikliğini gidermek için tez çalışması kapsamında ikinci olarak teorinin anılan üstünlüğünden dolayı hasarlı malzeme mikrogermeli ortam teorisi ile modellenmiştir. Mikrogermeli ortam için statik durumda yerdeğiştirme ve mikrodönme vektörleri ile mikrogenleşme skaleri için temel çözümler verilmiş ve ilk olarak bu çalışmada “ekgenleme” ve “mikroekgenleme” kavramları mikrogermeli ortam teorisine genişletilmiştir. Bu temel çözümlerden faydalanılarak Green fonksiyonları yardımıyla, küresel katkı maddesi içeren ve mikrogermeli ortam teorisi ile modellenen malzemeler için elastik alanlar hesaplanmıştır. Elde edilen bu elastik alanlar mikrogermeli ortamın genleme ifadelerinde kullanılarak mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorilerine benzer şekilde Eshelby tansörleri mikrogermeli ortam teorisine genişletilmiştir.

Tez çalışması kapsamında mikrogermeli ortam teorisi için dört tane dört boyutlu, iki tane iki boyutlu ve bir skaler olmak üzere toplam yedi Eshelby tansörü hesaplanmış ve mikrogermeli ortam için elde edilen bu sonuçlar yayınlanmıştır. Çalışmada mikrogermeli ortam için hesaplanan Eshelby tansörlerinin mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorileri için elde edilenlere benzer olarak yine küresel katkı maddeleri içinde bile homojen olmadıkları gösterilmiştir. Ayrıca mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinin mikrogenleşen ortam sabitlerinin sıfır alınması durumunda mikropolar ortam için Cheng ve He tarafından hesaplanan Eshelby tansörlerine ve mikropolar ortam sabitlerinin sıfır alınması durumunda Kırış ve İnan tarafından mikrogenleşen ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine indirgendiği gösterilmiştir. Ayrıca tüm mikro malzeme sabitlerinin sıfır alınması durumunda da klasik Eshelby tansörleri elde edilmektedir. Mikrogermeli ortam teorisi için bulunan sonuçlarda da beklendiği gibi makro şekil değiştirmeden kaynaklanan ekgenleme (eigenstrain) ile ilgili Eshelby tansörlerinde hem mikrodönme hem de mikrogenleşme ile ilgili alan büyüklüklerinin katkısı gözlenirken, mikrodönmeden kaynaklanan mikroekgenleme (microeigenstrain) ile ilgili Eshelby tansörlerine mikrogenleşme ile ilgili büyüklüklerden hiçbir katkı gelmediği gözlenmiştir. Benzer şekilde mikrogenleşmeden kaynaklanan mikroekgenleme (microeigenstrain) ile ilgili Eshelby tansörlerine mikrodönme ile ilgili alan büyüklüklerinin etkisi olmadığı görülmektedir.

Sonuç olarak, tez çalışması kapsamında mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam teorileri için yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogenleşme alanlarının temel çözümleri elde edilmiştir. İlk olarak “ekgenleme” ve “mikroekgenleme” kavramları mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam teorilerine genişletilerek Green fonksiyonları yardımıyla katkı maddelerinden kaynaklanan alanlar mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam için elde edilmiştir. Bu elastik alanlar mikrogenleşen ve mikrogermeli ortamın genleme ilişkilerinde kullanılarak sırasıyla mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam için Eshelby tansörleri bulunmuş ve küresel katkı maddeleri içinde homojen olmadıkları gösterilmiştir. Mikrogenleşen ortam için elde edilen tansörlerin

mikrogenleşen ortam sabitlerinin sıfır alınması durumunda klasik Eshelby tansörlerine, mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinin de uygun malzeme sabitlerinin sıfır alınması ile sırasıyla mikropolar, mikrogenleşen ve klasik Eshelby tansörlerine indirgendikleri gösterilmiştir.

Hem Cheng ve He tarafından mikropolar ortam için hem de Kırış ve İnan tarafından mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam için Eshelby tansörlerinin elde edilmesinde temel amaç bu tansörlerin homojenleştirme yöntemlerinde kullanılarak mikro elastik teorilerle modellenen hasarlı malzemelerin etkin elastik özelliklerinin belirlenebilmesidir. Her ne kadar tez kapsamında hasarlı malzemeler temel alınmışsa da, elde edilen sonuçlar geneldir ve her üç mikro elastik teori için elde edilen bu Eshelby tansörleri yalnız hasarlı malzemelerin etkin özelliklerinin belirlenmesinde değil, bu teorilerle modellenmesi uygun olan kompozit malzemelerin malzeme sabitlerinin belirlenmesinde de kullanılabilir.

Ancak bu hedefe ulaşmak için Mori-Tanaka ve benzeri homojenleştirme yöntemlerinin mikropolar, mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam teorilerine genelleştirilmesi gerekmektedir. Klasik Eshelby tansörlerinin hemen birçok farklı şekli ifade etmek için yeterli olan elipsoidal katkı maddeleri içinde homojen olmasına rağmen, bahsedilen mikro elastik teoriler için elde edilen Eshelby tansörlerinin küresel katkı maddeleri içinde bile homojen olmaması, homojenleştirme işlemlerinin klasik teoride olduğu gibi analitik olarak ifade edilmesini engellemekte ve ancak katkı maddeleri üzerinde sayısal integrasyon ve ortalama alma işlemleri ile sayısal sonuçlar elde edilebilmektedir.

Literatürde Sharma ve Dasgupta tarafından mikropolar ortam için Cheng ve He tarafından elde edilen Eshelby tansörlerinin katkı maddeleri üzerinde ortalama değerleri kullanılarak Mori-Tanaka homojenleştirme yöntemini mikropolar teoriye genişleterek gerçekleştirdikleri bir çalışma bulunmakla birlikte, yukarıda bahsedilen güçlükler nedeniyle mikropolar teori için bile henüz homojenleştirme işlemi tam olarak çözülebilmemiş değildir. Gelecekte yapılacak çalışmalarda, elde edilen bu Eshelby tansörlerinin kullanılarak homojenleştirme probleminin mikropolar, mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam teorilerine genişletilmesi ve böylece hem mikro elastik teorilerin klasik teoriye getirdiği katkı nedeniyle klasik malzeme sabitlerinin daha yaklaşık hesaplanabileceği, hem de yeni ortaya çıkan mikro malzeme sabitlerinin belirlenebileceği beklenmektedir.

MODELING OF DAMAGED MATERIALS WITH MICRO ELASTIC THEORIES AND ESHELBY TENSORS

SUMMARY

In almost all engineering fields, the problem of the determination of strength of materials is one of the main engineering problems, which does not lose its importance so far. The strength of materials obviously relates to micro defects which arise due to breaking of the atomic bonds in materials inner structure and assumed as distributed in the medium and the damage which arise due to gradually growing of these defects. For safety, damage in materials should be kept under control in every situation, thus the formation and growing of damage should be observed in some way and to write the constitutive equations to predict the material's remaining life cycle and the allowable stress. To achieve this purpose, damage should be defined by convenient variables and included to the governing equations. This is called "Damage Mechanics" that investigate the phenomenon in the material as the result of damage in the way defined above. Although materials are defined as homogeneous in the classical theory of Continuum Mechanics, in reality, it is seen that materials have a lot of micro defects with different sizes and forms that violate the assumption. These defects, which are not taken into consideration in the classical theory, are the subject of Continuum Damage Mechanics.

The term "Continuum Damage Mechanics" is used by Kachanov by introducing a new variable which is locally measured as the ratio of the void density on the material's cross-sectional area and defined in the completeness of the material. Nunziato and Cowin assumed the volume ratio of voids as an independent kinematic variable and defined the damage in linear elastic materials as the changes in this ratio. The micro-structural damage models have investigated by many researchers with different point of view and the "scalar damage parameter" as defined above has been used in many simple problems, successfully. But, it is impossible to define damage with a scalar function in multi-directional loadings. Therefore, it seems more realistic to define damage as a vectorial or tensorial quantity as in the numerous studies in the field.

Markov defined the "micro-distortion" tensor as an additional degree of freedom in the elementary volume and as totally independent from the macro displacement field of media, by means of the prudence that the micro-defects forms a micro-distortion state in the medium. This damage tensor defined by Markov is similar to the micro deformation tensor in the theory of micro elastic solids defined by Eringen and Şuhubi. This theory is called as micromorphic theory which relies on the idea that every material particles of the material can make an additional micro deformation independent of the classical bulk deformation and reflects the physical realities a lot better than the classical theory because all materials have a heterogeneous micro

structure in nature. Unfortunately, the theory is extremely complex even for the linear isotropic case. Because it contains high number of material constants and there is a necessity for information about the materials in the microstructural level. Therefore it is urged to develop sub-theories of micromorphic theory like micropolar, microelongation and microstretch theories by imposing some limitations on the micro motion and to model the material with these special forms of the micromorphic theory. But, still there are similar difficulties in such sub-theories.

To overcome such difficulties occur in micromorphic theories, one way is to establish an analogy between damaged bodies and composite materials and then to use the homogenization methods known for composite materials to obtain the unknown material coefficients. Considering the above definition of the damage, it is possible to envision the damage as a sequence of micro voids. Initially, undeformed homogeneous solid becomes heterogeneous because of the effects of these defects. Then it can be considered as a particulate composite material. The main homogenization methods related to the identification of effective material constants of an elastic medium with heterogeneous micro-structure are; “differential-scheme”, “self-consistent”, “Mori-Tanaka” and “double inclusion”. The “equivalent transformation tensor” concept which is defined by one of the pioneers of the subject, Eshelby, constitutes the basis of the most of these methods. Eshelby’s equivalent transformation tensor gives the relation between the stress-free strain of the inclusion and the strain of matrix material and is homogeneous in ellipsoidal inclusions. Because of this homogeneity of the classical Eshelby tensor, the relevant strain quantities may be written analytically in the homogenization methods like Mori-Tanaka’s method and this situation increases the usability of the method and gives an advantage to Mori-Tanaka’s method by simplifying the mathematical processes.

In the literature, a new structural approach is proposed firstly by Inan by the use of Mori-Tanaka’s method to damage problems to overcome the difficulties of the micromorphic theory mentioned above and a similar homogenization technique is proposed to identify the effective material constants in the damaged material. In addition, Inan combined Eshelby’s equivalent principle and his famous work, “the solution of ellipsoidal inclusions” with the notion of average stress by means of Mori-Tanaka’s method.

In the scope of this thesis, the concept of Eshelby tensors, which is in the basis of most of the homogenization methods, is extended to micro elastic medium. To achieve this, first the medium is modeled by micropolar theory in which it is assumed that the material particles can only make microrotation in addition to the classical bulk deformation, and then the elastic fields due to inclusions are given and Eshelby tensors for micropolar theory presented by Cheng and He are discussed. Although micropolar theory is very convenient to model liquid crystals and particulate composites that have tougher inclusions than the matrix material, it is not much convenient to use to model the damage phenomenon, because it does not reflect the real characteristics of the damage at micro-scale.

Since damage occurs and increases gradually in material, it is more meaningful to take into account the micro elongation of the voids rather than the micro rotation of them, then to use the microelongation theory instead of the micropolar theory in the modeling of damage is more reasonable. As it is already mentioned, microelongation

and microstretch theories explain the development and the evaluation of damage in the material much better comparing to other theories, then we first focused ourselves to these theories and obtained the solutions for the displacement vector and the micro elongation scalar respectively. Furthermore, extending the idea of “eigenstrain” and “microeigenstrain” to microelongation theory, the elastic fields due to the inclusions are calculated with the help of Green’s functions concept. Also Eshelby tensors for microelongation theory, like micropolar Eshelby tensors obtained by Cheng and He, are found. While Cheng and He obtained four Eshelby tensors all in four dimension, four Eshelby tensors are calculated in this work for microelongation theory but only one of them is four dimensional, two are two dimensional and one as scalar, as expected. In addition, it is shown that Eshelby tensors obtained for microelongation theory are not homogeneous in even spherical inclusions like micropolar Eshelby tensors and they are reduced to the classical Eshelby tensor, when the microelongated material constants are taken as zero.

It is obvious that the modeling of damage in materials with microelongation theory is more realistic comparing to micropolar modeling. Nevertheless, especially when the micro character of damage is taken into account, the ratio of voids to the remaining part of the material is quite low. Thus, the idea of modeling of damage in materials with microelongation theory causes some inconveniences in both theoretical and practical works. Because it restricts the deformation of the remaining part of the material to make only microelongation in addition to classical bulk deformation. As mentioned above, almost all materials have heterogeneous structures, therefore it is best to model the damage in materials with micromorphic theory. But, because of the difficulties in micromorphic model, modeling of damaged material by the use of the microstretch theory that contains some advantages when compared modeling only with micropolar or microelongation theories, although it is not as perfect as micromorphic theory.

In this thesis, damaged materials are modeled secondly with microstretch theory, to overcome the deficiency of modeling the damaged materials with microelongation and micropolar theories. The fundamental solutions for displacement and microrotation vectors and microelongation scalar in static case are presented and the concepts of “eigenstrain” and “microeigenstrain” are defined and included to the microstretch theory. With the help of these solutions and the use of Green’s functions concept, the strain and micro strain fields are calculated for the material that contains spherical inclusions and modeled by microstretch theory and then Eshelby tensors are extended to the microstretch theory as similar to the micropolar and the microelongation theories.

We obtained total of seven Eshelby tensors; as four in four dimension, two in two dimension and one scalar for the microstretch theory in addition to Eshelby tensors found for the microelongation theory. It is shown that obtained Eshelby tensors for the microstretch theory similar to the Eshelby tensors calculated for micropolar and microelongation theories are not homogeneous even in spherical inclusions, unlike to the classical Eshelby tensor. Besides, it is also shown that obtained Eshelby tensors for microstretch theory may be reduced to Eshelby tensors calculated by Cheng and He for micropolar theory, by taking the zero limits of the proper material constants. Similarly, taking again zero limit of the material coefficients due to micropolar theory in Eshelby tensors for microstretch theory, one may arrive Eshelby tensors obtained by Kırış and İnan for microelongation theory and finally taking zero limit of

all material coefficients due to both micropolar and microelongation theories, the classical Eshelby tensor may be obtained. As expected, while the field quantities due to both micropolar and microelongation theories contribute to Eshelby tensors corresponding to “eigenstrain” due to macro deformations, the field quantities due to microelongation theory do not have any contribution to Eshelby tensors corresponding to “microeigenstrain” due to micro rotation, and likewise, the field quantities due to micropolar theory do not effect Eshelby tensors corresponding to “microeigenstrain” due to micro elongation.

As explained above, the purpose of working to obtain Eshelby tensors given by both Cheng and He for micropolar theory, and Kırış and İnan for micro elongation and microstretch theories is the need to these tensors in the determination of the effective properties of damaged materials modeled with such micro elastic theories in the homogenization methods. Although our aim is to use these tensors in damage mechanics, the obtained results are quite general. Besides Eshelby tensors obtained for the micro elastic theories may be used to determinate effective properties of composite materials as well as the damaged materials.

The homogenization methods like Mori-Tanaka’s method have to be extended to micropolar, microelongation and microstretch medium theories to use it to determine the effective properties of materials. Although Eshelby tensor for the classical theory of elasticity is homogeneous in ellipsoidal inclusions which is adequate for defining many different shapes, the fact that Eshelby tensors obtained for the theories that are considered here are not homogeneous even in spherical inclusions, prevents us to express the homogenization process analytically, unlike the classical case and therefore it is possible only to obtain the numerical results by averaging processes and by numerical integration over the inclusions.

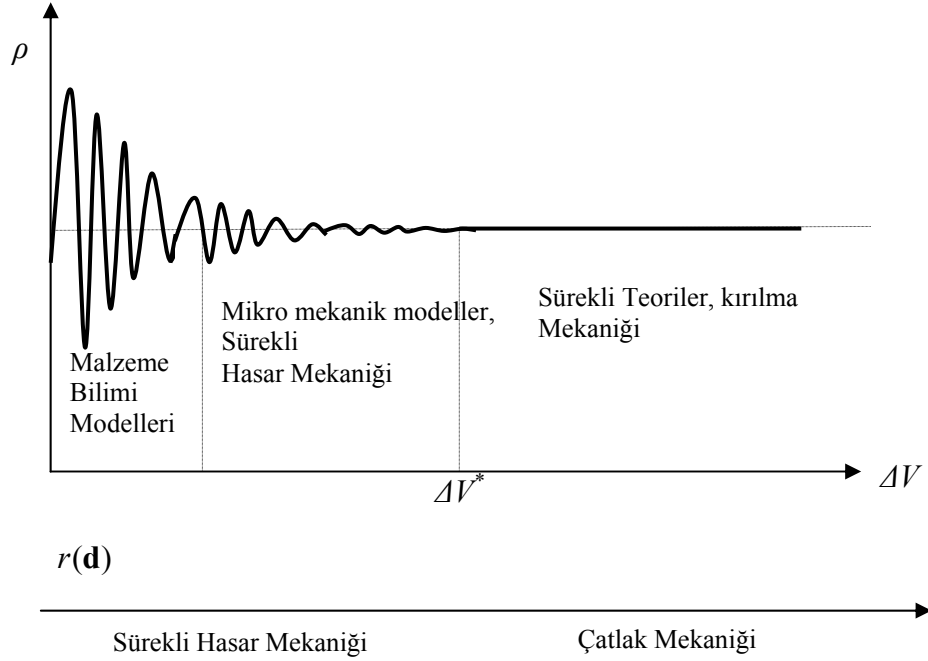
Though, there is a study by Sharma and Dasgupta that extends Mori-Tanaka’s method to micropolar theory by use of the averaged micropolar Eshelby tensors obtained by Cheng and He, the homogenization method even for micropolar theory still could not be solved exactly due to the difficulties mentioned above. In the future works, it is expected that, the homogenization can be extended to micropolar, microelongation and microstretch theories by employing Eshelby tensors obtained for these theories and therefore, both, the classical material constants can be calculated more accurately and the new micro material constants due to modeling the materials with these micro elastic theories, can also be determined.

1. GİRİŞ

Çok basit olarak hasar, malzemede atomik bağların mikro ölçekte kopması ile oluşan kusurların büyümesi, gelişmesi, birleşmesi ve giderek makro yapı üzerinde belirgin etkiler oluşturan bozukluklar olarak tanımlanabilir. Bu süreç üç kısımda ele alınabilir; hasarsız bozulmamış durum, hasarın oluşumu ve gelişimi ile makro çatlakların ve kırılmaların ortaya çıkması. Hasar Mekaniği ise hasarın olduğu malzemede ortaya çıkan davranış değişikliğinin incelendiği bir Sürekli Ortamlar Mekaniği dalı olarak tanımlanır.

Bir malzeme klasik Sürekli Ortamlar Mekaniği'nde homojen malzeme olarak tanımlansa da, gerçekte mikro boyuta inildiğinde malzemedeki genel homojen yapıyı bozan, çok sayıda farklı boyutta ve nitelikte mikro kusura sahiptir. Malzemede oluşan bu kusurların boyutları ele alındığında büyük farklılıklar ortaya çıkar. Klasik sürekli ortamlar mekaniği bütün maddesel ortamlarda sürekli bir kütle yoğunluğunun varlığına ve hareket denklemleri ve bünye aksiyomlarının ne kadar küçük olursa olsun cismin her ΔV karakteristik hacim elemanı için geçerli olması ilkesine dayanır. Doğaldır ki, bu varsayım göz önüne alınan ΔV hacmi belirli bir ΔV^* limit değerinden büyük ise doğrudur. Moleküler teoriler $\Delta V < \Delta V^*$ durumunda bunun doğru olmadığını söyler. Maddesel bir cisim, gerçekte boşluk içinde farklı özellikte birçok ayrık parçacığın birleşiminden oluşmaktadır, dolayısıyla da yapısında birçok heterojen kısım ve boşluklar bulunmaktadır. Bu nedenle sürekli ortamlar mekaniğinde sonsuz küçük hacim olarak tanımlanan karakteristik ΔV hacmi $\Delta V > \Delta V^*$ durumunda bir idealleştirme değildir. ΔV^* malzemenin cinsine ve yapısına bağlı olarak değişir. Örneğin kaya, beton, seramik gibi malzemeler doğal olarak çatlaklı yapıya sahiptirler. Metalik malzemelerde makro büyüklükler mm, cm ve benzeri ile ölçüldüğü halde boşluk, dislokasyon gibi alt büyüklükler angström ile mikron arasındaki birimlerle ölçülürler. Bu nedenle alt boyutların makro boyutlara bağlı olduğu açıktır. Dolayısıyla bu tür malzemelerde ortamı doğru tanımlayabilmek için karakteristik hacim elemanının boyutlarının uygun seçilmesi gerekir. Bu boyut

malzemeyi tanımlayabilecek şekilde olmalıdır. Yoğunluk $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta m / \Delta V)$ ile tanımlandığında aşağıdaki şekil klasik çatlak mekaniği ile sürekli hasar mekaniğinin sınırlarını kabaca göstermektedir. Burada Δm , ΔV hacminin kütlesidir.



Şekil 1.1 : Elementer ΔV hacminin boyutlandırılması

Sürekli hasar mekaniğinin birincil tanımı mikro ölçekte oluşan ve ortam içinde yayılı olduğu varsayılan mikro kusurlardır. Ancak bu kusurlar da yine büyüklüğü ve tipi açısından malzemeden malzemeye değişiklik gösterirler. Metallerde mikro çatlaklar, polimerlerde bağların kırılması, betonda çimento, kum ve agrega arasındaki yüzeylerin ayrışması ve mikro boşlukların meydana gelmesi gibi değişik oluşumlar örnek olarak verilebilir. Malzemenin güvenli kullanımı için hasar her durumda kontrol edilebilir, hesaplanabilir olmalı, ayrıca hasarlı malzemenin kalan ömrünün ne kadar olduğu konusunda bilgi sahibi olunabilmelidir. Ayrıca hasar oluşumu saptanarak, öngörü hesaplarının yapılabilmesi için bünye denklemleri de yazılabilmelidir. Tüm bu işlemlerin gerçekleştirilebilmesi için uygun mekanik değişkenler kullanarak mikro yapısal hasar durumu tanımlanmalı ve hasar ölçümü yapılarak hasar değişkeninin gelişimini yöneten denklemler bulunabilmelidir.

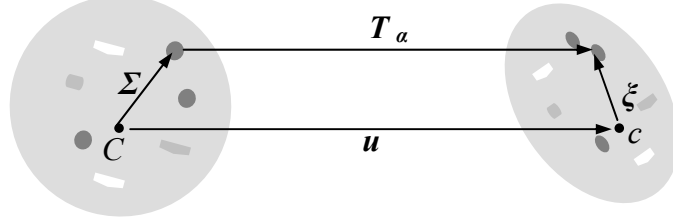
Her ne kadar, “sürekli hasar” kavramı ilk olarak Janson ve Hult [1] tarafından kullanılmışsa da, genel olarak kabul edilen görüş, teorinin kesit alanındaki

boşlukların yoğunluğu yardımıyla yerel olarak ölçülen ve malzemenin bütünlüğü içinde tanımlanan yeni bir değişken tanımı ile Kachanov tarafından ortaya konulduğudur [2]. Daha sonra Rabotnov daha çok hasar oluşumunun fiziksel anlamı üzerinde durmuştur [3]. Nunziato ve Cowin malzemede oluşan boşluğun hacimsel oranını bağımsız bir kinematik değişken kabul ederek lineer elastik malzemelerde hasarı bu orandaki değişim olarak tanımlamışlardır [4–5]. Mikro yapısal hasar modelleri, farklı bakış açılarıyla birçok araştırmacı tarafından incelenmiş ve farklı hasar modelleri kurulmuştur [6–10]. Sürekli Hasar Mekanizmasının gelişimi ve geniş bir literatür özeti Krajcinovic [11] ve Kachanov [12] tarafından verilmiştir.

Pek çok basit problemde başarı ile uygulanan skaler hasar parametresi kavramının tüm pratikliğine rağmen uygulama alanının çok geniş olduğunu söylemek kolay değildir. Çok eksenli yükleme durumlarında hasarı skaler olarak tanımlamak olanaksızdır. Bu gibi yüklemeler için, önce hasar parametresi vektörel bir fonksiyon olarak ele alınmıştır. Ancak, bu durumda da hasar parametresinin yönetime bağıllığı söz konusu olduğundan, uygulamadaki sonuçlarla aykırılıklar ortaya çıkmış ve hasarın tansörel bir büyüklük olarak tanımlanması düşüncesi daha gerçekçi görünerek daha çok bu yönde çalışmalar yapılmıştır. Vakulenko ve Kachanov [13] tarafından tanımlanan simetrik çatlak yoğunluk tansörü metallerde sünme hasarını tanımlamak için uygun sonuçlar vermiş ve Murakami ve Ohno [14] tarafından kullanılmıştır. Bahsedilen çalışmada hasar simetrik bir tansörle karakterize edilmiştir. Bilindiği gibi hasar genelde malzemenin elastik özellikleri üzerinde etkili olmaktadır. Hasar geliştikçe malzeme özellikleri değişir ve daha çok anizotrop hale gelir. Bu gerçeğe dayanarak, Cordebois ve Sidoroff [15] hasarı, en genel halde 21 bağımsız bileşen içeren elastik katsayılar tansörüne karşı gelen, dördüncü mertebeden bir tansörle karakterize etmişlerdir.

Markov hasar sürecini mikro boyuttaki kusurları bir anlamda mikro boşluklar olarak düşünerek, bunların oluşma, gelişme ve birleşmeleri şeklinde tanımlamış ve bu bakışı mikro çatlamanın ortamda bir mikro distorsiyon oluşturduğu fikrine dayandırmıştır. “Hasar tansörü” olarak tanımlanabilecek bu “mikro distorsiyon” tansörü, ortamın makro boyuttaki yerdeğiştirme alanından tamamen bağımsız olarak, elementer hacim içinde ek bir serbestlik derecesi olarak ortaya çıkmaktadır [16]. Markov tarafından ortaya atılan bu modelle hasarlı malzeme tanımı, Eringen ve Şuhubi [17–18] anlamında mikromorfik ortam ve Mindlin [19] anlamında mikro

yapılı katı ile örtüşmektedir. Bu durum şu şekilde gözlenebilir. Kütle merkezi C olan bir V hacmi içinde her biri bu hacim ile karşılaştırıldığında mikro hacme sahip küçük parçacıklar bulunsun ve bunların V hacmi içinde C noktasına göre konumları



Şekil 1.2 : Mikromorfik modelde hasarın modellenmesi

Şekil 1.2’deki Σ vektörü ile tanımlansın. Bu durumda, uygulanan dış yükler altında C noktasının makro yerdeğiştirmesi \mathbf{u} vektörü ile tanımlanırsa, cismin genel şekil değiştirmesi sırasında C merkezine bağlı olarak V hacminde bir parçacığın göreceli konumunu belirleyen Σ vektörünün ξ vektörüne dönüştüğü düşünülecek olursa;

$$\xi = \Sigma \cdot \mathbf{T}_\alpha \quad (1.1)$$

yazılabilir. Burada yeni tanımlanan \mathbf{T}_α büyüklüğü hasar tansörü olarak adlandırılabilir. Bu yeni tansörün tanımı Eringen-Şuhubi [17–18] anlamında mikro distorsiyon tansörü ϕ_{kl} ile benzeşmektedir. Dolayısıyla mikromorfik teoride elde edilen mikro hiperelastik katının bünye ve alan denklemleri, yukarıdaki analogi ile, mikromorfik modelde tanımlanan hasarlı malzemeler için de geçerli olacaktır. Yani, Eringen-Şuhubi [17-18] de verilen mikro distorsiyon tansörü ϕ_{kl} burada hasar tansörüne karşı gelmektedir. Bilindiği gibi, mikromorfik teori malzemenin her parçacığının klasik şekil değiştirmeden bağımsız olarak ek bir mikro şekil değiştirme yapabildiği fikrine dayanmaktadır ve doğada tüm malzemelerin heterojen yapıda olması, yani belirli bir dereceye kadar mikromorfik yapıda olması dolayısı ile klasik teoriye göre fiziksel gerçekleri daha iyi yansıtmaktadır. Bu anlamda, mikromorfik model, hasarlı malzemeleri tanımlamak ve incelemek için ideal bir teori olmasına karşın bazı güçlükleri de beraberinde getirmektedir. Bunların en önemlisi bu modelde verilen malzemenin tanımlanması için çok sayıda malzeme sabitinin ortaya çıkması ve teorik olarak çok uygun gibi görünen mikromorfik teorisinin bünye denklemlerinde

çok sayıda bilinmeyen bulunmasıdır. Mikromorfik teorinin, hem denklem hem de bilinmeyen sayısının klasik teoriye göre daha fazla olmasından kaynaklanan hesaplama güçlükleri parçacıkların mikro hareketi üzerine bazı kısıtlar getirilerek aşılmaya çalışılmaktadır. Bu amaçla, klasik şekil değiştirmeden bağımsız olarak malzemenin her parçacığının yalnız hacimsel mikrogenleşme yapabildiği mikrogenleşme (microelongation) [20–21], yalnız mikrodönme yapabildiği mikrodönme (micropolar) [22–24], parçacıkların hem hacimsel genişleme hem de mikrodönme yapabildiği mikrogerme (microstretch) [25] ve makro yapıda tanımlanan izotropiye benzer bir özelliğin mikro yapıda da olduğunu varsayan mikroizotropi [26] gibi alt teorilerle çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Yukarıda anlatılan noktaların yanı sıra, hasarın modellenmesi problemi yerel olarak analiz edildiğinde, uygulamada bazı başka uyumsuzlukların ortaya çıktığı gözlenmiştir. Bu sorunu gidermek için yapılması gereken düzenlemeler konusunda sürekli hasar mekaniği üzerine çalışan pek çok araştırmacının üzerinde birleşmiş oldukları veya en az yapay olduğu konusunda ortak görüş belirttikleri nokta, hangi modellerle çalışılırsa çalışılsın yerel olmayan etkilerin göz önüne alınması gerekliliğidir. Bilindiği gibi, klasik sürekli ortamlar mekaniğinde bir noktadaki gerilme tansörünün veya herhangi bir başka termoenerjetik büyüklüğün yalnız o noktanın hareket ve sıcaklığından etkilendiği düşünülür. Bu yerellik varsayımı sonucunda da, malzemede çatlak, dislokasyon gibi bozukluklar olduğu zaman bunlar komşuluğunda gerçeklerle uyuşmayan sonuçlar ortaya çıkmakta ve bu sorun çatlak veya bozukluk civarında farklı uygulamalar yapılarak giderilmeye çalışılmaktadır. Oysa, bu tür uygulamalara baş vurmadan yerel olmayan etkilerin göz önüne alınması ile bu sorunlar giderilebilmektedir. Gerçekte, ilke olarak mikromorfik modeller her nokta ile ilgili moment tansörü nedeni ile yapısal olarak, yerel olmayan teorilerle ele alınması gereken modellerdir. Dolayısıyla, gerçekçi ve tutarlı bir teori kurabilmek için, hem mikro yapıyı hem de yerel olmayan etkileri göz önüne alan bir teorinin kullanılması gerekli görülmektedir. Yerel olmayan etkilerin göz önüne alındığı bir model İnan tarafından verilmiştir [27].

Malzemedeki hasarı mikro yapıyı göz önüne alarak incelemek için kurulan teorilerde yukarıda sözü edilen türde zorlukları giderebilmek için baş vurulabilecek yollardan biri de kompozit malzemeler için kullanılan yaklaşımlardan yararlanmaktır. Tamamen farklı amaçlarla oluşturulan kompozit malzemelerin yapısının hasarlı

malzeme tanımı ile benzerliği, hasarlı malzemelerin incelenmesinde ve özellikle, ortaya çıkan güçlüklerin giderilmesinde kullanılma düşüncesi yenidir [28]. Farklı malzemelerin farklı düzenlemelerle kullanılması sonucu ortaya çıkan kompozitlerde elde edilen yeni malzemeye özgü özelliklerin bulunabilmesi için çeşitli homojenleştirme yöntemleri kullanılmaktadır [28-64]. Yukarıda belirtildiği gibi, hasara bir mikro boşluk ve mikro çatlaklar dizisi olarak bakılabilir. Başlangıçta bozulmamış ve homojen olan katı bu bozulmaların etkisiyle heterojen hale gelir. Heterojen hale geldiğinde de parçacık tipli kompozit malzeme gibi düşünülebilir. Bilindiği gibi, parçacıklı kompozit malzeme özellikleri bilinen ve matris olarak adlandırılan bir ana malzeme ve özellikleri matristen farklı mikro boyutta parçacıkların matris içinde homojen olmayabilen bir dağılımından oluşmaktadır. Dolayısıyla, bu mikro parçacıklar yerine mikro çatlaklar ve mikro boşluklar da alınabileceği düşünülerek, yani hasarlı malzemeyi özel bir kompozit malzeme gibi ele alarak kompozitlerde kullanılan homojenleştirme işlemleri hasarlı malzemeler için de kullanılabilir. Burada amaç homojenleştirilmiş katının etkin malzeme özelliklerini belirlemektir.

Parçacıklı kompozit malzemelerin etkin özelliklerinin belirlenmesi amacı ile birçok problemde başarı ile kullanılan, homojenleştirme yöntemlerinin başlıcaları; “differential scheme” [40–44], “self-consistent” [45–51], “Mori-Tanaka” [28, 52–58] ve “double inclusion” [59–64] yöntemleridir.

Yukarıda anlatılan doğrultuda, İnan [65] tarafından mikromorfik model ile kompozit malzeme arasında bir analogi kurularak, Mori-Tanaka homojenleştirme yöntemi hasarlı malzemelere uygulanmış ve mikromorfik modelin anılan güçlüklerinin üstesinden gelmek amacıyla yeni bir yaklaşım sunulmuş ve etkin malzeme sabitlerini belirlemek için bir teknik önerilmiştir. İnan [66] da ise, mikromorfik modelle tanımlanan hasarlı malzemelerde malzeme sabitlerini belirlemek için, Eshelby'nin eşdeğerlik ilkesini ve ünlü “elipsoidal boşluk” çözümü çalışmasını [67], Mori-Tanaka [52] anlamında “ortalama gerilme” tanımı ile birleştirmiş ve Benveniste [28] ve Zhao v.d. [53]'nin yaklaşımlarını izlemiştir.

Söz edilen homojenleştirme yöntemlerinin birçoğunun temelinde konunun öncülerinden Eshelby'nin tanımladığı “eşdeğer dönüşüm tansörü” kavramı yatmaktadır [67–69]. Eshelby eşdeğer dönüşüm tansörü, katkı maddesinin

(inclusion) serbest genlemesi ile matris genlemesi arasındaki ilişkiyi vermektedir ve klasik elastisite için elipsoidal bir katkı maddesi içinde homojendir. İkinci bölümde değinileceği üzere, elipsoidal katkı maddesi içinde klasik Eshelby tansörünün homojen olma özelliği nedeniyle, Mori-Tanaka gibi homojenleştirme yöntemlerinde ilgili genlemeler analitik olarak yazılabilmekte ve bu da yöntemin genel kullanılabilirliğini artırarak matematiksel işlemlerde sağladığı büyük basitlik dolayısı ile Mori-Tanaka yöntemini avantajlı hale getirmektedir.

Homojenleştirme işlemlerinin yanı sıra, malzemede “bozulmalar” komşuluğunda gerilme genleme ilişkileri analizi için de kullanılan katkı maddesi kavramı ile ilgili klasik elastisitede birçok problem çözülmüştür [70-71]. Ancak, konunun önemine rağmen, tüm yüksek mertebe teorilerde olduğu gibi mikromorfik teoride de bu tip problemlerle ilgili çalışmalar oldukça azdır. Mikromorfik teori ile ilgili hacimsel bozulmalar için genel formüller ilk olarak Hsieh tarafından verilmiştir [72–73]. Cheng ve He [74-75], Hsieh’ in bu çalışmalarından faydalanarak küresel ve dairesel silindirik katkı maddesi içeren mikropolar malzemeler için Eshelby tansörlerini elde etmişlerdir. Klasik elastisitede, elipsoidal katkılar için bir tane Eshelby tansörü olmasına rağmen, Cheng ve He bu çalışmalarında küresel katkı maddesi içeren mikropolar malzemeler için dört Eshelby tansörü elde etmişlerdir. Ayrıca, klasik durumda elipsoidal katkı maddesi içinde Eshelby tansörü homojen olmasına rağmen, mikropolar durumda küresel katkı maddeleri içinde bile elde edilen Eshelby tansörleri homojen değildir. Cheng ve He elde ettikleri bu tansörlerin mikropolar sabitlerin limit durumunda klasik elastisitenin Eshelby tansörüne indirgenmediğini göstermişlerdir [74].

Kompozit malzeme kavramının altında yatan temel amaç malzemenin kullanım amacına uygun olarak istenilen özelliklerinin iyileştirilmesidir. Örneğin, birçok parçacık tipli kompozitte güçlendirme için matris malzemesi içine kendisinden daha yüksek dayanım iyi elastik özelliklerine sahip küçük rijit küresel parçacıklar katılmaktadır. Bu tip parçacıklı kompozitlerin veya sıvı kristallerin mikropolar teori ile modellenmesi klasik teoriye oranla gerçeğe daha yakın bir yaklaşım olmakla birlikte, hasarlı cismin mikropolar modellenmesi bazı sıkıntılar doğurmakta, bir başka deyişle mikropolar modelde hasarın bazı özellikleri kaybolmaktadır. Gerçekte, malzemede hasarın zamanla büyüyerek çoğalması nedeniyle, boşlukların dönme yerine genleşme yapacağını varsaymak, dolayısıyla, hasarı mikrodönme modeli ile

değil de mikrogenleşen ortam teorisi ile modellemek çok daha anlamlı olmaktadır. Ayrıca, Eringen'in mikrogermeli ortam teorisinde [25], mikropolar etkilerin ihmal edilmesiyle elde edilen mikrogenleşen ortam teorisi [20-21], Cowin & Nunziato [4-5] tarafından geliştirilen, "boşluklu lineer elastik malzeme teorisi" ile de tam olarak örtüşmektedir [76].

Bu nedenle, bu tez çalışmasında, hasara malzemedeki mikro boşluklar gözüyle bakarak mikrogenleşme modeli ile tanımlamak ve kompozit malzemelerde kullanılan homojenleştirme yöntemlerini uygulayarak, hasarlı malzemenin elastik sabitlerini bulabilmek temel amacı ile yola çıkılmıştır. Yukarıda açıklandığı gibi, bu amacı gerçekleştirmenin ilk adımı gerekli Eshelby tansörlerinin bulunmasıdır. Bu tansörler, Cheng ve He [74]'nin kullandığı Green fonksiyonları kavramı izlenerek homojen izotrop merkezci simetrik mikrogenleşen ortamda küresel katkı maddesi içeren malzemeler için bu tez çalışması çerçevesinde elde edilmiş ve sonuçlar Kırış ve İnan tarafından yayınlanmıştır [20]. Literatürde ilk olarak bu çalışmada klasik elastisitede ki "ekgenleme" (eigenstrain) kavramı, asimetric "ekgenleme" ve "mikroekgenleme" (microeigenstrain) kavramları ile mikrogenleşen ortam teorisine genişletilmiş ve küresel katkı maddesi içeren mikrogenleşen ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinin, mikro sabitlerin limit durumunda, klasik Eshelby tansörüne indirildiği gösterilmiştir. Cheng ve He [74] tarafından mikropolar ortam için dört tane dört boyutlu Eshelby tansörü elde edilmesine rağmen, mikrogenleşen ortam için biri dört, ikisi iki boyutlu ve biri de skaler olmak üzere yine dört Eshelby tansörü elde edilmiştir [20]. Burada da, mikropolar teoriye benzer olarak, mikrogenleşen ortamın Eshelby tansörleri küresel katkı maddeleri içinde homojen değillerdir.

Hasarlı malzemenin mikrogenleşen ortam teorisi ile modellenmesinin mikropolar ortam modeline göre daha gerçekçi olduğu açıktır. Ancak malzemedeki hasarlı yani boşluklu kısmın özellikle mikro hasarlar düşünüldüğünde malzemenin kalan kısmının hacmine oranı hayli düşüktür. Bu durumda, yalnız hasarlı kısmın mikrogenleşme yapacağını düşünerek hareket etmek, yani malzemeyi mikrogenleşen ortam olarak modelleme düşüncesi de, hem pratikte hem de teoride sıkıntılar ortaya çıkarmaktadır. Yukarıda da değinildiği gibi, pek çok malzeme gerçekte heterojen yapıya sahiptir ve bu nedenle de mikromorfik teori ile modellenmeleri en uygundur. Ancak, mikromorfik modelde de, yukarıda söz edilen güçlükler ortaya çıkmaktadır. Bu durumda, hasarlı malzemeyi yalnız mikrodönme veya

mikrogenleşen ortam teorisi ile modellemek yerine, bu ikisinin birleşimi olan mikrogermeli ortam teorisi ile modellemek daha gerçekçi bir model olan mikromorfik modele göre eksik kalsa da, yalnız mikropolar veya yalnız mikrogenleşen ortam modeline göre daha avantajlı olmaktadır.

Tez çalışmasında ikinci olarak, mikrogerme teorisinin anılan üstünlüğünden dolayı, hasarlı malzemenin mikrogermeli ortam teorisi ile daha iyi modellenebileceği düşünülerek, küresel katkı maddeleri içeren mikrogermeli ortam için Eshelby tansörleri elde edilmiştir. Mikropolar ve mikrogenleşen ortam için izlenilen benzer yöntemle, küresel katkı maddesi içeren mikrogermeli ortam için önce temel çözümler elde edilmiştir. Bu temel çözümlerden faydalanarak, yine Green fonksiyonları yardımıyla dördü dört, ikisi iki boyutlu ve biri de skaler olmak üzere toplam yedi Eshelby tansörü elde edilmiştir. Ayrıca, beklendiği üzere, makro şekil değiştirmeden kaynaklanan ekgenleme (eigenstrain) ile ilgili Eshelby tansörlerinde hem mikrodönme hem de mikrogenleşme ile ilgili alan büyüklüklerinin katkısı gözlenirken, mikrodönmeden kaynaklanan mikroekgenleme (microeigenstrain) ile ilgili Eshelby tansörlerine mikrogenleşme ile ilgili büyüklüklerden ve tersine olarakta, mikrogenleşmeden kaynaklanan mikroekgenleme (microeigenstrain) ile ilgili Eshelby tansörlerine mikrodönme ile ilgili alan büyüklüklerinden hiçbir katkı gelmemektedir [77].

Mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinin mikrodönme ile ilgili sabitlerin limit durumunda mikrogenleşen ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine, mikrogenleşme sabitlerinin limit durumunda mikropolar Eshelby tansörlerine ve tüm mikro sabitlerin limit durumunda klasik Eshelby tansörlerine indirildiği gösterilmiştir. Mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri de mikrogenleşme ve mikropolar durumda olduğu gibi klasik Eshelby tansörlerinin aksine küresel katkı maddeleri üzerinde bile homojen değildir. Literatürde, Kırış ve İnan [77] tarafından verilen, doğrudan küresel katkı maddesi içeren mikrogermeli ortamın temel çözümlerinden bağımsız olarak, Liu ve Hu [78] tarafından da mikropolar ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine mikrogermenin getireceği katkılar ilave edilerek mikrogermeli ortam için Eshelby tansörleri elde edilmiştir.

Kırış ve İnan tarafından küresel katkı maddesi içeren mikrogermeli ortam için yukarıda bahsedildiği üzere dört tane dört boyutlu, iki tane iki boyutlu ve bir de

skaler olmak üzere toplam yedi Eshelby tansörü elde edilirken [77], Liu ve Hu çalışmalarında dört tane dört boyutlu, iki tane üç boyutlu, üç tane iki boyutlu, iki tane bir boyutlu ve bir de skaler olmak üzere toplam on iki Eshelby tansörü elde etmişlerdir [78]. Sonuçlar arasındaki bu farklılık temel olarak alan denklemlerinin farklı seçilmesinden kaynaklanmaktadır. Liu ve Hu tarafından verilen sonuçlarda birbirinden bağımsız olmayan alan büyüklüklerin seçimi nedeniyle mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri arasında bağımsız olmayan terimler bulunmaktadır. Bu ilişkiler göz önüne alındığında [78] sonuçlarından [77]'ye geçilebilmektedir.

Mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam için Eshelby tansörlerinin elde edilmesinde temel amaç başlangıçta da değinildiği üzere homojenleştirme yöntemlerinin kullanılarak hasarlı malzemelerin sabitlerinin belirlenmesidir. Elde edilen bu tansörler hem hasarlı malzemelerde hem de parçacık tipli kompozitlerin etkin özelliklerinin belirlenmesi amacıyla homojenleştirme yöntemlerinde kullanılabilirler. Ancak, bu amacın gerçekleştirilebilmesi için Mori-Tanaka homojenleştirme yönteminin hem mikrogenleşen hem de mikrogermeli ortama genişletilmesi gerekmektedir. Sharma ve Dasgupta [21] benzer bir çalışmayı Cheng ve He [74] tarafından elde edilen mikropolar Eshelby tansörlerini kullanarak Mori-Tanaka yöntemini mikropolar teoriye genişleterek gerçekleştirmişlerdir. Sonraki aşamada, mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam için yapılacak benzer çalışmalarda elde edilen bu Eshelby tansörleri kullanılarak mikrogenleşme ve mikrogerme teorileri ile modellenen malzemelerin etkin malzeme modülleri bulunabilecektir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, klasik Eshelby tansörü ve Mori-Tanaka homojenleştirme yöntemi anlatılmıştır. Üçüncü bölümde mikromorfik teorinin temel kavramları ve tez içinde kullanılan temel denklemler verilmiştir. Ayrıca, mikro şekil değiştirme yapabilen malzeme parçacıklarının hareketi üzerine sırasıyla; yalnız dönme, yalnız hacimsel genişleme ve hem dönme hem de hacimsel genişleme yapabilme (mikrogerme) koşulları getirilerek mikromorfik ortamın temel denklemlerinden sırasıyla; mikropolar, mikrogenleşen ve mikrogermeli ortamın temel denklemleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, mikropolar Eshelby tansörleri, beşinci bölümde mikrogenleşen ortamın Eshelby tansörleri elde edilmiştir. Mikrogermeli ortamın Eshelby tansörleri

ile bu tansörlerin mikrogenleşme ve mikropolar Eshelby tansörlerine indirgenmesi altıncı bölüm kapsamında ele alınmıştır. Son olarak yedinci bölümde, bu tez çalışması kapsamında elde edilen sonuçlar irdelenmekte ve sonuçlar ışığında ileride yapılabilecek çalışmalara değinilmektedir.

2. KLASİK ESHELBY ÇÖZÜMÜ VE MORI-TANAKA YÖNTEMİ

Klasik elastisitede “inhomojenite“ içeren malzemelerle ilgili problemler uygulamalı mekanikte çok ilgi çeken bir konudur. Bu problemlerde öncelikli amaç, “inhomojenite” içinde ve dışında gerilme ve genleme alanlarını bulmaktır. Eshelby 1957’ de elipsoidal katkı maddesi içeren sonsuz elastik ortam için sonsuzda üniform uygulanan gerilmeler altında gerilme ve genleme alanlarını belirlemek için “Eşdeğer Katkı Maddesi” adı verilen ve yaygın olarak benimsenmiş güçlü bir yöntem önermiştir [67].

Bu bölümde ilk olarak Eshelby’ nin matris malzemesindeki genleme ile katkı malzemesinin serbest genlemesi arasındaki ilişkiyi veren “Eshelby tansörleri elde edilecektir. İkinci olarak da, bu Eshelby tansörlerini kullanarak etkin malzeme modüllerinin analitik bir formda elde edilebildiği Mori-Tanaka homojenleştirme yöntemi [52] verilecektir.

2.1 Klasik Eshelby Tansörleri

Genel olarak Eshelby çözümü matris malzemesindeki genleme ile katkı maddesinin serbest genlemesi arasında

$$e_{kl}^C = S_{klmn} e_{mn}^T \quad (2.1)$$

şeklinde bir ilişki kurmaktadır. Burada e_{kl}^T katkı maddesinin serbest dönüşüm genlemesini, e_{kl}^C matriste katkı maddesinden kaynaklanan genlemeyi göstermekte ve S Eshelby eşdeğer dönüşüm tansörü adını almaktadır. Burada ve bundan sonra aksi belirtilmedikçe tekrarlanan indisler üzerinde toplama uyuşumu olduğu ve “,” işaretinin izleyen indisin koordinatına göre türevi gösterdiği kabul edilecektir. Eshelby katkı maddesi içinde ve dışındaki elastik alan problemini bir dizi hayali kesme, genleme ve kaynak işlemleri yardımıyla çözmüştür [67-69].

2.1.1 Katkı Maddesinden Kaynaklanan Elastik Alanlar

Lineer elastik izotrop bir cisimde, yerdeğiştirme bileşenleri u_k , λ Lamé sabiti [79-80] ve μ kayma modülü [80] olmak üzere, e_{kl} genleme ve t_{kl} gerilme ifadeleri

$$\begin{aligned} e_{kl} &= \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \\ t_{kl} &= \lambda e_{mm} \delta_{kl} + 2\mu e_{kl} \end{aligned} \quad (2.2)$$

formunda verilir. Burada δ_{kl} Kronecker deltasıdır [81-82].

Burada, katkı maddesi matrinden çıkartıldığında veya matris yokmuş gibi düşünüldüğünde katkı maddesinin yapacağı e_{kl}^T üniform dönüşüm genlemesine Robinson tarafından “gerilmesiz genleme” (stress-free strain) adı verilmiştir [83]. Temel problem, katkı maddesi matris içinde iken hem matriste hem de katkı maddesi içindeki “kısıtlanmış genleme” (constrained strain) adı verilen e_{kl}^C 'yi bulmaktır. S , katkı maddesi ve matrisi ayıran yüzeyi ve n_k bu yüzeyin dış normalini göstermek üzere, ele alınan problem, aşağıdaki hayali kesme, çıkarma, genleme ve kaynak işlemleri ile çözülebilir;

1.Adım: Katkı maddesi sınırlarından kesilerek matrisin dışına çıkarılır ve malzeme sabitleri değişmeksizin, e_{kl}^T serbest genlemesine izin verilir. Bu durumda e_{kl}^T genlemesine karşı gelen gerilme, Hooke yasası [84-85] ile

$$t_{kl}^T = \lambda e_{mm}^T \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}^T \quad (2.3)$$

olarak elde edilir. Ayrıca, bu durumda matris ve katkı maddesindeki gerilme alanlarının sıfır olduğuna dikkat edilmelidir.

2.Adım: 1. adımda çıkarılan katkı maddesine $-t_{kl}^T n_l$ yüzey gerilmeleri uygulanarak dönüşümden önceki şekil ve boyutuna geri getirilir ve matrisle aynı özelliklere sahip “eşdeğer bir katkı maddesi” ile değiştirilerek tekrar yerine yerleştirilir ve S yüzeyi boyunca kaynaklanır. Böylece yüzey kuvvetleri S ara yüzeyi üzerinde yayılı kütle kuvvetleri tabakası gibi iş görür.

3.Adım: S ara yüzeyinde yayılı bu fiktif kütle kuvvetlerinin etkisini ortadan kaldırmak için, S üzerinde $+t_{kl}^T n_l$ gerilme dağılımı uygulandığı düşünülür. Artık cisim dış yüklemekten bağımsız, fakat katkı maddesinin dönüşümü nedeniyle kendinden gerilmeli (self-stress) durumdadır.

Yüksüz, sonsuz bir lineer elastik ortamın bir \mathbf{r}' noktasında F_k noktasal kuvvetinden kaynaklanan yerdeğiştirme alanının \mathbf{r} noktasındaki değeri Love tarafından [86]

$$U_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}', F_k) = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{F_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} F_l \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \quad (2.4)$$

şeklinde verilmektedir. Burada ν Poisson oranıdır [82, 87]. Dolayısıyla, 3. adımda S ara yüzeyi boyunca $t_{kl}^T n_l$ yüzey gerilmeleri dağılımından kaynaklanan yerdeğiştirme

$$u_k^C(\mathbf{r}) = \int_S U_k(\mathbf{r}'-\mathbf{r}, t_{kl}^T n_l) dS(\mathbf{r}') \quad (2.5)$$

ile verilir.

İkinci adımın sonunda malzemeyi sıfır yerdeğiştirmeli olarak almak uygundur. Çünkü matris malzemesinde gerilme ve genleme sıfırdır ve katkı maddesi gerilmemiş olmadığı için yalnız dönüşümden önceki geometrik şekline sahip olduğundan u_k^C matris ve katkı maddesindeki gerçek yerdeğiştirme değildir. Dolayısıyla, katkı maddesi ve matristeki genleme

$$e_{kl}^C = \frac{1}{2} (u_{k,l}^C + u_{l,k}^C) \quad (2.6)$$

ile verilir. Bu genlemeden kaynaklanan matristeki gerilme alanı

$$t_{kl}^C = \lambda e_{mm}^C \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}^C \quad (2.7)$$

olur. Diğer yandan katkı maddesi 3. adımdan önce

$$t_{kl}^J = t_{kl}^C - t_{kl}^T = \lambda (e_{mm}^C - e_{mm}^T) \delta_{kl} + 2\mu (e_{kl}^C - e_{kl}^T) \quad (2.8)$$

gerilmesine sahiptir. (2.4) ifadesi (2.5) integralinde kullanılır ve integrasyon \mathbf{r}' üzerinde olduğundan $\partial / \partial x_i$ türevinin $-\partial / \partial x_i'$ anlamına geldiğine dikkat edilerek ve t_{kl}^T gerilme alanının homojen olduğu kabulü yapılarak yerdeğiştirme alanı

$$u_k^C(\mathbf{r}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} t_{lm}^T M_{1,klm} - \frac{1}{4\pi\mu} t_{kl}^T M_{2,l} \quad (2.9)$$

olarak bulunur. Burada

$$M_1 = \int_V |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| dv, \quad M_2 = \int_V \frac{dv}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.10)$$

sırasıyla S ile sınırlanan katkı maddesinin V hacmini dolduran birim yoğunluk üzerine etkiyen biharmonik ve Newtonyen potansiyellerdir ve aralarında

$$\begin{aligned} \nabla^2 M_1 &= 2M_2, \\ \nabla^4 M_1 &= 2\nabla^2 M_2 = \begin{cases} -8\pi & S \text{ üzerinde} \\ 0 & S \text{ dışında} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ilişkileri vardır. Burada ∇^2 Laplace ve ∇^4 biharmonik operatörleridir [88-89].

$\nabla^2 U = -4\pi\rho$ denklemini sağlayan bir potansiyel fonksiyonun ikinci türevi yoğunluk ρ üzerinde $\Delta\rho$ sıçaramasının olduğu, birim normali n_k olan bir süreksizlik yüzeyi üzerinde $\Delta U_{,kl} = -4\pi\Delta\rho n_k n_l$ sıçaraması yapar [90]. Dolayısıyla, S ayırım yüzeyinin iki tarafında kalan bitişik noktalar arasındaki M_2 potansiyel farkı

$$M_{2,kl}(dış) - M_{2,kl}(iç) = 4\pi n_k n_l \quad (2.12)$$

ile verilir. Benzer şekilde M_1 potansiyeli için fark

$$M_{1,klmn}(d\mathcal{I}) - M_{1,klmn}(i\mathcal{I}) = 8\pi n_k n_l n_m n_n \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabilir. (2.12), (2.13) ve (2.9) denklemleri kullanılarak katkı maddesinin hemen dışındaki noktalardaki genleme katkı maddesinin içindeki bitişik noktaların değerleri cinsinden

$$e^C(d\mathcal{I}) = e^C(i\mathcal{I}) - \frac{1+2\nu}{3(1-\nu)} e^T - \frac{1-2\nu}{1-\nu} e_{kl}^T n_k n_l \quad (2.14)$$

ve

$$\begin{aligned} e_{kl}^C(d\mathcal{I}) = & e_{kl}^C(i\mathcal{I}) + \frac{1}{1-\nu} e_{mn}^T n_m n_n n_k n_l - e_{km}^T n_m n_l - e_{lm}^T n_m n_k \\ & + \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)} e_{mn}^T n_m n_n \delta_{kl} - \frac{1+2\nu}{3(1-\nu)} e^T (n_k n_l - \frac{1}{3} \delta_{kl}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada indissiz ve “ ` ” işaretli büyüklükler ilgili tansörün sırasıyla skaler ve deviatorik kısımlarını göstermekte ve herhangi bir f_{kl} tansörü için

$$f = f_{11} + f_{22} + f_{33} = f_{mm} \quad \text{ve} \quad f_{kl} = f_{kl} - \frac{1}{3} f \delta_{kl} \quad (2.16)$$

olarak tanımlanırlar.

Bu noktaya kadar katkı maddesinin şekli hakkında hiçbir varsayım yapılmamış ve malzemenin katkı maddesi dışında herhangi bir noktadaki genlemesi katkı maddesi içindeki genleme alanı ile ifade edilmiştir.

2.1.2 Elipsoidal Katkı Maddesinden Kaynaklanan Elastik Alanlar

(2.4) denklemi ile tanımlanan yedeğiştirme alanı üreticisi

$$16\pi\mu(1-\nu)U_k = \frac{F_l}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left((3-4\nu)\delta_{kl} + \frac{(x_k-x'_k)(x_l-x'_l)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right) \quad (2.17)$$

olarak yazılıp (2.5) integralinde kullanılarak, Green-Gauss teoremi [91-92] yardımıyla hacim integraline çevrilirse

$$u_k^C(\mathbf{x}) = \frac{e_{lm}^T}{8\pi(1-\nu)} \int_V \frac{dv}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} g_{klm}(\mathbf{d}) \quad (2.18)$$

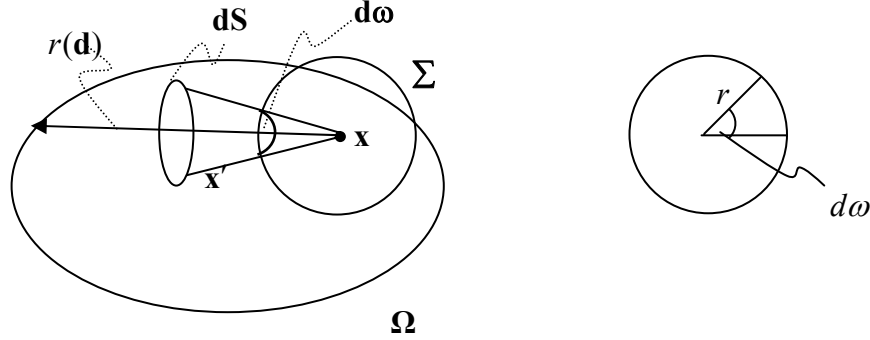
elde edilir. Burada $\mathbf{d} = (\mathbf{x}' - \mathbf{x})/|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ doğrultu birim vektörüdür ve

$$g_{klm}(\mathbf{d}) = (1-2\nu)(\delta_{kl}d_m + \delta_{km}d_l - \delta_{lm}d_k) + 3d_k d_l d_m \quad (2.19)$$

olarak verilmektedir. Katkı maddesinden uzak \mathbf{x} noktaları için, tüm terimler hacim integrali dışına alınır (2.18) integrali

$$u_k^C(\mathbf{x}) = V e_{lm}^T g_{klm} \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir. Katkı maddesinin içindeki elastik alanlar için ise, (2.18) integrali açık olarak hesaplanmalıdır.



Şekil 2.1 : Elipsoidal Katkı Maddesi Ω , \mathbf{x} noktası merkezli birim küre Σ

Şekil 2.1 den görüleceği üzere, elipsoid içinde dv hacim elemanı

$$dv = dr dS = dr r^2 d\omega \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir, burada $d\omega$, \mathbf{x} noktasında merkezlenmiş Σ birim küresinin bir yüzey elemanıdır. (2.21) ifadesi (2.18) de kullanılarak, integral birim küre üzerine taşınır ve r ye göre integral alınırsa

$$u_k^C(\mathbf{x}) = \frac{e_{lm}^T}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Sigma} r(\mathbf{d}) g_{klm}(\mathbf{d}) d\omega \quad (2.22)$$

elde edilir.

Burada

$$r(\mathbf{d}) = -f/g + (f^2/g^2 + h/g)^{1/2} \quad (2.23)$$

ve

$$\begin{aligned} f &= d_1 x_1 / a_1^2 + d_2 x_2 / a_2^2 + d_3 x_3 / a_3^2, \\ g &= d_1^2 / a_1^2 + d_2^2 / a_2^2 + d_3^2 / a_3^2, \\ h &= 1 - x_1^2 / a_1^2 - x_2^2 / a_2^2 - x_3^2 / a_3^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

olup, a_k , $k=1,2,3$ elipsoidin x_k yönündeki yarı-eksen boylarıdır.

(2.22) integrali

$$\Lambda_1 = d_1 / a_1^2, \quad \Lambda_2 = d_2 / a_2^2, \quad \Lambda_3 = d_3 / a_3^2 \quad (2.25)$$

tanımlamaları ile

$$u_k^C(\mathbf{x}) = \frac{x_n e_{lm}^T}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Sigma} \frac{\Lambda_n g_{klm}}{g} d\omega \quad (2.26)$$

şeklinde yazılabilir ve (2.6) yardımıyla

$$e_{kl}^C(\mathbf{x}) = \frac{e_{mn}^T}{16\pi(1-\nu)} \int_{\Sigma} \frac{\Lambda_k g_{lmn} + \Lambda_l g_{kmn}}{g} d\omega \quad (2.27)$$

bulunur. (2.27) denklemi açık olarak, elipsoid içindeki genlemenin ve dolayısıyla gerilmenin \mathbf{x} konum vektöründen bağımsız olduğunu, dolayısıyla homojen olduğunu göstermektedir.

(2.27) formundaki integrallerin basit integrallere indirgenmesi Routh [93] tarafından verilmiştir. (2.27) ifadesi ek genlemeler cinsinden

$$e_{kl}^C = S_{klmn} e_{mn}^T \quad (2.28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, \mathbf{S} tansörü Eshelby tansörü olarak adlandırılır ve bileşenleri

$$\begin{aligned} S_{klmn} &= S_{lkmn} = S_{klnm}, \\ S_{1111} &= \frac{3}{8\pi(1-\nu_0)} a_1^2 I_{11} + \frac{1-2\nu_0}{8\pi(1-\nu_0)} I_1, \\ S_{1122} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu_0)} a_2^2 I_{12} - \frac{1-2\nu_0}{8\pi(1-\nu_0)} I_1, \\ S_{1133} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu_0)} a_3^2 I_{13} - \frac{1-2\nu_0}{8\pi(1-\nu_0)} I_1, \\ S_{1212} &= \frac{a_1^2 + a_2^2}{16\pi(1-\nu_0)} I_{12} + \frac{1-2\nu_0}{16\pi(1-\nu_0)} (I_1 + I_2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

olarak yazılabilir. Burada ν_0 matris malzemesinin Poisson oranıdır [82, 87] ve diğer bileşenler (1,2,3) değerlerinin dairesel permütasyonu ile ifade edilirler. Dairesel permütasyonla ifade edilemeyen değerler, örneğin $S_{1112} = S_{1223} = S_{1232} = 0$ ve

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Sigma} \frac{l_1^2}{a_1^2 g} d\omega = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^{\infty} \frac{1}{(a_1^2 + s)\Delta(s)} ds, \\ I_{11} &= \int_{\Sigma} \frac{l_1^4}{a_1^4 g} d\omega = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^{\infty} \frac{1}{(a_1^2 + s)^2 \Delta(s)} ds, \\ I_{12} &= 3 \int_{\Sigma} \frac{l_1^2 l_2^2}{a_1^2 a_2^2 g} d\omega = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^{\infty} \frac{1}{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)\Delta(s)} ds, \\ \Delta(s) &= (a_1^2 + s)^{1/2} (a_2^2 + s)^{1/2} (a_3^2 + s)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

dir.

Mura [70], çeşitli şekilli katkı maddeleri için Eshelby tansörü \mathbf{S} 'nin bileşenlerini vermiştir. Örneğin küresel ($a_1 = a_2 = a_3 = a$) katkı maddeleri için Eshelby tansörünün bileşenleri, (2.29) denklemlerinde (2.30) ifadelerinden elde edilen

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{4\pi}{3}, \quad (2.31)$$

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = I_{12} = I_{31} = I_{23} = \frac{4\pi}{5a^2}$$

değerleri kullanılarak

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} = \frac{7 - 5\nu_0}{15(1 - \nu_0)},$$

$$S_{1122} = S_{2233} = S_{3311} = S_{1133} = S_{2211} = S_{3322} = \frac{5\nu_0 - 1}{15(1 - \nu_0)}, \quad (2.32)$$

$$S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} = \frac{4 - 5\nu_0}{15(1 - \nu_0)}$$

olarak elde edilmektedirler. Bu tansörler malzemenin etkin özelliklerini bulmak için çeşitli homojenleştirme yöntemlerinde kullanılmaktadırlar.

2.2 Mori-Tanaka Homojenleştirme Yöntemi

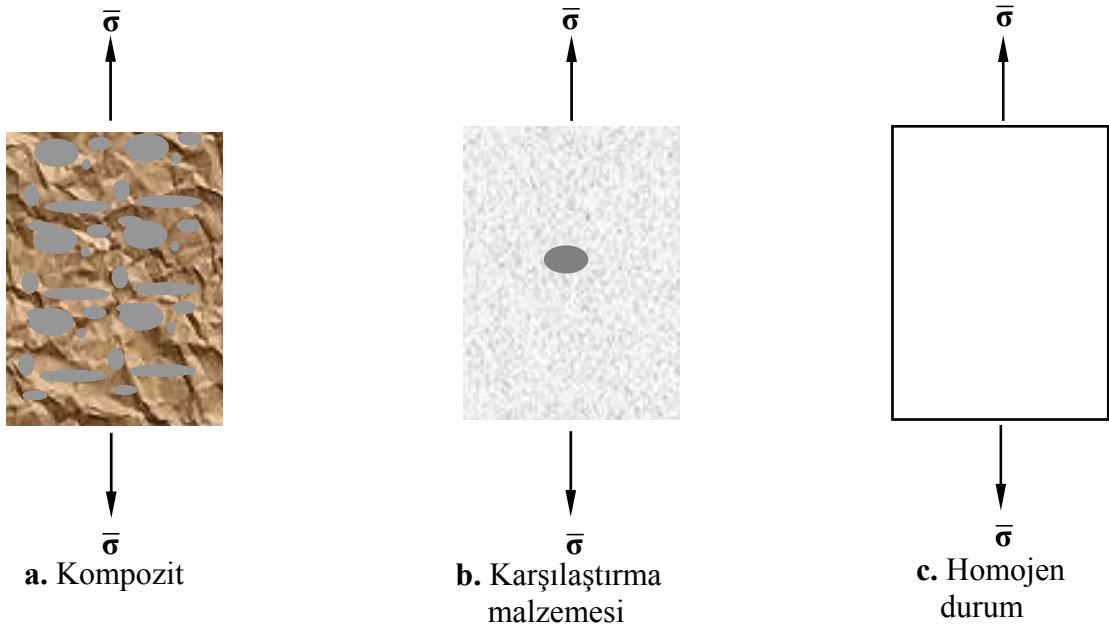
Heterojen malzemelerin makro özelliklerinin ortamın mikro özelliklerinden hareketle elde edilmesi problemi mikromekanik teorisinin temel amaçlarından biridir. Bu çerçevede, giriş bölümünde de belirtildiği gibi, çeşitli homojenleştirme modelleri geliştirilmiştir [40–64]. Mori ve Tanaka [52] ilk olarak, gerilmesiz genlemeli (stress-free strain) veya Mura [70] anlamında ekgenlemeli (eigenstrain) elipsoidal bir katkı maddesi için Eshelby çözümüne dayanarak, matris malzemesindeki ortalama gerilme kavramını tanımlamışlardır. Bu yöntem, homojenleştirilmiş malzemenin etkin malzeme özelliklerini, bileşenlerinin özellikleri cinsinden analitik ve kapalı bir formda vermektedir. Doğal olarak, farklı tip ve boyutta katkı maddeleri içeren farklı kompozit malzemelerin homojenleştirilmesi problemi için bu yöntemin her zaman uygun olduğu gibi bir genellemeye varılamasa da, parçacık tipli kompozitlerin

homojenleştirilmesi probleminde kapalı ve analitik çözüm bulabilme olanağı, diğer yöntemlere kıyasla hem doğruluk hem de işlem kolaylığı açısından üstünlük sağlar.

Bu bölümde, bahsedilen üstünlüğünün yanı sıra, parçacık tipli kompozitlerin hasarlı malzeme teorisinde de kullanılabilirliği nedeniyle de ön plana çıkan Mori-Tanaka homojenleştirme yöntemi, klasik elastisite kapsamında anlatılacaktır.

2.2.1 Genel Teori

Homojenleştirme probleminin iyi tanımlı olması için öncelikle kompozit malzemenin sınırlarında sabit $\bar{\sigma}$ gerilmesine maruz bırakıldığı düşünülecek ve matris malzemesi büyüklükleri “0”, katkı maddesi büyüklükleri “1” indisli gösterileceklerdir. Analizi kolaylaştırmak için, matris ile özdeş şekilli, aynı malzeme özelliklerine ve aynı sınır koşullarına sahip fakat tek bir katkı maddesi içeren bir karşılaştırma modeli tanımlanabilir, bkz. Şekil 2.2.



Şekil 2.2 : Sınırlarda $\bar{\sigma}$ gerilmesine maruz bırakılmış kompozit, karşılaştırma malzemesi ve homojen durum

Doğal olarak, $\bar{\sigma}$ gerilmesi nedeniyle karşılaştırma malzemesinde oluşan e^0 genlemesi sabittir ve matris malzemesinin elastisite tansörü \mathbf{L}_0 olmak üzere

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}_0 \mathbf{e}^0, \quad \mathbf{e}^0 = \mathbf{L}_0^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.33)$$

ilişkisi ile verilir. Kompozit malzemenin matrisinde ise, çok sayıda katkı maddesinin varlığı nedeniyle, ortalama gerilme ve genleme, doğal olarak, tek katkı maddeli karşılaştırma malzemesindeki $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ gerilmesi ve \mathbf{e}^0 genlemesinden farklıdır, bu farklılıklar sırasıyla $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ ve $\tilde{\mathbf{e}}$ ile gösterilirse, matristeki ortalama gerilme

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}_0 (\mathbf{e}^0 + \tilde{\mathbf{e}}) \quad (2.34)$$

şeklinde yazılabilir [53].

Katkı maddelerinin ortalama gerilme ve genlemesi, matris malzemesinin gerilme ve genlemesinden $\boldsymbol{\sigma}^{pt}$ ve \mathbf{e}^{pt} kadar farklı olsun. Bu durumda, katkı maddelerindeki ortalama gerilme, Eshelby eşdeğer dönüşüm tansörü kullanılarak

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}^{pt} = \mathbf{L}_1 (\mathbf{e}^0 + \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{e}^{pt}) = \mathbf{L}_0 (\mathbf{e}^0 + \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{e}^{pt} - \mathbf{e}^T) \quad (2.35)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, \mathbf{L}_1 katkı maddelerinin malzeme özelliklerini gösteren tansör, \mathbf{e}^T katkı maddelerinin kapsadığı bölge içinde tanımlı eşdeğer dönüşüm genlemesidir [53].

Diğer yandan, f_0 ve f_1 sırası ile matris ve katkı maddelerinin hacim oranlarını göstermek üzere, gerilmenin denkliğinden

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = f_0 \boldsymbol{\sigma}^0 + f_1 \boldsymbol{\sigma}^1, \quad f_0 + f_1 = 1 \quad (2.36)$$

yazılabilir. (2.34) ve (2.35) ifadeleri (2.36) gerilme denkliğinde kullanılırsa

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -f_1 \boldsymbol{\sigma}^{pt} \quad (2.37)$$

ilişkisi elde edilir. (2.37) ifadesi (2.35) denkleminde kullanılırsa katkı maddelerinde oluşan gerilme

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + f_0 \boldsymbol{\sigma}^{pt} \quad (2.38)$$

ile ifade edilebilir. Ayrıca, (2.34) ve (2.35) ilişkilerinden

$$\boldsymbol{\sigma}^{pt} = \mathbf{L}_0 (\mathbf{e}^{pt} - \mathbf{e}^T), \quad (2.39)$$

(2.33) ve (2.34) ilişkilerinden ise,

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}_0 \tilde{\mathbf{e}} \quad (2.40)$$

elde edilir. (2.39) ifadesi (2.37) ve (2.40) ile birlikte kullanılırsa

$$\tilde{\mathbf{e}} = -f_1 (\mathbf{e}^{pt} - \mathbf{e}^T) \quad (2.41)$$

sonucuna ulaşılır. \mathbf{S} Eshelby tansörü olmak üzere, pertürbe edilmiş genleme Eshelby eşdeğerlik ilişkisi

$$\mathbf{e}^{pt} = \mathbf{S} \mathbf{e}^T \quad (2.42)$$

(2.41) denkleminde kullanılarak, \mathbf{I} dört boyutlu birim tansör olmak üzere

$$\tilde{\mathbf{e}} = -f_1 (\mathbf{S} - \mathbf{I}) \mathbf{e}^T \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilir.

Kompozitin toplam ortalama genlemesi, bileşenlerinin hacimsel oranları ile, (2.42) ve (2.43) ilişkileri kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e} \rangle = \bar{\mathbf{e}} &= f_0 (\mathbf{e}^0 + \tilde{\mathbf{e}}) + f_1 (\mathbf{e}^0 + \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{e}^{pt}) \\ &= \mathbf{e}^0 + \tilde{\mathbf{e}} + f_1 \mathbf{e}^{pt} \\ &= \mathbf{e}^0 - f_1 (\mathbf{S} - \mathbf{I}) \mathbf{e}^T + f_1 \mathbf{S} \mathbf{e}^T \\ &= \mathbf{e}^0 + f_1 \mathbf{e}^T \end{aligned} \quad (2.44)$$

şeklinde bulunur. Burada, \mathbf{e}^T ifadesi de (2.35) denkleminde

$$\mathbf{e}^T = -(\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_0) [(\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_0)(f_0 \mathbf{S} + f_1 \mathbf{I}) + \mathbf{L}_0]^{-1} \mathbf{e}^0 \quad (2.45)$$

olarak bulunur.

Burada, kompozit malzemenin gerilme genleme ilişkisi

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.46)$$

ile (2.33) ifadesinin eşitlenmesi ve (2.44) ve (2.45) denklemlerinin bu eşitlikte kullanılmasıyla, malzemenin etkin elastisite modülü

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}_0 \left\{ \mathbf{I} - f_1 (\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_0) [(\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_0) (f_0 \mathbf{S} + f_1 \mathbf{I}) + \mathbf{L}_0]^{-1} \right\}^{-1} \quad (2.47)$$

olarak elde edilir.

(2.47) ifadesinden açıkça görüldüğü gibi, kompozit malzemenin etkin malzeme özellikleri, bileşenlerinin malzeme özellikleri ve boşlukların hacimsel oranı cinsinden kapalı olarak elde edilebilmektedir.

2.2.2 Uygulama

İzotrop matris malzemesi içine düzgün dağılımlı küresel katkı maddeleri katılmış bir kompozitin etkin malzeme özellikleri (2.47) ifadesinden şu şekilde hesaplanabilir.

Dördüncü merteye izotrop bir tansörün en genel biçimi Lamé sabitleri ile,

$$L_{klmn} = \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \quad (2.48)$$

şeklindedir ve hacimsel genleşme modülü, $K = (3\lambda + 2\mu)/3$ tanımıyla

$$L_{klmn} = K \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu \left(\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) \quad (2.49)$$

biçiminde de yazılabilir. Dolayısıyla, 4. merteye en genel izotrop bir tansör

$$L_{klmn} = L_{klmn} (3K, 2\mu) \quad (2.50)$$

şeklinde hidrostatik ve deviatorik kısımları cinsinden ifade edilebilir ki, bu büyüklükler sırasıyla

$$3K = \frac{1}{3}L_{kkll}, \quad 2\mu = \frac{1}{5}\left(L_{kkll} - \frac{1}{3}L_{kkll}\right) \quad (2.51)$$

şeklinde verilirler.

Bu bilgiler ışığında, \mathbf{S} tansörü (2.32) den hidrostatik ve deviatorik kısımları cinsinden

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\left(\frac{1}{3} \frac{1+\nu_0}{1-\nu_0}, \frac{2}{15} \frac{4-5\nu_0}{1-\nu_0}\right) \quad (2.52)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(3K_0, 2\mu_0)$, $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1(3K_1, 2\mu_1)$ sırasıyla matris ve katkı malzemesinin malzeme özelliklerini göstermek üzere $\mathbf{L} = \mathbf{L}(3K, 2\mu)$ tanımı ile, kompozit malzemenin etkin modülleri (2.47) den

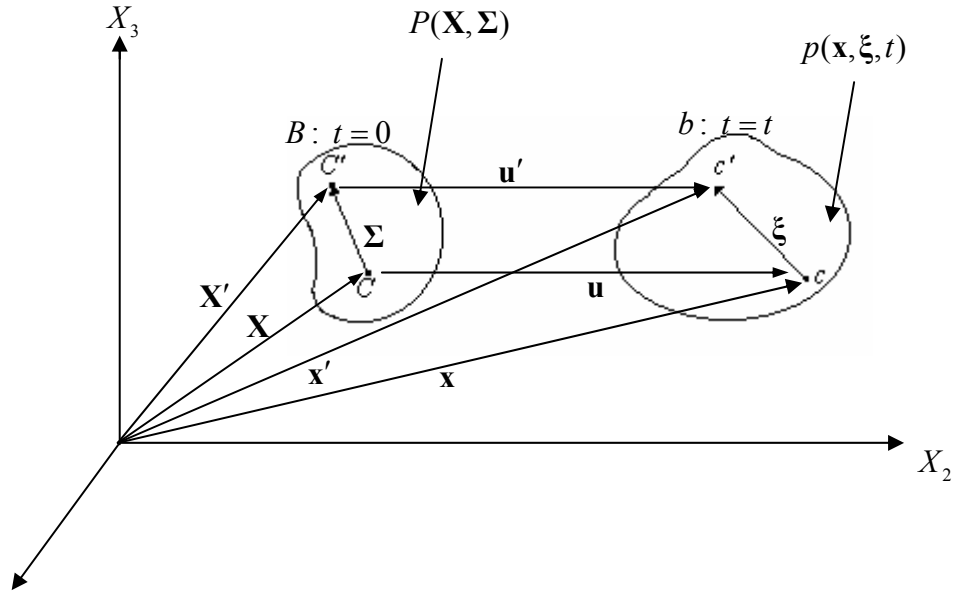
$$\frac{K}{K_0} = 1 + \frac{f_1(K_1 - K_0)}{\frac{1}{3}f_0 \frac{1+\nu_0}{1-\nu_0}(K_1 - K_0) + K_0}, \quad (2.53)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{f_1(\mu_1 - \mu_0)}{\frac{2}{15}f_0 \frac{4-5\nu_0}{1-\nu_0}(\mu_1 - \mu_0) + \mu_0}$$

olarak elde edilir.

3. MİKROMORFİK TEORİ

Mikromorfik sürekli ortam teorisi Eringen tarafından, şekil değiştirebilen küçük hacimlerin sürekli bir topluluğu olarak tanımlanmaktadır [94]. Mikromorfik teori, basitçe, ortamın klasik şekil değiştirmesinin yanı sıra, sürekli ortamı tanımlayan küçük hacim içindeki parçacıkların bu klasik şekil değiştirmeden bağımsız olarak da hareket edebildiği bir ortam olarak tanımlanır. Bu görüş paralelinde, Şekil 3.1 de



Şekil 3.1 : Mikro elemanın şekil değiştirmesi [94]

görüldüğü gibi, C merkezli ve ΔV hacimli bir P parçacığının içindeki bir C' noktasının hareketini tanımlamak için, $t = 0$ anında

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.1)$$

yazılabilir. Burada \mathbf{X} yukarıda tanımlanan küçük hacmin kütle merkezi olan C noktasının konumunu, $\boldsymbol{\Sigma}$ küçük hacim içinde bağımsız olarak hareket edebildiği varsayılan C' noktasının C 'ye göre konumunu tanımlamaktadır. Buna göre, C' noktasının hareketi bir t anında

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Sigma}, t) \quad (3.2)$$

şeklinde verilebilir.

Malzeme parçacıklarının ΔV hacmi içinde \mathbf{x} etrafında homojen ve lineer şekil değiştirdikleri varsayılarak $\boldsymbol{\xi}$ ve $\boldsymbol{\Sigma}$ bileşenleri arasındaki ilişki

$$\boldsymbol{\xi}_k = \chi_{kK} \Sigma_K \quad \text{ve} \quad \Sigma_K = \mathcal{X}_{Kk} \boldsymbol{\xi}_k \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir. Burada χ ve \mathcal{X} tansörleri sırasıyla, mikro şekil değiştirme ve ters mikro şekil değiştirme tansörleri olarak adlandırılırlar [94].

Bu tez kapsamında klasik Eshelby tansörlerinin özel mikromorfik ortamlara genelleştirilmesi ile ilgilenildiğinden, mikromorfik ortamla ilgili yalnız lineer izotrop durumun temel denklemleri verilerek, bu denklemlerin özel durumlara indirgenmesiyle, lineer izotrop mikrogenleşme, mikropolar ve mikrogermeli ortamların temel denklemleri elde edilecektir.

3.1 Mikromorfik Ortamın Lineer Bünye Denklemleri

Mikromorfik ortamın lineer bünye denklemleri t_{kl} gerilme, s_{kl} moment ve m_{klm} mikromorfik gerilme moment tansörü olmak üzere

$$\begin{aligned} t_{kl} &= A_{klmn} \varepsilon_{mn} + E_{klmn} e_{mn} + F_{klmnp} \gamma_{mnp}, \\ s_{kl} &= E_{mnkl} \varepsilon_{mn} + B_{klmn} e_{mn} + G_{klmnp} \gamma_{mnp}, \\ m_{klm} &= F_{nplmk} \varepsilon_{np} + G_{nplmk} e_{np} + C_{lmknpq} \gamma_{npq} \end{aligned} \quad (3.4)$$

denklemleri ile verilmektedir [94]. Burada ϕ_{kl} uzaysal koordinatlarda mikro şekil değiştirme tansörünü göstermek üzere

$$\varepsilon_{kl} = u_{l,k} - \phi_{lk}, \quad 2e_{kl} = \phi_{kl} + \phi_{lk}, \quad \gamma_{klm} = \phi_{kl,m} \quad (3.5)$$

mikromorfik genleme tansörleridir.

(3.4) denklemindeki diğer büyüklükler malzemeyi tanımlayan tansörlerdir ve izotrop homojen, merkezci simetrik mikromorfik ortam için

$$\begin{aligned}
A_{klmn} &= \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \left(\mu + \frac{\kappa}{2}\right) \delta_{km} \delta_{ln} + \left(\mu - \frac{\kappa}{2}\right) \delta_{kn} \delta_{lm}, \\
E_{klmn} &= (\lambda + \nu) \delta_{kl} \delta_{mn} + (\mu + \sigma) (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}), \\
B_{klmn} &= (\lambda + 2\nu + \tau) \delta_{kl} \delta_{mn} + (\mu + 2\sigma + \eta) (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}), \\
F_{klmnp} &= G_{klmnp} = 0, \\
C_{klmnpq} &= \tau_1 (\delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{pq} + \delta_{kq} \delta_{lm} \delta_{np}) + \tau_2 (\delta_{kl} \delta_{mp} \delta_{nq} + \delta_{km} \delta_{lq} \delta_{np}) \\
&\quad + \tau_3 \delta_{kl} \delta_{mq} \delta_{np} + \tau_4 \delta_{kn} \delta_{lm} \delta_{pq} + \tau_5 (\delta_{km} \delta_{ln} \delta_{pq} + \delta_{kp} \delta_{lm} \delta_{nq}) \\
&\quad + \tau_6 \delta_{km} \delta_{lp} \delta_{nq} + \tau_7 \delta_{kn} \delta_{lp} \delta_{mq} + \tau_8 (\delta_{kp} \delta_{lq} \delta_{mn} + \delta_{kq} \delta_{ln} \delta_{mp}) \\
&\quad + \tau_9 \delta_{kn} \delta_{lq} \delta_{mp} + \tau_{10} \delta_{kp} \delta_{ln} \delta_{mq} + \tau_{11} \delta_{kq} \delta_{lp} \delta_{mn}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

olarak verilirler ve

$$\begin{aligned}
A_{klmn} &= A_{mnkl}, \quad B_{klmn} = B_{mnkl} = B_{lkmn} = B_{nmkl}, \\
C_{klmnpq} &= C_{npqklm}, \quad E_{klmn} = E_{klmn}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

simetrilerini sağlarlar [94]. Burada $\kappa, \sigma, \nu, \eta, \tau, \tau_i$ ($i = 1, \dots, 11$) mikromorfik yapıyı tanımlayan yeni malzeme sabitleridir.

Mikromorfik ortamın korunum denklemleri içinde, konuyla ilgisizliği nedeniyle kütle, mikro atalet ve enerjinin korunumu ile ilgili olanlara burada değinilmeyecektir, ayrıntılı bilgi [94]'de bulunabilir. Bu tez kapsamında kullanılacak olan yerel momentumun ve momentumun momentinin korunumu, mikro atalet etkileri ihmal edilerek

$$\begin{aligned}
t_{kl,k} + f_l &= 0, \\
m_{klm,k} + t_{ml} - s_{ml} + l_{lm} &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

olarak yazılabilir. Burada, f_k ve l_{kl} sırası ile kütle kuvvetleri ve kütle momentleridir.

(3.4) bünye denklemleri ve (3.5) genleme tansörleri (3.8) denge denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
A_{klmn} u_{n,mk} + (E_{klmn} - A_{klmn}) \phi_{nm,k} + f_l &= 0, \\
(A_{klmn} - E_{nmkl}) u_{n,m} + (E_{klmn} + E_{nmkl} - A_{klmn} - B_{klmn}) \phi_{mn} + C_{lkqpmn} \phi_{pm,nq} + I_{lk} &= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

denge denklemlerine ulaşılır. Burada (3.6) kullanılarak, izotrop, homojen, merkezci simetrik mikromorfik malzemenin onsekiz malzeme sabiti içeren oniki denge denklemi,

$$\begin{aligned}
\left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) u_{l,kk} + (\mu + \lambda) u_{k,kl} + \nu \phi_{kk,l} + \sigma \phi_{kl,k} + (\sigma - \kappa) \phi_{lk,k} + f_l &= 0, \\
(\tau_1 + \tau_2) \phi_{mm,kl} + \tau_1 \phi_{mn,nm} \delta_{lk} + \tau_2 \phi_{nm,nm} \delta_{lk} + \tau_3 \phi_{nn,mm} \delta_{lk} + (\tau_4 + \tau_9) \phi_{lm,km} \\
+ (\tau_5 + \tau_8) (\phi_{km,ml} + \phi_{ml,km}) + (\tau_6 + \tau_{11}) \phi_{mk,ml} + \tau_7 \phi_{lk,mm} + \tau_{10} \phi_{kl,mm} \\
- (\nu u_{n,n} + \tau \phi_{nn}) \delta_{lk} - \sigma u_{k,l} + \left(\frac{\kappa}{2} - \sigma \right) u_{l,k} - \eta \phi_{kl} - \left(\frac{\kappa}{2} + \eta \right) \phi_{lk} + I_{lk} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

ile yerdeğiştirme vektörünün üç ve mikro şekil değiştirme tansörünün dokuz bileşeni belirlenir [94].

Giriş bölümünde de belirtildiği gibi mikromorfik teori hasarlı cismin modellenmesi için çok daha uygun olmasına rağmen, lineer durumda bile hem çok sayıda malzeme sabiti içermektedir hem de denklemler daha çok ve karmaşıktır. Bu nedenle, parçacıkların mikro hareketi üzerine çeşitli kısıtlar getirilerek mikromorfik teorisinin bazı özel ve daha basit durumları ele alınacaktır.

3.2 Mikrogermeli Ortamın Lineer Bünye Denklemleri

Mikromorfik teoriden mikrogermeli ortam teorisine geçiş, parçacıkların, malzemenin makro şekil değiştirmesinden bağımsız olarak yaptığı mikro şekil değiştirmesinin yalnız mikrodönme ve her yönde eş hacimsel mikrogenleşmeden ibaret olduğu varsayılarak, yani mikro kayma etkileri ihmal edilerek yapılır. Bu durumda, ϕ mikro şekil değiştirme tansörü

$$\begin{aligned}
\phi_{kl} &= \phi_{(kl)} + \phi_{[kl]}, \\
\phi_{(kl)} &= \frac{1}{2}(\phi_{kl} + \phi_{lk}), \\
\phi_{[kl]} &= \frac{1}{2}(\phi_{kl} - \phi_{lk})
\end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklinde simetrik ve antisimetrik kısımlara ayrılırsa, parçacıkların mikrodönme yapabilmesinden dolayı, antisimetrik kısım

$$\phi_{[kl]} = -e_{klm} \phi_m, \tag{3.12}$$

simetrik kısım ise üniform hacimsel mikrogenleşme dolayısı ile

$$\phi_{(kl)} = \theta \delta_{kl} \tag{3.13}$$

olarak yazılabilirler. Burada, ϕ_k mikrodönme vektörü ve θ hacimsel mikrogenleşme skaleri olarak tanımlanmaktadır. (3.12) ve (3.13) kısıtları altında, (3.8) denge denklemleri mikrogermeli ortam teorisi için kapalı formda

$$\begin{aligned}
t_{kl,k} + f_l &= 0, \\
m_{kl,k} + e_{lkm} t_{km} + l_l &= 0, \\
m_{k,k} + t - s + l &= 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olarak yazılabilir. Burada, mikromorfik teoride tanımlanan büyüklüklere benzer şekilde, s_{kl} ve m_{kl} gerilme moment tansörleri, m_k mikrogirme vektörü ve $t = t_{kk}$ ve $s = s_{kk}$ olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca, l_k ve l Eringen tarafından [94] sırasıyla kütle moment yoğunluğu vektörü ve kütle mikrogirme kuvvet yoğunluğu olarak adlandırılmışlardır.

(3.12) ve (3.13) kısıtları mikromorfik ortamın bünye denklemleri (3.4)'te kullanılırlarsa

$$\begin{aligned}
t_{kl} &= A_{kl}^s \theta + A_{mkl}^s \theta_{,m} + A_{klmn} \varepsilon_{mn} + C_{klmn} \gamma_{mn}, \\
m_{kl} &= B_{lk}^s \theta + B_{mlk}^s \theta_{,m} + C_{mnlk} \varepsilon_{mn} + B_{lkmn} \gamma_{mn}, \\
m_k &= C_k^s \theta + C_{kl}^s \theta_{,l} + A_{klm}^s \varepsilon_{lm} + B_{klm}^s \gamma_{lm}, \\
s - t &= C^s \theta + C_k^s \theta_{,k} + A_{kl}^s \varepsilon_{kl} + B_{kl}^s \gamma_{kl}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

mikrogermeli ortamın bünye denklemleri elde edilir. Bu durumda, (3.5) genleme tansörlerine benzer şekilde mikrogermeli ortamın genleme tansörleri

$$\varepsilon_{kl} = u_{l,k} + e_{lkm} \phi_m, \quad \gamma_{kl} = \phi_{k,l}, \quad \gamma_k = 3\theta_{,k} \tag{3.16}$$

olarak tanımlanabilir [94]. Burada (3.15) de görülen katsayı tansörleri

$$\begin{aligned}
A_{klm}^s &= 0, \quad B_{kl}^s = 0, \quad C_k^s = 0, \quad C_{klmn} = 0, \quad A_{kl}^s = \lambda_0 \delta_{kl}, \quad B_{klm}^s = b_0 e_{klm}, \\
B_{klmn} &= \alpha \delta_{kl} \delta_{mn} + \beta \delta_{kn} \delta_{lm} + \gamma \delta_{km} \delta_{ln}, \quad C^s = \lambda_1, \quad C_{kl}^s = a_0 \delta_{kl}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

izotrop homojen mikrogermeli ortamın malzeme sabitleridir ve mikromorfik ortamın (3.6) ile tanımlı sabitleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= 3\nu + 2\sigma, \quad \lambda_1 = 9\tau + 6\eta, \\
a_0 &= 6\tau_1 + 6\tau_2 + 9\tau_3 + \tau_4 + 2\tau_5 + \tau_6 + 3\tau_7 + 2\tau_8 + \tau_9 + 3\tau_{10} + \tau_{11}, \\
b_0 &= 3\tau_1 - 3\tau_2 + \tau_4 - \tau_6 - \tau_9 + \tau_{11}, \\
\alpha &= 2\tau_8 - \tau_9 - \tau_{11}, \quad \beta = -\tau_4 + 2\tau_5 - \tau_6, \\
\gamma &= \tau_4 - 2\tau_5 + \tau_6 + 2\tau_7 - 2\tau_8 + \tau_9 - 2\tau_{10} + \tau_{11},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilirler [94].

(3.15) bünye denklemleri (3.16) ve (3.17) tanımları ile birlikte (3.14) denge denklemlerinde kullanılırsa, (3.9) mikromorfik ortam denklemlerine benzer şekilde, izotrop homojen mikrogermeli ortamın dokuz malzeme sabiti içeren yedi denge denklemi,

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \theta_{,l} + \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) u_{k,lk} + \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) u_{l,kk} + \kappa e_{lkm} \phi_{m,k} + f_l &= 0, \\
(\alpha + \beta) \phi_{k,lk} + \gamma \phi_{l,kk} + \kappa e_{lkm} u_{m,k} - 2\kappa \phi_l + l_l &= 0, \\
a_0 \theta_{,kk} - \lambda_1 \theta - \lambda_0 u_{k,k} + l &= 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

ile yerdeğiştirme ve mikrodönme vektorlerinin üçer bileşeni ve hacimsel mikrogenleşme skaleri belirlenir.

3.3 Mikropolar Ortamın Lineer Bünye Denklemleri

Mikropolar ortamın temel denklemleri doğrudan mikromorfik teoriden elde edilebileceği gibi, mikrogermeli ortam üzerine bir kısıt getirilerek de elde edilebilir. Mikropolar ortamda, parçacıkların, klasik şekil değiştirmenin yanı sıra yalnız mikrodönme yapabildiği varsayımı yapılmaktadır. Dolayısıyla mikrogermeli teoride, parçacıkların hacimsel genleşme yapabildiği varsayımından vazgeçilerek mikropolar ortamın temel denklemleri, mikrogermeli ortamın denklemlerinden elde edilebilirler. Bu durumda, ϕ mikro şekil değiştirme tansörünün simetrik kısmı sıfır alınmalıdır yani

$$\theta = 0 \quad (3.20)$$

yazılmalıdır. Böylece, ϕ mikro şekil değiştirme tansörü yalnız antisimetrik kısım (3.12) den oluşur.

Mikrogermeli ortamın (3.14) denge denklemleri (3.20) kısıtı altında

$$\begin{aligned} t_{kl,k} + f_l &= 0, \\ m_{kl,k} + e_{lkm} t_{km} + l_l &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

mikropolar ortamın denge denklemlerine indirgenir. Ayrıca, (3.15) ten

$$\begin{aligned} t_{kl} &= A_{klmn} \varepsilon_{mn} + C_{klmn} \gamma_{mn}, \\ m_{kl} &= C_{mnlk} \varepsilon_{mn} + B_{lkmn} \gamma_{mn} \end{aligned} \quad (3.22)$$

yazılır. A_{klmn} , B_{lkmn} ve C_{klmn} malzeme sabiti tansörleri, mikromorfik ve mikrogermeli ortam için verilen malzeme sabiti tansörleri (3.6) ve (3.17) de ve ε_{kl} ve γ_{kl} tansörleri mikrogermeli ortamın genleme tansörleri (3.16) da verildiği gibidir.

(3.22) bünye ilişkileri (3.21) denge denklemlerinde kullanılırsa, mikrogermeli ortamın (3.19) denklemlerine benzer şekilde, izotrop homojen mikropolar ortamın altı malzeme sabiti içeren altı denge denklemi,

$$\begin{aligned} (\mu + \frac{\kappa}{2}) u_{l,kk} + (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}) u_{k,kl} + \kappa e_{lkm} \phi_{m,k} + f_l &= 0, \\ \gamma \phi_{l,kk} + (\alpha + \beta) \phi_{k,kl} - 2\kappa \phi_l + \kappa e_{lkm} u_{m,k} + l_l &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

ile yerdeğiştirme ve mikrodönme vektörlerinin üçer bileşeni belirlenir.

3.4 Mikrogenleşen Ortamın Lineer Bünye Denklemleri

Mikrogenleşen ortamda parçacıkların, klasik şekil değiştirmenin yanı sıra yalnız hacimsel mikrogenleşme yapabildiği varsayımı yapılmaktadır. Dolayısıyla, mikrogermeli ortam teorisinde, parçacıkların hacimsel genleşme yanı sıra mikrodönme de yapabildiği varsayımından vazgeçilirse, mikrogenleşen ortamın temel denklemleri mikropolar ortama benzer şekilde elde edilebilir. Mikrogermeli ortamda parçacıklar üzerine getirilen bu kısıt sonunda elde edilen mikrogenleşen ortam teorisi, boşluklu lineer elastik malzemeler için Cowin ve Nunziato [4-5] tarafından geliştirilen teoriyle de örtüşmektedir ve hasarlı malzemelerin modellenmesi için hem klasik teoriye hem de mikropolar teoriye göre daha gerçekçidir.

Bu durumda mikro şekil değiştirme tansörü ϕ üzerine

$$\begin{aligned} \phi_{(kl)} &= \theta \delta_{kl}, \\ \phi_{[kl]} &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

kısıtlamaları getirilmelidir.

Mikrogenleşen ortamın denge denklemleri, mikrogermeli ortamın (3.14) denge denklemlerinde (3.24) kısıtı kullanılarak

$$\begin{aligned} t_{kl,k} + f_l &= 0, \\ m_{k,k} + t - s + l &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde bulunurlar. Bünye denklemleri ise, (3.15) den

$$\begin{aligned}
t_{kl} &= A_{kl}^s \theta + A_{mkl}^s \theta_{,m} + A_{klmn} \varepsilon_{mn}, \\
m_k &= C_k^s \theta + C_{kl}^s \theta_{,l} + A_{klm}^s \varepsilon_{lm}, \\
s - t &= C^s \theta + C_k^s \theta_{,k} + A_{kl}^s \varepsilon_{kl}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

olarak yazılır. Burada, $C^s, C_k^s, C_{kl}^s, A_{kl}^s, A_{klm}^s$ ve A_{klmn} malzeme sabiti tansörleri, mikromorfik ve mikrogermeli ortamın malzeme sabiti tansörleri ile eş olup, $\kappa = 0$ olmak üzere (3.6) ve (3.17) de verildiği gibidir. Mikrogenleşen ortamın genleme tansörü ε_{kl} , mikrogermeli ortamın genleme tansörleri (3.16) dan farklı olarak

$$\varepsilon_{kl} = u_{l,k}, \quad \gamma_k = 3\theta_{,k} \tag{3.27}$$

ile verilmektedir.

(3.26) bünye ilişkileri (3.25) denge denklemlerinde kullanılırsa, mikrogermeli ortamın (3.19) denklemlerine benzer şekilde, izotrop homojen mikrogenleşen ortamın beş malzeme sabiti içeren dört denge denklemi,

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \theta_{,l} + (\lambda + \mu) u_{k,kl} + \mu u_{l,kk} + f_l &= 0, \\
a_0 \theta_{,kk} - \lambda_1 \theta - \lambda_0 u_{k,k} + l &= 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

ile, yerdeğiştirme vektörünün üç bileşeni ve hacimsel mikrogenleşme skaleri belirlenir. Burada, mikrogenleşen ortamın malzeme sabitleri $a_0, \lambda_0, \lambda_1$, mikrogermeli ortamın malzeme sabitleri (3.18) ile eşdir ve l mikrogermeli ortam teorisinde olduğu gibi kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğu olarak adlandırılır [94].

Mikromorfik teori üzerine yukarıda açıklanan kısıtlar getirilerek elde edilen mikropolar ortam, mikrogenleşen ortam ve mikrogermeli ortam teorileri için Eshelby tansörleri takibeden üç bölümde sırası ile elde edileceklerdir.

4. MİKROPOLAR ORTAM İÇİN ESHELBY ÇÖZÜMÜ

Mikropolar teori, önceki bölümde açıklandığı gibi, malzeme parçacıklarının klasik şekil değiştirmenin yanı sıra yalnız mikrodönme yapabildiği varsayımına dayanmaktadır. Lineer mikropolar teori ile modellenen sınırsız bir katı üzerine uygulanan kuvvet ve momentlerin kütle merkezinde yoğunlaşmış olduğu kabulü ile temel çözümler ilk olarak Sandru [95] tarafından verilmiştir. Hsieh v.d. [72] ve Hsieh [73] mikropolar ortamda hacimsel kusurlar için genel formüller geliştirmişlerdir. Son olarak, klasik elastisitede Mura [70] tarafından tanımlanan ekgenleme (eigenstrain) kavramı Cheng ve He [74-75] tarafından mikropolar teoriye genişletilerek, ekdönme (eigentorsion) tanımıyla birlikte küresel katkı maddeleri içeren homojen izotrop mikropolar ortam için dört Eshelby eşdeğer dönüşüm tansörü Green fonksiyonları yardımıyla elde edilmiştir. Klasik elastisite teorisinde elde edilen Eshelby tansörleri elipsoidal katkı maddeleri içinde homojen olmasına rağmen, mikropolar ortam için elde edilen bu tansörler küresel katkı maddeleri içinde bile homojen değildir. Mikropolar teori için elde edilen Eshelby tansörleri mikropolar malzeme sabitlerinin limit durumunda klasik Eshelby tansörlerine indirgenmektedir.

Bu bölümde ilk olarak, mikropolar teori ile modellenen malzemeler için temel denklemler çözülerek, bu çözümler yardımıyla katkı maddesinden kaynaklanan elastik alan ifadeleri verilecektir. Son olarak, küresel katkı maddeleri içeren lineer izotrop sonsuz bir mikropolar ortam için Eshelby tansörleri elde edilecektir.

4.1 Temel Çözümler

Bu ayıtta sonsuz mikropolar ortam için kuvvet ve momentlerin yoğunlaştırılarak kütle merkezinde uygulandığı varsayımı ile Sandru [95] tarafından verilen temel çözümlere değinilecektir. Galerkin [96] gösterimiyle mikropolar ortamın (3.23) denge denklemleri

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{\partial}{\partial x_k}, & \Delta &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2, & \diamond_1 &= (\lambda + 2\mu)\Delta, \\
\diamond_2 &= \left(\mu + \frac{\kappa}{2}\right)\Delta, & \diamond_3 &= (\alpha + \beta + \gamma)\Delta - 2\kappa, & \diamond_4 &= \gamma\Delta - 2\kappa
\end{aligned} \tag{4.1}$$

tanımları yapılarak

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

formunda yazılabilir. (4.2) matris denkleminin çözümü

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = [n_{kl}] \tag{4.3}$$

olarak yazılabilir. (4.2) matris denkleminde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
\vartheta_2 + (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2})X_1^2 & (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2})X_1X_2 & (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2})X_1X_3 & 0 & -\kappa X_3 & \kappa X_2 \\
(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2})X_1X_2 & \vartheta_2 + (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2})X_2^2 & (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2})X_2X_3 & \kappa X_3 & 0 & -\kappa X_1 \\
(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2})X_1X_3 & (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2})X_2X_3 & \vartheta_2 + (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2})X_3^2 & -\kappa X_2 & \kappa X_1 & 0 \\
0 & -\kappa X_3 & \kappa X_2 & \vartheta_4 + (\alpha + \beta)X_1^2 & (\alpha + \beta)X_1X_2 & (\alpha + \beta)X_1X_3 \\
\kappa X_3 & 0 & -\kappa X_1 & (\alpha + \beta)X_1X_2 & \vartheta_4 + (\alpha + \beta)X_2^2 & (\alpha + \beta)X_2X_3 \\
-\kappa X_2 & \kappa X_1 & 0 & (\alpha + \beta)X_1X_3 & (\alpha + \beta)X_2X_3 & \vartheta_4 + (\alpha + \beta)X_3^2
\end{bmatrix} \quad (4.4)$$

olarak verilir. Burada \mathbf{M} matrisinin tersi

$$\mathbf{M}^{-1} = [n_{kl}] \left(\diamond_1 \diamond_3 \left[\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta \right] \right)^{-1} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir ve \mathbf{N} matrisinin terimleri

$$\begin{aligned} n_{kk} &= \diamond_3 \left\{ \diamond_1 \diamond_4 - \left[\left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) \diamond_4 - \kappa^2 \right] X_k^2 \right\}, & k=1,2,3 \\ n_{kk} &= \diamond_1 \left\{ \diamond_2 \diamond_3 - \left[(\alpha + \beta) \diamond_2 - \kappa^2 \right] X_k^2 \right\}, & k=4,5,6 \\ n_{kl} &= n_{lk} = \diamond_3 \left[- \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) \diamond_4 + \kappa^2 \right] X_k X_l, & k \neq l, \quad k,l=1,2,3 \\ n_{kl} &= n_{lk} = \diamond_1 \left[- (\alpha + \beta) \diamond_2 + \kappa^2 \right] X_k X_l, & k \neq l, \quad k,l=4,5,6 \\ n_{14} &= n_{25} = n_{36} = n_{41} = n_{52} = n_{63} = 0, \\ n_{15} &= -n_{51} = n_{42} = -n_{24} = \kappa \diamond_1 \diamond_3 X_3, \\ n_{16} &= -n_{61} = n_{43} = -n_{34} = -\kappa \diamond_1 \diamond_3 X_2, \\ n_{26} &= -n_{62} = n_{53} = -n_{35} = \kappa \diamond_1 \diamond_3 X_1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

dir. Burada tekrarlanan indisler üzerinde toplama yoktur. (4.2) ve (4.3) ifadelerinin sağ tarafındaki büyüklükler arasında, (4.5) dolayısı ile

$$\left\{ \diamond_1 \diamond_3 \left[\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta \right] \right\} \mathbf{F} = -\mathbf{f}, \quad \left\{ \diamond_1 \diamond_3 \left[\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta \right] \right\} \mathbf{L} = -\mathbf{l} \quad (4.7)$$

ilişkilerinin varlığı açıktır. (4.3) çözümü

$$\boldsymbol{\varphi} = \diamond_3 \mathbf{F}, \quad \boldsymbol{\varphi}^* = \diamond_1 \mathbf{L} \quad (4.8)$$

tanımları ve (4.6) katsayıları ile,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \diamond_1 \diamond_4 \boldsymbol{\varphi} - \left[\left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) \diamond_4 - \kappa^2 \right] \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - \kappa \diamond_3 \nabla \times \boldsymbol{\varphi}^*, \\ \boldsymbol{\phi} &= \diamond_2 \diamond_3 \boldsymbol{\varphi}^* - \left[(\alpha + \beta) \diamond_2 - \kappa^2 \right] \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}^* - \kappa \diamond_1 \nabla \times \boldsymbol{\varphi} \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, (4.7) ve (4.8) ifadelerinden

$$\begin{aligned}\diamond_1 [\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta] \boldsymbol{\phi} &= -\mathbf{f}, \\ \diamond_3 [\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta] \boldsymbol{\phi}^* &= -\mathbf{l}\end{aligned}\tag{4.10}$$

ilişkileri elde edilir.

İlk olarak, kütle momentleri yoğunluğunun sıfır ve kütle kuvvetleri alanının irrotasyonel, yani

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \nabla \pi_0, \\ \mathbf{l} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{4.11}$$

olduğu varsayılırsa

$$[\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta] \boldsymbol{\phi} = \nabla \Lambda_0\tag{4.12}$$

tanımı ile (4.9) ve (4.10) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \nabla \Lambda_0, \\ \boldsymbol{\phi} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{4.13}$$

çözümlerine ve

$$\diamond_1 \Lambda_0 = -\pi_0\tag{4.14}$$

ilişkisine ulaşılır.

Kütle momentleri yoğunluğunun yine sıfır ve kütle kuvvetlerinin solenoidal, yani

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \nabla \times \boldsymbol{\pi}, \\ \mathbf{l} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{4.15}$$

olduğu varsayıldığında

$$\diamond_1 \boldsymbol{\phi} = \nabla \times \boldsymbol{\Lambda}\tag{4.16}$$

tanımı ile, (4.9) ve (4.10) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \nabla \times (\diamond_4 \Lambda), \\ \phi &= -\kappa \nabla \times (\nabla \times \Lambda)\end{aligned}\tag{4.17}$$

çözümlerine ve

$$(\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta) \Lambda = -\pi\tag{4.18}$$

ilişkinine ulaşılır.

İkinci olarak kütle momentleri yoğunluğunun irrotasyonel ve kütle kuvvetleri alanının sıfır, yani

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{l} &= \nabla \pi_0^*\end{aligned}\tag{4.19}$$

olduğu varsayımı ve

$$[\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta] \Phi^* = \nabla \Lambda_0^*\tag{4.20}$$

tanımı ile (4.9) ve (4.10) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{0}, \\ \phi &= \nabla \Lambda_0^*\end{aligned}\tag{4.21}$$

çözümlerine ve

$$\diamond_3 \Lambda_0^* = -\pi_0^*\tag{4.22}$$

ilişkinine ulaşılır.

Son olarak kütle momentleri yoğunluğunun solenoidal ve kütle kuvvetlerinin sıfır, yani

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{l} &= \nabla \times \pi^*\end{aligned}\tag{4.23}$$

olduğu varsayımı ve

$$\diamond_3 \boldsymbol{\varphi}^* = \nabla \times \boldsymbol{\Lambda}^* \quad (4.24)$$

tanımı ile (4.9) ve (4.10) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\kappa \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Lambda}^*), \\ \boldsymbol{\phi} &= \nabla \times (\diamond_2 \boldsymbol{\Lambda}^*) \end{aligned} \quad (4.25)$$

çözümlerine ve

$$(\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta) \boldsymbol{\Lambda}^* = -\boldsymbol{\pi}^* \quad (4.26)$$

sonucuna ulaşılır.

4.1.1 Sınırsız Elastik Malzeme İçin Temel Çözüm

Statik durumda sınırsız elastik malzemede (3.23) denge denkleminde yer değiştirme ve mikrodönme alanlarını belirlemek için öncelikle kütle kuvveti alanının koordinat merkezinde yoğunlaştırılarak uygulandığı kabulü yapılır. Bu durumda kütle kuvveti alanı

$$\mathbf{f} = \mathbf{q} \delta(x_1, x_2, x_3) \quad (4.27)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\delta(x_1, x_2, x_3)$ Dirac delta [92, 97] fonksiyonudur.

Helmholtz teoremi [98-99] uyarınca eğer kütle kuvveti

$$\mathbf{f} = \nabla \pi_0 + \nabla \times \boldsymbol{\pi} \quad (4.28)$$

şeklinde yazılırsa, π_0 ve $\boldsymbol{\pi}$ potansiyelleri

$$\begin{aligned}\pi_0(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dv, \\ \boldsymbol{\pi}(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dv\end{aligned}\quad (4.29)$$

olarak verilirler. Burada $R = \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 \right]^{1/2}$ dir. Burada (4.27) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\pi_0 &= -\frac{1}{4\pi} \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \\ \boldsymbol{\pi} &= -\frac{1}{4\pi} \mathbf{q} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right)\end{aligned}\quad (4.30)$$

çözümleri elde edilir. Burada $r = \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right]^{1/2}$ dir. (4.28) kütle kuvveti ifadesi ve (4.30) çözümleri (4.14) ve (4.18) denklemlerinde yerine konursa

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \Delta \Lambda_0 &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \\ \left[\left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \gamma \Delta^2 - 2\mu\kappa \Delta \right] \boldsymbol{\Lambda} &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{q} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right)\end{aligned}\quad (4.31)$$

elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= \frac{1}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{r} \right), \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \frac{1}{16\pi\mu\kappa} \nabla \times (\mathbf{q}r) + \frac{h_1^2}{8\pi\mu\kappa} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right)\end{aligned}\quad (4.32)$$

dir. Burada $\mathbf{r} = \mathbf{x}$ ve

$$h_1^2 = \frac{\left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \gamma}{2\mu\kappa}\quad (4.33)$$

dir. Yalnız kütle kuvvetleri kütle merkezinde yoğunlaştırılarak uygulandığında, irrotasyonel durumda (4.13) çözümü ile solenoidal durumda (4.17) çözümlerinin toplamından yerdeğiştirme ve mikrodönme için çözüm

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \nabla \Lambda_0 + \nabla \times (\diamond_4 \mathbf{\Lambda}), \\ \boldsymbol{\phi} &= -\kappa \nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Lambda})\end{aligned}\quad (4.34)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede (4.32) çözümleri kullanıldığında da yerdeğiştirme ve mikrodönme alanları için sonuç çözüm, bir dizi basitleştirme işlemi sonrasında

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \frac{\mathbf{q}}{r} + \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} \right] - \frac{\gamma}{16\pi\mu^2} \nabla \times \nabla \times \left[\frac{\mathbf{q}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right], \\ \boldsymbol{\phi} &= \frac{1}{8\pi\mu} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right)\end{aligned}\quad (4.35)$$

olarak bulunur.

Statik durumda sınırsız elastik malzemede (3.23) denge denklemini çözmek için ikinci olarak, kütle momentleri yoğunluğunun koordinat merkezinde uygulandığı kabulü yapılır. Bu durumda, kütle momentleri yoğunluğu

$$\mathbf{l} = \mathbf{p} \delta(x_1, x_2, x_3) \quad (4.36)$$

ile verilir.

Benzer şekilde kütle momentleri yoğunluğu için de Helmholtz [98-99] ayrışımı

$$\mathbf{l} = \nabla \pi_0^* + \nabla \times \boldsymbol{\pi}^* \quad (4.37)$$

kullanıldığında, (4.22) ve (4.26) denklemleri

$$\begin{aligned}[(\alpha + \beta + \gamma)\Delta - 2\kappa] \Lambda_0^* &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \\ \left[\left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \gamma \Delta^2 - 2\mu\kappa\Delta \right] \boldsymbol{\Lambda}^* &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{p} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right)\end{aligned}\quad (4.38)$$

şekillerini alırlar. Bu denklemlerin çözümleri (4.32) ye benzer şekilde

$$\Lambda_0^* = -\frac{1}{8\pi\kappa} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r/h_2}) \right), \quad (4.39)$$

$$\Lambda^* = \frac{1}{16\pi\mu\kappa} \nabla \times (\mathbf{p} r) + \frac{h_1^2}{8\pi\mu\kappa} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{p}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right)$$

olarak elde edilir, burada

$$h_2^2 = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)}{2\kappa} \quad (4.40)$$

dir. Kütle momentleri yoğunluğu kütle merkezinde uygulandığında (4.21) ve (4.25) çözümlerinin toplamı

$$\mathbf{u} = -\kappa \nabla \times (\nabla \times \Lambda^*), \quad (4.41)$$

$$\phi = \nabla \Lambda_0^* + \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \Delta \nabla \times \Lambda^*$$

dir. Bu çözümlerde (4.39) ifadeleri kullanılarak bir dizi basitleştirme işleminin sonunda yerdeğiştirme ve mikrodönme için

$$\mathbf{u} = \frac{1}{8\pi\mu} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{p}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right), \quad (4.42)$$

$$\phi = \nabla \Lambda_0^* + \frac{(2\mu + \kappa)}{16\pi\mu\kappa} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{p}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right)$$

çözümleri elde edilir.

4.2 Katkı Maddesinden Kaynaklanan Elastik Alanlar

Mura, klasik elastisite teorisi çerçevesinde, “eigenstrain” kavramını elastik genlemeye ek olarak ortaya çıkan ekgenlemeler, “eigenstress” kavramını ise bu ekgenlemeler nedeniyle oluşan gerilmeleri tanımlamak için kullanmıştır [70]. Benzer

şekilde, sırasıyla Hsieh [73] ve Cheng ve He [74] “eigenstrain” kavramının mikropolar teoride karşılığını açıklamak üzere “stress-free microstrain” ve “eigentorsion” kavramlarını, İnan ise [66], “microeigenstrain” kavramını tanımlamışlardır. Türkçe karşılıkları olarak “eigenstrain” için “ekgenleme”, “eigenstress” için “ekgerilme”, ve “stres-free microstrain” veya “eigentorsion” için [66] da tanımlandığı gibi “mikroekgenleme” tanımları kullanılacaktır. Bu nedenle, bu çalışmada katkı maddeleri içeren sonsuz mikropolar ortamda ekgenleme ve mikroekgenleme kavramları

$$\varepsilon_{kl}^t = \varepsilon_{kl}^* \Lambda(\Omega), \quad \gamma_{kl}^t = \gamma_{kl}^* \Lambda(\Omega) \quad (4.43)$$

ve

$$\Lambda(\Omega) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 - \Omega \end{cases} \quad (4.44)$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Burada, Ω sonsuz cismin katkı maddesi tarafından kapsanan alt bölgesini, “*” indisli büyüklükler katkı maddesinin ekgenlemesini ve “t” indisli büyüklükler de genel “ekgenlemeleri” göstermektedir.

Bu tanımlara göre, malzemenin içerdiği katkı maddelerindeki ekgenlemeler nedeniyle mikropolar ortamın (3.22) bünye denklemleri

$$\begin{aligned} t_{kl} &= A_{klmn} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^T) + C_{klmn} (\gamma_{mn} - \gamma_{mn}^T), \\ m_{kl} &= C_{mnkl} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^T) + B_{klmn} (\gamma_{mn} - \gamma_{mn}^T) \end{aligned} \quad (4.45)$$

şeklinde yeniden yazılmalıdır. Bünye denklemlerindeki bu farklılık (3.23) denge denklemlerine

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) u_{k,kl} + \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) u_{l,kk} + \kappa e_{lkm} \phi_{m,k} + f_l^t + f_l &= 0, \\ (\alpha + \beta) \phi_{k,kl} + \gamma \phi_{l,kk} - 2\kappa \phi_l + \kappa e_{lkm} u_{m,k} + l_l^t + l_l &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

şeklinde yansır. (4.46) denklemlerinde “^t” üst indisli büyüklükler (3.21) denge denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f_k^t &= -t_{lk,l}^t, & l_k^t &= -m_{lk,l}^t - e_{klm} t_{lm}^t, \\ t_{kl}^t &= A_{klmn} \varepsilon_{mn}^t, & m_{kl}^t &= B_{klmn} \gamma_{mn}^t \end{aligned} \quad (4.47)$$

olarak elde edilirler.

(4.46) denklemlerinden çözüme ulaşmak için, önce yalnız kütle kuvvetlerinin, sonra da yalnız kütle momentleri yoğunluğunun uygulandığı düşünülüp elde edilen çözümler süperpoze edilmelidir. Burada, bilinmeyen \mathbf{u} ve ϕ fonksiyonları Green fonksiyonları kullanılarak belirlenebilir [100-102]. Karşı gelen problem için klasik elastisitede bir, mikropolar ortamda dört Green fonksiyonu çözüm için yeterli olmaktadır.

Birinci grup Green fonksiyonları için gerekli denklemler, koordinat sisteminin merkezine yalnız \mathbf{f} kütle kuvvetlerinin uygulandığını, \mathbf{l} kütle momentleri yoğunluğunun uygulanmadığı varsayılarak

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) \mathcal{G}_{kn,kl} + \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \mathcal{G}_{ln,kk} + \kappa e_{lkm} G_{mn,k} + \delta_{ln} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= 0, \\ (\alpha + \beta) G_{kn,kl} + \gamma G_{ln,kk} - 2\kappa G_{ln} + \kappa e_{lkm} \mathcal{G}_{mn,k} &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

şeklinde elde edilirler.

İkinci grup denklemler, kütle merkezine yalnız \mathbf{l} kütle momentleri yoğunluğunun etkidiği, \mathbf{f} kütle kuvvetlerinin uygulanmadığı varsayılarak

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) \hat{\mathcal{G}}_{kn,kl} + \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \hat{\mathcal{G}}_{ln,kk} + \kappa e_{lkm} \hat{G}_{mn,k} &= 0, \\ (\alpha + \beta) \hat{G}_{kn,kl} + \gamma \hat{G}_{ln,kk} - 2\kappa \hat{G}_{ln} + \kappa e_{lkm} \hat{\mathcal{G}}_{mn,k} + \delta_{ln} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

şeklinde elde edilir. Burada “[^]” ’sız büyüklükler yalnız kütle kuvvetlerinin, “[^]” ’lı büyüklükler yalnız kütle momentleri yoğunluğunun uygulandığı duruma karşı

gelmek üzere, \mathcal{G}_{kn} ve $\hat{\mathcal{G}}_{kn}$ Green fonksiyonları u_k yerdeğiştirmelerine, G_{kn} ve \hat{G}_{kn} Green fonksiyonları ise ϕ_k mikrodönmelerine karşı gelmektedir. (4.48) ve (4.49) denklemlerinin çözümü Sandru [95] tarafından verilen çözümlere benzer şekilde

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \mathcal{G}_{kn}^C(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \mathcal{G}_{kn}^P(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \\ \mathcal{G}_{kn}^P(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \frac{\kappa}{4\pi\mu(2\mu+\kappa)} \left[-h_1^2 \left(\frac{1-e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,kn} - \delta_{kn} \frac{e^{-r/h_1}}{r} \right], \\ \hat{\mathcal{G}}_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= G_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = -\frac{1}{8\pi\mu} e_{knl} \left(\frac{1-e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,l}, \\ \hat{G}_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \frac{1}{16\pi\mu} \left(\frac{1-e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,kn} + \frac{1}{8\pi\kappa} \left(\frac{e^{-r/h_2} - e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,kn} + \frac{2\mu+\kappa}{16\pi\mu\kappa h_1^2} \frac{e^{-r/h_1}}{r} \delta_{kn}\end{aligned}\tag{4.50}$$

olarak elde edilir. Burada $r = |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ ve $\mathcal{G}_{kn}^C(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ klasik elastisiteden bilinen Green fonksiyonu, yani

$$\mathcal{G}_{kn}^C(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{8\pi\mu} \left(2 \frac{\delta_{kn}}{r} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} r_{,kn} \right)\tag{4.51}$$

dir.

Buradan (4.46) denge denklemlerinin çözümü olan \mathbf{u} yerdeğiştirmeleri ve ϕ mikrodönmelerini Green fonksiyonları cinsinden elde etmek için

$$\bar{F}_k = f_k^t + f_k, \quad \bar{L}_k = l_k^t + l_k\tag{4.52}$$

olmak üzere, karşılıklı teoremi

$$\int_V (\bar{F}_k u_k' - \bar{F}_k' u_k) dV + \int_V (\bar{L}_k \phi_k' - \bar{L}_k' \phi_k) dV = 0\tag{4.53}$$

uygulanır ve (4.53) ifadesinde sırasıyla

$$\begin{aligned} \{u'_k, \phi'_k, \bar{F}'_k, \bar{L}'_k\} &= \{\mathcal{G}_{kn}, G_{kn}, \delta_{kn} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), 0\} \\ &= \{\hat{\mathcal{G}}_{kn}, \hat{G}_{kn}, 0, \delta_{kn} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

olarak alınır

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}) &= \int_V \left[\bar{F}'_k(\mathbf{x}') \mathcal{G}_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \bar{L}'_k(\mathbf{x}') G_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] d\mathbf{x}', \\ \phi_n(\mathbf{x}) &= \int_V \left[\bar{F}'_k(\mathbf{x}') \hat{\mathcal{G}}_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \bar{L}'_k(\mathbf{x}') \hat{G}_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (4.55)$$

elde edilir.

Son olarak, (4.47) denklemlerinde f'_k ve l'_k büyüklükleri kütle kuvvetlerinin ve kütle momentleri yoğunluğunun olmadığı durumda, sırasıyla hayali kütle kuvvetleri ve hayali kütle momentleri yoğunluğu olarak kabul edilebilirler. Dolayısıyla, (4.55) denklemlerinde kütle kuvvetlerinin ve kütle momentleri yoğunluğunun uygulanmadığı ve sınır terimlerinin sıfır olduğu kabul edilerek kısmi integrasyon işlemleri ile

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}) &= - \int_V \left[A_{klmp} \varepsilon_{mp}^t \mathcal{G}_{ln,k} - \kappa e_{klm} \varepsilon_{lk}^t G_{mn} + B_{klmp} \gamma_{mp}^t G_{ln,k} \right] d\mathbf{x}', \\ \phi_n(\mathbf{x}) &= - \int_V \left[A_{klmp} \varepsilon_{mp}^t \hat{\mathcal{G}}_{ln,k} - \kappa e_{klm} \varepsilon_{lk}^t \hat{G}_{mn} + B_{klmp} \gamma_{mp}^t \hat{G}_{ln,k} \right] d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (4.56)$$

sonuçlarına ulaşılır. (4.56) denklemini u_k yerdeğiştirmesini ve ϕ_k mikrodönmesini Green fonksiyonları cinsinden verir. Katkı maddeleri içeren mikropolar ortamın genleme, gerilme, moment ve diğer mikro büyüklükleri (4.56) çözümlerinin ilgili denklemlerde kullanılmalarıyla elde edilirler.

Son olarak, (4.43) denklemlerinde ε_{kl}^* ekgenlemelerinin ve γ_{kl}^* mikroekgenlemelerinin katkı maddesi Ω üzerinde sabit olduğu kabul edilirse [74-75], (4.56) denklemleri

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}) &= u_n^C(\mathbf{x}) + I_{nkl}^P(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}^* + J_{nkl}(\mathbf{x}) \gamma_{kl}^*, \\
\phi_n(\mathbf{x}) &= \hat{I}_{nkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}^* + \hat{J}_{nkl}(\mathbf{x}) \gamma_{kl}^*
\end{aligned} \tag{4.57}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$u_n^C(\mathbf{x}) = I_{nkl}^C(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}^* \tag{4.58}$$

klasik elastik yer değiştirmediir ve (4.57) de g3r3len ekgenleme ile mikroekgenlemelerin katsayıları

$$\begin{aligned}
I_{nkl}^C(\mathbf{x}) &= -(\lambda \delta_{kl} \delta_{mp} + \mu \delta_{km} \delta_{lp} + \mu \delta_{kp} \delta_{ml}) \int_{\Omega} \mathcal{G}_{mn,p}^C d\mathbf{x}', \\
I_{nkl}^P(\mathbf{x}) &= -\frac{\kappa}{2} (\delta_{kp} \delta_{lm} - \delta_{lp} \delta_{km}) \int_{\Omega} \mathcal{G}_{mn,p}^C d\mathbf{x}' - A_{pmkl} \int_{\Omega} (\mathcal{G}_{mn,p} - \mathcal{G}_{mn,p}^C) d\mathbf{x}' \\
&\quad + \kappa e_{lkm} \int_{\Omega} G_{mn} d\mathbf{x}', \\
J_{nkl}(\mathbf{x}) &= -B_{pmkl} \int_{\Omega} G_{mn,p} d\mathbf{x}', \\
\hat{I}_{nkl}(\mathbf{x}) &= -A_{pmkl} \int_{\Omega} \hat{\mathcal{G}}_{mn,p} d\mathbf{x}' + \kappa e_{lkm} \int_{\Omega} \hat{G}_{mn} d\mathbf{x}', \\
\hat{J}_{nkl}(\mathbf{x}) &= -B_{pmkl} \int_{\Omega} \hat{G}_{mn,p} d\mathbf{x}'
\end{aligned} \tag{4.59}$$

olarak verilir.

Burada $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ olarak alındığına dikkat edilerek, $M_1(\mathbf{x})$ ve $M_2(\mathbf{x})$ klasik elastisitede tanımlanan (2.10) potansiyelleri ile eş olmak üzere

$$M_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} r d\mathbf{x}', \quad M_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} d\mathbf{x}', \quad M_3(\mathbf{x}, k) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{e^{-r/k}}{r} d\mathbf{x}' \tag{4.60}$$

potansiyel fonksiyonları tanımlamaları ile, (4.50) ve (4.51) Green fonksiyonlarının (4.59) denklemlerinde kullanılması ve bir dizi matematiksel işlemden sonra, ekgenleme ve mikroekgenleme katsayıları,

$$\begin{aligned}
I_{nkl}^C(\mathbf{x}) &= \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} M_{1,klm}(\mathbf{x}) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{kl} M_{2,n}(\mathbf{x}) - \delta_{kn} M_{2,l}(\mathbf{x}) - \delta_{ln} M_{2,k}(\mathbf{x}), \\
I_{nkl}^P(\mathbf{x}) &= 2 B_1 \mu h_1^2 M_{2,klm}(\mathbf{x}) + \frac{\kappa}{\mu} (\delta_{kn} M_{2,l}(\mathbf{x}) - \delta_{ln} M_{2,k}(\mathbf{x})) \\
&\quad - B_1 h_1^2 (\lambda \delta_{kl} M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_1) + 2 \mu M_{3,klm}(\mathbf{x}, h_1)) \\
&\quad + B_1 \lambda \delta_{kl} M_{3,n}(\mathbf{x}, h_1) + \left[B_1 \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) + \frac{\kappa}{2\mu} \right] \delta_{ln} M_{3,k}(\mathbf{x}, h_1) \\
&\quad + \left[B_1 \left(\mu - \frac{\kappa}{2} \right) - \frac{\kappa}{2\mu} \right] \delta_{kn} M_{3,l}(\mathbf{x}, h_1), \\
J_{nkl}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2\mu} [\gamma e_{nlm} M_{2,km}(\mathbf{x}) + \beta e_{nkm} M_{2,lm}(\mathbf{x})] + \frac{1}{2\mu} [\gamma e_{nlm} M_{3,km}(\mathbf{x}, h_1) \\
&\quad + \beta e_{nkm} M_{3,lm}(\mathbf{x}, h_1)], \tag{4.61} \\
\hat{I}_{nkl}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\mu} [\kappa e_{lkm} M_{2,mn}(\mathbf{x}) - (2\mu + \kappa) e_{nlm} M_{2,km}(\mathbf{x}) - (2\mu - \kappa) e_{nkm} M_{2,lm}(\mathbf{x})] \\
&\quad - \frac{1}{4\mu} [(2\mu + \kappa) e_{lkm} M_{3,mm}(\mathbf{x}, h_1) - (2\mu + \kappa) e_{nlm} M_{3,km}(\mathbf{x}, h_1) \\
&\quad - (2\mu - \kappa) e_{nkm} M_{3,lm}(\mathbf{x}, h_1)] + \frac{1}{2} e_{lkm} M_{3,mm}(\mathbf{x}, h_2) + \frac{2\mu + \kappa}{4\mu h_1^2} e_{lkm} M_3(\mathbf{x}, h_1), \\
\hat{J}_{nkl}(\mathbf{x}) &= -\frac{\gamma + \beta}{4\mu} M_{2,klm}(\mathbf{x}) + \frac{2\mu + \kappa}{4\mu\kappa} [\alpha \delta_{kl} M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_1) + (\gamma + \beta) M_{3,klm}(\mathbf{x}, h_1)] \\
&\quad - \frac{1}{2\kappa} [\alpha \delta_{kl} M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_2) + (\gamma + \beta) M_{3,klm}(\mathbf{x}, h_2)] \\
&\quad - \frac{2\mu + \kappa}{4\mu\kappa h_1^2} [\alpha \delta_{kl} M_{3,n}(\mathbf{x}, h_1) + \gamma \delta_{ln} M_{3,k}(\mathbf{x}, h_1) + \beta \delta_{kn} M_{3,l}(\mathbf{x}, h_1)]
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$B_1 = \frac{\kappa}{\mu(2\mu + \kappa)} \tag{4.62}$$

dir.

(4.60) potansiyellerinden ilk ikisi klasik elastisitenin bilinen Newtonyen ve biharmonik potansiyelleridirler ve Mura [70] tarafından çeşitli şekillerdeki katkı maddeleri için ifadeleri verilmiştir. (4.60) potansiyellerinden üçüncüsü klasik

elastisitede görünmemekle birlikte farklı şekilli katkı maddeleri için hesaplanması oldukça zor olabilir. Ancak a yarıçaplı küresel bir katkı maddesi üzerinde bu integraller, $x = |\mathbf{x}|$ olmak üzere

$$M_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{60}(x^4 - 10a^2 x^2 - 15a^4), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{a^3}{15}\left(5x + \frac{a^2}{x}\right), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 - \Omega, \end{cases}$$

$$M_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{6}(x^2 - 3a^2), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{a^3}{3x}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 - \Omega, \end{cases} \quad (4.63)$$

$$M_3(\mathbf{x}, k) = \begin{cases} k^2 - k^2(k+a)e^{-a/k} \frac{\sinh x/k}{x}, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ k^2 \left(a \cosh \frac{a}{k} - k \sinh \frac{a}{k} \right) \frac{e^{-x/k}}{x}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 - \Omega. \end{cases}$$

olarak elde edilirler.

4.3 Eshelby Tansörleri

Yerdeğiştirme ve mikrodönme için elde edilen (4.57) çözümleri (3.16) genleme tanımlarında kullanıldığında, katkı maddelerinin varlığı nedeniyle genleme ve mikrodönme tansörleri

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) &= K_{klmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}^* + L_{klmn}(\mathbf{x}) \gamma_{mn}^*, \\ \gamma_{kl}(\mathbf{x}) &= \hat{K}_{klmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}^* + \hat{L}_{klmn}(\mathbf{x}) \gamma_{mn}^* \end{aligned} \quad (4.64)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $K_{klmn}(\mathbf{x})$, $\hat{K}_{klmn}(\mathbf{x})$, $L_{klmn}(\mathbf{x})$ ve $\hat{L}_{klmn}(\mathbf{x})$ mikropolar ortamın Eshelby tansörleridir ve

$$\begin{aligned} K_{klmn}(\mathbf{x}) &= I_{lmn,k}^C(\mathbf{x}) + I_{lmn,k}^P(\mathbf{x}) - e_{klp} \hat{I}_{pmn}(\mathbf{x}), \quad \hat{K}_{klmn}(\mathbf{x}) = \hat{I}_{lmn,k}(\mathbf{x}), \\ L_{klmn}(\mathbf{x}) &= J_{lmn,k}(\mathbf{x}) - e_{klp} \hat{J}_{pmn}(\mathbf{x}), \quad \hat{L}_{klmn}(\mathbf{x}) = \hat{J}_{lmn,k}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.65)$$

ilişkileri ile verilirler.

Klasik Eshelby tansörleri elipsoidal katkı maddeleri içinde homojen olmasına rağmen, mikropolar ortam için elde edilen (4.65) “Mikropolar Eshelby Tansörleri” küresel katkı maddeleri içinde bile homojen değildir. Ayrıca, mikropolar ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinin mikropolar büyüklüklerin sıfır alınması durumunda klasik Eshelby tansörlerine indirgendiği gösterilebilir. Bu durumda, mikropolar malzeme sabitleri ve mikrodönme vektörü

$$\begin{aligned}\phi_k &= 0, \\ \kappa &= \alpha = \beta = \gamma = 0\end{aligned}\tag{4.66}$$

alınırsa

$$K_{klmn}(\mathbf{x}) = I_{lmn,k}^C(\mathbf{x})\tag{4.67}$$

ve diğer tüm Eshelby tansörleri sıfır elde edilir. (4.64) ifadelerinde (4.67) kullanılarak

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{lk}) = \frac{1}{2}[I_{lmn,k}^C(\mathbf{x}) + I_{kmn,l}^C(\mathbf{x})]\frac{1}{2}(\varepsilon_{mn}^* + \varepsilon_{nm}^*)\tag{4.68}$$

eşitliği yazılabilir ki, burada $I_{lmn,k}^C(\mathbf{x})$ büyüklüğü m ve n indislerine göre simetriktir.

Klasik elastisitede (2.1) Eshelby tansörü ifadesi buradaki büyüklüklere uyumlu olarak

$$\varepsilon_{kl} = S_{klmn} \varepsilon_{mn}^*\tag{4.69}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, klasik elastisitede ε_{kl} genleme tansörünün de simetrik olduğu göz önüne alınırsa (4.68) ve (4.69) denklemlerinin benzerliğinden

$$S_{klmn} = \frac{1}{2}[I_{lmn,k}^C(\mathbf{x}) + I_{kmn,l}^C(\mathbf{x})]\tag{4.70}$$

yazılabilir ki, bu durum, $K_{klmn}(\mathbf{x})$ mikropolar Eshelby tansörünün mikro büyüklüklerin sıfır alınması durumunda $S_{klmn}(\mathbf{x})$ klasik Eshelby tansörüne indirildiğini göstermektedir.

5. MİKROGENLEŞEN ORTAM İÇİN ESHELBY ÇÖZÜMÜ

Giriş bölümünde açıklandığı gibi mikrogenleşen ortam teorisi malzeme parçacıklarının klasik şekil değiştirmenin yanı sıra hacimsel bir mikrogenleşme yapabildiği fikrine dayanmaktadır ve Eringen'in [94] "like a breath" deyişiyle bu hacimsel genişleme her yönde eşittir. Mikrogenleşen ortam fikri Cowin ve Nunziato [4-5] tarafından geliştirilen boşluklu lineer elastik malzeme teorisi ile de örtüşmektedir. Yine giriş bölümünde de belirtildiği gibi, hasarın mikrodönmeden çok mikrogenleşme ile tanımlanabileceği gerçeğinden hareketle, hasarlı malzemenin mikrogenleşen ortam teorisi ile modellenmesi fikri ağırlık kazanmıştır [20]. Bu doğrultuda mikropolar teoriye benzer şekilde mikrogenleşen ortam için Green fonksiyonları yardımıyla hem temel çözümler elde edilmiş hem de katkı maddelerinden kaynaklanan elastik alanlar hesaplanarak klasik Eshelby tansörleri mikrogenleşen ortam teorisine genelleştirilmiştir [20].

Mikropolar ortam için dört tane dört boyutlu Eshelby tansörü elde edilmesine karşın, mikrogenleşen ortam için beklentilere uygun şekilde biri dört, ikisi iki boyutlu ve biri de skaler olmak üzere yine dört Eshelby tansörü elde edilmiştir. Ayrıca, mikrogenleşen ortam teorisi için elde edilen Eshelby tansörlerinin mikropolar ortam için elde edilenler gibi küresel katkı maddeleri içinde bile homojen olmadıkları, ve mikrogenleşen ortam büyüklüklerinin sıfır alınması durumunda bu tansörlerin de klasik Eshelby tansörlerine indirgendikleri gösterilmiştir [20].

Bu bölümde ilk olarak mikrogenleşen ortam için temel denklemlerin çözümlerine değinilecek, ardından da bu çözümler yardımıyla katkı maddelerinden kaynaklanan elastik alan ifadeleri verilecektir. Son olarak katkı maddeleri içeren lineer izotrop sonsuz mikrogenleşen ortam için Eshelby tansörleri elde edilecektir.

5.1 Temel Çözümler

Bu ayıtta sonsuz mikrogenleşen ortam da, kütle kuvvetleri ve kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun yoğunlaştırılarak kütle merkezinde uygulandığı varsayılarak temel çözümler elde edilecektir. Mikrogenleşen ortamın (3.28) denge denklemleri, Galerkin [96] gösterimiyle

$$X_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \Delta = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2, \quad \diamond_1 = (\lambda + 2\mu)\Delta, \quad \diamond_5 = \mu\Delta, \quad \diamond_6 = a_0\Delta - \lambda_1 \quad (5.1)$$

tanımları yapılarak

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ l \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

şeklinde yazılabilir. (5.2) matris denkleminin çözümü

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = [n_{ij}] \quad (5.3)$$

olarak elde edilir. (5.2) denkleminde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \diamond_5 + (\lambda + \mu)X_1^2 & (\lambda + \mu)X_1 X_2 & (\lambda + \mu)X_1 X_3 & \lambda_0 X_1 \\ (\lambda + \mu)X_1 X_2 & \diamond_5 + (\lambda + \mu)X_2^2 & (\lambda + \mu)X_2 X_3 & \lambda_0 X_2 \\ (\lambda + \mu)X_1 X_3 & (\lambda + \mu)X_2 X_3 & \diamond_5 + (\lambda + \mu)X_3^2 & \lambda_0 X_3 \\ -\lambda_0 X_1 & -\lambda_0 X_2 & -\lambda_0 X_3 & \diamond_6 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

dir. Burada \mathbf{M} matrisinin tersi

$$\mathbf{M}^{-1} = \left[n_{ij} \right] \left(\diamond_5 \left[\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta \right] \right)^{-1} \quad (5.5)$$

şeklinde yazılabilir ve \mathbf{N} matrisinin katsayıları

$$\begin{aligned} n_{kk} &= \diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta - \left[\lambda_0^2 + (\lambda + \mu) \diamond_6 \right] X_k^2, & k = 1, 2, 3 \\ n_{kk} &= \diamond_1 \diamond_5, & k = 4 \\ n_{kl} &= n_{lk} = - \left[\lambda_0^2 + (\lambda + \mu) \diamond_6 \right] X_k X_l, & k \neq l, \quad k = 1, 2, 3 \\ n_{k4} &= -n_{4k} = -\lambda_0 \diamond_5 X_k, & k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.6)$$

dir. Burada tekrarlanan indisler üzerinde toplama yoktur. (5.2) ve (5.3) ifadelerinin sağ taraflarındaki büyüklükler arasında

$$\left\{ \diamond_5 \left[\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta \right] \right\} \mathbf{F} = -\mathbf{f}, \quad \left\{ \diamond_5 \left[\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta \right] \right\} L = -l \quad (5.7)$$

ilişkileri bulunmaktadır. (5.3) çözümü

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}, \quad \varphi^{**} = L \quad (5.8)$$

tanımları ile

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left[\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta \right] \boldsymbol{\varphi} - \left[\lambda_0^2 + (\lambda + \mu) \diamond_6 \right] \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - \lambda_0 \diamond_5 \nabla \varphi^{**}, \\ \theta &= \lambda_0 \diamond_5 \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \diamond_1 \diamond_5 \varphi^{**} \end{aligned} \quad (5.9)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, (5.7) ve (5.8) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \diamond_5 \left[\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta \right] \boldsymbol{\varphi} &= -\mathbf{f}, \\ \diamond_5 \left[\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta \right] \varphi^{**} &= -l \end{aligned} \quad (5.10)$$

ilişkileri elde edilir.

İlk olarak, kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun sıfır ve kütle kuvvetleri alanının irrotasyonel, yani

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \nabla \pi_0, \\ l &= 0\end{aligned}\tag{5.11}$$

olduğu varsayımı ve

$$\diamond_5 \boldsymbol{\varphi} = \nabla \Lambda_0\tag{5.12}$$

tanımı ile (5.9) ve (5.10) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \diamond_6 \nabla \Lambda_0, \\ \theta &= \lambda_0 \nabla \cdot \nabla \Lambda_0\end{aligned}\tag{5.13}$$

çözümlerine ve

$$\left[\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta \right] \Lambda_0 = -\pi_0\tag{5.14}$$

sonucuna ulaşılır.

Kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun yine sıfır ve kütle kuvvetlerinin solenoidal, yani

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \nabla \times \boldsymbol{\pi}, \\ l &= 0\end{aligned}\tag{5.15}$$

olduğu düşünülüğünde,

$$\left(\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta \right) \boldsymbol{\varphi} = \nabla \times \boldsymbol{\Lambda}\tag{5.16}$$

tanımı ile (5.9) ve (5.10) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \nabla \times \boldsymbol{\Lambda}, \\ \theta &= 0\end{aligned}\tag{5.17}$$

çözümlerine ve

$$\diamond_5 \Lambda = -\pi \quad (5.18)$$

sonucuna ulaşılır.

İkinci olarak, kütle mikrogenme kuvvet yoğunluğunun sıfırdan farklı ve kütle kuvvetleri alanının sıfır, yani

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \\ l &\neq 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

olduğu varsayımı ve

$$\diamond_5 \varphi^{**} = \Lambda_0^{**} \quad (5.20)$$

tanımı ile (5.9) ve (5.10) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\lambda_0 \nabla \Lambda_0^{**}, \\ \theta &= \diamond_1 \Lambda_0^{**} \end{aligned} \quad (5.21)$$

çözümlerine ve

$$\left(\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta \right) \Lambda_0^{**} = -l \quad (5.22)$$

sonucuna ulaşılır.

5.1.1 Sınırsız Elastik Malzeme İçin Temel Çözüm

Statik durumda sınırsız elastik malzemede (3.28) denge denklemindeki yerdeğiştirme ve mikrogenleşme alanlarının Green fonksiyonları çözümlerine ulaşmak için, mikropolar duruma benzer şekilde, önce kütle kuvveti alanının koordinat merkezinde uygulandığı kabulü yapılır.

Bu durumda kütle kuvveti alanı (4.27) ifadesi ile verilmektedir. Yine Helmholtz [98-99] teoremi yardımıyla, (4.28) ayrışımı (5.14) ve (5.18) denklemlerinde kullanılarak

$$\begin{aligned} [(\lambda + 2\mu)a_0 \Delta^2 - ((\lambda + 2\mu)\lambda_1 - \lambda_0^2)\Delta] \Lambda_0 &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \\ \mu \Delta \mathbf{\Lambda} &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{q} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= -\frac{1}{8\pi B_2} \left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) - \frac{h_3^2}{4\pi B_2} \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r/h_3}) \right), \\ \mathbf{\Lambda} &= -\frac{1}{8\pi \mu} \nabla \times (\mathbf{q} r) \end{aligned} \quad (5.24)$$

olarak bulunur. Burada

$$h_3^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)a_0}{B_2}, \quad B_2 = (\lambda + 2\mu)\lambda_1 - \lambda_0^2 \quad (5.25)$$

dir. Yalnız kütle kuvvetleri kütle merkezinde uygulandığında, irrotasyonel durumda (5.13) çözümü ile solenoidal durumda (5.17) çözümlerinin toplamından yerdeğiştirme ve mikrogenleşme için çözüm

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \times \mathbf{\Lambda} + (a_0 \Delta - \lambda_1) \nabla \Lambda_0, \\ \theta &= \lambda_0 \nabla \cdot (\nabla \Lambda_0) \end{aligned} \quad (5.26)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede (5.24) çözümleri kullanıldığında, bir dizi basitleştirme işlemi ile yerdeğiştirme ve mikrogenleşme alanları için sonuç çözüm

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{(\lambda + 3\mu)\lambda_1 - \lambda_0^2}{8\pi \mu B_2} \frac{\mathbf{q}}{r} + \frac{a_0}{4\pi B_2} \frac{\mathbf{q}}{r^3} + \frac{(\lambda + \mu)\lambda_1 - \lambda_0^2}{8\pi \mu B_2} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} \\ &\quad - \frac{3a_0}{4\pi B_2} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\lambda_0^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)B_2} \frac{\mathbf{q}}{r} e^{-r/h_3} + \frac{a_0}{4\pi B_2} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{r} e^{-r/h_3} \right) \\ &\quad + \frac{\lambda_1(\lambda + 2\mu)a_0}{4\pi B_2^2} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{r} (1 - e^{-r/h_3}) \right), \\ \theta &= \frac{\lambda_0}{4\pi B_2} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\lambda_0}{4\pi B_2} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{r} e^{-r/h_3} \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

olarak bulunur.

Yalnız kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun koordinat merkezinde uygulandığı kabulü yapıldığında

$$\nabla l = \bar{\mathbf{1}} = \bar{\mathbf{p}} \delta(x_1, x_2, x_3) \quad (5.28)$$

yazılabilir. Dolayısıyla (5.22) denkleminde

$$\left\{ (\lambda + 2\mu) a_0 \Delta^2 - [(\lambda + 2\mu)\lambda_1 - \lambda_0^2] \Delta \right\} \Lambda_0^{**} = \frac{1}{4\pi} \bar{\mathbf{p}} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (5.29)$$

bulunur ve çözümü de

$$\Lambda_0^{**} = -\frac{1}{8\pi B_2} \left(\frac{\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) - \frac{h_3^2}{4\pi B_2} \bar{\mathbf{p}} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r/h_3}) \right) \quad (5.30)$$

olarak elde edilir. (5.21) çözümlerinden, yerdeğiştirme ve mikrogenleşme için sonuç

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\lambda_0 \nabla \Lambda_0^{**}, \\ \theta &= (\lambda + 2\mu) \Delta \Lambda_0^{**} \end{aligned} \quad (5.31)$$

olarak elde edilir. (5.31) sonuçlarında (5.30) çözümü kullanılarak bir dizi basitleştirme işlemlerinin sonucunda

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\lambda_0}{8\pi B_2} \left[\frac{\bar{\mathbf{p}}}{r} - \frac{(\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r}) \bar{\mathbf{r}}}{r^3} \right] - \frac{\lambda_0}{4\pi B_2} \left(\frac{\bar{\mathbf{p}}}{r} e^{-r/h_3} \right) + \frac{\lambda_0 h_3^2}{4\pi B_2} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\bar{\mathbf{p}}}{r} (1 - e^{-r/h_3}) \right), \\ \theta &= -\frac{(\lambda + 2\mu)}{4\pi B_2} \nabla \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{p}}}{r} (1 - e^{-r/h_3}) \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

elde edilir.

5.2 Katkı Maddesinden Kaynaklanan Elastik Alanlar

Mikropolar ortama benzer şekilde, katkı maddeleri içeren sonsuz mikrogenleşen ortamda ekgenleme ve mikroekgenleme kavramları

$$\varepsilon_{kl}^t = \varepsilon_{kl}^* \Lambda(\Omega), \quad \theta^t = \theta^* \Lambda(\Omega) \quad (5.33)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Malzemede katkı maddelerindeki ekgenlemeler nedeniyle mikrogenleşen ortamın (3.26) bünye denklemleri

$$\begin{aligned} t_{kl} &= A_{kl}^s (\theta - \theta^t) + A_{mkl}^s (\theta_{,m} - \theta_{,m}^t) + A_{klmn} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^t), \\ m_k &= C_k^s (\theta - \theta^t) + C_{kl}^s (\theta_{,l} - \theta_{,l}^t) + A_{klm}^s (\varepsilon_{lm} - \varepsilon_{lm}^t), \\ s - t &= C^s (\theta - \theta^t) + C_k^s (\theta_{,k} - \theta_{,k}^t) + A_{kl}^s (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^t) \end{aligned} \quad (5.34)$$

şeklinde yeniden yazılmalıdır. Bünye denklemlerindeki bu farklılık (3.28) denge denklemlerine

$$\begin{aligned} \lambda_0 \theta_{,l} + (\lambda + \mu) u_{k,kl} + \mu u_{l,kk} + f_l + f_l^t &= 0, \\ a_0 \theta_{,kk} - \lambda_1 \theta - \lambda_0 u_{k,k} + l + l^t &= 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

şeklinde yansır. (5.35) denklemlerinde “ t ” üst indisli büyüklükler (3.25) denge denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} f_k^t &= -t_{lk,l}^t, \quad l^t = -m_{k,k}^t - t^t + s^t, \\ t_{kl}^t &= A_{kl}^s \theta^t + A_{klmn} \varepsilon_{mn}^t, \quad m_k^t = C_{kl}^s \theta_{,l}^t, \quad s^t - t^t = C^s \theta^t + A_{kl}^s \varepsilon_{kl}^t \end{aligned} \quad (5.36)$$

elde edilir.

(5.35) denklemlerini çözmek için, önce yalnız kütle kuvvetlerinin, sonra da yalnız kütle mikrogenleşme kuvvet yoğunluğunun uygulandığı düşünülüp elde edilen çözümler süperpoze edilmelidir. Burada, bilinmeyen \mathbf{u} ve θ fonksiyonları Green fonksiyonları kullanılarak belirlenebilir [100-102]. Karşı gelen problem için, klasik

elastisitede bir, mikropolar ve mikrogenleşen ortamda ise dört Green fonksiyonu çözüm için yeterli olmaktadır.

Birinci grup Green fonksiyonları için gerekli denklemler, koordinat sisteminin merkezine yalnız \mathbf{f} kütle kuvvetlerinin uygulandığı, l kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun ise uygulanmadığı varsayılarak

$$\begin{aligned} \lambda_0 \mathbf{g}_{n,k} + (\lambda + \mu) \mathcal{G}_{ln,kl} + \mu \mathcal{G}_{kn,ll} + \delta_{kn} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= 0, \\ a_0 \mathbf{g}_{n,kk} - \lambda_1 \mathbf{g}_n - \lambda_0 \mathcal{G}_{kn,k} &= 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

şeklinde elde edilir.

İkinci grup denklemler, kütle merkezine yalnız l kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun etki ettiği, \mathbf{f} kütle kuvvetlerinin uygulanmadığı varsayılarak

$$\begin{aligned} \lambda_0 \hat{\mathbf{g}}_{n,k} + (\lambda + \mu) \hat{\mathcal{G}}_{ln,kl} + \mu \hat{\mathcal{G}}_{kn,ll} &= 0, \\ a_0 \hat{\mathbf{g}}_{n,kk} - \lambda_1 \hat{\mathbf{g}}_n - \lambda_0 \hat{\mathcal{G}}_{kn,k} + \delta_{kn} I_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

şeklinde elde edilir. Burada “^” ’süz büyüklükler yalnız kütle kuvvetlerinin, “^” ’lı büyüklükler yalnız kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulandığı duruma karşı gelmek üzere, \mathcal{G}_{kn} ve $\hat{\mathcal{G}}_{kn}$ Green fonksiyonları u_k yerdeğiştirmelerine, \mathbf{g}_n ve $\hat{\mathbf{g}}_n$ Green fonksiyonları ise θ mikrogenleşmelerine karşı gelmektedir ve

$$I_k = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \right)_{,k} \quad (5.39)$$

dir. (5.37) ve (5.38) denklemlerinin çözümü Sandru [95] tarafından verilen çözümlere benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \mathcal{G}_{kn}^C(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \mathcal{G}_{kn}^E(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \\
g_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= -\frac{\lambda_0}{4\pi B_2} \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,n}, \\
\hat{\mathcal{G}}_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \frac{\lambda_0(\lambda+2\mu)a_0}{4\pi B_2^2} \left[\frac{1}{h_3^2} \frac{r_{,kn}}{2} + \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,kn} \right], \\
\hat{g}_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= -\frac{\lambda+2\mu}{4\pi B_2} \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,n}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\mathcal{G}_{kn}^E(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{a_0 \lambda_0^2}{4\pi B_2^2} \left[\frac{1}{h_3^2} \frac{r_{,kn}}{2} + \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,kn} \right] \tag{5.41}$$

dir ve $\mathcal{G}_{kn}^C(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$, (4.51) denklemi ile verilen klasik Green fonksiyonudur. Buradan (5.35) denklemlerinin çözümü olan \mathbf{u} yerdeğiştirmeleri ve θ mikrogenleşmesini Green fonksiyonları cinsinden elde etmek için

$$\bar{F}_k = f_k^t + f_k, \quad \bar{L} = l^t + l \tag{5.42}$$

olmak üzere, karşılıklı teoremi

$$\int_V (\bar{F}_k u_k^t - \bar{F}_k^t u_k) dV + \int_V (\bar{L} \theta^t - \bar{L}^t \theta) dV = 0 \tag{5.43}$$

uygulanır ve (5.43) ifadesinde sırasıyla

$$\begin{aligned}
\{u_k^t, \theta^t, \bar{F}_k^t, \bar{L}^t\} &= \{\mathcal{G}_{kn}, g_n, \delta_{kn} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), 0\} \\
&= \{\hat{\mathcal{G}}_{kn}, \hat{g}_n, 0, \delta_{kn} I_k \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

olarak alınırsa, çözüm

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}) &= \int_V \left[\bar{F}_k(\mathbf{x}') \mathcal{G}_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \bar{L}(\mathbf{x}') g_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] d\mathbf{x}', \\
\theta(\mathbf{x}) &= \int_V \left[\left(\bar{F}_k(\mathbf{x}') \hat{\mathcal{G}}_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \bar{L}(\mathbf{x}') \hat{g}_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right) / I_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] d\mathbf{x}'
\end{aligned} \tag{5.45}$$

olarak elde edilir.

(5.36) denklemlerinde f_k^t ve l^t büyüklükleri, kütle kuvvetlerinin ve kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun olmadığı durumda, sırasıyla hayali kütle kuvvetleri ve mikrogerme kuvvet yoğunluğu olarak kabul edilebilirler. Dolayısıyla, (5.45) denklemlerinden, kütle kuvvetleri ve kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulanmadığı ve sınır terimlerinin sıfır olduğu kabul edilirse, kısmi integrasyon işlemleri ile

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}) &= - \int_V \left[\lambda_0 \theta^t \mathcal{G}_{kn,k} + A_{klmp} \varepsilon_{mp}^t \mathcal{G}_{ln,k} + a_0 \theta^t g_{n,kk} - \lambda_1 \theta^t g_n - \lambda_0 \delta_{kl} \varepsilon_{kl}^t g_n \right] d\mathbf{x}', \\
\theta(\mathbf{x}) &= - \int_V \left[\frac{\lambda_0 \theta^t \hat{\mathcal{G}}_{kn,k} + A_{klmp} \varepsilon_{mp}^t \hat{\mathcal{G}}_{ln,k} + a_0 \theta^t \hat{g}_{n,kk} - \lambda_1 \theta^t \hat{g}_n - \lambda_0 \delta_{kl} \varepsilon_{kl}^t \hat{g}_n}{I_n} \right] d\mathbf{x}'
\end{aligned} \tag{5.46}$$

sonuçlarına ulaşılır. Görüldüğü gibi (5.46) denklemleri, u_k yerdeğiştirme vektörü ve θ mikrogenleşme skaler büyüklüklerini Green fonksiyonları cinsinden vermektedir. Katkı maddeleri içeren mikrogenleşen ortamın genleme, gerilme, mikrogenleşme ve diğer mikro büyüklükleri, (5.46) çözümlerinin ilgili denklemlerde kullanılmalarıyla elde edilirler.

Son olarak, (5.33) denklemlerinde ε_{kl}^* ekgenlemelerin ve θ^* mikroekgenlemelerin katkı maddesi Ω üzerinde sabit olduğu kabul edilerek [74-75], (5.46) denklemleri

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}) &= u_n^C(\mathbf{x}) + I_{nkl}^E(\mathbf{x}) \varepsilon_{lk}^* + K_n(\mathbf{x}) \theta^*, \\
\theta(\mathbf{x}) &= \hat{I}_{kl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{lk}^* + \hat{K}(\mathbf{x}) \theta^*
\end{aligned} \tag{5.47}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $u_n^C(\mathbf{x})$ mikropolar durumda da olduğu gibi klasik elastik yer değiştirmedir ve (4.58) ifadesi ile verilir. (5.47) de görülen ekgenleme ve mikroekgenlemelerin katsayıları

$$\begin{aligned}
I_{nkl}^E(\mathbf{x}) &= -A_{pmkl} \int_{\Omega} (\mathcal{G}_{mn,p} - \mathcal{G}_{mn,p}^C) d\mathbf{x}' + \lambda_0 \delta_{kl} \int_{\Omega} g_n d\mathbf{x}', \\
K_n(\mathbf{x}) &= -\lambda_0 \int_{\Omega} \mathcal{G}_{kn,k} d\mathbf{x}' - a_0 \int_{\Omega} g_{n,kk} d\mathbf{x}' + \lambda_1 \int_{\Omega} g_n d\mathbf{x}', \\
\hat{I}_{kl}(\mathbf{x}) &= -A_{pmkl} \int_{\Omega} \frac{\hat{\mathcal{G}}_{mn,p}}{I_n} d\mathbf{x}' + \lambda_0 \delta_{kl} \int_{\Omega} \frac{\hat{g}_n}{I_n} d\mathbf{x}', \\
\hat{K}(\mathbf{x}) &= -\lambda_0 \int_{\Omega} \frac{\hat{\mathcal{G}}_{kn,k}}{I_n} d\mathbf{x}' - a_0 \int_{\Omega} \frac{\hat{g}_{n,kk}}{I_n} d\mathbf{x}' + \lambda_1 \int_{\Omega} \frac{\hat{g}_n}{I_n} d\mathbf{x}'
\end{aligned} \tag{5.48}$$

olarak verilir. Burada, (5.40) ve (5.41) Green fonksiyonları kullanılarak, bir dizi basitleştirme sonrasında, ekgenleme ve mikroekgenleme katsayıları

$$\begin{aligned}
I_{nkl}^E(\mathbf{x}) &= -\frac{2(\lambda + \mu)\lambda_0^2}{(\lambda + 2\mu)B_2} \delta_{kl} M_{2,n}(\mathbf{x}) - \frac{\lambda_0^2}{(\lambda + 2\mu)B_2} \mu M_{1,kl}(\mathbf{x}) \\
&\quad + \frac{a_0\lambda_0^2}{B_2^2} \lambda \delta_{kl} M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_3) + \frac{2a_0\lambda_0^2}{B_2^2} \mu M_{3,kl}(\mathbf{x}, h_3) \\
&\quad - \frac{2a_0\lambda_0^2}{B_2^2} \mu M_{2,kl}(\mathbf{x}) + \frac{\lambda_0^2}{B_2} \delta_{kl} M_{3,n}(\mathbf{x}, h_3), \\
K_n(\mathbf{x}) &= -2\frac{\lambda_0\lambda_1}{B_2} M_{2,n}(\mathbf{x}) + \frac{a_0\lambda_0(2\lambda_0^2 - (\lambda + 2\mu)\lambda_1)}{B_2^2} M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_3) \\
&\quad + \frac{\lambda_1\lambda_0}{B_2} M_{3,n}(\mathbf{x}, h_3), \\
\hat{I}_{kl}(\mathbf{x}) &= \frac{2\lambda_0(\lambda + \mu)}{B_2} \delta_{kl} + \frac{\lambda_0\mu}{B_2} \frac{M_{1,kl}(\mathbf{x})}{M_{2,n}(\mathbf{x})} + \frac{2\lambda_0(\lambda + 2\mu)a_0\mu}{B_2^2} \frac{M_{2,kl}(\mathbf{x})}{M_{2,n}(\mathbf{x})} \\
&\quad - \frac{\lambda\lambda_0(\lambda + 2\mu)a_0}{B_2^2} \delta_{kl} \frac{M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_3)}{M_{2,n}(\mathbf{x})} - \frac{2\lambda_0(\lambda + 2\mu)a_0\mu}{B_2^2} \frac{M_{3,kl}(\mathbf{x}, h_3)}{M_{2,n}(\mathbf{x})} \\
&\quad - \frac{\lambda_0(\lambda + 2\mu)}{B_2} \delta_{kl} \frac{M_{3,n}(\mathbf{x}, h_3)}{M_{2,n}(\mathbf{x})}, \\
\hat{K}(\mathbf{x}) &= \frac{\lambda_0^2 + (\lambda + 2\mu)\lambda_1}{B_2} - \frac{(\lambda + 2\mu)a_0[2\lambda_0^2 - (\lambda + 2\mu)\lambda_1]}{B_2^2} \frac{M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_3)}{M_{2,n}(\mathbf{x})} \\
&\quad - \frac{(\lambda + 2\mu)\lambda_1}{B_2} \frac{M_{3,n}(\mathbf{x}, h_3)}{M_{2,n}(\mathbf{x})}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

şeklinde elde edilirler. Burada $M_1(\mathbf{x})$, $M_2(\mathbf{x})$ ve $M_3(\mathbf{x}, k)$ potansiyelleri mikropolar durumda olduğu gibidir ve (4.60) tanımları ile verilirler.

5.3 Eshelby Tansörleri

Yerdeğiştirme ve mikrogenleşme için elde edilen (5.47) çözümleri (3.27) ile verilen genleme büyüklükleri tanımlarında kullanıldığında, katkı maddelerinin varlığı nedeniyle genleme ve mikrogenleşme büyüklükleri

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) &= K_{klmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}^* + M_{kl}(\mathbf{x}) \theta^*, \\ \theta(\mathbf{x}) &= \hat{K}_{mn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}^* + \hat{M}(\mathbf{x}) \theta^*\end{aligned}\quad (5.50)$$

şeklinde yazılabilirler. Burada $K_{klmn}(\mathbf{x})$, $\hat{K}_{kl}(\mathbf{x})$, $M_{kl}(\mathbf{x})$ ve $\hat{M}(\mathbf{x})$ mikrogenleşen ortamın Eshelby tansörleridir ve

$$\begin{aligned}K_{klmn}(\mathbf{x}) &= I_{lmn,k}^C(\mathbf{x}) + I_{lmn,k}^E(\mathbf{x}), \quad M_{kl}(\mathbf{x}) = K_{l,k}(\mathbf{x}), \\ \hat{K}_{kl}(\mathbf{x}) &= \hat{I}_{lk}(\mathbf{x}), \quad \hat{M}(\mathbf{x}) = \hat{K}(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (5.51)$$

ifadeleri ile verilirler.

Mikropolar ortamın Eshelby tansörlerine benzer şekilde, mikrogenleşen ortam için elde edilen Eshelby tansörleri de klasik Eshelby tansörlerinden farklı olarak küresel katkı maddeleri içinde bile homojen değildir ve mikrogenleşen ortamın malzeme sabitlerinin sıfır alınması durumunda yine klasik Eshelby tansörlerine indirgendiği görülebilir. Bu durumda, mikrogenleşen ortamın malzeme sabitleri ve mikrogenleşme skaleri

$$\begin{aligned}\theta &= 0, \\ a_0 &= \lambda_0 = \lambda_1 = 0\end{aligned}\quad (5.52)$$

alınırsa,

$$K_{klmn}(\mathbf{x}) = I_{lmn,k}^C(\mathbf{x}) \quad (5.53)$$

ve mikrogenleşen ortam için elde edilen diğer tüm Eshelby tansörleri sıfır olur. Buradan da, mikropolar durumda da olduğu gibi, tamamen benzer işlemlerle, (5.53) ifadesinin $S_{klmn}(\mathbf{x})$ klasik Eshelby tansörüne indirgendiği kolayca görülebilir.

6. MİKROGERMELİ ORTAM İÇİN ESHELBY ÇÖZÜMÜ

İkinci bölümde tanımı ve temel denklemleri ayrıntılı olarak verilen mikrogermeli ortam Eringen' in mikromorfik ortam teorisinde, malzeme parçacıklarının mikro hareketinin yalnız mikrodönme ve hacimsel mikrogenleşmeden ibaret olduğu kısıtı getirilerek tanımlanır. Başka bir deyişle mikrogermeli teoride parçacıkların mikro kaymaları ihmal edilmektedir, dolayısıyla da teoriye mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorilerinin birleşimi gözüyle bakılabilir.

Mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorileriyle hasarlı malzemenin modellenmesinde önceki bölümlerde değinilen eksiklikler, Kırış ve İnan tarafından hasarlı malzeme mikrogermeli ortam teorisi ile modellenerek aşılmaya çalışılmıştır [77]. Bu sakıncaları ortadan kaldıran mikrogermeli ortam teorisi yukarıdaki tanımı ile hasarlı malzemelerin modellenmesinde diğer teorilere göre daha gerçekçi bir yaklaşımdır.

Burada, mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorilerine benzer şekilde mikrogermeli ortam teorisi içinde yine Green fonksiyonları yardımıyla temel çözümler elde edilmiştir. Bu çözümler kullanılarak katkı maddeleri içeren elastik alanlar hesaplanarak, mikrogermeli ortam için Eshelby tansörleri elde edilmiştir.

Kırış ve İnan [77] tarafından, doğrudan küresel katkı maddesi içeren mikrogermeli ortamın denklemlerinden elde edilen temel çözümlerden bağımsız olarak, Liu ve Hu [78] tarafından mikropolar ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine mikrogermenin getireceği katkılar düşünülerek mikrogermeli ortam için Eshelby tansörleri elde edilmiştir. Ancak, Kırış ve İnan tarafından mikrogermeli ortam için, dördü dört, ikisi iki boyutlu ve bir de skaler olmak üzere toplam yedi Eshelby tansörü elde edilirken [77], Liu ve Hu çalışmalarında dört tane dört boyutlu, iki tane üç boyutlu, üç tane iki boyutlu, iki tane bir boyutlu ve bir de skaler olmak üzere toplam on iki Eshelby tansörü elde etmişlerdir [78]. Sonuçlar arasındaki bu farklılık, temel olarak alan denklemlerinin farklı seçilmesinden kaynaklanmaktadır. Liu ve Hu

tarafından verilen sonuçlarda birbirinden bağımsız olmayan alan büyüklüklerinin seçimi nedeniyle, mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri arasında bağımsız olmayan terimler bulunmaktadır ve bu ilişkiler göz önüne alınarak [77] sonuçları elde edilebilir.

Mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri de doğal olarak mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorileri için elde edilenler gibi küresel katkı maddeleri içinde bile homojen değildir. Ayrıca, mikropolar sabitlerin limit durumunda mikrogenleşen ortam için Eshelby tansörlerine, mikrogenleşen ortam sabitlerinin limit durumunda mikropolar ortamın Eshelby tansörlerine ve tüm mikro sabitlerin limit durumunda klasik Eshelby tansörlerine indirgenmektedirler.

Bu bölümde, mikrogermeli ortam için temel denklemlerin çözümleri verildikten sonra bu çözümlerden, Green fonksiyonları yardımıyla, katkı maddelerinden kaynaklanan elastik alan ifadeleri elde edilecektir. Son olarak, katkı maddeleri içeren lineer izotrop sonsuz bir mikrogermeli ortam için Eshelby tansörleri verilecektir.

6.1 Temel Çözümler

Bu ayıtta sonsuz mikrogermeli sonsuz ortam için; kütle kuvvetleri, kütle momentleri yoğunluğu ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunun kütle merkezinde uygulandığı varsayılarak temel çözümler elde edilecektir. Mikrogermeli ortamın (3.19) denge denklemleri Galerkin [96] gösterimiyle

$$\begin{aligned} \diamond_1 &= (\lambda + 2\mu)\Delta, & \diamond_2 &= \left(\mu + \frac{\kappa}{2}\right)\Delta, & \diamond_3 &= (\alpha + \beta + \gamma)\Delta - 2\kappa, \\ \diamond_4 &= \gamma\Delta - 2\kappa, & \diamond_6 &= a_0\Delta - \lambda_1 \end{aligned} \quad (6.1)$$

tanımları yapılarak

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \theta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

formunda yazılabilir. (6.2) matris denkleminin çözümü

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = [n_{kl}]_{7 \times 7} \quad (6.3)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
\diamond_2 + (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}) X_1^2 & (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}) X_1 X_2 & (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}) X_1 X_3 & 0 & -\kappa X_3 & \kappa X_2 & \lambda_0 X_1 \\
(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}) X_1 X_2 & \diamond_2 + (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}) X_2^2 & (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}) X_2 X_3 & \kappa X_3 & 0 & -\kappa X_1 & \lambda_0 X_2 \\
(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}) X_1 X_3 & (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}) X_2 X_3 & \diamond_2 + (\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}) X_3^2 & -\kappa X_2 & \kappa X_1 & 0 & \lambda_0 X_3 \\
0 & -\kappa X_3 & \kappa X_2 & \diamond_4 + (\alpha + \beta) X_1^2 & (\alpha + \beta) X_1 X_2 & (\alpha + \beta) X_1 X_3 & 0 \\
\kappa X_3 & 0 & -\kappa X_1 & (\alpha + \beta) X_1 X_2 & \diamond_4 + (\alpha + \beta) X_2^2 & (\alpha + \beta) X_2 X_3 & 0 \\
-\kappa X_2 & \kappa X_1 & 0 & (\alpha + \beta) X_1 X_3 & (\alpha + \beta) X_2 X_3 & \diamond_4 + (\alpha + \beta) X_3^2 & 0 \\
-\lambda_0 X_1 & -\lambda_0 X_2 & -\lambda_0 X_3 & 0 & 0 & 0 & \diamond_6
\end{bmatrix} \quad (6.4)$$

ile verilmektedir. \mathbf{M} matris operatörünün tersi

$$\mathbf{M}^{-1} = [n_{kl}] (\square_3 \square_4 \square_7)^{-1} \quad (6.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada \mathbf{N} operatörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} n_{kk} &= \square_7 (\square_1 - \square_2 X_k^2), & k &= 1, 2, 3, \\ n_{kk} &= \square_4 (\square_5 - \square_6 X_{k-3}^2), & k &= 4, 5, 6, \\ n_{77} &= \square_3 \square_7 \square_8, \\ n_{kl} &= n_{lk} = -\square_2 \square_7 X_k X_l, & k \neq l, \quad k, l &= 1, 2, 3, \\ n_{kl} &= n_{lk} = -\square_4 \square_6 X_{k-3} X_{l-3}, & k \neq l, \quad k, l &= 4, 5, 6, \\ n_{7k} &= -n_{k7} = \square_3 \square_7 \lambda_0 X_k, & k &= 1, 2, 3, \\ n_{14} &= n_{25} = n_{36} = n_{41} = n_{52} = n_{63} = n_{7k} = n_{k7} = 0, & k &= 4, 5, 6 \\ n_{15} &= -n_{24} = n_{42} = -n_{51} = \square_4 \square_7 \kappa X_3, \\ n_{16} &= -n_{34} = n_{43} = -n_{61} = -\square_4 \square_7 \kappa X_2, \\ n_{26} &= -n_{35} = n_{53} = -n_{62} = \square_4 \square_7 \kappa X_1 \end{aligned} \quad (6.6)$$

ve yeni tanımlanan operatörler,

$$\begin{aligned} \square_1 &= \diamond_1 \diamond_4 \diamond_6 + \lambda_0^2 \diamond_4 \Delta, \\ \square_2 &= \left[\lambda_0^2 + \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) \diamond_6 \right] \diamond_4 - \kappa^2 \diamond_6, \\ \square_3 &= \diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta, \\ \square_4 &= \diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta, \\ \square_5 &= \diamond_2 \diamond_3, \\ \square_6 &= [(\alpha + \beta) \diamond_2 - \kappa^2], \\ \square_7 &= \diamond_3, \\ \square_8 &= \diamond_1, \end{aligned} \quad (6.7)$$

olarak verilirler ve tekrarlanan indisler üzerinde toplama uyulaşımı uygulanmamaktadır. (6.2) ve (6.3) ifadelerinin sağ tarafındaki büyüklükler arasında

$$\square_3 \square_4 \square_7 \mathbf{F} = -\mathbf{f}, \quad \square_3 \square_4 \square_7 \mathbf{L} = -\mathbf{l}, \quad \square_3 \square_4 \square_7 L = -l \quad (6.8)$$

ilişkileri bulunmaktadır. (6.3) çözümü,

$$\boldsymbol{\varphi} = \diamond_3 \mathbf{F}, \quad \boldsymbol{\varphi}^* = [\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta] \mathbf{L}, \quad \varphi^{**} = [\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta] L \quad (6.9)$$

tanımları ile,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \diamond_4 \left(\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta \right) \boldsymbol{\varphi} - \left\{ \lambda_0^2 \diamond_4 + \left[\left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) \diamond_4 - \kappa^2 \right] \diamond_6 \right\} \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - \kappa \diamond_3 \nabla \times \boldsymbol{\varphi}^* \\ - \lambda_0 \diamond_3 \nabla \varphi^{**}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \diamond_2 \diamond_3 \boldsymbol{\varphi}^* - [(\alpha + \beta) \diamond_2 - \kappa^2] \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}^* - \kappa (\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta) \nabla \times \boldsymbol{\varphi},$$

$$\theta = \lambda_0 (\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta) \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \diamond_1 \diamond_3 \varphi^{**}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, (6.8) ve (6.9) ifadelerinden

$$\begin{aligned} (\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta) (\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta) \boldsymbol{\varphi} &= -\mathbf{f}, \\ \diamond_3 (\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta) \boldsymbol{\varphi}^* &= -\mathbf{l}, \\ \diamond_3 (\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta) \varphi^{**} &= -l \end{aligned} \quad (6.11)$$

ilişkileri elde edilir.

İlk olarak, kütle momentleri yoğunluğunun ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunun sıfır ve kütle kuvvetleri alanının irrotasyonel, yani

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \nabla \pi_0, \\ \mathbf{l} &= \mathbf{0}, \\ l &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

olduğu kabulü ve

$$(\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta) \boldsymbol{\varphi} = \nabla \Lambda_0 \quad (6.13)$$

tanımı ile, (6.10) ve (6.11) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \nabla \diamond_6 \Lambda_0, \\
\boldsymbol{\phi} &= \mathbf{0}, \\
\theta &= \lambda_0 \nabla \cdot (\nabla \Lambda_0)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

çözümlerine ve

$$(\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta) \Lambda_0 = -\pi_0 \tag{6.15}$$

ilişkinine ulaşılır.

Kütle momentleri yoğunluğunun ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunun yine sıfır ve kütle kuvvetlerinin solenoidal, yani

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \nabla \times \boldsymbol{\pi}, \\
\mathbf{l} &= \mathbf{0}, \\
l &= 0
\end{aligned} \tag{6.16}$$

olduğu varsayımı ve

$$(\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta) \boldsymbol{\varphi} = \nabla \times \boldsymbol{\Lambda} \tag{6.17}$$

tanımı ile, (6.10) ve (6.11) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \nabla \times (\diamond_4 \boldsymbol{\Lambda}), \\
\boldsymbol{\phi} &= -\kappa \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Lambda}), \\
\theta &= 0
\end{aligned} \tag{6.18}$$

çözümlerine ve

$$(\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta) \boldsymbol{\Lambda} = -\boldsymbol{\pi} \tag{6.19}$$

ilişkinine ulaşılır.

İkinci olarak, kütle momentleri yoğunluğunun irrotasyonel ve kütle kuvvetleri alanının ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunun sıfır, yani

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{l} &= \nabla \pi_0^*, \\
l &= 0
\end{aligned} \tag{6.20}$$

olduğu varsayılırsa,

$$(\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta) \boldsymbol{\varphi}^* = \nabla \Lambda_0^* \tag{6.21}$$

tanımı ile, (6.10) ve (6.11) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{0}, \\
\boldsymbol{\phi} &= \nabla \Lambda_0^*, \\
\theta &= 0
\end{aligned} \tag{6.22}$$

çözümlerine ve

$$\diamond_3 \Lambda_0^* = -\pi_0^* \tag{6.23}$$

ilişkinine ulaşılır.

Kütle momentleri yoğunluğunun solenoidal ve kütle kuvvetlerinin ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunun sıfır, yani

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{l} &= \nabla \times \boldsymbol{\pi}^*, \\
l &= 0
\end{aligned} \tag{6.24}$$

olduğu kabulü ve

$$\diamond_3 \boldsymbol{\varphi}^* = \nabla \times \boldsymbol{\Lambda}^* \tag{6.25}$$

tanımı ile (6.10) ve (6.11) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= -\kappa \nabla \times (\nabla \times \Lambda^*), \\
\phi &= \nabla \times (\diamond_2 \Lambda^*), \\
\theta &= 0
\end{aligned} \tag{6.26}$$

çözümlerine ve

$$(\diamond_2 \diamond_4 + \kappa^2 \Delta) \Lambda^* = -\pi^* \tag{6.27}$$

ilişkinine ulaşılır.

Üçüncü olarak kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun sıfırdan farklı ve kütle kuvvetleri alanının sıfır, yani

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{l} &= \mathbf{0}, \\
l &\neq 0
\end{aligned} \tag{6.28}$$

olduğu varsayımı ve

$$\diamond_3 \varphi^{**} = \Lambda_0^{**} \tag{6.29}$$

tanımı ile, (6.10) ve (6.11) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= -\lambda_0 \nabla \Lambda_0^{**}, \\
\phi &= \mathbf{0}, \\
\theta &= \diamond_1 \Lambda_0^{**}
\end{aligned} \tag{6.30}$$

çözümlerine ve

$$(\diamond_1 \diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta) \Lambda_0^{**} = -l \tag{6.31}$$

ilişkinine ulaşılır.

6.1.1 Sınırsız Elastik Malzeme İçin Temel Çözüm

Statik durumda sınırsız elastik malzemede (3.19) denge denklemindeki yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogenleşme alanlarının çözümüne ulaşmak için, öncelikle kütle kuvveti alanının koordinat merkezinde uygulandığı kabulü yapılır.

Bu durumda (4.27) kütle kuvveti alanı ve (4.28) Helmholtz ayrışımı [98-99], (6.15) ve (6.19) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} [(\lambda + 2\mu)a_0 \Delta^2 - ((\lambda + 2\mu)\lambda_1 - \lambda_0^2)\Delta] \Lambda_0 &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \\ \left[\left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \gamma \Delta^2 - 2\mu\kappa \Delta \right] \Lambda &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{q} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (6.32)$$

elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri de

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= -\frac{1}{8\pi B_2} \left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) - \frac{h_3^2}{4\pi B_2} \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r/h_3}) \right), \\ \Lambda &= \frac{1}{16\pi \mu \kappa} \nabla \times (\mathbf{q} r) + \frac{h_1^2}{8\pi \mu \kappa} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

olarak elde edilir. Yalnız kütle kuvvetleri kütle merkezinde uygulandığında irrotasyonel durumda (6.14) çözümü ile solenoidal durumda (6.18) çözümlerinin toplamından

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (a_0 \Delta - \lambda_1) \nabla \Lambda_0 + (\gamma \Delta - 2\kappa) \nabla \times \Lambda, \\ \phi &= -\kappa \nabla \times (\nabla \times \Lambda), \\ \theta &= \lambda_0 \nabla \cdot (\nabla \Lambda_0) \end{aligned} \quad (6.34)$$

elde edilir. Bu ifadede (6.33) çözümleri kullanıldığında yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogenleşme alanları için sonuç çözüm bir dizi basitleştirme işlemi sonrasında

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} = & \frac{(\lambda + 3\mu)\lambda_1 - \lambda_0^2}{8\pi\mu B_2} \frac{\mathbf{q}}{r} + \frac{a_0}{4\pi B_2} \frac{\mathbf{q}}{r^3} + \frac{(\lambda + \mu)\lambda_1 - \lambda_0^2}{8\pi\mu B_2} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} - \frac{3a_0}{4\pi B_2} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \\
& - \frac{\lambda_0^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)B_2} \frac{\mathbf{q}}{r} e^{-r/h_3} + \frac{a_0}{4\pi B_2} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{r} e^{-r/h_3} \right) \\
& + \frac{\lambda_1(\lambda + 2\mu)a_0}{4\pi B_2^2} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{r} (1 - e^{-r/h_3}) \right) - \frac{\gamma}{16\pi\mu^2} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right), \quad (6.35)
\end{aligned}$$

$$\phi = \frac{1}{8\pi\mu} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right),$$

$$\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi B_2} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\lambda_0}{4\pi B_2} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{r} e^{-r/h_3} \right)$$

olarak elde edilir.

(3.19) denge denklemlerini çözmek için ikinci olarak kütle momentleri yoğunluğunun koordinat merkezinde uygulandığı varsayımı yapılır. Bu durumda, (4.36) kütle momentleri yoğunluğu ve (4.37) Helmholtz ayrışımı kullanılarak, (6.23) ve (6.27) denklemleri

$$\begin{aligned}
[(\alpha + \beta + \gamma)\Delta - 2\kappa]\Lambda_0^* &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \\
\left[\left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \gamma \Delta^2 - 2\mu\kappa\Delta \right] \Lambda^* &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{p} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right)
\end{aligned} \quad (6.36)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerin çözümleri de benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\Lambda_0^* &= -\frac{1}{8\pi\kappa} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r/h_2}) \right), \\
\Lambda^* &= \frac{1}{16\pi\mu\kappa} \nabla \times (\mathbf{p}r) + \frac{h_1^2}{8\pi\mu\kappa} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{p}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right)
\end{aligned} \quad (6.37)$$

olarak elde edilir.

Kütle momentleri yoğunluğu kütle merkezinde uygulandığında (6.22) ve (6.26) çözümlerinin toplamı, yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogenleşme için

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= -\kappa \nabla \times (\nabla \times \Lambda^*), \\
\phi &= \nabla \Lambda_0^* + \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \Delta \nabla \times \Lambda^*, \\
\theta &= 0
\end{aligned} \tag{6.38}$$

çözümlerini verir. Bu çözümlerde (6.37) ifadeleri kullanılarak bir dizi basitleştirme işlemi sonucunda

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \frac{1}{8\pi\mu} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{p}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right), \\
\phi &= \frac{1}{4\pi(\alpha + \beta + \gamma)} \left(\frac{\mathbf{p}}{r} e^{-r/h_2} \right) - \frac{1}{8\pi\kappa} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{p}}{r} (1 - e^{-r/h_2}) \right) \\
&\quad + \frac{(2\mu + \kappa)}{16\pi\mu\kappa} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{p}}{r} (1 - e^{-r/h_1}) \right), \\
\theta &= 0
\end{aligned} \tag{6.39}$$

elde edilir.

(3.19) denge denklemlerinden yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunu belirlemek için son olarak mikrogerme kuvvet yoğunluğunun koordinat merkezinde uygulandığı, yani

$$\nabla l = \bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{p}} \delta(x_1, x_2, x_3) \tag{6.40}$$

olduğu kabul edilir ve bu ilişki (6.31) denkleminde kullanılırsa

$$\left\{ (\lambda + 2\mu) a_0 \Delta^2 - [(\lambda + 2\mu) \lambda_1 - \lambda_0^2] \Delta \right\} \Lambda_0^{**} = \frac{1}{4\pi} \bar{\mathbf{p}} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \tag{6.41}$$

elde edilir ve çözümü

$$\Lambda_0^{**} = -\frac{1}{8\pi B_2} \left(\frac{\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) - \frac{h_3^2}{4\pi B_2} \bar{\mathbf{p}} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r/h_3}) \right) \tag{6.42}$$

olarak bulunur. Bu çözüm (6.30) ifadelerinde kullanıldığında yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogenleşme için çözümler bir dizi basitleştirme işlemi sonunda

$$\mathbf{u} = \frac{\lambda_0}{8\pi B_2} \left[\frac{\bar{\mathbf{p}}}{r} - \frac{(\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} \right] - \frac{\lambda_0}{4\pi B_2} \left(\frac{\bar{\mathbf{p}}}{r} e^{-r/h_3} \right) + \frac{\lambda_0 h_3^2}{4\pi B_2} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\bar{\mathbf{p}}}{r} (1 - e^{-r/h_3}) \right),$$

$$\phi = \mathbf{0},$$

$$\theta = -\frac{(\lambda + 2\mu)}{4\pi B_2} \nabla \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{p}}}{r} (1 - e^{-r/h_3}) \right)$$

olarak bulunurlar.

6.2 Katkı Maddesinden Kaynaklanan Elastik Alanlar

Mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorisine benzer şekilde, katkı maddeleri içeren sonsuz mikrogermeli ortamda ekgenleme ve mikroekgenleme kavramları

$$\varepsilon_{kl}^t = \varepsilon_{kl}^* \Lambda(\Omega), \quad \gamma_{kl}^t = \gamma_{kl}^* \Lambda(\Omega), \quad \theta^t = \theta^* \Lambda(\Omega),$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Malzemede katkı maddelerindeki ekgenlemeler nedeniyle mikrogermeli ortamın (3.15) bünye denklemleri

$$t_{kl} = A_{kl}^s (\theta - \theta^t) + A_{mkl}^s (\theta_{,m} - \theta_{,m}^t) + A_{klmn} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^t) + C_{klmn} (\gamma_{mn} - \gamma_{mn}^t),$$

$$m_{kl} = B_{lk}^s (\theta - \theta^t) + B_{mlk}^s (\theta_{,m} - \theta_{,m}^t) + C_{mnlk} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^t) + B_{lkmn} (\gamma_{mn} - \gamma_{mn}^t),$$

$$m_k = C_k^s (\theta - \theta^t) + C_{kl}^s (\theta_{,l} - \theta_{,l}^t) + A_{klm}^s (\varepsilon_{lm} - \varepsilon_{lm}^t) + B_{klm}^s (\gamma_{lm} - \gamma_{lm}^t),$$

$$s - t = C^s (\theta - \theta^t) + C_k^s (\theta_{,k} - \theta_{,k}^t) + A_{kl}^s (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^t) + B_{kl}^s (\gamma_{kl} - \gamma_{kl}^t)$$

şeklinde yeniden yazılmalıdır. Bünye denklemlerindeki bu farklılık (3.19) denge denklemlerine

$$\lambda_0 \theta_{,l} + \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) u_{k,kl} + \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) u_{l,kk} + \kappa \in_{lkm} \phi_{m,k} + f_l + f_l^t = 0,$$

$$(\alpha + \beta) \phi_{k,kl} + \gamma \phi_{l,kk} + \kappa \in_{lkm} u_{m,k} - 2\kappa \phi_l + l_l + l_l^t = 0,$$

$$a_0 \theta_{,kk} - \lambda_1 \theta - \lambda_0 u_{k,k} + l + l^t = 0$$

şeklinde yansır. Burada “ t ” üst indisli büyüklükler (3.19) denge denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
f_l^t &= -t_{kl,k}^t, \quad l_l^t = -m_{kl,k}^t - e_{lkm} t_{km}^t, \quad l^t = -m_{k,k}^t - t^t + s^t, \\
t_{kl}^t &= A_{kl}^s \theta^t + A_{klmn} \varepsilon_{mn}^t, \quad m_{kl}^t = B_{mlk}^s \theta_{,m}^t + B_{lkmn} \gamma_{mn}^t, \\
m_k^t &= C_{kl}^s \theta_{,l}^t + B_{klm}^s \gamma_{lm}^t, \quad s^t - t^t = C^s \theta^t + A_{kl}^s \varepsilon_{kl}^t
\end{aligned} \tag{6.47}$$

olarak elde edilirler.

(6.46) denklemlerinden çözüme ulaşmak için; önce yalnız kütle kuvvetlerinin, sonra yalnız kütle momentleri yoğunluğunun ve son olarak yalnız kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulandığı düşünülüp, elde edilen çözümler süperpoze edilmelidir. Burada bilinmeyen \mathbf{u} yerdeğiştirmesi, ϕ mikrodönmesi ve θ mikrogenleşme fonksiyonları Green fonksiyonları kullanılarak belirlenebilir. Karşı gelen problem, klasik elastisitede bir, mikropolar ve mikrogenleşen ortamlarda dört, mikrogermeli ortamda ise yedi Green fonksiyonunun belirlenmesini gerektirir.

Birinci grup Green fonksiyonları için gerekli denklemler koordinat merkezine yalnız \mathbf{f} kütle kuvvetlerinin uygulandığını, \mathbf{l} kütle momentleri yoğunluğunun ve l mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulanmadığı varsayılarak

$$\begin{aligned}
\lambda_0 g_{n,l} + \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) \mathcal{G}_{kn,kl} + \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \mathcal{G}_{ln,kk} + \kappa e_{lkm} G_{mn,k} + \delta_{ln} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= 0, \\
(\alpha + \beta) G_{kn,kl} + \gamma G_{ln,kk} + \kappa e_{lkm} \mathcal{G}_{mn,k} - 2\kappa G_{ln} &= 0, \\
a_0 g_{n,kk} - \lambda_1 g_n - \lambda_0 \mathcal{G}_{kn,k} &= 0
\end{aligned} \tag{6.48}$$

şeklinde elde edilir.

İkinci grup denklemler, kütle merkezine yalnız \mathbf{l} kütle momentleri yoğunluğunun uygulandığı ve \mathbf{f} kütle kuvvetleri ve l mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulanmadığı varsayılarak

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \hat{g}_{n,l} + \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) \hat{\mathcal{G}}_{kn,kl} + \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \hat{\mathcal{G}}_{ln,kk} + \kappa e_{lkm} \hat{G}_{mn,k} &= 0, \\
(\alpha + \beta) \hat{G}_{kn,kl} + \gamma \hat{G}_{ln,kk} + \kappa e_{lkm} \hat{\mathcal{G}}_{mn,k} - 2\kappa \hat{G}_{ln} + \delta_{ln} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= 0, \\
a_0 \hat{g}_{n,kk} - \lambda_1 \hat{g}_n - \lambda_0 \hat{\mathcal{G}}_{kn,k} &= 0
\end{aligned} \tag{6.49}$$

şeklinde yazılabilirler.

Son grup denklemleri elde etmek için sisteme yalnız l mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulandığı ve \mathbf{f} kütle kuvvetleri ve \mathbf{I} kütle momentleri yoğunluğunun uygulanmadığı kabul edilir: Bu durumda

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \hat{\hat{g}}_{n,l} + \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2} \right) \hat{\hat{\mathcal{G}}}_{kn,kl} + \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \hat{\hat{\mathcal{G}}}_{ln,kk} + \kappa e_{lkm} \hat{\hat{G}}_{mn,k} &= 0, \\
(\alpha + \beta) \hat{\hat{G}}_{kn,kl} + \gamma \hat{\hat{G}}_{ln,kk} + \kappa e_{lkm} \hat{\hat{\mathcal{G}}}_{mn,k} - 2\kappa \hat{\hat{G}}_{ln} &= 0, \\
a_0 \hat{\hat{g}}_{n,kk} - \lambda_1 \hat{\hat{g}}_n - \lambda_0 \hat{\hat{\mathcal{G}}}_{kn,k} + \delta_{kn} I_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= 0
\end{aligned} \tag{6.50}$$

denklemleri elde edilir. Burada mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorilerine benzer şekilde “^” ’süz büyüklüklerin yalnız kütle kuvvetlerinin, “^” lı büyüklükler yalnız kütle momentleri yoğunluğunun ve “^” ’ lı büyüklükler yalnız kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulandığı duruma karşı gelmek üzere \mathcal{G}_{kn} , $\hat{\mathcal{G}}_{kn}$ ve $\hat{\hat{\mathcal{G}}}_{kn}$ Green fonksiyonları u_k yerdeğıştirmelerine, G_{kn} , \hat{G}_{kn} ve $\hat{\hat{G}}_{kn}$ Green fonksiyonları ϕ_k mikrodönmelerine, g_n , \hat{g}_n ve $\hat{\hat{g}}_n$ Green fonksiyonları ise θ mikrogenleşmelerine karşı gelmektedir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{kn}^C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{1}{8\pi\mu} \left(2 \frac{\delta_{kn}}{r} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} r_{,kn} \right), \\
\mathcal{G}_{kn}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{B_1}{4\pi} \left[-h_1^2 \left(\frac{1 - e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,kn} - \delta_{kn} \frac{e^{-r/h_1}}{r} \right], \\
\mathcal{G}_{kn}^E(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{a_0 \lambda_0^2}{4\pi B_2^2} \left[\frac{1}{h_3^2} \frac{r_{,kn}}{2} + \left(\frac{1 - e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,kn} \right]
\end{aligned} \tag{6.51}$$

olmak üzere, (6.48)-(6.50) denklemlerinin çözümleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \mathcal{G}_{kn}^C(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \mathcal{G}_{kn}^P(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \mathcal{G}_{kn}^E(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \\
\hat{\mathcal{G}}_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= G_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = -\frac{1}{8\pi\mu} e_{knl} \left(\frac{1-e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,l}, \\
\hat{\hat{\mathcal{G}}}_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \frac{\lambda_0(\lambda+2\mu)a_0}{4\pi B_2^2} \left[\frac{1}{h_3^2} \frac{r_{,kn}}{2} + \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,kn} \right], \\
\hat{G}_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \frac{1}{16\pi\mu} \left(\frac{1-e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,kn} + \frac{1}{8\pi\kappa} \left(\frac{e^{-r/h_2} - e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,kn} \\
&\quad + \frac{2\mu+\kappa}{16\pi\mu\kappa h_1^2} \frac{e^{-r/h_1}}{r} \delta_{kn}, \\
\hat{G}_{kn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \hat{g}_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = 0, \\
g_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= -\frac{\lambda_0}{4\pi B_2} \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,n}, \\
\hat{g}_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= -\frac{\lambda+2\mu}{4\pi B_2} \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,n}
\end{aligned} \tag{6.52}$$

olarak elde edilir.

Bu sonuçlar sırasıyla klasik, mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorileri için elde edilen Green fonksiyonları ile eşdirler. Ayrıca, (6.52) ifadelerinden görüleceği üzere f_k kütle kuvvetlerinin uygulanması durumunda u_k yerdeğiştirmelerine karşı gelen \mathcal{G}_{kn} Green fonksiyonunun klasik, mikropolar ve mikrogenleşme durumlarına karşı gelen Green fonksiyonlarının toplamı olarak elde edilebildiğine, dahası beklendiği gibi l_k kütle momentleri yoğunluğunun uygulanması durumunda θ mikrogenleşmesine karşı gelen \hat{g}_n Green fonksiyonunun ve karşıt olarak l mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulanması durumunda da ϕ_k mikrodönmesine karşı gelen $\hat{\hat{G}}_{kn}$ Green fonksiyonunun sıfır olarak elde edildiğine dikkat edilmelidir. Dolayısıyla, (6.48)-(6.50) denklemlerini yazmak için gerekli olan dokuz Green fonksiyonundan ikisi sıfır olduğu için mikrogenmeli ortam teorisi için yedi Green fonksiyonuna gerek duyulmaktadır.

Buradan (6.46) denklemlerinin çözümü olan \mathbf{u} yerdeğişirmelerini, ϕ mikrodönmelerini ve θ mikrogenleşmesini Green fonksiyonları cinsinden elde etmek için

$$\bar{F}_k = f_k^t + f_k, \quad \bar{L}_k = l_k^t + l_k, \quad \bar{L} = l^t + l \quad (6.53)$$

olmak üzere, karşılık teoremi

$$\int_V (\bar{F}_k u_k^t - \bar{F}_k' u_k) dV + \int_V (\bar{L}_k \phi_k^t - \bar{L}_k' \phi_k) dV + \int_V (\bar{L} \theta^t - \bar{L}' \theta) dV = 0 \quad (6.54)$$

uygulanır ve (6.54) ifadesinde sırasıyla

$$\begin{aligned} \{u_k^t, \phi_k^t, \theta^t, \bar{F}_k', \bar{L}_k', \bar{L}'\} &= \{\mathcal{G}_{kn}, G_{kn}, g_n, \delta_{kn} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), 0, 0\}, \\ &= \{\hat{\mathcal{G}}_{kn}, \hat{G}_{kn}, \hat{g}_n = 0, 0, \delta_{kn} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), 0\}, \\ &= \{\hat{\mathcal{G}}_{kn}, \hat{G}_{kn} = 0, \hat{g}_n, 0, 0, \delta_{kn} I_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} \end{aligned} \quad (6.55)$$

alınırsa bilinmeyen fonksiyonlar

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}) &= \int_V [\bar{F}_k(\mathbf{x}') \mathcal{G}_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \bar{L}_k(\mathbf{x}') G_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \bar{L}(\mathbf{x}') g_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d\mathbf{x}', \\ \phi_n(\mathbf{x}) &= \int_V [\bar{F}_k(\mathbf{x}') \hat{\mathcal{G}}_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \bar{L}_k(\mathbf{x}') \hat{G}_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d\mathbf{x}', \\ \theta(\mathbf{x}) &= \int_V \left[(\bar{F}_k(\mathbf{x}') \hat{\mathcal{G}}_{kn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \bar{L}(\mathbf{x}') \hat{g}_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) / I_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (6.56)$$

şeklinde elde edilirler.

Son olarak, (6.47) denklemlerinde f_k^t, l_k^t ve l^t büyüklükleri kütle kuvvetlerinin, kütle momentleri yoğunluklarının ve mikrogenme kuvvet yoğunluğunun olmadığı durumda sırasıyla hayali kütle kuvvetleri, kütle momentleri yoğunlukları ve mikrogenme kuvvet yoğunluğu olarak kabul edilebilirler. Dolayısıyla (6.56) denklemlerinde kütle kuvvetleri, kütle momentleri yoğunluğu ve mikrogenme kuvvet yoğunluğunun

uygulanmadığı ve sınır terimlerinin sıfır olduğu kabul edilerek, kısmi integrasyon işlemleri ile

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}) &= -\int_V \left[\lambda_0 \theta^t \mathcal{G}_{kn,k} + A_{klmp} \varepsilon_{mp}^t \mathcal{G}_{ln,k} + B_{klmp} \gamma_{mp}^t G_{kn,l} - \kappa e_{pmk} \varepsilon_{mp}^t G_{kn} \right. \\
&\quad \left. + a_0 \theta^t g_{n,kk} - \lambda_1 \theta^t g_n - \lambda_0 \delta_{mp} \varepsilon_{mp}^t g_n \right] d\mathbf{x}', \\
\phi_n(\mathbf{x}) &= -\int_V \left[\lambda_0 \theta^t \hat{\mathcal{G}}_{kn,k} + A_{klmp} \varepsilon_{mp}^t \hat{\mathcal{G}}_{ln,k} + B_{klmp} \gamma_{mp}^t \hat{G}_{kn,l} - \kappa e_{pmk} \varepsilon_{mp}^t \hat{G}_{kn} \right] d\mathbf{x}', \quad (6.57) \\
\theta(\mathbf{x}) &= -\int_V \left[\left(\lambda_0 \theta^t \hat{\mathcal{G}}_{kn,k} + A_{klmp} \varepsilon_{mp}^t \hat{\mathcal{G}}_{ln,k} + a_0 \theta^t \hat{g}_{n,kk} - \lambda_1 \theta^t \hat{g}_n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \lambda_0 \delta_{mp} \varepsilon_{mp}^t \hat{g}_n \right) / I_n \right] d\mathbf{x}'
\end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır. (6.57) denklemi u_k yerdeğiştirme ve ϕ_k mikrodönme vektörlerini ve θ mikrogenleşme skaler büyüklüğünü Green fonksiyonları cinsinden verir. Mikrogermeli ortamın genleme, gerilme, mikrogenleşme ve diğer mikro büyüklükleri (6.57) çözümlerinin ilgili denklemlerde kullanılmalarıyla elde edilebilirler.

Mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorisine benzer şekilde (6.44) denklemlerinde ε_{kl}^* ekgenlemelerin ve γ_{kl}^* , θ^* mikroekgenlemelerin, katkı maddesi Ω üzerinde sabit olduğu varsayılırsa [74-75], (6.57) denklemleri

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}) &= u_n^C(\mathbf{x}) + I_{nkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}^* + J_{nkl}(\mathbf{x}) \gamma_{kl}^* + K_n(\mathbf{x}) \theta^*, \\
\phi_n(\mathbf{x}) &= \hat{I}_{nkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}^* + \hat{J}_{nkl}(\mathbf{x}) \gamma_{kl}^*, \quad (6.58) \\
\theta(\mathbf{x}) &= \hat{I}_{kl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}^* + \hat{K}(\mathbf{x}) \theta^*
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $u_n^C(\mathbf{x})$ (4.58) ile verilen klasik elastik şekil değiştirmedir. (6.58) ifadelerindeki ekgenleme ve mikroekgenlemelerin katsayıları,

$$\begin{aligned}
I_{nkl}(\mathbf{x}) &= -\frac{\kappa}{2} (\delta_{kp} \delta_{lm} - \delta_{km} \delta_{lp}) \int_{\Omega} \mathcal{G}_{mn,p}^C d\mathbf{x}' - A_{pmkl} \int_{\Omega} (\mathcal{G}_{mn,p} - \mathcal{G}_{mn,p}^C) d\mathbf{x}' \\
&\quad + \kappa e_{lkm} \int_{\Omega} G_{mn} d\mathbf{x}' + \lambda_0 \delta_{kl} \int_{\Omega} g_n d\mathbf{x}', \\
J_{nkl}(\mathbf{x}) &= -B_{mpkl} \int_{\Omega} G_{mn,p} d\mathbf{x}', \\
K_n(\mathbf{x}) &= -\lambda_0 \int_{\Omega} \mathcal{G}_{kn,k} d\mathbf{x}' - a_0 \int_{\Omega} g_{n,kk} d\mathbf{x}' + \lambda_1 \int_{\Omega} g_n d\mathbf{x}', \\
\hat{I}_{nkl}(\mathbf{x}) &= -A_{pmkl} \int_{\Omega} \hat{\mathcal{G}}_{mn,p} d\mathbf{x}' + \kappa e_{lkm} \int_{\Omega} \hat{G}_{mn} d\mathbf{x}', \\
\hat{J}_{nkl}(\mathbf{x}) &= -B_{mpkl} \int_{\Omega} \hat{G}_{mn,p} d\mathbf{x}', \\
\hat{I}_{kl}(\mathbf{x}) &= -A_{pmkl} \int_{\Omega} \frac{\hat{G}_{mn,p}}{I_n} d\mathbf{x}' + \lambda_0 \delta_{kl} \int_{\Omega} \frac{\hat{g}_n}{I_n} d\mathbf{x}', \\
\hat{K}(\mathbf{x}) &= -\lambda_0 \int_{\Omega} \frac{\hat{\mathcal{G}}_{kn,k}}{I_n} d\mathbf{x}' - a_0 \int_{\Omega} \frac{\hat{g}_{n,kk}}{I_n} d\mathbf{x}' + \lambda_1 \int_{\Omega} \frac{\hat{g}_n}{I_n} d\mathbf{x}'
\end{aligned} \tag{6.59}$$

olarak verilirler. Burada (6.51) ve (6.52) Green fonksiyonları kullanılarak, bir dizi basitleştirme sonrasında ekgenleme ve mikroekgenleme katsayıları,

$$\begin{aligned}
I_{nkl}^P(\mathbf{x}) &= 2\mu B_1 h_1^2 M_{2,kl n}(\mathbf{x}) + \frac{\kappa}{\mu} (\delta_{kn} M_{2,l}(\mathbf{x}) - \delta_{ln} M_{2,k}(\mathbf{x})) \\
&\quad - B_1 h_1^2 (\lambda \delta_{kl} M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_1) + 2\mu M_{3,kl n}(\mathbf{x}, h_1)) + B_1 \lambda \delta_{kl} M_{3,n}(\mathbf{x}, h_1) \\
&\quad + \left[B_1 \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) + \frac{\kappa}{2\mu} \right] \delta_{ln} M_{3,k}(\mathbf{x}, h_1) \\
&\quad + \left[B_1 \left(\mu - \frac{\kappa}{2} \right) - \frac{\kappa}{2\mu} \right] \delta_{kn} M_{3,l}(\mathbf{x}, h_1), \\
I_{nkl}^E(\mathbf{x}) &= -\frac{2(\lambda + \mu)\lambda_0^2}{(\lambda + 2\mu)B_2} \delta_{kl} M_{2,n}(\mathbf{x}) - \frac{\lambda_0^2}{(\lambda + 2\mu)B_2} \mu M_{1,kl n}(\mathbf{x}) \\
&\quad + \frac{a_0 \lambda_0^2}{B_2^2} \lambda \delta_{kl} M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_3) + \frac{2a_0 \lambda_0^2}{B_2^2} \mu M_{3,kl n}(\mathbf{x}, h_3) \\
&\quad - \frac{2a_0 \lambda_0^2}{B_2^2} \mu M_{2,kl n}(\mathbf{x}) + \frac{\lambda_0^2}{B_2} \delta_{kl} M_{3,n}(\mathbf{x}, h_3),
\end{aligned} \tag{6.60}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_{nkl}(\mathbf{x}) &= I_{nkl}^P(\mathbf{x}) + I_{nkl}^E(\mathbf{x}), \\
J_{nkl}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2\mu} \left[\gamma e_{nkm} M_{2,lm}(\mathbf{x}) + \beta e_{nlm} M_{2,km}(\mathbf{x}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\mu} \left[\gamma e_{nkm} M_{3,lm}(\mathbf{x}, h_1) + \beta e_{nlm} M_{3,km}(\mathbf{x}, h_1) \right], \\
K_n(\mathbf{x}) &= -2 \frac{\lambda_0 \lambda_1}{B_2} M_{2,n}(\mathbf{x}) + \frac{a_0 \lambda_0 (2\lambda_0^2 - (\lambda + 2\mu)\lambda_1)}{B_2^2} M_{3,kkn}(\mathbf{x}, h_3) \\
&\quad + \frac{\lambda_1 \lambda_0}{B_2} M_{3,n}(\mathbf{x}, h_3), \\
\hat{I}_{nkl}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\mu} \left[\kappa e_{lkm} M_{2,mn}(\mathbf{x}) - (2\mu + \kappa) e_{nlm} M_{2,km}(\mathbf{x}) - (2\mu - \kappa) e_{nkm} M_{2,lm}(\mathbf{x}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4\mu} \left[(2\mu + \kappa) e_{lkm} M_{3,mn}(\mathbf{x}, h_1) - (2\mu + \kappa) e_{nlm} M_{3,km}(\mathbf{x}, h_1) \right. \\
&\quad \quad \left. - (2\mu - \kappa) e_{nkm} M_{3,lm}(\mathbf{x}, h_1) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} e_{lkm} M_{3,mn}(\mathbf{x}, h_2) + \frac{2\mu + \kappa}{4\mu h_1^2} e_{lkn} M_3(\mathbf{x}, h_1), \tag{6.61} \\
\hat{J}_{nkl}(\mathbf{x}) &= -\frac{\gamma + \beta}{4\mu} M_{2,kln}(\mathbf{x}) + \frac{2\mu + \kappa}{4\mu \kappa} \left[\alpha \delta_{kl} M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_1) + (\gamma + \beta) M_{3,kln}(\mathbf{x}, h_1) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2\kappa} \left[\alpha \delta_{kl} M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_2) + (\gamma + \beta) M_{3,kln}(\mathbf{x}, h_2) \right] \\
&\quad - \frac{2\mu + \kappa}{4\mu \kappa h_1^2} \left[\alpha \delta_{kl} M_{3,n}(\mathbf{x}, h_1) + \gamma \delta_{kn} M_{3,l}(\mathbf{x}, h_1) + \beta \delta_{ln} M_{3,k}(\mathbf{x}, h_1) \right], \\
\hat{I}_{kl}(\mathbf{x}) &= \frac{2\lambda_0 (\lambda + \mu)}{B_2} \delta_{kl} + \frac{\lambda_0 \mu}{B_2} \frac{M_{1,kl}(\mathbf{x})}{M_{1,n}(\mathbf{x})} + \frac{2\lambda_0 (\lambda + 2\mu) a_0 \mu}{B_2^2} \frac{M_{2,kl}(\mathbf{x})}{M_{1,n}(\mathbf{x})} \\
&\quad - \frac{\lambda \lambda_0 (\lambda + 2\mu) a_0}{B_2^2} \delta_{kl} \frac{M_{3,mmn}(\mathbf{x}, h_3)}{M_{1,n}(\mathbf{x})} - \frac{2\lambda_0 (\lambda + 2\mu) a_0 \mu}{B_2^2} \frac{M_{3,kl}(\mathbf{x}, h_3)}{M_{1,n}(\mathbf{x})} \\
&\quad - \frac{\lambda_0 (\lambda + 2\mu)}{B_2} \delta_{kl} \frac{M_{3,n}(\mathbf{x}, h_3)}{M_{1,n}(\mathbf{x})}, \\
\hat{K}(\mathbf{x}) &= \frac{\lambda_0^2 + (\lambda + 2\mu)\lambda_1}{B_2} - \frac{(\lambda + 2\mu) a_0 [2\lambda_0^2 - (\lambda + 2\mu)\lambda_1]}{B_2^2} \frac{M_{3,kkn}(\mathbf{x}, h_3)}{M_{1,n}(\mathbf{x})} \\
&\quad - \frac{(\lambda + 2\mu)\lambda_1}{B_2} \frac{M_{3,n}(\mathbf{x}, h_3)}{M_{1,n}(\mathbf{x})},
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $M_1(\mathbf{x})$, $M_2(\mathbf{x})$ ve $M_3(\mathbf{x}, k)$ potansiyelleri (4.63) ifadeleri ile verilir.

6.3 Eshelby Tansörleri

Yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogenleşme için elde edilen (6.58) çözümleri mikrogermeli ortamın (3.16) genleme büyüklüklerinde kullanılırsa, katkı maddelerinin varlığı nedeniyle oluşan genleme ve mikrogenleşme terimleri

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) &= K_{klmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}^* + L_{klmn}(\mathbf{x}) \gamma_{mn}^* + M_{kl}(\mathbf{x}) \theta^*, \\ \gamma_{kl}(\mathbf{x}) &= \hat{K}_{klmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}^* + \hat{L}_{klmn}(\mathbf{x}) \gamma_{mn}^*, \\ \theta(\mathbf{x}) &= \hat{K}_{kl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}^* + \hat{M}(\mathbf{x}) \theta^*\end{aligned}\quad (6.62)$$

şeklinde elde edilirler. Burada $K_{klmn}(\mathbf{x})$, $L_{klmn}(\mathbf{x})$, $M_{kl}(\mathbf{x})$, $\hat{K}_{klmn}(\mathbf{x})$, $\hat{L}_{klmn}(\mathbf{x})$, $\hat{K}_{kl}(\mathbf{x})$ ve $\hat{M}(\mathbf{x})$ mikrogenleşen ortamın Eshelby tansörleridirler ve

$$\begin{aligned}K_{klmn}(\mathbf{x}) &= I_{lmn,k}^C(\mathbf{x}) + I_{lmn,k}(\mathbf{x}) - e_{klp} \hat{I}_{pmn}(\mathbf{x}), \\ L_{klmn}(\mathbf{x}) &= J_{lmn,k}(\mathbf{x}) - e_{klp} \hat{J}_{pmn}(\mathbf{x}), \\ M_{kl}(\mathbf{x}) &= K_{l,k}(\mathbf{x}), \\ \hat{K}_{klmn}(\mathbf{x}) &= \hat{I}_{kmn,l}(\mathbf{x}), \\ \hat{L}_{klmn}(\mathbf{x}) &= \hat{J}_{kmn,l}(\mathbf{x}), \\ \hat{K}_{kl}(\mathbf{x}) &= \hat{I}_{kl}(\mathbf{x}), \\ \hat{M}(\mathbf{x}) &= \hat{K}(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (6.63)$$

ifadeleri ile verilirler.

Mikrogermeli ortam için, (6.62) ifadelerinden görüldüğü gibi yedi Eshelby tansörü elde edilmektedir ve yine beklendiği gibi karşılıklı olarak mikrodönme ifadesine mikrogenleşme büyüklüğünden, mikrogenleşme ifadesine de mikrodönmeden kaynaklanan bir katkı gelmemektedir. Ayrıca, mikrogermeli ortam için elde edilen (6.62)-(6.63) Eshelby tansörü ifadelerinin mikrogenleşmeye ait büyüklüklerin sıfır alınması durumunda, mikropolar ortam için elde edilen (4.64)-(4.65) Eshelby tansörlerine ve tersine, mikrodönmeye ait büyüklüklerin sıfır alınması durumunda, mikrogenleşen ortam için elde edilen (5.50)-(5.51) Eshelby tansörlerine ve hem mikrodönme hem de mikrogenleşme büyüklüklerinin sıfır alınması durumunda da

doğal olarak klasik Eshelby tansörlerine indirgendiği açık olarak görölmektedir. Ek olarak yine, mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorileri için elde edilen Eshelby tansörlerine benzer şekilde, mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri de küresel katkı maddeleri içinde homojen değildir.

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Giriş bölümünde açıklandığı gibi, bu çalışmada hasar, malzemedeki atomik bağların mikro ölçekte koparak oluşturduğu kusurların zamanla gelişmesi, birleşmesi ve makro ölçekte etkili bir hale gelmesi şeklinde tanımlanmıştır.

Hasarlı malzemenin ve hasar oluşumunun bu tanımı ile sürekli ortamlar mekaniğinin klasik yaklaşımının başarılı olamayacağı açıktır. Bu gerekçeyle, mikro yapıdaki farklılaşmaları modele katan bir teori kullanmak amacı ile, mikromorfik teorisinin kullanılması düşünülmüş ve Eringen ve Şuhubi [17-18] tarafından geliştirilen bu teori hasarlı malzemelere uygulanmıştır. Ancak, lineer izotrop halde bile çok sayıda malzeme sabiti içeren ve gerek bilinmeyen bu büyüklükler ve gerekse de ek bünye denklemlerinin ortaya çıkması teorisinin uygulanmasında büyük güçlükler çıkarmış ve hasar tanımını bozmayacak basitleştirici yaklaşımlarla alt teorilere gitmek kaçınılmaz olmuştur. Bu durumda ilk akla gelen yaklaşım, başta sıvı kristaller olmak üzere pek çok alanda iyi sonuç veren ve malzeme parçacıklarının klasik şekil değiştirmeye ek ve ondan bağımsız olarak sadece mikrodönme yapabildiği varsayılan mikropolar teori olmakla beraber, bu teori hasarlı malzemenin modellenmesi için uygun değildir. Hasar tanımında kullanılan mikro boşlukların mikro dönmeden daha çok hacimsel mikro genişleme yaparak gelişmesi hasarın doğasına çok daha yakın olduğu için hasarın mikrogenleşen ortam teorisi ile tanımlanması çok daha akla yatkın gelmektedir.

Bu tez çalışması kapsamında hasarlı malzeme, ilk olarak mikrogenleşen ortam teorisi ile modellenerek, mikrogenleşen ortam için yerdeğiştirme vektörü ve mikrogenleşme skaleri için temel çözümler ve Cheng ve He tarafından mikropolar ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine benzer şekilde mikrogenleşen ortam için Eshelby tansörleri elde edilmiştir [20]. Cheng ve He [74] tarafından mikropolar ortam için dört adet dört boyutlu Eshelby tansörü elde edilirken, mikrogenleşen ortam için beklentilere uygun olarak biri dört, ikisi iki boyutlu ve biri de skaler olmak üzere toplam dört Eshelby tansörü elde edilmektedir ve yine mikropolar ortama benzer

şekilde bu tansörler de küresel katkı maddelerinin içinde homojen değillerdir. Ayrıca, elde edilen bu tansörlerin mikrogenleşen ortam sabitlerinin sıfır alınması durumunda klasik Eshelby tansörlerine indirgenmediği de gösterilmiştir [20].

Malzemede hasar gelişiminde mikro boşlukların dönmesinden çok hacimsel mikro genleşmenin etkili olacağına değinilerek mikrogenleşen ortam teorisi yaklaşımının uygunluğundan yukarıda söz edilmişti. Ancak, hasarlı malzemelerde kusurların toplam hacme oranı, özellikle başlangıç aşamasında yani hasarın henüz mikro boyutlarda olduğu durumda, oldukça küçüktür. Dolayısıyla mikrogenleşen ortam olarak modelleme yaklaşımında da malzemedeki hasar ile birlikte hasar dışındaki parçacıkların da yalnız mikrogenleşme yapabileceği kısıtı ortaya çıkmaktadır. Bu kısıt, hasarlı malzemenin mikrogenleşen ortam olarak modellenmesinde de eksiklikler olduğunu göstermektedir. Bu eksikliği ortadan kaldırmanın belki de en ideal yolu hasarlı malzemeyi modellemek için malzemenin heterojen yapısını göz önüne alan mikromorfik teoriyi kullanmaktır. Ancak mikromorfik teorinin de izotrop durumda bile çok sayıda malzeme sabiti içermesi ve ek bünye denklemlerine olan gereksinim nedeniyle hesaplama güçlükleri ortaya çıkmaktadır. Bu durumda, hasarlı malzemeyi mikrodönme ve mikrogenleşen ortam teorilerinin birleşimi olan mikrogermeli ortam teorisi ile modellemek en uygun çözüm gibi görünmektedir. Bu teori ideal bir yaklaşım olan mikromorfik modele göre eksik kalsa da, yalnız mikropolar veya yalnız mikrogenleşen ortam modeline göre hasarı daha iyi bir biçimde yansıtacaktır.

Mikrogermeli ortam bilindiği gibi parçacıkların klasik şekil değiştirmeden bağımsız olarak hem mikrodönme, hem de hacimsel mikrogenleşme yapabildiği fikrine dayanmaktadır [25] ve hasarı gerçeğe çok yakın bir şekilde temsil edebileceği düşünülebilir [77]. Bu çalışmada mikrogermeli ortam için statik durumda yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogenleşme için temel çözümler verilmiştir. Bu temel çözümlerin tanımladığı Green fonksiyonları kullanılarak, küresel katkı maddesi içeren ve mikrogerme teorisi ile modellenen bir ortam için elastik alanlar elde edilmiştir. Bu elastik alanlar genleme ifadelerinde kullanılarak mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorilerine benzer şekilde mikrogermeli ortam teorisi için Eshelby tansörleri verilmiştir.

Mikrogermeli ortam için dördü dört, ikisi iki boyutlu ve biri skaler olmak üzere toplam yedi Eshelby tansörü elde edilmiştir. Ayrıca, bekleneceği gibi, mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinin mikrogenleşen ortam sabitlerinin sıfır alınması durumunda mikropolar ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine, mikropolar ortam sabitlerinin sıfır alınması durumunda da mikrogenleşen ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine indirgendikleri gösterilmiştir. Mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri, mikropolar ve mikrogenleşen ortamları tanımlayan tüm mikro sabitlerin sıfır alınması durumunda ise yine klasik Eshelby tansörlerine indirgenmektedir. Mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri de, mikropolar ve mikrogenleşen ortamlardaki gibi, küresel katkı maddeleri içinde bile homojen değillerdir.

Mikrogermeli ortam teorisi için elde edilen sonuçlar, beklendiği gibi, makro şekil değiştirmeden kaynaklanan ekgenleme ile ilgili Eshelby tansörlerinde, hem mikrodönme hem de mikrogenleşme ile ilgili alan büyüklüklerinin katkısı olduğunu, ancak mikrodönmeden kaynaklanan mikroekgenleme ile ilgili Eshelby tansörlerine mikrogenleşme ile ilgili büyüklüklerden ve mikrogenleşmeden kaynaklanan mikroekgenleme ile ilgili Eshelby tansörlerine ise mikrodönme ile ilgili alan büyüklüklerinden hiçbir katkı gelmediğini göstermektedir.

Giriş bölümünde değinildiği gibi, başlangıçta bu çalışmanın amacı mikromorfik teori ile modellenen hasarlı malzemelerde ortaya çıkan malzeme sabitlerinin bulunması idi. Dolayısıyla klasik teoride olduğu gibi, gerek Cheng ve He tarafından mikropolar ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinde [74], gerekse Kırış ve İnan tarafından mikrogenleşen [20] ve mikrogermeli [77] ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinde temel amaç homojenleştirme yöntemlerinin bu teoriler için de kullanılmasına olanak sağlayarak hasarlı malzemenin klasik ve mikro elastik sabitlerinin belirlenebilmesine olanak sağlamadır. Ancak, elde edilen sonuçlar yalnız hasarlı malzemeye özgü olmayıp geneldir ve parçacıklı kompozitler gibi mikro elastik teorilerle modellenmesi uygun olan tüm malzemeler için homojenleştirme işlemlerinde kullanılabilir. Ancak, bunun için yalnız Eshelby tansörlerinin elde edilmesi yeterli olmamakta ve klasik çerçevede ikinci bölümde anlatılan Mori-Tanaka teorisi [52] gibi homojenleştirme yöntemlerinin, ele alınan mikro elastik teorilere genelleştirilmesi gerekmektedir. Bu amacın önündeki en büyük güçlük, klasik durumda Eshelby tansörlerinin hemen bir çok farklı şekli ifade etmek için

yeterli olan elipsoidal katkı maddeleri içinde homojen olmalarına ve böylelikle homojenleştirme işleminin analitik olarak ifade edilebilmesine rağmen, mikropolar, mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam teorilerinde elde edilen Eshelby tansörlerin küresel katkı maddeleri içinde bile homojen olmamalarıdır. Bu durum bahsedilen mikro teoriler için homojenleştirme işleminin analitik olarak yapılmasını engellemekte ve ancak sayısal integrasyon ve ortalama alma işlemleri ile sonuca ulaşılabilmektedir. Benzer amaçlı bir çalışma Mori-Tanaka [52] teorisi mikropolar ortama genişletilerek, Sharma ve Dasgupta tarafından [21] gerçekleştirilmiştir. Ancak, her üç teori için de homojenleştirme problemi hala tam olarak çözülebilmemiş değildir ve gelecek çalışmalar beklenmektedir. Gelecekte yapılacak çalışmalarda mikropolar, mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinin kullanılarak homojenleştirme probleminin bu mikro teorilere genişletilmesi ve böylece bu teorilerle modellenen malzemelerin etkin modüllerinin bulunabileceği beklenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Janson, J. and Hult, J.**, 1977. Fracture mechanics and damage mechanics -a combined approach, *Journal de Mécanique Appliquée*, **1**, 69-84.
- [2] **Kachanov, L.M.**, 1958. On the creep rupture time, *Izv. An SSSR Otd. Tekhn. Nauk*, **8**, 26-31.
- [3] **Rabotnov, Y.N.**, 1963. On the equations of state for creep, in *Progress in Applied Mechanics*, Prager Anniversary Volume, pp. 307-315, MacMillan, New York.
- [4] **Cowin, S.C. and Nunziato, J.W.**, 1983. Linear elastic materials with voids, *Journal of Elasticity*, **13**, 125-147.
- [5] **Nunziato, J.W. and Cowin, S.C.**, 1979. A nonlinear theory of elastic materials with voids, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **72**, 175-201.
- [6] **Leckie, F.A. and Hayhurst, D.R.**, 1974. Creep rupture of structures, *Proceedings of the Royal Society of London*, **A340**, 323-347.
- [7] **Bazant, Z.P. and Pijaudier-Cabot, G.**, 1988. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence, *Journal of Applied Mechanics*, **55**, 287-293.
- [8] **Budiansky, B. and O'Connell, R.J.**, 1976. Elastic moduli of a cracked solid, *International Journal of Solids Structures*, **12**, 81-87.
- [9] **Lemaitre, J.**, 1990. Micromechanics of crack initiation, *International Journal of Fracture*, **42**, 87-99.
- [10] **Passman, S.L.**, 1984. Stress, relaxation, creep, failure and hysteresis in a linear elastic material with voids, *Journal of Elasticity*, **14**, 201-212.
- [11] **Krajcinovic, D.**, 1996. *Damage Mechanics*, Elsevier, The Netherlands.
- [12] **Kachanov, L.M.**, 1986. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, Martinus-Nijhoff Publishers, The Netherlands.

- [13] **Vakulenko, A.A. and Kachanov, M.L.**, 1971. Continuum theory of cracked media, *Izv. An SSSR Mekhanika Tverdogo Tela*, **4**, 159-166.
- [14] **Murakami, S. and Ohno, N.**, 1981. A continuum theory of creep and creep damage, *3rd IUTAM Symposium on Creep in Structures*, Leicester, England, 8-12 September, pp. 422-444, Eds. Ponter, A.R.S. and Hayhurst, D.R., Springer-Verlag, Berlin.
- [15] **Cordebois, J.P. and Sidoroff, F.**, 1982. Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, **25**, 45-60.
- [16] **Markov, K.Z.**, 1989. Micromorphic models for damaged solids. in *Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids*, pp. 665-677, Ed. Boehler, J.P., Mechanical Engineering Publications, London.
- [17] **Eringen, A.C. and Şuhubi, E.S.**, 1964. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids-I, *International Journal of Engineering Science*, **2**, 189-203.
- [18] **Şuhubi, E.S. and Eringen, A.C.**, 1964. Nonlinear theory of micro-elastic solids-II, *International Journal of Engineering Science*, **2**, 389-404.
- [19] **Mindlin, R.D.**, 1964. Microstructure in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 51-78.
- [20] **Kırış, A. and İnan, E.**, 2005. Eshelby tensors for a spherical inclusion in microelongated elastic fields, *International Journal of Engineering Science*, **43**, 49-58.
- [21] **Sharma, P. and Dasgupta, A.**, 2002. Average elastic fields and scale-dependent overall properties of heterogeneous micropolar materials containing spherical and cylindrical inhomogeneties, *Physical Review*, **B66**, 224110.1-10.
- [22] **Eringen, A.C.**, 1966. Linear theory of micropolar elasticity, *Journal of Mathematics and Mechanics*, **15**, 909-923.

- [23] **Eringen, A.C.**, 1967. Theory of micropolar continua, *Proceedings of the 9th Midwestern Mechanics Conference*, University of Wisconsin, Madison, August 1965, *Developments in Mechanics, Solid Mechanics and Materials*, **III/I**, pp. 23-40, Eds. Huang, T.C., Johnson, J.M.W., Wiley, New York.
- [24] **Kafadar, C.B. and Eringen, A.C.**, 1971. Micropolar media-I: The classical theory, *International Journal of Engineering Science*, **9**, 271-305.
- [25] **Eringen, A.C.**, 1990. Theory of thermo-microstretch elastic solids, *International Journal of Engineering Science*, **28**, 1291-1301.
- [26] **Koh, S.L.**, 1970. A special theory of microelasticity, *International Journal of Engineering Science*, **8**, 583-593.
- [27] **İnan, E.**, 1996. The nonlocal micromorphic models of damaged material, *Proceedings of the 8th International Symposium on Continuum Models and Discrete Systems, CMDS8*, Varna, Bulgaria, 11-16 June 1995, pp. 625-632, Ed. Markov, K.Z., World Scientific, Singapore.
- [28] **Benveniste, Y.**, 1987. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, *Mechanics of Materials*, **6**, 147-157.
- [29] **Voigt, W.**, 1910. *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, Leipzig.
- [30] **Reuss, A.**, 1929. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik ZAMM*, **9**, 49-58.
- [31] **Taylor, G.I.**, 1934. The mechanism of plastic deformation of crystals, Part-I Theoretical, *Proceedings of the Royal Society of London*, **A145**, 362-387.
- [32] **Kröner, E.**, 1953. Das fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen, *Zeitschrift für Physik*, **A136**, 402-410.
- [33] **Hashin, Z.**, 1959. The moduli of an elastic solid, containing spherical particles of another elastic material, *Proceedings of the IUTAM Symposium on Non-homogeneity in Nonhomogeneity in Elasticity and Plasticity*, **17**, Warsaw, Poland, 1958, pp. 463-478, Ed. Olszak W., Pergamon Press, Oxford.

- [34] Hashin, Z. and Shtrikman, S., 1962. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **10**, 335-342.
- [35] Hashin, Z. and Shtrikman, S., 1963. A variational approach to theory of the elastic behavior of multiphase materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **11**, 127-140.
- [36] Hill, R., 1963. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **11**, 357-372.
- [37] Hashin, Z., 1964. Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media, *Applied Mechanics Reviews*, **17**, 1-9.
- [38] Walpole, L.J., 1966. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems-I, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **14**, 151-162.
- [39] Walpole, L.J., 1966. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems-II, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **14**, 289-301.
- [40] Bruggeman, D.A.G., 1935. Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen Substanzen I- Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen, *Annalen der Physik*, **416**, 636-664.
- [41] McLaughlin, R., 1977. A study of the differential scheme for composite materials, *International Journal of Engineering Science*, **15**, 237-244.
- [42] Norris, A.N., 1985. A differential scheme for the effective moduli of composites, *Mechanics of Materials*, **4**, 1-16.
- [43] Hashin, Z., 1988. The differential scheme and its application to cracked materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **36**, 719-734.
- [44] Giordano, S., 2003. Differential schemes for the elastic characterization of dispersions of randomly oriented ellipsoids, *European Journal of Mechanics*, **A22**, 885-902.

- [45] **Budiansky, B.**, 1965. On the elastic moduli of some heterogeneous materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **13**, 223-227.
- [46] **Hill, R.**, 1965. A self-consistent mechanics of composite materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **13**, 213-222.
- [47] **Hashin, Z.**, 1968. Assessment of the self-consistent scheme approximation: Conductivity of particulate composites, *Journal of Composite Materials*, **2**, 284-300.
- [48] **Willis, J.R.**, 1977. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **25**, 185-202.
- [49] **Christensen, R.M.**, 1979. *Mechanics of Composite Materials*, Wiley, New York.
- [50] **Christensen, R.M. and Lo, K.H.**, 1979. Solution for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **27**, 315-330, Erratum, **34**, 639.
- [51] **Huang, Y., Hu, K.X. and Chandra, A.**, 1994. A generalized self-consistent mechanics method for microcracked solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **42**, 1273-1291.
- [52] **Mori, T. and Tanaka, K.**, 1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica*, **21**, 571-574.
- [53] **Zhao, Y.H., Tandon, G.P. and Weng, G.J.**, 1989. Elastic moduli for a class of porous material, *Acta Mechanica*, **76**, 105-131.
- [54] **Weng, G.J.**, 1984. Some elastic properties of reinforced solids, with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions, *International Journal of Engineering Science*, **22**, 845-856.
- [55] **Benveniste, Y.**, 1986. On the Mori-Tanaka's method in cracked bodies, *Mechanics Research Communications*, **13**, 193-201.
- [56] **Weng, G.J.**, 1990. The theoretical connection between Mori-Tanaka's theory and the Hashin-Shtrikman-Walpole bounds, *International Journal of Engineering Science*, **28**, 1111-1120.

- [57] Qiu, Y.P. and Weng, G.J., 1990. On the application of Mori-Tanaka's theory involving transversely isotropic spherical inclusions, *International Journal of Engineering Science*, **28**, 1121-1137.
- [58] Dvorak, G.J. and Srinivas, M.V., 1999. New estimates of overall properties of heterogeneous solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **47**, 899-920.
- [59] Hori, M. and Nemat-Nasser, S., 1994. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites, *Journal of Engineering Materials and Technology ASME*, **116**, 305-309.
- [60] Hori, H. and Nemat-Nasser, S., 1983. Overall Moduli of Solids with microcracks: Load induced anisotropy, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **31**, 155-171.
- [61] Nemat-Nasser, S., 2000. Multi-inclusion method for finite deformations: exact results and applications, *Materials Science and Engineering*, **A285**, 239-245.
- [62] Hu, G.K. and Weng, G.J., 2000. The connections between the double inclusion model and the Ponte Castaneda-Willis, Mori-Tanaka and Kuster-Toksoz models, *Mechanics of Materials*, **32**, 495-503.
- [63] Nemat-Nasser, S., Su Y., Guo, W.G. and Isaacs J., 2005. Experimental characterization and micromechanical modeling of superelastic response of a porous NiTi shape-memory alloy, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **53**, 2320-2346.
- [64] Aboutajeddine, A. and Neale, K.W., 2005. The double-inclusion model: a new formulation and new estimates, *Mechanics of Materials*, **37**, 331-341.
- [65] İnan, E., 1998. Thermo-microstretch model of damage mechanics, *Proceedings of the 9th International Symposium on Continuum Models and Discrete Systems, CMDS9*, İstanbul, Turkey, June 29-July 3, pp. 719-726, Eds. İnan, E. and Markov, K.Z., World Scientific, Singapore.
- [66] İnan, E., 1999. Mikromorfik modeller hasar tanımı ve homojenleştirme problemi, *11. Ulusal Mekanik Kongresi TUMTMK (affiliated IUTAM)*, Bolu, Türkiye, 6-10 Eylül, s.389-396, Eds. Gülçat, Ü. ve Aköz, Y., İTÜ İnşaat Fakültesi, İstanbul.

- [67] Eshelby, J.D., 1957. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, *Proceedings of the Royal Society of London*, **A241**, 376-396.
- [68] Eshelby, J.D., 1959. The Elastic Field outside an Ellipsoidal Inclusion, *Proceedings of the Royal Society of London*, **A252**, 561-569.
- [69] Eshelby, J.D., 1961. Elastic inclusions and inhomogeneities, in *Chapter3, Progress in Solid Mechanics*, **II**, pp. 89-140, Eds. Sneddon, I.N., Hill, R., North-Holland, Amsterdam.
- [70] Mura, T., 1982. *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publishers, The Netherlands.
- [71] Nemat-Nasser, S. and Hori, M., 1999. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Elsevier, The Netherlands.
- [72] Hsieh, R.K.T., Vörös, G. and Kovács, I., 1980. Stationary lattice-defects as sources of elastic singularities in micro-polar media, *Physica*, **B&C101**, 201-208.
- [73] Hsieh, R.K.T., 1982. Volume defects in nonlocal micropolar elasticity, *International Journal of Engineering Science*, **20**, 261-270.
- [74] Cheng, Z.Q. and He, L.H., 1995. Micropolar elastic fields due to a spherical inclusion, *International Journal of Engineering Science*, **33**, 389-397.
- [75] Cheng, Z.Q. and He, L.H., 1997. Micropolar elastic fields due to a circular cylindrical inclusion, *International Journal of Engineering Science*, **35**, 659-668.
- [76] Ciarletta, M., Iovane G. and Sumbatyan, M.A., 2003. On stress analysis for cracks in elastic materials with voids, *International Journal of Engineering Science*, **41**, 2447-2461.
- [77] Kırış, A. and İnan, E., 2006. Eshelby tensors for a spherical inclusion in microstretch elastic fields, *International Journal of Solids and Structures*, **43**, 4720-4738.
- [78] Liu, X. and Hu, G.K., 2004. Inclusion problem of microstretch continuum, *International Journal of Engineering Science*, **42**, 849-860.

- [79] **Lamé, M.G.**, 1866. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Gauthier-Villars, Paris.
- [80] **Green, A.E. and Zerna, W.**, 1954. Theoretical Elasticity, Oxford University Press, Oxford.
- [81] **Kronecker, L.**, 1845. De unitatibus complexis, PhD Thesis, Universität Berlin, Berlin.
- [82] **Sokolnikoff, I.S.**, 1956. Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York.
- [83] **Robinson, K.**, 1951. Elastic energy of an ellipsoidal inclusion in an infinite solid, *Journal of Applied Physics*, **22**, 1045-1054.
- [84] **Hooke, R.**, 1678. Of spring explaining the power of springing bodies, in *Lectures de Potentia Restitutiva*, London.
- [85] **Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.**, 1951. Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York.
- [86] **Love, A.E.H.**, 1927. Theory of Elasticity, Cambridge University Press, Cambridge.
- [87] **Poisson, S.M.**, 1811. Traité de Mécanique (First Ed.1811, Second Ed. 1833), Tome Premier, Paris.
- [88] **Laplace, P.S.**, 1799. Traité de Mécanique Céleste, Tome Premier, Paris.
- [89] **Sokolnikoff, I.S.**, 1964. Tensor Analysis, Wiley, New York.
- [90] **Poincaré, H.**, 1899. Théorie du Potentiel Newtonien, Carré et Noud, Paris.
- [91] **Gauss, J.F.C.**, 1863-1871. Gauss's collected works-5. Mathematical Physics, Ed. Schering, E.J., Royal Society of Göttingen, Göttingen.
- [92] **Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M.**, 2000. Tables of Integrals, Series, and Products (6th Edition), Academic Press, San Diego.
- [93] **Routh, E.J.**, 1895. Theorems on the attraction of ellipsoids for certain laws of force other than the inverse square, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A186**, 897-950, *Proceedings of the Royal Society of London*, **58**, 215-217.

- [94] **Eringen, A.C.**, 1999. *Microcontinuum Field Theories: Foundations and Solids*, Springer Verlag, New York.
- [95] **Sandru, N.**, 1966. On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity, *International Journal of Engineering Science*, **4**, 81-94.
- [96] **Galerkin, B.**, 1930. Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimension, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **190**, 1047-1048.
- [97] **Dirac, P.A.M.**, 1930. *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, Oxford.
- [98] **Helmholtz, H.L.F.**, 1852. Ueber die natur der menschlichen sinnesempfindungen, *Königsberger Naturwissenschaftliche Untersuchungen*, **3**, 1-20.
- [99] **Arfken, G.B. and Weber, H.J.**, 1995. *Mathematical Methods for Physicists* (4th Edition), Academic Press, San Diego.
- [100] **Green, G.**, 1828. *An Essay on the Application Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, University of Nottingham, Nottingham.
- [101] **Stakgold, I.**, 1967. *Boundary Value Problems of Mathematical Physics-I*, Macmillan, New York.
- [102] **Roach, G.F.**, 1982. *Green's functions* (2nd Edition), Cambridge University Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Kastamonu' da doğan Ahmet Kırış ilk ve orta öğrenimini Kastamonu ve Aydın'da tamamladı. 1996'da İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümünde lisans eğitimini, 1999 yılında aynı üniversitenin Fen-Bilimleri Enstitüsü Mühendislik Bilimleri Anabilimdalı Mekanik Programında Yüksek Lisans eğitimini tamamlayarak aynı programda doktora eğitimine başlamıştır. Halen Fen-Edebiyat Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.