

**CS-MODÜLLER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ
CS-HALKA VE MODÜL SINIFLARI
ÜZERİNE ARAŞTIRMALAR**

**CS-MODULES AND INVESTIGATIONS ON
CLASSES OF GENERALIZED CS-RINGS
AND MODULES**

CANAN CELEP YÜCEL

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı için öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2008

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI 'nda**
DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan :.....
Prof. Dr. ALİ BÜLENT EKİN

Üye (Danışman) :.....
Prof. Dr. ADNAN TERCAN

Üye :.....
Prof. Dr. YÜCEL TIRAŞ

Üye :.....
Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Üye :.....
Doç. Dr. ALİ ERDOĞAN

ONAY

Bu tez ... / ... / 2008 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Erdem YAZGAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

CS-MODÜLLER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ CS-HALKA VE MODÜL SINIFLARI ÜZERİNE ARAŞTIRMALAR

Canan CELEP YÜCEL

ÖZ

Bu çalışmada komplement altmodülleri dik toplanan olan modüllerin (yani CS-modüllerin) temel özellikleri ile C_{11} , FI-extending ve özel dönüşümlerin genişletilmesi türünden genelleştirmeleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. CS-modüllerin yeni genelleştirmeleri tanımlanıp incelenmiş, mevcut genelleştirmeler ile bağlantıları araştırılmıştır. Elde edilen sonuçların bütünlüğü açısından gerek duyuldukça örnekler verilmiştir.

Birinci bölüm, çalışmamızda kullandığımız temel tanımlardan essential, komplement altmodül tanımları, CS-modüller ve nonsingular CS-modüller ile bu tür modüllere ilişkin sonuçlara ayrılmıştır.

İkinci bölümde, sürekli ve yarı-sürekli modüllerin belirli altmodüllerinden M ye olan dönüşümlerin, M den M ye olan dönüşümlere genişletilmesi anlamında karakterizasyonları verilmiştir. Buradan da CS-modüller için benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, CS-modüllerin bir genelleştirmesi olarak ECS-modüller tanımlanıp bu yeni modül sınıfının özellikleri araştırılmıştır. Diğer yandan, 2. bölümde ayrıntılı verilen P_1 özelliğinden daha genel bir modül sınıfı ele alınmış ve ec-kapalı altmodüllerden, modüle olan dönüşümlerin modüle genişletilmesi anlamında ec-injektiflik özelliği incelenmiştir.

Son bölümde, CS-modüllerin, C_{11} (yani, her altmodül dik toplanan olan komplemente sahiptir) ve FI-extending (yani, her fully invariant altmodül bir dik toplananda essential altmodüldür) olarak bilinen genelleştirmelerinin yanında yeni bir genelleştirme tanımlayıp ayrıntılı olarak incelenmiştir. C_{11} ve FI-extending modüller konusunda, yakın zaman önce yayınlanan bazı ilgili sonuçlar

Çalışmanın bütünlüğünü sağlamak amacıyla ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Essential altmodül, Komplement altmodül, CS-modül, C_{11} -modül, FI-extending modül.

Danışman: Prof. Dr. Adnan TERCAN

CS-MODULES AND INVESTIGATIONS ON CLASSES OF GENERALIZED CS-RINGS AND MODULES

Canan CELEP YÜCEL

ABSTRACT

In this work, fundamental properties of modules whose complement submodules are direct summand (i.e., CS-modules) are investigated in details with the generalizations of the C_{11} , FI-extending and extension of special homomorphisms. New generalizations of CS-modules are defined and investigated, the connections with the existing generalizations are searched. For the completeness of the obtained results, examples are given when necessary.

The first chapter is devoted to the basic definitions used in our work which are the definitions of essential and complement submodules, CS-modules and nonsingular CS-modules, and the results related to these kind of modules.

In the second chapter, the characterizations in the sense of generalizations between the homomorphisms from the specified submodules of continuous and quasi-continuous modules to M and the homomorphism from M to M are given. And then similar result are obtained for the CS-modules.

In the third chapter, as a generalizations of CS-modules, ECS-modules are defined and properties of this new class of modules are investigated. On the other hand, a more general class of modules than property P_1 , as given in details in the second chapter as the generalizations of CS-modules, is considered and the property of ec-injectivity, in the sense of generalizations of the homomorphisms from ec-closed submodules to module, are searched.

In the last chapter, in addition to the C_{11} (i.e., every submodules has a complement which is a direct summand) and FI-extending (i.e., every fully invariant submodule is essentially contained in a direct summand) known as the generalizations of CS-modules, a new generalization is defined and investigated

in details. Recently published some related results with proofs in the subject of C_{11} and FI-extending modules are given for the sake of completeness of this work.

Keywords: Essential module, Complement module, CS-module, C_{11} -module, FI-module.

Advisor: Prof. Dr. Adnan TERCAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında değerli bilgilerinden ve deneyimlerinden yararlandığım, her zaman her konuda bana yol gösteren ve sabırla yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Adnan TERCAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın gerçekleşmesinde gerek tez izleme komitesi ve gerekse tez jürisi olarak destek ve önerilerinden dolayı görev almış tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Son olarak bu süreç boyunca her türlü sıkıntıyı, zorluğu ve sevinci benimle yaşayan anneme, babama, canım kızıma ve desteğini esirgemeyen eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

ÖZ	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1 Temel Kavramlar ve Özellikler	1
1.1 Giriş	1
1.2 Essential ve Komplement Altmodüller	2
1.3 CS-Modüller	11
1.4 Nonsingular CS-Modüller	17
2 Sürekli ve Yarı-Sürekli Modüller	24
2.1 Tanımlar ve Özellikler	24
2.2 Karakterizasyonlar	27
3 Ec-Kapalı Altmodülleri Dik Toplanan Olan Modüller ve Ec-İnjektiflik	32
3.1 ECS-Modüller	32
3.2 Ec-İnjektiflik	41
3.3 ECS-modüllerin dik toplamaları	47
3.4 Düzgün Altmodüllere Ayrışım	50
4 CS-Modüllerin Genelleştirmeleri	54
4.1 (C_{11}) ve FI-extending Modüller	54
4.2 EC_{11} -Modüller	63

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbf{X} \leq \mathbf{M}$	: X, M nin altmodülü
$\mathbf{X} \leq_e \mathbf{M}$	: X, M nin essential altmodülü
$\mathbf{SocM}$	: M nin socle kümesi
$\mathbf{X} \leq_c \mathbf{M}$	: X, M nin komplementi
$\mathbf{Z}(\mathbf{M})$	: M nin singular(tekil) altmodülü
$\mathbf{Z}_2(\mathbf{M})$	: M nin ikinci singular(tekil) altmodülü
$\mathbf{r}(\mathbf{x})$	: M nin sağ sıfırlayıcısı
$\mathbf{ACC}$	: Artan zincir kuralı
$\mathbf{End}(\mathbf{M}_R)$	: M_R modülünün endomorfizmalar halkası
$\mathbf{Hom}(\mathbf{N}, \mathbf{M})$	: N den M ye olan homomorfizmaların kümesi
$\mathbf{m}^{-1}N$	: R nin $\{r \in R : mr \in N\}$ sağ ideali
$\mathbf{E}(\mathbf{M})$	: M nin injektif hull'ı
$\mathbf{S}_1(\mathbf{R})$	: R nin sol merkezli idempotentlerinin kümesi
$\mathbf{dim}(\mathbf{M})$	: M nin Goldie (düzgün) buyutu

1 Temel Kavramlar ve Özellikler

1.1 Giriş

Bu çalışmada R değişmeli olması gerekmeyen ve birimli bir halka, M de sağ R -modül olarak alınacaktır. Çalışmaya başlangıç oluşturan CS-modül kavramının literatürdeki gelişimini kısaca vurgulayarak başlayalım.

CS (yada extending)-modül kavramının orjini 1930 lu yıllarda John von Neumann'nın çalışmalarına uzanır. Von Neumann'nın Kuantum Mekanik'i'ndeki çalışmaları onu "Sürekli Geometri" yi tanımlamasına ve geliştirmesine yönlendirmiştir. Bu günümüzde üst ve alt sürekli tam modüler **Latis** olarak adlandırılır. $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ bir tam modüler latis olsun. Eğer $a \in L$ ve $\{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, L nin tam sıralı bir alt kümesi iken,

$$a \wedge \bigvee_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (a \wedge b_\lambda)$$

oluyorsa, $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ latisine **üst sürekli (upper continuous)** denir.

R bir halka ve M de bir sağ R -modül olsun. Bu durumda M nin alt-modüllerinin oluşturduğu latis üst sürekli tam modüler bir latisdir (Genel olarak alt sürekli olması gerekmez).

Von Neumann [29,30,31] çalışmalarında sürekli geometrilerin teorisini geliştirdi ve özellikle bunları von Neumann (regüler) halkanın sol temel ideallerinin oluşturduğu latisde inceledi. Regüler halkalarda eğer temel sol ideallerin latisi üst ve alt sürekli ise bu halkaya süreklidir dedi. Bu çalışmalara Utumi [27] devam etti. Bu kavramları Jeremy [13] modüllere taşıdı. Chatters ve Hajarnavis "CS" kısaltmasını "**complements are summands**" için kullandılar [7]. Bir çok araştırmacı CS yerine extending veya C_1 gösterimlerini kullanarak bu modül sınıflarını yada genelleştirilmiş sınıflarını araştırmalara devam etmektedir.

Bu çalışmada CS-modüller ve mevcut genelleştirmeleri verilmiş bunun yanında yeni genelleştirmeler tanımlanıp araştırılmıştır.

1.2 Essential ve Komplement Altmodüller

Bu kesimde, çalışmamıza temel oluşturan bazı özel tipteki altmodüllerin tanım ve özelliklerini ayrıntılı olarak vereceğiz. Bu kesimdeki sonuçlar için [1], [9], [11] önerilir.

Tanım 1.2.1 M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$ oluyorsa veya buna denk olarak bir $L \leq M$ için $N \cap L = 0$ olduğunda $L = 0$ 'ı gerektiriyorsa N ye M nin **essential (large, geniş) altmodülü** (veya M ye N nin essential genişlemesi) denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.2 M bir modül olsun. Bu durumda;

1. $N \leq M$ olsun. $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ olmasıdır.
2. $K \leq N \leq M$ olmak üzere $K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olmasıdır.
3. $N \leq_e M$ ve $K \leq M$ ise $N \cap K \leq_e K$ dir.
4. $1 \leq i \leq t$ olmak üzere her $t \geq 1$ için $N_i \leq_e K_i$ ise $(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_t) \leq_e (K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_t)$ dir.
5. $K \leq N \leq M$ olmak üzere $N/K \leq_e M/K$ ise $N \leq_e M$ dir.
6. Bir $m \in M$ için $N \leq_e M$ ise $m^{-1}N \leq_e R_R$ dir.
7. Her sıfırdan farklı indis kümesi I için, $i \in I$ olmak üzere $N_i \leq_e M_i$ olması için gerek ve yeter koşul $\bigoplus_{i \in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i$ olmasıdır.
8. $A, B, C \leq M$ olmak üzere eğer $f : B \rightarrow C$ bir homomorfizma ve $A \leq_e C$ ise $f^{-1}(A) \leq_e B$ dir.

Yukarıdaki (7) ve (4) özellikleri ile ilgili olarak, (7) de $A \leq_e B$ ve $A' \leq_e B'$ iken $A + A' \leq_e B + B'$ olmayabilir [11]. (4) de ise t sonlu değil ise $\bigcap_t N_i \leq_e \bigcap_t K_i$ doğru olmayabilir.

Önteorem 1.2.3 *M bir R -modül, $M = K \oplus K'$ ve $N \leq K$ olsun. Bu durumda $M/N = K/N \oplus (K' + N)/N$ olur.*

Kanıt. $K/N + (K' + N)/N \leq M/N$ dir. $(m + N) \in M/N$ alalım. Buradan $k \in K$ ve $k' \in K'$ olmak üzere $m + N = (k + k') + N = (k + N) + (k' + N) \in K/N + (K' + N)/N$ elde edilir. Yani $M/N \subseteq K/N + (K' + N)/N$ olduğundan $M/N = K/N + (K' + N)/N$ dir. Şimdi $K/N \cap (K' + N)/N = 0$ yani $K \cap (K' + N) = N$ olduğunu görelim. $x \in K \cap (K' + N)$ olsun. Bu durumda $x \in K$ ve $n \in N$, $k' \in K'$ olmak üzere $x = k' + n$ olur. O halde $x - n = k' \in K \cap K' = 0$ olduğundan $x = n$ dir. Böylece $x \in N$ elde edilir. Yani, $K \cap (K' + N) = N$ olup $K/N \cap (K' + N)/N = N/N = 0$ olur. Dolayısıyla $M/N = K/N \oplus (K' + N)/N$ dir. $\square$

Önteorem 1.2.4 *M bir sağ R -modül, $0 \neq a \in M$ ve $K \leq_e M$ olsun. Bu durumda, $aL \neq 0$ ve $aL \subseteq K$ olacak şekilde R nin bir essential sağ L ideali vardır.*

Kanıt. $L = \{r \in R : ar \in K\}$ olsun. Buradan, L , R nin bir sağ idealidir ve $aL \subseteq K$ dır. Böylece $aR \cap K \neq 0$ olur. Bazı $r \in R$ için ar , K nın sıfırdan farklı elemanıdır. Yani, $r \in L$ için $aL \neq 0$ dır. I , R nin sıfırdan farklı sağ ideali olsun. Şimdi $I \cap L \neq 0$ olduğunu görelim. Eğer $aI = 0$ ise $I \subseteq L$ olduğundan $I \cap L \neq 0$ olur. Farzedelim ki, $aI \neq 0$ olsun. Bu durumda $aI \cap K \neq 0$ dır. Böylece bazı $x \in I$ için ax , K nın sıfırdan farklı elemanıdır. Buradan $x \in L$ dır. Dolayısıyla $I \cap L \neq 0$ dır. Böylece $L \leq_e R$ olur. $\square$

Sonuç 1.2.5 *Herhangi bir M modülü için $\text{Soc}(M_R) = \bigcap \{N : N \leq_e M\}$ dir.*

Tanım 1.2.6 *M bir R -modül ve L , M nin bir altmodülü olsun. $K \cap L = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir K altmodülüne L nin (M deki) **komplementi** denir.*

Tanım 1.2.6 daki K altmodülü tek olmak zorunda değildir. Şimdi vereceğimiz önermeden, bir M modülündeki her altmodülün bir komplement altmodülünün (M de) varlığı elde edilir ki, bu komplement altmodülleri oldukça kullanışlı yapmaktadır.

Önerme 1.2.7 M bir modül ve $L, N \leq M$ altmodülleri için $N \cap L = 0$ olsun. Bu durumda L nin M de bir K komplementi vardır ki, $N \subseteq K$ dir.

Kanıt. $S = \{X \leq M : N \leq X \text{ ve } X \cap L = 0\}$ kümesini tanımlayalım. $N \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dir. $\{X_i : i \in I\}$, S de bir zincir olsun. S tam sıralıdır. $U = \bigcup_{i \in I} X_i$ alalım. Herhangi iki $X_i, X_j \in S$ için $X_i \subseteq X_j$ yada $X_j \subseteq X_i$ olduğundan U bir altmodüldür. Her $i \in I$ için $N \leq X_i$ olduğundan $N \leq \bigcup_{i \in I} X_i$ dir. Her $i \in I$ için $X_i \cap L = 0$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} X_i \cap L = 0$ olup $U \in S$ olur. Yani U , $\{X_i : i \in I\}$ zincirinin bir üst sınırıdır. Böylece Zorn's Lemma ile S nin bir maksimal elemanı vardır. Bu K ile gösterilirse, $K \cap L = 0$ olduğundan K , L nin M deki bir komplementidir. Ayrıca S nin tanımından $N \subseteq K$ dir. $\square$

Şimdi ispatlayacağımız önerme, bir modülde essential altmodüller üretmek anlamında bir teknik sağlamaktadır.

Önerme 1.2.8 M bir modül, $L \leq M$ ve K , L nin M içinde herhangi bir komplementi olsun. Bu durumda $K \oplus L \leq_e M$ dir.

Kanıt. $N \leq M$ ve $(K \oplus L) \cap N = 0$ alalım. $K \subseteq K + N$ olduğu açıktır. Bu durumda K , L nin M içinde herhangi komplementi olduğundan $(K + N) \cap L \neq 0$ olur. Buradan $n \in N$ ve $0 \neq x \in L$ için $x = k + n$ olacak şekilde bir $k \in K$ vardır. Böylece $n = x - k \in (K \oplus L) \cap N = 0$ olduğundan $n = 0$ elde edilir. $x = k \in K \cap L = 0$ ise $x = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $K = K + N$ dir. Böylece $N \leq K$ ise $N \leq K \oplus L$ olur. $(K \oplus L) \cap N = N = 0$ olduğundan $N = 0$ dir. Dolayısıyla $K \oplus L \leq_e M$ elde edilir. $\square$

Teorem 1.2.9 M bir modül, $A, B \leq M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. Bu durumda B , A nın M de bir komplementi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $(A+B)/B \leq_e M/B$ olmasıdır.

Kanıt. B , A nın M içinde bir komplementi ve $A \cap B = 0$ olsun. $(A + B)/B \cap (U/B) = 0$ olacak şekilde $B \leq U \leq M$ alalım. $(A + B) \cap U = B$ olur. Modüler kuralından $(A \cap U) + B = B$ dir. Böylece $A \cap U \leq B$ olduğundan $A \cap U \leq A \cap B = 0$ olur. B maksimal olduğundan $B = U$ dur. Buradan $U/B = 0$ olup $(A + B)/B \leq_e M/B$ olduğu elde edilir.

Diğer taraftan $(A + B)/B \leq_e M/B$ olduğunu kabul edelim. $A \cap U = 0$, $B \leq U \leq M$ olacak şekilde keyfi bir U ve $x \in (A + B) \cap U$ alalım. Bu durumda $x \in (A + B)$ ve $x \in U$ dur. $a \in A$, $b \in B$ olmak üzere $x = a + b$ dir. $a = x - b \in A \cap U = 0$ olduğundan $a = 0$ olur ve böylece $x = b \in B$ elde edilir. Buradan $(A + B) \cap U = B$ olur. Yani $(A + B)/B \cap (U/B) = 0$ dir. Kabulümüzden $U/B = 0$ olur. Dolayısıyla $B = U$ olduğundan B maksimaldir. Böylece B , A nın M deki komplementidir. $\square$

Tanım 1.2.10 M bir modül ve K , M nin bir altmodülü olsun. Eğer K , M de herhangi bir altmodülün komplementi ise K ya (M de) bir **komplement** denir ve $K \leq_c M$ ile gösterilir.

Açıktır ki, bir M modülü için $0, M \leq_c M$ dir.

Daha genel olarak;

Sonuç 1.2.11 Bir M modülünün her dik toplananı M de bir komplementtir.

Sonuç 1.2.11 deki ifadenin tersi genel olarak doğru olmayabilir. Örneğin; F bir cisim ve V de 2 boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere $R_R = \left\{ \begin{bmatrix} f & v \\ 0 & f \end{bmatrix} : f \in F, v \in V = (v_1 F \oplus v_2 F) \right\}$ ve $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_1 f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : f \in F \right\}$, $J = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_2 f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : f \in F \right\}$ olarak alalım. Bu durumda I , J nin R deki (benzer olarak J , I nin) komplementidir. Yani I , R nin komplementidir. Ancak I , R nin bir dik toplananı değildir.

Önerme 1.2.12 M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \leq_e K$ olacak şekilde bir $K \leq_c M$ vardır.

Kanıt. N' , M de N nin komplementi olsun. Böylece $N' \cap N = 0$ dir ve N' nün bir K komplementi vardır ve Önerme 1.2.7 den $N \subseteq K$ dir.

$0 \neq L \leq K$ olsun. $N' \subseteq L + N'$ olduğundan $(L + N') \cap N \neq 0$ olur. Böylece $0 \neq n \in (L + N') \cap N$ ise $n \in (L + N')$ ve $n \in N$ olur. $x \in L$, $n' \in N'$ olmak üzere $n = x + n'$ dır. Buradan $n' = n - x \in N' \cap K = 0$ olduğundan $n' = 0$ dır. Böylece $n = x \in N \cap L$ olup $N \cap L \neq 0$ olur. Yani $N \leq_e K$ elde edilir. $\square$

Önerme 1.2.12 de varlığı ispatlanan K altmodülüne N nin M deki **kapanışı** (*closure*) denir.

Önerme 1.2.13 M bir modül ve K, M nin altmodülü olsun. Bu durumda $K \leq_c M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq_e L \leq M$ ise $K = L$ olmasıdır.

Kanıt. Farzedelim ki $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L \leq M$ olsun. Bu durumda K bir X in M de komplementi olacak şekilde $X \leq M$ vardır. Böylece $K \cap X = 0$ olur. $0 = K \cap X \leq_e L \cap X$ olduğundan $L \cap X = 0$ dır. $K, K \cap X = 0$ koşulu altında maksimal olduğundan $K = L$ olur.

Tersine, $K \leq M$ olduğundan Önerme 1.2.12 den K nın M de bir L bir kapanışı vardır. Yani $K \leq_e L \leq_c M$ dır. $K = L$ olduğundan $K \leq_c M$ dır. $\square$

Önerme 1.2.14 M bir modül ve $K, N \leq M$ olsun. Eğer $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$ dir.

Kanıt. $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ olduğunu kabul edelim. Buradan bir $K' \leq N$ için K, K' nün N deki komplementi ve bir $N' \leq M$ için de N, N' nün M deki komplementi olur. $x \in K \cap (K' + N')$ alalım. $k' \in K', n' \in N'$ için $x = k' + n'$ dır. $x - k' = n' \in N' \cap N = 0$ olur. Böylece $x = k' \in K' \cap K = 0$ olduğundan $K \cap (K' + N') = 0$ elde edilir. Farzedelim ki, $K \leq_e L \leq M$ olsun. O halde $0 = K \cap (K' + N') \leq_e L \cap (K' + N')$ olup $L \cap (K' + N') = 0$ dır. Buradan $[N \cap (L + N')] \cap K' = (N \cap K') \cap (L + N') = K' \cap (L + N') = 0$ olur. Fakat $K \subseteq N$ ve $K \subseteq L + N'$ olduğundan $K \subseteq N \cap (L + N')$ dır. K, K' nün N deki komplementi olduğundan $K \cap K' = 0$ koşulu altında K' maksimal altmodüldür. $K \subseteq N \cap (L + N')$ ve $[N \cap (L + N')] \cap K' = 0$ olduğundan $K = N \cap (L + N')$ olur. Böylece $(N + L) \cap N' = 0$ dır. N, N' nün M deki komplementi olduğundan

$N \cap N' = 0$ koşulu altında N' maksimal altmodüldür ve $N \subseteq N + L$ olduğundan $N = N + L$ dir. Buradan $L \leq N$ olur. $L = L \cap (L + N') \leq N \cap (L + N') = K$ olduğundan $K = L$ dir. Önerme 1.2.13 den $K \leq_c M$ elde edilir. $\square$

Önerme 1.2.15 *M bir modül, $K \leq_c M$ ve $K \leq N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul $N/K \leq_e M/K$ olmasıdır.*

Kanıt. İlk olarak $N/K \leq_e M/K$ olduğunu kabul edelim. $N \leq_e M$ olduğu Önerme 1.2.2 (5) den açıktır.

Tersine $N \leq_e M$ olsun. $M' = M/K$, $N' = N/K$ ve $N' \cap L' = 0$ olacak şekilde $L' \leq M'$ alalım. Bu durumda bir $L \leq M$ için $K \subseteq L$ olmak üzere $L' = L/K$ ve $N \cap L = K$ dir. K, K' nün M deki komplementi olsun. Böylece $K \cap K' = 0$ olduğundan $N \cap L \cap K' = 0$ dir. $N \leq_e M$ olduğundan da $L \cap K' = 0$ olur. Buradan $K \subseteq L$ ve K, K' nün M deki komplementi olduğundan $K = L$ dir. $L' = 0$ olup $N' \leq_e M'$ olur. Yani $N/K \leq_e M/K$ dir. $\square$

Önerme 1.2.16 *M bir modül, $K \leq_c M$ ve $L \leq_c M$ olsun. Bu durumda K, M de L nin komplementi olması için gerek ve yeter koşul L, M de K nın komplementi olmasıdır.*

Kanıt. İlk olarak K, M de L nin komplementi olsun. $L \subseteq L' \leq M$ ve $L' \cap K = 0$ alalım. Önerme 1.2.8 den $K \oplus L \leq_e M$ olur. Böylece Önerme 1.2.2 (1) den $k \in K$, $x \in L$ için $mr = k + x$ olacak şekilde bir $0 \neq m \in M$ vardır. $L' \leq M$ olduğundan $0 \neq y \in L'$ için $0 \neq yr = k + x$ dir. Buradan $k = (yr - x) \in K \cap L' = 0$ olur. Böylece $yr = x$ olduğundan $yr \in L$ elde edilir. Önerme 1.2.2 (1) den $L \leq_e L'$ olur. Fakat $L \leq_c M$ olduğundan Önerme 1.2.13 den $L = L'$ dür. O halde L, M de K nın komplementidir. Terside benzer şekilde gösterilir. $\square$

Önerme 1.2.17 *M bir modül ve $N \leq K \leq M$ olsun. Bu durumda,*

1. $K \leq_c M$ ise $K/N \leq_c M/N$ dir.

2. $K/N \leq_c M/N$ ve $N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$ dir.

Kanıt. (1) $L \leq M$ altmodülü $K \subseteq L$ ve $K/N \leq_e L/N$ koşullarını sağlasın. Bu durumda Önerme 1.2.15 den $K/N \leq_e L/N$ olduğundan $K \leq_e L$ olur. $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L$ koşulları ile Önerme 1.2.13 den $K = L$ dir. Böylece $K/N = L/N$ olur. Dolayısıyla Önerme 1.2.13 den $K/N \leq_c M/N$ dir.

(2) $K/N \leq_c M/N$ ve $N \leq_c M$ olsun. Bu durumda kabulden $K', N' \leq M$ için $N \subseteq K'$ olmak üzere $K/N, M/N$ de K'/N nin ve N, M de N' nün komplementidir. Böylece $K/N \cap K'/N = 0$ olacak şekilde $K/N \leq M/N$ maksimal altmodülü vardır. Buradan $K \cap K' = N$ dir. Benzer şekilde $N \cap N' = 0$ olur. O halde $(K \cap K') \cap N' = K \cap (K' \cap N') = 0$ dır. Farzedelim ki $K \leq L \leq M$ ve $L \cap (K' \cap N') = 0$ olsun. $N \subseteq K'$ ve $N \subseteq K \subseteq L$ olduğundan $N \subseteq L \cap K'$ olur. Ayrıca $(L \cap K') \cap N' = 0$ ifadesini kullanarak N, M de N' nün komplementi olduğundan $L \cap K' = N$ olur. Buradan $L/N \cap K'/N = 0$ dır. Bu koşul altında K/N maksimal altmodül olduğundan ve $K \subseteq L$ ise $K/N \subseteq L/N$ olacağından $K/N = L/N$ dir. Böylece $L = K$ olur. Bu durumda $K, K \cap (K' \cap N') = 0$ koşulu altında maksimal altmodül olduğundan K, M de $K' \cap N'$ nün komplementidir. Yani $K \leq_c M$ dir. $\square$

Şimdi 1.3 kesimde incelenecek olan CS-modüller de sıkça kullanacağımız ve temel aldığı sonlu Goldie boyut ve İnjektif modül tanımları verilecektir.

Tanım 1.2.18 M bir R -modül olsun. Eğer M sıfır olmayan altmodüllerin bir sonsuz dik toplamını kapsamıyorsa M ye **sonlu Goldie boyutlu (yada sonlu düzgün boyutlu)** modül denir.

M sıfırdan farklı sonlu Goldie boyutlu bir R -modül olsun. Bu durumda M bir düzgün U altmodül (yani $U \neq 0$ ve her $0 \neq X, Y \leq U$ için $X \cap Y \neq 0$) kapsar. Üstelik, bir n pozitif tamsayısı ve $i \neq j$ olmak üzere $U_i \cap U_j = 0$ olacak biçimde U_i ($1 \leq i \leq n$) düzgün altmodülleri vardır ki, $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n \leq_e M$ dir. Bu durumda n sayısı M nin **Goldie boyutu (yada düzgün boyutu)** olarak adlandırılır. Eğer $1 \leq i \leq k$ olmak üzere $0 \neq N_i \leq M$ ve $N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$

bir dik toplam ise $k \leq n$ dir. Goldie boyutu ile ilgili temel özellikler için [8], [1] önerilir.

Tanım 1.2.19 R bir halka J , R -modül, $g : A \rightarrow B$ ve $f : A \rightarrow J$ homomorfizmalar olmak üzere $0 \rightarrow A \rightarrow B$ kısa tam dizi olsun.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \\ & & \downarrow & \searrow & \\ & & J & & \end{array}$$

diagramı değişmeli yani $hg = f$ olacak şekilde $h : B \rightarrow J$, R -modül homomorfizması varsa J ye **injektif modül** denir.

Sonuç 1.2.20 N bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.

1. N injektif modüldür.
2. $N \leq M_R$ ise N, M de dik toplanandır.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2): $N \leq M$ ve N injektif bir modül olsun.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M \\ & & \downarrow & \searrow & \\ & & N & & \end{array}$$

diagramında N injektif olduğundan $\theta : M \rightarrow N$ ye bir homomorfizma vardır. $m \in M$ alalım. $\theta(m) \in N$ olur. Buradan $\theta(m) = \theta(\theta(m))$ dir. O halde $\theta(m - \theta(m)) = 0$ olup $(m - \theta(m)) \in \ker\theta$ dir. Yani $m \in \ker\theta + \theta(m)$ dir. Böylece $M \subseteq \ker\theta + N$ elde edilir. Ayrıca $\theta(m) \in N \leq M$ ve $\ker\theta \leq M$ olduğundan $\ker\theta + N \subseteq M$ olur. Dolayısıyla $M = \ker\theta + N$ dir. $x \in \ker\theta \cap N$ alalım. O halde $\theta(x) = 0$ ve $x \in N$ olur. $x \in N$ olduğundan $\theta(x) = x$ dir. Böylece $x = 0$ olup $\ker\theta \cap N = 0$ olduğundan $M = N \oplus \ker\theta$ dir. Yani N, M nin dik toplanandır.

(2) $\Rightarrow$ (1): Tersine $N \leq M_R$ ise N, M de dik toplanan olsun. [21, Theorem 2.11] den her modülün bir injektif genişlemesi olduğundan I_R injektif modül olmak üzere $N \leq I_R$ dir. Kabulümüzden dolayı $I = N \oplus N'$ olacak şekilde $N' \leq I_R$ vardır. [21, Proposition 2.3] den I_R injektif olduğu için N de injektiftir. $\square$

Tanım 1.2.21 R bir halka P , R -modül, $g : A \rightarrow B$ ve $f : P \rightarrow B$ homomorfizmalar olmak üzere $A \rightarrow B \rightarrow 0$ kısa tam dizisi olsun.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow & \\ A & \xrightarrow{\quad} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

diagramı değişmeli yani $goh = f$ olacak şekilde $h : P \rightarrow A$, R -modül homomorfizması varsa P ye **projektif modül** denir.

Sonuç 1.2.22 R bir halka ve P bir R -modül olsun. O halde, aşağıdakiler denktir.

1. P projektiftir.

2. Her

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi split dizidir.

3. F bir serbest modül ve K , R -modül olmak üzere $F \cong K \oplus P$ dir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2):

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow 1_P & \\ B & \xrightarrow{\quad} & P \longrightarrow 0 \end{array}$$

diagramını göz önüne alalım. P projektif olduğundan $goh = 1_P$ olacak şekilde bir R -modül homomorfizması vardır. Böylece kısa tam dizi

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{h} \end{array} P \longrightarrow 0$$

olduğundan split dizidir. Buradan, $B \cong A \oplus P$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3): R halkası üzerindeki her A modülü serbest F modülünün homomorfik görüntüsüdür. O halde, P de bir R -modül olduğundan $g : F \rightarrow P$ epimorfizması vardır. Eğer $K = \ker g$ alırsak,

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\subset} F \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır. Hipotezden dizi split tam dizidir. Dolayısıyla $F \cong K \oplus P$ dir.

(3) $\Rightarrow$ (1): $\pi : F \cong K \oplus P \rightarrow P$ kanonik epimorfizma ve $i : P \rightarrow F \cong K \oplus P$ kanonik monomorfizma olsun. Alt satır tam olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{g} B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

R -modül homomorfizma diagramı verilsin. Bu durumda,

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \uparrow i & \downarrow \pi \\ & P & \\ & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{g} B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

h_1 (dotted arrow from A to F), h (dotted arrow from A to P)

diagramımı ele alalım. F serbest modül olduğundan projektif modüldür. Böylece $goh_1 = fo\pi$ olacak şekilde $h_1 : F \rightarrow A$ bir R -modül homomorfizması vardır. $h = h_1oi : P \rightarrow A$, R -modül homomorfizma olsun. O halde, $gh = gh_1i = (fo\pi)oi = fo(\pi oi) = fo1_P = f$ olduğundan diagram değişmelidir ve P projektiftir. $\square$

1.3 CS-Modüller

Önceki kesimde gerekli özel altmodüller ve özelliklerinin verilmiş olması, 1930 lu yıllarda von Neumann'ın sürekli geometrilerinde kullanması ile ilk olarak tanımlanan, daha sonra Utumi ve öğrencileri tarafından halka ve modüllere genişletilen ve günümüzde de bir çok araştırmacının odaklandığı "CS-modül" kavramını incelememizi mümkün yapar. Çalışmalarımızda esas olan kimi CS teori teorem ve sonuçlarının ispatları da bütünlük oluşturması anlamında yapılacaktır.

Tanım 1.3.1 M bir R -modül olsun. Eğer M nin her K komplement alt-modülü M de bir dik toplanan oluyor ise M ye **CS-modül** (extending modül) denir.

Bu tanıma denk koşullardan biri M nin her N altmodülünün M nin bir dik

toplamanın da essential olarak kapsanmasıdır. Yine bir R halkası için R_R CS-modül ise R ye **sağ CS-halka** denir. Yani, her $I \leq R_R$ sağ ideali için bir $e^2 = e \in R$ vardır ki, $I \leq_e eR$ dir. CS-modüllere yarıbasit modüller, düzgün modüller, injektif modüller ve sonlu ranklı serbest Abel gruplar örnek verilebilir. Diğer yandan $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} = M_{\mathbb{Z}}$, CS olmayan bir modüldür. [9]

CS bir modülün her alt modülü CS olmayabilir. Örneğin; M , CS olmayan bir R -modül ve $E(M)$ de M nin injektif hull'ı olsun. Bu durumda, $M \leq E(M)$ ve $E(M)$, CS-modüldür.

Önteorem 1.3.2 M , CS-modül ve N , M nin bir dik toplanan altmodülü olsun. Bu durumda N , CS-modüldür.

Kanıt. N , M de dik toplanan olduğundan $M = N \oplus K$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. $X \leq_c N$ alalım. N , M de dik toplanan olduğundan $X \leq_c N \leq_c M$ olur. Komplementlerde geçişme özelliğinden $X \leq_c M$ dir ve M , CS-modül olduğundan ise X , M de dik toplanandır. Buradan $M = X \oplus Y$ olacak şekilde $Y \leq M$ vardır. $N = N \cap M = N \cap (X \oplus Y) = X \oplus (N \cap Y)$ olduğundan X , N nin bir dik toplananıdır. Böylece N , CS-modüldür. $\square$

Sonuç 1.3.3 M , CS-modül ve $N \leq_c M$ ise N , CS-modüldür.

Kanıt. Önteorem 1.3.2 den açıktır. $\square$

Önteorem 1.3.2 nin tersine CS-modüllerin bir dik toplamı CS-modül olmayabilir.

Örnek 1.3.4 p bir pozitif asal tamsayı olmak üzere $M_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$ modülünü alalım. $M_{\mathbb{Z}}$ modülü CS-modül değildir.

Kanıt. $M_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus 0$, $M_2 = 0 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ olsun. Böylece M_1 ve M_2 düzgün modül olduklarından CS-modüllerdir. Şimdi M nin CS-modül olmadığını göstereyim. Önce $b \notin \mathbb{Z}p^3$ olmak üzere $K = \mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3)$ altmodülünün $M_{\mathbb{Z}}$ de komplement olduğunu gösterelim. K devirli ve $p^3K = 0$ olduğundan K nin mertebesi

p^3 olur. Böylece $K \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ olduğundan K düzgün modüldür. $K \leq_e L \leq M$ alalım. Buradan $\dim K = \dim L$ olduğundan L de düzgün modüldür. $M_{\mathbb{Z}}$ sonlu üretilmiş olduğundan L devirlidir. Böylece $c, d \in \mathbb{Z}$ için, $L = \mathbb{Z}(c + \mathbb{Z}p, d + \mathbb{Z}p^3)$ tür. Buradan bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır ki, $(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3) = n(c + \mathbb{Z}p, d + \mathbb{Z}p^3)$ olur. Yani, $1 \equiv nc(mod p)$ ve $b \equiv nd(mod p^3)$ dir. Eğer $p|n$ ise $1 \equiv 0(mod p)$ olur ki bu çelişkidir. O halde, $p \nmid n$ dir. Böylece $(p, n) = 1$ olup $1 = nc + sp$ olacak şekilde bir $s \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $(1 - nc)^3 = s^3 p^3$ dir. $(1 - 3nc + 3n^2 c^2 - 3n^3 c^3) = 1 - n(3c + 3nc^2 - 3n^2 c^3) = 1 - nt = s^3 p^3$ olur. $t(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3) = nt(c + \mathbb{Z}p, d + \mathbb{Z}p^3) = (1 - s^3 p^3)(c + \mathbb{Z}p, d + \mathbb{Z}p^3) = (c + \mathbb{Z}p, d + \mathbb{Z}p^3)$ olup $L \leq K$ elde edilir. O halde $K = L$ dir. Böylece $K, M_{\mathbb{Z}}$ nin komplement altmodülüdür. N, M nin komplement altmodülü ve $N \neq 0, M_1, M_2, M$ olsun. Bu durumda N, M de maksimal düzgün altmodüldür. N düzgün modül olduğundan $N \neq 0$ ve $a \notin \mathbb{Z}p, b \notin \mathbb{Z}p^3$ olmak üzere $(a + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3) \in N$ vardır. $a = 1$ alalım. Bu durumda $\mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3) \subseteq N$ olur ve $\mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3) \leq_e N$ olduğundan M nin bütün komplementleri $N = \mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, b + \mathbb{Z}p^3)$ şeklindedir. Şimdi $p^3 \nmid p$ olmak üzere $N = \mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, p + \mathbb{Z}p^3)$ olsun. N, M nin komplementidir ve $|N| = p^2$ dir. Eğer N, M de dik toplanan olsaydı $M = N \oplus N'$ olacak şekilde $N' \leq M$ olurdu ve $|N'| = p^2$ elde edilirdi. Buradan, $p^2 M = p^2(N \oplus N') = 0$ olurdu. Bu ise çelişkidir. Çünkü, $|M| = p^3$ dür. Böylece M nin komplement N altmodülü M de bir dik toplanan olamaz. Yani M, CS -modül değildir. $\square$

Önceki Örnek 1.3.4 teki $M_{\mathbb{Z}}$ modülünün Goldie boyutu 2 dir. Bu örnekten hareketle, sonlu Goldie boyutlu CS -modüllerin aşağıda vereceğimiz kullanışlı bir özelliği elde edilir. Öncelikle, M bir modül ve U da M nin bir düzgün altmodülü olsun. O halde, Önerme 1.2.12 den $U \leq_e K \leq_c M$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır. Açıkça, K da düzgündür. Yine, U, M nin bir altmodülü olsun. $U \leq_c M$ olması için gerek ve yeter koşul U, M nin bir maksimal düzgün altmodülüdür. (Yani, U, M nin düzgün altmodüller ailesinde maksimaldir.)

Önteorem 1.3.5 *M , her maksimal düzgün altmodülü bir dik toplanan olan bir modül olsun. Bu durumda $K \leq_c M$ ve K nın Goldie boyutu sonlu ise K, M nin*

bir dik toplananıdır.

Kanıt. U, K nın bir maksimal düzgün altmodülü olsun. Önerme 1.2.14 den, U, M nin bir maksimal düzgün altmodülüdür. O halde, varsayımdan $M = U \oplus U'$ olacak biçimde bir $U' \leq M$ vardır. Böylece $K = U \oplus (K \cap U')$ dür. Yine Önerme 1.2.14 den, $K \cap U' \leq_c M$ dir. $K \cap U'$ nün Goldie boyutunun K nın Goldie boyutundan küçük olduğu açıktır. Tümevarımla $K \cap U'$ altmodülü M nin ve böylece U' nün bir dik toplananıdır. Buradan K, M nin bir dik toplananıdır. $\square$

Sonuç 1.3.6 *M sonlu Goldie boyutlu bir modül olsun. Bu durumda M nin CS-modül olması için gerekli ve yeterli koşul her maksimal düzgün altmodülün bir dik toplanan olmasıdır.*

Kanıt. Önerme 1.3.5 den elde edilir. $\square$

Şimdi CS-modüllerin bir dik toplamının CS-modül olması için yeterli koşullar verelim. Bu amacımız için gerek duyacağımız tanımları hatırlatarak başlayalım.

R bir halka ve M, X de R -modüller olsun. Eğer her $N \leq M$ için,

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} M \text{} tam \\ & \downarrow \varphi & \\ & X & \end{array}$$

şeklinde verilen R -modül ve R -homomorfizmaların her diyagramında $\theta\alpha = \varphi$ olacak biçimde bir $\theta : M \rightarrow X$, R -homomorfizması varsa, X modülüne **M -injektif 'tir** denir. $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ olsun. Eğer $i \neq j$ için M_i modülü M_j -injektif ise M_i ($1 \leq i \leq n$) modüllerine **göreceli injektif** (relatively injective) modüller denir. [9],[18].

Önteorem 1.3.7 *M_1 ile M_2 , CS-modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M nin CS-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin $K \cap M_1 = 0$ yada $K \cap M_2 = 0$ olacak biçimdeki her K komplementinin bir dik toplanan olmasıdır.*

Kanıt. Gerekliklik açıktır. Tersine $K \cap M_1 = 0$ yada $K \cap M_2 = 0$ olan her K komplementi M de bir dik toplanan olsun. $L \leq_c M$ alalım. Bir $H \leq_c L$ vardır ki, $L \cap M_2 \leq_e H$ dir. Önerme 1.2.14 den, $H \leq_c M$ dir. $H \cap M_1 = 0$ olduğu açıktır. Varsayımdan $M = H \oplus H'$ olacak biçimde bir $H' \leq M$ vardır. Böylece $L = H \oplus (L \cap H')$ dür. Önerme 1.2.14 den, $L \cap H' \leq_c M$ dir. Diğer yandan $(L \cap H') \cap M_2 = 0$ olduğu açıktır. Varsayımdan $L \cap H'$, M nin bir dik toplananıdır. Buradan $L \cap H'$, H' nün de bir dik toplananı olur. O halde L , M nin bir dik toplananıdır. Yani M , CS-modüldür. $\square$

Teorem 1.3.8 M_i ($1 \leq i \leq n$) ler göreceli injektif modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ olsun. Bu durumda M nin CS-modül olması için gerek ve yeter koşul her bir $1 \leq i \leq n$ için M_i modülünün CS-modül olmasıdır.

Kanıt. Gerekliklik Önteorem 1.3.2 den açıktır. Tersine her bir $1 \leq i \leq n$ için M_i bir CS-modül olsun. Tümevarımla ispatı tamamlayacağız. Bunun için $n = 2$ durumunda M nin CS-modül olduğunu ispatlamak yetecektir. $K \cap M_1 = 0$ olacak biçimde bir $K \leq_c M$ alalım. [9, Lemma 7.5] den, $M = M_1 \oplus M'$ ve $K \subseteq M'$ olacak biçimde bir $M' \leq M$ vardır. Açıktır ki, $M' \cong M_2$ ve böylece de M' bir CS-modüldür. $K \leq_c M'$ olduğundan K , M' nün bir dik toplananıdır. Buradan K , M nin bir dik toplananıdır. Benzer olarak $X \cap M_2 = 0$ olacak biçimdeki herhangi bir $X \leq_c M$ de bir dik toplanandır. Böylece Önerme 1.3.7 den, M bir CS-modüldür. $\square$

Herhangi bir p asal tamsayı için $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ ün bir CS-modül olmadığını biliyoruz. $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ modülü $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ -injektiftir ancak $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ modülü $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ -injektif değildir. Diğer yandan, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ modülü $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2$ -injektif olmadığı halde $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2$ modülü CS-modüldür. (bakınız, [9])

Bir sonraki Teorem CS-modüllerin karakterizasyonundaki en temel sonuçlardan birisidir. Bu teoremden ve ilgili kimi sonuçlarda sıkça kullanacağımız tanımları vermemiz uygun olacaktır.

Tanım 1.3.9 R bir halka ve M bir R -modül olsun. Bu durumda, $Z(M) = \{m \in M : \text{bir } E \leq_e R_R \text{ için } mE = 0\}$ kümesi M nin bir altmodülüdür ki, buna M nin **singular** (tekil) altmodülü denir. $Z(M) = 0$ ise M ye **nonsingular** (tekil olmayan), $Z(M) = M$ ise M ye **singular** (tekil) modül denildiğini hatırlatalım. Yine bir M modülü için $Z_2(M) = \{m \in M : \text{bir } E \leq_e R_R \text{ için } mE \subseteq Z(M)\}$ kümesi M nin bir altmodülüdür ki, buna M nin **ikinci (second) singular** (ikinci tekil) altmodülü denir. Açıktır ki, $Z(M) \leq Z_2(M)$ ve $Z_2(M) \leq_c M$ dir. $Z(M)$ ve $Z_2(M)$ ye ilişkin kapsamlı sonuç ve özellikler [11], [7] de verilmiştir.

Teorem 1.3.10 R bir halka olsun. Bu durumda bir R -modül M nin CS-modül olması için gerek ve yeter koşul M' ve $Z_2(M)$, CS-modüller ve $Z_2(M)$, M' -injektif olacak biçimde bir $M' \leq M$ vardır ki, $M = M' \oplus Z_2(M)$ dir.

Kanıt. M , CS-modül olsun. $Z_2(M) \leq_c M$ olduğundan $M = Z_2(M) \oplus M'$ olacak biçimde bir $M' \leq M$ vardır ki, M' nonsingular 'dır. O halde Önteorem 1.3.2 den $Z_2(M)$ ve M' CS-modüllerdir. Şimdi $X \leq M'$ ve $\varphi : X \rightarrow Z_2(M)$ bir homomorfizma olsun. $X' = \{x - \varphi(x) : x \in X\}$ kümesini oluşturalım. $X' \leq M$ dir. Varsayımdan $X' \leq_e L$ olacak biçimde M nin bir L dik toplananı vardır. $Y \leq M$ için $M = L \oplus Y$ yazalım. $X' \cap Z_2(M) = 0$ ve $X' \leq_e L$ olduğundan L nonsingular 'dır ve $Z_2(M) = Z_2(Y)$ dir. Böylece $Z_2(M)$, Y nin bir dik toplananıdır. $Y = Y' \oplus Z_2(M)$ olarak yazalım. $\pi : L \oplus Y' \oplus Z_2(M) \rightarrow Z_2(M)$ kanonik projeksiyon olsun. $\pi|_X = \varphi$ olduğu açıktır. O halde $Z_2(M)$, M' -injektiftir.

Tersine $M = Z_2(M) \oplus M'$, $Z_2(M)$ ile M' , CS-modüller ve $Z_2(M)$, M' -injektif olsun. $A \leq_c M$ olarak alalım. $Z_2(A) \leq_c A$ olduğundan $Z_2(A) \leq_c M$ dir. O halde $Z_2(A) \leq_c Z_2(M)$ dir. Böylece $Z_2(A)$, $Z_2(M)$ nin bir dik toplananıdır ki, buradan $Z_2(A)$, A nın bir dik toplananı olarak bulunur. $A = Z_2(A) \oplus B$ olarak yazalım. Burada B nonsingular 'dır. $B \cap Z_2(M) = 0$ ve $Z_2(M)$, M' -injektif olduğundan bir $\theta : M' \rightarrow Z_2(M)$ homomorfizması vardır ki, $\pi_1 : M \rightarrow Z_2(M)$ ve $\pi_2 : M \rightarrow M'$ projeksiyon dönüşümler olmak üzere $\theta\pi_2|_B = \pi_1|_B$ dir. O halde $B \subseteq N' = \{n + \theta(n) : n \in M'\}$ dür. $N' \cong M'$ ve M' , CS-modül olduğundan N' de CS-modüldür. Böylece B , N' nün bir dik toplananıdır. $M = Z_2(M) \oplus N'$ olduğu açıktır. Buradan A , M nin bir dik toplananıdır. $\square$

Tanım 1.3.11 M bir sağ R -modül olsun. Herhangi bir $m \in M$ için $r(m) = \{r \in R : mr = 0\}$ ye M nin **sağ sıfırlayıcısı** denir. $r(m)$ nin R de sağ ideal olduğu açıktır.

Şimdi ispatsız vereceğimiz Teoremin 3. bölümde bir genelleştirmesi verilmiştir.

Teorem 1.3.12 R bir halka ve M_R de bir modül olsun. $R, r(m)$ lerde ACC yi sağlar ve M_R de CS-modül ise, M_R düzgün altmodüllerin bir dik toplamıdır.

Tanım 1.3.13 M bir sağ R -modül olsun. Eğer M nin her altmodülü sonlu üretilmiş ise M ye **yerel Noether** denir.

Sonuç 1.3.14 R bir halka, M_R de bir yerel Noether CS-modül olsun. Bu durumda M düzgün altmodüllerin bir dik toplamıdır.

Kanıt. M_R bir yerel Noether CS-modül olsun. $m \in M$ alalım. $R/r(m) \cong mR$ dir. M yerel Noether olduğundan sonlu üretilmiş her altmodülü Noetherdir ve Noetherlik izomorfizma altında invariantdir. Bu durumda mR ve $R/r(m)$ Noether R -modüllerdir. Buradan $x \in M$ olmak üzere $R, r(x)$ üzerinde ACC yi sağlar. Teorem 1.3.12 den de M nin düzgün altmodüllerin bir dik toplamı olduğunu elde ederiz. $\square$

1.4 Nonsingular CS-Modüller

Birinci bölümün son kesimi olarak, Teorem 1.3.10 dan dolayı nonsingular CS-modülleri ve matris halkalarını inceleyeceğiz. Nonsingular modüllerin en temel özelliğini veren aşağıdaki önteorem ile başlayalım.

Önteorem 1.4.1 1. M_R bir nonsingular modül olsun. Bu durumda M nin her alt modülünün M deki kapanışı tektir.

2. M_R modülünde her alt modülün kapanışı tek olsun. $K, K', L, L' \leq M$ ve $K \leq_e K', L \leq_e L'$ ise $K + L \leq_e K' + L'$ dür.

Kanıt. (1): $N \leq M$ alalım. $c(N) = \{m \in M : \text{bir } E \leq_e R_R \text{ için } mE \leq N\}$ diyelim. O halde, $c(N) \leq M$ ve $N \leq c(N)$ dir. $N \leq_e K \leq_c M$ olacak biçimde $K \leq M$ vardır. $0 \neq x \in K$ alalım. $N \leq_e K$ olduğundan $xR \cap N \neq 0$ dir. Buradan $E = x^{-1}N = \{r \in R : xr \in N\} \leq_e R_R$ olur. Böylece $xE \leq N$ dir. $x \in c(N)$ dir. Yani $K \leq c(N)$ elde edilir. Şimdi $0 \neq a \in c(N)$ olsun. Buradan $aI \leq N$ olacak biçimde $I \leq_e R_R$ vardır. $Z(M) = 0$ olduğundan $aI \neq 0$ dir. $aI \leq N \cap aR \leq K \cap aR$ olduğundan $K \cap aR \neq 0$ dir. O halde, $K \leq_e c(N)$ dir. $K \leq_c M$ olduğundan $K = c(N)$ bulunur. Böylece $c(N)$, N nin M_R deki tek kapanışıdır.

(2): $K, L \leq M$ olduğundan $K + L \leq M$ dür. Buradan M_R de her altmodülün kapanışı tek olduğundan $K + L \leq_e H$ olacak şekilde bir $H \leq_c M$ vardır ve tektir. Yine $K \leq_e J \leq_c H$ olacak şekilde bir $J \leq H$ vardır. $H \leq_c M$ olduğundan $J \leq_c M$ dir. $K \leq_e K'$ olduğundan ise $K' \leq J \leq H$ dir. Benzer olarak $L' \leq H$ dir. O halde, $K + L \leq_e K' + L'$ bulunur. $\square$

Önteorem 1.4.1 (1) den örneğin nonsingular modüllerin sağladığı her altmodülün essential olarak kapsandığı komplementin tek olması özelliği yani her altmodülün kapanışının tek olduğu modüller sınıfının kendisi ilginçtir. Bu modüller **UC-modül** adı altında [22] de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Önteorem 1.4.2 M_R bir modül ve $K \leq M_R$ olsun. Bu durumda M/K nın nonsingular modül olması için gerek ve yeter koşul $m \in M$ ve $E \leq_e R_R$ için $mE \leq K$ ise $m \in K$ dir.

Kanıt. M/K nonsingular modül ve $m \in M$ ve $E \leq_e R_R$ için $mE \leq K$ olsun. Buradan $(m + K)E = 0$ dir. Ayrıca N/K nonsingular olduğundan $(m + K) = 0$ dir. Böylece $m \in K$ elde edilir.

Tersine $mE \leq K$ ise $m \in K$ olsun. $x \in Z(M/K)$ alalım. O halde $y \in M$ olmak üzere $x = y + K$ dir ve bir $F \leq_e R_R$ için $(y + K)F = 0$ olur. Bu durumda $yF + K = 0$ ise $yF \leq K$ dir ve buradan $y \in K$ dir. Böylece $x \in K$ dir. Yani M/K da $x = 0$ dir. O halde M/K nonsingular modüldür. $\square$

Önteorem 1.4.3 M_R bir nonsingular modül ve $K \leq M_R$ olsun. Bu durumda K nın M de komplement olması için gerek ve yeter koşul M/K nın nonsingular modül olmasıdır.

Kanıt. M/K nonsingular modül ve $K \leq_e N \leq M$ olsun. O halde $N/K = Z(N/K) \leq Z(M/K) = 0$ olur. Buradan $N/K = 0$ dir. Yani $N = K$ elde edilir. Böylece K, M de komplementtir.

Tersine K, M de komplement olsun. M/K nın nonsingular modül olmadığını kabul edelim. O halde bir $m \in M$ ve $m \notin K$ elemanı vardır ki, $mE \leq K$ ve $E \leq_e R_R$ dir. $r \in R$ ve $k \in K$ için $mr + k$ elemanını ele alalım. $F = \{s \in R : rs \in E\}$ kümesini düşünersek, $F \leq_e R_R$ ve $(mr + k)F \leq K$ dir. Eğer $(mr + k) \neq 0$ alırsak, $(mr + k)F \neq 0$ olur ve buradan $K \cap (mr + k)F \neq 0$ olur. Bu durumda $K \leq_e mR + K$ olur. Bu ise K nın M de komplement olmasıyla çelişir. Dolayısıyla M/K nonsingular modüldür. $\square$

Şimdi CS özelliğinin nonsingular koşulu ile birlikte olsa dahi dik toplamlara taşınmadığına ilişkin iki temel örnek verelim.

Örnek 1.4.4 $R_R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ modülü CS-modül değildir.

Kanıt. R_R nin nonsingular modül olduğu açıktır. $M_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ olarak alırsak $R_R = M_1 \oplus M_2$ olur. M_1 ve M_2 düzgün modüller olduğundan CS-modüllerdir. Fakat R_R , CS-modül değildir. Gerçekten, $u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in R$ alalım. $uR = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ olup uR , R nin düzgün altmodülüdür ve böylece $\dim(uR) = 1$ dir. $\dim R = 2$ ve $\dim(uR) = 1$ olduğundan $uR \not\leq_e R$ dir. Diğer yandan, eğer R , CS-modül olsaydı $uR \leq_e eR$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in R$ olurdu. Buradan $u \in R$ olduğundan $u \in eR$ dir. O halde, $r \in R$ için $u = er$ ise $eu = er = u$ olur. Yani $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dir ve $\begin{bmatrix} 0 & a+2b \\ 0 & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ elde edilir. Buradan $c = 1$ ve $a + 2b = 1$ bulunur. Böylece $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. $\begin{bmatrix} a^2 & (a+1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olup, $a = 0, 1$ elde edilir. $a = 0$ ise $b = 1/2 \notin \mathbb{Z}$ dir. Eğer $a = 1$ ise $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. Buradan $eR = R$ bulunur. Fakat $uR \not\leq_e R$ olduğu için bu bir çelişkidir. O halde R_R , CS-modül değildir. $\square$

Örnek 1.4.5 $M_R = (\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x])_{\mathbb{Z}[x]}$ modülü CS-modül değildir.

Kanıt. Öncelikle M_R in nonsingular modül olduğunu not edelim. $\mathbb{Z}[x]_{\mathbb{Z}[x]}$ düzgün modül olduğundan CS-modüldür. Şimdi $C = \{(xr, 2r) : r \in R\} \leq M_R$ modülünü ele alalım. Bu durumda $Z(M/C) = 0$ dır. Gerçekten, $(f, g) + C \in Z(M/C)$ olsun. O halde $[(f, g) + C]E = C$ olacak şekilde bir $E \leq_e R_R$ vardır. Yani $(fE, gE) \in C$ dir. Böylece $fE = xr$ ve $gE = 2r$ dir. Buradan $2f = xg$ olur. $f = x(g/2) \in R$ ve $g/2 \in R$ dir. Bu durumda $(f, g) + C = (x(g/2), g) + C = (x(g/2), 2(g/2)) + C = C$ olur. Yani $(f, g) \in C$ dir. $(f, g) + C = \bar{0}$ elde edilir. Dolayısıyla $Z(M/C) = 0$ dır. Önteorem 1.4.3 den $C \leq_c M_R$ dır. Farzedelim ki, C, M de dik toplanan olsun. O halde $M = C \oplus D$ olacak şekilde $D \leq M_R$ vardır. $\pi : M \rightarrow C$ kanonik projeksiyon olsun. $a \in C, b \in D$ olmak üzere $\pi(a, b) = a$ olarak tanımlansın. $\pi(1, 0) = (xr, 2r)$ ve $\pi(0, 1) = (xs, 2s)$ olsun. Böylece $(x, 2) \in C$ için $(x, 2) = \pi(x, 2) = \pi(x, 0) + \pi(0, 2) = x\pi(1, 0) + 2\pi(0, 1) = x(xr, 2r) + 2(xs, 2s) = (x^2r + 2xs, 2xr + 4s)$ olur. Buradan $1 = xr + 2s$ dır. yani $R = xR + 2R$ dir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla M_R , CS-modül değildir. $\square$

Tanım 1.4.6 R bir halka olsun. Eğer her $a \in R$ için $a = axa$ olacak biçimde bir $x \in R$ varsa R ye **(von Neumann) regular (düzenli)** halka denir.

R düzenli bir halka ise R nin her sonlu üretilmiş sağ-ideali R nin bir dik toplananıdır. Yani idempotentle üretilmiştir [12]. Bu kullanışlı sonuçla birlikte aşağıdaki sonuç, regular halkaların en temel özelliklerindendir.

Sonuç 1.4.7 R bir düzenli halka ise R_R modülü nonsingulardır.

Kanıt. R düzenli halka olduğundan $a \in R$ için aR, R de dik toplanandır. $x \in Z(R)$ alalım. Bu durumda xR, R serbest modülünün dik toplananı olacağından xR projektif modüldür. Böylece;

$$0 \longrightarrow r(x) \longrightarrow R \xrightarrow{f} xR$$

tam dizisi xR projektif olduğundan Sonuç 1.2.20 den $R = r(x) \oplus xR$ olur. Buradan $r(x), R$ nin dik toplananıdır. Dolayısıyla $r(x), R$ nin komplement altmodülüdür.

$x \in Z(R)$ olduğundan $r(x) \leq_e R$ dir. Önerme 1.2.13 den $r(x) = R$ olur. Buradan $xR = 0$ olup $x = 0$ dir. Yani $Z(R) = 0$ bulunur. Böylece R_R modülü nonsingularıdır. $\square$

Yukarıda verilen Örnek 1.4.4 ve Örnek 1.4.5 in sonuçları olarak CS olma özelliğinin polinom halkalarına taşıyıp taşınmayacağı ve CS özelliğinin Morita invariant bir özellik olup olmadığını araştırmak doğaldır ki, bundan sonraki sonuçlarımız bu doğrultuda olacaktır.

Tanım 1.4.8 $(\mathcal{P})$ bir halka özelliği olsun. Eğer bir R halkası için aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(\mathcal{P})$ özelliğine **Morita invariant** denir.

1. R halkasının $(\mathcal{P})$ yi sağlaması $M_n(R)$ ($n \geq 2$) halkasının da $(\mathcal{P})$ yi sağlamasını gerektirir.
2. $R = ReR$ yi sağlayan her $e^2 = e \in R$ için R halkası $(\mathcal{P})$ yi sağlarsa eRe modülünde $(\mathcal{P})$ yi sağlar.

Bu bölümün sonuna kadar vereceğimiz sonuçlarımızda, aksi belirtilmedikçe R bir birimli halka ve bir $e^2 = e \in R$ için $R = ReR$, $S = eRe$ de R nin althalkası olarak alınacaktır. Eğer M bir sağ R -modül ise Me de bir sağ R -modüldür.

Önteorem 1.4.9 M bir R -modül $K, K' \leq M_R$ ve $N, N' \leq (Me)_S$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar sağlanır.

1. $K = KeR$ ve $N = NRe$ dir.
2. $K \cap K' = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $Ke \cap K'e = 0$ olmasıdır.
3. $N \cap N' = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $NR \cap N'R = 0$ olmasıdır.

Kanıt. (1): $K \leq M$ olduğundan $K = KR = KReR = KeR$ dir. Benzer şekilde $N \leq (Me)_S$ ve $Ne = N$ olduğundan $N = NS = NeRe = NRe$ elde edilir.

(2): İlk olarak $K \cap K' = 0$ olsun. Bu durumda $Ke \cap K'e \leq K \cap K' = 0$ olduğundan $Ke \cap K'e = 0$ olur.

Tersine $Ke \cap K'e = 0$ olsun. $x \in K \cap K'$ alalım. Böylece $x \in K$ ve $x \in K'$ olduğundan $xRe \leq Ke \cap K'e = 0$ olur. Yani $xRe = 0$ dır. Buradan $xReR = 0$ bulunur. O halde, $xR = 0$ olup R birimli olduğunda $x = 0$ elde edilir. Yani $K \cap K' = 0$ olur.

(3): Bu denkliğin ispatı (1) ve (2) den açıktır. $\square$

Sonuç 1.4.10 M_R bir modül ve $L \leq M_R$ olsun. Bu durumda $L \leq_e M_R$ olması için gerek ve yeter koşul $Le \leq_e (Me)_S$ olmasıdır.

Kanıt. $L \leq_e M_R$ olsun. $0 \neq N \leq (Me)_S$ alalım. $NR \leq M$ olduğundan $L \cap NR \neq 0$ olur. Buradan $Le \cap NRe \neq 0$ olup $Le \cap N \neq 0$ elde edilir. Böylece $Le \leq_e (Me)_S$ dir.

Tersine $Le \leq_e (Me)_S$ olsun. $0 \neq K \leq M_R$ alalım. Önteorem 1.4.9 (1) den $K = KeR$ dir. Böylece $0 \neq Ke \leq (Me)_S$ dir. Kabulümüzden $Ke \cap Le \neq 0$ olur. $Ke \cap Le \leq K \cap L$ olduğundan $K \cap L \neq 0$ dır. Dolayısıyla $L \leq_e M_R$ bulunur. $\square$

Önteorem 1.4.11 M bir R -modül ve $L, N \leq (Me)_S$ olsun. Bu durumda L, N nin $(Me)_S$ de bir komplementi olması için gerek yeter koşul LR, NR nin M_R de bir komplementi olmasıdır.

Kanıt. İlk olarak L, N nin $(Me)_S$ de bir komplementi olsun. Bu durumda $L \cap N = 0$ olur. Böylece $LR \cap NR = 0$ dır. Şimdi $LR \leq K \leq M_R$ ve $K \cap NR = 0$ olsun. Önteorem 1.4.9 (1) den $L = LRe \leq Ke \leq Me$ dır. $Ke \cap N \leq K \cap NR = 0$ olur. O halde $L = Ke$ ve $LR = KeR = K$ dır. Yani LR, NR nin M_R de bir komplementidir.

Tersine LR, NR nin M_R de bir komplementi olsun. Buradan $LR \cap NR = 0$ olur ve $L \cap N = 0$ dır. $L \leq H \leq (Me)_S$ ve $H \cap N = 0$ olsun. O halde $LR \leq HR \leq M_R$ ve $HR \cap NR = 0$ dır. Varsayımdan $LR = HR$ olur. Böylece $LRe = HRe$ olup $L = H$ elde edilir. Dolayısıyla L, N nin $(Me)_S$ de bir komplementidir. $\square$

Sonuç 1.4.12 M_R bir modül ve $L \leq M_R$ olsun. Bu durumda $L \leq_c M_R$ olması için gerek ve yeter koşul $Le \leq_c (Me)_S$ olmasıdır.

Kanıt. Önteorem 1.4.11 deki gibi benzer şekilde yapılır. $\square$

Önteorem 1.4.13 *M bir R-modül ve $K \leq M_R$ olsun. Bu durumda K'nın M_R de dik toplanan olması için gerek ve yeter koşul Ke nin $(Me)_S$ de dik toplanan olmasıdır.*

Kanıt. Önteorem 1.4.9 kullanılarak elde edilir. $\square$

Teorem 1.4.14 *M bir R-modül olsun. M_R nin bir CS-modül olması için gerek ve yeter koşul $(Me)_S$ nin bir CS-modül olmasıdır.*

Kanıt. İspat Sonuç 1.4.12 den ve Önteorem 1.4.13 açıktır. $\square$

Sonuç 1.4.15 *R bir halka olsun. R nin sağ CS-halka olması için gerek ve yeter koşul Re nin sağ CS, eRe -modül olmasıdır.*

Kanıt. Teorem 1.4.14 de $M = R$ olarak alınarak ispatlanır. $\square$

Sonuç 1.4.16 *T birimli bir halka ve $e = e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$ olmak üzere $R = M_n(T)$ olsun. Bu durumda R nin sağ CS-halka olması için gerek ve yeter koşul $T^n = \bigoplus_{i=1}^n T$ serbest modülünün sağ CS, T-modül olmasıdır.*

Kanıt. $R = Re_{11}R$ ve $e_{11}Re_{11} \cong T$ dir. Üstelik T modül olmak üzere $Re_{11} = Te_{11} + Te_{21} + \dots + Te_{n1} \cong T^n$ olup Sonuç 1.4.15 den açıktır. $\square$

R_R , CS-modül olsun. $Re = eRe \oplus (1-e)Re$ şeklinde yazılabileceğinden Sonuç 1.4.15 den Re , CS-modüldür. Öte yandan eRe , Re nin dik toplananı olduğundan eRe de CS-modüldür. Böylece Tanım 1.4.8 nin (2). koşulu sağlanmış olur. Ancak $T = \mathbb{Z}[x]$ ve $R = M_2(T) = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}[x] & \mathbb{Z}[x] \\ \mathbb{Z}[x] & \mathbb{Z}[x] \end{bmatrix}$ olarak alalım. Buradan $T_T^2 = (\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x])_{\mathbb{Z}[x]}$ modülü CS değildir. Sonuç 1.4.16 dan $R = M_2(T)$, CS-halka değildir. Böylece CS özelliği Morita invariant değildir.

Diğer yandan, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ modülü CS, $\mathbb{Z}$ -modül olduğundan Sonuç 1.4.16 dan $M_2(\mathbb{Z})$ halkası da CS tir. Ancak $M_2(\mathbb{Z})[x] \cong M_2(\mathbb{Z}[x])$ halkası CS değildir. Böylece R bir sağ CS halka iken $R[x]$ polinomlar halkası CS olmayabilir.

2 Sürekli ve Yarı-Sürekli Modüller

Bu bölümde, sürekli ve yarı-sürekli modüllerin belirli altmodüllerinden M ye olan dönüşümlerin, M den M ye olan dönüşümlere genişletilmesi anlamında karakterizasyonları verilecektir. Buradan da CS-modüller için benzer sonuçlar elde edilecektir [24]. Sürekli ve yarı-sürekli modüllerin tanımında gerekli olan ve bir M modülü için [18] de verilen aşağıdaki koşullarla başlayalım.

2.1 Tanımlar ve Özellikler

(C_2) M nin herhangi alt modülü bir dik toplanana izomorf iken, M nin bir dik toplananıdır.

(C_3) M_1 ve M_2 , M nin $M_1 \cap M_2 = 0$ koşulunu sağlayan herhangi iki dik toplananı ise, $M_1 \oplus M_2$, M de bir dik toplananıdır.

Tanım 2.1.1

(i) M bir CS-modül olsun. Eğer M , (C_2) ((C_3)) koşulunu sağlarsa M ye **sürekli (yarı-sürekli)** modül denir.

(ii) M nin her N altmodülü için her $\varphi : N \rightarrow M$ homomorfizması bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebiliyor ise M ye **yarı (quasi)-injektif** modül denir.

İnjektif ve yarıbasit modüller yarı-injektif modüllerdir. Yarı-injektif modüller sürekli modüllerdir. ([24, Theorem 7] veya [18, Proposition 2.1]).

Önteorem 2.1.2 M bir modül olsun.

1. M modülü sürekli ise, yarı-sürekli dir. Genel olarak tersi doğru değildir.
2. M modülü sürekli (yarı-sürekli) ise, M nin her dik toplananında sürekli (yarı-sürekli) dir.

Kanıt. (1) M bir sürekli modül olsun. M nin (C_3) ü sağladığını gösterelim. K ve L , M nin $K \cap L = 0$ koşulunu sağlayan dik toplananları olsun. $M = K \oplus K'$

olacak biçimde bir $K' \leq M$ vardır. $\pi : M \rightarrow K'$ kanonik projeksiyonu gösterebiliriz. $K \cap L = 0$ olduğundan $\pi(L) \cong L$ ve böylece de $\pi(L)$, M nin bir dik toplananıdır. O halde, $M = \pi(L) \oplus L'$ olacak biçimde bir $L' \leq M$ vardır. Buradan;
 $K' = \pi(L) \oplus (K' \cap L')$ ve $M = K \oplus \pi(L) \oplus (K' \cap L')$ dır. Böylece; $K \oplus \pi(L)$, M nin bir dik toplananıdır. $K \oplus L = K \oplus \pi(L)$ olduğundan M , (C_3) koşulunu sağlar.

Tersinin doğru olmadığına ilişkin bir örnek olarak $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ alınırsa, M yarı-sürekli ancak sürekli değildir.

(2) İspatı yarı-sürekli modüller için yapacağız. Benzer olarak, sürekli modüller için de yapılabilir. M yarı-sürekli bir modül ve N , M nin bir dik toplananı olsun. Önteorem 1.3.2 den N , CS-modül olur.

Şimdi K_1 ve K_2 yi N nin $K_1 \cap K_2 = 0$ olacak biçimde iki dik toplananı olarak alalım. O halde $M = K_1 \oplus K_2 \oplus L$ olacak biçimde bir $L \leq M$ vardır.

$N = N \cap M = N \cap (K_1 \oplus K_2 \oplus L) = K_1 \oplus [N \cap (K_2 \oplus L)] = K_1 \oplus K_2 \oplus (N \cap L)$ olduğundan N , (C_3) koşulunu sağlar. O halde N , yarı-sürekli dir. $\square$

Önteorem 2.1.3 *Bir M modülünün (C_3) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart M nin her K altmodülü, M nin K_1 ve K_2 dik toplananları için $K = K_1 \oplus K_2$ ise, her $\varphi : K \rightarrow M$ homomorfizması bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilir.*

Kanıt. Eğer M modülü (C_3) koşulunu sağlarsa, M nin $M_1 \cap M_2 = 0$ koşulunu sağlayan M_1 ve M_2 dik toplananları için $M_1 \oplus M_2$, M de dik toplanandır. $K = K_1 \oplus K_2$ dersek, K_1 ve K_2 , M nin dik toplananı olduğundan K , M nin bir dik toplananıdır. O halde $M = K \oplus K'$ olacak biçimde bir $K' \leq M$ vardır. Eğer $\varphi : K \rightarrow M$ bir homomorfizma ise, $\theta : M \rightarrow M$ yi $k \in K$, $k' \in K'$ olmak üzere $\theta(k + k') = \varphi(k)$ olarak tanımlarsak, $\theta|_K = \varphi$ dır.

Tersine, farzedelimki M nin her K altmodülü M nin K_1 ve K_2 dik toplananları için $K = K_1 \oplus K_2$ ise, her $\varphi : K \rightarrow M$ homomorfizması bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilsin. N_1 ve N_2 , M nin $N_1 \cap N_2 = 0$ koşulunu sağlayan herhangi iki dik toplanan alt modülleri olsun. O halde, dik toplanan tanımından

M nin öyle L_1 ve L_2 altmodülü vardır öyleki, $M = N_1 \oplus L_1 = N_2 \oplus L_2$ dir. $\varphi : N_1 \oplus N_2 \rightarrow M$, $x \in N_1$, $y \in N_2$ olmak üzere $\varphi(x + y) = x$ şeklinde bir homomorfizma tanımlansın. Hipotezden φ nin bir genişlemesi olan $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizması vardır ve $x \in N_1$, $y \in N_2$ olmak üzere $\theta(x + y) = x$ dir. Şimdi $\pi : M \rightarrow N_1$ kanonik projeksiyon ve $\chi = \pi\theta : M \rightarrow N_1$ olsun. O zaman, her $x \in N_1$ için, $\chi(x) = \pi\theta(x) = \pi(x) = x$ olur. $N_1 \subseteq M$ ve $\text{Ker}\chi \subseteq M$ olduğundan $N_1 + \text{Ker}\chi \subseteq M$ dir. Şimdi, $m \in M$ ve $n_1 \in N_1$ için $m = n_1 + (m - n_1)$ alalım. $n_1 \in N_1$ ve $\chi(m - n_1) = \chi(m) - \chi(n_1) = n_1 - n_1 = 0$ olduğundan $m - n_1 \in \text{Ker}\chi$ olur ve $M \subseteq N_1 + \text{Ker}\chi$ elde edilir. Böylece $M = N_1 + \text{Ker}\chi$ dir. Ayrıca $x \in N_1 \cap \text{Ker}\chi$ olsun. Buradan $x \in N_1$ ve $x \in \text{Ker}\chi$ dir. $x \in N_1$ ise, bir $n_1 \in N_1$ için $x = n_1$ dir. $x \in \text{Ker}\chi$ ise, $\chi(x) = 0$ dir. Buradan $\chi(n_1) = n_1 = 0$ elde edilir. Böylece, $N_1 \cap \text{Ker}\chi = 0$ olduğundan $M = N_1 \oplus \text{Ker}\chi$ dir. Ayrıca $n_2 \in N_2$ ise, $\chi(n_2) = \pi\theta(n_2) = \pi(0) = 0$ olduğundan $n_2 \in \text{Ker}\chi$ olur. Yani, $N_2 \subseteq \text{Ker}\chi$ dir. Modüler kuralından, $\text{Ker}\chi = \text{Ker}\chi \cap M = \text{Ker}\chi \cap (N_2 \oplus L_2) = N_2 \oplus (\text{Ker}\chi \cap L_2)$ olur. Böylece, $M = N_1 \oplus \text{Ker}\chi = N_1 \oplus N_2 \oplus (\text{Ker}\chi \cap L_2)$ olduğundan $N_1 \oplus N_2$, M nin bir dik toplanamıdır. Dolayısıyla M , (C_3) koşulunu sağlar. $\square$

Önteorem 2.1.4 K , M de bir komplement olsun. O zaman, K nın M de bir dik toplanan olması için gerek ve yeter şart K nın M deki bir L komplementi için her $\varphi : K \oplus L \rightarrow M$ homomorfizması bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilir.

Kanıt. K , M nin bir dik toplananı olsun. O zaman M nin öyle bir K' altmodülü vardır ki, $M = K \oplus K'$ olur. Burada $L = K'$ olarak alınması ispatı tamamlar.

Tersine, farzedelimki L verilen koşulu sağlayan K nın M deki komplementi olsun. $\varphi : K \oplus L \rightarrow M$ homomorfizmasını, $x \in K$, $y \in L$ için $\varphi(x + y) = x$ olarak alalım. Hipotezden bir $\theta : M \rightarrow M$, $\theta(x + y) = x$ olacak şekilde homomorfizma vardır. Buradan $K \subseteq \text{Im}\theta$ ve $L \subseteq \text{Ker}\theta$ dir. $0 \neq v \in \text{Im}\theta$ olsun. O zaman bir $u \in M$ vardır öyle ki, $v = \theta(u)$ dur. $u \notin L$ olsun. Bu durumda $L \subseteq L + uR$ olur ve L , K nin M deki komplement altmodülü olduğundan $K \cap L = 0$ koşulunu sağlayan

maksimal altmodüldür. Böylece $K \cap (L + uR) \neq 0$ olur. O halde $x \in K$, $y \in L$ ve $r \in R$ için, $0 \neq x = y + ur$ dir. Buradan $x = \theta(x) = \theta(y + ur) = vr$ elde edilir. Her $0 \neq v \in Im\theta$ için $vR \cap K \neq 0$ olduğu için $K \leq_e Im\theta$ olur. Fakat K , M de komplement olduğundan $K = Im\theta$ dir. Bu durumda $M = K \oplus Ker\theta$ olduğu için K , M de dik toplanandır. $\square$

Bir sonraki sonucumuzda CS-modüllerin dönüşümler cinsinden karakterizasyonu verilmektedir.

Sonuç 2.1.5 *Bir M modülünün CS olması için gerek ve yeter koşul M de ki her K komplementi için, K nın bir L komplementi vardır ki, her $\varphi : K \oplus L \rightarrow M$ homomorfizması bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilir.*

Kanıt. Önteorem 2.1.4 dan açıktır. $\square$

2.2 Karakterizasyonlar

Yukarıdaki koşulları sonlu tane komplement altmodülün dik toplamına genişletmek mümkündür. Bunun için n pozitif bir tamsayı olsun. Bir M modülü için aşağıdaki koşulu göz önüne alalım.

(P_n) : M nin her K altmodülü, M nin K_i ($1 \leq i \leq n$) komplementleri olmak üzere $K = K_1 \oplus \dots \oplus K_n$ ise, her $\varphi : K \rightarrow M$ homomorfizması bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilir.

Bir M modülü her $n \geq 2$ için (P_n) koşulunu sağlarsa (P_{n-1}) koşulunda sağlar. (P_1) koşulunu sağlayan modüller [24] de incelenmiştir.

Teorem 2.2.1 *Bir M modülü için aşağıdaki koşullar denktir.*

1. M , yarı-süreklidir.
2. M her n pozitif tamsayısı için (P_n) koşulunu sağlar.

3. $n \geq 2$ olan bazı tamsayılar için M , (P_n) koşulunu sağlar.

4. M , (P_2) koşulunu sağlar.

Kanıt. Önteorem 2.1.3 ve Sonuç 2.1.5 den, $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ ve $(4) \Rightarrow (1)$ olduğu görülür. $\square$

Önteorem 2.2.2 K , M nin bir dik toplananına izomorf olan altmodülü olsun. O zaman K nın M de bir dik toplanan olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi : K \rightarrow M$ homomorfizmasının bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmaya genişletilmesidir.

Kanıt. K , M de bir dik toplanan olduğunda Önteorem 2.1.4 dan açıktır.

Tersine, M nin bir dik toplananına izomorf olan K altmodülü için her $\varphi : K \rightarrow M$ homomorfizması bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilsin. Bu durumda $\varphi(K)$, M de dik toplanan olacak şekilde bir $\varphi : K \rightarrow M$ monomorfizması vardır. Hipotezden φ bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilir. $\pi : M \rightarrow \varphi(K)$ kanonik projeksiyon olarak tanımlansın. O zaman, $\chi = \pi\theta : M \rightarrow \varphi(K)$ bir homomorfizmadır. Her $x \in K$ için, $\chi(x) = \pi\theta(x) = \pi\varphi(x) = \varphi(x)$ dir. $M = K \oplus \text{Ker}\chi$ olduğundan K , M nin bir dik toplananıdır. $\square$

Sonuç 2.2.3 Bir M modülünün (C_2) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul M nin bir dik toplananına izomorf olan her K altmodülü için, her $\varphi : K \rightarrow M$ homomorfizması bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişlemesidir.

Kanıt. Önteorem 2.2.2 den açıktır. $\square$

Yarı-sürekli modüller için verilen sonucun benzerini şimdi sürekli modüller için elde edeceğiz. n pozitif bir tamsayı olsun. Bir M modülü için aşağıdaki koşulu göz önüne alalım.

(Q_n) : M nin bir dik toplananına izomorf olan her K altmodülü için K_i ($1 \leq i \leq n$), M nin komplementleri olmak üzere $K = K_1 \oplus \dots \oplus K_n$ ise, her

$\varphi : K \rightarrow M$ homomorfizması bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilir.

Eğer bir M modülü her $n \geq 2$ için (Q_n) koşulunu sağlıyor ise, (Q_{n-1}) koşulunuda sağlar.

Ayrıca M modülü her $n \geq 1$ için (Q_n) koşulunu sağlıyorsa açıktır ki, (P_n) koşulunuda sağlar.

Teorem 2.2.4 *Bir M modülü için aşağıdaki koşullar denktir.*

1. M , süreklidir.
2. M her n pozitif tamsayısı için (Q_n) koşulunu sağlar.
3. M , $n \geq 2$ olan bazı tamsayılar için (Q_n) koşulunu sağlar.
4. M , (Q_2) koşulunu sağlar.
5. M , (Q_1) koşulunu sağlar ve CS -modüldür.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ olduğu Sonuç 2.2.3 den görülür. $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ ve $(1) \Rightarrow (5)$ açıktır. $(4) \Rightarrow (1)$ olduğu Sonuç 2.1.5 ve Sonuç 2.2.3 den ve $(5) \Rightarrow (1)$ olduğu ise Sonuç 2.2.3 den görülür. $\square$

Örnek 2.2.5 M , bir serbest $\mathbb{Z}$ -modül ve rankı $0 \neq k < \infty$ olsun. Bu durumda,

1. M , CS -modüldür.
2. M modülünün (C_3) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul $k = 1$ olmasıdır.

Kanıt. (1) N , M de bir komplement olsun. O zaman, M/N torsion-free dir ve böylece serbest modül olur. Buradan N , M nin bir dik toplanamıdır.

(2) Eğer $k = 1$ ise M uniform modüldür ve böylece (C_3) koşulunu sağlar.

Tersine farzedelim ki, $k \geq 2$ ve $f_1, f_2, \dots, f_k$, M nin bir tabanı olsun. $K_1 = \mathbb{Z}f_1$ ve $K_2 = \mathbb{Z}(f_1 + 2f_2)$ olduğunu kabul edelim. $L = \mathbb{Z}f_2 + \dots + \mathbb{Z}f_k$ olmak üzere

$M = K_1 \oplus L = K_2 \oplus L$ dir. $K_1 \cap K_2 = 0$ olmasına rağmen $K_1 \oplus K_2 = \mathbb{Z}f_1 \oplus \mathbb{Z}2f_2$ altmodülü $\mathbb{Z}f_1 \oplus \mathbb{Z}f_2$ nin bir dik toplananı olmadığından M nin de dik toplananı olmaz. Böylece M , (C_3) koşulunu sağlamaz. Dolayısıyla $k = 1$ olmalıdır. $\square$

Örnek 2.2.6 p herhangi bir asal tamsayı ve R lokal halka $\mathbb{Z}_p$ ve M , $\mathbb{Z}$ -modül $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus \mathbb{Q}$ olsun. Bu durumda,

1. M bir R -modüldür.
2. K nın M modülünde komplement olması için gerek ve yeter koşul K , M de bir dik toplanandır veya bazı $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ için $K = R(1 + \mathbb{Z}p, q)$ olmasıdır.
3. M , (P_1) koşulunu sağlar fakat Cs -modül değildir.

Kanıt. (1): M nin $M_1 = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus 0$ ve $M_2 = 0 \oplus \mathbb{Q}$ altmodüllerini alalım. Bu durumda, $M = M_1 \oplus M_2$ dir. $s, t \in \mathbb{Z}, t \neq 0$ ve t ile p aralarında asal olmak üzere s/t rasyonel sayılarının oluşturduğu R halkası $\mathbb{Q}$ da althalkadır.

İlk önce herhangi bir $m \in M$ ve herhangi $p \nmid s$ koşulunu sağlayan $s, t \in \mathbb{Z}$ için $tm' = sm$ olacak şekilde tek bir $m' \in M$ vardır ve m' , $(s/t)m$ olarak tanımlanır. Bu durumda M , R -modüldür.

(2): $q \in \mathbb{Q}$ ve $K = R(1 + \mathbb{Z}p, q)$ olsun. İlk olarak K nın $M_{\mathbb{Z}}$ modülünde komplement olduğunu gösterelim. K , M nin düzgün altmodülüdür. Farzedelim ki, $K \leq_e N$ olacak şekilde M nin bir N altmodülü ve $x \in N$ olsun. O zaman, $U = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}(1 + \mathbb{Z}p, q)$ bir sonlu üretilmiş uniform $\mathbb{Z}$ -modül olur ve böylece U devirlidir. $a \in \mathbb{Z}$ ve $b \in \mathbb{Q}$ için, $U = \mathbb{Z}(a + \mathbb{Z}p, b)$ olsun. $(1 + \mathbb{Z}p, q) = n(a + \mathbb{Z}p, b)$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $1 - na \in \mathbb{Z}p$, n ile p aralarında asal olmak üzere $(a + \mathbb{Z}p, b) \in R(1 + \mathbb{Z}p, q) = K$ olur. Böylece $x \in K$ olur. Yani, $K = N$ dir ve K , M de komplement olur.

Diğer taraftan L , $M_{\mathbb{Z}}$ modülünün bir komplementi ve $L \neq 0$ olsun. M nin uniform boyutu 2 dir ve bundan dolayı L uniformdur [8, Lemma 1.9]. İlk olarak L nin M de bir R -altmodül olduğunu gösterelim. O halde t ile p aralarında asal olmak üzere $L' = \{m \in M : \text{bazı } t \in \mathbb{Z} \text{ için } tm \in L\}$ olsun. Bu taktirde, $L' = RL$ olan

M nin bir altmodülüdür. Eğer $0 \neq m \in L'$ ise, bazı $t \in \mathbb{Z}$ ve t ile p aralarında asal olmak üzere $tm \in L$ olup $tm \neq 0$ olur. Böylece, L, L' de bir essential altmodüldür. O halde, $L = L'$ ve L, M nin bir R -altmodül olduğu elde edilir. Şimdi, M, M_1, M_2 veya bir $q \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $R(1 + \mathbb{Z}p, q)$ için $L = 0$ olduğunu gösterebiliriz. Farzedelim ki, M, M_1 veya M_2 için $L \neq 0$ olsun. M_1 ve M_2 modülleri düzgün olduğundan L yi M_1 ve M_2 modülleri içermez. Böylece, bazı $c \in \mathbb{Z}$ ile p arasında asal ve $0 \neq d \in \mathbb{Q}$ için $(c + \mathbb{Z}p, d) \in L$ dir. Genelliği bozmadan $c = 1$ kabul edelim. L, M nin bir R -altmodülü olduğundan $R(1 + \mathbb{Z}p, d) \subseteq L$ dir. Fakat $R(1 + \mathbb{Z}p, d), M$ de bir komplementtir ve böylece $L = R(1 + \mathbb{Z}p, d)$ olur. Dolayısıyla (2) ispatlanmış olur.

(3): $R(1 + \mathbb{Z}p, 1), M$ de dik toplanan olmayan M nin bir komplementidir. Böylece M, CS -modül değildir. M nin (P_1) koşulunu sağladığını göstermek için her $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ ve her $\varphi : R(1 + \mathbb{Z}p, q) \rightarrow M$ homomorfizmasının bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebildiğini göstermek yeterli olacaktır. $K = R(1 + \mathbb{Z}p, q)$ ve bazı $a \in \mathbb{Z}$ ve $b \in \mathbb{Q}$ için $\varphi(1 + \mathbb{Z}p, q) = (a + \mathbb{Z}p, b)$ olsun. $\theta : M \rightarrow M$ dönüşümünü $c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Q}$ için, $\theta(c + \mathbb{Z}p, d) = (ca + \mathbb{Z}p, db/q)$ olarak tanımlayalım. θ iyi tanımlıdır. $\theta : M \rightarrow M$ bir homomorfizmadır ve θ nın K ya kısıtlanması φ dir. Böylece, $M, (P_1)$ koşulunu sağlar. $\square$

Sonuç 2.2.7 *Bir önceki örnekte ki M modülü (Q_1) koşulunu sağlamaz.*

Kanıt. $K = R(1 + \mathbb{Z}p, 1)$ olsun. O zaman, K, M nin $K \cap M_1 = 0$ koşulunu sağlayan bir komplementidir. $\pi : M \rightarrow M_2$ kanonik projeksiyon olsun. $L = \pi(K)$ alalım. O halde, $L \cong K$ dir. $L = R(0 + \mathbb{Z}p, 1)$ dir. $\varphi : L \rightarrow M$ dönüşümünü $r \in R$ olmak üzere $\varphi(r(0 + \mathbb{Z}p, 1)) = r(1 + \mathbb{Z}p, 1)$ olarak tanımlayayım. O zaman, φ homomorfizması M ye genişletilemez. Farzedelim ki, φ bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilsin. O zaman, $(1 + \mathbb{Z}p, 1) = \varphi(0 + \mathbb{Z}p, 1) = \theta(0 + \mathbb{Z}p, 1) = p\theta(0 + \mathbb{Z}p, 1/p)$ olur ki, bu çelişkidir. Yani $M, (Q_1)$ koşulunu sağlamaz. $\square$

3 Ec-Kapalı Altmodülleri Dik Toplanan Olan Modüller ve Ec-İnjektiflik

Bu bölümde CS-modüllerin bir genelleştirmesi ile [24] de incelenmiş ve 2. bölümde ayrıntılı olarak verilen P_1 özelliğinden daha genel olarak, ec-kapalı altmodüllerden, modüle olan dönüşümlerin modüle genişletilmesi anlamında ec-injektiflik özelliği araştırılmıştır. Bu bölümde elde ettiğimiz sonuçlardan bazıları ve verilen kimi örnekler [15] deki bazı varsayımların geçersizliğini ve bu varsayımlara bağlı olan [15] deki bazı sonuçların düzeltilmiş yeni biçimlerini vermektedir.

3.1 ECS-Modüller

Bu bölümde sıkça kullandığımız ve çalışmalarımızda temel olan ec-kapalı altmodül tanımını vererek başlayalım.

Tanım 3.1.1 M bir sağ R -modül ve $N \leq M$ olsun.

(i) Eğer N , devirli bir altmodülü geniş (essential) olarak kapsıyorsa yani $xR \leq_e N$ olacak biçimde bir $x \in N$ varsa, N ye M nin **ec-altmodülü** denir.

(ii) N, M de bir ec-altmodül olsun. Eğer $N \leq_c M$ ise N ye M de bir **ec-kapalı altmodül** denir.

Önteorem 3.1.2 N, M de bir ec-altmodül olsun. Bu durumda, N nin her dik toplananı M de bir ec-altmodüldür.

Kanıt. N, M de bir ec-altmodül olsun. Budurumda, bir $x \in N$ için $xR \leq_e N$ dir. N_1, N nin bir dik toplananı olsun. O halde $N = N_1 \oplus N_2$ olacak biçimde bir $N_2 \leq N$ vardır. $x_1 \in N_1, x_2 \in N_2$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$ yazalım. Böylece $x_1R \leq_e N_1$ dir. N_1, M de ec-altmodül olur. $\square$

Sonuç 3.1.3 1. N, M de ec-kapalı altmodül olsun. N nin her dik toplananı M de bir ec-kapalı altmodüldür.

2. $A \leq B \leq M$ ve A, B de *ec-kapalı*, B de M de *ec-kapalı altmodül* ise A, M de *ec-kapalı altmodüldür*.

Kanıt. Önteorem 3.1.2 ve 1. bölümden açıktır. $\square$

Tanım 3.1.1'den her *ec-kapalı altmodül* açıkca *kapalı altmodüldür*. Böylece *kapalı altmodül* olup *ec-kapalı* olmayan (yani, *ec-altmodül* olmayan) modüllerin var olup olmadıkları sorusunu düşünmek doğaldır ki, bir sonraki örneğimiz [26] (yada [33]) den alınmış olup, *kapalı* ve *ec-kapalı altmodüllerin* farklı olduklarını gösterecektir.

Örnek 3.1.4 $\mathbb{R}$ gerçel cisim ve S de $\mathbb{R}[x, y, z]$ polinomlar halkası olsun. $s = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ olmak üzere $R = S/Ss$ değişmeli halkası olsun. Bu durumda $M_R = R \oplus R \oplus R$ modülü *ec-kapalı olmayan, kapalı altmodül* kapsar.

Kanıt. $\varphi : M \rightarrow R$, $a, b, c \in S$ olmak üzere $\varphi(a + Ss, b + Ss, c + Ss) = ax + by + cz + Ss$ olarak tanımlayalım. φ örten homomorfizmadır. O halde $\text{Ker}\varphi$, M nin bir dik toplananıdır. $K = \text{ker}\varphi$ denirse, $M = K \oplus K'$ olacak biçimde bir $K' \leq M$ vardır. Açıktır ki, $K' \cong R$ ve K düzgün altmodül değildir.

Aslında K altmodülü, 2-küre S^2 nin düzgün kesitlerinin R -modülüdür ve S^2 nin Euler karakteristiği $2 \neq 0$ olduğundan 2-kürenin teğet demeti, K indecomposable R -modülüdür [26]. K, M_R de bir dik toplanan olduğundan K, M de komplement altmodüldür ve $\dim K = 2$ dir.

K nin M_R de *ec-altmodül* olduğunu varsayalım. O halde $xR \leq_e K$ olacak biçimde bir $x \in K$ vardır. Buradan $\dim(xR) = \dim K = 2$ dir. Ancak $\alpha : xR \rightarrow R$, $r \in R$ olmak üzere $\alpha(xr) = r$ biçiminde tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmadır. Yani $\dim(xR) = \dim R = 1$ dir. O halde xR düzgün modüldür ki, $\dim K = 1$ çelişmesine ulaşırız. Böylece K, M_R de *ec-altmodül* olamaz. $\square$

Örnek 3.1.4 den hareketle bir modülde komplement ve *ec-komplement altmodüllerinin* aynı olması koşulunu aşağıdaki önteorem de ispatlayacağız.

Not 3.1.5 Örnek 3.1.4 te $M_R = R \oplus R \oplus R$ yerine $n \geq 3$ ve n tek tamsayı olmak üzere $M_R = \bigoplus_{i=1}^n R$ serbest altmodülü alınabilir.

Önteorem 3.1.6 *Bir M_R modülü CS ve $Y = xR \leq_e M_R$ olacak şekilde bir altmodülü olsun. Bu durumda K, M_R de komplement ise, K, M_R de ec-kapalı altmodüldür.*

Kanıt. K, M_R de komplement olsun. Bu durumda $M = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ vardır. Şimdi $\pi : M \rightarrow K$ kanonik projeksiyon olsun. O halde, $xR \cap K = Y \cap K \leq \pi(Y) = \pi(x)R \leq K$ olur. $xR \leq_e M$ olduğundan $xR \cap K \leq_e K$ dır. Buradan $xR \cap K \leq \pi(x)R \leq K$ ve $xR \cap K \leq_e K$ olduğunu göz önünde bulundurursak $\pi(x)R \leq_e K$ olur. $\pi(x)R$ devirli olduğundan K, M_R de ec-kapalı altmodüldür. $\square$

Tanım 3.1.7 *M bir sağ R -modül olsun. Eğer M nin her ec-kapalı altmodülü M nin bir dik toplananı oluyorsa M ye bir **ECS-modül** denir. Bir R halkası için R_R, ECS -modül oluyorsa R ye **sağ ECS-halka** denir.*

Böylece tanımların bir sonucu olarak açıktır ki, her CS-modül, ECS-modül ve her (von Neumann) düzenli halka ECS-halkadır.

Önteorem 3.1.8 *M_R bir ECS-modül olsun.*

1. *M indecomposable ise M_R düzgündür.*
2. *M_1, M nin bir dik toplananı ise M_1 de ECS-modüldür.*

Kanıt. (1) M indecomposable ve $0 \neq X \leq M_R$ olsun. O halde $0 \neq x \in X$ vardır ki, $xR \leq M_R$ dır. xR nin M deki kapanışına C diyelim. O halde, $xR \leq_e C \leq_c M_R$ dır. Bu durumda C ec-kapalı altmodüldür. Varsayımdan C, M nin bir dik toplananıdır. Böylece $C = M$ dir. $xR \leq_e M$ den $X \leq_e M$ elde edilir. Yani M_R düzgün modüldür.

(2) M_1, M nin bir dik toplananı olsun. O halde $M = M_1 \oplus M_2$ olacak biçimde bir $M_2 \leq M$ vardır. X, M_1 de ec-kapalı altmodül olsun. Sonuç 3.1.3 (ii) den X, M de ec-kapalıdır. O halde, X, M nin bir dik toplananıdır. Bir $Y \leq M$ için $M = X \oplus Y$

dir. Buradan, $M_1 = M_1 \cap (X \oplus Y) = X \oplus (M_1 \cap Y)$ bulunur ki, X , M_1 in dik toplananı olur yani M_1 , ECS-modüldür. $\square$

M_R bir modül olsun. CS-modül tanımını devirli altmodüllere kısıtlayıp, her devirli altmodülü bir dik toplananda geniş olarak kapsanan modüller yani, her $x \in M$ için $xR \leq_e D$ olacak biçimde M nin bir D dik toplananı vardır, P -extending modüller olarak [15] de incelenmiştir.

Şimdi vereceğimiz önerme CS, ECS ve P -extending koşulları arasındaki gerektirmeleri belirleyecektir.

Önerme 3.1.9 *M bir sağ R -modül olsun. Aşağıdaki koşulları düşünelim.*

1. M , CS dir.
2. M , ECS dir.
3. M , P -extending modüldür.

Bu durumda (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) dür. Bu gerektirmelerin tersleri genel olarak doğru değildir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) gerektirmesi açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3): mR nin M_R deki kapanışı L , M nin bir ec-kapalı altmodülüdür. Varsayımdan, L , M nin bir dik toplananıdır. O halde M_R , P -extending modüldür. Şimdi $M_2(R)$, [12, Example 13.8] deki halka olarak alınırsa, $M_2(R)$ von Neumann düzenli ve Baer halka değildir. Böylece $M_2(R)$ ne sağ nede sol CS halka değildir. O halde (2) $\nRightarrow$ (1) dir. Son olarak, R halkası [2, Example 3.2] deki halka olsun. Yani $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ olarak alalım. Bu durumda, R sağ P -extending dir. Ancak R_R , CS değildir [32]. R_R sonlu Goldie boyutlu olduğundan, R_R de bir maksimal düzgün (ve böylece ec-kapalı) altmodül vardır ki, R_R nin bir dik toplananı değildir. O halde, R_R ECS-modül değildir. Böylece (3) $\nRightarrow$ (2) $\square$

Önerme 3.1.9 dan CS, ECS ve P -extending modül sınıfları birbirinden farklıdır. [15] de ECS ve P -extending koşulları denk alınıp sonuçlar ispatlanmıştır.

Ancak Önerme 3.1.9 un ispatı bu koşulların farklı olduğunu açıklığa kavuşturan ters bir örnek vermektedir.

ECS özelliği CS ve P -extending özellikleri arasında olduğundan P -extending bir modülün ECS veya bir ECS-modülün CS olmasını sağlayan koşulların araştırılması doğaldır ki bu türden koşulları bir sonra vereceğimiz teoremden ispatlayacağız. Önce teoremin varsayımlarından birisi olan $End(M_R)$ nin Abel olması koşulunu M modülünün dik toplam ayrışmaları cinsinden karakterize edeceğiz. Bunun için gerekli olan önteorem ile başlayalım.

Önteorem 3.1.10 *M bir sağ R -modül ve $e = e^2 \in End(M_R)$ olsun. Bir $t = t^2 \in End(M_R)$ için $Ime = Imt$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in End(M_R)$ için $t = e + ex(1 - e)$ olmasıdır.*

Kanıt. [1]'e bakınız. □

Önteorem 3.1.11 *M bir sağ R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.*

1. $S = End(M_R)$ halkası Abeldir.
2. $M = N \oplus K = N \oplus L$ ise $K = L$ dir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2): $M = N \oplus K = N \oplus L$ olsun. e ile $1 - e$ ve t ile $1 - t$ ortogonal idempotent endomorfizmalar olmak üzere $M = eM \oplus (1 - e)M = tM \oplus (1 - t)M$ ve $Ime = Imt$ olduğunu kabul edelim. Önteorem 3.1.10 dan, $x \in End(M_R)$ için $t = e + ex(1 - e)$ dir. S deki tüm idempotentler merkezde olduğundan $t = e + ex(1 - e) = e + ex - exe = e + ex - e^2x = e + ex - ex = e$ dir. O halde, $(1 - e)M = (1 - t)M$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (1): $e^2 = e \in End(M_R)$ olsun. Bir $x \in End(M_R)$ için $t = e + ex(1 - e)$ bir idempotent olduğundan, önteorem 3.1.10 dan $Ime = Imt$ dir. O halde, varsayımdan $(1 - e)M = (1 - t)M$ dir. Bir modülün ayrışmasına karşılık gelen ortogonal idempotentlerin bir tam kümesinin tekliğinden $e = t$ dir. Yani her

$x \in \text{End}(M_R)$ için, $ex(1 - e) = ex - exe = 0$ bulunur. O halde $ex = exe$ olduğundan e, S nin merkezindedir. Buradan da S , Abel'dir. $\square$

Teorem 3.1.12 1. M_R bir nonsingular modül olsun. Bu durumda, M modülünün P -extending olması için gerek ve yeter koşul M modülünün ECS olmasıdır.

2. M bir sağ R -modül, $\text{End}(M_R)$ Abel ve $X \leq M$ için $h_i \in \text{End}(M_R)$ olmak üzere $X = \sum_{i \in I} h_i(M)$ olsun. Bu durumda M modülünün P -extending olması için gerek ve yeter koşul M modülünün ECS olmasıdır.

3. M , sonlu Goldie boyutlu bir modül olsun. Bu durumda M modülünün CS olması için gerek ve yeter koşul M modülünün ECS olmasıdır.

Kanıt. (1): M modülünün P -extending sağ R -modül olduğunu kabul edelim. X, M de bir ec-kapalı altmodül olsun. O halde bir $x \in X$ için $xR \leq_e X$ dir. Varsayımdan M nin bir L dik toplananı vardır ki, $xR \leq_e L$ dir. M_R nonsingular olduğundan $X = L$ dir. Böylece, M_R , ECS dir. Tersî Önerme 3.1.9 dan kolayca elde edilir.

(2): M nin P -extending modül olduğunu kabul edelim. C, M de bir ec-kapalı altmodül olsun. Bu durumda cR, C de essential olacak biçimde bir $c \in C$ vardır. Varsayımdan, $cR \leq_e eM = D$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ vardır. Böylece $M = eM \oplus D'$ ve $D' = (1 - e)M$ dir. O halde $C \oplus D' \leq_e M$ dir. Şimdi $0 \neq x \in C$ alalım. $x = ex + (1 - e)x$ dir. Ancak $m_i \in M$ olmak üzere $x = \sum_{i \in I} h_i(m_i)$ dir. Böylece $(1 - e)x = (1 - e) \sum_{i \in I} h_i(m_i) = \sum_{i \in I} h_i((1 - e)m_i) \in C \cap D' = 0$ dir. Yani, $x = ex$ olur. Buradan $x \in D$ ve böylece de $C \leq D$ bulunur. O halde $C \leq_e D$ ve C kapalı olduğundan $C = D$ elde edilir. Böylece C, M_R modülünde dik toplanandır. Dolayısıyla M_R , ECS modüldür. Tersî, Önerme 3.1.9 dan açıktır.

(3): M , ECS-modül olsun. N, M nin herhangi bir maksimal düzgün altmodülü olsun. O halde, N, M de ec-kapalı altmodüldür. (bakınız, 1.3 sayfa 13) Varsayımdan N, M nin bir dik toplananıdır. O halde M , CS modüldür. Tersî Önerme 3.1.9 dan kolayca elde edilir. $\square$

Bir sonra ispatlayacağımız sonuçta kullanılan çarpım modül (Multiplication modül) tanımını verelim.

Tanım 3.1.13 M bir R -modül olsun. Eğer her $X \leq M$ için $X = MA$ olacak biçimde $A_R \leq R_R$ varsa M ye **çarpım modül** denir.

Sonuç 3.1.14 M aşağıdaki koşullardan herhangi birini sağlayan bir R -modül olsun. Bu durumda M nin P -extending olması için gerek ve yeter koşul M nin ECS-modül olmasıdır.

1. $M_R = R_R$ ve R , Abel'dir.
2. M_R devirli ve R , değişmelidir.
3. M_R bir çarpım modülü ve R , değişmelidir.

Kanıt. (1) Teorem 3.1.12 (2) den açıktır.

(2) Şimdi M nin devirli ve R nin değişmeli olduğunu kabul edelim. $M_R \cong R/B$ olacak biçimde $B_R \leq R_R$ vardır. $Y/B \leq R/B$ alalım. O halde, $y_i \in Y$ olmak üzere $Y/B = (\sum_{i \in I} y_i R) + B = (\sum_{i \in I} y_i + B)R$ dir. $h_i : R/B \rightarrow R/B$ yi, $h_i(r + B) = y_i r + B$ olarak tanımlayalım. O halde, $h_i \in \text{End}((R/B)_R)$ dir. Böylece $Y/B = \sum_{i \in I} h_i(R/B)$ bulunur. R değişmeli olduğundan $\text{End}((R/B)_R)$ de değişmelidir. Teorem 3.1.12 (2) den sonuç elde edilir.

(3) M yi bir çarpım modülü ve R yi değişmeli kabul edelim. $A_R \leq R_R$ olmak üzere $X = MA$ olsun. Her bir $a \in A$ için $h_a : M \rightarrow M$ dönüşümü $m \in M$ olmak üzere $h_a(m) = ma$ olarak tanımlayalım. h_a nın bir R -homomorfizma olduğu kolayca görülebilir. O halde, $X = MA = \sum_{a \in A} h_a(M)$ dir. Bir çarpım modülün her alt modülü fully invariant olduğundan, [4, Lemma 1.9] dan $\text{End}(M_R)$, Abel'dir. O halde Teorem 3.1.12 (2) den sonuç elde edilir. $\square$

Bu kesimdeki bazı sonuçlarımızda kullanacağımız bir modül sınıfının tanımını ve gerekli olan bir özelliğini verelim. Bu tür modül sınıfları için özellikle [28], [10] çalışmaları önerilir.

Tanım 3.1.15 M bir R -modül olsun. Eğer M nin herhangi iki dik toplananı K, L için $K \cap L$ de M nin bir dik toplananı oluyorsa (yani her dik toplanan çiftinin kesişimide bir dik toplanan ise), M ye **toplanan kesişim özelliğine** sahiptir (kısaca **SIP-modül**) denir.

Önteorem 3.1.16 M bir SIP-modül ise, her dik toplananı da SIP-modüldür.

Kanıt. X, M nin bir dik toplananı ve K, L de X modülünde herhangi iki dik toplanan olsun. O halde K ve L, M de dik toplananlardır. Varsayımdan, $(K \cap L) \oplus F = M$ olacak biçimde bir $F \leq M$ vardır. Böylece $X = X \cap M = X \cap [(K \cap L) \oplus F] = (K \cap L) \oplus (X \cap F)$ olur. Yani $(K \cap L), X$ in bir dik toplananıdır. O halde X , SIP-modüldür. $\square$

Teorem 3.1.17 M bir P -extending modül olsun. Bu durumda;

1. Eğer $X \leq M$ ve X ile M nin her dik toplananının kesişimi X in dik toplananı ise X , P -extending' dir.
2. M nin her $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ için $e(X) \subseteq X$ koşulunu sağlayan bir X altmodülü P -extending' dir.
3. M , SIP-modül ise M nin her dik toplananı P -extending' dir.
4. M dağılımlı ise M nin her altmodülü P -extending' dir.

Kanıt. (1): A, X in bir devirli altmodülü olsun. O halde $x \in X$ olmak üzere $A = xR$ dır. Böylece $A \leq_e D$ olacak biçimde M nin bir D dik toplananı vardır. $A \leq_e D \cap X$ ve $D \cap X, X$ in bir dik toplananı olduğundan X, P -extending olur.

(2): X, M nin bir altmodülü olsun. D yi M nin herhangi bir dik toplananı ve $e : M \rightarrow D$ projeksiyonu öyle ki, $e(X) \subseteq X$ olarak tanımlayalım. O halde $e(X) = D \cap X, X$ in bir dik toplananıdır. Böylece (1) den X, P -extending olur.

(3): M_1, M nin bir dik toplananı olsun. O halde $M = M_1 \oplus M_2$ ve $M_2 \leq M$ dir. xR, M_1 in bir devirli altmodülü olsun. Böylece $xR \leq_e D$ olacak biçimde M nin bir D dik toplananı vardır. $M = D \oplus D'$ ve $D' \leq M$ diyelim. O halde

$xR \leq_e D \cap M_1$ dir. SIP-özelliklerinden $M = (D \cap M_1) \oplus U$ olacak biçimde bir $U \leq M$ vardır. $M_1 = M_1 \cap [(D \cap M_1) \oplus U] = (D \cap M_1) \oplus (M_1 \cap U)$ olduğundan M_1 , P -extending' dir.

(4): X , M nin bir altmodülü ve $xR \leq X$ olsun. M nin bir D dik toplananı vardır ki, $xR \leq_e D$ dir. O halde, $xR \leq_e D \cap X$ dir. $D' \leq M$ olmak üzere $X = X \cap (D \oplus D') = (X \cap D) \oplus (X \cap D')$ olduğundan $X \cap D$, X in bir dik toplananıdır. Böylece X , P -extending' dir. $\square$

Sonuç 3.1.18 *R bir halka ve M de SIP ye sahip projektif bir P -extending modül olsun. Bu durumda bir I indis kümesi vardır ki, M modülü M_i altmodüllerinin bir dik toplamı, $\bigoplus_{i \in I} M_i$ dir ve $i \in I$ için M_i ler M de ec-kapalı altmodüllerdir.*

Kanıt. Kaplansky' nin teoreminden [23], M modülü sayılabilir üretilmiş altmodüllerin bir dik toplamıdır. Teorem 3.1.17 (3) den, M yi sayılabilir üretilmiş kabul edebiliriz. M nin $m_1, m_2, \dots$ sayılabilir sayıda elemanlı bir üreteç kümesi vardır ki, $M = \sum_{i \in I} m_i R$ dir. Varsayımdan $M = M_1 \oplus N_1$ ve $m_1 R \leq_e M_1$ olacak biçimde $M_1, N_1 \leq M$ vardır. Her $i \geq 2$ için n_i, m_i nin N_1 deki projeksiyonu olsun. Yine Teorem 3.1.17 (3) den N_1 in bir M_2 dik toplananı vardır ki, $n_2 R \leq_e M_2$ dir. Bu şekilde devam edilirse, her pozitif k tamsayısı için $m_1 R + m_2 R + \dots + m_k R \subseteq M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$ olacak biçimde bir $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$ dik toplam elde ederiz. Böylece $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ dir. M_i ' lerin kuruluşu gereği her biri ec-kapalı altmodül olduğundan, ispat tamamlanır. $\square$

CS özelliğinin Morita invariant bir özellik olmadığını hatırlayalım. Bu kesimi ECS ve P -extending özelliklerinin de Morita invariant özellikler olmadığını göstererek tamamlayacağız. Bu sonucu elde etmek için aşağıdaki önermeyi ispatlayacağız.

Önerme 3.1.19 *R bir bölge ve $n \geq 1$ tamsayı olsun. Bu durumda,*

1. *Eğer R_R sağ Ore bölge ise, P -extending modüldür.*
2. *$M_2(R) = S$ sağ P -extending halka ise R sol Ore' dir.*

Kanıt. (1) R_R sağ Ore bölge ise [16, Theorem 10.22] den düzgün modüldür. Böylece P -extending modül olur.

(2) $0 \neq x, y \in R$ alalım ve $Rx \cap Ry = 0$ varsayalım. $u = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ denirse $\begin{bmatrix} r & s \\ w & v \end{bmatrix} \in S$ için $\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & s \\ w & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xr & xs \\ yr & ys \end{bmatrix}$ dir. O halde hipotezden $uS \leq_e eS$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in S$ vardır. $a, b, c, d \in R$ için $e = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. Böylece $\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by & 0 \\ cx+dy & 0 \end{bmatrix}$ olur. Yani $x = ax + by$ ve $y = cx + dy$ bulunur. Buradan $(1-a)x = by$ ve $(1-a)x = 0$ elde edilir. O halde $a = 1, b = 0$ dir. Yine $(1-d)y = cx$ den $d = 1, c = 0$ dir. Yani $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $uS \leq_e S$ dir. Diğer yandan $a', b', c', d' \in R$ için $0 \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xr & xs \\ yr & ys \end{bmatrix}$ dir. Buradan $r = s = 0$ ve böylece $a' = b' = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde R sol Ore' dir. $\square$

Sonuç 3.1.20 R bir bölge ve $M_2(R)$ sağ ECS-halka olsun. Bu durumda R sol Ore'dir.

Kanıt. Önerme 3.1.9 ve Önerme 3.1.19 dan açıktır. $\square$

Sonuç 3.1.20 den ECS olma özelliğinin Morita invariantliği hakkında yorum yapılabilir. Öncelikle [16] da sağ Ore bölgesi olup sol Ore olmayan örnek verilmiştir. O halde, sağ P -extending (ECS) olan R halkaları vardır ki, $M_2(R) = S$ sağ P -extending (ECS) halka değildir. Böylece P -extending ve ECS özellikleri Morita invariant özellikler değildir.

3.2 Ec-İnjektiflik

2. Bölümde incelediğimiz P_1 özelliğinden ve [20] de araştırılan kapalı düzgün altmodüllerden modüle tanımlı homomorfizmaların modülün kendisine genişletilmesi özelliğinden hareketle ec-kapalı altmodüllerden modüle olan homomorfizmaların modülün kendisine genişletilmesi özelliğini araştıracağız. [20] de verilen bazı tanımların ec-kapalı altmodüller alınarak elde edilen karşılıklarını tanımlayarak başlayalım.

Tanım 3.2.1 M_1 ve M_2 , R -modüller olsun. Eğer M_1 in her K ec-kapalı altmodülü için her $\varphi : K \rightarrow M_2$ homomorfizması bir $\theta : M_1 \rightarrow M_2$ homomor-

fizmasına genişletilebiliyorsa yani, $\theta|_K = \varphi$ ise M_2 modülüne M_1 -**ec-injektif**'tir denir. Açıktır ki, eğer M_2 modülü M_1 -c-injektif (bakınız [20]) veya daha da genel olarak eğer M_2 modülü M_1 -injektif ise M_1 -ec-injektif'tir. Yine, eğer M modülü M -ec-injektif ise M ye **self-ec-injektif**'tir denir.

2. Bölümde CS-modüllerin belirli altmodüllerden modüle olan homomorfizmaların genişletilebilmeleri türünden karakterizasyonları verilmiştir. Şimdi benzer olarak ECS-modüller için ilgili sonuçları ispatlayacağız.

Önteorem 3.2.2 *M bir modül olsun. Bu durumda M nin ECS-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her K ec-kapalı altmodülü için, K nin bir L komplementi vardır ki, her $\varphi : K \oplus L \rightarrow M$ homomorfizmasının bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir.*

Kanıt. Önteorem 2.1.4 deki ispata benzer olarak kanıtlanır. $\square$

Önteorem 3.2.3 *M bir modül ve K , M nin bir ec-kapalı altmodülü olsun. Eğer K , M -ec-injektif ise K , M nin bir dik toplananıdır.*

Kanıt. $i : K \rightarrow K$ birim homomorfizmayı gösterebiliriz. O halde hipotezden bir $\theta : M \rightarrow K$ homomorfizması vardır ki, $\theta|_K = i$ dir. Böylece $M = K \oplus \text{Ker}\theta$ olduğunu görmek kolaydır. Yani K , M nin bir dik toplananıdır. $\square$

Önerme 3.2.4 *Bir M modülü için aşağıdaki koşullar denktir.*

1. M , ECS dir.
2. Her modül M -ec-injektif'tir.
3. M nin her ec-kapalı altmodülü M -ec-injektif'tir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) ve (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmeleri açıktır. (3) $\Rightarrow$ (1) gerektirmesinde Önteorem 3.2.3 den elde edilir. $\square$

Önerme 3.2.4 den özel olarak, her ECS-modülün self-ec-injektif modül olduğu sonucunu elde ederiz. Ancak, self-ec-injektif modüllerin genel olarak ECS-modül olmayacağına ilişkin örnek vereceğiz. Yine bu örneğimiz, [15] deki ” $M = M_1 \oplus M_2$ ise M_2 modülünün M_1 -ec-injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin $N \cap M_2 = 0$ olan her N ec-kapalı altmodülü için $N \leq N'$ ve $M = N' \oplus M_2$ olacak biçimde bir $N' \leq M$ vardır.” varsayımının geçersizliğini de gösterecektir.

Örnek 3.2.5 p bir asal tamsayı ve $R = \mathbb{Z}_p$ local (yerel) halka olsun. M modülü olarak $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ Abel grubunu ($\mathbb{Z}$ -modülü) alalım. Bu durumda M self-ec-injektif’ tir fakat ECS-modül değildir. Üstelik $M_{\mathbb{Z}}$ önceki paragraftaki denkliği de sağlamaz.

Kanıt. $M_{\mathbb{Z}}$ nin CS-modül olmadığını biliyoruz ([24], [20]). $M_{\mathbb{Z}}$ sonlu Goldie boyutlu olduğundan, Teorem 3.1.12 (3) den $M_{\mathbb{Z}}$ ECS-modül değildir. Örnek 2.2.6 dan $M_{\mathbb{Z}}$ self-ec-injektif’ tir. Son kısım için, $M_1 = \mathbb{Q} \oplus 0$ ve $M_2 = 0 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ diyelim. M_1, M_2 düzgün modüller olduğundan M_2 modülü M_1 -ec-injektif’ tir. Şimdi $N = R(1, \bar{1})$ diyelim. O halde, $N, M_{\mathbb{Z}}$ nin bir ec-kapalı altmodülüdür. Üstelik $N \cap M_2 = 0$ ve $N, M_{\mathbb{Z}}$ de bir dik toplanan değildir. $N \leq N'$ ve $M = N' \oplus M_2$ olacak biçimde bir $N' \leq M$ olduğunu kabul edelim. N, M de maksimal düzgün altmodül olduğundan N' nün Goldie boyutu 2 den büyük yada eşittir ki, bu M nin Goldie boyutunun 2 oluşuyla çelişir. O halde, böyle bir $N' \leq M_{\mathbb{Z}}$ yoktur. $\square$

Örnek 3.2.5 ile ilgili olarak, M_2 modülünün M_1 -ec-injektif olması için gerek ve yeter bir koşulu ispatlayacağız. Öncelikle, $M = M_1 \oplus M_2$ için π_i ($i=1,2$) ler M den M_i ye projeksiyon dönüşümleri için kullanılacaktır. Diğer yandan; ispatlayacağımız teoremin [24], [20] ile karşılaştırması bütünlük açısından uygun olacaktır.

Teorem 3.2.6 M_1, M_2 modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda, M_2 nin M_1 -ec-injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin $N \cap M_2 = 0$ ve $\pi_1(N)$, M_1 de ec-kapalı olacak biçimdeki her ec-kapalı altmodülü N için $N \leq N'$ ve $M = N' \oplus M_2$ olacak şekilde bir $N' \leq M$ olmasıdır.

Kanıt. M_2 modülünün M_1 -ec-injektif olduğunu kabul edelim. N yi M de bir ec-kapalı altmodül olarak alalım öyle ki, $N \cap M_2 = 0$ ve $\pi_1(N)$ de M_1 de ec-kapalı olsun. $N \cap M_2 = 0$ olduğundan, $\pi_1|_N : N \rightarrow \pi_1(N)$ izomorfizmadır. $\alpha : \pi_1(N) \rightarrow M_2$ yi, $x \in \pi_1(N)$ için $\alpha(x) = \pi_2(\pi_1|_N)^{-1}(x)$ olarak tanımlayalım. M_2 , M_1 -ec-injektif ve $\pi_1(N)$, M_1 de ec-kapalı olduğundan α homomorfizması bir $\theta : M_1 \rightarrow M_2$ homomorfizmasına genişletilebilir. $N' = \{x + \theta(x) : x \in M_1\}$ kümesini tanımlayalım. N' nün M de bir altmodül ve $M = N' \oplus M_2$ olduğu kolayca görülebilir. Şimdi $x \in N$ için, $\theta\pi_1(x) = \alpha\pi_1(x) = \pi_2(x)$ ve böylece $x = \pi_1(x) + \theta\pi_1(x) \in N'$ olur. O halde $N \leq N'$ dır.

Tersine, $N \cap M_2 = 0$ ve $\pi_1(N)$, M_1 de ec-kapalı olan M nin her ec-kapalı altmodülü N için, $M = N' \oplus M_2$ ve $N \leq N'$ olacak biçimde M nin bir N' altmodülü var olsun. K , M_1 in bir ec-kapalı altmodülü ve $\alpha : K \rightarrow M_2$ bir homomorfizma olsun. $N = \{x - \alpha(x) : x \in K\}$ diyelim. O halde, $N \leq M$ ve $N \cap M_2 = 0$ dır. $\pi_1(N) = K$ olduğundan $\pi_1(N)$, M de ec-kapalıdır. Varsayımdan, $M = N' \oplus M_2$ olacak biçimde $N \leq N'$ altmodülü vardır. $\pi : M \rightarrow M_2$, $\ker \pi = N'$ olan projeksiyon ve $\theta = \pi|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_2$, π nin M_1 ' e kısıtlanmış homomorfizması olsun. Şimdi bir $x \in K$ için, $\theta(x) = \pi(x) = \pi(x - \alpha(x) + \alpha(x)) = \alpha(x)$ dır. Yani, θ dönüşümü α yı genişletir. O halde, M_2 modülü M_1 -ec-injektiftir. $\square$

Önteorem 3.2.7 M_1 ve M_2 modülleri için M_2 , M_1 -ec-injektif olsun. Bu durumda, M_1 in her ec-kapalı altmodülü N için, M_2 modülü N -ec-injektif ve (M_1/N) -ec-injektif' tir.

Kanıt. N , M_1 in bir ec-kapalı altmodülü olsun. N nin her ec-kapalı altmodülü M_1 in ec-kapalı altmodülü olduğundan M_2 , N -ec-injektif' tir. Şimdi M_1/N de bir K/N ec-kapalı altmodülünü ve $\alpha : K/N \rightarrow M_2$ homomorfizmasını alalım. O halde Önerme 1.2.17 den K , M_1 in ec-kapalı altmodülüdür. $\pi : M_1 \rightarrow M_1/N$ ve $\pi' : K \rightarrow K/N$ kanonik epimorfizmalar olsun. M_2 modülü M_1 -ec-injektif olduğundan $\alpha\pi' : K \rightarrow M_2$ dönüşümünü genişleten bir $\theta : M_1 \rightarrow M_2$ dönüşümü vardır. $N \leq \ker \theta$ olduğundan $\gamma\pi = \theta$ olacak biçimde bir $\gamma : M_1/N \rightarrow M_2$ homomorfizması

vardır. O halde bir $a \in K$ için $\gamma(a + N) = \gamma\pi(a) = \theta(a) = \alpha\pi'(a) = \alpha(a + N)$ dir. Böylece M_2 modülü (M_1/N) -ec-injektif' tir. $\square$

Önteorem 3.2.8 *M bir self-ec-injektif modül ise M nin dik toplananları da self-ec-injektif' tir.*

Kanıt. L, M nin bir dik toplananı olsun. O halde $M = L \oplus L'$ olacak biçimde bir $L' \leq M$ vardır. X, L nin bir ec-kapalı altmodülü ve $\varphi : X \rightarrow L$ bir homomorfizma olsun. X, M de ec-kapalı olduğundan $\theta|_X = \varphi$ olacak biçimde bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizması vardır. $\pi : M \rightarrow L$ projeksiyonu gösterebiliriz; $\alpha : L \rightarrow L$ homomorfizmasını $l \in L$ için $\alpha(l) = \pi(\theta(l))$ olarak tanımlayalım. Buradan $\alpha|_X = \varphi$ dir. O halde, L self-ec-injektif' tir. $\square$

Önteorem 3.2.8 in tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin, p bir asal tamsayı ise $M_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$, $M_2 = \mathbb{Z}$ olmak üzere $M_{\mathbb{Z}} = M_1 \oplus M_2$ modülünü alalım. Açık ki, M_1 ve M_2 düzgün modüller olduğundan, self-ec-injektif' tirler. Ancak $M_{\mathbb{Z}}$ nin Goldie boyutu sonlu (aslında 2) olduğundan, [20, Corollary 3.5] den $M_{\mathbb{Z}}$ self-ec-injektif değildir. Bu duruma ilişkin olarak şimdi bir teorem ispatlayacağız.

Teorem 3.2.9 *M_1 torsion ve M_2 sonsuz devirli gruplar olsun. Eğer $M_{\mathbb{Z}} = M_1 \oplus M_2$ modülü self-ec-injektif ise her p asal tamsayısı için $M_1 = pM_1$ dir.*

Kanıt. $0 \neq m_2 \in M_2$ için $M_2 = \mathbb{Z}m_2$ olsun. Bir p asal sayısı için $M_1 \neq pM_1$ olduğunu kabul edelim. $m_1 \in M_1$ ve $m_1 \notin pM_1$ için $K = \mathbb{Z}(m_1, pm_2)$ altmodülünü alalım. Bir $L \leq M$ için $K \leq_e L$ varsayalım. O halde herhangi bir $n \in \mathbb{Z}$ için $n(m_1, pm_2) = (nm_1, npm_2) = (0, 0)$ olması $n = 0$ olmasını gerektirir. Buradan K sonsuz devirlidir. O halde K düzgün $\mathbb{Z}$ -modüldür. $x \in L$ alalım. $a = (m_1, pm_2)$ diyelim. O halde $K + \mathbb{Z}x = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}x$ sonlu üretilmiş modüldür. Böylece $K + \mathbb{Z}x \leq L$ ve $K + \mathbb{Z}x$ devirli modüllerin bir dik toplamıdır. Fakat $K + \mathbb{Z}x$ düzgündür, o halde $K + \mathbb{Z}x$ devirlidir. Böylece $y \in M$ için $\mathbb{Z}a \subseteq K + \mathbb{Z}x = \mathbb{Z}y$ dir. $m'_1 \in M_1$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $y = (m'_1, km_2)$ olsun. Buradan $s \in \mathbb{Z}$ için $a = sy$ dir. O halde, $(m_1, pm_2) = s(m'_1, km_2)$ den $m_1 = sm'_1$, $pm_2 = skm_2$ elde edilir. M_2

sonsuz devirli olduğundan, $s = \pm 1$ veya $k = \pm 1$ dir. Eğer $k = \pm 1$ olsa $s = \pm p$ olur ve buradan $m_1 = \pm pm'_1 \in pM_1$ çelişkisi elde edilir. Böylece $s = \pm 1$ olmalıdır. O halde $y \in \mathbb{Z}a$ ve $x \in \mathbb{Z}y \subseteq \mathbb{Z}a$ yani $L \subseteq \mathbb{Z}a = K$ dır ki, bu $L = K$ yı verir. Böylece K, M de komplementtir. K devirli olduğundan K ec-kapalıdır. Şimdi $\varphi : K \rightarrow M$ homomorfizmasını $\varphi(m_1, pm_2) = (0, m_2)$ olarak tanımlayalım. φ nin bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişletilebildiğini kabul edelim. O halde $u, v \in M_1$ ve $t \in \mathbb{Z}$ için $\theta(m_1, 0) = (u, 0)$ ve $\theta(0, m_2) = (v, tm_2)$ dir. Böylece $(0, m_2) = \varphi(m_1, pm_2) = \theta(m_1, pm_2) = \theta(m_1, 0) + p\theta(0, m_2) = (u, 0) + p(v, tm_2)$ dir. Buradan $0 = u + pv$ ve $m_2 = ptm_2$ elde ederiz. O halde $1 = pt$ dir ki, bu bir çelişkidir. Böylece, φ genişletilemez. Yani, her p asal sayısı için $M_1 = pM_1$ olmalıdır. $\square$

Bu kesimi self-ec-injektif olup self-c-injektif olmayan modüllerin varlığını göstererek tamamlayacağız. Bunun için [20] den alınan aşağıdaki tanımı kullanacağız.

Tanım 3.2.10 M_1 ve M_2 modülleri verilsin. Bu durumda, eğer her $A \leq M_R$ için $\ker \alpha \leq_e A$ olan $\alpha : A \rightarrow M_2$ homomorfizması bir $\beta : M_1 \rightarrow M_2$ homomorfizmasına genişletilebiliyorsa M_2 modülüne **essentially** M_1 -**injektif** tir denir.

Önerme 3.2.11 M_1, CS ve M_2 de düzgün modüller olsun. Eğer M_2 essentially M_1 -injektif ise aşağıdaki koşullar denktir.

1. $M_1 \oplus M_2$ self-c-injektif tir.
2. $M_1 \oplus M_2$ self-ec-injektif tir.
3. $M_1 \oplus M_2$ self-cu-injektif tir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) ve (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmeleri tanımlardan açıktır. (3) $\Rightarrow$ (1) [20, Proposition 2.9] den elde edilir. $\square$

Sonuç 3.2.12 R cisim olmayan bir Prüfer bölgesi olsun. Bu durumda, herhangi bir sonlu üretilmiş olmayan serbest R -modül self-ec-injektif tir ancak self-c-injektif değildir.

Kanıt. M tabanı $\{m_i : i \in I\}$ olan bir serbest R -modül ve U , M de ec-kapalı bir altmodül olsun. Eğer $U = 0$ ise ispat biter. O halde $U \neq 0$ varsayalım. Buradan $xR \leq_e U$ olacak biçimde bir $0 \neq x \in U$ vardır. Böylece I indis kümesinin bir sonlu F altkümesi vardır ki, $x \in \bigoplus_{i \in F} m_i R$ dir. U/xR torsion modül olduğundan, $U \subseteq \bigoplus_{i \in F} m_i R$ dir. [9, Corollary 12.10] dan, U modülü $\bigoplus_{i \in F} m_i R$ nin ve böylece de M nin bir dik toplananıdır. O halde M_R self-ec-injektif' tir. Diğer yandan [20, Theorem 3.1] den, M_R self-c-injektif değildir. $\square$

3.3 ECS-modüllerin dik toplamları

ECS-modüllerin dik toplamlarının ECS-modül olması gerekmez. Örneğin $M_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$, $M_2 = \mathbb{Q}$ ve $M_{\mathbb{Z}} = M_1 \oplus M_2$ alınırsa, M iki, ECS-modülün (aslında iki düzgün modülün) dik toplamıdır ancak $M_{\mathbb{Z}}$, ECS değildir. (bakınız, örnek 3.2.5). Bu kesimde, ECS-modüllerin dik toplamının hangi koşullar altında ECS-modül olduğu tartışılacaktır. Buradaki sonuçlar [15] de P -extending yerine ECS koşulu yazılıp düzeltilmiş formdaki karşılık gelen sonuçlar olacaktır.

Önerme 3.3.1 $M = M_1 \oplus M_2$ ve M nin her ec-kapalı altmodülü C için $C \cap M_1$, M de ec-kapalı altmodül olsun. Bu durumda; M nin ECS-modül olması için gerek ve yeter koşul $C \cap M_1 = 0$ veya $C \cap M_2 = 0$ olan her C ec-kapalı altmodülün M nin bir dik toplananı olmasıdır.

Kanıt. Gereklilik açıktır. Yeterlilik için, C yi M de ec-kapalı altmodül ve $cR \leq_e C$ olarak alalım. Eğer $C \cap M_1 = 0$ ise ispat biter.

$C \cap M_1 \neq 0$ ise, varsayımdan $C \cap M_1$ altmodülü M de ec-kapalıdır. C_1 , $C \cap M_1$ in C deki kapanışı olsun. O halde, C_1 , M de ec-kapalıdır ve $C_1 \cap M_2 = 0$ dir. Böylece varsayımdan C_1 , M nin bir dik toplananıdır. Bir $C_2 \leq M$ için $M = C_1 \oplus C_2$ dir. Şimdi, $C = C \cap M = C \cap (C_1 \oplus C_2) = C_1 \oplus (C \cap C_2)$ dir. Sonuç 3.1.3 (1) den $C \cap C_2$, M de ec-kapalı altmodüldür ve $(C \cap C_2) \cap M_1 = 0$ dir. O halde, $C \cap C_2$, M nin bir dik toplananıdır. Böylece C , M nin bir dik toplananıdır. Yani M , ECS-modüldür. $\square$

Teorem 3.3.2 M_1 sonlu Goldie boyutlu bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M nin ECS-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin $C \cap M_1 = 0$ veya sonlu Goldie boyutlu olan her ec-kapalı altmodülü C nin bir dik toplanan olmasıdır.

Kanıt. Gereklik açıktır. Yeterlilik için, C, M nin bir ec-kapalı altmodülü ve $mR \leq_e C$ olsun. Eğer $C \cap M_1 = 0$ ise ispat biter.

O halde, $0 \neq c \in C \cap M_1$ alalım. cR nin C deki kapanışı C_1 olsun. C sonlu Goldie boyutlu olduğundan C_1 de sonlu Goldie boyutludur. Varsayımdan, C_1, M nin bir dik toplananıdır. Bir $K \leq M$ vardır ki, $M = C_1 \oplus K$ dir. Böylece $C^* = K \cap C$ için $C = C_1 \oplus C^*$ olur ve C^*, M de komplementtir. $c_1 \in C_1$ ve $c^* \in C^*$ için $m = c_1 + c^*$ diyelim. $C^*,$ ec-kapalı altmodülü C nin bir dik toplananı olduğundan Sonuç 2.1.3.(1) den C^* bir ec-kapalı altmodüldür. Eğer $C^* \cap M_1 = 0$ ise, varsayımdan C^* bir dik toplananıdır. O halde, C, M nin bir dik toplananı olur. Diğer yandan, eğer $C^* \cap M_1 \neq 0$ ise, bu durumda önceki adımları tekrarlayıp C_2 nin bir dik toplanan ve $C_2 \cap M_1 \neq 0$ olmak üzere $C^* = C_1 \oplus C_2$ elde ederiz. Bu şekilde devam edilirse M_1 modülünün Goldie boyutu sonlu olduğundan sonlu bir adımdan sonra bu işlem durmak zorundadır. O halde $i = 1, 3, \dots, n$ için C_i ler M nin dik toplananları, $C_n \cap M_1 = 0$ ve C_n essential devirli bir altmodül kapsamak üzere $C = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_n$ dir. Böylece C_n, M nin bir dik toplananıdır ki, varsayım gereği C, M nin bir dik toplananı olur. O halde M, ECS -modüldür. $\square$

Sonuç 3.3.3 M_1 sonlu Goldie boyutlu bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M nin ECS-modül olması için gerek ve yeter koşul $C \cap M_1 = 0$ yada $C \cap M_2 = 0$ olan M nin her C ec-kapalı altmodülünün bir dik toplanan olmasıdır.

Kanıt. Teorem 3.3.2 den hemen elde edilir. $\square$

Önerme 3.3.4 $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda, M nin her sonlu Goldie boyutlu ec-kapalı altmodülünün M nin bir dik toplananı olması için (M nin ECS-

modül olması için) gerek ve yeter koşul $C \cap M_1 = 0$ yada $C \cap M_2 = 0$ olan M nin her sonlu Goldie boyutlu ec-kapalı altmodülü C nin bir dik toplanan olmasıdır.

Kanıt. Teorem 3.3.2 nin ispatına benzer olarak yapılabilir. $\square$

Önerme 3.3.5 M_1 yarıbasit bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda, M nin ECS-modül olması için gerek ve yeter koşul $C \cap M_1 = 0$ olan M nin her C ec-kapalı altmodülünün bir dik toplanan olmasıdır.

Kanıt. Gereklik koşulu açıktır. Yeterlilik koşulu için, M de bir C ec-kapalı altmodülü alalım. $C \cap M_1 = 0$ ise ispat biter. Diğer yandan; M_1 yarıbasit olduğundan $C \cap M_1$ altmodülü, M_1 in bir dik toplananıdır. O halde $C = (C \cap M_1) \oplus C^*$ dır. C^* , M de ec-kapalı altmodül ve $C^* \cap M_1 = 0$ olduğundan C^* , M de bir dik toplanandır. Böylece C , M nin bir dik toplananıdır. $\square$

Bu kesimi iki düzgün modülün dik toplamının homolojik koşullar altında ECS modül olacağını ispatlayarak tamamlayacağız. Bunun için önce [14] de ispatlanan aşağıdaki Önteoremi verelim.

Önteorem 3.3.6 M ve N , R -modül olsun. Her $f \in \text{Hom}(M, E(N))$ için $X_f = \{m \in M : f(m) \in N\}$ olmak üzere $B_f = \{m + f(m) : m \in X_f\}$ ve N , $M \oplus N$ içinde birbirlerinin komplementleridir. Eğer $\text{Hom}(N, E(M)) = 0$ ise N , B_f nin $M \oplus N$ içinde tek komplementidir.

Kanıt. $B_f \cap N = 0$ olursa ispat açıktır. Şimdi L , $M \oplus N$ nin $L \cap N = 0$ ve $B_f \subseteq L$ olan bir altmodülü olsun. π ve π^* ın $M \oplus N$ dan sırasıyla M ve N ye projeksiyonlar olduğunu kabul edelim. Eğer her $l \in L$ için $\pi^*(l) = f\pi(l)$ olduğunu gösterirsek $B_f = L$ olur. Bu durumda bazı $l \in L$ için $(\pi^* - f\pi)(l) \neq 0$ olsun. $E(N)$ nin N üzerindeki essentialliğinden $0 \neq \pi^*(lr) - f\pi(lr) \in N$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Fakat $\pi^*(lr) - f\pi(lr) = lr - [\pi(lr) + f\pi(lr)] \in N \cap L = 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $(\pi^* - f\pi)(l) = 0$ dır. Yani her $l \in L$ için $\pi^*(l) = f\pi(l)$ elde edilir.

Önteoremin ikinci kısmının ispatı için Y , $M \oplus N$ nin $Y \cap B_f = 0$ koşulunu sağlayan bir altmodülü olsun. Eğer $Y \cap X_f \neq 0$ olsa, f in $Y \cap X_f$ e kısıtlanması $Hom(N, E(M))$ nin sıfırdan farklı bir elemanı olur ki bu da kabulümüzle çelişir. O zaman, $Y \cap X_f = 0$ dır ve buradan $X_f \leq_e M$ olduğundan da $Y \cap M = 0$ olur. Böylece $\pi^*|_Y$ bir monomorfizmadır ve $\pi(Y) = 0$ dır. Aksi taktirde çelişki elde edilir. Dolayısıyla $Y \subseteq N$ olur. $\square$

Önerme 3.3.7 M_1, M_2 düzgün modüller ve $i = 1, 2$ için $End(M_i)$ yerel halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1. $M = M_1 \oplus M_2$, CS-modül ve $i \neq j$ için $M_i \rightarrow M_j$ olan her monomorfizma bir izomorfizmadır.
2. $M = M_1 \oplus M_2$, ECS-modül ve $i \neq j$ için $M_i \rightarrow M_j$ olan her monomorfizma bir izomorfizmadır.
3. $i \neq j$ için M_i modülü M_j -injektiftir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2): Önerme 3.1.9 dan açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3): $f \in Hom(E(M_i), M_j)$ ve $i \neq j$ olsun. $X = \{x \in M_i : f(x) \in M_j\}$ olarak tanımlayalım. O halde $A = \{x + f(x) : x \in X\}$ altmodülü M de komplement ve düzgündür. Böylece A , M de ec-komplement altmodüldür. M , ECS-modül ve $End(M_i)$ yerel olduğundan $M = A \oplus M_i$ veya $M = A \oplus M_j$ dir. Eğer $M = A \oplus M_i$ ise bu durumda $M_j = f(x)$ ve böylece $f^{-1} : M_j \rightarrow X \leq M_i$ olup varsayımdan izomorfizma vardır. Yani $X = M_i$ dir. Diğer yandan, eğer $M = A \oplus M_j$ ise bu durumda $X = M_j$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

(3) $\Rightarrow$ (1): [14, Corollary 2.25] den açıktır. $\square$

3.4 Düzgün Altmodüllere Ayırışım

Bu kesimde CS-modüller için Okado'nun Teorem 1.3.12 de elde ettiği düzgün altmodüllere ayırışım türünde bir sonuç elde edip bunu ECS-modüllere indirgeyeceğiz. Şimdi gerekli olan yerel dik toplanan tanımını ve ECS-modüllere ilişkin bir sonucu verelim.

Tanım 3.4.1 M bir modül ve $\{X_i : i \in I\}$, M nin altmodüllerinin bir ailesi olsun. Eğer I nın her sonlu I' altkümesi için $\bigoplus_{i \in I'} X_i$ altmodülü M nin bir dik toplananı oluyor ise, $\{X_i : i \in I\}$ ailesine M için bir **yerel dik toplanan** denir.

Sonuç 3.4.2 M bir ECS-modül olsun ve M bir devirli essential Y altmodülü kapsasın. Bu durumda M nin dik toplanan ve ec-kapalı altmodülleri aynıdır.

Kanıt. K , M nin bir dik toplananı ve $Y = xR$, $x \in M$ olsun. O zaman $M = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ vardır. Şimdi $\pi : M \rightarrow K$ projeksiyon dönüşümü olsun. O halde, $Y \cap K = xR \cap K \subseteq \pi(Y) = \pi(x)R \subseteq K$ olup, $\pi(x)R \leq_e K$ dır ve K , M de komplement olduğundan K , M de ec-komplementtir.

Tersine K , M de ec-komplement altmodül olsun. Bu durumda M , ECS-modül olduğundan K , M de dik toplanandır. $\square$

Şimdi vereceğimiz önteorem yerel dik toplananlar ile komplement altmodüller arasındaki kullanışlı bir ilişkiyi belirtecektir.

Önteorem 3.4.3 M bir R -modül ve R , $m \in M$ olmak üzere $r(m)$ sağ sıfırlayıcılar üzerinde ACC yi sağlasın. Bu durumda M nin her yerel dik toplananı M de bir komplementtir.

Kanıt. $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$, M nin bir yerel dik toplananı olsun. M de bir L altmodülü alalım öyle ki, $N \leq_e L$ olsun. $N \neq L$ varsayalım. $m \in N \setminus L$ yi $r(m)$ ideali $\{r(x) : x \in L \setminus N\}$ de maksimal olacak biçimde seçelim. O halde $m \neq 0$ dır ve $0 \neq mr \in N$ olacak biçimde bir $r \in R$ vardır. Böylece I nın bir I' sonlu altkümesi vardır ki, $mr \in K = \bigoplus_{i \in I'} N_i$ dir. Buradan $M = K \oplus K'$ olacak biçimde bir $K' \leq M$ vardır. Şimdi $m = y + y'$ olacak biçimde $y \in K$ ve $y' \in K'$ vardır. Böylece $mr = yr + y'r$, $y'r = 0$ olmasını gerektirir. Yani $r(m) \subsetneq r(y')$ dır. Ancak $y' = m - y \in L \setminus N$ olup, m nin seçilişi ile çelişir. O halde $N = L$ dır ki bu da N nin komplement olmasını verir. $\square$

Teorem 3.4.4 M , her dik toplananı P -extending olan bir modül ve M nin her yerel dik toplananı bir dik toplanan olsun. Eğer R , $m \in M$ olmak üzere $r(m)$ sağ idealleri üzerinde ACC yi sağlarsa M düzgün altmodüllerin bir dik toplamıdır.

Kanıt. $0 \neq m \in M$ alalım öyle ki $r(m)$, $\{r(x) : 0 \neq x \in M\}$ de maksimal olsun. O halde M nin bir K dik toplananı vardır ki, $mR \leq_e K$ dir. K nin indecomposable olmadığını varsayalım. O halde K nin sıfırdan farklı K_1, K_2 altmodülleri vardır ve $K = K_1 \oplus K_2$ dir. Böylece $m = m_1 + m_2$ olacak biçimde $m_1 \in K_1, m_2 \in K_2$ vardır. Eğer $m_1 = 0$ olsaydı, $m = m_2 \in K_2$ ve $mR \cap K_1 = 0$ dan $K_1 = 0$ bulunurdu ki bu bir çelişkidir. Yani $m_1 \neq 0$ dir. Açıktır ki, $r(m) \subset r(m_1)$ dir. Böylece, m nin seçilişinden $r(m) = r(m_1)$ dir. Benzer olarak $m_2 \neq 0$ ve $r(m) = r(m_2)$ dir. Şimdi $m_1 \neq 0$ olduğundan $0 \neq r_1 m_1 = r_2 m_2 = r_2(m_1 + m_2) = r_2 m_1 + r_2 m_2$ olacak biçimde $r_1, r_2 \in R$ vardır. Böylece $r_2 m_2 = 0$ ve buradan $r_2 \in r(m_2) \setminus r(m)$ olur. Bu bir çelişkidir. O halde K indecomposable olmalıdır. K , P -extending olduğundan K düzgün modül olur. O halde M nin her dik toplananı bir düzgün dik toplanan kapsar. Zorn Lemma'dan, M bir $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ maksimal yerel dik toplanan kapsar ki burada N_i ler düzgün modüldür. Varsayımdan $M = N \oplus N'$ olacak biçimde bir $N' \leq M$ vardır. Eğer $N' \neq 0$ olsaydı yukarıdaki tartışmadan U düzgün olmak üzere $N' = U \oplus U'$ olacak biçimde U, U' altmodülleri var olurdu. O halde $N \oplus U$, M nin bir yerel dik toplananı olurdu ki, bu N nin seçilişi ile çelişirdi. Böylece $N' = 0$ ve $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ dir. Yani M düzgün altmodüllerin bir dik toplamıdır. $\square$

Sonuç 3.4.5 *M bir ECS-modül ve M nin her yerel dik toplananı bir dik toplanan olsun. Eğer $R, m \in M$ olmak üzere $r(m)$ sağ idealleri üzerinde ACC yi sağlarsa M düzgün altmodüllerin bir dik toplamıdır.*

Kanıt. Önerme 3.1.9 ve Önteorem 3.1.8 ve Teorem 3.4.4 ten açıktır. $\square$

Teorem 3.4.6 *M bir R -modül ve M nin her yerel dik toplananı bir dik toplanan olsun. Eğer M nin her sıfır olmayan altmodülü sıfır olmayan bir devirli düzgün altmodül kapsıyorsa bu durumda M nin CS-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin P -extending olmasıdır.*

Kanıt. M , CS-modül ise açıkça P -extending'dir.

Tersi için $0 \neq K \leq M$ ve K, M de bir komplement olsun. O halde varsayımdan K

bir düzgün devirli U altmodülü kapsar ve U bir U' dik toplananında essentialdir. Böylece U' , M nin düzgün bir dik toplananıdır. Zorn Lemma'dan, K nin bir N altmodülü vardır ki, $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$, M nin bir yerel dik toplananı ve N_i lerin düzgün olması özelliğine göre maksimaldir. Varsayımdan $M = N \oplus N'$ olacak biçimde $N' \leq M$ vardır. Şimdi, $K = K \cap M = K \cap (N \oplus N') = N \oplus (K \cap N')$ dür. O halde $K \cap N'$, M de bir komplementtir. Eğer $K \cap N' \neq 0$ olsaydı yukarıdaki tartışmadan, $K \cap N'$ altmodülü bir düzgün V dik toplananı kapsar. Bu durumda $N \oplus V$, M nin bir yerel dik toplananıdır ki, bu N nin seçilişi ile çelişir. Böylece $K \cap N' = 0$ ve $K = N$ bulunur. Yani K , M nin bir dik toplananıdır. O halde M , CS-modüldür. $\square$

4 CS-Modüllerin Genelleştirmeleri

Çalışmalarımızın bu son bölümü CS-modüllerin genelleştirilmiş bazı formlarından oluşacaktır. C_{11} ve FI-extending olarak bilinen genelleştirmelerin yanında yeni bir genelleştirme tanımlayıp ayrıntılı olarak incelenecektir. C_{11} ve FI-extending modüller konusunda, Birkenmeier ve Tercan'ın [6] yakın zaman önce yayınladığı bazı ilgili sonuçlar ispatlarıyla birlikte verilecektir.

4.1 (C_{11}) ve FI-extending Modüller

Smith ve Tercan'ın CS-modüllerin bir genelleştirmesi olarak [25], [26] çalışmalarında ayrıntılı olarak inceledikleri C_{11} -modül tanımı ile başlayalım.

Tanım 4.1.1 *M modülünde eğer her $N \leq M$ altmodülünün dik toplanan olan bir komplementi varsa M ye C_{11} -**modül** (veya M , C_{11} özelliğini sağlar) denir.*

CS-modüllerin C_{11} -modül olduğu açıktır. Yine bir indecomposable C_{11} -modül düzgündür. C_{11} -modüllerin, CS-modül olması gerekmez. Örneğin, bir p asal tam sayısı için $M = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$, $\mathbb{Z}$ -modülünü alalım. $M_{\mathbb{Z}}$, C_{11} -modül ancak CS-modül değildir [25]. Birinci bölümde belirtildiği üzere, CS-modüllerin dik toplananları da CS-modüldür ancak CS-modüllerin bir dik toplamı, genel olarak CS-modül olmak zorunda değildir. Oysa C_{11} -modüllerde bu iki durum farklıdır. Şöyle ki, C_{11} -modülün her dik toplananı C_{11} -modül olmayabilir ki bunu Örnek 3.1.4 açıklığa kavuşturacaktır. Diğer yandan C_{11} -modüllerin dik toplamlarına ilişkin olarak şimdi vereceğimiz teorem [25, Theorem 2.4] de ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.2 *C_{11} -modüllerin bir dik toplamı da C_{11} -modüldür.*

Birkenmeier ve diğer yazarların [3], [4], [5] de CS-modüllerin bir genelleştirmesi olarak tanımladığı ve araştırdığı ki literatürde yer alan bir çok modül sınıfını kapsamaktadır, FI-extending modül tanımını verelim.

Tanım 4.1.3 *M modülünün her fully invariant altmodülü, M nin bir dik toplananında essential olarak kapsanıyorsa M ye **FI-extending** modül denir.*

CS-modüllerin, FI-extending modül olduğu Tanım 4.1.3 ün bir sonucu olarak açıktır. FI-extending modüllerin, CS-modüllerden farklı olduğunu gösteren örnek vereceğiz. Öncelikle aşağıdaki sonuçları vermek uygun olacaktır.

Önteorem 4.1.4 *M bir modül olsun.*

1. *M nin fully invariant altmodüllerinin herhangi toplamı veya kesişimi de fully invariant altmodüldür.*
2. *Eğer $X \leq Y \leq M$ ve Y, M nin ve X de Y nin fully invariant bir altmodülü ise, X, M nin fully invariant bir altmodülüdür.*
3. *Eğer $M = \bigoplus_{i \in I} X_i$ ve S, M nin bir fully invariant altmodülü ise, π_i, M nin i . projeksiyon homomorfizması olmak üzere $S = \bigoplus_{i \in I} \pi_i(S) = \bigoplus_{i \in I} (X_i \cap S)$ dir.*

Kanıt. [4, Lemma 1.1] e bakınız. □

Teorem 4.1.5 *$X_i, (i \in I)$ ler FI-extending modüller ise, $M = \bigoplus_{i \in I} X_i$ modülü de FI-extending modüldür.*

Kanıt. Farzedelim ki her X_i , FI-extending modül ve S de M nin fully invariant altmodülü olsun. $0 \neq s \in S$ alalım. $S \leq M$ olduğundan $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ dir. Bir $i \in I$ için $s \neq 0$ kabul ettiğimizden $x_i \neq 0$ dir. $\pi_i(S) = x_i \neq 0$ olur. $f : X_i \rightarrow X_i$ endomorfizma olsun. Buradan $f(\pi_i(S)) = f(X_i) = X_i = \pi_i(S)$ dir. Dolayısıyla her $i \in I$ için $\pi_i(S) \neq 0$ olacak şekilde $\pi_i(S), X_i$ nin fully invariant altmodülü olur. Buradan X_i , FI-extending modül olduğundan $\pi_i(S) \leq_e D_i$ olacak biçimde X_i nin bir D_i dik toplananı vardır. Önteorem 4.1.4(3) den $S = \bigoplus_{i \in I} \pi_i(S) \leq_e \bigoplus_{i \in I} D_i$ dir. Buradan $\bigoplus_{i \in I} D_i, M$ nin bir dik toplananıdır. Böylece M , FI-extending modüldür. □

Sonuç 4.1.6 *R bir sağ FI-extending halka ise her n pozitif tamsayı için $M_n(R)$ matris halkası da FI-extending halkadır.*

Kanıt. [4, Proposition 2.3] e bakınız. $\square$

Örnek 4.1.7 D Prüfer olmayan bir değişmeli bölge olsun. $n \geq 2$ bir tamsayı ve $R = M_n(D)$ olarak alalım. Sonuç 4.1.6 ten R_R , FI-extending modüldür. Ancak D Prüfer olmadığından [9, Corollary 12.10] dan R , CS-modül değildir.

Önteorem 4.1.8 M bir modül olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

1. M , FI-extending modüldür.
2. M nin her fully invariant altmodülünün dik toplanan olan bir komplementi vardır.
3. M nin her fully invariant altmodülü X , için M nin bir komplement altmodülü L ve L nin bir K komplementi vardır ki; $X \leq_e L$ ve $f : L \oplus K \rightarrow M$ her homomorfizması bir $g : M \rightarrow M$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Kanıt. (1) $\Leftrightarrow$ (2): X , M nin bir fully invariant altmodülü olsun. İlk önce M nin FI-extending modül olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X \leq_e eM$ olacak şekilde $e = e^2 \in \text{End}(M_R)$ vardır. Böylece $(1 - e)^2 = (1 - e)$ idempotent olduğundan $(1 - e)M$ de M nin dik toplananıdır. Buradan $X \cap (1 - e)M \leq_e eM \cap (1 - e)M = 0$ olur ve $X \cap (1 - e)M = 0$ elde edilir. Ayrıca $X \oplus (1 - e)M \leq_e eM \oplus (1 - e)M = M$ olduğundan $X \oplus (1 - e)M \leq_e M$ dir. Böylece $(1 - e)M$, X in M deki komplementidir.

Tersine $c = c^2 \in \text{End}(M_R)$ olmak üzere cM , X in komplementi olsun. $x \in X$ alalım. Bu durumda $x = cx + (1 - c)x$ olur. X fully invariant altmodül olduğundan $cx \in X \cap cM = 0$ dir. Buradan $X \subseteq (1 - c)M$ dir. Böylece $X \leq_e (1 - c)M$ elde edilir. Yani M , FI-extending modüldür.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Bu denklik [6, Lemma 1.1] den açıktır. $\square$

Önerme 4.1.9 M bir modül olsun.

1. M , CS-modüldür.

2. M, C_{11} koşulunu sağlar.

3. M , FI-extending modüldür.

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmeleri sağlanır. Fakat genel olarak gerektirmelerin tersi doğru değildir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) Önteorem 4.1.8 deki (2) $\Rightarrow$ (1) gerektirmesinden açıktır.

□

Tanım 4.1.10 M bir modül olsun. Eğer M nin her sıfırdan farklı komplement altmodülü M nin bir sıfırdan farklı fully invariant altmodülünü içerirse M ye **komplement sınırlı modül** denir.

Önteorem 4.1.11 M komplement sınırlı bir modül olsun. Bu durumda $0 \neq K$, M nin komplementi ise M de bir fully invariant U altmodül vardır öyleki, $U \leq_e K$ dir.

Kanıt. $X \leq M$ ve K , X in M deki komplementi olsun. Şimdi $U = \sum\{B : B, M \text{ nin fully invariant altmodülü, } B \subseteq K\}$ alalım. Buradan $U \leq K$ dir. U nun K daki komplementi Y olsun. Böylece $Y \cap (X \oplus U) = 0$ ve $Y \oplus (X \oplus U) \leq_e K \oplus X \leq_e M$ olduğundan $Y \oplus (X \oplus U) \leq_e M$ olur. Bu durumda Y , $X \oplus U$ nun M deki komplementidir. Buradan $Y = 0$ dir. Aksi taktirde $Y \neq 0$ olsaydı, M komplement sınırlı bir modül olduğundan Y , M nin bir fully invariant altmodülünü kapsardı. Dolayısıyla $Y \cap U \neq 0$ olurdu. Bu ise Y nin U nun K daki komplementi olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $Y = 0$ olduğundan $U \leq_e K$ olur. □

Teorem 4.1.12 1. Bir M_R modülü için $End(M_R)$ Abel ve $X \leq M$ için $h_i \in End(M_R)$ olmak üzere $X = \sum_{i \in I} h_i(M)$ olsun. Bu durumda M nin yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul M nin C_{11} koşulunu sağlamasıdır.

2. M komplement sınırlı bir modül olsun. Bu durumda M nin C_{11} koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul M nin FI-extending modül olmasıdır.

Kanıt. (1): Farzedelim ki, M , C_{11} koşulunu sağlasın ve $X \leq M$ olsun. Bu durumda her $h_i \in \text{End}(M_R)$ için $X = \sum_{i \in I} h_i(M)$ dir. $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ homomorfizması için eM , X in bir komplementidir. $0 \neq x \in X$ alalım. Böylece $x = ex + (1 - e)x$ olur. Fakat $m_i \in M$ için $x = \sum_{i \in I} h_i(m_i)$ dir. Böylece $ex = e \sum_{i \in I} h_i(m_i) = \sum_{i \in I} h_i(em_i) \in X \cap eM = 0$ elde edilir. $eM \oplus X \leq_e eM \oplus (1 - e)M = M$ ve $X \leq (1 - e)M$ olduğundan $X \leq_e (1 - e)M$ dir. Dolayısıyla M , CS-modüldür. $\text{End}(M_R)$ Abel olduğundan M , (C_3) koşulunda sağlar.

Gerçekten; K ve L , M nin $K \cap L = 0$ koşulunu sağlayan iki dik toplanan alt-modülü olsun. Bu durumda $K = eM$ ve $L = fM$ olacak şekilde $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ ve $f^2 = f \in \text{End}(M_R)$ vardır. $(e + f)^2 = e + f + 2ef$ ve $\text{End}(M_R)$ Abel olduğundan $(ef)(m) = e(f(m)) \in eM$, $(ef)(m) = (fe)(m) = f(e(m)) \in fM$ elde edilir. Böylece $ef \in eM \cap fM = K \cap L = 0$ olduğundan $(e + f)^2 = e + f \in \text{End}(M_R)$ olur. $(e + f)M \subseteq K + L$ ve $K + L \subseteq (e + f)M$ olduğundan $K + L = (e + f)M$ dir. Dolayısıyla $K + L$, M nin dik toplananıdır. Böylece M , yarı-sürekli modül olur. O halde M modülü yarı-sürekli modüldür.

Tersi Önerme 4.1.9 den açıktır.

(2): M komplement sınırlı ve FI-extending modül olsun. $Y \leq M$ ve K , Y nin bir komplementi olarak alalım. Eğer $K = 0$ ise, K , M nin bir dik toplananıdır. $K \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda M nin bir X fully invariant altmodülü vardır ki, X , K nın içerdiği M nin fully invariant altmodüllerinin toplamıdır. Bu durumda Önteorem 4.1.11 den $X \leq_e K$ dir. Ayrıca M , FI-extending modül olduğundan $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ için $X \leq_e eM$ dir. Böylece $Y \cap eM = 0$ ve $Y \oplus eM \leq_e M$ dir. [25, Proposition 2.3] den M , C_{11} koşulunu sağlar.

Tersi Önerme 4.1.9 den açıktır. □

Sonuç 4.1.13 M bir R -modül olsun. Aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlanırsa, M modülünün CS olması için gerek ve yeter koşul M , C_{11} -modül olmasıdır.

1. $M_R = R_R$ ve R Abeldir.
2. M modülü devirli ve R değişmelidir.

3. M bir çarpımsal modül ve R değişmelidir.

Kanıt. (1): R Abel olduğundan dolayı $End(R_R)$ de Abeldir. Şimdi $0 \neq X \leq R_R$ sağ idealini alalım. $0 \neq x_i \in X$ için $h_i : R \rightarrow R$ homomorfizmasını $h_i(r) = x_i r$ olarak tanımlayalım. O halde $X = \sum_{i \in I} h_i(R)$ olup Teorem 4.1.12 (1) den sonuç elde edilir.

(2): Şimdi M modülü devirli ve R değişmeli olsun. Buradan $B_R \leq R_R$ için $M, R/B$ ya izomorftur. Y/B R -modülü R/B nin bir altmodülü olsun. Böylece her $y_i \in Y$ için $Y/B = (\sum_{i \in I} y_i R) + B = (\sum_{i \in I} y_i + B)R$ dir. $h_i : R/B \rightarrow R/B$ dönüşümü $h_i(r + B) = y_i r + B$ olarak tanımlansın. Bu durumda $h_i \in End((R/B)_R)$ olur. Buradan $Y/B = \sum_{i \in I} h_i(R/B)$ dir. R değişmeli olduğundan $End((R/B)_R)$ de değişmelidir. Böylece Önerme 4.1.12 (1) den sağlanır.

(3): Farzedelim ki, M çarpımsal ve R değişmeli olsun. $A \leq M$ olmak üzere $X = MA$ alalım. Her $a \in A$ için $h_a : M \rightarrow M$ dönüşümü $m \in M$ olmak üzere $h_a(m) = ma$ olarak tanımlansın. Bu durumda $X = MA = \sum_{a \in A} h_a(M)$ dir. Ayrıca $N \leq M$ olsun. M çarpımsal olduğundan $N = MA$ olacak şekilde $A \leq M$ vardır. Her $f \in End(M_R)$ için $x \in f(N)$ ise $x = f(ma)$ dır. f homomorfizma olduğundan $x = f(m)a \in MA = N$ olur. Buradan $x \in N$ elde edilir. Böylece $f(N) \subseteq N$ olur ve N, M nin fully invariant altmodüldür. Yani çarpımsal bir modülün her alt modülü fully invariant altmodüldür. [4, Lemma 1.9] dan $e = e^2 \in End(M_R)$ ise e ve $(1 - e) \in S_l(End(M_R))$ dır. M nin her altmodülü fully invariant altmodül olduğundan $e = e^2 \in End(M_R)$ için eM, M nin fully invariant altmodül olup $e \in S_l(End(M_R))$ ve $(1 - e)M$ de M nin fully invariant altmodül olup $(1 - e) \in S_l(End(M_R))$ olur. Buradan $ex = exe$ ve $(1 - e)x = (1 - e)x(1 - e)$ dir. Yani $ex = xe$ olduğundan e merkezleyendir. Dolayısıyla $End(M_R)$ Abeldir. Teorem 4.1.12 (1) den sonuç sağlanır. $\square$

Önerme 4.1.14 M, C_{11} -modül ve X, M nin bir altmodülü olsun. Eğer X ile M nin herhangi bir dik toplananının arakasiti X in bir dik toplananı ise X, C_{11} -modüldür.

Kanıt. A, X in bir altmodülü olsun. Bu durumda $A \cap N = 0$ ve $A \oplus N \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir N dik toplananı vardır. Şimdi M nin bir K altmodülü için $M = N \oplus K$ olsun. Böylece $X \cap (A \oplus N) \leq_e X \cap M = X$ ve $A \cap (X \cap N) \leq A \cap N = 0$ olup $A \cap (X \cap N) = 0$ olduğundan $X \cap (A \oplus N) = A \oplus (X \cap N) \leq_e X$ olur. $X \cap N, X$ de dik toplanan olduğundan X, C_{11} -modüldür. $\square$

Sonuç 4.1.15 M_R, C_{11} koşulunu sağlayan bir modül olsun.

1. Eğer M dağılımlı modül ise, M nin her altmodülü CS-modüldür.
2. Eğer M nin bir X altmodülü her $e = e^2 \in \text{End}(M_R)$ için $eX \subseteq X$ koşulunu sağlarsa, X bir C_{11} -modüldür. Özel olarak, M nin her fully invariant altmodülü bir C_{11} -modüldür.
3. Eğer M, SIP ise, M nin her dik toplananı C_{11} -modüldür.

Kanıt. (1): N, M nin komplementi olsun. Bu durumda $e = e^2 \in \text{End}(M_R)$ olmak üzere eM, N nin komplementidir. Böylece M dağılımlı modül olduğundan $N = N \cap M = N \cap (eM \oplus (1 - e)M) = (N \cap eM) \oplus (N \cap (1 - e)M) = N \cap (1 - e)M \leq (1 - e)M$ dir. eM, N nin komplementi olduğundan $N \cap eM = 0$ ve $N \oplus eM \leq_e M$ dir. Buradan $N \oplus eM \leq_e M = eM \oplus (1 - e)M$ ve $N \leq (1 - e)M$ olduğundan ise $N \leq_e (1 - e)M$ olur ve N, M de komplement olduğunu kullanarak $N = (1 - e)M$ elde edilir. Böylece M, CS -modüldür. [2, Corollary 1.6] den M nin her altmodülü CS-modüldür.

(2): D, M nin bir dik toplanan altmodülü ve $e : M \rightarrow D$ kanonik projeksiyon olsun. O halde $e(X) \subseteq D$ olur ve $eX \subseteq X$ olduğundan $e(X) \subseteq D \cap X$ dir. $a \in D \cap X$ alalım. Böylece $a \in D$ olduğundan $a = e(a)$ olur. Buradan da $a = e(a) \in eX$ olur. Dolayısıyla $eX = D \cap X$ elde edilir. Önerme 4.1.12 den X bir C_{11} -modüldür.

(3): Önerme 4.1.14 den açıktır. $\square$

[5] te CS-modüllerin, strongly FI-extending modüller olarak bir genelleştirmesi tanımlanıp, araştırılmıştır. Bu yeni modül sınıfının FI-extending modül sınıfında kapsandığı açıktır. Bu modül sınıfının tanımını ve bazı özelliklerini verelim.

Tanım 4.1.16 M_R bir modül olsun. M deki her fully invariant altmodül bir fully invariant dik toplanan altmodülde essential olarak kapsanırsa M ye **strongly FI-extending** modül denir [5].

Sonuç 4.1.17 M bir sağ R -modül olsun. Aşağıdaki koşulları alalım.

1. M , CS-modüldür.
2. M , strongly FI-extending dir.
3. M , FI-extending dir.

Bu durumda, $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ tür. Bu önermelerin tersleri genel olarak doğru değildir.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ açıktır.

$(2) \nRightarrow (1)$: $R_R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ alalım. Örnek 1.4.4 den R_R nin CS-modül olmadığını biliyoruz. Diğer yandan $Z(R_R) = 0$ olduğundan R_R strongly FI-extending modüldür [5, proposition 1.5].

$(3) \nRightarrow (2)$: p bir asal tamsayı olmak üzere $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$, $\mathbb{Z}$ -modülünü (Abel grubunu) alalım. Teorem 4.1.5 ten $M_{\mathbb{Z}}$, FI-extending modüldür. Ancak, [3, Theorem 7.1] den $M_{\mathbb{Z}}$, strongly FI-extending değildir. $\square$

Önteorem 4.1.18 M_R bir modül, $\Lambda = \text{End}(M_R)$ ve $e^2 = e \in \Lambda$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır.

1. $e \in S_l(\Lambda) = \{e \in \Lambda : xe = exe, \text{ her } x \in \Lambda\}$ olması için gerek ve yeter koşul eM nin M de fully invariant altmodül olmasıdır.
2. Eğer M bir strongly FI-extending modül ve K , M nin fully invariant altmodülü ise, K , M nin tek bir (fully invariant) dik toplananında essential olarak kapsanır.

Kanıt. (1): $e \in S_l(\Lambda) = \{e \in \Lambda : xe = exe, \text{ her } x \in \Lambda\}$, $h \in \Lambda$ ve $m \in M$ olsun. Bu durumda $hem = ehem \in eM$ olur. Böylece eM , M nin fully invariant

altmodüldür.

Diğer taraftan eM , M nin fully invariant altmodülü, $h \in \Lambda$ ve $m \in M$ olsun. Buradan $hem = ek$ olacak şekilde bir $k \in M$ vardır. Böylece $ehem = e^2k = ek = hem$ olur. O halde her $m \in M$ için $(ehe)(m) = (he)(m)$ olduğundan $ehe = he$ elde edilir. Yani $e \in S_l(\Lambda)$ olur.

(2): M bir strongly FI-extending modül ve K , M nin fully invariant altmodülü olsun. (1) den $K \leq_e eM$ olacak şekilde bir $e \in S_l(\Lambda)$ vardır. Farzedelim ki, $c^2 = c \in \Lambda$ ve $K \leq_e cM$ olsun. O zaman $(ce)^2 = cece = cce = ce$ olur. K , M nin fully invariant altmodülü olduğundan $ceK \subseteq K$ dir. $x \in K$ alalım. $K \leq_e cM$ olduğundan $x = cm$ ve $K \leq_e eM$ olduğundan ise $x = en$ olur. Buradan $x = cex \in ceK$ olur ve böylece $K \subseteq ceK$ elde edilir. Yani $K = ceK$ dir. Böylece $K \leq_e ceM \leq cM$ dir. Ayrıca $K \leq_e cM$ olduğundan $ceM \leq_e cM$ dir. ceM , M de dik toplanan olduğundan ceM , M de komplementtir. $ceM \leq_e cM$ olduğundan $ceM = cM$ dir. [18, Lemma 3.1] den $f \in \Lambda$ için $ce(f) = c(ef) \in c\Lambda$ olduğundan $ce\Lambda \leq e\Lambda$ olur. $ceM \leq eM$ olup, buradan $cM \leq eM$ bulunur. Fakat, $K \leq_e eM$ olduğundan $cM = eM$ elde edilir. Dolayısıyla K tektir. $\square$

C_{11} -modüllerinin dik toplananlarının C_{11} -modül olması gerekmez. Diğer yandan, FI-extending modüllerinin dik toplananlarının FI-extending olup olmadığı sorusu hala açık bir sorudur [4]. Aşağıdaki teoremde strongly FI-extending özelliğinin dik toplananlara taşındığını göstereceğiz.

Teorem 4.1.19 *Bir M strongly FI-extending modülünün her dik toplananı strongly FI-extending modüldür.*

Kanıt. M strongly FI-extending modül ve B , M nin dik toplananı, $\Lambda = \text{End}(M_R)$ olsun. Böylece $B = eM$ olacak şekilde $e^2 = e \in \Lambda$ vardır. X , B nin fully invariant altmodülü olsun. Her $f \in \Lambda$ için $f(\Lambda X) \subseteq \Lambda X$ olduğundan ΛX , M nin fully invariant altmodülüdür. M strongly FI-extending modül olduğundan ise $\Lambda X \leq_e fM$ olacak şekilde $f^2 = f \in \Lambda$ vardır. Açıkça $X \subseteq \Lambda X \cap eM$ dir. $k \in \Lambda X \cap eM$ alalım. $f \in \Lambda$ için $k = f(x) = e(m)$ dir ve X , M nin fully invariant altmodülü olduğundan $k = f(x) \subseteq X$ olur. Böylece $\Lambda X \cap eM \subseteq X$ dir.

Dolayısıyla $X = \Lambda X \cap eM \leq_e fM \cap eM$ olur. Buradan $f \in S_l(\Lambda) = \{e \in \Lambda : xe = exe, \forall x \in \Lambda\}$ için $eX \subseteq efM$ ve $(ef)^2 = (ef).(ef) = e(fef) = e(ef) = ef$ olur. M , FI-extending modül olduğundan $ef(M) \subseteq eM$ ve $ef(M) \subseteq fM$ dır. Böylece $efM \subseteq eM \cap fM$ olur. Şimdi $x \in eM \cap fM$ alalım. Bu durumda $x = em = fm'$ olacak şekilde $m, m' \in M$ vardır. Böylece $ex = em = efm' = fefm' = fem = fx$ olur. $(ef)^2 = ef \in \Lambda$ için $efM = eM \cap fM$ dir. O halde her $x \in X$ için $x = ex$ olduğundan $X = eX \leq_e efM$ dir. efM , M de dik toplanan olduğundan da efM , eM nin de dik toplananıdır. $k \in \text{End}((eM)_R) \subseteq \text{End}(M_R)$ alalım. $k \in \text{End}(eM)$, $f \in S_l(\Lambda)$ ise $k(efM) = k(ef)M = k(fef)M = kfe(f(M)) \subseteq f(M)$ olur. Ayrıca $k : eM \rightarrow eM$ olduğundan $k(efM) \subseteq eM$ olur. O halde, $k(efM) \subseteq fM \cap eM = efM$ dir. Yani efM , eM nin fully invariant altmodülü olur. Buradan $X \leq_e efM$ ve efM , eM nin fully invariant dik toplanan altmodülü olduğundan $B = eM$ strongly FI-extending modüldür. $\square$

4.2 EC_{11} -Modüller

Bu son kesimde, hem P-extending hem de C_{11} -modüllerin bir genelleştirmesi olarak EC_{11} -modülleri tanımlayıp, bu modüllerin yapısıyla ilgili sonuçları vereceğiz.

Tanım 4.2.1 M_R bir modül olsun. Eğer M nin her K ec-altmodülü için M nin bir D dik toplananı var ve D , K nin M deki komplementi ise M ye EC_{11} -**modül** denir.

Eğer bir R halkası sağ R -modül olarak EC_{11} -modül (yani R_R , EC_{11} -modül) ise R ye sağ EC_{11} -**halka** denir.

O halde, C_{11} -modüllerin (ve böylece CS-modüllerin) EC_{11} -modül olduğu açıktır. EC_{11} -modüllere ilişkin sonuçlara başlamadan önce, kullanışlı bir Önteorem verelim.

Önteorem 4.2.2 M_R bir modül, N , M_R de bir ec-altmodül ve K da M nin bir dik toplananı olsun. Bu durumda, K , N nin M deki komplementi olması için gerek ve yeter koşul $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olmasıdır.

Kanıt. İlk olarak K , N nin M deki komplementi olsun. Bu durumda $K \cap N = 0$ dir. $0 \neq x \in M$ alalım. Eğer $x \in K$ ise, $0 \neq xR = xR \cap K \subseteq xR \cap (K \oplus N)$ dir. Eğer $x \notin K$ ise, $N \cap (xR + K) \neq 0$ olur. Bu durumda her $0 \neq x \in M$ için $xR \cap (K \oplus N) \neq 0$ dır. Böylece $K \oplus N \leq_e M$ dir.

Tersine $N \leq M$ ve K da M nin bir dik toplanan olmak üzere $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olsun. Öyleyse bir $K' \leq M$ için $M = K \oplus K'$ dür. Farzedelim ki, M nin bir K_1 altmodülü için, $K \subseteq K_1$ ve $K_1 \cap N = 0$ olsun. Bu durumda, $K_1 = K_1 \cap M = K_1 \cap (K \oplus K') = K \oplus (K_1 \cap K')$ olur. $0 \neq y \in K_1 \cap K'$ alalım. Buradan $y \in M$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olduğundan $(K \oplus N) \cap yR \neq 0$ dır. O halde $n \in N$, $k \in K$ ve $r \in R$ olmak üzere $0 \neq yr = n + k$ dır. Böylece $yr - k = n \in N \cap K_1 = 0$ olduğundan $yr = k \in K \cap K' = 0$ dır. Yani $yr = 0$ olur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $K = K_1$ olup K , N nin M deki komplementidir. $\square$

Önerme 4.2.3 M_R bir modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1. M_R , EC_{11} -modüldür.
2. M_R nin her L ec-kapalı altmodülü için M nin bir K dik toplananı vardır öyleki, K , L nin M deki komplementidir.
3. M_R nin her N ec-altmodülü için M nin bir K dik toplananı vardır öyleki, $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ dir.
4. M_R nin her L ec-kapalı altmodülü için M nin bir K dik toplananı vardır öyleki, $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ dir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) ve (3) $\Rightarrow$ (4) gerektirmeleri açıktır.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) ile (2) $\Leftrightarrow$ (4) denklikleri Önteorem 4.2.2 den açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (1): A , M nin ec-altmodülü olsun. O halde bir $B \leq_c M$ vardır ki, $A \leq_e B$ dir. A ec-altmodül olduğundan bir $x \in A$ vardır ki $xR \leq_e A$ dır. $A \leq_e B$ olduğundan $xR \leq_e B \leq_c M$ olur. Böylece B , M nin ec-kapalı altmodülüdür. Bu durumda kabulümüzden M nin bir K dik toplananı için $K \cap B = 0$ ve $K \oplus B \leq_e M$ dir. Önteorem 4.2.2 den K , M de B nin komplementidir. $K \cap A \leq_e K \cap B = 0$

olduğundan $K \cap A = 0$ dir. Farzedelim ki, $K \subseteq K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ olsun. Buradan $K \cap B = 0$ olacak şekilde K maksimal olduğundan $K' \cap B \neq 0$ dir. Ayrıca $0 \neq K' \cap B \leq B$ ve $A \leq_e B$ için, $K' \cap B \cap A \neq 0$ olur. $K' \cap B \cap A \leq K' \cap A$ olduğundan $K' \cap A \neq 0$ elde edilir. Böylece K , A nın M deki komplementidir. Ayrıca K , M nin dik toplanamı olduğundan M , EC_{11} -modüldür. $\square$

Önerme 4.2.4 M bir R -modül olsun. M , P -extending modül ise, M , EC_{11} -modüldür.

Kanıt. K , M nin ec-altmodülü olsun. O halde $xR \leq_e K$ olacak şekilde bir $x \in K$ vardır. M , P -extending modül olduğundan $xR \leq_e D$ olacak şekilde M nin bir D dik toplanamı vardır. Böylece $M = D \oplus D'$ olacak şekilde $D' \leq M$ vardır. $xR \cap D' \leq_e D \cap D' = 0$ olduğundan $xR \cap D' = 0$ dir. Ayrıca $xR \oplus D' \leq_e D \oplus D' = M$ elde edilir. $xR \cap D' \leq_e K \cap D'$ olduğundan $K \cap D' = 0$ olur. $xR \oplus D' \leq K \oplus D' \leq M$ ve $xR \oplus D' \leq_e M$ olduğundan $K \oplus D' \leq_e M$ dir. Dolayısıyla M , EC_{11} -modüldür. $\square$

Not 4.2.5 Her EC_{11} -modül P -extending modül olmayabilir.

Örnek 4.2.6 $R = \mathbb{Z}[x]$ polinomlar halkası ve $M = (\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x])_{\mathbb{Z}[x]}$ modülünü alalım. Önerme 1.4.5 den M_R , CS -modül değildir. Böylece M sonlu Goldie boyutlu olduğu için Teorem 3.1.12 (3) den ECS -modül değildir. Ayrıca $Z(M) = 0$ olduğundan M , nonsingular olur Teorem 3.1.12 (1) den P -extending modül değildir. Fakat $\mathbb{Z}[x]_{\mathbb{Z}[x]}$ modülü düzgün olduğundan CS -modüldür. Böylece C_{11} modül olur. Teorem 4.1.2 den M , C_{11} modül olduğundan EC_{11} -modüldür. Dolayısıyla M , EC_{11} -modül olmasına rağmen P -extending modül değildir.

Önerme 4.2.7 M_R bir modül olsun. Aşağıdaki koşulları alalım.

1. M_R , ECS -modüldür.
2. M_R , P -extending modüldür.

3. M_R , EC_{11} -modüldür.

Bu durumda $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ koşulu sağlanır. Bu gerektirmelerin tersi genel olarak doğru değildir.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2)$ gerektirmesi Önerme 3.1.9 dan ve $(2) \Rightarrow (3)$ gerektirmesi Önerme 4.2.4 dan açıktır.

Şimdi Örnek 4.2.6, $(3) \nRightarrow (2)$ 'i verir. Yine Önerme 3.1.9 dan $(2) \nRightarrow (1)$ dir. $\square$

Sonuç 4.2.8 M_R bir indecomposable modül olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.

1. M_R , ECS -modüldür.
2. M_R , P -extending modüldür.
3. M_R , EC_{11} -modüldür.
4. M_R düzgün modüldür.

Kanıt. $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ Önerme 4.2.7 den elde edilir.

$(4) \Rightarrow (1)$ açıktır.

$(3) \Rightarrow (4)$: $0 \neq X \leq M$ olsun. O halde bir $0 \neq x \in X$ vardır. $xR \leq X$ alalım. Böylece $xR \leq_e L \leq_c M$ olacak şekilde xR nin bir L kapanışı vardır. Buradan L , M nin ec -altmodülüdür. Bu durumda M_R , EC_{11} -modül olduğundan M nin bir D dik toplanamı için $L \cap D = 0$ ve $L \oplus D \leq_e M$ dir. M_R indecomposable modül olduğundan $D = 0$ veya $D = M$ dir. $D = M$ ise $L \cap M = L = 0$ olup çelişki elde edilir. O halde $D = 0$ olmalıdır. Yani; $L \cap 0 = 0$ ve $L \cap 0 = L \leq_e M$ olur. Böylece $L \leq_c M$ olduğundan Önerme 1.2.11 den $L = M$ dir. Buradan $xR \leq_e M$ olur ve $xR \leq X \leq M$ olduğundan $X \leq_e M$ elde edilir. Dolayısıyla M_R , düzgün modüldür. $\square$

C_{11} -modüller, EC_{11} -modül olmasına karşın EC_{11} -modül olup C_{11} -modül olmayan örnekler vardır. Şimdi bu tipteki bir örneği verelim.

Örnek 4.2.9 R , [16, Example 7.54] de verilen komutatif, von Neumann regular, Baer olmayan halka olsun. R , von Neumann regular olduğundan ECS-halka olup, Sonuç 4.2.8 den EC_{11} -halkadır. Bu durumda R , Sonuç 1.4.7 den nonsingular halkadır. Diğer yandan R komutatif olduğundan açıkça komplement sınırlıdır. O halde [4, Theorem 4.7 (iii)] den FI-extending değildir. Böylece, Teorem 4.1.12 den R_R , C_{11} -modül değildir.

Önerme 4.2.7 den P-extending ve EC_{11} koşulları genel olarak farklıdır. Bir sonraki Teorem hangi koşul altında bu iki modül ailesinin aynı olacağını verecektir.

Teorem 4.2.10 M bir R -modül, $End(M_R)$ Abel ve $X \leq M$ için $h_i \in End(M_R)$ olmak üzere $X = \sum_{i \in I} h_i(M)$ olsun. Bu durumda M_R nin EC_{11} -modül olması için gerek ve yeter koşul M_R nin P-extending modül olmasıdır.

Kanıt. M_R , P-extending modül olsun. Bu durumda M_R nin EC_{11} -modül olduğu Önerme 4.2.7 dan açıktır.

Tersine M_R , EC_{11} -modül ve $X = xR \leq M$ olsun. $Y \leq M$ yi M de X in kapanışı olarak alalım. Bu durumda $X \leq_e Y \leq_c M$ olduğundan $xR \leq_e Y$ olacak şekilde $x \in X \subseteq Y$ olduğundan Y , M de ec-altmodüldür. O halde $Y = \sum_{i \in I} h_i(M)$ dir. M_R , EC_{11} -modül olduğundan bir $e^2 = e \in End(M_R)$ vardır ki, eM , Y nin komplementidir. $0 \neq y \in Y$ alalım. Bu durumda $y = ey + (1 - e)y$ dir. Fakat $m_i \in M$ olmak üzere $y = \sum_{i \in I} h_i(m_i)$ dir. Böylece $ey = e \sum_{i \in I} h_i(m_i) = \sum_{i \in I} h_i(em_i) \in Y \cap eM = 0$ dir. O halde $y = (1 - e)y$ olur. $eM \oplus Y \leq_e M = eM \oplus (1 - e)M$ ve $Y \leq (1 - e)M$ olduğundan $Y \leq_e (1 - e)M$ dir. $Y \leq_c M$ ve $Y \leq_e (1 - e)M$ olduğundan Önerme 1.2.11 den $Y = (1 - e)M$ olur. Böylece Y , M nin dik toplanamı olduğundan M_R , P-extending modüldür. $\square$

Şimdi Sonuç 4.2.12 (2) nin ispatında kullanacağımız bir önteorem verelim.

Önteorem 4.2.11 $f : M \rightarrow T$ bir izomorfizma ve T , EC_{11} -modül olsun. Bu durumda M_R de EC_{11} -modüldür.

Kanıt. N , M nin ec-altmodülü olsun. Bu durumda $xR \leq_e N \leq M$ olacak şekilde bir $x \in N$ vardır. $x \in N$ ise $f(x) \in f(N)$ dir. $f(xR) \cap A = 0$ olsun. $f^{-1}(f(xR) \cap A) = xR \cap f^{-1}(A) = 0$ olur. $A \leq f(N)$ ise $f^{-1}(A) \leq N$ olur. $xR \leq_e N$ olduğundan $f^{-1}(A) = 0$ dır. f birebir olduğundan $f(f^{-1}(A)) = f(0) = 0$ olup $A = 0$ dır. Böylece $f(x)R \leq_e f(N)$ elde edilir. Yani $f(N)$, T nin ec-altmodülüdür. T , EC_{11} -modül olduğundan T nin bir D dik toplananı için $f(N) \cap D = 0$ ve $f(N) \oplus D \leq_e T$ dir. D , T nin dik toplananı olduğundan $T = D \oplus D'$ olacak şekilde $D' \leq T$ vardır. f izomorfizma olduğundan $M = f^{-1}(T) = f^{-1}(D) \oplus f^{-1}(D')$ ve $f^{-1}(D') \leq f^{-1}(T) = M$ olup $f^{-1}(D)$, M nin dik toplananı olur. $f^{-1}(f(N) \cap D) = N \cap f^{-1}(D) = f^{-1}(0) = 0$ dır. Ayrıca $f : M \rightarrow T$ bir izomorfizma ve $f(N) \oplus D \leq_e T$ ise $f^{-1}(f(N) \oplus D) = N \oplus f^{-1}(D) \leq_e M$ dir. Dolayısıyla M_R , EC_{11} -modül olup EC_{11} özelliği izomorfizma altında invariantdir. $\square$

Sonuç 4.2.12 *Bir M_R modülü aşağıdaki koşullardan birini sağlasın. Bu durumda M nin EC_{11} -modül olması için gerek ve yeter koşul M nin P -extending modül olmasıdır.*

1. $M_R = R_R$ ve R , Abeldir.
2. M devirli ve R değişmelidir.
3. M çarpımsal modül ve R değişmelidir.

Kanıt. (1): $M_R = R_R$ ve R , Abel olduğundan $End(R) \cong R$ dir. Abellik izomorfizma altında invariant olduğundan $End(R)$ de Abeldir. $r \in R$ olmak üzere $h_i : R \rightarrow R$, $h_i(x) = x_i r$ homomorfizmasını ele alalım. $x_i \in X$ olmak üzere $x_i R \subseteq X$ olur ve $\sum_{i \in I} x_i R \subseteq X$ elde edilir. $x \in X$ için $x \in \sum_{i \in I} x_i R$ dir. Böylece $X \subseteq \sum_{i \in I} x_i R$ olduğundan $X = \sum_{i \in I} x_i R$ dir. Yani $X = \sum_{i \in I} h_i(R)$ olur. Böylece Teorem 4.2.10 dan açıktır.

(2): Şimdi M devirli ve R değişmeli olsun. Bir $B_R \leq R_R$ için $M_R \cong R/B$ dir. Gerçekten $\varphi : R \rightarrow M = mR$, $\varphi(r) = mr$ homomorfizmasını alalım. $\ker \varphi = \{r \in R : mr = 0\} = B$ dersek, I. izomorfizma teoreminden

$M_R \cong R/B$ dir. $(Y/B)_R$ modülü R/B nin bir altmodülü olsun. O halde her $y \in Y$ için $Y/B = (\sum_{i \in I} y_i R) + B = (\sum_{i \in I} y_i + B)R$ dir. $h_i : R/B \rightarrow R/B$ dönüşümü $h_i(r + B) = y_i r + B$ olarak tanımlansın. O halde $h_i \in \text{End}((R/B)_R)$ dir. Böylece $Y/B = \sum_{i \in I} h_i(R/B)$ olur. R değişmeli olduğundan $\text{End}((R/B)_R)$ de değişmelidir. Bu durumda denklik $(R/B)_R$ için dolayısıyla Önteorem 4.2.11 den M_R için Teorem 4.2.10 dan sağlanır.

(3): Son olarak M çarpımsal modül ve R değişmeli olsun. $A_R \leq R_R$ olmak üzere $X = MA$ alalım. Her $a \in A$ için $h_a : M \rightarrow M$, $m \in M$ olmak üzere $h_a(m) = ma$ olarak tanımlansın. Böylece $X = MA = \sum_{a \in A} h_a(M)$ dir. Ayrıca çarpımsal bir modülün her altmodülü fully invariantdir. Gerçekten, $N \leq M$ olsun. M çarpımsal modül olduğundan bir $A \leq R$ için $N = MA$ olur. Her $f \in \text{End}(M_R)$ için $x \in f(N)$ alalım. Bu durumda $n = ma \in N$ olmak üzere $x = f(n) = f(m)a \in MA = N$ bulunur. Yani $x \in N$ olduğundan $f(N) \subseteq N$ elde edilir ki, N fully invariant altmodüldür. [4, Lemma 1.9] dan eğer $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ ise e merkezlidir. Böylece $\text{End}(M_R)$ Abeldir. Dolayısıyla denklik Teorem 4.2.10 dan açıktır. $\square$

Teorem 4.2.13 R bir halka, X , R nin ec-ideali ve $\bar{R} = R/X$ olsun. Eğer R_R , EC_{11} -modül ve $Z(R_R) = 0$ ise, $\bar{R}_R$ ve $\bar{R}_{\bar{R}}$, EC_{11} -modüldür.

Kanıt. $\bar{A}$, $\bar{R}$ nin ec-altmodülü olsun. O zaman bazı $A_R \leq R_R$ için $\bar{A} = A/X$ dir. İlk olarak $\bar{R}_R$ nin EC_{11} -modül olduğunu gösterelim. R_R , EC_{11} -modül olduğundan $e = e^2 \in \text{End}(R_R)$ için, $A \cap eR = 0$ ve $A \oplus eR \leq_e R_R$ dir. $X \cap eR \leq A \cap eR = 0$ olduğundan $X \cap eR = 0$ olur. Ayrıca $A \oplus eR \leq_e (1 - e)R \oplus eR = R_R$ olup $X \leq (1 - e)R$ dir. Buradan Önteorem 1.2.3'ü kullanarak $\bar{R} = R/X = (1 - e)R/X \oplus (eR \oplus X)/X$ elde edilir. Dolayısıyla $(eR \oplus X)/X$, $\bar{R}_R$ nin dik toplananıdır. Ayrıca $A/X \cap (eR \oplus X)/X = (A \cap (eR \oplus X))/X = X/X = 0$ dir. Şimdi, $(A \oplus eR)/X \leq_e R/X = \bar{R}$ olduğunu gösterelim. $\bar{Y} = Y/X \leq \bar{R}$ ve $(A \oplus eR)/X \cap (Y/X) = 0$ olsun. $y \in Y$ alalım. $A \oplus eR \leq_e R_R$ olduğunda Önteorem 1.2.4 den bir $L \leq_e R_R$ vardır öyleki $yL \subseteq A \oplus eR$ dir. Buradan, $(y + X)L = yL + X \in (A \oplus eR)/X \cap (Y/X) = 0$ olur. Böylece $y + X \in Z(R/X)$ dir. $Z(R/X) = 0$ olduğundan $y + X = X$ olup

$y \in X$ dir. Buradan $\overline{Y} = 0$ dir. Dolayısıyla, $(A \oplus eR)/X \leq_e R/X = \overline{R}$ elde edilir. Benzer şekilde, $\overline{R_{\overline{R}}}$ modülünde EC_{11} -modül olduğu gösterilir. $\square$

C_{11} -modüllerin dik toplananları C_{11} -modül olmayabilir [26]. Şimdi vereceğimiz örnek EC_{11} -modüllerinde dik toplananlarının EC_{11} -modül olması gerekmediğini gösterecektir. Bu örnekten hareketle çalışmalarımızı EC_{11} -modüllerin hangi koşullarda dik toplananlarının da EC_{11} -modül olacağı konusunda elde edilen sonuçlarla tamamlayacağız.

Örnek 4.2.14 R halkası Örnek 3.1.4 deki gibi yani, $\mathbb{R}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ olsun. $M_R = (R \oplus R \oplus R)_R$ olarak alalım. Bu durumda M_R , C_{11} -modüldür. Böylece EC_{11} -modül olur. K_R indecomposable'dir, fakat Örnek 3.1.4 den düzgün olmadığından EC_{11} -modül değildir. Dolayısıyla EC_{11} özelliği dik toplananlara taşınmaz.

Teorem 4.2.15 M_R bir EC_{11} -modül ve X, M nin altmoü olsun. Eğer X ile M nin bir dik toplananının kesişimi X de bir dik toplanan ise X , EC_{11} -modüldür.

Kanıt. A, X de ec-altmodül olsun. Buradan $xR \leq_e A$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır. $X \leq M$ olduğundan A, M de de ec-altmodüldür. M , EC_{11} -modül olduğundan M nin bir N dik toplananı için $A \cap N = 0$ ve $A \oplus N \leq_e M$ olur. Bu durumda N, M nin dik toplananı olduğundan $M = N \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ vardır. $A \leq X$ olduğundan $X \cap (A \oplus N) = A \oplus (X \cap N)$ dir. $A \oplus N \leq_e M$ olduğundan $A \oplus (X \cap N) \leq_e X \cap M = X$ olur. Hipotezden $X \cap N, X$ de dik toplanandır. Böylece $A \cap (X \cap N) = (A \cap N) \cap X = 0 \cap X = 0$ olur. Dolayısıyla X, EC_{11} -modüldür. $\square$

Sonuç 4.2.16 M_R bir EC_{11} -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır.

1. $X \leq M$ ve her $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ için $eX \subseteq X$ (yani X projeksiyon invariant) ise X bir EC_{11} -modüldür. Özel olarak, M nin her fully invariant altmodülü bir EC_{11} -modüldür.

2. M_R SIP-modül ise, M nin her dik toplananı EC_{11} -modüldür.

Kanıt. (1): D , M nin dik toplananı ve $e : M \rightarrow D$ kanonikal projeksiyon olsun. Bu durumda bir $X \leq M$ için $eX \subseteq D$ dir. $eX \subseteq X$ olduğundan $eX \subseteq D \cap X$ dir. Şimdi $a \in D \cap X$ alalım. Bu durumda $a \in D$ ve $a \in X$ olur. $a \in D$ ise $a = e(a) \in eX$ olduğundan $D \cap X \subseteq eX$ olup $eX = D \cap X$ elde edilir. Böylece $D \cap X$, X in dik toplananı olduğundan Teorem 4.2.15 den X , EC_{11} -modüldür.

(2): N , M nin bir dik toplananı olsun. Ayrıca M nin herhangi bir K dik toplananını alalım. M , SIP-modül olduğundan $N \cap K$, M nin dik toplananıdır. Buradan $M = (N \cap K) \oplus X$ olacak şekilde bir $X \leq M$ vardır. $N = N \cap M = N \cap ((N \cap K) \oplus X) = (N \cap K) \oplus (N \cap X)$ olur. O halde $N \cap K$, N nin dik toplananı olduğundan Önerme 4.2.15 den N , EC_{11} -modüldür. $\square$

Önteorem 4.2.17 $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M_1 in EC_{11} -modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her N ec-altmodülü için M nin bir K dik toplananı vardır ki, $M_2 \subseteq K$, $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olmasıdır.

Kanıt. Farzedelim ki, M_1 , EC_{11} -modül ve N , M_1 in ec-altmodülü olsun. Bu durumda Önerme 4.2.2 den M_1 in bir L dik toplananı için $N \cap L = 0$ ve $N \oplus L \leq_e M$ dir. Ayrıca $(L \oplus M_2) \cap N = 0$ dır. Gerçekten, $x \in (L \oplus M_2) \cap N$ alalım. Bu durumda $x \in L \oplus M_2$ ve $x \in N$ olduğundan $l \in L$, $m_2 \in M_2$, $n \in N$ olmak üzere $x - l = m_2 \in M_1 \cap M_2 = 0$ olur. Böylece $x = l \in L \cap N = 0$ olur.

$L \oplus N \leq_e M_1$ ve $M_2 \leq_e M_2$ olduğundan $(L \oplus N) \oplus M_2 \leq_e M_1 \oplus M_2 = M$ olup $(L \oplus M_2) \oplus N \leq_e M$ dır. Ayrıca $M_2 \subseteq L \oplus M_2$ olur.

Tersine M belirtilen koşulları sağlasın ve H , M_1 in ec-altmodülü olsun. Kabulümüzden M nin bir K dik toplananı için $M_2 \subseteq K$ olmak üzere $K \cap H = 0$ ve $K \oplus H \leq_e M$ dir. $K = K \cap M = K \cap (M_1 \oplus M_2) = M_2 \oplus (K \cap M_1)$ olup $K \cap M_1$, K da dik toplanandır. Buradan $K \cap M_1$, K da ve K , M de dik toplanan olduğundan $K \cap M_1$, M de de dik toplanandır. $K \cap M_1 \leq M_1$ ve M_1 , M nin dik toplananı olduğundan bir $T \leq M$ için $M_1 = M_1 \cap M = M_1 \cap (K \cap M_1 \oplus T) = K \cap M_1 \oplus (M_1 \cap T)$ elde edilir. Böylece $K \cap M_1$, M_1 in de dik toplananıdır.

$H \cap (K \cap M_1) = (H \cap K) \cap M_1 = 0 \cap M_1 = 0$ dir. Ayrıca $H \oplus (K \cap M_1) = M_1 \cap (H \oplus K)$ olur. $K \oplus H \leq_e M$ ve $M_1 \cap (H \oplus K) \leq_e M_1 \cap M = M_1$ olduğundan M_1 , EC_{11} -modüldür. $\square$

Teorem 4.2.18 $M = M_1 \oplus M_2$, EC_{11} -modül ve M nin $K \cap M_2 = 0$ olan her K ec-altmodülü için $K \oplus M_2$, M nin bir dik toplanan ec-altmodülü olsun. Bu durumda M_1 , EC_{11} -modüldür.

Kanıt. N , M_1 in bir ec-altmodülü olsun. Hipotezden $N \oplus M_2$, M nin bir dik toplanan ec-altmodülü olur. M , EC_{11} -modül olduğundan M nin bir K dik toplananı için $(N \oplus M_2) \cap K = 0$ ve $(N \oplus M_2) \oplus K \leq_e M$ dir. Aynı zamanda $K \oplus M_2$, M nin bir dik toplananı ve $M_2 \subseteq K \oplus M_2$ ve $(K \oplus M_2) \cap N = 0$ dır. Gerçekten, $x \in (K \oplus M_2) \cap N$ alalım. Bu durumda $k \in K$, $m_2 \in M_2$, $n \in N$ olmak üzere $n - m_2 = k \in (N \oplus M_2) \cap K = 0$ olur ve $n = m_2 \in N \cap M_2 = 0$ olduğundan $x = 0$ elde edilir. Böylece M_1 in EC_{11} -modül olduğu Önteorem 4.2.17 den sağlanır. $\square$

Sağ EC_{11} -halka olmayan bir matris örneği ile çalışmamızı tamamlayalım.

Örnek 4.2.19 $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} : x, z \in \mathbb{Z}_4 \text{ ve } y \in 2\mathbb{Z}_4 \right\}$ matris halkası olsun. R_R modülü EC_{11} -modül değildir.

Kanıt. R_R nin $N = \begin{bmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ modülünü ele alalım. Bu durumda $N = \begin{bmatrix} 0 & \bar{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R \leq R_R$ olduğundan N , $\begin{bmatrix} 0 & \bar{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elemanı tarafından üretilir. Yani N , R_R nin ec-altmodülüdür. Fakat R_R nin hiç bir D dik toplananı için $N \cap D = 0$ ve $N \oplus D \leq_e R_R$ koşulunu sağlamaz. Böylece R_R , EC_{11} -modül değildir. $\square$

Kaynaklar

- [1] Anderson, F. W., Fuller, K. R., 1992, Rings and Categories of Modules, Springer, New York.
- [2] Birkenmeier, G. F., Kim, J. Y., Park, J. K., 1999, When is the CS condition hereditary?, *Comm. Algebra*, 27 (8), 3875-3885.
- [3] Birkenmeier, G. F., Călugăreanu, G., Fuchs, L., Goeters, H. P., 2001, The fully invariant extending property for Abelian groups, *Comm. Algebra*, 29 (2), 673-685.
- [4] Birkenmeier, G. F., Müller, B. J., Rizvi, S. T., 2002, Modules in which every fully invariant submodule is essential in a direct summand, *Comm. Algebra*, 30 (3), 1395-1415.
- [5] Birkenmeier, G. F., Park, J. K., Rizvi, S. T., 2002, Modules with fully invariant submodules essential in fully invariant summands, *Comm. Algebra*, 30 (4), 1833-1852.
- [6] Birkenmeier, G. F., Tercan, A., 2007, When some complement of a submodule is a summand, *Comm. Algebra*, 35 (2), 597-611.
- [7] Chatters, A. W., Hajarnavis, C. R., 1977, Rings in which every complement right ideal is a direct summand, *Quart. J. Math. Oxford*, 28, 61-80.
- [8] Chatters, A. W., Hajarnavis, C. R., 1980, Rings with chain conditions, Pitman Publishing Limited, London.
- [9] Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F., Wisbauer, R., 1994, Extending Modules, Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex, England.
- [10] Fuchs, L., 1970, Infinite Abelian Groups, Volume I, Academic Press, New York.
- [11] Goodearl, K. R., 1976, Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules, Marcel Dekker, New York.

- [12] Goodearl, K. R., 1979, Von Neumann Regular Rings, Pitman, London.
- [13] Jeremy, L., 1971, Sur les modules et anneaux quasi-continus, *C. R. Acad. Sci. Paris* 273, 80-83.
- [14] Kamal, M. A., 1994, Relative injectivity and CS-modules, *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, 17 (4), 661-666.
- [15] Kamal, M. A., Elmnophy, O. A., 2005, On P-extending Modules, *Acta Math. Univ. Comenianae*, 74 (2), 279-286.
- [16] Lam, T. Y., 1999, Lectures on Modules and Rings, Springer, New York.
- [17] Mohamed, S., Bouhy, T., 1977, Continuous Modules, *The Arabian J. Sci. Eng.*, 2 (2), 107-112.
- [18] Mohamed, S. H., Müller, B. J., 1990, Continuous and Discrete Modules, London Math. Soc. Lecture Note Series, 147, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [19] Rotman, J. J., 1973, The Theory of Groups: An Introduction, Allyn and Bacon, Boston.
- [20] Santa-Clara, C., Smith, P. F., 2000, Modules which are self-injective relative to closed submodules, *Contemporary Math.*, 259, 487-499.
- [21] Sharpe, D. W., Vámos, P., 1972, Injective Modules, Cambridge University Press, London.
- [22] Smith, P. F., Modules for which every submodule has a unique closure, Ring Theory (Granville, OH, 1992), 302-313. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993.
- [23] Smith, P. F., Dung, N. V., 1992, Hereditary CS-modules, *MATH SCAND*, 71, 173-180.

- [24] Smith, P. F., Tercan, A., 1992, Continuous and Quasi-Continuous Modules, *Houston J. Math.*, 18 (3), 339-348.
- [25] Smith, P. F., Tercan, A., 1993, Generalizations of CS-modules, *Comm. Algebra*, 21 (6), 1809-1847.
- [26] Smith, P. F., Tercan, A., 2004, Direct summands of modules which satisfy (C_{11}) , *Algebra Colloq.*, 11, 231-237.
- [27] Utumi, Y., 1965, On continuous rings and self-injective rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 118, 158-173.
- [28] Wilson, G. V., 1986, Modules with summand intersection property, *Comm. Algebra*, 14 (1), 21-38.
- [29] von Neumann, J., 1936, Continuous geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 22, 92-100.
- [30] von Neumann, J., 1936, Examples of continuous geometries, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 22, 101-108.
- [31] von Neumann, J., 1936, On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 22, 707-713.
- [32] Yücel, C. C., Tercan, A., Modules whose ec-closed submodules are direct summand, *Taiwanese J. Math.*, To appear.
- [33] Yücel, C. C., Tercan, A., A note on ECS-modules, *preprint*.