

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

POLİGAMMA FONKSİYONLARI İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Yusuf KELEŞ
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Necdet BATIR

VAN - 2008

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

POLİGAMMA FONKSİYONLARI İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Yusuf KELEŞ

VAN - 2008

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Necdet BATIR danışmanlığında, Yusuf KELEŞ tarafından hazırlanan “*Poligamma Fonksiyonları İle İlgili Eşitsizlikler*” isimli bu çalışma 04 / 02 / 2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

İmza:

Üye : Doç. Dr. Ali İhsan DEMİREL

İmza:

Üye : Yrd. Doç.Dr. Necdet BATIR

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’ nun/...../..... gün ve.....
.....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

POLİGAMMA FONKSİYONLARI İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

KELEŞ, Yusuf

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necdet BATIR

Ocak 2008, 49 sayfa

Bilindiği üzere klasik gamma fonksiyonu $\text{Re}(x) > 0$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

integrali ile tanımlanır. Gamma fonksiyonunun logaritmik türevine digamma fonksiyonu denir ve ψ ile gösterilir. Bir başka ifade ile

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

dır. Literatürde digamma fonksiyonunun türevlerine poligamma fonksiyonları denir.

Bu çalışmada; digamma ve poligamma fonksiyonları ile bazı temel özellikleri verip bu fonksiyonlarla ilgili son yıllarda elde edilen bazı önemli eşitsizlikleri bir araya getirmeye çalıştık.

Anahtar kelimeler: Digamma fonksiyonu, Poligamma fonksiyonu, Gamma fonksiyonu, Eşitsizlikler.

ABSTRACT

POLYGAMMA FUNCTION INEQUALITIES

KELEŞ, Yusuf

Msc, Mathematics Science

Supervisor: Assist. Prof. Necdet BATIR

January 2008, 49 pages

As it is well known the classical gamma function Γ is defined by the integral for $\operatorname{Re}(x) > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt .$$

The logarithmic derivative of the gamma function is called the digamma function. In other words the digamma function is defined by

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} .$$

The derivatives of the digamma function are called polygamma function in the literature. In this thesis, after presenting some fundamental properties of these function, we collected some important inequalities for these function discovered in the last years.

Key words : Digamma function, Polygamma function, Gamma function, Inequalities.

ÖN SÖZ

Bu çalışmada; özel bir fonksiyon olan gamma fonksiyonu, bu fonksiyonun logaritmik türevi olan digamma fonksiyonu ve digamma fonksiyonunun ardışık türevleri olan poligamma fonksiyonları ile ilgili eşitsizlikler ve bazı özellikler ele alınmaktadır. Son yıllarda bu fonksiyonlarla ilgili yapılan yoğun çalışmalar bu fonksiyonların önemine dikkat çekmektedir.

Bu çalışmanın başlangıcında belirtilen fonksiyonlarla ilgili bazı temel tanım ve teoremler sırasıyla verilmiştir. Son bölümde ise fonksiyonlar arasındaki birtakım eşitsizlikler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Necdet BATIR'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Yusuf KELEŞ

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. ÖN BİLGİLER	3
3. POLİGAMMA FONKSİYONU EŞİTSİZLİKLERİ	10
KAYNAKLAR	43
ÖZ GEÇMİŞ	44

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

$$\operatorname{Re}(x) > 0 \text{ için } \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \text{ integrali ile tanımlanan gamma}$$

fonksiyonu ilk defa 1729 yılında İsveç'li ünlü matematikçi Leonarol Euler (1707-1783) tarafından tanımlanmıştır. Euler'in bu fonksiyonu tanımlamaktaki amacı $n!$ sayısını her reel sayı için tanımlı hale getirmek olmuştur. Gerçekten n bir pozitif tamsayı ise $\Gamma(n+1) = n!$ dir. Γ 'nın tanımından her $x > 0$ için $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ fonksiyonel denkleminin sağlandığı kolayca görülür. Bu denklem yardımıyla Γ fonksiyonu tüm kompleks düzlemde tanımlanabilir. Gamma fonksiyonunun önemi anlaşıldıktan sonra aralarında Marie Legendre (1752–1833), Carl Fredrich Gauss (1777–1855), Christoph Gudermann (1798–1852), Joseph Liouville (1809–1882), Karl Weierstrass (1815–1897) ve Charles Hermite (1882–1901) gibi pek çok seçkin matematikçinin de aralarında bulunduğu birçok matematikçi bu fonksiyon üzerine çalışmışlardır.

Gamma fonksiyonu ve

$$\zeta(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^n}$$

şeklinde tanımlanan riemann zeta fonksiyonunu içeren

$$\zeta(z) = \zeta(1-z) \Gamma(1-z) 2^z \pi^{z-1} \sin \frac{1}{2} \pi z$$

fonksiyonel denklemi analitik sayılar teorisinin en önemli konularından birini teşkil eder. Gamma fonksiyonunun tarihi ve temel özellikleri hakkında detaylı incelemeler yapılmıştır[Srinivaran, 2007].

Gamma fonksiyonunun istatistikte, fizikte ve analitik sayılar teorisinde önemli birtakım uygulamaları vardır.

Gamma fonksiyonunun logaritmik türevi ψ ile gösterilir ve digamma fonksiyonu olarak tanımlanır. Yani $\operatorname{Re}(z) > 0$ olmak üzere

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

şeklinde ifade edilir. Digamma fonksiyonunun harmonik sayılarla yakın bir ilişkisi vardır. Örneğin n bir pozitif tamsayı ise $\psi(n+1) = -\gamma + H_n$ dir.

Burada $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ve $\gamma = \lim (H_n - \log n) = 0.57721...$ şeklinde tanımlanan

Euler sabitidir.

Digamma fonksiyonunun $\psi', \psi'', \psi''', \dots$ şeklindeki türevleri poligamma fonksiyonları olarak bilinirler. Biz bu tezimizde $\psi^{(n)}(x) = \psi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ olarak alacağız. Poligamma fonksiyonlarının

$$\psi_n(x) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^{n+1}}$$

şeklinde seri temsilleri vardır. Bu temsil yardımıyla

$$\psi_n(1) = (-1)^{n+1} n! \zeta(n+1) , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olduğu kolayca görülür. Yani poligamma fonksiyonları Riemann zeta fonksiyonunun bir genellemesini teşkil eder. Biz bu çalışmamızda poligamma fonksiyonları eşitsizlikleri ile ilgili son yapılan çalışmaları bir araya getirmeye çalıştık.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde konuyla ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.(Gamma Fonksiyonu)

$x > 0$ için gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.(Poligamma Fonksiyonları)

$x > 0$ için

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

funksiyonuna digamma veya psi fonksiyonu denir. $\psi(x)$ fonksiyonunun $\psi', \psi'', \psi''', \dots$ türevlerine de poligamma fonksiyonları denir.

Tanım 2.3.(Euler-Mascheroni Sabiti)

Euler-Mascheroni sabiti γ ile gösterilir ve

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \cong 0,5772156\dots$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.4.

Digamma fonksiyonu

$$\psi(x) = -\gamma + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{1 - e^{-t}} dt$$

şeklinde integral temsiline sahiptir [Srivastava ve Choi, 2001].

Teorem 2.5.

$x > 0$ için digamma fonksiyonu

$$\psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$$

şeklinde seri temsiline sahiptir [Srivastava ve Choi, 2001].

Teorem 2.6.

$x > 0$ için digamma fonksiyonunun

$$\psi(x) = \log x + \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right] e^{-tx} dt$$

şeklinde integral temsili vardır [Srivastava ve Choi, 2001].

Teorem 2.7.

Her $x > 0$ ve $m \in N$ için digamma fonksiyonu

$$\psi(mx) = \log m + \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \psi\left(x + \frac{k}{m}\right)$$

olacak şekilde bir özelliğe sahiptir [Srivastava ve Choi, 2001].

Lemma 2.8.

$x > 0$ ve $n \in N$ için poligamma fonksiyonları için

$$\psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^{n+1}}$$

şeklindeki seri temsili geçerlidir [Srivastava ve Choi, 2001].

Lemma 2.9.

Her $x > 0$, $n \geq 0$ tamsayı ve $\psi^{(0)}(x) = \psi(x)$ olmak üzere;

$$\psi^{(n)}(x+1) - \psi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

dır [Srivastava ve Choi, 2001].

Teorem 2.10.

$x > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için poligamma fonksiyonları

$$(-1)^{n-1} \psi^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-xt}}{1 - e^{-t}} dt$$

şeklindeki integral temsiline sahiptir.

İspat.

Teorem 2.4. te $\psi(x)$ 'in n . türevini alırsak hemen çıkar.

Lemma 2.11.

$n \geq 2$ tamsayısı ve x pozitif reel sayısı için

$$\frac{n-1}{n} < \frac{[\psi^{(n)}(x)]^2}{[\psi^{(n-1)}(x)][\psi^{(n+1)}(x)]} < \frac{n}{n+1}$$

dır [Alzer ve Wells, 1998].

Tanım 2.12.

$B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ Bernoulli sayıları

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

şeklinde tanımlanır [Apostol, 1976]. Örneğin $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = -\frac{1}{30}$, $B_4 = \frac{1}{42}$ ve $k \geq 1$ için $B_{2k+1} = 0$ 'dır.

Lemma 2.13.

Poligamma fonksiyonları için aşağıdaki asimptotik açılım geçerlidir.

$$\psi^{(n)}(x) \sim (-1)^{n-1} \left[\frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{2x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{(2k+n-1)!}{(2k)!x^{2k+n}} \right] \quad (x \rightarrow \infty; n = 1, 2, 3, \dots)$$

dır [Abramowitz ve Stegun, 1965]. Burada B_{2k} 'lar Bernoulli sayılarıdır.

Lemma 2.14.

Digamma fonksiyonunun tek bir pozitif kökü vardır ve bu kök $c = 1,4616321\dots$ dir [Abramowitz ve Stegun, 1965].

Tanım 2.15.

I bir aralık ve $f \in C^\infty(I)$ olsun. Eğer her $x \in I$ ve $k \geq 0$ tamsayısı için $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$ ise f I aralığında tam monotondur (*Completely monotonic*) deriz. Eğer buradaki eşitsizlikte " $\geq$ " yerine " $>$ " geçerli ise f I üzerinde kesin tam monotondur deriz.

Tanım 2.16.

f $x \geq 0$ için tanımlı bir fonksiyon olmak üzere f 'nin Laplace dönüşümü $f(s)$ ile gösterilir ve

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

şeklinde tanımlanır. (Tabii ki bu integralin yakınsak olması şartıyla)

Tanım 2.17.

$f, g : R \rightarrow R$ parçalı ve sürekli (piecewise continous) fonksiyonlar ise f ve g 'nin konvolasyon çarpımı $f * g$ ile gösterilir ve

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.18.

f ve g 'nin konvolasyonunun Laplace dönüşümü $f(s).g(s)$ 'dir.

Teorem 2.19.

$n \geq 0$ bir tamsayı olsun. O zaman

$$F_n(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \log(x) + x - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \sum_{i=1}^{2n} \frac{B_{2i}}{2i(2i-1)x^{2i-1}}$$

ve

$$G_n(x) = -\log \Gamma(x) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \log(x) - x + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{B_{2i}}{2i(2i-1)x^{2i-1}}$$

fonksiyonları $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monotondur [Alzer, 1997]. Burada B_k 'lar

Tanım 2.12'de verilen Bernoulli sayılarıdır.

Lemma 2.20.

s ve t pozitif reel sayıları $t > s$ şeklinde olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(n.(t-s))^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left(\frac{\left[(x+t).(x+s) \right]^n}{(x+t)^n - (x+s)^n} \right)^{\frac{1}{n+1}} - x \right] = \frac{s+t}{2}$$

dır[Batır, 2007].

Tanım 2.21.

a ve b pozitif reel sayılar olsun. Bu durumda a ve b 'nin Stolarsky ortalaması her $p \in \mathbb{R}$ için $S_p(a, b)$ ile gösterilir ve

$$S_p(a, b) = \left(\frac{a^p - b^p}{p(a - b)} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.22.

I bir aralık, $s, t \in I$ ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monoton bir fonksiyon olsun. Bu durumda integral için ortalama değer teoremine göre

$$\frac{1}{t-s} \int_s^t f(u) du = f(\xi)$$

sağlanacak şekilde bir $\xi \in [s, t]$ vardır. İşte bu ξ 'ya s ve t 'nin f - ortalaması denir.

$$I_f = I_f(s, t) = f^{-1} \left(\frac{1}{t-s} \int_s^t f(u) du \right)$$

ile gösterilir.

Lemma 2.23.

I bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon olsun. Eğer f' I üzerinde tam monoton ise $x \rightarrow I_f(x+s, x+t) - x$ I üzerinde monoton artan konkav bir fonksiyondur [Elezovic ve ark., 2000].

Lemma 2.24.

$x > \frac{1}{2}$ için ψ' fonksiyonu

$$\psi'(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{2} + \frac{a_1}{x - \frac{1}{2} + \frac{a_2}{x - \frac{1}{2} + \dots}}}$$

şeklinde sürekli kısmi kesirlere sahiptir. Burada a_p katsayıları $p = 1, 2, 3, \dots$ için

$$a_p = \frac{p^4}{4 \cdot (2p-1) \cdot (2p+1)}$$

bağıntısı ile verilir. [Wall, 1948].

3. POLİGAMMA FONKSİYONLARI EŞİTSİZLİKLERİ

Lemma 3.1.

$n \geq 2$ bir tamsayı ve

$$I_n(a) = \int_0^1 \left[(2n-1)x^2 - 1 \right] f_n(a(1-x)) f_n(a(1+x)) dx$$

olsun. Burada

$$f_n(t) = \frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}$$

dır. O zaman her $a > 0$ için $I_n(a) < 0$ 'dır [Alzer ve Wells, 1998].

İspat.

$$h_n(x) = \left[(2n-1)x^2 - 1 \right] (1-x^2)^{n-2}$$

ve

$$u(x; a) = \frac{a(1-x)}{1-e^{-a(1-x)}} \cdot \frac{a(1+x)}{1-e^{-a(1+x)}}$$

olsun. Bu takdirde

$$I_n(a) = a^{2(n-2)} \int_0^1 h_n(x) u(x; a) dx \quad (3.1)$$

yazabiliriz.

Şimdi $x \rightarrow u(x; a)$ fonksiyonunun $(0,1)$ aralığında kesin monoton azaldığını gösterelim. Bunun için

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x; a) < 0 \quad (0 < x < 1; a > 0)$$

olduğunu göstermek kafidir.

$$v(x; a) = \log u(x; a)$$

dersek

$$w(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x; a) = a [w(a(1+x)) - w(a(1-x))]$$

olduğunu görürüz. $0 < a(1-x) < a(1+x)$ ve $z > 0$ için

$$\frac{d}{dz} w(z) = \frac{\left[\left(\frac{z}{2} \right)^2 - \left(\sinh \frac{z}{2} \right)^2 \right]}{(z \sinh \frac{z}{2})^2} < 0$$

olduğundan

$$w(a(1+x)) < w(a(1-x))$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x; a) = u(x; a) \frac{\partial}{\partial x} v(x; a) < 0$$

olur. Buradan da $0 < x < 1$, $x \neq (2n-1)^{-\frac{1}{2}}$ ve $a > 0$ için

$$h_n(x)u(x; a) < h_n(x)u((2n-1)^{-\frac{1}{2}}; a) \quad (3.2)$$

elde edilir. (3.1), (3.2) 'den ve

$$\int_0^1 h_n(x) dx = \left[-x(1-x^2)^{n-1} \right]_0^1 = 0$$

olduğundan

$$I_n(a) < a^{2(n-2)} u((2n-1)^{-\frac{1}{2}}; a) \int_0^1 h_n(x) dx = 0$$

buluruz.

Teorem 3.2.

$n \geq 2$ bir tamsayı, α bir reel sayı ve x bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$F_n(x; \alpha) = \left(\psi^{(n)}(x) \right)^2 - \alpha \psi^{(n-1)}(x) \psi^{(n+1)}(x)$$

tanımlayalım. O zaman

a) $x \rightarrow F_n(x; \alpha)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton olması için gerek ve yeter şart

$$\alpha \leq \frac{n-1}{n}$$

olmasıdır.

b) $x \rightarrow -F_n(x; \beta)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton olması için gerek ve yeter şart

$$\beta \geq \frac{n}{n+1}$$

olmasıdır [Alzer ve Wells, 1998].

İspat. a)

$$x \rightarrow F_n(x; (n-1)/n)$$

fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton olduğunu gösterelim. Teorem 2.10.'dan dolayı

$$f_n(t) = \frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}$$

olmak üzere $x > 0$ ve $n \geq 2$ için

$$(-1)^n \psi^{(n-1)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f_n(t) dt, \quad (3.3)$$

$$(-1)^{n+1} \psi^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} t f_n(t) dt, \quad (3.4)$$

$$(-1)^{n+2} \psi^{(n+1)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} t^2 f_n(t) dt \quad (3.5)$$

yazabiliriz. (3.3), (3.4) ve (3.5) integral temsillerini kullanırsak

$$g_n(t) = (t f_n(t)) * (t f_n(t)) - \frac{n-1}{n} (f_n(t) * t^2 f_n(t)) \quad (3.6)$$

olmak üzere

$$F_n(x; (n-1)/n) = \left[(-1)^{n+1} \psi^{(n)}(x) \right]^2 - \frac{n-1}{n} \left[(-1)^n \psi^{(n-1)}(x) (-1)^{n+2} \psi^{(n+1)}(x) \right]$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-xt} g_n(t) dt \quad (3.7)$$

elde ederiz. Burada $*$ konvolasyon çarpımıdır. (3.6) eşitliğinde konvolasyon çarpımlarını hesaplırsak

$$g_n(t) = \int_0^t \left(t - \frac{2n-1}{n} s \right) s f_n(t-s) f_n(s) ds$$

buluruz. Bu integralde

$$s = \frac{t}{2}(1+x)$$

değişken değişimi yaparsak

$$g_n(t) = \frac{t^3}{8n} \int_{-1}^1 \left[1 - 2(n-1)x - (2n-1)x^2 \right] f_n\left(\frac{t}{2}(1-x)\right) f_n\left(\frac{t}{2}(1+x)\right) dx$$

sonucunu buluruz.

$$x \rightarrow x f_n\left(\frac{t}{2}(1-x)\right) f_n\left(\frac{t}{2}(1+x)\right)$$

bir tek fonksiyon olduğundan

$$g_n(t) = \frac{t^3}{8n} \int_{-1}^1 \left[1 - (2n-1)x^2 \right] f_n\left(\frac{t}{2}(1-x)\right) f_n\left(\frac{t}{2}(1+x)\right) dx = -\frac{t^3}{4n} I_n\left(\frac{t}{2}\right)$$

olur. Burada I_n Lemma 3.1.'de tanımlandığı gibidir. Böylece Lemma 3.1. ve (3.7)'den $x > 0$ ve $k = 0, 1, 2, \dots$ için

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_n(x; (n-1)/n) = \int_0^{\infty} e^{-xt} t^k g_n(t) dt > 0$$

elde ederiz. Bu da $x \rightarrow F_n(x; (n-1)/n)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton olduğunu ispatlar. Teorem 2.8.'den dolayı $(-1)^{m+1} \psi^{(m)}(m \geq 1)$ $(0, \infty)$ aralığında kesin tam olarak monotondur. İki kesin tam olarak monoton fonksiyonun toplamı ve çarpımı da yine kesin tam monoton olduğundan

$$F_n(x; \alpha) = F_n(x; (n-1)/n) + \left((n-1)/n - \alpha \right) (-1)^n \psi^{(n-1)}(x) (-1)^{n+2} \psi^{(n+1)}(x)$$

eşitliği $x \rightarrow F_n(x; \alpha)$ 'nın $\alpha \leq \frac{n-1}{n}$ için kesin tam monoton olduğunu ispatlar.

Karşıt olarak, eğer $x \rightarrow F_n(x; \alpha)$ $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton ise

$$\alpha < \frac{[\psi^{(n)}(x)]^2}{[\psi^{(n-1)}(x)\psi^{(n+1)}(x)]} \quad (x > 0) \quad (3.8)$$

elde ederiz. Lemma 2.13.'den dolayı

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^m \psi^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} (m-1)!$$

olup buradan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\psi^{(n)}(x))^2}{\psi^{(n-1)}(x)\psi^{(n+1)}(x)} = \frac{n-1}{n} \quad (3.9)$$

elde ederiz. (3.8) ve (3.9) bağıntıları $\alpha \leq \frac{n-1}{n}$ sonucunu verir.

b)

Şimdi $x \rightarrow -F_n\left(x; \frac{n}{n+1}\right)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton

olduğunu gösterelim. Teorem 2.18 ve Langrange özdeşliğinden

$$\begin{aligned} -F_n\left(x; \frac{n}{n+1}\right) &= \left(\frac{n}{n+1}\right) \psi^{(n-1)}(x) \psi^{(n+1)}(x) - (\psi^{(n)}(x))^2 \\ &= (n!)^2 \left[\sum_{i=0}^{\infty} (x+i)^{-n} \sum_{i=0}^{\infty} (x+i)^{-n-2} \right] - (n!)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} (j-i)^2 [(x+i)(x+j)]^{-n-2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $k \geq 0$ tamsayıları için

$$\begin{aligned} &(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(-F_n\left(x; \frac{n}{n+1}\right) \right) \\ &= (n!)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} (j-i)^2 \sum_{r=0}^k C(k, r) (x+i)^{-n-2-r} (x+j)^{-n-2-k+r} \prod_{s=0}^{r-1} (n+2+s) \prod_{s=0}^{k-r-1} (n+2+s) > 0 \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$-F_n(x; \beta) = -F_n\left(x; \frac{n}{n+1}\right) + \left(\beta - \frac{n}{n+1}\right) (-1)^n \psi^{(n-1)}(x) (-1)^{n+2} \psi^{(n+1)}(x)$$

temsili $\beta \geq \frac{n}{n+1}$ için $x \rightarrow -F_n(x; \beta)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton olduğunu ispatlar.

Son olarak $x \rightarrow -F_n(x; \beta)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton olduğunu kabul edelim. Bu durumda $-F_n(x; \beta) > 0$ olacağından

$$\frac{(\psi^{(n)}(x))^2}{\psi^{(n-1)}(x)\psi^{(n+1)}(x)} < \beta \quad (x > 0) \quad (3.10)$$

olur. Diğer taraftan Teorem 2.19.'dan dolayı $x > 0$ ve $m = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\psi^{(m)}(x) = \psi^{(m)}(x+1) + (-1)^{m+1} m! x^{-m-1} \quad (3.11)$$

olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\psi^{(n)}(x))^2}{\psi^{(n-1)}(x)\psi^{(n+1)}(x)} = \frac{n}{n+1} \quad (3.12)$$

sonucuna ulaşırız. (3.10) ve (3.12) beraberce $\beta \geq \frac{n}{n+1}$ olduğunu ispatlar. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.3.

$n \geq 2$ bir tamsayı olsun. Bu durumda her $x > 0$ için

$$\frac{n-1}{n} < \frac{[\psi^{(n)}(x)]^2}{\psi^{(n-1)}(x)\psi^{(n+1)}(x)} < \frac{n}{n+1}$$

dır.

İspat.

(3.9) ve (3.12) limitlerinden hemen çıkar.

Teorem 3.4.

$x > 0$ için

$$[\psi'(x)]^2 + \psi''(x) > 0 \quad (3.13)$$

dir [Batır, 2005].

İspat.

$x > 0$ için

$$f(x) = [\psi'(x)]^2 + \psi''(x)$$

tanımlayalım.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

olduğundan $f(x) > 0$ olduğunu göstermek için $f(x) - f(x+1) > 0$ olduğunu göstermek kafidir. Buna göre

$$f(x) - f(x+1) = [\psi'(x)]^2 + \psi''(x) - [\psi'(x+1)]^2 - \psi''(x+1)$$

olduğundan Teorem 2.19.'dan dolayı

$$f(x) - f(x+1) = \frac{2}{x^2} \left(\psi'(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right)$$

elde ederiz. Teorem 2.19.'u $n = 2$ için uygularsak

$$\psi'(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} > 0$$

olduğunu görürüz. O halde $f(x) > 0$ 'dır.

Teorem 3.5.

$x > 0$ için

$$\psi'(x).e^{\psi(x)} < 1$$

dir [Batır, 2005].

İspat.

(3.13) eşitsizliğinin her iki tarafını $\psi'(x)$ 'e bölersek $x > 0$ için

$$\frac{d}{dx}(\psi(x) + \ln(\psi'(x))) > 0$$

buluruz. O halde $\psi(x) + \ln(\psi'(x))$ $(0, \infty)$ aralığında monoton artar. Teorem 2.19.'dan dolayı

$$\log x - \frac{1}{x} < \psi(x) < \log x - \frac{1}{2x}$$

elde ederiz. Bu ise

$$x\psi'(x)e^{-\frac{1}{x}} < \psi'(x).e^{\psi(x)} < x\psi'(x)e^{-\frac{1}{2x}} \quad (3.14)$$

sonucunu verir. Lemma 2.13'de $n = 1$ alındığında

$$\psi'(x) \square \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{30x^5} + \dots \quad (x \rightarrow \infty)$$

olacağından (3.14) 'deki eşitsizliğin her tarafı 1'e gider. Bu ise

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi'(x)e^{\psi(x)} = 1$$

değerini verir. $\psi(x) + \ln(\psi'(x))$ monoton arttığından ispat biter.

Teorem 3.6.

$x > 1$ için

$$\psi(x + \alpha) < \log x < \psi(x + \beta)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde en iyi α ve β değerleri

$$\alpha = c - 1 = 0,4616321\dots \text{ ve } \beta = 0,5$$

değerleridir. Burada c Lemma 2.14'te verildiği gibidir [Batır, 2005].

İspat.

$\log \Gamma(x)$ fonksiyonuna $[u, u+1]$ ($u > 0$) aralığında ortalama değer teoremini uygularsak $\Gamma(u+1) = u.\Gamma(u)$ fonksiyonel denklemi yardımıyla

$$\psi(u + \theta(u)) = \log u \quad (3.15)$$

olacak şekilde u 'ya bağılı ve $0 < \theta(u) < 1$ ($u > 0$) şeklinde bir $\theta(u)$ elde ederiz. (3.15)'te $u = e^{\psi(t)}$ değişken değişimi yaparsak $t \rightarrow \psi(t)$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan $t > 0$ için

$$\theta(e^{\psi(t)}) = t - e^{\psi(t)}$$

olur. Burada t 'ye göre türev alırsak

$$\theta'(e^{\psi(t)}) = \frac{1}{\psi'(t).e^{\psi(t)}} - 1$$

elde ederiz. O halde Teorem 3.5.'ten dolayı her $t > 0$ için

$$\theta'(e^{\psi(t)}) > 0$$

dır. Halbuki $t \rightarrow e^{\psi(t)}$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan her $t > 0$ için $\theta'(t) > 0$ dır.

Yani $\theta(t)$ her $t > 0$ için monoton artar. Şimdi $\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(t) = \frac{1}{2}$ olduğunu gösterelim.

Teorem 2.19.'dan dolayı

$$\psi(t) < \log t - \frac{1}{2t}$$

ve

$$\psi(t) > \log t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2}$$

olduğundan

$$t - t.e^{-\frac{1}{2t}} < \theta(e^{\psi(t)}) = t - e^{\psi(t)} < t - t.e^{-\frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2}}$$

olur. Buradaki her iki sınırında limitinin $\frac{1}{2}$ olduğu kolayca görülebilir. O halde

$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(t) = \frac{1}{2}$ 'dir. Bu nedenle

$$\psi(x + c - 1) = \psi(x + \theta(1)) < \psi(x + \theta(x)) < \psi(x + \theta(\infty)) = \psi(x + \frac{1}{2})$$

olur. (3.15)'i kullanırsak ispat biter.

Teorem 3.7.

α bir reel sayı olsun. O zaman

$$f_{\alpha}(x) = x^{\alpha} (\log(x) - \psi(x))$$

fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton olması için gerek ve yeter şart $\alpha \leq 1$ olmasıdır.

İspat.

Teorem 2.6.'dan dolayı

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t}$$

olmak üzere

$$f_1(x) = x \cdot \int_0^{\infty} \varphi(t) \cdot e^{-tx} dt \quad (3.16)$$

dır. φ 'nin $(0, \infty)$ aralığında monoton attığını ve

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1$$

olduğunu kolayca gösterebiliriz. (3.16)'dan dolayı $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} (-1)^n f_1^{(n)}(x) &= x \cdot (-1)^n \frac{d^n y}{dx^n} \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-xt} dt - (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-xt} dt \\ &= x \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-xt} t^n dt - n \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-xt} t^{n-1} dt \\ &= \int_0^{\eta/x} \varphi(t) e^{-xt} t^{n-1} (tx - n) dt + \int_{\eta/x}^{\infty} \varphi(t) e^{-xt} t^{n-1} (tx - n) dt \end{aligned} \quad (3.17)$$

olur. $\varphi(t)$ monoton artan olduğundan $0 < t < \eta/x$ için $\varphi(t) < \varphi(\eta/x)$ ve $\eta/x < t$ için $\varphi(\eta/x) < \varphi(t)$

olur. Şu halde (3.17)'ye göre

$$\begin{aligned}
(-1)^n f_1^{(n)}(x) &> \varphi\left(\frac{n}{x}\right) \int_0^{\frac{n}{x}} e^{-xt} t^{n-1} (tx-n) dt + \varphi\left(\frac{n}{x}\right) \int_{\frac{n}{x}}^{\infty} e^{-xt} t^{n-1} (tx-n) dt \\
&= \varphi\left(\frac{n}{x}\right) \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{n-1} (tx-n) dt
\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde ederiz. $x > 0$ ve $m = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} t^m dt = \frac{m!}{x^{m+1}}$$

olduğundan

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} t^{n-1} (tx-n) dt = 0$$

elde edilir. Böylece (3.18) eşitliği $x > 0$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$(-1)^n f_1^{(n)}(x) > 0$$

sonucunu verir. Verilen u ve v fonksiyonları için Leibniz kuralı

$$(-1)^n (u(x).v(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i u^{(i)}(x) (-1)^{n-i} v^{(n-i)}(x)$$

olduğunu ifade eder. Bu kurala göre kesin tam monoton iki fonksiyonun çarpımları da kesin tam monotondur. $\alpha < 1$ için $u_\alpha(x) = x^{\alpha-1}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton olduğundan $\alpha \leq 1$ için $f_\alpha(x) = u_\alpha(x)f_1(x)$ fonksiyonu da $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monotondur.

Şimdi f_α fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında kesin tam monoton olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$f'_\alpha(x) = x^{\alpha-1} [\alpha(\log(x) - \psi(x)) + 1 - x\psi'(x)] < 0$$

olacağından

$$\alpha < \frac{x^2\psi'(x) - x}{x(\log(x) - \psi(x))} \tag{3.19}$$

elde ederiz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x. [\log x - \psi(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [x. \log x - x.\psi(x+1) + 1] = 1$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \psi'(x) - x] = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + x^2 \psi'(x+1) - x] = 1$$

olduğundan (3.19) eşitsizliği $\alpha \leq 1$ sonucunu verir. Bu da teoremin ispatını bitirir.

Teorem 3.8.

$n \geq 1$ bit tamsayı olsun. Bu taktirde her $x > 0$ için

$$(-1)^n \psi_{n+1}(x) < \frac{n}{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}} \left[(-1)^{n-1} \psi_n(x) \right]^{1+\frac{1}{n}}$$

dır [Batır, 2007].

İspat.

Sonuç 3.3'ten dolayı $n \geq 2$ tamsayısı ve $x > 0$ için

$$\frac{n}{n-1} < \frac{[\psi_n(x)]^2}{\psi_{n-1}(x)\psi_{n+1}(x)} < \frac{n}{n+1}$$

olduğundan $n \geq 1$ için

$$n.\psi_n(x)\psi_{n+2}(x) - (n+1)[\psi_{n+1}(x)]^2 < 0$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\psi_n(x)\psi_{n+1}(x)$ 'e bölersek $\psi_n(x)\psi_{n+1}(x) < 0$ olduğundan

$$n.\frac{\psi_{n+2}(x)}{\psi_{n+1}(x)} - (n+1).\frac{\psi_{n+1}(x)}{\psi_n(x)} > 0$$

sonucunu elde ederiz. Bu eşitsizliği de

$$\frac{d}{dx} \log \left| \frac{[\psi_{n+1}(x)]^n}{[\psi_n(x)]^{n+1}} \right| = \frac{d}{dx} \log \left(-\frac{[\psi_{n+1}(x)]^n}{[\psi_n(x)]^{n+1}} \right) > 0$$

şeklinde yazabiliriz. Parantez içindeki fonksiyon pozitif olduğundan bu durum

$$\frac{d}{dx} \frac{[\psi_n(x)]^{n+1}}{[\psi_{n+1}(x)]^n} > 0$$

olmasını gerektirir. Lemma 2.13'ü kullanırsak $m = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^m \psi_m(x) = (-1)^{m-1} (m-1)!$$

olduğunu görürüz. Bu ise

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\psi_n(x)]^{n+1}}{[\psi_{n+1}(x)]^n} < -\frac{n!}{n^{n+1}}$$

eşitsizliğini verir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.9.

x pozitif reel sayısı ve n doğal sayısı için θ_n

$$\theta_n(x) = (\psi_n)^{-1} \left[\frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n} \right] - x \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. O zaman

- (a) Her $u > 0$ için $\theta_n'(u) > 0$ 'dır.
- (b) Her n doğal sayısı ve $u \geq 0$ için $0 \leq \theta_n(u) < \frac{1}{2}$
- (c) Her $u > 0$ için $n \rightarrow \theta_n(u)$ dizisi monoton azalır.
- (d) Her $u > 0$ için $\theta_n''(u) < 0$ 'dır [Batır, 2007].

İspat.

(3.20) denklemini $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} = \psi_n(x + \theta_n(x)) \quad (3.21)$$

şeklinde yazabiliriz. Lemma 2.19'dan dolayı $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\psi_{n-1}(x+1) - \psi_{n-1}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \quad (3.22)$$

olduğundan (3.21) eşitliğini

$$\psi_{n-1}(x+1) - \psi_{n-1}(x) = \psi_n(x + \theta_n(x))$$

biçiminde yazabiliriz. Bu durum ortalama değer teoreminden dolayı her $x > 0$ için $0 < \theta_n(x) < 1$ sonucunu verir. (3.21)'de x yerine

$$x = \frac{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}}{\left[(-1)^{n-1} \psi_n(u) \right]^{\frac{1}{n}}}$$

alırsak

$$\psi_n \left(\frac{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}}{[(-1)^{n-1} \psi_n(u)]^{\frac{1}{n}}} + \theta_n \left(\frac{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}}{[(-1)^{n-1} \psi_n(u)]^{\frac{1}{n}}} \right) \right) = \psi_n(u)$$

elde ederiz. ψ_n fonksiyonu birebir ve örten olduğundan bu eşitlik bize

$$\theta_n \left(\frac{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}}{[(-1)^{n-1} \psi_n(u)]^{\frac{1}{n}}} \right) = u - \frac{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}}{[(-1)^{n-1} \psi_n(u)]^{\frac{1}{n}}} \quad (3.23)$$

bağıntısını verir. Bu eşitliğin her iki tarafının türevini alırsak

$$\theta_n' \left(\frac{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}}{[(-1)^{n-1} \psi_n(u)]^{\frac{1}{n}}} \right) = \frac{n}{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{[(-1)^{n-1} \psi_n(u)]^{1+\frac{1}{n}}}{(-1)^n \psi_{n+1}(u)} - 1 \quad (3.24)$$

olur. Bu ise Teorem 3.8'den dolayı her $u > 0$ için

$$\theta_n' \left(\frac{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}}{[(-1)^{n-1} \psi_n(u)]^{\frac{1}{n}}} \right) > 0$$

sonucunu verir. Fakat $u \rightarrow (-1)^{n-1} \psi_n(u)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığından $(0, \infty)$ aralığına

birebir ve örten olduğundan her $u > 0$ için $\theta_n'(u) > 0$ olur. Bu da (a)'nın ispatını tamamlar.

θ_n sınırlı ve kesin arttığından $x \rightarrow \infty$ için $\theta_n(x)$ 'in bir limiti vardır. Şimdi (b)'yi ispatlayalım. (3.21)'de x yerine $(x+1)$ alırsak

$$\psi_n(x+1+\theta_n(x+1)) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğe (3.22)'yi uygularsak

$$\frac{(-1)^n . n!}{[x+\theta_n(x+1)]^{n+1}} + \psi_n(x+\theta_n(x+1)) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

sonucuna ulaşırız. Buradan da

$$\theta_n(x+1) = \left[\frac{(-1)^n . n!}{\psi_n(x+\theta_n(x+1)) - \frac{(-1)^{n-1} . (n-1)!}{(x+1)^n}} \right]^{\frac{1}{n+1}} - x$$

eşitliği bulunur. $\lim_{x \rightarrow \infty} \theta_n(x+1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \theta_n(x)$ olduğundan (3.21) 'i tekrar kullanırsak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta_n(x+1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(-1)^n .n!}{\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}} \right]^{\frac{1}{n+1}} - x$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği sadeleştirerek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[n^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{(x+1)^n}{1 - (1 + \frac{1}{x})^n} \right)^{\frac{1}{n+1}} - x \right]$$

ifadesini elde ederiz. Bu limitin değerinin $\frac{1}{2}$ olduğunu kolayca görebiliriz. Bu ise (a)'nın yardımıyla (b)'nin ispatını verir. (c)'yi ispatlamak için (3.21)'in her iki tarafının türevini alırsak

$$\frac{(-1)^n .n!}{x^{n+1}} = (1 + \theta_n'(x)) \psi_{n+1}(x + \theta_n(x)) \quad (3.25)$$

bulunur. (3.21)'de n yerine $(n+1)$ alınırsa

$$\psi_{n+1}(x + \theta_{n+1}(x)) = \frac{(-1)^n .n!}{x^{n+1}} \quad (3.26)$$

sonucu bulunur. (3.25) ve (3.26)'dan

$$\theta_n'(x) = \frac{\psi_{n+1}(x + \theta_{n+1}(x))}{\psi_{n+1}(x + \theta_n(x))} - 1$$

elde edilir. (a)'dan dolayı $\theta_n'(x) > 0$ ve $x \rightarrow (-1)^n \psi_{n+1}(x)$ kesin monoton azaldığından bu bağıntı $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\theta_{n+1}(x) < \theta_n(x)$ eşitsizliğini verir. Bu ise $n \rightarrow \theta_n(x)$ fonksiyon dizisinin monoton azaldığını gösterir. Böylece (c)'de ispatlanmış olur. (3.24)'ün her iki tarafının türevini alırsak

$$\begin{aligned} \theta_n'' & \left(\frac{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}}{[(-1)^{n-1} \psi_n(u)]^{\frac{1}{n}}} \right) \\ & = \frac{n^2}{[(n-1)!]^{\frac{2}{n}}} \left[\frac{[\psi_n(u)]^{\frac{1}{n}}}{\psi_{n+1}(u)} \right]^2 \frac{\psi_n(u)}{\psi_{n+1}(u)} \left[\frac{n+1}{n} \cdot [\psi_{n+1}(u)]^2 - \psi_n(u) \cdot \psi_{n+2}(u) \right] \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Teorem 3.3'ü kullanırsak bu da her $u > 0$ için

$$\theta_n'' \left(\frac{[(n-1)!]^{1/n}}{[(-1)^{n-1} \psi_n(u)]^{1/n}} \right) < 0$$

sonucunu verir. Parantez içindeki fonksiyon u 'ya göre birebir ve örten olduğundan her $u > 0$ için $\theta_n''(u) < 0$ eşitsizliğini buluruz. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.10.

n pozitif bir tamsayı ve x pozitif bir reel sayı olsun. O zaman

$$(n-1)! \exp(-n \cdot \psi(x + \frac{1}{2})) < |\psi_n(x)| < (n-1)! \exp(-n \cdot \psi(x)) \quad (3.27)$$

eşitsizlikleri sağlanır [Batır, 2007].

İspat.

$x > 0$ için

$$\theta_0(x) = \psi^{-1}(\log x) - x \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlayalım. (3.20) 'de $n = 1$ alınırsa

$$\theta_1(x) = (\psi')^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - x \quad (3.29)$$

elde ederiz. Şimdi her $x > 0$ için $\theta_n(x) < \theta_0(x)$ olduğunu gösterelim. Teorem 3.9.(c)'den dolayı $n \rightarrow \theta_n(x)$ monoton arttığından $\theta_1(x) < \theta_0(x)$ olduğunu göstermek yeterlidir. (3.28) 'den dolayı

$$\psi(x + \theta_0(x)) = \log x$$

yazabiliriz. Her iki tarafın türevini alırsak

$$\frac{1}{x} = (1 + \theta_0'(x)) \cdot \psi'(x + \theta_0(x)) \quad (3.30)$$

elde edilir. (3.29) denklemi $n = 1$ için

$$\frac{1}{x} = \psi'(x + \theta_1(x)) \quad (3.31)$$

eşitliğine denk olduğundan (3.30) ve (3.31)'den

$$\theta_0'(x) = \frac{\psi'(x + \theta_1(x))}{\psi'(x + \theta_0(x))} - 1 \quad (3.32)$$

yazabiliriz. Teorem 3.5'den dolayı $\theta_0'(x) > 0$ 'dır. ψ fonksiyonu monoton arttığından (3.32) eşitliği her $x > 0$ için $\theta_1(x) < \theta_0(x)$ sonucunu verir. Böylece her n doğal sayısı ve $x > 0$ için $\theta_n(x) < \theta_0(x)$ elde ederiz. θ_n 'in ve θ_0 'ın sırasıyla (3.20) ve (3.28)'de verilen değerlerini burada yerine yazarsak

$$(\psi_n)^{-1} \left(\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \right) < \psi^{-1}(\log x)$$

elde ederiz. Burada x yerine $e^{\psi(x)}$ alırsak

$$(\psi_n)^{-1} \left[(-1)^{n-1} (n-1)! e^{-n\psi(x)} \right] < x \quad (3.33)$$

sonucu elde edilir. Eğer n çift bir doğal sayı ise $x \rightarrow \psi_n(x)$ monoton arttığından bu ifade

$$\psi_n(x) > -(n-1)! e^{-n\psi(x)} \quad (3.34)$$

eşitsizliğine denktir. Aynı şekilde n tek bir doğal sayı ise (3.33) eşitsizliği

$$\psi_n(x) < (n-1)! e^{-n\psi(x)} \quad (3.35)$$

ifadesine denktir. (3.34) ve (3.35) birlikte (3.27)'deki sağ eşitsizliğin ispatını verir.

Teorem 3.5'in ispatından dolayı

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta_0(x) = \frac{1}{2}$$

dir. Bu nedenle $x > 0$ için $0 < \theta_0(x) < \frac{1}{2}$ dir. Yine Teorem 3.9 (b)'den dolayı $n = 1, 2, 3, \dots$

ve $x > 0$ için $0 < \theta_n(x) < \frac{1}{2}$ dir. O halde her $x > 0$ ve $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\theta_0(x) - \theta_n(x) < \frac{1}{2}$$

dir. $\theta_0(x)$ ve $\theta_n(x)$ 'in (3.28) ve (3.20)'de verilen değerlerini kullanırsak bu eşitsizlik

$$\psi^{-1}(\log x) < (\psi_n)^{-1} \left(\frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n} \right) + \frac{1}{2}$$

sonucunu verir. Burada x yerine $e^{\psi(x)}$ alınırsa

$$x - \frac{1}{2} < (\psi_n)^{-1} \left[(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot e^{-n \cdot \psi(x)} \right] \quad (3.36)$$

elde edilir. Eğer n tek ise bu ifade $x > \frac{1}{2}$ için

$$\psi_n \left(x - \frac{1}{2} \right) > (n-1)! \cdot \exp(-n \cdot \psi(x)) \quad (3.37)$$

eşitsizliğine; n çift ise

$$\psi_n \left(x - \frac{1}{2} \right) < -(n-1)! \cdot \exp(-n \cdot \psi(x)) \quad (3.38)$$

eşitsizliğine denktir. (3.37) ve (3.38)'de x yerine $x + \frac{1}{2}$ alırsak (3.27)'nin sol tarafındaki eşitsizliği elde ederiz.

Teorem 3.11.

n pozitif bir tamsayı ve x pozitif bir reel sayı olsun. O zaman

$$\left[n! \zeta(n+1) \right]^{-\frac{1}{n}} < \left[(-1)^{n-1} \psi_n(x+1) \right]^{-\frac{1}{n}} - \left[(-1)^{n-1} \psi_n(x) \right]^{-\frac{1}{n}} < \left[(n-1)! \right]^{\frac{1}{n}}$$

dir. Üstelik buradaki her iki sınır değeri de en iyi değerlerdir [Batır, 2007].

İspat.

$x > 0$ için

$$h(x) = \frac{\left[(n-1)! \right]^{\frac{1}{n}}}{\left[(-1)^{n-1} \psi_n(x) \right]^{\frac{1}{n}}}$$

şeklinde tanımlayalım. θ_n (3.20) verildiği gibi olmak üzere

$$g(x) = \theta_n(h(x+1)) - \theta_n(h(x)) \quad (3.39)$$

olsun. $g(x)$ 'in türevini alıp (3.24)'ü kullanırsak

$$g'(x) = \frac{\theta_n'(h(x+1)) - \theta_n'(h(x))}{\theta_n'(h(x)) \cdot \theta_n'(h(x+1))}$$

elde ederiz. $x \rightarrow (-1)^{n-1} \psi_n(x)$ $(0, \infty)$ aralığında monoton azaldığından ve $h(x)$ bu aralıkta monoton arttığından Teorem 3.9 (a)'dan dolayı $g'(x) < 0$ 'dır. Yani $g(x)$ monoton azalır.

Teorem 3.9 (b)'den dolayı

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \theta_n(\infty) - \theta_n(\infty) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

olduğu görülür. Öyleyse her $x > 0$ için

$$0 = g(\infty) < g(x) < g(0) \quad (3.40)$$

dır. $g(x)$ tanımından dolayı

$$g(0) = \left[\frac{[(n-1)!]^{\frac{1}{n}}}{[(-1)^{n-1} \psi_n(1)]^{\frac{1}{n}}} \right] = 1 - \frac{1}{[n \zeta(n+1)]^{\frac{1}{n}}}$$

olduğundan g 'nin değerini (3.40)'da yerine yazıp bu eşitsizliği düzenlersek teoremin ispatı biter.

Teorem 3.12.

x pozitif bir reel sayı ve n pozitif bir tamsayı olsun. Bu durumda $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için

$$(n-1)! \cdot \left(\frac{\psi_k(x + \frac{1}{2})}{(-1)^{k-1} (k-1)!} \right)^{\frac{n}{k}} < |\psi_n(x)| < (n-1)! \cdot \left(\frac{\psi_k(x)}{(-1)^{k-1} (k-1)!} \right)^{\frac{n}{k}} \quad (3.41)$$

eşitsizliği sağlanır [Batır, 2007].

İspat.

$n \rightarrow \theta_n(x)$ fonksiyon dizisi monoton azaldığından $x > 0$ ve $n > k$ için $\theta_n(x) > \theta_n(k)$ olur. θ_n ve θ_k 'nın (3.20)'de verilen değerlerini burada yerine yazarsak

$$(\psi_n)^{-1} \left(\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \right) < (\psi_k)^{-1} \left(\frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \right) \quad (3.42)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada x yerine

$$\left(\frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{\psi_k(x)} \right)^{\frac{1}{k}}$$

alırsak (2.42) eşitsizliğini tek n tamsayıları için

$$\psi_n(x) < \left(\frac{(n-1)! \psi_k(x)}{(-1)^{k-1} (k-1)!} \right) \quad (x > 0), \quad (3.43)$$

ve çift n tamsayıları için de

$$\psi_n(x) > - \left(\frac{(n-1)! \psi_k(x)}{(-1)^{k-1} (k-1)!} \right) \quad (x > 0), \quad (3.44)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.43) ve (3.44) birlikte (3.41) eşitsizliğinin sağ tarafının ispatını

verir. Teorem 3.9. (b) den dolayı $x > 0$ ve $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\theta_n(x) < \frac{1}{2}$ olduğundan $n > k$ için

$\theta_k(x) - \theta_n(x) < \frac{1}{2}$ dir. Yine θ_n ve θ_k 'nın (3.20) de verilen değerlerini burada yerine yazarsak

$$(\psi_n)^{-1} \left(\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \right) > (\psi_k)^{-1} \left(\frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \right) - \frac{1}{2} \quad (3.45)$$

elde ederiz. Burada x yerine

$$\left(\frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{\psi_k(x)} \right)^{\frac{1}{k}}$$

alınırsa $x > \frac{1}{2}$ ve tek n tamsayıları için

$$\psi_n \left(x - \frac{1}{2} \right) > (n-1)! \left(\frac{\psi_k(x)}{(-1)^{k-1} (k-1)!} \right)^{\frac{n}{k}} \quad (3.46)$$

eşitsizliğini ve tek n tamsayıları için de

$$\psi_n \left(x - \frac{1}{2} \right) < -(n-1)! \left(\frac{\psi_k(x)}{(-1)^{k-1} (k-1)!} \right)^{\frac{n}{k}} \quad (3.47)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.46) ve (3.47) 'de x yerine $x + \frac{1}{2}$ alırsak (3.41) eşitsizliğinin sol

tarafını da elde etmiş oluruz.

Teorem 3.13.

x bir pozitif reel sayı ve n pozitif bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$(n!)^{\frac{1}{n+1}} \left[x - \left(x^{-\frac{1}{n}} + \alpha \right)^{-n} \right]^{\frac{1}{n+1}} < \left[(-1)^{n-1} \psi_n \right]^{-1}(x) < (n!)^{\frac{1}{n+1}} \left[x - \left(x^{-\frac{1}{n}} + \beta \right)^{-n} \right]^{\frac{1}{n+1}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\alpha = \left[(n-1)! \right]^{\frac{1}{n}} \text{ ve } \beta = \left[n! \zeta(n+1) \right]^{\frac{1}{n}}$$

sayıları en iyi değerlerdir [Batır, 2007].

İspat.

Teorem 3.10'da

$$x = \left[(-1)^{n-1} \psi_n \right]^{-1}(t)$$

alınıp Lemma 2.9'da kullanılırsa ispat yapılmış olur.

Teorem 3.14.

x ve y pozitif reel sayılar ve n pozitif bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$(-1)^n \psi^{(n+1)} \left(\frac{x+y}{2} \right) < \frac{(-1)^n \left(\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(y) \right)}{x-y} < (-1)^n \psi^{(n+1)} \left(S_{-(n+1)}(x+y) \right) \quad (3.48)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada S_p Stolarsky ortalamasıdır. Tanım 2.21'e bakınız.

İspat.

Lemma 2.8'de verilen seri temsilini kullanırsak $x, y > 0$ için

$$(-1)^{n+1} \left(\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(y) \right) = n! \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sigma(k+x) - \sigma(k+y) \right) \quad (3.49)$$

yazabiliriz. Burada $\sigma(u) = \frac{1}{u^{n+1}}$ 'dir. Ortalama değ er teoremine göre her $x, y > 0$ için

$$\sigma(k+x) - \sigma(k+y) = \frac{(n+1)(x-y)}{(k+\eta(k))^{n+2}}$$

sağlanacak şekilde x ve y arasında bir $\eta = \eta(k) = \eta(k, x, y)$ vardır.  u halde (3.49) eşitliğini

$$\frac{(-1)^{n+2} (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(y))}{x-y} = (n+1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+\eta(k))^{n+2}} \quad (3.50)$$

biçiminde yazabiliriz. (3.49) 'dan

$$\eta(k) = (\sigma')^{-1} \left(\frac{1}{x-y} \int_{k+x}^{k+y} \sigma'(u) du \right) - k$$

ifadesi elde edilir. $k \rightarrow \sigma''(k)$ $(0, \infty)$ aralığında tam monoton olduğundan Lemma 2.23'ten dolayı η monoton artar. Bu durumda (3.49) 'dan dolayı

$$\eta(k) = \left(\frac{(n+1)(y-x) \cdot ((k+x)^{n+1} - (k+y)^{n+1})}{(k+y)^{n+1} - (k+x)^{n+1}} \right)^{\frac{1}{n+2}} - k$$

 eklinde yazabiliriz. Burada

$$\eta(0) = \left(\frac{(n+1)(y-x) \cdot (xy)^{n+1}}{y^{n+1} - x^{n+1}} \right)^{\frac{1}{n+2}}$$

 eklinde bulunur. Böylece (3.50) e itliėinden

$$(n+1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+\eta(\infty))^{n+2}} < \frac{(-1)^n (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(y))}{x-y} < (n+1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+\eta(0))^{n+2}}$$

yazabiliriz. $\eta(0)$ ve $\eta(\infty)$ 'un değerleri burada yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.15.

$x > 0$ i in

$$\alpha - \log(e^{\gamma/x} - 1) < \psi(x) < \beta - \log(e^{\gamma/x} - 1) \quad (3.51)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $\alpha = -\gamma$ ($\gamma = \text{Euler sabiti}$) ve $\beta = 0$ değerleri en iyi değerlerdir.

İspat.

(3.28) denkleminde x yerine $e^{\psi(x)}$ alınırsa

$$\theta_0(e^{\psi(x)}) = x - e^{\psi(x)}$$

elde edilir. Şimdi $x > 0$ için

$$g(x) = \theta_0(e^{\psi(x+1)}) - \theta_0(e^{\psi(x)}) \quad (3.52)$$

tanımlayalım. $g(x)$ 'in türevini alırsak $v(x) = e^{\psi(x)}$ olmak üzere

$$g'(x) = v'(x) - v'(x+1) \quad (3.53)$$

elde edilir. $v(x)$ 'in ikinci türevini alırsak

$$v''(x) = \left[(\psi'(x))^2 + \psi''(x) \right] e^{\psi(x)}$$

ifadesi elde edilir. Teorem 2.4'ten dolayı $(\psi'(x))^2 + \psi''(x) > 0$ 'dır. Bu da v 'nin monoton arttığını gösterir. (3.53)'ten dolayı ise g monoton azalır. Teorem 3.6'nın ispatında

$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_0(t) = \frac{1}{2}$ olduğu gösterilmişti. Buna göre g monoton azaldığından $x > 0$ için

$$0 = g(\infty) < g(x) < g(0) = 1 - e^{-\gamma}$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliği düzenlersek istenen sonuç bulunur.

Lemma 3.16.

$a = 3,203171\dots$, $\psi(a) = 1$ denklemini sağlayan tek pozitif sayı olsun. O zaman her $x > 1$ için

$$x.\psi'(a+x^2) < \psi(a+x)\psi'(a+x) \quad (3.54)$$

dır [Alzer ve Ruehr, 1999].

İspat.

$$r(x) = \frac{x \cdot \psi'(a+x^2)}{\psi'(a+x)}$$

olsun. Eğer $x > 2$ için $r(x) < \frac{3}{2}$ olduğunu gösterebilirsek

$$r(x) < 1.550... = \psi(a+2) < \psi(a+x)$$

elde edilir ki bu $x > 2$ için Lemma'nın ispatını verir. Lemma 2.24'ten dolayı $x > \frac{1}{2}$ için

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}} \leq \psi'(x) \leq \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da $b = a - \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$r(x) \leq \frac{x \cdot \left[(b+x)^2 + \frac{1}{12} \right]}{(b+x) \cdot (b+x^2)} \quad (x > 0) \quad (3.55)$$

sonucunu verir. O halde $x > 2$ için $r(x) < \frac{3}{2}$ olduğunu göstermek için (3.55) eşitsizliğinin

sağ tarafının $\frac{3}{2}$ 'den küçük olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise

$$b_0 = 3b^2 = 21.9214...$$

$$b_1 = -2b^2 + 3b - \frac{1}{6} = -6.6714...$$

$$b_2 = -b = -2.7031...$$

olmak üzere $x > 2$ için

$$0 < x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

olduğunu göstermeye denktir.

$$P_1(x) = x^3 - 2.7032x^2 - 6.6715x + 21.9214$$

polinomunun tek bir reel kökü vardır ve bu kök negatif sayıdır. $P_1(0) > 0$ olduğundan her

$x > 0$ için $P_1(x) > 0$ 'dır. O halde $x > 2$ için $r(x) < \frac{3}{2}$ 'dir. Şimdi $x \in (1, 2]$ için (3.54)

eşitsizliğini gösterelim. ψ fonksiyonu konkav olduğundan $1 < x \leq 2$ için

$$(x-1)\psi(a+2) + (2-x)\psi(a+1) \leq \psi(a+x)$$

dır. (3.55)'e göre

$$r(x) \leq \frac{x \cdot \left[(b+x)^2 + \frac{1}{12} \right]}{(b+x) \cdot (b+x^2)} < (x-1)\psi(a+2) + (2-x)\psi(a+1) \quad (3.56)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İyi bilinen

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

bağıntısı kullanılırsa (3.56) eşitsizliği

$$0 < c_4 x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \quad (1 < x \leq 2) \quad (3.57)$$

eşitsizliğine denktir. Burada

$$c_0 = \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \right) = 7.8498\dots,$$

$$c_0 = \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a+1} - 1 \right) + \left(a - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \right) - \frac{1}{12} = -2.7480\dots,$$

$$c_0 = \left(a - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = -1.8592\dots,$$

$$c_0 = \left(a - \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a} = 0.7174\dots,$$

$$c_0 = \frac{1}{a+1} = 0.2379\dots$$

dır.

$$P_2(x) = 0.2379x^4 + 0.7174x^3 - 1.8593x^2 - 2.7481x + 7.8498$$

polinomunun iki tane kompleks ve iki tane de reel kökü vardır ve bu reel kökler de negatiftir.

$P_2(0) > 0$ olduğundan her $x > 0$ için $P_2(x) > 0$ 'dır. Bu da (3.57) eşitsizliğini ispatlar. Bu da Lemma'nın ispatını tamamlar.

Lemma 3.17.

$c \geq \frac{1}{2}$ ise

$$f_c(x) = \frac{x\psi''(c+x)}{\psi'(c+x)}$$

fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında kesin monoton azalır [Alzer ve Ruehr, 1999].

İspat.

$c \geq \frac{1}{2}$ ve $x \geq 0$ olsun. $f_c(x)$ 'in türevini alırsak

$$\left[\psi'(c+x) \right]^2 \frac{d}{dx} f_c(x) = \psi'(c+x) \cdot \psi''(c+x) + x \cdot \left[\psi'(c+x) \cdot \psi'''(c+x) - (\psi''(c+x))^2 \right]$$

ifadesi elde edilir. Bilinen

$$\psi'(y) \cdot \psi'''(y) < (\psi''(y))^2 \quad (y > 0)$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \left[\psi'(c+x) \right]^2 \frac{d}{dx} f_c(x) &< \psi'(c+x) \cdot \psi''(c+x) + x \cdot \left[(\psi''(c+x))^2 \right] \\ &= \psi''(c+x) \left[\psi'(c+x) + x \cdot \psi''(c+x) \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

sonucunu buluruz. ψ' ve ψ'' ifadelerinin Teorem 2.10'da verilen integral temsillerini ve

$$\frac{1}{y} = \int_0^{\infty} e^{-yt} dt \quad (y > 0)$$

bağıntısını kullanırsak

$$\frac{1}{x} \psi'(c+x) + \psi''(c+x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} dt \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{te^{-ct}}{1-e^{-t}} dt - \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{t^2 e^{-ct}}{1-e^{-t}} dt$$

ifadesini elde ederiz. Teorem 2.18'de verilen Laplace konvülasyonunu kullanırsak bu bağıntıyı

$$\frac{1}{x} \psi'(c+x) + \psi''(c+x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \left[\int_0^1 g_c(s) ds - t g_c(t) \right] dt \quad (3.59)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$g_c(t) = \frac{t \cdot e^{-ct}}{1-e^{-t}}$$

dir. Basit bir hesaplama ile $c \geq \frac{1}{2}$ ve $x > 0$ için g_c 'nin kesin monoton azaldığını

gösterebiliriz. Öyleyse $t > 0$ için

$$\int_0^t g_c(s) ds > t g_c(t) \quad (3.60)$$

dır. (3.59) ve (3.60) birlikte

$$\psi'(c+x) + x.\psi''(c+x) > 0 \quad (x > 0) \quad (3.61)$$

olduğunu ispatlar. $y > 0$ için $\psi''(y) < 0$ olduğundan (3.58) ve (3.61) 'den dolayı $x > 0$ için $f'_c(x) < 0$ dır. Bu da Lemma'nın ispatını tamamlar.

Teorem 3.18.

$a > 0$ bir reel sayı olsun. O zaman her $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ için

$$\psi(a+xy) \leq \psi(a+x).\psi(a+y) \quad (3.62)$$

eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $a \geq a_0 = 3.203171...$ olmasıdır. Burada $a_0 = \psi^{-1}(1)$ bağıntısı ile verilir.

İspat.

Önce (3.62) eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $a > 0$ reel sayısının var olduğunu kabul edelim. O zaman yeterince büyük x 'ler için

$$\frac{\psi(a+xy)}{\psi(a+x)} \leq \psi(a+y)$$

olur.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi(z)}{\log z}$$

olduğundan $y > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(a+xy)}{\psi(a+x)} = 1 \leq \psi(a+y)$$

olur. Eğer burada $y \rightarrow 0$ alınırsa $\psi(a_0) = 1 \leq \psi(a)$

olur. $\psi(0, \infty)$ aralığında kesin monoton arttığından $a \geq a_0$ elde edilir. Şimdi her $x \geq 0$, $y \geq 0$ ve $a \geq a_0$ için (3.62) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

1.Durum:

$x \in [0,1]$ veya $y \in [0,1]$ olsun. $0 \leq x \leq 1$ ve $y \geq 0$ kabul edebiliriz. O zaman $a + y \geq a + xy$ olur. Bu ise

$$\psi(a + y) \geq \psi(a + xy) \geq 1 \quad (3.63)$$

olmasını gerektirir. (3.63) ve

$$\psi(a + x) \geq \psi(a_0) = 1$$

eşitsizliğinden dolayı

$$\psi(a + x)\psi(a + y) \geq \psi(a + xy)$$

elde edilir. Eşitlik durumu sadece ve sadece $x = y = 0$ ve $a = a_0$ durumunda sağlanır.

2.Durum:

$$P(a) = \psi(a + x)\psi(a + y) - \psi(a + xy)$$

şeklinde tanımlansın. ψ' fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında pozitif ve monoton azaldığından

$$\begin{aligned} P'(a) &= \psi'(a + x)\psi(a + y) + \psi(a + x)\psi'(a + y) - \psi'(a + xy) \\ &> \psi'(a + x)\psi(a + y) + [\psi'(a + y) - \psi'(a + xy)] \\ &> 0 \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Bu da

$$P(a) \geq P(a_0)$$

sonucunu verir. Bu nedenle (3.62) eşitsizliğini sadece $x > 1$, $y > 1$ ve $a = a_0$ durumunda ispatlamak yeterlidir. Burada $a = 3,203171...$ sayısını $\psi(a) = 1$ denklemini sağlayan tek pozitif reel sayı ve $y \geq x > 1$ kabul edelim.

$$u(x, y) = \frac{\psi'(a + xy)}{\psi'(a + y)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun y 'ye göre kısmi türevi alınırsa

$$f_a(t) = \frac{\psi''(a + t)}{\psi'(a + t)}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \left[f_a(x, y) - f_a(y) \frac{\psi'(a + xy)}{y\psi'(a + y)} \right]$$

eşitliği elde edilir. $a > \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 3.17'den dolayı $f_a(0, \infty)$ aralığında kesin monoton azalır. Bu ise

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} < 0$$

sonucunu verir. Yani u fonksiyonu y 'ye göre kesin monoton azalır. $y \geq x > 1$ olduğundan

$$u(x, y) < u(x, x) \quad (3.64)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.64) eşitsizliği ve Lemma 3.16'dan dolayı da

$$\frac{\psi'(a + xy)}{\psi'(a + y)} \leq \frac{\psi'(a + x^2)}{\psi'(a + x)} < \frac{\psi'(a + x)}{x} \quad (3.65)$$

elde edilir.

$$v(x, y) = \psi(a + x)\psi(a + y) - \psi(a + xy) \quad (3.66)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada y 'ye göre türev alıp (3.65)'i kullanırsak

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \psi(a + x)\psi'(a + y) - x\psi'(a + xy) > 0$$

bağıntısı elde edilir. $y \geq x > 1$ olduğundan bu da

$$v(x, y) \geq v(x, x) = [\psi(a + x)]^2 - \psi(a + x^2) \quad (3.67)$$

sonucunu verir. Eşitliğin sağ tarafındaki fonksiyonu $w(x)$ ile gösterirsek Lemma 3.16'dan dolayı $x > 1$ için

$$\frac{1}{2} w'(x) = \psi(a + x)\psi'(a + x) - x\psi'(a + x^2) > 0$$

sonucu elde edilir.

$$\psi(a + 1) = \psi(a) + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$$

olduğundan

$$w(x) > w(1) = \psi(a + 1)[\psi(a + 1) - 1] = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \frac{1}{a} > 0 \quad (3.68)$$

elde edilir. (3.66), (3.67) ve (3.68) eşitsizliklerinden $y \geq x > 1$ için

$$\psi(a+x)\psi(a+y) > \psi(a+xy)$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını verir.

Lemma 3.19.

$k \geq 1$ bir tamsayı ve c bir reel sayı ve $f_c(x) = x^c |\psi_k(x)|$ olsun. O zaman f_c fonksiyonu $c \geq k+1$ için monoton artar [Alzer, 2001].

Lemma 3.20.

$n \geq 1$ ve $x > 0$ için

$$\Delta_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} |\psi_n(x)|$$

tanımlayalım. O zaman Δ_n ve Δ_n' fonksiyonları $(0, \infty)$ aralığında monoton artar. Üstelik

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta_n(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Delta_n'(x) = 0$$

dır [Alzer, 2005].

İspat.

Lemma 3.19'den dolayı Δ_n ve Δ_n' fonksiyonları $(0, \infty)$ aralığında monoton artar.

Lemma 2.20'dan dolayı

$$|\psi_n(x)| = |\psi_n(x+1)| + \frac{n!}{x^{n+1}} \quad (3.69)$$

olduğundan

$$\Delta_n(x) = 1 + \frac{x^{n+1}}{n!} |\psi_n(x+1)| \quad (3.70)$$

ve

$$\Delta_n'(x) = \frac{n+1}{n!} x^n |\psi_n(x+1)| - \frac{x^{n+1}}{n!} |\psi_{n+1}(x+1)| \quad (3.71)$$

elde edilir. (3.70) ve (3.71) birlikte (3.69)'un ispatını verir.

Teorem 3.21.

$n \geq 1$ bir tamsayı ve $r \neq 0$ bir reel sayı olsun. O zaman x, y ve z sayıları $x^r + y^r = z^r$ bağıntısını sağlamak üzere

$$\Delta_n(x) + \Delta_n(y) < 1 + \Delta_n(z)$$

olması için gerek ve yeter şart $0 < r \leq 1$ olmasıdır. Yine x, y ve z pozitif reel sayıları $x^r + y^r = z^r$ bağıntısını sağlamak üzere

$$1 + \Delta_n(z) < \Delta_n(x) + \Delta_n(y)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $r < 0$ veya $r \geq n+1$ olmasıdır [Alzer, 2005].

İspat.

$x, y > 0$ için

$$f_{n,r}(x, y) = 1 + \Delta_n \left[(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} \right] - \Delta_n(x) - \Delta_n(y)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Her $x, y > 0$ için $f_{n,r}(x, y) > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$f_{n,r}(x, x) = 1 + \Delta_n \left[2^{\frac{1}{r}} x \right] - 2\Delta_n(x) > 0$$

olur. Lemma 2.13'ten dolayı

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

olduğundan

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{n,r}(x, x)}{x} = \frac{1}{n} \left(2^{\frac{1}{r}} - 2 \right)$$

sonucunu buluruz. Bu da $0 < r \leq 1$ olduğunu gösterir. Şimdi ise $0 < r \leq 1$ ve her $x, y > 0$ için

$f_{n,r}(x, y) > 0$ olduğunu gösterelim. $r \mapsto (x^r + y^r)^{\frac{1}{r}}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında monoton azaldığından Lemma 3.19'den dolayı $r \mapsto f_{n,r}(x, y)$ fonksiyonu da $(0, \infty)$ aralığında monoton azalır. Böylece

$$f_{n,r}(x, y) \geq f_{n,1}(x, y) = 1 + \Delta_n(x + y) - \Delta_n(x) - \Delta_n(y) = g_n(x, y) \quad (3.72)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıya Lemma 3.19 uygulanırsa

$$\frac{\partial}{\partial x} g_n(x, y) = \Delta_n'(x + y) - \Delta_n'(x) > 0 \quad (3.73)$$

ifadesi elde edilir. Bu da

$$g_n(x, y) > g_n(0, y) = 0$$

sonucunu verir. (3.72) ve (3.73) birlikte kullanılırsa

$$f_{n,r}(x, y) > 0 \text{ ve } x, y > 0$$

sonucu bulunur. Şimdi ise $r > 0$ olsun. $x, y > 0$ için

$$f_{n,r}(x, y) < 0 = f_{n,r}(0, y) \quad (3.74)$$

olduğunu kabul edelim. Burada $f_{n,r}(x, y)$ ifadesinin x 'e göre kısmi türevini alırsak

$$\frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} f_{n,r}(x, y) = x^{r-1-n} + \Delta_n' \left[(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} \right] (x^r + y^r)^{\frac{1}{r}-1} - \frac{\Delta_n'(x)}{x^n} \quad (3.75)$$

sonucunu elde ederiz. (3.71)'den dolayı

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta_n'(x)}{x^n} = \frac{n+1}{n!} |\psi_n(1)| \quad (3.76)$$

dır. Lemma 3.19'i kullanırsak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta_n' \left[(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} \right] (x^r + y^r)^{\frac{1}{r}-1} = \Delta_n'(y) y^{1-r} > 0 \quad (3.77)$$

ifadesini elde ederiz. (3.74) - (3.77) bağıntıları kullanılırsa $r-1-n \geq 0$ sonucu bulunur.

Şimdi ise $r < 0$ veya $r \geq n+1$ olduğunda $x, y > 0$ için

$$f_{n,r}(x, y) < 0 \quad (3.78)$$

olduğunu göstermeliyiz. $r < 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} < \min(x, y)$$

olduğundan Lemma 3.19'u kullanırsak

$$f_{n,r}(x, y) \leq 1 + \Delta_n(s) - \Delta_n(x) - \Delta_n(y) = u_n(x, y) \quad (3.79)$$

sonucunu buluruz. u_n fonksiyonunun x 'e göre kısmi türevini alırsak

$$v_n(x) = \frac{\Delta_n'(x)}{x^n}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial x} u_n(x, y) = x^n [v_n(s) - v_n(x)] \quad (3.80)$$

bağıntısını elde ederiz.

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xt} dt, \quad (x > 0)$$

integral temsilini, Teorem 2.10 ve Teorem 2.18'i kullanırsak

$$n! \frac{v_n'(x)}{x} = -\frac{n+2}{x} |\psi_{n+1}(x)| |\psi_{n+2}(x)| = \int_0^{\infty} e^{-xt} z_n(t) dt \quad (3.81)$$

elde edilir. Burada

$$z_n(t) = \frac{t^{n+2}}{1-e^{-t}} - (n+2) \int_0^t \frac{s^{n+1}}{1-e^{-s}} ds$$

dır. $z_n(0) = 0$ ve

$$z_n'(t) = \frac{t^{n+2} e^{-t}}{(1-e^{-t})^2}$$

olduğundan $z_n(0, \infty)$ aralığında negatiftir. Yani $v_n(0, \infty)$ aralığında monoton azalır. $s > x$

ise (3.80)'den dolayı

$$u_n(x, y) < u_n(0, y) = 0$$

sonucunu buluruz. Burada (3.79)'u kullanırsak (3.78)'i ispatlamış oluruz.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., Stegun I. A., 1965. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.
- Alzer, H., 1997. On Some Inequalities for the gamma and psi functions. *Math. Comp.*, **66**: 373-389.
- Alzer, H., Wells, J., 1998. Inequalities for the polygamma functions. *SIAM J. Math. Anal.*, **29(6)**: 1459-1466.
- Alzer, H., Ruehr, O. G., 1999. A submultiplicative property of the psi functions. *J. Comput Appl. Math.*, **101**: 53-60.
- Alzer, H., 2001. Mean-value inequalities for the polygamma functions. *Aequationes Math.*, **61**: 151-161.
- Alzer, H., 2005. A functional inequality for the polygamma functions. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **72**: 155-159.
- Apostol, T. M., 1976. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer.
- Batir, N., 2005. Some new inequalities for gamma and polygamma functions. *J. Inequal. Pure Appl. Math. (JIPAM)*, **6(4)**: 103.
- Batir, N., 2007. On some properties of digamma and polygamma functions. *J. Math. Anal. Appl.*, **328**: 452-565.
- Elezovic, N., Giordana, C., Pecaric, J., 2000. The best bounds in Gautschi's inequality. *Math. Inequal. Appl.*, **3**: 239-252.
- Srinivaran, G. K., 2007. The gamma function: An eclectic tour. *Amer. Math. Monthly.*, **114**: 297-315.
- Srivastava, H. M., Choi, J., 2001. *Series Associated with the Zeta and Related Functions*. Kluwer Academic Publishers.
- Wall, H. S., 1948. *Analytic Theory of Continued Fractions*. Van Nostrand., New York.

ÖZ GEÇMİŞ

1981 yılında Van'ın Erciş İlçesi'nde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erciş'te tamamladı. 1995 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı ve 1999 yılında bu okuldan mezun oldu. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı. Evli olup halen Milli Eğitim Bakanlığı'nda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.