ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KONTAK GEOMETRİDE EĞRİLER TEORİSİ

Çetin CAMCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2007

ÖZET

Doktora Tezi

KONTAK GEOMETRİDE EĞRİLER TEORİSİ

Çetin CAMCI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU

Bu doktora tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci Bölümde, temel tanım kavramlar kaynaklarıyla birlikde verilmiştir.

Üçüncü bölümde Kontak geometri tanıtılmış ve bu geometrideki temel tanım ile kavramlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde Baikousis ile Blair in 1991 de yaptıkları makalenin Lorentz geometrisinde karşılığı incelenmiş ve bazı farklılıklar olduğu görülmüştür.

Son bölümde ise genelde üç boyutlu Sasaki uzaylarındaki eğriler incelenmiş ve bazı orjinal sonuçlar elde edilmiştir.

2007, 243 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Kontak geometri, Kontak manifold, Kontak form, Hemen Hemen Kotak manifold, Kontak Metrik manifold, İntegral alt manifold, Legendre eğrileri, Sasaki manifold, Sonlu tip eğriler, Uzay formları

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

A CURVES THEORY IN CONTACT GEOMETRY

Çetin CAMCI

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU

This thesis consists of five chapters. The first chapter is introduction of my thesis.

In the second chapter, Some basic fundamental definition and theorem has been presented.

The third chapter has been devoted to the presentation of contact geometry and fundamental definition in this geometry.

In the third chapter, Baikousis and Blair's paper that published in 1991 has been investigated as Lorentz geometry, some differences have been shown

In the last chapter, The curves in the 3-dimensional Sasaki spaces has been examined and some original finding has been found.

2007, 243 pages

Key Words: Contact Geometry, Contact Manifold, Contact form, Almost Contact Manifold, Contact Metric Manifold, Integral Submanifold, Legendre curve, Sasaki manifold, Finitely type curve, Space Forms

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrubelerini benden esirgemeyen danışman hocam, sayın Prof . Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) na, fikirleriyle ve sorularıyla beni yönlendiren Prof . Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) ile Prof . Dr. Baki KARLIĞA (Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi) ya teşekkürlerimi sunarım

Ayrıca çalışmalarım esnasında sonsuz sabrını benden hiç eksik etmeyen sevgili eşim Didem K. CAMCI yada teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Çetin CAMCI

Ankara, Temmuz 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

η	kontak form
(M,η)	kontak manifold
(ϕ,ξ,η)	hemen hemen kontak yapı
(M,ϕ,ξ,η)	hemen hemen kontakmanifold
$(\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$	hemen hemen kontak metrik yapı
$(M,\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$	hemen hemen kontak metrik manifold
$[\ ,\ ]$	Lie braket operatörü
M/G	G grubu tarafından elde edilmiş bölüm uzayı
π	projeksiyon
σ	cross section
$GL(n,\mathbb{R})$	genel lineer grup
D,∇	Riemann konneksiyonları
R	Riemann eğrilik tensörü
K	kesitsel eğrilik
L	Lie türevi
H	ortalama eğrilik tensörü
gl	Lie cebri
C_s^r	kontraksiyon operatörü
$\otimes$	tensör çarpımı

1. GİRİŞ

Kontak geometri ilk olarak Christian Huygens, Barrow ve Isaac Newton nun çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Kontak dönüşümler teorisi daha sonraları S.Lie tarafından bazı diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için geliştirilmiştir. Yirminci yüzyılın ilk yarısında E.Cartan ve Darboux un kontak geometrinin gelişiminde büyük katkıları olmuştur. Kontak manifoldlarda önemli bir yeri olan Sasaki manifoldlarının tanımı 1960' lı yıllarda Japon matematikçi S.Sasaki tarafından verilmiştir. Yine aynı yıllarda yaşayan M.Gray, K.Ogiue ve W.M.Bootby gibi matematikçilerin çalışmaları dikkat çekmektedir. Günümüzde ise bu konuda pek çok matematikci çalışmaktadır. Doktora tezimi yazarken özellikle D.E.Blair 'in makale ve kitaplarından pek çok kere yararlandım. 1970 li yıllardan sonra kontak geometriyi topolojik olarak da incelemek önem kazanmaya başlamıştır. Bu konuda ülkemizde özelikle B.Özbağcı 'nın çalışmaları dikkat çekmektedir. Kontak geometri ile Simplektik geometri ayrılmaz birer ikili gibidirler. Simplektik geometri çift boyutlu, Kontak geometri de tek boyutlu uzaylarda tanımlıdır. Bu yönleriyle biribirlerini tamamlayan uzaylardır. Bu yüzden olsa gerek bu iki geometri için pek çok makale ve kitapda ikiz kız kardeşler diye bahsedilir. Açıkcası neden erkek değil de kız kardeş dendiğini bende bilmiyorum. Kontak geometrinin bir çok alanda uygulamaları vardır. H.Geiges makalesinde kontak geometrinin fizik, mekanik, optik, termodinamik ve kontrol teorisi alanlarında nasıl uygulandığını anlatmıştır (Geiges 2001). Kontak geometride integral alt manifoldlar önemli rol oynar. Doktora tez çalışmamda özellikle bir boyutlu integral alt manifoldları (Legendre eğrileri) nı inceledik. Ayrıca Legendre eğrisi olmayan eğriler için de bazı sonuçlar elde ettik.

Geometride en çok çalışılan konulardan biri de eğriler geometrisidir. Eğriler geometrisinde özellikle geodezikler, çemberler, genel helisler, Bertrant eğri çiftleri v.b. gibi özel eğriler çalışılmaktadır. Eğriler geometrisinin önemi ve tarihçesiyle ilgili K. İlarslan nın doktora tezinde yazmış olduğu giriş kısmının okunmasını tavsiye ederim (İlarslan 2002). Eğriler geometrisi çalışılırken; bir eğrinin Serret-Frenet denklemlerinin bulunması ve eğriliklerinin hesaplanması çok önemlidir. Öklid uzaylarında eğrilikleri ve Serret-Frenet denklemlerini hesaplamak kolaydır. Fakat kontak geometride Serret-Frenet denklemlerini bulmak ve denklemlerde geçen çatılarda çalışmak çok da kolay değildir. Baikoussis ve Blair 1994 yılında yazdıkları makalede, üç boyutlu Sasaki uzayında Legendre eğrileri için Serret-Frenet denklemlerini vermişlerdir. 2002 yılında ise Belkelfa ve arkadaşları Lorentz geometrisinde, üç boyutlu Sasaki uzayı için bir Legendre eğrinin Serret-Frenet denklemlerini vermişlerdir (Baikoussis 1994). Üç boyutlu Sasaki uzaylarında Legendre eğriler haricindeki eğriler için Serret-Frenet denklemlerinin bulunması zor bir problemdir. Hatta üçten farklı boyuttaki Sasaki uzaylarında bir Legendre eğrisi için Serret-Frenet denklemlerinin bulunması hala çözülememiş problemdir. Sasaki uzayların çok özel bir kontak uzaylar olduğunu düşünürsek, kontak uzayda eğriler teorisi çalışmanın ne derecede zor olduğunu anlayabiliriz.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde kontak geometri tanıtılmış ve kontak geometri ile ilgili temel tanım ile teoremler verilmişdir. Bu bölümde, ilk kez K.Ogiue tarafından verilen uzay formlarının Rieman eğriliği ile ilgili formülün Lorentz geometrisindeki karşılığı verilmiştir (Ogiue 1964). Aslında Rieman eğriliğini hesaplarken K.Ogiue 'nın makalesi elimde değildi. Daha sonra K.Ogiue 'nın makalesi elime geçtiğinde makaledeki ispatdan farklı bir ispat yaptığımı fark ettim.

Çalışmamızın dördüncü bölümünde Baikoussis ve Blair 'in 1991'de yaptıkları çalışmanın Lorentz geometrisinde karşılığı bulunmuş ve bazı farklılıkların olduğu görülmüştür.

Çalışmamızın beşinci bölümü genelde orijinal kısımlardan oluşmaktadır. Bu bölümde Barros anlamında helis tanımını verilmiş, $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayındaki Legendre helis eğrilerinin $N^2(c)$ silindirinde yattığı görülmüştür. $R^5(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $N^4(c)$ silindirinin 2-tipli integral alt manifoldunda yatan biharmonik eğriler incelenmiştir. Ayrıca üç boyutlu Sasaki uzay formlarında küresel Legendre eğrileri için bir karakterizasyon verilmiş, $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında küresel Legendre eğrinin olmadığı gösterilmiştir. Bu bölümün son kısmı ise Baikoussis ve Blair 'in 1994 'de yazdıkları makalede geçen bir açık problem ile ilgilidir. Bu makalede $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında "$N^2(c)$ silindirinde yatan her hangi bir Legendre eğri 1-tiplidir ancak ve ancak Legendre eğrisi sabit eğriliklidir." önermesi ispatlanmıştır. Bu teoremin sonlu tipdeki her hangi eğri için karşılığı ise açık problem olarak bırakılmıştır. Çalışmalarımızın son kısmında $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $N^2(c)$ silindirinde yatan her hangi bir sonlu tipdeki eğrinin 1-tipinde olduğunu ispatladık. Ayrıca $N^2(c)$ silindirinde yatan her hangi bir 1-tipinde eğrinin sabit eğrilikli olması gerektiğini fakat bunun tersinin doğru olmadığını gösterdik. Böylece bu açık probleme tam cevap vermiş olduk. Yukarıda anlattıklarım bu bölümdeki orjinal çalışmalarımızdır. Bunun haricinde başka makale lerden aldığım güzel çalışmalara da kaynaklarıyla birlikde tezimde yer verdim

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1 Dönüşümlerin Yarı Grubu

Tanım 2.1.1.(Dönüşümlerin Yarı Grubu) S bir topolojik uzay ve Γ da S den S ye dönüşümlerin cümlesi olsun. Aşağıdaki özelikleri sağlayan Γ cümlesine, S topolojik uzayının **dönüşümler yarı grubu** denir.

DYG 1) $\forall f \in \Gamma$ dönüşümü, U,$V \subset S$ açık cümleler iken $f : U \to V$ şeklinde homeomorfizimdir.

DYG 2) Şayet $f \in \Gamma$ ise f fonksiyonunun tanım cümlesinin her açık alt cümlesine kısıtlanışı da Γ dadır. Yani U,$V \subset S$ açık olmak üzere

$$f \in \Gamma,\ f : U \to V,\ U^{'} \subset U \text{ (açık) ise } f\,|_{U'} \in \Gamma$$

DYG 3) U_i ler S nin açık cümleleri olmak üzere $U = \underset{i \in I}{\cup} U_i$ ve $f : U \to V$ dönüşümü homeomorfizim olsun. $f\,|_{U_i} \in \Gamma$ iken $f \in \Gamma$ dır. Yani,

$$U = \underset{i \in I}{\cup} U_i,\ U_i \subset S,\ f : U \to V \text{ (homeomorfizim) ve } f\,|_{U_i} \in \Gamma \text{ ise } f \in \Gamma$$

DYG 4) S deki her açık cümlenin birim dönüşümleri Γ dadır.

DYG 5) Şayet $f \in \Gamma$ ise $f^{-1} \in \Gamma$ dır.

DYG 6) $f : U \to V$ ile $g : U' \to V'$ $(V \cap U' \neq \emptyset)$ şeklinde tanımlanan dönüşümler Γ da iken $g \circ f : f^{-1}(V \cap U') \to g(V \cap U')$ dönüşümü de Γ dadır (Kobayashi 1996).

Teorem 2.1.1.(Darboux Teoremi) n-boyutlu diferensiyellenebilir M manifold üzerinde ω 1-formu

$$\omega \wedge (d\omega)^p \neq 0 \text{ ve } (d\omega)^{p+1} = 0$$

olacak şekilde verilsin. Bu durumda, M manifoldunun her noktasında

$$\omega = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i$$

olacak şekilde bir $(x^1, ..., x^p, y^1, ..., y^p)$ koordinat komşuluğu vardır (Blair 1976).

Örnek 2.1.1. $S = R^{2n+1}$ de (x^i, y^i, z) $(i = 1, 2, 3, ...n)$ kartezyen koordinatlar ve η bir 1-formu da

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

olsun. U, V açık cümleler ve $f : U \to V$ bir dönüşüm olmak üzere

$$\tau : U \to R$$

$(\forall P \in U, \tau(P) \neq 0)$ fonksiyonu için $f^*(\eta) = \tau.\eta$ oluyorsa f ye **Kontak dönüşüm** (Contac Transformation) denir. Kontak dönüşümlerin cümlesi

$$\Gamma = \left\{ f : U \to V : U, V \subset R^{2n+1}(\text{açık cümleler}),\ f^*(\eta) = \tau\eta,\ \forall P \in U \text{ için } \tau(P) \neq 0 \right\}$$

olark tanımlarsak, Γ bir yarı gruptur. Çünkü,

DYG 1) $\forall f \in \Gamma$ ve $U, V \subset S$ (açık cümleler) ve ($\forall P \in U$ için $\tau(P) \neq 0$) $f^*\eta = \tau\eta$ olduğundan $f : U \to V$ dönüşümünün homeomorfizim olduğu açıktır.

DYG 2) $f \in \Gamma$, $f : U \to V$, $U' \subset U$(açık cümle) alalım $\forall P \in U$ için $\tau(P) \neq 0$ ise $\forall P \in U'$ için $\tau(P) \neq 0$ dir. Böylece $(f |_V)^*\eta = \tau\eta$ ($\forall P \in V$ için $\tau(P) \neq 0$) olur. Dolayısıyla $f |_{U'} \in \Gamma$ dır.

DYG 3) $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i \subset S$, $f : U \to V$ (homeomorfizim) ve $f |_{U_i} \in \Gamma$ olsun. $\forall P \in U$ için $\forall P \in U_i$ olacak şekilde $i \in I$ vardır. $f |_{U_i} \in \Gamma$ olduğundan $P \in U$ noktasında $(f |_{U_i})^*\eta = \tau\eta$ dır. $f |_{U_i} (P) = f(P)$ olduğundan $f^*\eta = \tau\eta$ olur. Böylece $f \in \Gamma$ dır.

DYG 4) $\forall U \subset R^{2n+1}$ açığı için birim dönüşümün Γ da olduğu açıktır.

DYG 5) $f \in \Gamma$, $f : U \to V$ için $f^*\eta = \tau\eta$ ($\forall P \in U$ için $\tau(P) \neq 0$) olsun. Burada $f^{-1} : U' \to U$ ve $(f^{-1})^*\eta = \frac{1}{\tau \circ f^{-1}}\eta$ ($\forall f(P) = Q \in V$ için $\frac{1}{\tau \circ f^{-1}(Q)} \neq 0$) olduğundan $f^{-1} \in \Gamma$ olur.

DYG 6) $f, g \in \Gamma$, $f : U \to V$ ile $f : U' \to V'$ ve $V \cap U' \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $f^*\eta = \tau\eta$ ve $g^*\eta = \tau'\eta$ $(\tau(P) \neq 0, \tau'(Q) \neq 0, \forall P \in U, \forall Q \in U')$ olacak şekilde τ, τ' vardır. $g \circ f : f^{-1}(V \cap U') \to g(V \cap U')$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^*\eta &= (g^* \circ f^*)\eta \\
&= g^*(f^*\eta)
\end{aligned}$$

$$= g^*(\tau\eta)$$
$$= \tau\tau'\eta$$

elde edilir. Burada $\forall Q \in f^{-1}(V \cap U')$ için $(\tau\tau')(Q) = \tau(Q)\tau'(Q) \neq 0$ olduğundan $g \circ f \in \Gamma$ dır.

2.2 Yönlendirilebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1.(Yönlendirme) V, n-boyutlu reel vektör uzayı ve L de V vektör uzayının sıralı bazlarının cümlesi olsun. $u = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \in L$ için $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ olacak şekilde $A = (a_{ij}) \in GL(n, R)$ vardır.

$$\text{“}u = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \sim v = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \text{ ancak ve ancak } \det(a_{ij})\rangle 0\text{”}$$

bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının iki denklik sınıfı vardır. Şayet $\det(a_{ij})\rangle 0$ ise u ile v ye **aynı yönlendirmeye sahip**, $\det(a_{ij})\langle 0$ ise de **karşıt yönlendirmeye sahiptir** denir (Boothby 1986).

Sonuç 2.2.1. V vektör uzayında n-lineer ve alterne fonksiyonellerin cümlesi de bir vektör uzayıdır. Bu uzayı “ $\Lambda^n V$” ile gösterirsek “boy $\Lambda^n V = 1$” dir. Tensör cebirinden biliyoruzki $\Omega \in \Lambda^n V$ için

$$\Omega(u_1, u_2, ..., u_n) = \det(a_{ij})\, \Omega(v_1, v_2, ..., v_n) \tag{2.2.1}$$

dir. Hiç bir yerde sıfır olmayan $\Omega \in \Lambda^n V$ n-formunu alalım. Bu durumda (2.2.1) den, $u = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bazlarında aynı yönlendirme vardır (veya karşıt) ancak ve ancak bazların Ω da aldığı değer aynı işarete sahiptir (veya zıt). Bu yüzden bir vektör uzayındaki yönlendirmeyi n-formlar ile ifade edebiliriz.
Ω_1,$\Omega_2 \in \Lambda^n V$ için boy $\Lambda^n V = 1$ olduğundan

$$\Omega_1 = \lambda\Omega_2$$

olacak şekilde λ vardır. Böylece Ω_1,Ω_2 aynı yönlendirmeye sahiptir(veya karşıt) ancak ve ancak $\lambda\rangle 0$ (veya$\lambda\langle 0$) dir (Boothby 1986).

Tanım 2.2.2.(Yönlendirilmiş Manifold) n-boyutlu bir M manifoldu üzerinde hiç bir yerde sıfır olmayan bir Ω n-form varsa, M manifolduna **yönlendirilebilir** (Orientable) manifold denir. Bu formların her birine **yönlendirme**(orientation) ve seçilen bu yönlendirmeyle birlikde bu mani
folda da **yönlendirilmiş** (oriented) manifold denir (Boothby 1986).

Tanım 2.2.3.(Uygun Yönlendirilmiş Atlas) $F = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ cümlesi bir M manifoldunun atlası olsun. Şayet $\forall\alpha, \beta \in \Lambda$ için $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ haritaları için

$$\varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta)^{-1}$$

dönüşümünün Jakobiyen matrisi pozitif determinanta sahip ise bu atlasa M üzerinde **uygun yönlendirilmiş** (coherently oriented) atlas denir (Boothby 1986).

Teorem 2.2.1. M , n-boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.
i) M manifoldu yönlendirilebilirdir.
ii) M üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan n-form vardır.
iii) M üzerinde uygun yönlendirilmiş bir atlas vardır (Boothby 1986).

Teorem 2.2.2. Her hangi bir manifoldun tanjant demeti (tangant bundle) manifold olarak yönlendirilebilirdir (Carmo1992).

Teorem 2.2.4. Yönlendirilebilir bir manifoldun her alt manifoldu da yönlendirilebilirdir (Carmo1992).

2.3 Lie Grupları, Çarpım Manifoldları ve Bir Manifold Üzerinde Etki

Tanım 2.3.1.(Lie grubu) G bir grup ve aynı zamanda diferensiyellenebilir manifold olsun. Şayet

$$G \times G \to G, (x,y) \to xy \text{ ve } G \to G, x \to x^{-1}$$

dönüşümleri C^∞ iseler G ye bir Lie grubu denir (Kobayashi 1996).

Tanım 2.3.2.(Çarpım Manifoldu) M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda} \text{ ile } \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in I}$$

atlasları da, sırasıyla, M ve N üzerinde diferensiyellenebilir yapılar olsunlar. $p \in U_\alpha$ ve $q \in V_\beta$ için

$$\phi_{\alpha\beta}(p,q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q))$$

dönüşümünü tanımlarsak $\{(W_{\alpha\beta} = U_\alpha \times V_\beta, \phi_{\alpha\beta})\}$ cümlesi $M\times N$ üzerinde bir diferen siyellenebilir yapıdır. Çünkü

Ç M 1) $M \times N = \bigcup_{\alpha\in\Lambda,\beta\in I} W_{\alpha\beta}$ olduğu açıktır.

Ç M 2) $(W_{\alpha_1\beta_1} = U_{\alpha_1} \times V_{\beta 1}, \phi_{\alpha_1\beta 1})$ve $(W_{\alpha_2\beta_2} = U_{\alpha_2} \times V_{\beta 2}, \phi_{\alpha 2\beta 2})$ haritalarını alırsak

$$\phi_{\alpha_2\beta_2} \circ \phi^{-1}_{\alpha_1\beta_1} : \phi_{\alpha_1\beta_1}(W_{\alpha_1\beta_1} \cap W_{\alpha_2\beta_2}) \to \phi_{\alpha_2\beta_2}(W_{\alpha_1\beta_1} \cap W_{\alpha_2\beta_2})$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha_2\beta_2} \circ \phi^{-1}_{\alpha_1\beta_1}(p', q') &= \phi_{\alpha_2\beta_2}(\varphi^{-1}_{\alpha_1}(p'), \psi^{-1}_{\beta_1}(q')) \\ &= (\varphi_{\alpha_2} \circ \varphi^{-1}_{\alpha_1}(p'), \psi_{\beta_2} \circ \psi^{-1}_{\beta_1}(q')) \end{aligned}$$

olur. Burada $\varphi_{\alpha_2} \circ \varphi^{-1}_{\alpha_1}$ ve $\psi_{\beta_2} \circ \psi^{-1}_{\beta_1}$ diferensiyellenebilir olduğundan $\phi_{\alpha_2\beta_2} \circ \phi^{-1}_{\alpha_1\beta_1}$ de diferensiyellenebilir. Benzer şekilde $\phi_{\alpha_1\beta_1} \circ \phi^{-1}_{\alpha_2\beta_2}$ diferensiyellenebilir olduğu görülür. Benzer işlemleri her $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ ve $\beta_1, \beta_2 \in I$ için yaparsak $M \times N$ çarpım cümlesinin bir diferensiyellenebilir manifold olduğunu görürüz (Carmo1992).

Teorem 2.3.1. M_1 ve M_2 manifoldları yönlendirilebilir ancak ve ancak

$$M = M_1 \times M_2$$

çarpım manifoldu yönlendirilebilirdir (Steenrod 1951).

Tanım 2.3.3.(Etki) G bir grup ve M de bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Şayet

$$\varphi : G \times M \to M$$

dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa G grubuna M manifoldu üzerinde **soldan etki** (G acts on left on M) denir.
E 1) $\forall g \in G$ için

$$\varphi_g : M \to M, \varphi_g(x) = \varphi(g, x)$$

dönüşümü difeomorfizim ve $\varphi_e = I$ (birim dönüşüm) dir.
E 2) $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$ dir.
Burada notasyon olarak $\varphi_g(x) = gx$ yazarsak (E 2) nin bir sonucu olarak

$$(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

olduğu görülür. Eğer $M \times G \to M$ dönüşümü $\forall x \in M$ ve $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$x(g_1 g_2) = (x g_1) g_2$$

koşulu sağlanıyorsa G grubuna M manifoldu üzerinde **sağdan etki** (G acts on right on M) denir. Şayet $\forall x \in M$ noktasının, $\forall g \in G$ için $U \cap g(U) = \phi$ olacak şekilde bir U komşuluğu varsa bu etkiye **uyumlu süreksizlik** (properly discontinous) denir (Carmo 1992).

Sonuç 2.3.1. Kabul edelimki G grubu M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde soldan etki olsun. Bu durumda M manifoldu üzerinde bir denklik bağıntısını

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \ni y = gx$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu bağıntının denklik sınıfları $[x] = \{xg : g \in G\}$ olur.

Böylece bölüm uzayını

$$M/G = \{[x] : x \in M\}$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} \pi : M &\to M/G \\ x &\to \pi(x) = [x] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan örten dönüşüme M manifoldundan M/G bölüm uzayına **projeksiyon** denir (Carmo 1992).

Teorem 2.3.2. M diferensiyellenebilir manifold ve G grubu M manifoldu üzerinde uyumlu süreksiz etki olsun. Bu durumda $\pi : M \to M/G$ lokal diferensiyellenebilir projeksiyonu yardımıyla, M/G cümlesi için bir diferensiyellenebilir yapı elde edebiliriz (Carmo1992).

İspat. M diferensiyellenebilir manifold olduğundan M üzerinde bir $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ diferensiyellenebilir yapısı alabiliriz. G grubu M manifoldu üzerinde uyumlu süreksiz hareket olduğundan $\forall x \in M$ için x in $U \cap g(U) = \phi$ olacak şekilde bir U açık komşuluğu vardır. $x \in M$ nin öyle bir $\varphi^{-1}(V)$ koordinat komşuluğunu seçelimki $\varphi^{-1} : V \to M$ olmak üzere $\varphi^{-1}(V) \subset U$ olsun. Burada

$$\pi\mid_U : M \to M/G$$

dönüşümü birebir dir. Çünkü, $x, y \in U$ için $\pi\mid_U(x) = \pi\mid_U(y)$ olsun. Bu durumda $[x] = [y]$ ve $x \sim y$ olur. Böylece $\exists g \in G \ni y = gx$ dir. $x \in U$ ise $y = gx \in g(U)$ dir. $U \cap g(U) = \phi$ olduğundan $g = e$ ve $y = ex = x$ olur. $\pi\mid_U$ ve φ birebir ise

$$\psi^{-1} = \pi\mid_U \circ\varphi^{-1} : V \to M/G$$

de birebir dir. Bu işlemi her $x \in M$ için yaptığımızdan $\psi_i^{-1}(V_i)$ koordinat komşulukları elde ederiz. Burada

$$M/G = \cup\psi_i^{-1}(V_i)$$

olduğunu göstermek kolaydır. Ayrıca $(\psi_1^{-1}(V_1), \psi_1)$ ve $(\psi_2^{-1}(V_2), \psi_2)$ haritalarını alırsak $\psi_2\circ\ \psi_1^{-1}$ ve $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ dönüşümlerinin diferensiyellenebilir olduğunu ispatlamamız gerekir. $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ dönüşümü

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(\psi_1^{-1}(V_1) \cap \psi_2^{-1}(V_2)) \to \psi_2(\psi_1^{-1}(V_1) \cap \psi_2^{-1}(V_2))$$

şeklindedir. π nin $\varphi_i^{-1}(V_i)$ ye kısıtlanışına π_i dersek $\psi_i = \varphi_i \circ \pi_i^{-1}$ ve

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \pi_2^{-1} \circ \pi_1 \circ \varphi_1^{-1}$$

olur. $x \in \psi_1^{-1}(V_1) \cap \psi_2^{-1}(V_2)$ için

$$\psi_1(W) \subset \psi_1^{-1}(V_1) \cap \psi_2^{-1}(V_2)$$

olacak şekilde $y = \psi_1^{-1}(x)$ in W komşuluğunu alalım. Böylece

$$\begin{aligned} \left(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\right)(x) &= \left(\varphi_2 \circ \pi_2^{-1} \circ \pi_1 \circ \varphi_1^{-1}\right)(x) \\ &= \varphi_2\left[\left(\pi_2^{-1} \circ \pi_1\right)\left(\varphi_1^{-1}(x)\right)\right] \end{aligned}$$

olur. Burada $a = \varphi_1^{-1}(x)$, $\pi_1(a) = b$ ve $\pi_2^{-1}(b) = c$ dersek $\exists g \in G$ için $c = ag$ dır. Sonuç olarak $\left(\pi_2^{-1} \circ \pi_1\right)(a) = ag$ olur. Tanım.2.2.3 (E1) şıkkından $\pi_2^{-1} \circ \pi_1$ dönüşümün diferensiyellenebilir olduğu görülür. Benzer şekilde $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ dönüşümü de diferensiyellenebilirdir. Böylece $\left\{\left(\psi_i^{-1}(V_i), \psi_i\right)\right\}$ cümlesi M/G nin bir diferensiyellenebilir atlasıdır.

Örnek 2.3.1.

$$\begin{aligned} \sigma &: R \to R \\ x &\to \sigma(x) = x + 2\pi \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. $G = \{\sigma^n : n \in Z\}$ olmak üzere $(G, \circ)$ bir gruptur. R reel sayılar üzerindeki bir denklik bağıntısını

$$\text{“}x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \ \ \ni \ \ y = gx\text{”}$$

olarak tanımlayabiliriz. Denklik sınıfları $[x] = \{\sigma^n(x) : n \in Z\}$ olur. Burada

$$\sigma^n(x) = x + 2\pi n$$

olduğunu görmek kolaydır. Böylece

$$[x] = \{x + 2\pi n : n \in Z\} = x + 2\pi Z$$

olarak yazabiliriz. $R/G = R/2\pi Z = \{x + 2\pi Z : x \in R\}$ dir. Teorem 2.3.2. den $R/2\pi Z$ bölüm cümlesinin diferensiyellenebilir manifold olduğu görülür. Şimdi de $R/2\pi Z$ manifoldunun

$$S^1 = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

çemberine difeomorfik olduğunu gösterelim. R deki atlası $\{(R, I)\}$ alırsak $R/2\pi Z$ nin $\left\{\psi_i^{-1}(V_i), \psi_i\right\}$ atlası olmak üzere

$$\psi_i = \varphi_i \circ \pi_i^{-1} = I \circ \pi_i^{-1} = \pi_i^{-1}$$

olur. S^1 deki atlası da

$$\begin{aligned} U_1^+ &= \left\{(x, y) \in S^1 : x \rangle 0\right\}, U_1^- = \left\{(x, y) \in S^1 : x \langle 0\right\} \\ U_2^+ &= \left\{(x, y) \in S^1 : y \rangle 0\right\}, U_2^- = \left\{(x, y) \in S^1 : y \langle 0\right\} \end{aligned}$$

açık cümleler ve

$$\begin{gathered} \varphi_i^{\mp} : U_i^{\mp} \to I = (-1, 1) \\ \varphi_1^{\mp}(x, y) = y,\ \varphi_2^{\mp}(x, y) = x \end{gathered}$$

dönüşümler olmak üzere $\left\{\left(\varphi_i^{\mp}, U_i^{\mp}\right)\right\}_{i=1,\,2}$ olarak alalım. Burada

$$\left(\varphi_1^{\mp}\right)^{-1}(y) = (\mp\sqrt{1 - y^2}, y), \left(\varphi_2^{\mp}\right)^{-1}(x) = (x, \mp\sqrt{1 - x^2})$$

dir. Ayrıca

$$F : R/2\pi Z \to S^1$$
$$x + 2\pi Z \to F(x + 2\pi Z) = e^{ix}$$

dönüşümünü tanımlarsak F dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu göstermeliyiz. Şayet

$$x + 2\pi Z = y + 2\pi Z$$

ise $\exists n \in Z \quad \ni x - y = 2\pi n$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} e^{(x-y)i} &= e^{2\pi n} \\ &= \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$F(x + 2\pi Z) = e^{ix} = e^{iy} = F(y + 2\pi Z)$$

dir. Benzer şekilde F nin birebir ve örten olduğu kolayca gösterilebilir. F nin diferensiyellenebilir dönüşüm olduğunu göstermek için $\widehat{F} = \varphi_i^{\mp} \circ F \circ \pi_i^{-1}$ nin diferensiyellenebilir olduğunu göstermeliyiz. Burada

$$\begin{aligned} \widehat{F}(x) &= \left(\varphi_i^{\mp} \circ F \circ \pi_i^{-1}\right)(x) \\ &= \left(\varphi_i^{\mp} \circ F\right)(x + 2\pi Z) \\ &= \varphi_i^{\mp}(\cos x, \sin x) \end{aligned}$$

olduğundan $\widehat{F}(x) = \cos x$ veya $\widehat{F}(x) = \sin x$ dir. Böylece $\widehat{F}$ diferensiyellenebilir ve F de diferaesiyellenebilir dönüşümdür. F birebir ve örten olduğundan tersi vardır. Benzer şekilde tersinin de diferensiyellenebilir dönüşüm olduğu gösterilebilir. Böylece $R/2\pi Z$ manifoldu S^1 çemberine difeomorfik olur.

Örnek 2.3.2. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ olmak üzere

$$\sigma_i : R^n \to R^n$$
$$x \to \sigma_i(x) = x_i + 2\pi$$

olarak tanımlayalım. $(G = \{\sigma_1^{p_1} \circ \sigma_2^{p_2} \circ ...\sigma_n^{p_n} : p_1, p_2, ..., p_n \in Z\}, \circ)$ bir Abel grupdur. Burada

$$(\sigma_1^{p_1} \circ \sigma_2^{p_2} \circ ...\sigma_n^{p_n})(x) = x + 2\pi(p_1, p_2, ..., p_n)$$

olduğunu görmek kolydır. Örnek 2.3.1. dekine benzer şekilde R^n üzerinde "$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \ni y = gx$" denklik bağıntısını tanımlarsak

$$\begin{aligned}
[x] &= \{(\sigma_1^{p_1} \circ \sigma_2^{p_2} \circ ...\sigma_n^{p_n})(x) : p_1, p_2, ..., p_n \in Z\} \\
&= \{x + 2\pi(p_1, p_2, ..., p_n) : p_1, p_2, ..., p_n \in Z\} \\
&= x + 2\pi(Z \times Z \times ... \times Z) \\
&= x + 2\pi Z^n
\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Böylece

$$R^n/G = R^n/2\pi Z^n = \{x + 2\pi Z^n : x \in R^n\}$$

olur. Ayrıca $R^n/2\pi Z^n$ in bir diferensiyellenebilir manifold ve (n-Torus)

$$T^n = S^1 \times S^1 \times .... \times S^1$$

(n tane S^1 in kartezyen çarpımı) çarpım manifolduna difeomorfik olduğu Örnek 2.3.1. deki gibi gösterilebilir.

Tanım 2.3.3.(Serbest Etki) G grubu M manifoldu üzerinde bir hareket olsun. Şayet $\exists x \in M$ için $R_a(x) = x$ iken $a = e$ (G nin birim elemanı) oluyorsa G grubuna M manifoldu üzerinde **serbest etki** (G acts freely on M) denir (Kobayashi 1996).

2.4 Lif Demetleri

Tanım 2.4.1.(Asli Lif Demeti) P ve M birer manifold ve G de bir Lie grubu olsun. Ayrıca G grubu P manifoldu üzerinde etki olmak üzere
ALD1) G grubu P üzerinde sağdan serbest etki olsun. Yani

$$(u, a) \in P \times G \to R_a(u) = ua \in P$$

olamak üzere $\exists x \in M$ için $R_a(x) = x$ iken $a = e$ dir.
ALD2) M manifoldu G grubu tarafından elde edilen denklik bağıntısının bölüm uzayı ($M = P/G$)olacak. Ayrıca $\pi : P \to M$ kanonik projeksiyonu diferensiyellenebilir olacak.
ALD3) P manifoldu lokal aşikar (locally trivial) olacak. Yani, $\forall x \in M$ naoktasının öyle bir U komşuluğu olacakki $\pi^{-1}(U)$ cümlesi $U \times G$ ye izomorf olacak. Başka bir deyişle

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G,\ \Psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$$

olacak şekilde bir difeomorphisim vardır. Burada φ dönüşümü

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to G, \forall u \in \pi^{-1}(U),\ a \in G$$

için $\varphi(ua) = \varphi(u)a$ şartını sağlayan dönüşümdür. (ALD1), (ALD2) ve (ALD3) koşulları sağlanıyorsa P manifolduna G grubu tarafından oluşturulmuş M manifoldu üzerindeki **asli lif demeti** (principal fibre bundle) denir. Burada P manifolduna **total uzay** (total space) veya **demet uzayı** (bundle space), M manifolduna **baz uzayı** (base space) ve G grubuna da **yapı grubu** (structure group) denir. Bu asli lift demeti $P(M, G, \pi)$ veya $P(M, G)$ ile gösterilir (Kobayashi 1996).

Tanım 2.4.2.(Aşikar Lif Demeti) $P(M, G)$ asli lif demeti olsun. Şayet G grubu $P = M \times G$ üzerinde serbest etki (G acts freely on $M \times G$) ise $P(M, G)$ asli lif demetine **aşikar lif demeti** denir. Burada

$$R_b : M \times G \to M \times G,\ R_b(x, a) = (x, ab)$$

olarak tanımlanır (Kobayashi 1996).

Tanım 2.4.3.(İlişik Lif Demeti) $P(M, G)$ asli lift demeti ve F manifoldu G grubu üzerinde

$$(a, \xi) \in G \times F \to a\xi \in F.$$

şeklinde soldan hareket olsun. Bu durumda F standart lifi ve P ile bağlantılı $E(M, F, G, P)$ **ilişik lif demetini** inşa ederiz. Burada

$$\Phi : (P \times F) \times G \to P \times F, \Phi\left((u, \xi), a\right) = (u, \xi)a = (ua, a^{-1}\xi)$$

dönüşümünü tanımlarsak G grubu $P \times F$ manifoldu üzerinde sağ etkidir. Böylece bölüm cümlesine $E = P \times F/G = P \times_G F$ dersek

$$E = \{(u, \xi)G : (u, \xi) \in P \times F\}$$

olur, burada $(u, \xi)G = \{(u, \xi)a : a \in G\}$ şeklinde denklik sınıfıdır.

$$\pi \mid_E : P \times_G F \to M,\ \pi \mid_E ((u, \xi)G) = \pi(u)$$

dönüşümü de E üzerinde projeksiyon denir. Ayrıca $\forall x \in M$ için $\pi^{-1}(x)$ cümlesine x üzerinde E nin bir lifi denir (Kobayashi 1996).

Sonuç 2.4.1.

$$\Phi : (P \times F) \times G \to P \times F, \Phi\left((u, \xi), a\right) = (u, \xi)a = (ua, a^{-1}\xi)$$

dönüşümünü tanımlarsak G grubu $P \times F$ manifoldu üzerinde sağ etki olduğu görülür. Çünkü,

H 1) G Lie grubu olduğundan $a \to a^{-1}$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir. G grubu P ve F manifoldları üzerine sağdan ve soldan etki olduğundan

$$(u, a) \to ua,\ \ (u, \xi) \to \xi u$$

dönüşümleri de diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla $((u,\xi),a) \to (ua, a^{-1}\xi)$ dönüşümü de diferensiyellenebilir olur. Ayrıca $e \in G$ (birim eleman) için

$$\begin{aligned} (u,\xi)e &= (ue, e^{-1}\xi) \\ &= (u,\xi) \end{aligned}$$

dir.

H 2) $(u,\xi) \in P \times F$ ve $a, b \in G$ için

$$\begin{aligned} (u,\xi)(ab) &= (uab, (ab)^{-1}\xi) \\ &= ((ua)b, b^{-1}(a^{-1}\xi)) \\ &= (ua, a^{-1}\xi)b \\ &= ((u,\xi)a)b \end{aligned}$$

elde edilir. $\pi : P \to M$ kanonik projeksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} &P \times F \to M \\ &(u,\xi) \to \pi(u) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı dönüşümden yararlanarak

$$\begin{aligned} \pi_E : E = P \times_G F &\to M \\ (u,\xi)G &\to \pi_E\left((u,\xi)G\right) = \pi(u) \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlanabilir. Burada π_E nin iyi tanımlı olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \Omega : F &\to E \\ \xi &\to \Omega\left(\xi\right) = (u,\xi)G \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlarsak Ω nın birebir olduğunu görürüz. Çünkü

$$\begin{aligned}\Omega(\xi_1)=\Omega(\xi_2) &\Longrightarrow (u,\xi_1)G=(u,\xi_2)G\\ &\Longrightarrow \exists a\in G\ni (u,\xi_1)\ =(u,\xi_2)\,a\\ &\Longrightarrow (u,\xi_1)=(ua,a^{-1}\xi_2)\\ &\Longrightarrow u=ua,\ \ \xi_1=a^{-1}\xi_2\\ &\overset{\text{serbest etki}}{\Longrightarrow} a=e \text{ ve } \xi_1=e^{-1}\xi_2=\xi_2\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $u,u_1\in P$ olmak üzere $\pi(u)=\pi(u_1)$ iken

$$\{\ (u,\xi)G:\xi\in F\}=\{\ (u_1,\xi)G:\xi\in F\}$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Böylece $x\in M$ için

$$\pi_E^{-1}(x)=\{\ (u,\xi)G:\pi(u)=x\}$$

cümlesinin elemanlarını bulmak için $\pi(u)=x$ olacak şekildeki P nin en az bir u elemanını alıp ξ de F de değiştirmelidir. Böylece $\pi(u)=x$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\Theta:E\to M\times F\\ &(u,\xi)G\to\Theta((u,\xi)G)=(x,\xi)\end{aligned}$$

dönüşümünün birebir ve örten olduğunu görürüz. $x\in M$ için $\pi_E^{-1}(x)$ cümlesi x üstündeki lif olarak adlandırılır ve F_x ile gösterilir. $P(M,G)$ asli lif demeti ve

$$\pi:P\to M$$

kanonik projeksiyon olmak üzere

$$\Psi:\pi^{-1}(U)\to U\times G,\ \Psi(u)=(\pi(u),\varphi(u))$$

olacak şekilde bir difeomorphisim var idi. Ayrıca φ dönüşümü

$$\varphi:\pi^{-1}(U)\to G,\forall u\in\pi^{-1}(U),\ a\in G$$

için $\varphi(ua) = \varphi(u)a$ idi. Böylece $\pi^{-1}(U)$ ile $U \times G$ nin difeomorfik olduğunu söylemiştik. Sonuç olarak $(x,a) \in G$ için $\Psi(u) = (x,a)$ olacak şekilde bir tek $u \in \pi^{-1}(U)$ vardır. $\pi(u) = x$ ve $\varphi(u) = e$ olmak üzere

$$\theta : \pi_E^{-1}(U) \to U \times F$$

dönüşümünü $\theta\left((u,\xi)G\right) = (x,\xi)$ olarak tanımlayalım.θ dönüşümü iyi tanımlı, birebir ve örtendir. Gerçekten, $\pi(u) = x$, $\varphi(u) = e$ ve $\pi(v) = y$, $\varphi(v) = e$ için

$$(u,\xi)G = (v,\eta)G$$

olsun. Bu durumda $\exists a \in G \ni (v,\eta) \ = (u,\xi)a$ ve

$$\begin{aligned}(v,\eta) &= (u,\xi)a \\ &= (ua, a^{-1}\xi)\end{aligned}$$

olur. Böylece $v = ua$ ve $\eta = a^{-1}\xi$ elde edilir. Diğer taraftan

$$e = \varphi(v) = \varphi(ua) = \varphi(u)a = ea$$

olduğundan $a = e$ dir. Dolayısıyla $u = v$ ve $\eta = \xi$ olur. Böylece $\pi(u) = x = y = \pi(v)$ ve

$$\theta\left((u,\xi)G\right) = (x,\xi) = (y,\eta) = \theta\left((v,\eta)G\right)$$

olurki bu da bize θ nın iyi tanımlı olduğunu söyler. Diğer taraftan $\pi(u) = x$, $\varphi(u) = e$ ve $\pi(v) = y$, $\varphi(v) = e$ için $\theta\left((u,\xi)G\right) = (x,\xi) = (y,\eta) = \theta\left((v,\eta)G\right)$ iken $x = y$ ve $\xi = \eta$ dır. $\pi(u) = x = y = \pi(v)$ olduğundan $v = ua$ olacak şekilde $a \in G$ vardır. Burada

$$e = \varphi(v) = \varphi(ua) = \varphi(u)a = ea$$

olduğundan $a = e$ ve $u = v$ dir. Sonuç olarak $(u,\xi)G = (v,\eta)G$ olduğundan θ birebir olur. Ayrıca her $(x,\xi) \in U \times F$ için $x \in U$ ve $\xi \in F$ dir. Benzer şekilde $\Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ difeomorfizim olduğundan $\pi(u) = x$, $\varphi(u) = e$ olacak şekilde bir tek $u \in \pi^{-1}(U)$ vardır.

$$\pi_E((u,\xi)G) = \pi(u) = x \in U$$

olduğundan $(u,\xi)G \in \pi_E^{-1}(U)$ dur. θ nın tanımından $\theta\left((u,\xi)G\right) = (x,\xi) \in U \times F$ dir. Böylece θ dönüşümü örten olur. Burada $P \times F$ nin diferesiyllenebilir manifold olduğunu biliyoruz. Teorem 2.3.1 den $E = P \times_G F$ de diferesiyellenebilir manifold olduğu görülür. Hatta

$$\theta_i : \pi_E^{-1}(U_i) \to U_i \times F$$

dersek $A = \left\{\left(\pi_E^{-1}(U_i), \theta_i\right)\right\}_{i\in\Lambda}$ ailesi $E = P \times_G F$ nin bir atlasıdır (Yılmaz 1999).

Tanım 2.4.4. (Cross section) $E(M,F,G,P)$ ilişik lif demeti olsun.

$$\pi\mid_E : E = P \times_G F \to M$$

bir projeksiyon olduğunu biliyoruz. $\pi\mid_E \circ\sigma = Id$ olacak şekilde $\sigma : M \to E$ dönüşüm varsa σ ya **cross section** denir. Burada σ cross section nın olması için gerek ve yeter koşul P demet uzayının $M \times G$ de aşikar demet olmasıdır (Kobayashi 1996).

Örnek 2.4.1. M, n boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $P \in M$ için $T_P(M)$ nin sıralı bir $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ tabanına P noktasındaki lineer çatı denir ve $u = (P; X_1, X_2, ..., X_n)$ ile gösterilir. P noktasındaki bütün lineer çatıların cümlesi $L(M)$ ile gösterilir. Böylece

$$L(M) = \{u = (P; X_1, X_2, ..., X_n) : P \in M\ ,\ \{X_1, X_2, ..., X_n\} \text{ cümlesi } T_P(M) \text{ de taban}\}$$

olur. Ayrıca projeksiyon fonksiyonu

$$\pi : L(M) \to M$$
$$u = (P; X_1, X_2, ..., X_n) \to \pi(u) = P$$

olarak tanımlanır. M manifoldunun bir atlası $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ olsun. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$haritası

$P \in U_\alpha$ noktasında $(x_1, x_2, ..., x_n)$ koordinat komşuluğu ile verilsin. Böylece $T_P(U_\alpha)$ nın doğal tabanı $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ olur. $X_1, X_2, ..., X_n \in T_P(U_\alpha)$ olduğundan $X_i = \sum\limits_{j=1}^{n} X_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$ yazılabilir. $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ ve $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ cümleleri $T_P U_\alpha$ da taban olduğundan $det\,[X_{ij}]_{n\times n} \neq 0$ dır. $L(M)$ de bir haritayı

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times GL(n, R) \\ u = (P; X_1, X_2, ..., X_n) &\to \psi_\alpha(u) = \left(\varphi_\alpha(x_1, x_2, ..., x_n), [X_{ij}]_{n\times n}\right) \end{aligned}$$

olarak tanımlarsak $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ cümlesinin $L(M)$ de bir atlas olduğunu görürüz. Böylece $L(M)$ cümlesinin diferensiyellenebilir manifold ve $boy_R L(M) = n^2 + n$ olduğu kolayca görülebilir. $GL(n, R)$ grubunun bir Lie grubu olduğunu biliyoruz.

$$u = (P; X_1, X_2, ..., X_n) \in L(M)$$

ve $a = [a_{ij}]_{n\times n} \in GL(n, R)$ için $Y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} X_i$

$$v = ua = (P; Y_1, Y_2, ..., Y_n)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \theta : L(M) \times GL(n, R) &\to L(M) \\ (u, a) &\to \theta\,(u, a) = ua \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlanırsa

E 1) $u = (P; X_1, X_2, ..., X_n)$ için

$$\begin{aligned} \theta_a(u) &= \theta(u, a) \\ &= ua \\ &= (P; Y_1, Y_2, ..., Y_n) \end{aligned}$$

dir. Burada $Y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} X_i$ olduğundan $Y_j (j = 1, 2, ..., n)$ ler diferensiyellenebilirdir. Böylece $\forall a \in GL(n, R)$ için θ_a diferensiyellenebilir dönüşümdür. $a \in GL(n, R)$ iken $a^{-1} = \frac{1}{\det a}\left[\widetilde{A}_{ij}\right]^T \in GL(n, R)$ olur. Benzer şekilde $\theta_{a^{-1}}$ de diferensiyellenebilir olduğu görülür. Sonuç olarak θ_a diffeomorfizim dir. Ayrıca $a = I_n = e$ alrsak

$\theta_e(u) = uI_n = u$ olduğunu görmek kolaydır.

E 2) Eğer $X = [X_1, X_2, ..., X_n]_{1\times n}$ matrisini alırsak

$$u = (P; X_1, X_2, ..., X_n) = (P; [X_1, X_2, ..., X_n]) = (P; X)$$

olduğunu gösterebiliriz. Böylece $a \in GL(n, R)$ için $ua = (P; Xa)$ olduğunu görmek kolaydır. $a, b \in GL(n, R)$ için

$$\begin{aligned} u(ab) &= (P; X(ab)) \\ &= (P; (Xa)b) \\ &= (P; Xa)b \\ &= ((P; X)a)b \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $GL(n, R)$ grubu $L(M)$ manifoldu üzerinde sağ etkidir.

ALD 1) $\exists u = (P; X_1, X_2, ..., X_n) \in L(M)$ ve $a = [a_{ji}]_{n\times n}$ için $R_a(u) = ua = u$ olsun. Bu durumda $ua = (P; Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ olmak üzere $Y_i = X_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$ $(i = 1, 2, ..., n)$ ve

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + (a_{ii} - 1)\, X_i + ... + a_{in}X_n = 0$$

elde edlir. $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ cümlesi $T_P(M)$ taban olduğundan $a_{i1} = a_{i2} = ... = a_{i(i-1)} = a_{i(i+1)} = ... = a_{in} = 0$, $a_{ii} = 1$ ve $a = [a_{ij}]_{n\times n} = I_n = e$ dir. Böylece $GL(n, R)$ grubu $L(M)$ manifoldu üzerinde sağdan serbest etkidir.

ALD 2) $L(M)$ manifoldu üzerinde denklik bağıntısını

$$\begin{aligned} \text{“}u &= (P; X_1, X_2, ..., X_n) \sim v = (Q; Y_1, Y_2, ..., Y_n) \Leftrightarrow P = Q \text{ ve} \\ \exists a &= [a_{ij}]_{n\times n} \in GL(n, R) \ni\ v = ua\text{”} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $u \in L(M)$ nin denklik sınıfı

$$[u] = \{ua : a \in GL(n, R)\}$$

olur. $P \in M$ için $u = (P; X_1, X_2, ..., X_n)$ ve $v = (P; Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ lineer çatılarını alalım. $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ve $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ cümleleri $T_P(M)$ de birer taban olduğundan $(X_1, X_2, ..., X_n) [a_{ij}]_{n \times n} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ olacak şekilde $a = [a_{ij}]_{n \times n} \in GL(n, R)$ vardır. Böylece $u \sim v$ ve $u = (P; X_1, X_2, ..., X_n)$ iken u nun denklik sınıfı

$$[u] = \{(P; X_1, X_2, ..., X_n) : \{X_1, X_2, ..., X_n\} \text{ cümlesi } T_P(M) \text{ de taban}\}$$

olur. Böylece $L(M)$ deki elemanların denklik sınıfının sadece M manifoldundaki noktalara bağlı olduğu görülür. Bu yüzden $[u]$ denklik sınıfı ile $P \in M$ noktaları arasında bire bir eşleme vardır. Sonuç olarak

$$M = L(M)/GL(n, R)$$

olur. Ayrıca $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$haritası $P = (p_1, p_2, ..., p_n) \in U_\alpha$ noktasında $(x_1, x_2, ..., x_n)$ koordinat komşuluğu ile verildiğinde $x_i(P) = p_i$ dir. Böylece

$$\begin{gathered} \pi : L(M) \to M \\ u = (P; X_1, X_2, ..., X_n) \to \pi(u) = P \end{gathered}$$

dönüşümü

$$\pi(x_1, x_2, ..., x_n, X_{11}, X_{12}, ..., X_{nn}) = (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2.4.1}$$

şeklinde de verilebilir. (2.4.1) den π nin diferensiyellenebilir dönüşüm olduğu açıktır.

ALD 3) $\forall P \in M$ noktası için bir $U \subset M$ komşuluğunu düşünelim. $P \in U$ noktası $(x_1, x_2, ..., x_n)$ koordinat komşuluğu ile verilsin. Böylece $T_P(U)$ nın doğal tabanı $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ olur. $X_1, X_2, ..., X_n \in T_P(U)$ olduğundan $X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$ yazılabilir. Ψ dönüşümünü

$$\begin{gathered} \Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times GL(n, R),\ \Psi(u) = (\pi(u), \varphi(u)) \\ u = (P; X_1, X_2, ..., X_n) \to \Psi(u) = (\pi(u), \varphi(u)) = \left(\pi(u), [X_{ij}]_{n \times n}\right) \end{gathered}$$

şeklinde tanımlarsak $\varphi(u) = [X_{ij}]_{n \times n}$ olur. Böylece $\Psi(x_1, x_2, ..., x_n, X_{11}, X_{12}, ..., X_{nn}) = (x_1, x_2, ..., x_n, [X_{ij}]_{n \times n})$ olduğundan diferensiyellenebilir olduğu görülür. Ayrıca $u =$

$(P;X_1,X_2,...,X_n)$, $v=(Q;Y_1,Y_2,...,Y_n)\in\pi^{-1}(U)$ için $\Psi(u)=\Psi(v)$ iken

$$\left(\pi(u),[X_{ij}]_{n\times n}\right)=\left(\pi(v),[Y_{ij}]_{n\times n}\right)$$

olur. Böylece $\pi(u)=P=Q=\pi(v)$ ve $[X_{ij}]_{n\times n}=[Y_{ij}]_{n\times n}$ dir. Bu iki matris eşit olduğundan $X_{ij}=Y_{ij}$ ve $X_i=\sum\limits_{j=1}^{n}X_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum\limits_{j=1}^{n}Y_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}=Y_i$ elde edilir. Böylece $u=(P;X_1,X_2,...,X_n)=(Q;Y_1,Y_2,...,Y_n)=v$ ve Ψ birebir dir. Ψ nin örtenliği de kolayca söylenebilir. Dolayısıyla Ψ^{-1} vardır ve $X_i=\sum\limits_{j=1}^{n}X_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\Psi^{-1}:U\times GL(n,R)\to\pi^{-1}(U)\\&\Psi^{-1}(Q,[X_{ij}]_{n\times n})=(Q;X_1,X_2,...,X_n)\end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşümdür. Burada X_{ij} diferensiyellenebilir ise $X_i=\sum\limits_{j=1}^{n}X_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ diferen siyellenebilir vektör alanıdır. Böylece Ψ^{-1}diferensiyellenebilir bir dönişümdür. Böylece Ψ bir difeomorfizim ve $\pi^{-1}(U)$ ile $U\times GL(n,R)$ de difeomorfiktir. Diğer taraftan $u=(P;X_1,X_2,...,X_n)$ ve $a=[a_{ki}]_{n\times n}$ için $ua=(P;Y_1,Y_2,...,Y_n)$ ve $Y_i=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}X_k$ idi. $X_k=\sum\limits_{j=1}^{n}X_{kj}\frac{\partial}{\partial x_j}$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}Y_i&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}X_k\\&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n}X_{kj}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}X_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\varphi(ua)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}X_{ik}a_{kj}\right]_{n\times n}$ ve $\varphi(u)=[X_{kj}]_{n\times n}$ olduğundan $\varphi(ua)=\varphi(u)a=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}X_{ik}a_{kj}\right]_{n\times n}$ olduğunu görmek kolaydır. Bu işlemlerden sonra $L(M)$ $(M,GL(n,R))$ nin asli lif demeti olduğunu söyleyebiliriz. Burada $L(M)$ ye M manifoldu üzerinde **lineer çatının demeti** diyeceğiz.

Ayrıca $a = [a_{ij}]_{n\times n} \in GL(n,R)$ ve $\xi^T = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n$ için

$$\rho : GL(n,R) \times R^n \to R^n$$

$$(a,\xi) \to \rho(a,\xi) = a\xi = [a_{ij}]_{n\times n} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \in R^n$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlarsak $GL(n,R)$ grubunun R^n üzerine soldan etki olduğunu görmek kolaydır. Böylece $E = P \times_G F = L(M) \times_{GL(n,R)} R^n$ olmak üzere

$$L(M) \times R^n(M, R^n, GL(n,R), L(M))$$

ilişik lif demetidir.Burada

$$\Phi : (L(M) \times R^n) \times GL(n,R) \to L(M) \times R^n, \Phi\left((u,\xi), a\right) = (u,\xi)a = (ua, a^{-1}\xi)$$

dönüşümünü tanımlarsak $GL(n,R)$ grubu $L(M) \times R^n$ manifoldu üzerinde sağdan etkidir.

$$\pi\mid_E : E = L(M) \times_{GL(n,R)} R^n \to M,\ \pi\mid_E ((u,\xi)GL(n,R)) = \pi(u)$$

projeksiyon olmak üzere $\forall P \in M$ için $\pi \mid_E^{-1} (P)$ lifini hesaplıyalım. Her $P \in M$ noktasını $P \in U$ koordinat komşuluğu ile verelim. U nun koordinat fonksiyonları $(x_1, x_2, ..., x_n)$ olsun. T_PM teğet uzayının doğal tabanı

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

olur. $\pi^{-1}(U)$ ile $U \times G$ cümleleri $\Psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$ dönüşümü altında difeomorfik olduğundan $\Psi(u) = (\pi(u), \varphi(u)) = (P, e = I_n)$ olacak şekilde bir tek $u \in L(M)$ vardır. $\pi(u) = P$ iken $T_P(M)$ nin bir $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ bazı için $u = (P; X_1, X_2, ..., X_n)$

olarak yazıyorduk. Burada $X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ olsun. Diğer taraftan

$$\varphi(u) = [X_{ij}]_{n \times n} = I_n$$

olduğundan

$$X_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

olur. Böylece $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}, X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2}, ..., X_n = \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ ve $u = (P; \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n})$ olur. Yukarıda yaptığımız işlemler altında $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n$ için

$$\begin{aligned} &\alpha : \pi_E^{-1}(P) \to T_P(M) \\ &(u,\xi)GL(n,R) \to \alpha\left((u,\xi)GL(n,R)\right) = \xi_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_P + \xi_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_P + ... + \xi_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_P \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. α dönüşümü iyi tanımlı birebir ve örtendir. Kabul edelimki $(u,\xi)GL(n,R) = (u,\eta)GL(n,R)$ olsun. Bu durumda

$$\exists a \in GL(n,R) \ni (u,\eta) = (u,\xi)a$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} (u,\eta) &= (u,\xi)a \\ &= (ua, a^{-1}\xi) \end{aligned}$$

ve $u = ua$, $\eta = a^{-1}\xi$ olur. $GL(n,R)$ grubu $L(M)$ manifoldu üzerinde soldan serbest etki olduğundan $R_a(u) = ua = u$ iken $a = e$ dir. Böylece $\eta = \xi$ ve $\alpha\left((u,\xi)GL(n,R)\right) = \alpha\left((u,\eta)GL(n,R)\right)$ olduğunu görmek kolaydır. Yani

$$\alpha : \pi_E^{-1}(P) \to T_P(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Benzer şekilde

$$\alpha\left((u,\xi)GL(n,R)\right) = \alpha\left((u,\eta)GL(n,R)\right)$$

olsun.

$$\alpha\left((u,\xi)GL(n,R)\right) = X = \xi_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \xi_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

ve

$$\alpha\left((u,\eta)GL(n,R)\right) = \eta_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \eta_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

dersek

$$\xi_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \xi_n\frac{\partial}{\partial x_n} = \eta_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \eta_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

olur. $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ lineer bağımsız olduğundan $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2, ..., \xi_n = \eta_n$ ve $\xi = \eta$ dır. Böylece

$$(u,\xi)GL(n,R) = (u,\eta)GL(n,R)$$

olur. Yani α dönüşümü birebirdir. Ayrıca her

$$X = \xi_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_P + \xi_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_P + ... + \xi_n\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_P \in T_P(M)$$

için $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n$ yazabiliriz. Böylece $\alpha\left((u,\xi)GL(n,R)\right) = X$ olur. Bu da bize α nın örten olduğunu söyler. Bu eşlemeden dolayı $\pi_E^{-1}(P) = T_P(M)$ olduğunu düşünebiliriz. Böylece standart lifi R^n olan $L(M)$ ye ilişik lif demetinin $T(M)$ olduğu kolayca görülebilir (Yılmaz 1999).

Sonuç 2.4.1. $P \in M$, $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ cümlesi $T_P(M)$ de taban olmak üzere $u = (P; X_1, X_2, ..., X_n) \in L(M)$ idi. Burada $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ tabanını Gram-Schmidt metodu ile ortonormal hale getimek için

$$\begin{aligned}
E_1 &= X_1 \\
E_2 &= X_2 - \frac{\langle X_2, E_1\rangle}{\|E_1\|^2}E_1 = X_2 - \lambda_{21}E_1 \\
E_3 &= X_3 - \frac{\langle X_3, E_1\rangle}{\|E_1\|^2}E_1 - \frac{\langle X_3, E_2\rangle}{\|E_2\|^2}E_2 = X_3 - \lambda_{31}E_1 - \lambda_{32}E_2 \\
&\ \ ... \\
E_n &= X_n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\langle X_n, E_k\rangle}{\|E_k\|^2}E_k = X_n - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{nk}E_k
\end{aligned}$$

ve

$$X_1' = \frac{E_1}{\|E_1\|^2}, X_2' = \frac{E_2}{\|E_2\|^2}, ..., X_n' = \frac{E_n}{\|E_n\|^2}$$

işlemlerini yapmalıyız. Yukarıdaki eşitlikleri

$$E_1 = X_1,\ E_2 = X_2 - \frac{\langle X_2, E_1\rangle}{\|E_1\|^2} E_1 = -\lambda_{21} X_1 + X_2$$

ve

$$\begin{aligned} E_3 &= X_3 - \frac{\langle X_3, E_1\rangle}{\|E_1\|^2} E_1 - \frac{\langle X_3, E_2\rangle}{\|E_2\|^2} E_2 \\ &= -\lambda_{31} X_1 - \lambda_{32} E_2 + X_3 \\ &= -\lambda_{31} X_1 - \lambda_{32}\left(-\lambda_{21} X_1 + X_2\right) + X_3 \\ &= \left(\lambda_{32}\lambda_{21} - \lambda_{31}\right) X_1 - \lambda_{32} X_2 + X_3 \end{aligned}$$

şeklinde düşünüp işlemleri devam ettirdiğimizde

$$E_k = \mu_{k1} X_1 + \mu_{k2} X_2 + ... + \mu_{k(k-1)} X_{k-1} + X_k\ ,\ (k = 1, 2, ..., n)$$

eşitliklerini elde ederiz, burada

$$\mu_{ki} = \mu_{ki}(\lambda_{k1,...,}\lambda_{k(k-1,)}\lambda_{(k-1)1,...,}\lambda_{(k-1)(k-2)}, ..., \lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{21})$$

katsayıları λ_{nk} ların çarpım ve toplamlarının fonksiyonlarıdır. $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ tabanını $\{X_1', X_2', ..., X_n'\}$ ortonormal tabanına dönüştüren matrise D_u dersek bu matrisi

$$D_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|E_1\|^2} & \frac{\mu_{21}}{\|E_2\|^2} & \frac{\mu_{31}}{\|E_3\|^2} & ... & \frac{\mu_{n1}}{\|E_n\|^2} \\ 0 & \frac{1}{\|E_2\|^2} & \frac{\mu_{32}}{\|E_3\|^2} & ... & \frac{\mu_{n2}}{\|E_n\|^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\|E_3\|^2} & ... & \frac{\mu_{n3}}{\|E_n\|^2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \frac{1}{\|E_n\|^2} \end{bmatrix} \qquad (2.4.2)$$

olarak elde ederiz. Burada $[X_1, X_2, ..., X_n]\, D_u$ çarpımını hesaplarsak

$$
\begin{aligned}
[X_1, X_2, ..., X_n]\, D_u &= [X_1, X_2, ..., X_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{\|E_1\|^2} & \frac{\mu_{21}}{\|E_2\|^2} & \frac{\mu_{31}}{\|E_3\|^2} & ... & \frac{\mu_{n1}}{\|E_n\|^2} \\ 0 & \dfrac{1}{\|E_2\|^2} & \frac{\mu_{32}}{\|E_3\|^2} & ... & \frac{\mu_{n2}}{\|E_n\|^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\|E_3\|^2} & ... & \frac{\mu_{n3}}{\|E_n\|^2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \dfrac{1}{\|E_n\|^2} \end{bmatrix} \\
&= [X_1', X_2', ..., X_n']
\end{aligned}
$$

olur. Bu işlemler altında $u = (P; X_1, X_2, ..., X_n) \in L(M)$ ve $a \in O(n)$ için

$$ua = (P; X D_u\, a D_u^{-1})$$

olarak tanımlayalım. $\theta : L(M) \times O(n) \to L(M)$

$$
\begin{aligned}
\theta : L(M) \times O(n) &\to L(M) \\
(u, a) &\to \theta(u, a) = ua
\end{aligned}
$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlarsak $O(n)$ ortogonal grubunun $L(M)$ manifoldu üzerinde sağ etki olduğunu görürüz. Gerçekten
H 1) $\lambda_{nk} = \dfrac{\langle X_n, E_k \rangle}{\|E_k\|^2}$ olduğundan diferensiyellenebilirdir. μ_{ki} ler λ_{nk} lerin çarpımları ve toplamları şeklinde fonksiyonlar olduğundan μ_{ki} de diferensiyellenebilirdir. Böylece D_u nun diferensiyellenebilir operatör olduğu (2.4.2) den açıktır. Ayrıca

$$detD_u = \frac{1}{\|E_1\|^2 \|E_2\|^2 ... \|E_n\|^2} \neq 0$$

olduğundan D_u^{-1} vardır ve benzer şekilde diferensiyellenebilir operatör olduğunu söyleyebiliriz. Sonuç olarak her $a \in O(n)$ için

$$
\begin{aligned}
\theta_a(u) &= \theta(u, a) \\
&= ua \\
&= (P; X D_u\, a D_u^{-1})
\end{aligned}
$$

olduğundan θ_a diferensiyellenebilir olur. Diğer taraftan

$$\theta_e(u) = (P; XD_u\, eD_u^{-1}) = (P; X) = u$$

elde edilir.

H 2)

$$\begin{aligned} u(ab) &= (P; XD_u\, abD_u^{-1}) \\ &= (P; \left(XD_u\, aD_u^{-1}\right) D_u bD_u^{-1}) \\ &= (P; \left(XD_u\, aD_u^{-1}\right))b \\ &= ((P; X)a)b \end{aligned}$$

olur. Burada $E = P \times_{GL(n,R)} R^n = P \times_{O(n)} R^n$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece yapı grubu $GL(n, R)$ den $O(n)$ ortogonal grubuna indirgenebilir (Walschop 2004).

2.5 Vektör Demeti Olarak Yönlendirilebilme ve Dağılım

Tanım 2.5.1. $E(M, R^n, GL(n, R), L(M))$ ilişik lif demeti verilsin. Şayet $L(M)$ üze rindeki $GL(n, R)$ yapı grubu $GL^+(n, R)$ indirgenebiliyorsa R^n lifi ile birlikte M mani foldu üzerindeki $E = T(M)$ manifoldu **vektör demeti olarak yönlendirilebilir** dir denir. Sonuç.2.4.1 den $GL(n, R)$ yapı grubunun $O(n)$ ortogonal grubuna indirgendiğini biliyoruz. Bu yüzden vektör demeti olarak yönlendirmeyi; $L(M)$ üzerin deki $O(n)$ ortogonal yapı grubunu $SO(n)$ grubuna indirgenebiliyorsa R^n lifi ile birlikte M manifoldu üzerindeki $E = T(M)$ manifoldu vektör demeti olarak yönlendirilebilirdir şeklinde de yapabiliriz (Blair 1976).

Teorem 2.5.1. $E(M, R^n, GL(n, R), L(M))$ ilişik lif demetinde $T(M)$ teğet demeti (tangent bundle) vektör demeti olarak yönlendirilebilirdir ancak ve ancak M cümlesi manifold olarak yönlendirilebilirdir (Blair 1976).

İspat. Kabul edelimki $T(M)$ teğet demeti vektör demeti olarak yönlendirilebilir olsun. M diferensiyellenebilir manifold olduğundan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ şeklinde bir atlası vardır. $\alpha, \beta \in \Lambda$ için $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) koordinat komşuluklarını alalım. Bu koordinat komşuluklarının $P \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasındaki koordinat fonksiyonları sırasıyla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $(y_1, y_2, ..., y_n)$ olsun. Böylece

$$\varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset R^n, \ \varphi_\beta(U_\beta) = V_\beta \subset R^n$$

olmak üzere $P_1 = \varphi_\alpha(P) \in V_\alpha$ noktasındaki teğet uzayın standart bazı

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

ve $P_2 = \varphi_\beta(P) \in V_\beta$ noktasındaki teğet uzayın standart tabanı da

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$$

olur.

$$E_{iP} = (\varphi_\alpha)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\,|_P\right) \text{ ve } \widetilde{E}_{iP} = (\varphi_\beta)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\,|_P\right)$$

dersek $\{E_{1P}, E_{2P}, ..., E_{nP}\}$ ile $\left\{\widetilde{E}_{1P}, \widetilde{E}_{2P}, ..., \widetilde{E}_{nP}\right\}$ cümleleri $T_P(M)$ nin birer tabanıdır.

$$u = (P; E_{1P}, E_{2P}, ..., E_{nP}),\ v = \left(P; \widetilde{E}_{1P}, \widetilde{E}_{2P}, ..., \widetilde{E}_{nP}\right) \in L(M)$$

alırsak TM vektör demeti olarak yönlendirilebilir olduğundan $\exists a = [a_{ij}] \in GL^+(n, R)$ için $v = ua$ dır. Böylece

$$\widetilde{E}_{iP} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} E_{jP}$$

olur. Diğer taraftan

$$J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) = [a_{ij}] = a$$

olduğu görülür. Bunu $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ için yapabiliriz. Bu durumda bu atlas uygun yönlendirilmiştir. Teorem 2.2.1 den M manifoldunun yönlendirilebilir olduğu görülür. M cümlesi manifold olarak yönlendirilebilir olduğunda yukarıdaki işlemlerin tersine gidildiğinde $T(M)$ teğet demeti vektör demeti olarak yönlendirilebilir olduğu görülür.

Tanım 2.5.2.(Dağılma) $m = (n+k)$-boyutlu M manifoldu verilsin. $\forall P \in M$ noktasında

$$\Delta : M \longrightarrow \bigcup_{q \in M} T_q M$$
$$P \longrightarrow \Delta(P) = \Delta_P$$

olmak üzere $\triangle_P$ cümlesi $T_P M$ nin 'n' boyutlu alt uzayı olsun. Üstelik $\forall P \in M$ noktasının bir U komşuluğunda $\forall Q \in U$ için $\triangle_Q$ nun bir bazı

$$\left\{ (X_1)_Q \, , (X_2)_Q \, , (X_3)_Q \, , ..., (X_n)_Q \right\}$$

olacak şekilde C^∞ vektör alanları $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ var olsun. Bu durumda Δ ya M manifoldunun $n-$**düzlem dağılması(distributionu)** denir (Boothby 1986).

Tanım 2.5.3.(İntegral Altmanifold) $m-$ M manifoldunun C^∞ $n-$düzlem distributionu $\triangle$ olsun. N manifoldu M manifoldunun bağlantılı C^∞alt manifoldu olmak üzere $\forall Q \in U$ için $T_P N \subset \triangle_Q$ oluyorsa N manifolduna $n-$düzlem distributionu $\triangle$ nın **integral altmanifoldu** denir (Boothby 1986).

Teorem 2.5.2. $m = (n+k)$-boyutlu M manifoldu verilsin. Δ da M manifoldunun $n-$düzlem distributionu olsun. Bu durumada TM tanjant demetinin yapı grubu $GL(m,R)$ den $G = GL(n,R) \times GL(k,R)$ alt grubuna indirgenebilir (Blair 1976).

İspat: $A \in GL(n,R), B \in GL(k,R)$ olmak üzere $a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ ve

$$u = (P; X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+k}) \in L(M)$$

için

$$ua = (P; [X_1, X_2, ..., X_n]\, A, [X_{n+1}, ..., X_{n+k}]\, B\,)$$

olarak tanımlayıp Örnek.2.4.1 deki işlemelerin benzerlerini yaparsak, standart lifi R^n

olan $L(M)$ ye ilişik lif demetinin $T(M)$ olduğunu görülebilir. Burada

$$\Psi : GL(n,R)\times GL(k,R)\to GL(m,R)$$
$$(A,B)\to\Psi(A,B)=\begin{bmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$$

şeklinde bir dönüşüm tnımlarsak Ψ nin grup monomorfizmi olduğunu görmek kolaydır. Böylece M manifoldunun yapı grubunu $GL(n,R)\times GL(k,R)$ olarak görebiliriz.

2.6 Hodge Yıldız Operatörü

Tanım 2.6.1.(Hodge Yıldız Operatörü) $(V,\oplus,F,+,.,\otimes)$ n-boyutlu vektör uzayı ve bu uzayda 'g' de metrik olsun. Bu uzayın ortogonal bir tabanını $\{\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n\}$ olarak alalım. Dolayısıyla Λ^sV uzayının bir tabanı

$$\left\{\sigma^{i_1}\wedge\sigma^{i_2}\wedge...\wedge\sigma^{i_s} : 1\leq i_1\langle i_2\langle...\langle i_s\leq n\right\}$$

dir (Boothby 1986). Λ^sV de bir 'g_s' metriği alalım. Biliyoruzki $boy\Lambda^sV=\begin{pmatrix} n\\ s\end{pmatrix}$ dir. Şimdi sabit bir $\lambda\in\Lambda^pV$ için

$$\begin{aligned} h_\lambda \ &: \ \Lambda^{n-p}V\longrightarrow\Lambda^nV\\ &: \qquad \mu\longrightarrow h_\lambda(\mu)=\lambda\wedge\mu\end{aligned}$$

olarak tanımlıyalım. $\sigma=\sigma^1\wedge\sigma^2\wedge...\wedge\sigma^n$ dersek

$$\lambda\wedge\mu=g_p(*\lambda,\mu)\sigma \tag{2.6.1}$$

eşitliğini sağlayan bir $*\lambda\in\Lambda^{n-p}V$ elemanı vardır. Burada

$$*:\Lambda^pV\longrightarrow\Lambda^{n-p}V$$
$$\lambda\longrightarrow *\lambda$$

dönüşümü lineer bir dönüşümdür. Bu yıldız dönüşümündeki '$*$' operatörüne Hodge yıldız operatörü denir. Bu operatör lineer olduğundan $\lambda = \sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p}$ olarak alıp incelememiz yeterli olacaktır. Kabul edelimki $*\lambda = c\sigma^{i_{p+1}} \wedge \sigma^{ip+2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n}$ olsun. (2.6.1) eşitliği $\forall \mu \in \Lambda^{n-p}V$ için sağlandığından özel olarak $\mu = \sigma^{i_{p+1}} \wedge \sigma^{i_{p+2}} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n}$ alırsak

$$\begin{aligned}
\lambda \wedge \mu &= (\sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p}) \wedge (\sigma^{i_{p+1}} \wedge \sigma^{ip+2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n}) \\
&= g(c\sigma^{i_{p+1}} \wedge \sigma^{ip+2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n}, \sigma^{i_{p+1}} \wedge \sigma^{ip+2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n})\sigma \\
&= cg(\sigma^{i_{p+1}} \wedge \sigma^{i_{p+2}} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n}, \sigma^{i_{p+1}} \wedge \sigma^{ip+2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n})\sigma \\
&= c\sigma
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lambda \wedge \mu &= (\sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p}) \wedge (\sigma^{i_{p+1}} \wedge \sigma^{ip+2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n}) \\
&= sgn(\theta)\sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge ... \wedge \sigma^n \\
&= sgn(\theta)\,\sigma
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşırız. Böylece $c\sigma = sgn(\theta)\,\sigma$ eşitliğinden $c = sgn(\theta)$ eşitliğine ulaşırız. Dolayısıyla

$$*\lambda = sgn(\theta)\sigma^{i_{p+1}} \wedge \sigma^{i_{p+2}} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n} \tag{2.6.2}$$

olarak bulunur. Şimdi $*(*\lambda)$ nın neye eşit olduğunu araştıralım.

$$\theta' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-p & n-p+1 & ... & n \\ i_{p+1} & i_{p+2} & ... & i_n & i_1 & ... & i_p \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$*(*\lambda) = sgn(\theta')\sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p} \tag{2.6.3}$$

olur. Burada $\lambda = \sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p}$ ve $\mu = \sigma^{i_{p+1}} \wedge \sigma^{ip+2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n}$ dersek

$$\lambda \wedge \mu = (-1)^{p(n-p)}\mu \wedge \lambda$$

dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} *(*\lambda) \wedge (*\lambda) &= (-1)^{p(n-p)}(*\lambda) \wedge *(*\lambda) \\ \sigma^{i_1} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p} \wedge \sigma^{i_{p+1}} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n} &= (-1)^{p(n-p)}\sigma^{i_{p+1}} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n} \wedge \sigma^{i_1} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p} \\ sgn(\theta)\sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge ... \wedge \sigma^n &= (-1)^{p(n-p)} sgn(\theta')\sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge ... \wedge \sigma^n \end{aligned}$$

dir. Son eşitlikden $sgn(\theta') = (-1)^{p(n-p)} sgn(\theta)$ elde edilir. Bunu (2.6.3) de yerine yazarsak $*(*\lambda) = (-1)^{p(n-p)} sgn(\theta)\sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_p}$ olur. (2.6.2) den

$$*(*\lambda) = (-1)^{p(n-p)}\lambda \tag{2.6.4}$$

sonucuna ulaşırız . Ayrıca tanımdan $\forall\lambda, \mu \in \Lambda^p V$ olmak üzere

$$\lambda \wedge (*\mu) = \mu \wedge (*\lambda)$$

olduğunu görmek kolaydır (Aubin 2001).

Sonuç 2.6.1. $\forall\lambda \in \Lambda^p V$ ve $\forall\phi \in \Lambda^{n-p} V$ için $\lambda \wedge \phi = g_p(*\lambda, \phi)\sigma$ ve $\phi \wedge \lambda = g_{n-p}(\lambda, *\phi)\sigma$ dir. Böylece

$$g_p(*\lambda, \phi) = (-1)^{p(n-p)}\, g_{n-p}(\lambda, *\phi)$$

olduğunu görmek kolaydır.

Sonuç 2.6.2. $(V, \oplus, F, +, ., \otimes)$ $n+1$-boyutlu vektör uzayı olsun ve bu uzaya bir 'g' metriği koyalım. Bu uzayın ortogonal bir bazını $\{\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^{n+1}\}$ alalım. Böylece $\Lambda^n V$ uzayının bir bazı $\{\sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n} : 1 \leq i_1 \langle i_2 \langle ... \langle i_s \leq n\}$ ve

$$boy \Lambda^n V = \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix} = n+1$$

olur. Burada Hodge yıldız operatörü

$$* : \Lambda^n V \to \Lambda^n V$$

şeklinde bir dönüşümdür. $\sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n} \in \Lambda^n V$ için $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n & n+1 \\ i_1 & i_2 & ... & i_n & i_{n+1} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$* \left(\sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n}\right) = sgn(\theta) \sigma^{i_{n+1}}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ji} \sigma^i \in V$ vektörleri için

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n = \sum_{i=1}^{n+1} a_{1i_1} a_{2i_2} ... a_{ni_n} \sigma^{i_1} \wedge \sigma^{i_2} \wedge ... \wedge \sigma^{i_n}$$

olur ve

$$* (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n) = \sum_{\theta \in S_{n+1}} sgn(\theta) a_{1\theta(1)} a_{2\theta(2)} ... a_{n\theta(n)} \; \sigma^{\theta(n+1)}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan $\sum_{i=1}^{n+1} \det(\sigma^i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \sigma^i$ değerini hesaplarsak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \det(\sigma^i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \sigma^i &= \sum_{i=1}^{n+1} \det(\sigma^i, \sum_{i_1=1}^{n+1} a_{1i_1} \sigma^{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n+1} a_{2i_2} \sigma^{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^{n+1} a_{ni_n} \sigma^{i_n}) \sigma^i \\ &= \sum_{i, i_1, ..., i_n = 1}^{n+1} a_{1i_1} a_{2i_2} ... a_{ni_n} \det(\sigma^i, \sigma^{i_1}, \sigma^{i_2}, ..., \sigma^{i_n}) \sigma^i \end{aligned}$$

olur. Burada $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n & n+1 \\ i_1 & i_2 & ... & i_n & i \end{pmatrix}$ dersek

$$\sum_{i=1}^{n+1} \det(\sigma^i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \sigma^i = \sum_{\theta \in S_{n+1}} sgn(\theta) a_{1\theta(1)} a_{2\theta(2)} ... a_{n\theta(n)} \; \sigma^{\theta(n+1)}$$

olur. Böylece

$$* (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n+1} \det(\sigma^i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \sigma^i$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin bir sonucu olarak

$$*(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n) \perp \alpha_j \ \ (j = 1, 2, ..., n)$$

diyebiliriz. Çünkü

$$\begin{aligned} g_1(*(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n), \alpha_j) &= g_1\left(\sum_{i=1}^{n+1} \det(\sigma^i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\sigma^i, \sum_{k=1}^{n+1} a_{jk}\sigma^k\right) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n+1} a_{jk} \det(\sigma^i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) g_1\left(\sigma^i, \sigma^k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_{ji} \det(\sigma^i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \\ &= \det(\sum_{i=1}^{n+1} a_{ji}\sigma^i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \\ &= \det(\alpha_j, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.Benzer şekilde

$$g_1(*(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n), \beta) = \det(\beta, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

eşitliğini de kolayca ispatlayabiliriz.

Sonuç 2.6.3. V nin dual uzayı V^* ve V^* ın dual tabanı

$$\left\{\left(\sigma^1\right)^*, \left(\sigma^2\right)^*, ..., \left(\sigma^{n+1}\right)^*\right\}$$

olsun. Bu bölümde notasyon olarak şapkalı terimi yok sayacağız. V vektör uzayında

$$\Phi = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{n+1}\}$$

cümlesi lineer bağımsız olmak üzere, $U = sp\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{n+1}\}$ dersek $(U, \oplus, F, +, ., \otimes)$ altılısı V nin bir alt vektör uzayıdır. U nun keyfi bir bazı

$$\Psi = \left\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_n\right\}$$

olsun. Bu durumda

$$\omega_i = * \left(\left(\sigma^i\right)^*\right) \left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_n\right)$$

ve

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i \sigma^i$$

olarak tanımlayalım. Burada

$$\begin{aligned} \theta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & i-1 & i & i+1 & ... & n+1 \\ i & 1 & 2 & & i-2 & i-1 & i+1 & ... & n+1 \end{pmatrix} \\ &= (1,\, i,\, i-1, ..., 3, 2) \\ &= (1,2)(1,3)(1,4)...(1,i-1)(1,i) \end{aligned}$$

olarak tanımlarsak

$$\begin{aligned} * \left(\left(\sigma^i\right)^*\right) &= sgn\theta \left(\left(\sigma^1\right)^* \wedge ... \wedge \left(\sigma^{i-1}\right)^* \wedge \left(\overset{\wedge}{\sigma^i}\right)^* \wedge \left(\sigma^{i+1}\right)^* \wedge ... \wedge \left(\sigma^{n+1}\right)^*\right) \\ &= (-1)^{i-1} \left(\left(\sigma^1\right)^* \wedge ... \wedge \left(\sigma^{i-1}\right)^* \wedge \left(\overset{\wedge}{\sigma^i}\right)^* \wedge \left(\sigma^{i+1}\right)^* \wedge ... \wedge \left(\sigma^{n+1}\right)^*\right) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}\sigma^i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \omega'_i &= * \left(\left(\sigma^i\right)^*\right) \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \overset{\wedge}{\alpha_i}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{n+1}\right) \\ &= (-1)^{i-1}(\left(\sigma^1\right)^* \wedge ... \wedge \left(\overset{\wedge}{\sigma^i}\right)^* \wedge ... \wedge \left(\sigma^{n+1}\right)^*)(\alpha_1, ..., \overset{\wedge}{\alpha_i}, ..., \alpha_{n+1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada şapkalı terim olmayan terimdir. Böylece

$$S'_n = \left\{ \theta' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & i-1 & i & i+1 & ... & n+1 \\ \theta'(1) & \theta'(2) & \theta'(3) & ... & \theta'(i-1) & i & \theta'(i+1) & ... & \theta'(n+1) \end{pmatrix} \right\}$$

dersek

$$\omega_i' = (-1)^{i-1} \sum_{\theta' \in S_n'} sgn\theta'. \left\{ \begin{array}{l} \left(\left(\sigma^{\theta'(1)} \right)^* (\alpha_1) \right) ... \left(\left(\sigma^{\theta'(i-1)} \right)^* (\alpha_{i-1}) \right). \\ \left(\left(\sigma^{\theta'(i+1)} \right)^* (\alpha_{i+1}) \right) ... \left(\left(\sigma^{\theta'(n+1)} \right)^* (\alpha_{n+1}) \right) \end{array} \right\}$$

ve

$$\begin{aligned}
\omega' &= \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i' \sigma^i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \left((-1)^{i-1} \sum_{\theta' \in S_n'} sgn\theta'. \left\{ \begin{array}{l} \left(\left(\sigma^{\theta'(1)} \right)^* (\alpha_1) \right) ... \left(\left(\sigma^{\theta'(i-1)} \right)^* (\alpha_{i-1}) \right). \\ \left(\left(\sigma^{\theta'(i+1)} \right)^* (\alpha_{i+1}) \right) ... \left(\left(\sigma^{\theta'(n+1)} \right)^* (\alpha_{n+1}) \right) \end{array} \right\} \right) \sigma^i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \left(\sum_{\theta' \in S_n'} sgn\theta'. \left\{ \begin{array}{l} \left(a_{\theta'(1)1} \right) ... \left(a_{\theta'(i-1)(i-1)} \right) \\ \left(a_{\theta'(i+1)(i+1)} \right) ... \left(a_{\theta'(n+1)(n+1)} \right) \end{array} \right\} \sigma^i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \det(\sigma^i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{n+1}) \sigma^i \\
&= * \left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1} \wedge ... \wedge \alpha_{n+1} \right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer taraftan Φ bazından Ψ bazına geçiş matrisine A dersek $* \left((\sigma^i)^* \right) n-$formu alterne olduğundam

$$\begin{aligned}
\omega_i' &= * \left((\sigma^i)^* \right) \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \overset{\wedge}{\alpha_i}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{n+1} \right) \\
&= (\det A) * \left((\sigma^i)^* \right) \left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_n \right) \\
&= (\det A) \, \omega_i
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\omega' &= \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i' \sigma^i \\
&= \det A \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i \sigma^i \\
&= (\det A) \, \omega
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
(\det A)\ \omega &= *(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1} \wedge ... \wedge \alpha_{n+1}) \\
&= (\det A) * \left(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_{i-1} \wedge \beta_i \wedge \beta_{i+1} \wedge ... \wedge \beta_n\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\omega = * \left(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_{i-1} \wedge \beta_i \wedge \beta_{i+1} \wedge ... \wedge \beta_n\right)
$$

elde edilir. Sonuç olarak her $\beta \in U$ için

$$
\beta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i
$$

yazabiliriz ve

$$
\begin{aligned}
g(\omega, \beta) &= g_1(* \left(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_{i-1} \wedge \beta_i \wedge \beta_{i+1} \wedge ... \wedge \beta_n\right), \beta) \\
&= g_1(* \left(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_{i-1} \wedge \beta_i \wedge \beta_{i+1} \wedge ... \wedge \beta_n\right), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ g_1(* \left(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_{i-1} \wedge \beta_i \wedge \beta_{i+1} \wedge ... \wedge \beta_n\right), \beta_i) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $\omega \in U^{\perp}$ olduğu görülür.

2.7 Flow, 1-Parametreli Grup ve Lie Türevi

Tanım 2.7.1.(Flow, 1-Parametreli grup) M bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\varphi &: M \times R \to M \\
&: (m, t) \to \varphi(m, t) = \varphi_m(t)
\end{aligned}
$$

dönüşümü, $m \in M$ ve $t, s \in R$ için

$$i) \quad \varphi(m, 0) = m \tag{2.7.1}$$

$$ii) \; \varphi(\varphi(m,t), s) = \varphi(m, t+s) \tag{2.7.2}$$

şartlarını sağlıyorsa 'φ' ye M manifoldu üzerinde bir **flow** denir. Burada m ile t nin yerlerini değiştirirsek $\theta_t(m) = \varphi_m(t)$ dönüşümünü elde ederiz.$(\theta_t)_{e \in I}$ cümlesi bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba **1-Parametreli grup** denir. Ayrıca burada $I \subset R$ cümlesi de bir aralıktır (Boothby 1986).

Tanım 2.7.2.(İntegral Eğrisi) θ_t bir M manifoldu üzerinde 1-Parametreli grup olsun. $X \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\frac{d\theta_t}{dt}(m) = X(\theta_t(m)) \tag{2.7.3}$$

şartı sağlanıyorsa θ_t ye X vektör alanının **integral eğrisi** denir (Boothby 1986).

Tanım 2.7.3.(Lie Türevi) $L_X Y$ vektör alanına X in Y yönünde Lie türevi denir. $L_X Y$ Lie türevi $\forall P \in M$ noktasında tanımlıdır ve

$$(L_X Y)_P = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(\theta_{-t})_* (Y_{\theta_t(P)}) - Y_P \right] \tag{2.7.4}$$

olarak tanımlanır. Burada θ_t 1-Parametreli grubu, X vektör alanının integral eğrisidir (Boothby 1986).

Tanım 2.7.4.(Lie Cebiri). $gl = \{V, \oplus, R, +, \cdot, \times\}$ bir reel vektör uzayı olsun. gl üzerinde bilineer operatör

$$\begin{aligned} [,] &: \; gl \times gl \to gl \\ &: \; (X,Y) \to [,]\,(X,Y) = [X,Y] \end{aligned} \tag{2.7.5}$$

olarak tanımlansın. Şayet bu operatör

$i)$ $[X,Y] = -[Y,X]$ (ters-simetrik)

$ii)$ $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] \equiv 0$ (Jacobi özdeşliği) özeliklerini sağlıyorsa $[,]$ ye braket operatörü ve $(gl,[,])$ ikilisine **Lie cebiri** denir. Bu cebiri kısaca gl ile gösteririz (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.7.1. X ve Y vektör alanları M manifoldu üzerinde C^∞ ve $f \in C^\infty(M,R)$ olmak üzere

$$L_X f = X(f) \tag{2.7.6}$$

$$(L_X Y)_P = [X,Y]_P \tag{2.7.7}$$

dir (Boothby 1986).

Tanım 2.7.5.(Tensör Alanlarının Lie Türevi). M manifoldu üzerinde (Ψ,U) haritasını alalım. X, U üzerinde C^∞ vektör alanı ve $S \in Tens^{(p,q)}(U)$ tipinde tensör alanı olmak üzere $\forall m \in M$ için

$$L_X S = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[(\theta_{-t})_*(S_{\theta_t(m)}) - S_m\right] \tag{2.7.8}$$

olarak tanımlanır. Burada θ_t 1-Parametreli grubu, X vektör alanının integral eğrisidir. Ayrıca $Tens^{(p,q)}(U)$ den kastımız

$$Tens^{(p,q)}(U) = \left\{ S : \underbrace{(T_P U)^* \times ... \times (T_P U)^*}_{p \ \tan e} \times \underbrace{T_P U \times ... \times T_P U}_{q \ \tan e} \xrightarrow{p+q \ \ lineer} R \right\}$$

şeklindeki lineer dönüşümler cümlesidir (Boothby 1986).

Tanım 2.7.6.(Kontraksiyon Operatörü). Bir $A \in Tens^{(p,q)}(U)$ tensörünün 'r' yinci ve 's' yinci elemanları boyunca kontraksiyonu $C_s^r A \in Tens^{(p-1,q-1)}(U)$ şeklinde bir diğer tensördür ve

$$\begin{aligned} & C_s^r A(\alpha^1, ..., \alpha^{r-1}, \alpha^{r+1}, ..., \alpha^p, x_1, ..., x_{s-1}, x_{s+1}, ..., x_q) \\ = \ & A(\alpha^1, ..., \alpha^{r-1}, e^a, \alpha^{r+1}, ..., \alpha^p, x_1, ..., x_{s-1}, e_a, x_{s+1}, ..., x_q) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ cümlesi $\chi(U)$ uzayının bir bazı ve $\{e^i\}_{1\leq i\leq n}$ cümlesi de $\chi(U)^*$ uzaylarının dual bazıdır (O'Neill 1983).

Örnek 2.7.1. *a)* $\varpi \in Tens^{(0,1)}(U), x \in Tens^{(1,0)}(U)$ tipli tensörler olmak üzere

$$C_1^1 \varpi \otimes x = \varpi(x) \tag{2.7.9}$$

dir.

b) $F \in Tens^{(0,2)}(U), X \in Tens^{(1,0)}(U)$ ve $Y \in Tens^{(1,0)}(U)$ tensörler olmak üzere

$$C_1^1((C_1^1 F \otimes X) \otimes Y) = F(X,Y) \tag{2.7.10}$$

dir. Buna benzer pek çok örnek verilebilir.

Teorem 2.7.2. $H \in Tens^{(p,q)}(U), K \in Tens^{(t,s)}(U)$ ve $X \in \chi(U)$ olmak üzere

$$L_X(H \otimes K) = (L_X H) \otimes K + H \otimes (L_X K) \tag{2.7.11}$$

$$L_X(C_s^r H) = C_s^r L_X(H) \tag{2.7.12}$$

dir (Kobayashi1996). Burada (2.7.8) den Lie türevini hesaplamak kolay değildir. (2.7.11) ve (2.7.12) denklemlerini kullanarak Lie türevini daha kolay hesaplayabiliriz.

Örnek 2.7.2. M bir diferansiyellenebilir manifold ve 'g' de M de (0,2) tipli bir metrik olsun. Şimdi $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $(L_X g)(Y,Z)$ değerini hesaplıyalım.

$$\begin{aligned}
L_X\left(C_1^1((C_1^1 g \otimes Y) \otimes Z)\right) &= C_1^1 L_X\left((C_1^1 g \otimes Y) \otimes Z\right) \\
&= C_1^1(L_X(C_1^1 g \otimes Y)) \otimes Z + C_1^1(C_1^1 g \otimes Y) \otimes L_X Z \\
&= C_1^1(C_1^1 L_X(g \otimes Y)) \otimes Z + C_1^1(C_1^1 g \otimes Y) \otimes L_X Z \\
&= C_1^1(C_1^1((L_X g) \otimes Y) \otimes Z + C_1^1(C_1^1(g \otimes L_X Y)) \otimes Z \\
&\quad + C_1^1(C_1^1 g \otimes Y) \otimes L_X Z
\end{aligned}$$

(2.7.7), (2.7.9) ve (2.7.10) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
L_X g(Y,Z) &= (L_X g)(Y,Z) + g(L_X Y, Z) + g(Y, L_X Z) \\
&= (L_X g)(Y,Z) + g([X,Y], Z) + g([X,Z], Y)
\end{aligned}
$$

dolayısıyla

$$
(L_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) \tag{2.7.13}
$$

formülünü elde ederiz.

Örnek 2.7.3. *M bir diferansiyellenebilir manifold ve 'η' da $\chi(M)$ de (0,1) tipli bir tensör olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $(L_X\eta)(Y)$ değerini hesaplayalım*

$$
\begin{aligned}
L_X(C_1^1 \eta \otimes Y) &= C_1^1 L_X(\eta \otimes Y) \\
&= C_1^1(L_X\eta) \otimes Y + C_1^1 \eta \otimes L_X Y
\end{aligned}
$$

yine (2.7.7) ve (2.7.9) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
L_X \eta(Y) &= (L_X\eta)(Y) + \eta(L_X Y) \\
&= (L_X\eta)(Y) + \eta([X,Y])
\end{aligned}
$$

dolayısıyla

$$
(L_X\eta)(Y) = X\eta(Y) - \eta([X,Y]) \tag{2.7.14}
$$

elde edilir.

Örnek 2.7.4. *M bir diferansiyellenebilir manifold ve 'ϕ' da $\chi(M)$ de (1,1) tipli tensör olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $(L_X\phi)(Y)$ değerini hesaplıyalım.*

$$
\begin{aligned}
L_X(C_1^1 \phi \otimes Y) &= C_1^1 L_X(\phi \otimes Y) \\
&= C_1^1(L_X\phi) \otimes Y + C_1^1 \phi \otimes L_X Y
\end{aligned}
$$

benzer şekilde (2.7.7) ve (2.7.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_X\phi(Y) &= (L_X\phi)(Y) + \phi(L_XY) \\ [X,\phi(Y)] &= (L_X\phi)(Y) + \phi([X,Y]) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$(L_X\phi)(Y) = [X,\phi(Y)] - \phi([X,Y]) \tag{2.7.15}$$

sonucuna ulaşırız.

Tanım 2.7.7.(Killing Vektör Alanı). M bir diferansiyellenebilir manifold ve 'g' de M de (0,2) tipli bir metrik tensör olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $(L_\xi g)(X,Y) = 0$ oluyorsa ξ vektör alanına, 'g' metriğinin Killing vektör alanı denir (Kobayashi 1996).

Örnek 2.7.6. R^2 deki standart kordinat sistemini $(x_1, x_2) = (x, y)$ ve bu uzaydaki metriğimizi $ds^2 = dx^2 + dy^2$ olarak alalım. Bu metriğimize göre Killing vektör alanı da $\xi \;= \xi^1\dfrac{\partial}{\partial x} + \xi^2\dfrac{\partial}{\partial y}$ olsun. Burada $\xi^i = \xi^i(x,y)$ şeklinde fonksiyonlardır. Ayrıca metriğimize karşılık gelen matris $g_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $g^{ab} = (g_{ab})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir. ξ killing vektör alanını bulmak için $\forall i, j \in \{1, 2\}$ için$(L_\xi g)\,(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}) = 0$ olmalıdır. (1.1.13) den

$$(L_\xi g)\,(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\xi^\alpha\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_i}g_{\alpha j} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_i}g_{j\alpha}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemden

$$\begin{aligned} (L_\xi g)\,(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}) &= \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\xi^\alpha\frac{\partial g_{11}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_1}g_{\alpha 1} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_1}g_{1\alpha}\right) \\ 0 &= (\xi^1\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}g_{11} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}g_{11}) + (\xi^2\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}g_{21} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}g_{12}) \\ 0 &= (\xi^1 0 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}1) + (\xi^2 0 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}0 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}0) \\ 0 &= 2\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \end{aligned}$$

olur. Böylece son eşitlikden $\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x} = 0$ dir. Benzer şekilde

$$(L_\xi g)\,(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}) = (L_\xi g)\,(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}) = 0$$

eşitliğinden $\frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \frac{\partial \xi^2}{\partial y} = 0$ ve $(L_\xi g)\,(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2})$ eşitliğinden de $\frac{\partial \xi^2}{\partial y} = 0$ denklemi elde edilir. Bu üç diferensiyel denklemi çözersek, $\frac{\partial \xi^1}{\partial x} = 0$ ise $\xi^1 = \xi^1(y)$ ve $\frac{\partial \xi^2}{\partial y} = 0$ ise $\xi^2 = \xi^2(x)$ dir. Böylece $\frac{\partial \xi^1}{\partial y} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x} = 0$ eşitliğini $\frac{\partial \xi^1(y)}{\partial y} = -\frac{\partial \xi^2(x)}{\partial x}$ şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $\frac{\partial \xi^1(y)}{\partial x} = -\frac{\partial \xi^2(x)}{\partial y} = c(\text{sabit})$ olması gerekir. Böylece $\xi^1(y) = cy + c_1$, $\xi^2(x) = -cx + c_2$ ve

$$\xi \ = (cy + c_1)\frac{\partial}{\partial x} + (-cx + c_2)\frac{\partial}{\partial y}$$

olarak buluruz. Bu son eşitliği düzenlersek

$$\xi \ = c(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}) \ + c_1\frac{\partial}{\partial x} + c_2\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.7.17}$$

dir. Dolayısı ile R^2 deki Killing vektör alanları $(y\frac{\partial}{\partial x} - cx\frac{\partial}{\partial y}), \frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y}$ dir. Şimdi $\xi \ = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ Killing vektör alanına karşılık gelen bir parametreli gruba

$$\theta_t = (\theta_1(t), \theta_2(t))$$

dersek $\frac{d\theta_t}{dt}(m) = \xi(\theta_t(m))$ denkleminden $(\dot{\theta}_1\ (t), \dot{\theta}_2\ (t)) = (\theta_2(t), -\theta_1(t))$ eşitliğine ulaşırız. Bu eşitlikden $\dot{\theta}_1\ (t) = \theta_2(t)$ ve $\dot{\theta}_2\ (t) = -\theta_1(t)$ dir. Dolayısıyla $\ddot{\theta}_1\ (t) = \dot{\theta}_2\ (t) = -\theta_1(t)$ ise $\ddot{\theta}_1\ (t) + \theta_1(t) = 0$ ve benzer şekilde $\ddot{\theta}_2\ (t) + \theta_2(t) = 0$ diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu iki diferansiyel denklemi çözersek

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A\cos t + B\sin t \\ \theta_2(t) &= C\cos t + D\sin t \end{aligned}$$

çözümünü elde ederiz. $\dot{\theta}_1(t) = \theta_2(t)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} -A\sin t + B\cos t &= C\cos t + D\sin t \\ (A+D)\sin t + (B-C)\cos t &= 0 \end{aligned}$$

olur. $\{\sin t, \cos t\}$ cümlesinin lineer bağımsızlığından $D = -A$ ve $B = C$ elde edilir. Böylece $\theta_t = (A\cos t + B\sin t, -A\sin t + B\cos t)$ bir parametreli grubu elde edilir ve $I \subset R$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \theta &: I \times R^2 \rightarrow R^2 \\ &: (t,(x,y)) \rightarrow \theta_t(x,y) = (x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t) \end{aligned}$$

olur. Burada $\theta_t(m) = \varphi_m(t)$ eşitliğinden

$$\varphi_m(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

flowu elde edilir. Bu flow bize ξ vektör alanının dönme yaptırdığını söyler.
Benzer şekilde $\xi = \dfrac{\partial}{\partial x}$ alırsak bu vektör alanına karşılık gelen bir parametreli grubun

$$\theta_t(x,y) = (x,y) + (t,0)$$

olduğu görülür. Bu ise ox ekseni boyunca ötelemedir. $\xi = \dfrac{\partial}{\partial y}$ killing vektör alanını ele alırsak, benzer işlemler sonucunda $\theta_t(x,y) = (x,y) + (0,t)$ olur. Bu ise oy ekseni boyunca ötelemedir. Böylece R^2 de metriği koruyan dönüşümler dönme, öteleme ve yansımalardır.

2.8.Koneksiyon ve Eğrilikler

Tanım 2.8.1.(Koneksiyon). Diferansiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X,Y) &\longmapsto D(X,Y) = D_X Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, $\forall f, g \in C^{\infty}(M, R)$ için

$$\begin{aligned}
1 &: D_{X+X'}Y = D_X Y + D_{X'}Y \\
2 &: D_X(Y + Y') = D_X Y + D_X Y' \\
3 &: D_{fX}Y = f D_X Y \\
4 &: D_X gY = g D_X Y + X(g)Y
\end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa, D ye M üzerinde bir afin koneksiyon denir (Hacısalihoğlu 2004).

Teorem 2.8.1. $H \in Tens^{(p,q)}(U), K \in Tens^{(t,s)}(U)$ ve $X \in \chi(U)$ olmak üzere

$$D_X(H \otimes K) = (D_X H) \otimes K + H \otimes (D_X K) \tag{2.8.1}$$

$$D_X(C_s^r H) = C_s^r D_X(H) \tag{2.8.2}$$

dir (Kobayashi1996).

Örnek 2.8.1. M bir diferansiyellenebilir manifold ve 'ϕ' de $\chi(M)$ de (1,1) tipli bir tensör olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $(L_X \phi)(Y)$ değerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
D_X(C_1^1 \phi \otimes Y) &= C_1^1 D_X(\phi \otimes Y) \\
&= C_1^1 (D_X \phi) \otimes Y + C_1^1 \phi \otimes D_X Y
\end{aligned}$$

benzer şekilde (2.7.7),(2.8.1) ve (2.8.2) kullanılırsa

$$D_X \phi(Y) = (D_X \phi)(Y) + \phi(D_X Y)$$

olur. Böylece

$$(D_X \phi)(Y) = X\phi(Y) - \phi(D_X Y) \tag{2.8.3}$$

sonucuna ulaşırız.

Örnek 2.8.2. M bir diferansiyellenebilir manifold ve 'g' de M üzerinde (0,2) tipli bir metrik olsun. Şimdi $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $(L_X g)(Y, Z)$ değerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
D_X\left(C_1^1((C_1^1 g \otimes Y) \otimes Z)\right) &= C_1^1 D_X\left((C_1^1 g \otimes Y) \otimes Z\right) \\
&= C_1^1(D_X(C_1^1 g \otimes Y)) \otimes Z + C_1^1(C_1^1 g \otimes Y) \otimes D_X Z \\
&= C_1^1(C_1^1 D_X(g \otimes Y)) \otimes Z + C_1^1(C_1^1 g \otimes Y) \otimes D_X Z \\
&= C_1^1(C_1^1((D_X g) \otimes Y) \otimes Z + C_1^1(C_1^1(g \otimes D_X Y)) \otimes Z \\
&\quad + C_1^1(C_1^1 g \otimes Y) \otimes D_X Z
\end{aligned}$$

(2.7.7),(2.8.1) ve (2.8.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
D_X g(Y, Z) &= (D_X g)(Y, Z) + g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \\
&= (D_X g)(Y, Z) + g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$(D_X g)(Y, Z) = X g(Y, Z) - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z) \tag{2.8.4}$$

formülünü elde ederiz. Bunun ilgili daha pek çok örnek verebiliriz.

Tanım 2.8.2.(Torsiyon Eğrilik Tensörü) Düzgün bir M manifoldu üzerinde Torsiyon eğrilik tensörünü,

$$\begin{aligned}
&T : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\
&\qquad (X, Y) \longmapsto T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]
\end{aligned}$$

olarak tanımlarız (Hacısalihoğlu 2004).

Teorem 2.8.2. Herhangi bir Rimannian veya yarı Rimannian manifoldda Torsiyon eğrilik tensörü özdeş olarak sıfıra eşittir. Yani, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $T(X, Y) = 0$ dır. Bunu biz $T_D \equiv 0$ olarak da ifade edebiliriz (O.Neill 1983).

Teorem 2.8.3. g bir metrik olmak üzere herhangi bir (M, g) manifoldunda $Dg \equiv 0$

ve $T_D \equiv 0$ olacak şekilde, M üzerinde bir tek D koneksiyonu vardır (O.Neill 1983).

İspat: $Dg \equiv 0$ olduğuna dikkat edersek (2.8.4) den, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \tag{2.8.5}$$

olduğu görülür. Ayrıca $T_D \equiv 0$ ise $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \\ Yg(X, Z) &= g(D_Y Z, X) + g(Z, D_Y X) \\ Zg(X, Y) &= g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y) \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada ilk ikisini toplayıp üçüncüsünü çıkarırsak

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) &= g(Y, D_X Z - D_Z X) + g(D_Y Z - D_Z Y, X) \\ &\quad + g(D_X Y + D_Y X, Z) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. $D_Y X = D_X Y - [X, Y]$ eşitliğini göz önüne alıp bu son eşitliği düzenlersek

$$\begin{aligned} 2g(D_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) \\ &\quad - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], Z) \end{aligned} \tag{2.8.6}$$

elde edilir. (2.8.6) formülü metrik ile koneksiyonun birbiri ile bağlantılı olduğunu gösterir. Şimdi kabul edelim ki M üzerinde $D'g \equiv 0$ ve $T_{D'} \equiv 0$ koşullarını sağlayan başka bir D' koneksiyonu olsun. Benzer şekilde bu koneksiyonun (2.8.6) eşitliğini sağlaması gerekir. (2.8.6) eşitliğinin ikinci tarafı koneksiyondan bağımsız olduğundan

$$2g(D_X Y, Z) = 2g(D'_X Y, Z)$$

olmalıdır. Böylece

$$2g(D_XY - D'_XY, Z) = 0 \text{ ve } 2g((D - D')(X,Y), Z) = 0$$

elde edilir. Metrik nondejenere olduğundan ve bu son eşitlik $\forall Z \in \chi(M)$ için sağlandığından $(D - D')(X,Y) = 0$ dır. Dönüşüm tanımından $D - D' \equiv 0$ olur. Dolayısıyla $D \equiv D'$ sonucuna ulaşırız. Bu da bize koneksiyonun tekliğini söyler. (2.8.6) koşulunu sağlayan bu koneksiyona Levi-Civita koneksiyonu denir.

Tanım 2.8.3.(Riemanian Eğrilik Tensörü). Düzgün bir M manifoldu üzerinde afin koneksiyon D olsun.

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X,Y,Z) &\longmapsto R(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z \end{aligned} \tag{2.8.7}$$

şelinde tanımlanan (1,3) tipindeki tensöre Riemannian eğrilik tensörü denir (Hacısalihoğlu 2004).

Tanım 2.8.4.(Riemanian-Christoffel Eğrilik Tensörü). g bir metrik olmak üzere düzgün bir M manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} \widetilde{R} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow C^\infty(M,R) \\ (X,Y,Z,W) &\longrightarrow \widetilde{R}(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) \end{aligned} \tag{2.8.8}$$

şeklinde tanımlanan (0,4) tipindeki tensöre Riemannian-Christoffel eğrilik tensör alanı denir (Hacısalihoğlu 2004).

Teorem 2.8.4. $\widetilde{R}$, düzgün bir M manifoldu üzerinde Riemannian eğrilik tensör alanı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 1)\ \widetilde{R}(X,Y,Z,W) &= -\widetilde{R}(Y,X,Z,W) \\ 2)\ \widetilde{R}(X,Y,Z,W) &= -\widetilde{R}(X,Y,W,Z) \\ 3)\ \widetilde{R}(X,Y,Z,W) &= \widetilde{R}(Y,X,W,Z) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar (Hacısalihoğlu 2004).

Tanım 2.8.5.(Kesitsel Eğrilik). Düzgün bir M manifoldu üzerinde afin koneksiyon D olsun.

$$\begin{aligned} K : \chi(M) \times\ \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ (X,Y) \longrightarrow\ K(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)Z,W)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2} \end{aligned} \tag{2.8.9}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme kesitsel eğrilik (Sectional curvature) denir. Burada $Al^2(X,Y) = (X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2$ ifadesi alan elementinin karesidir (Hacısalihoğlu 2004).

Teorem 2.8.5. K, düzgün bir M manifoldu üzerinde kesitsel eğrilik olsun. Bu durumda $ad - bc \neq 0$ olmak üzere, $\forall a, b \in R$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$K(aX + bY, cX + dY) = K(X,Y)$$

dir (Hacısalihoğlu 2004).

Sonuç 2.8.1. M manifoldu üzerindeki vektör alanları uzayı $\chi(M)$ ve $\{X_0, Y_0\}$ lineer bağımsız vektör alanları olmak üzere $\pi = sp\{X_0, Y_0\} \subset \chi(M)$ olsun. $boy\pi = 2$ olduğundan, lineer cebirden biliyoruzki π düzleminin bir bazı $\{X_0, Y_0\}$ dir. Dolayısıyla, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $X_0 = aX + bY$ ve $Y_0 = cX + dY$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. $\{X_0, Y_0\}$ lineer bağımsız olduğundan $ad - bc \neq 0$ olması gerektiğini görmek kolaydır. Teorem.2.8.5 den

$$\begin{aligned} K(X_0, Y_0) &= K(aX + bY, cX + dY) \\ &= K(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bize kesitsel eğriliğin bir düzlemdeki vektörlerin seçilişinden bağımsız olduğunu gösterir. Yani, kesitsel eğrilik her düzleme bir sabit karşılık getirir. Bu yüzden $\forall P \in M$ noktasındaki kesitsel eğriliği $\pi_P = sp\{X_P, Y_P\}$ olmak üzere $K(\pi_P)$

olarak da gösterebiliriz.

Teorem 2.8.6. Sabit kesitsel eğriliği c olan uzaylarda $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = c\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right) \tag{2.8.10}$$

dir (Yano 1984).

2.9 Yarı-Riemann Alt Manifold ve Sonlu Tipde Eğriler

Tanım 2.9.1.(Yarı-Riemann Alt Manifold) m- boyutlu M_p^m manifoldunun indeksi 'p' ve n- boyutlu N_q^n manifoldunun indeksi 'q' olsun. Şayet

$$f : N_q^n \longrightarrow M_p^m$$

dönüşümü bir izometrik immersiyon ise N_q^n manifolduna M_p^m manifoldunun yarı-Riemann alt manifoldu denir. M_p^m manifoldunda 'G' metriği ve N_q^n alt manifoldunda ise 'g' metriği tanımlı olsun. Böylece $\forall X, Y \in \chi(N_q^n)$ için

$$g(X,Y) = G\left(f_*(X), f_*(Y)\right)$$

dır (Blair 1976).

Tanım 2.9.2.(Şekil Operatörü) N_q^n manifoldu M_p^m manifoldunun yarı-Riemann alt manifoldu olsun. M_p^m deki metrik 'G' ve bu metriğe karşılık gelen Levi-Civita koneksiyon $\overline{\nabla}$ olsun. $\xi \in \chi(N_q^n)^\perp$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A_\xi : \chi(N_q^n) &\longrightarrow \chi(N_q^n) \\ X &\longrightarrow A_\xi(X) = -\overline{\nabla}_X \xi \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan A_ξ lineer dönüşümüne ξ normal vektör alanına karşılık gelen şekil oparatörü (Weingarten dönüşüm) denir (O.Neill 1983).

Tanım 2.9.3.(İkinci Temel Form) N_q^n manifolduna M_p^m manifoldunun yarı-Riemann alt manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(N_q^n)$ için

$$\begin{aligned} h : \chi(N_q^n) \times \chi(N_q^n) &\longrightarrow \chi(N_q^n) \\ (X, Y) \quad &\longrightarrow h(X, Y) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan simetrik bilineer 'h' dönüşümüne N_q^n nun **ikinci temel formu** denir (Chen 1973).

Teorem 2.9.1. N_q^n manifoldu M_p^m manifoldunun bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun. M_p^m manifoldundaki 'g' metriğine karşılık gelen Levi-Civita koneksiyonu ∇ ve N_q^n Sasaki uzayında 'G' metriğine karşılık gelen Levi-Civita koneksiyonu da $\overline{\nabla}$ olsun. Böylece $\forall X, Y \in \chi(N_q^n)$ Gaus formülü

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.9.1}$$

ve $\forall X \in \chi(N_q^n), \forall\ \xi_i \in \chi(N_q^n)^{\perp}$ için Weingarten formülü

$$\overline{\nabla}_X \xi_i = -A_{\xi_i} X + D_X^{\perp} \xi_i \tag{2.9.2}$$

dir (Chen 1973).

Tanım 2.9.4.(Ortalama Eğrilik Vektör Alanı) N_q^n manifoldu M_p^m manifoldunun yarı-Riemann alt manifoldu olsun. N_q^n manifoldunun ortonormal bir bazı $\{e_{1,} e_{2,} ..., e_n\}$ olsun. Burada $\varepsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$ olmak üzere

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i h(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlı H vektör alanına N_q^n manifoldunun **ortalama eğrilik vektör alanı** denir. Şayet $H \equiv 0$ ise N_q^n manifolduna M_p^m manifoldunun minimal alt manifoldu denir (Kocayiğit 2004).

Tanım 2.9.5(Laplace Operatörü) N_q^n manifoldu M_p^m manifoldunun yarı-Riemann alt manifoldu olsun. N_q^n manifoldunun ortonormal bir tabanı $\{e_{1,}e_{2,}..., e_n\}$ ve burada $\varepsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$ olmak üzere M_p^m deki 'G' metriğine karşılık gelen Levi-Civita koneksiyonu $\overline{\nabla}$, N_q^n deki 'g' metriğine karşılık gelen Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere $\forall V \in \chi(N_q^n)^{\perp}$ için

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left(\overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V - \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} V \right) \tag{2.9.3}$$

dir. Şayet $f \in C^{\infty}(N_q^n, R)$ ise f fonksiyonunun Laplasiyeni

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left((\nabla_{e_i} e_i) f - e_i e_i f \right) \tag{2.9.4}$$

olur (Kocayiğit 2004).

Tanım 2.9.6.(Sonlu Tipde Eğriler) M manifoldu kompakt C^{∞} Riemanian manifold olsun. $C^{\infty}(M)$ de M deki düzgün (smooth) fonksiyonların cümlesi olsun. $C^{\infty}(M)$ üzerinde eliptik self-adjoint diferansiyel operatör olan Δ Laplace operatörünün karakteristik değerlerinin kümesi

$$spec(M) = \{0 = \lambda_0 \langle \lambda_1 \langle ... \langle \lambda_k \langle ... \uparrow \infty\} \tag{2.9.5}$$

olsun. Δ Laplace operatörünün k yıncı karakteristik değeri olan λ_k ya karşılık gelen karakteristik uzay

$$V_k = \{f \in C^{\infty}(M) : \Delta f = \lambda_k f\}$$

olur. Burada V_k sonlu boyutludur. dV hacim elementi olmak üzere $C^{\infty}(M)$ de iç çarpımı

$$(f, g) = \int_M f g dV \tag{2.9.6}$$

olarak tanımlayabiliriz. Böylece $\forall f \in C^{\infty}(M)$ için bu fonksiyonun spektral ayrışımı

$$f = \sum_{t \geq 0} f_t, \quad \Delta f_t = \lambda_t f_t \tag{2.9.7}$$

olarak düşünebiliriz. Bunu bir izometrik immersiyona uygularsak

$$x : M \longrightarrow E^m$$

bir izometrik immersiyon olsun. Burada x in koordinat fonksiyonları $A = 1, ..., m$ için x_A ise $x = (x_1, ..., x_m)$ olarak yazabiliriz. Burada

$$x_A - (x_A)_0 = \sum_{t=p_A}^{q_A} (x_A)_t \tag{2.9.8}$$

olmak üzere $p_A = \{\inf t : (x_A)_t \neq 0\}$ ve $q_A = \{\sup t : (x_A)_t \neq 0\}$ olarak tanımlanıyor. Eğer $p = \inf \{p_A\}$, $q = \sup \{q_A\}$, x_0 sabit bir vektör ve

$$x_t : M \longrightarrow E^m$$

dönüşümleri de sabit olmayan düzgün(smooth) dönüşümler iken (2.9.8) ün spektral ayrışımı

$$x - x_0 = \sum_{t=p}^{q} (x)_t , \quad \Delta x_t = \lambda_t x_t \tag{2.9.9}$$

olur. Burada q sonlu ise E^m de M ye sonlu tipte alt manifold denir. (2.9.9) deki spektral ayrışımda x_t lerden k tane varsa E^m de M ye k-tipte alt manifold denir (Baikousis 1994).

3. KONTAK MANİFOLDLAR

3.1 Kontak Manifold ve Geniş Anlamda Kontak Manifold

Tanım 3.1.1.(Kontak Manifold) Bir 2n+1-boyutlu C^{∞} differansiyellenebilir M manifoldu verilsin. Şayet bu manifold üzerinde verilen η 1-formu M nin her noktasında

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

oluyorsa, η ya kontak form (M, η) ya da **Kontak manifold** denir (Blair 1976).

Sonuç 3.1.1. V bir vektör uzayı ve V^* da V nin dual uzayı olmak üzere ΛV^* Grassman cebiri tanımlanabilir. Burada θ kuadratik form olmak üzere şayet $\theta^r \neq 0$ ve $\theta^{r+1} = 0$ ise $rank\theta = 2r$ dir. Ayrıca

$$V_0 = \{X \in V : \forall Y \in V, \theta(X, Y) = 0\}$$

olarak tanımlarsak

$$rank\theta = boyV - boyV_0$$

olduğunu görürüz (Yano 1983). Kontak manifold tanımına bakarsak $(d\eta)^n \neq 0$ ve $(d\eta)^{n+1} = 0$ dır. Burada $r = n$, $rank\theta = 2n$ ve $boy\chi(M) = 2n + 1$ olur. Ayrıca

$$D_0 = \{X \in \chi(M) : \forall Y \in \chi(M), d\eta\,(X, Y) = 0\}$$

dersek $boyD_0 = 1$ olduğunu görürüz. Kabul edelimki $0 \neq X \in D_0$ için $\eta\,(X) = 0$ olsun. $X \in D_0$ için tabana tamamlama teoreminde $\chi(M)$ in bir $\{X, Y_1, ..., Y_{2n}\}$ şeklinde tabanı vardır. Burada$(\eta \wedge (d\eta)^n)\,(X, Y_1, ..., Y_{2n}) = 0$ olduğunu görmek kolaydır. Bu ise $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ olmasıyla çelişir. Böylece $X \neq 0$ için $\eta\,(X) \neq 0$ dır. Sonuç olarak her $Y \in \chi(M)$ için $d\eta\,(Y, \xi) = 0$ ve $\eta\,(\xi) = 1$ olacak şekilde bir tek $\xi \in \chi(M)$

vardır. Bu vektör alanına karakteristik vektör alanı diyoruz.

$$D = \{X \in \chi(M) : \eta(X) = 0\}$$

cümlesine M manifoldunun **kontak dağılımı (distribution)** denir. $\chi(M)$ vektör uzayı $2n+1$ boyutlu olduğundan $\chi(M)^*$ $2n+1$ boyutludur. Bu iki dual vektör uzaylarının, sırasıyla, $\{\xi, X_1, ..., X_{2n}\}$ ve $\{\eta, \eta_1, ..., \eta_{2n}\}$ dual tabanları vardır. Böylece $i = 1, 2, ...2n$ için $\eta(X_i) = 0$ ve $\{X_1, ..., X_{2n}\} \subset D$ dir. Burada $D = sp\{X_1, ..., X_{2n}\}$ olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla $boyD = 2n$ olur.

Sonuç 3.1.2. η formu M üzerinde kontak form olduğundan D üzerinde $(d\eta)^n \neq 0$ dır. Böylece $d\eta$ 2-formu D üzerinde non-dejenere, anti smetrik bir bilineer form olur. Çünkü $X, Y \in D$ için

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\right) \\ &= -\frac{1}{2}\eta([X,Y]) \end{aligned}$$

olduğundan $d\eta$ nın anti simetrik olduğu açıktır. $X \in D$ ve her $Y \in D$ için

$$d\eta(X,Y) = 0$$

iken kabul edelimki $X \neq 0$ olsun. *boy* $D = 2n$ olduğundan D uzayının bir

$$\left\{X, Y_1, ..., Y_{(2n-1)}\right\}$$

bazı vardır. Fakat burada $(d\eta)^n \left(X, Y_1, ..., Y_{(2n-1)}\right) = 0$ olduğu görülür. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $X = 0$ ve $d\eta$ 2-formu D üzerinde non-dejenere olur.

Sonuç 3.1.3. (M, η) kontak manifoldunda $d\eta$ 2-formu D dağılımı üzerinde nondejenere, anti smetrik bilineer form olduğunu biliyoruz. Böylece her $P \in M$ noktasında

$$d\eta : D_P \times D_P \to R$$

bir simplektik yapı (simplektik form) olur. Ayrıca Darboux teoreminden her $P \in M$ noktası için,

$$(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, z)$$

koordinat fonksiyonları ile verilen η 1-formu

$$\eta = (\varphi_\alpha)^* \left(dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i \right)$$

olacak şekilde bir $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasının var olduğunu biliyoruz. Böylece $d\eta$ 2-formu

$$d\eta = (\varphi_\alpha)^* \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right)$$

olur. $\varphi_\alpha (U_\alpha) = V_\alpha \subset R^n$ olmak üzere $Q = \varphi_\alpha (P) \in V_\alpha$ noktasındaki teğet uzayın tabanı

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} |_Q, \frac{\partial}{\partial x_2} |_Q, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} |_Q, \frac{\partial}{\partial y_1} |_Q, \frac{\partial}{\partial y_2} |_Q, ..., \frac{\partial}{\partial y_n} |_Q, \frac{\partial}{\partial z} |_Q \right\}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} E_{iP} &= (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_Q + y_i(Q) \frac{\partial}{\partial z} |_Q \right), E_{n+iP} = (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} |_Q \right) \text{ ve} \\ \xi &= (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} |_Q \right) \end{aligned}$$

dersek

$$\{E_{1P}, E_{2P}, ..., E_{2nP}, \xi\}$$

cümlesi $T_P(M)$ uzayının bir tabanıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \eta (\xi) &= (\varphi_\alpha)^* \left(dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i \right) \left((\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} |_Q \right) \right) \\ &= \left(dz - \sum_{i=}^{n} y_i dx_i \right) \left((\varphi_\alpha)_* \circ (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} |_Q \right) \right) \\ &= \left(dz - \sum_{i=}^{n} y_i dx_i \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} |_Q \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve her $X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} d\eta(X,\xi) &= (\varphi_\alpha)^* \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right) \left(X, (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} |_Q \right) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right) \left((\varphi_\alpha)_* (X), (\varphi_\alpha)_* \circ (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} |_Q \right) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right) \left((\varphi_\alpha)_* (X), \frac{\partial}{\partial z} |_Q \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\xi \in \chi(M)$ karakteristik vektör alanıdır. Böylece $1 \leq k, l \leq n$ için

$$\begin{aligned} d\eta(E_{kP}, E_{lP}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_Q + y_i(Q) \frac{\partial}{\partial z} |_Q, \frac{\partial}{\partial x_i} |_Q + y_i(Q) \frac{\partial}{\partial z} |_Q \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $1 \leq k, l \leq n$ için

$$d\eta(E_{kP}, E_{lP}) = d\eta\left(E_{(n+k)P}, E_{(n+l)P}\right) = 0 \text{ ve } d\eta\left(E_{kP}, E_{(n+l)P}\right) = \delta_{kl}$$

dir. Böylece $\{E_{1P}, E_{2P}, ..., E_{2nP}\}$ cümlesi D_P dağılımının kanonik simplektik tabanıdır. Bu tabana karşılık gelen matris de

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Sonuç olarak her $X, Y \in D_P$ için

$$d\eta(X,Y) = X^T J_0 Y \tag{3.1.1}$$

dir (Ata 2004).

Tanım 3.1.2.(Geniş Anlamda Kontak Manifold) M^{2n+1} diferansiyellenebilir manifold ve kontak dönüşüm kümesi olan Γ Örnek 3.1.1. deki gibi olsun. Şayet M^{2n+1} i örten $\{U_\alpha\}$ açık cümlelerin ailesi ve $f_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset R^{2n+1}$ homeomorfizimler

$\forall\alpha,\beta$ için $f_\alpha\circ f_\beta^{-1}$ tanımlı iken $f_\alpha\circ f_\beta^{-1}\in\Gamma$ oluyorsa M^{2n+1} diferansiyellenebilir manifolduna **geniş anlamda kontak manifold** (contact manifold in the wider sense) denir (Blair 1976).

Tanım 3.1.3.(Geniş Anlamda Kontak Yapı) M^{2n+1}geniş anlamda kontak manifold olsun."$\{(U_\alpha,f_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta,f_\beta)\}$ cümleleri M^{2n+1} üzerinde birer atlas olmak üzere " $\{(U_\alpha,f_\alpha)\}\sim\{(U_\beta,f_\beta)\}$ ancak ve ancak $f_\beta\circ f_\alpha^{-1}$ tanımlı iken $f_\beta\circ f_\alpha^{-1}\in\Gamma$ oluyorsa" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarına M^{2n+1} üzerinde **geniş anlamda kontak yapı**(contact structure in the wider sense on M^{2n+1}) denir (Blair 1976).

Sonuç 3.1.4. Darboux teoreminden görebilirizki her kontak manifold geniş anlamda kontak manifoldur. Fakat bunun tersi doğru değildir (Blair 1976).

Örnek 3.1.1. $M^{2n+1}=R^{n+1}\times PR^n$ çarpım manifoldu geniş anlamda kontak manifolddur, fakat kontak manifold değildir. Neden? R^{n+1} deki koordinatları $(x^1,x^2,...,x^{n+1})$ ve PR^n reel projective uzayındaki homojen koordinat komşuluğunu $(t_1,t_2,...,t_{n+1})$ alalım. M^{2n+1}deki bir açık örtüyü $\{U_i: t_i\neq 0(i=1,2,...,n+1)\}$ seçelim. U_i deki 1-form η_i yi

$$\eta_i=\frac{1}{t_i}\sum_{j=1}^{n+1}t_j dx^j$$

olarak tanımlarsak $\eta_i\wedge(d\eta_i)^n\neq 0$ ve $\eta_i=\dfrac{t_j}{t_i}\eta_j$ dir. Böylece $\forall n$ için M^{2n+1} manifoldu geniş anlamda kontak yapıya sahiptir. Fakat biliyoruzki PR^n manifoldu n çift iken yönlendiremezdir. Dolayısıyla $M^{2n+1}=R^{n+1}\times PR^n$ manifoldu da yönlendiremez olur. Sonuç olarak M^{2n+1} kontak yapı taşımaz (Blair 1976).

Tanım 3.1.4. M^{2n+1} manifoldunu örten $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık cümlesi ve U_α komşuluğu üzerinde lokal olarak tanımlı η_α Kontak formlar ile elde edilen geniş anlamda Kontak yapı θ olsun. $m\in U_\alpha$ noktasında TM^{2n+1} nin D alt demetinin D_m lifi

$$D_m=\left\{X_m\in T_m(M^{2n+1}):\eta_\alpha(X_m)=0\right\}$$

olarak tanımlanır (Blair 1976).

Sonuç 3.1.5. η_α ve η_β formları sırasıyla U_α ve U_β üzerinde kontak form olsun. Böylece D_m üzerinde $(d\eta_\alpha)^n \neq 0$ ile $\left(d\eta_\beta\right)^n \neq 0$ ve $d\eta_\alpha$ ile $d\eta_\beta$ 2-formlarının D_m üzerinde nondejenere, anti smetrik bilineer form olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\eta_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\ \eta_\beta$$

olacak şekilde $U_\alpha \cap U_\beta$ üzerinde sıfır olmayan $\lambda_{\alpha\beta}$ fonksiyonu vardır. Böylece

$$d\eta_\alpha = d\lambda_{\alpha\beta}\Lambda\ \eta_\beta + \lambda_{\alpha\beta}\, d\ \eta_\beta$$

olur. Burada η_β 1-form olduğundan $\eta_\beta\Lambda\eta_\beta = 0$ ve $\eta_\alpha\Lambda d\eta_\alpha = \lambda^2_{\alpha\beta}\ \eta_\beta\Lambda d\ \eta_\beta$ olur. işlemi böyle devam ettirirsek

$$\eta_\alpha\Lambda\left(d\eta_\alpha\right)^n = \lambda^{n+1}_{\alpha\beta}\ \eta_\beta\Lambda\left(d\ \eta_\beta\right)^n$$

olduğu görülür. Ayrıca $\lambda^{n+1}_{\alpha\beta}$ fonksiyonunun bu iki komşuluğunun, koordinat fonksiyonlarının jakobian matrisinin determinantına eşit olduğunu göstermek kolaydır. Yani $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) koordinat komşulukları için $\det J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = \lambda^{n+1}_{\alpha\beta}$ dir. Şayet M^{2n+1} ve n çift ise $\lambda^{n+1}_{\alpha\beta}$ fonksiyonu daima pozitiftir. Böylece D vektör demeti yönlendirilebilirdir. n tek iken Gray (Gray 1959) makalesinde M^{2n+1} yönlendirilebilir olsa bile D vektör demetinin yönlendirilebilir olamayabileceğine dair örnek vermiştir (Blair 1976).

Örnek 3.1.2. J.Martinet 1971 yılında 3-boyutlu her kompakt (Tıkız) manifoldun kontak yapı taşıyacağını göstermiştir (Martinet 1971). $T^3 = R^3/2\pi Z^3$ (3-boyutlu Torus) manifoldunun $S^1 \times S^1 \times S^1$ çarpım manifolduna difeomorfik olduğunu biliyoruz. S^1 çemberi kompakt olduğundan T^3 3-boyutlu Torusu da kompaktır. Böylece T^3 Torusu üzerinde bir kompak yapı olduğunu söyleyebiliriz.

$$T^3 \simeq S^1 \times S^1 \times S^1$$

olduğundan

$$T^3 \simeq \{(\cos x_1, \sin x_1, \cos x_2, \sin x_2, \cos x_3, \sin x_3) : x_1, x_2, x_3 \in R\} \subset R^6$$

şeklinde yazabiliriz. $R^6 = \{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) : y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \in R\}$ uzayında 1-formu

$$\omega = -y_2 y_5 dy_1 + y_1 y_5 dy_2 - y_4 y_6 dy_3 + y_3 y_6 dy_4$$

olarak tanımlar ve ω nın T^3 üzerine kısıtlanışına η dersek

$$\begin{aligned}
\eta &= \omega |_{T^3} \\
&= \sin^2 x_1 \cos x_3 dx_1 + \cos^2 x_1 \cos x_3 dx_1 + \sin^2 x_2 \sin x_3 dx_2 + \cos^2 x_2 \sin x_3 dx_2 \\
&= \cos x_3 dx_1 + \sin x_3 dx_2
\end{aligned}$$

olur. Böylece η nın T^3 üzerinde 1-form olduğunu görürüz. Ayrıca

$$d\eta = -\sin x_3 dx_3 \Lambda dx_1 + \cos x_3 dx_3 \Lambda dx_2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\eta \Lambda d\eta &= (\cos x_3 dx_1 + \sin x_3 dx_2) \Lambda (-\sin x_3 dx_3 \Lambda dx_1 + \cos x_3 dx_3 \Lambda dx_2) \\
&= \cos^2 x_3 dx_1 \Lambda dx_3 \Lambda dx_2 - \sin^2 x_3 dx_2 \Lambda dx_3 \Lambda dx_1 \\
&= -dx_1 \Lambda dx_3 \Lambda dx_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $P \in T^3$ için $\eta \Lambda d\eta \neq 0$, η bir Kontak form ve (T^3, η) da Kontak manifoldtur.

Teorem 3.1.1. $2n+1$ boyutlu yönlendirilebilir M manifoldu geniş anlamda Kontak manifold ve n çift ise Kontak manifolddur (Blair 1976).

İspat. M manifoldu yönlendirilebilir ise Teorem 2.5.5. den TM de vektör demeti olarak yönlendirilebilirdir. n çift olduğudan D de vektör demeti olarak yönlendirilebilir olduğunu Sonuç 3.1.5. de göstermiştik. Böylece TM/D

$$\begin{aligned} TM/D &= \bigcup_{P\in M} \{\lambda\xi_P + D_P : \lambda \in R\} \\ &= \bigcup_{P\in M} \{(P, \lambda\xi_P) : \lambda \in R\} \\ &= \{(P, \lambda\xi_P) : P \in M, \lambda \in R\} \end{aligned}$$

bölüm demeti de reel doğru demeti olarak yönlendirilebilirdir. Bölüm demeti, reel doğru demeti olarak yönlendirilebilir olduğundan yapı grubunu $(GL(1,R) \simeq R, .)$ gurubundan $(GL^+(1,R) \simeq R^+, .)$ altgurubuna indirgeyebiliriz. Böylece TM/D bölüm demeti hiç bir noktada sıfır olmayan bir cross section kabul eder. Diğer bir ifadeyle M manifoldunun her bir U_α komşuluğunda S_α lokal kross sekşını (cross section) $\eta_\alpha(S_\alpha) = 1$ olacak şekilde tanımlayabiliriz. Her noktada S_α ve S kross sekşınları (cross section) sıfır olmuyorsa $S_\alpha = h_\alpha S$ olacak şekilde U_α üzerinde her noktada sıfır olmayan $h_\alpha = \dfrac{1}{\eta_\alpha(S)}$ fonksiyonu vardır. Böylece U_α üzerindeki bir η 1-formunu $\eta = h_\alpha\eta_\alpha$ olarak tanımlarsak M üzerinde bir 1-form tanımlamış oluruz. Ayrıca $d\eta = dh_\alpha \wedge \eta_\alpha + h_\alpha d\eta_\alpha$ ve $\eta = h_\alpha\eta_\alpha$ olduğundan

$$\eta \wedge (d\eta)^n = (h_\alpha)^n \, \eta_\alpha \wedge d\eta_\alpha \neq 0$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. M^{2n+1} manifoldu R^{2n+2} öklid uzayının regüler hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$i : M^{2n+1} \to R^{2n+2}$$

düzgün hiperyüzey immersiyonu vardır. Ayrıca kabul edelimki M^{2n+1} manifoldunun her noktasındaki tanjant uzay orijin noktasını içermesin. Yani her $P \in M$ için $T_PM \cap \{0\} = \emptyset$ olsun. Bu durumda M^{2n+1} manifoldu kontak yapı taşır (Blair 1976).

İspat. R^{2n+2} de $(x_1, x_2, ..., x_{2n+2})$ kartezyen koordinatlar ve

$$\alpha = x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + ... + x_{2n+1} dx_{2n+2} - x_{2n+2} dx_{2n+1}$$

olsun. Böylece

$$d\alpha = 2\left(dx_1 \Lambda dx_2 + ... + dx_{2n+1} \Lambda dx_{2n+2}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha\Lambda\left(d\alpha\right)^n &= 2^{n-1}n!\sum_{i=1}^{2n+1}\left(-1\right)^{i-1}x_i dx_1\Lambda dx_2\Lambda...dx_{i-1}\Lambda dx_{i+1}\Lambda...\Lambda dx_{2n+1}\Lambda dx_{2n+2} \\ &= 2^{n-1}n!\sum_{i=1}^{2n+1}x_i * \left(dx_i\right) \end{aligned}$$

olur. $x_0 = \left(x_{10}, x_{20}, ..., x_{(2n+2)0}\right)$ noktasında M nin tanjant uzayının lineer bağımsız $V_1, V_2, ..., V_{2n+1}$ vektörlerini alalım. Hodge yıldız operatörü $*$ olmak üzere

$$\omega_j = *dx_j\left(V_1, V_2, ..., V_{2n+1}\right)$$

olarak tanımlayalım. $\omega = \left(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{2n+2}\right)$ dersek Sonuç 2.6.2. den ω vektörü M nin normalinde olduğu görülür. Diğer yandan

$$\left(\alpha\Lambda\left(d\alpha\right)^n\right)\left(V_1, V_2, ..., V_{2n+1}\right) = 2^{n-1}n!g(x_0, \omega)$$

eşitliğini kolayca elde edebiliriz. M^{2n+1} manifoldunun her noktasındaki tanjant uzay orijin noktasını içermediğinden, her $x_0 \in M^{2n+1}$ noktası için

$$\alpha\Lambda\left(d\alpha\right)^n \neq 0$$

dır. $\eta = i^*\left(\alpha\right)$ dersek η dönüşümü M^{2n+1} de bir formdur ve

$$\begin{aligned} \eta\Lambda\left(d\eta\right)^n &= i^*\left(\alpha\Lambda\left(d\alpha\right)^n\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\left(M^{2n+1}, \eta\right)$ kontak manifolddur.

Sonuç 3.1.5. R^{2n+2} uzayında

$$S^{2n+1} = \left\{(x_1, x_2, ..., x_{2n+2}) \in R^{2n+2} : (x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_{2n+2})^2 = 1\right\}$$

küresi ve PR^{2n+1} projektif uzayı Teorem 3.1.2. nin şartlarını sağlar. Dolayısıyla bu iki uzay kontak manifolddur.

Teorem 3.1.3. (M^{2n+1}, η) kontak manifold olsun. Bu durumda $T\left(M^{2n+1}\right)$ tanjant demetinin yapı grubu $U(n) \times 1$ grubuna indirgenebilir (Blair 1976).

İspat.$T\left(M^{2n+1}\right)$ tanjant demetinin yapı grubunu $GL(2n+1, R)$ den $O(2n+1)$ grubuna indirgeyebildiğimizi göstermiştik. M^{2n+1} kontak manifold olduğundan manifold olarak yönlendirilebilirdir. Böylece $T\left(M^{2n+1}\right)$ tanjant demeti de vektör demeti olarak yönlendirilebilirdir. Yani yapı grubunu $GL(2n+1, R)$ den $GL^+(2n+1, R)$ ye indirgeyebiliriz. Son iki önerme yapı grububnun, $GL(2n+1, R)$ den

$$SO(2n+1, R) = \{A \in O(2n+1) : \det A = 1\}$$

grubuna indirgeyebileceğimizi söyler. Ayrıca M^{2n+1} manifoldunun $2n$ boyutlu Kontak dağılımının

$$D = \{X \in \chi(M) : \eta\,(X) = 0\}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece Teorem 2.5.2 den M^{2n+1} manifoldunun yapı grubu

$$SO(2n+1, R)$$

den

$$SO(2n, R) \times SO(1, R) = SO(2n, R) \times 1$$

grubuna indirgenebilir. Darboux teoreminin bir sonucu olarak, kontak M manifoldunun bir $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ atlasını her $\alpha \in \Lambda$ ve $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritası için

$$(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, z)$$

koordinat fonksiyonlarını

$$\eta = (\varphi_\alpha)^* \left(dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i \right)$$

olacak şekilde alabiliriz. Böylece

$$d\eta = (\varphi_\alpha)^* \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right)$$

olduğunu görmek kolaydır. $\alpha, \beta \in \Lambda$ için $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) koordinat komşulukларını alalım. Bu koordinat komşuluklarının $P \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasındaki koordinat fonksiyonları sırasıyla

$$(z_1 = x_1, z_2 = x_2, ..., z_n = x_n, z_{n+1} = y_1, z_{n+2} = y_2, ..., z_{2n} = y_n, z_{2n+1} = z) \text{ ve}$$
$$\left(z_1' = x_1', z_2' = x_2', ..., z_n' = x_n, z_{n+1}' = y_1', z_{n+2}' = y_2', ..., z_{2n}' = y_n, z_{2n+1}' = z'\right)$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned} d\eta &= (\varphi_\alpha)^* \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right) \\ d\eta &= \left(\varphi_\beta\right)^* \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i' \wedge dy_i' \right) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

olur. $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset R^n$, $\varphi_\beta(U_\beta) = V_\beta \subset R^n$ olmak üzere $Q_1 = \varphi_\alpha(P) \in V_\alpha$ noktasındaki teğet uzayın standart tabanı

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}|_{Q_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}|_{Q_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_{Q_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}|_{Q_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}|_{Q_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}|_{Q_1}, \frac{\partial}{\partial z}|_{Q_1} \right\}$$

ve $Q_2 = \varphi_\beta(P) \in V_\beta$ noktasındaki teğet uzayın standart tabanı da

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1'}|_{Q_2}, \frac{\partial}{\partial x_2'}|_{Q_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n'}|_{Q_2}, \frac{\partial}{\partial y_1'}|_{Q_2}, \frac{\partial}{\partial y_2'}|_{Q_2}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n'}|_{Q_2}, \frac{\partial}{\partial z'}|_{Q_2} \right\}$$

olur. Burada

$$
\begin{aligned}
e_{iP} &= (\varphi_\alpha)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mid_{Q_1} + y_i(Q_1)\frac{\partial}{\partial z}\mid_{Q_1}\right) \\
e_{(n+i)P} &= (\varphi_\alpha)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\mid_{Q_1}\right), \xi = (\varphi_\alpha)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\mid_{Q_1}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\widetilde{e}_{iP} &= \left(\varphi_\beta\right)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i'}\mid_{Q_2} + y_i'(Q_2)\frac{\partial}{\partial z'}\mid_{Q_2}\right) \\
\widetilde{e}_{(n+i)P} &= \left(\varphi_\beta\right)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_i'}\mid_{Q_2}\right)
\end{aligned}
$$

dersek $\{e_{1P}, e_{2P}, ..., e_{2nP}, \xi\}$ ile $\{\widetilde{e}_{1P}, \widetilde{e}_{2P}, ..., \widetilde{e}_{2nP}, \xi\}$ cümleleri $T_P(M)$ nin birer tabandır. Sonuç.3.1.3 den

$$
\xi = (\varphi_\alpha)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\mid_{Q_1}\right) = \left(\varphi_\beta\right)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z'}\mid_{Q_2}\right)
$$

olduğunu görmek kolaydır. Burada

$$
u = (P; e_{1P}, e_{2P}, ..., e_{2nP}, \xi)\,,\ v = (P; \widetilde{e}_{1P}, \widetilde{e}_{2P}, ..., \widetilde{e}_{2nP}, \xi) \in L(M)
$$

dir. Böylece $v = ua$ olacak şekilde bir

$$
a = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} G_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SO(2n, R) \times SO(1, R)
$$

vardır. Burada $G_{\alpha\beta} \in SO(2n, R)$,

$$
\widetilde{e}_{iP} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_{jP} \tag{3.1.3}
$$

dir. Diğer taraftan

$$
E_{iP} = (\varphi_\alpha)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mid_{Q_1}\right), E_{(n+i)P} = (\varphi_\alpha)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\mid_{Q_1}\right)
$$

ve

$$\widetilde{E}_{iP} = (\varphi_\beta)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i'}\mid_{Q_2}\right), \widetilde{E}_{(n+i)P} = (\varphi_\beta)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_i'}\mid_{Q_2}\right)$$

dersek, $\{E_{1P}, E_{2P}, ..., E_{2nP}, \xi\}$ ile $\left\{\widetilde{E}_{1P}, \widetilde{E}_{2P}, ..., \widetilde{E}_{2nP}, \xi\right\}$ cümleleri de T_PM birer tabanı olur. $i = 1, 2, ..., n$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_{iP} &= (\varphi_\beta)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i'}\mid_{Q_2} + y_i'(Q_2)\frac{\partial}{\partial z'}\mid_{Q_2}\right) \\
&= (\varphi_\beta)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i'}\mid_{Q_2}\right) + y_i'(P)\,(\varphi_\beta)_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z'}\mid_{Q_2}\right) \\
&= \widetilde{E}_{iP} + y_i'(P)\xi
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$e_{iP} = E_{iP} + y_i(P)\xi$$

olur. Ayrıca $\widetilde{e}_{n+iP} = \widetilde{E}_{(n+i)P}$ ve $e_{(n+i)P} = E_{(n+i)P}$ olduğu görülür. Son dört eşitlikten ve (3.1.3) eşitliğinden

$$\widetilde{E}_{iP} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}E_{jP} \tag{3.1.4}$$

olduğunu görmek kolaydır. Sonuç olarak (3.1.3) ve (3.1.4) eşitliklerinden, kontak dağılımından $\{e_{1P}, e_{2P}, ..., e_{2nP}\}$ tabanından $\{\widetilde{e}_{1P}, \widetilde{e}_{2P}, ..., \widetilde{e}_{2nP}\}$ tabanına bir geçiş matrisi

$$J\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right) = G_{\alpha\beta}$$

olarak elde edilir. Ayrıca (3.1.2) den

$$\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)^*\left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i\right) = \sum_{i=}^{n} dx_i' \wedge dy_i' \tag{3.1.5}$$

elde edilir. (3.1.5) eşitliğinin $\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_k'}\mid_{Q_2}\right), \left(\frac{\partial}{\partial z_l'}\mid_{Q_2}\right)\right)$ noktasındaki değerini hesaplarsak

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i\right)\left(\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)_*\left(\frac{\partial}{\partial z_k'}\mid_P\right), \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)_*\left(\frac{\partial}{\partial z_l'}\mid_P\right)\right) \\
= &\left(\sum_{i=1}^{n} dx_i' \wedge dy_i'\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_k'}\mid_P\right), \left(\frac{\partial}{\partial z_l'}\mid_P\right)\right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.1.1) eşitliğinden

$$\left(G_{\alpha\beta}\right)^T J_0 G_{\alpha\beta} = J_0$$

eşitliği elde edilir. $G_{\alpha\beta} \in SO(2n, R)$ olduğundan $\left(G_{\alpha\beta}\right)^T = \left(G_{\alpha\beta}\right)^{-1}$ dir. Sonuç olarak

$$G_{\alpha\beta} J_0 = J_0 G_{\alpha\beta} \tag{3.1.6}$$

olur. A, B, C, D matrisleri $n \times n$ tipinde matrisler olmak üzere

$$G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.1.6) eşitliğinden $A = D$ ve $C = -B$ olduğu görülür. Böylece

$$G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$\begin{aligned} \Psi : (SO(2n, R), .) &\to (GL(n, C), .) \\ G_{\alpha\beta} &\to \Psi\left(G_{\alpha\beta}\right) = A + iB \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlarsak, bu dönüşümün iyi tanımlı ve birebir olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca

$$G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \text{ ve } G_{\alpha'\beta'} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ -B' & A' \end{bmatrix}$$

için

$$\begin{aligned} \Psi\left(G_{\alpha\beta}.G_{\alpha'\beta'}\right) &= \Psi \begin{bmatrix} AA' - BB' & AB' + BA' \\ -\left(AB' + BA'\right) & AA' - BB' \end{bmatrix} \\ &= \left(AA' - BB'\right) + i\left(AB' + BA'\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Psi\left(G_{\alpha\beta}\right).\Psi\left(.G_{\alpha'\beta'}\right) &= (A+iB)\left(A'+iB'\right)\\ &= \left(AA'-BB'\right)+i\left(AB'+BA'\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\Psi\left(G_{\alpha\beta}.G_{\alpha'\beta'}\right)=\Psi\left(G_{\alpha\beta}\right).\Psi\left(.G_{\alpha'\beta'}\right)$$

elde edilir. Böylece Ψ bir grup monomorphismi olur. Burada

$$\left(\overline{\Psi\left(G_{\alpha\beta}\right)}\right)^T=A^T-iB^T$$

ve

$$\begin{aligned}\Psi\left(\left(G_{\alpha\beta}\right)^T\right) &= \Psi\begin{bmatrix} A^T & -B^T \\ -\left(-B^T\right) & A^T\end{bmatrix}\\ &= A^T-iB^T\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Psi\left(G_{\alpha\beta}\right)}\right)^T &= \Psi\left(\left(G_{\alpha\beta}\right)^T\right)\\ &= \Psi\left(\left(G_{\alpha\beta}\right)^{-1}\right)\\ &= \Psi\left(G_{\alpha\beta}\right)^{-1}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikten $\Psi\left(G_{\alpha\beta}\right)\in U(n)$ olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca her $A+iB\in U(n)$ için

$$\left(\overline{A+iB}\right)^T=A^T-iB^T=(A+iB)^{-1}$$

olduğundan

$$\left(A^T-iB^T\right)(A+iB)=I_n$$

olur. Çarpma işlemini yaparsak matris eşitliği ve iki karmaşık sayının eşitliği tanımlarından

$$\begin{aligned} A^TA + B^TB &= AA^T + BB^T = I_n \\ A^TB - B^TA &= B^TA - A^TB = 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A^T & -B^T \\ B^T & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^TA + B^TB & A^TB - B^TA \\ A^TB - B^TA & A^TA + B^TB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\ &= I_{2n} \end{aligned}$$

olur. Son eşitlikten $\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \in SO(2n, R)$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\Psi : (SO(2n, R), .) \to U(n) \subset (GL(n, C), .)$$

dönüşümü bir izomorfizim ve $SO(2n, R) \simeq \Psi\,(SO(2n, R)) = U(n)$ olur. Sonuç olarak kontak manifoldun yapı gurubu $U(n) \times 1$ gurubuna indirgenebilir.

3.2 Hemen Hemen Kontak Manifold

Tanım 3.2.1.(Hemen Hemen Kontak Manifold) M bir $2n+1$ boyutlu manifold ve ϕ, ξ, η da M üzerinde, sırasıyla, (1,1),(1,0),(0,1) tipinde tensör alanları olsun. Eğer ϕ, ξ, η için,$\forall X \in \chi(M)$ olmak üzere

$$i)\ \eta(\xi) = 1 \text{ ve } ii)\ \phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \qquad (3.2.1)$$

özelikleri sağlanıyorsa (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde hemen hemen kontak yapı ve (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsüne de **hemen hemen kontak manifold** denir (Blair 1976).

Örnek 3.2.1. $(x_i, y_i, z) = (x_1, .., x_n, y_1, .., y_n, z)$ standart koordinatlar olsun ve

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i)$$

1-formununu düşünelim. Burada $\xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$ için $\eta(\xi) = 1$ olduğu görülür. Ayrıca ϕ endomorfizmine karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon\delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon y_i & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\phi^2(X) &= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon\delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon y_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon\delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon y_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ -y_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y_i & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+1} \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i X_i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ve

$$\phi^2(X) = -\begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+1} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(X_{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i X_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$X = X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + X_{n+i} \frac{\partial}{\partial y_i} + X_{2n+1} \frac{\partial}{\partial z}$$

dir. Ayrıca $\eta(X)$ değerini hesaplarsak

$$\begin{aligned}
\eta(X) &= \frac{1}{2}\left(dz - \sum_{k=1}^{n} y_k dx_k\right)\left(X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + X_{n+i} \frac{\partial}{\partial y_i} + X_{2n+1} \frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(X_{2n+1} - \sum_{k=1}^{n} y_k dx_k \left(X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + X_{n+i} \frac{\partial}{\partial y_i} + X_{2n+1} \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}(X_{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i X_i)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ dir. Böylece $(R^{2n+1}(-3\varepsilon), \phi, \xi, \eta,)$ hemen hemen kontak manifolddur.

Teorem 3.2.1. $2n+1-$boyutlu $(M, \phi, \xi, \eta, \varepsilon)$ hemen hemen kontak manifoldunda aşağıdaki özelikler sağlanır (Blair 1976).

$$i)\phi(\xi) = 0, \quad ii)\, \eta \circ \phi = 0 \;\text{ ve }\quad iii)\, rank\phi = 2n \tag{3.2.2}$$

İspat. (i) (3.2.1) de X yerine ξ yazarsak $\phi^2(\xi) = -\xi + \eta(\xi)\xi$ elde edilir. Burada $\eta(\xi) = 1$ eşitliğini kullanırsak $\phi^2(\xi) = 0$ bulunur. Kabul edelim ki $\phi(\xi) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\phi^3(\xi) = \phi(\phi^2(\xi)) = 0$ dır. Ayrıca $\phi^3(\xi) = \phi^2(\phi(\xi))$ olarak da düşünebiliriz. Böylece

$$\phi^2(\phi(\xi)) = -\phi(\xi) + \eta(\phi(\xi))\xi$$

elde edilir. Burada $\phi^3(\xi) = 0$ olduğundan

$$\phi(\xi) = \eta(\phi(\xi))\xi \tag{3.2.3}$$

sonucuna ulaşırız. Şayet (3.2.3) de $\eta(\phi(\xi)) = 0$ ise $\phi(\xi) = 0$ olacaktır. Eğer

$$\eta(\phi(\xi)) \neq 0$$

ise (3.2.3) de her iki tarafın ϕ altında görüntüsünü alırsak

$$\phi^2(\xi) = \eta(\phi(\xi))\phi(\xi)$$

elde edilir. Burada $\phi^2(\xi) = 0$ ve $\eta(\phi(\xi)) \neq 0$ olduğundan $\phi(\xi) = 0$ olur. Dolayısıyla, $\phi(\xi) = 0$ dır.

ii) $\forall X \in \chi(M)$ için $\phi^3(X) = \phi^2(\phi(X))$ olarak düşünüldüğünde

$$\phi^3(X) = -\phi X + \eta(\phi X)\xi \tag{3.2.4}$$

olacaktır. $\phi^3(X) = \phi(\phi^2(X))$ olarak düşünüldüğünde ise

$$\begin{aligned} \phi^3(X) &= \phi(\phi^2(X)) \\ &= \phi(-X + \eta(X)\xi) \\ &= -\phi X + \eta(X)\phi\xi \end{aligned}$$

olur. Burada $\phi(\xi) = 0$ eşitliğini kullanırsak

$$\phi^3(X) = -\phi(X) \tag{3.2.5}$$

elde edilir. Böylece (3.2.4) ve (3.2.5) den

$$-\phi X + \eta(\phi X)\xi = -\phi(X)$$

ve $\eta(\phi X)\xi = 0$ eşitliğini elde ederiz. Burada $\xi \neq 0$ olduğundan $\eta(\phi X) = 0$ olmalıdır. Bu eşitlik $\forall X \in \chi(M)$ için sağlandığından $\eta \circ \phi = 0$ dır.

iii) Biliyoruz ki

$$\phi : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümü lineer olduğundan dolayı çekirdeği vardır ve bu dönüşümün çekirdeğini

$$Ker\phi = \{X : \phi X = 0, X \in \chi(M)\}$$

olarak ifade edebiliriz. Burada

$$Ker\phi = Sp\{\xi\}$$

dir. Çünkü, $\forall X \in Ker\phi$ için$\phi(X) = 0$ ise $\phi^2(X) = 0$ dır. (3.2.1) ve $-X + \eta(X)\xi = 0$ eşitliğinden $X = \eta(X)\xi$ elde edilir ve böylece $Ker\phi \subset Sp\{\xi\}$ olur. Diğer taraftan $\forall X \in Sp\{\xi\}$ için $X = \lambda\xi$ şeklinde yazabiliriz. Böylece,

$$\phi(X) = \lambda\phi(\xi)$$

olur. Burada $\phi(\xi) = 0$ olduğundan $\phi(X) = 0$ ve $X \in Ker\phi$ olur. Dolayısıyla $Sp\{\xi\} \subset Ker\phi$ elde edilir. Sonuç olarak

$$Ker\phi = Sp\{\xi\} \tag{3.2.6}$$

eşitliğine ulaşırız. Lineer cebirden

$$rank\phi + sıfırlık\phi = boy\chi(M)$$

olduğunu biliyoruz. Burada, $sıfırlık\phi = boy(Ker\phi)$ ve (3.2.6) dan $boy(Ker\phi) = 1$ olur. Böylece, $rank\phi + 1 = 2n + 1$ ve $rank\phi = 2n$ elde edilir.

Tanım 3.2.2(Hemen Hemen Kontak Metrik Manifold) (M, ϕ, ξ, η), $(2n+1)-$boyutlu hemen hemen kontak manifold olsun ve 'g' Riemannian veya Lorentzian metrik iken

$$g(\xi, \xi) = \varepsilon \tag{3.2.7}$$

$(\varepsilon = \pm 1)$ olarak tanımlansın. Şayet $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \tag{3.2.8}$$

koşulu sağlanıyorsa $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ yapısına **hemen hemen kontak metrik yapı** ve $(M, \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ altılısına da **hemen hemen kontak metrik manifold** denir (Belkhelfa 2002).

Örnek 3.2.2. $(R^{2n+1}(-3\varepsilon), \phi, \xi, \eta,)$ hemen hemen kontak manifoldunda 'g' metriğini de

$$g = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(dx_i^2 + dy_i^2) + \varepsilon\eta\otimes\eta$$

olarak tanımlarsak bu metriğe karşılık gelen matrisin $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \delta_{ij} + \varepsilon y_i y_j & 0 & -\varepsilon y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon y_j & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$ olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned} g(X,\xi) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} X_i & X_{n+i} & X_{2n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_{ij} + \varepsilon y_i y_j & 0 & -\varepsilon y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon y_j & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} X_i & X_{n+i} & X_{2n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2\varepsilon y_i \\ 0 \\ 2\varepsilon \end{bmatrix} \\ &= \varepsilon\frac{1}{2}\left(X_{2n+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i X_i\right) \end{aligned}$$

ve $\eta(X) = \varepsilon g(X,\xi)$ olduğu görülür. Ayrıca $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayının $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ doğal tabanından başka

$$\varphi = \left(e_i = 2\frac{\partial}{\partial y_i}, e_{n+i} = \varepsilon\phi e_i = \varepsilon 2(\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial z}), e_{2n+1} = \xi = 2\frac{\partial}{\partial z}\right)\ (i = 1, 2, ..., n)$$

tabanını da alabiliriz. Burada

$$\begin{aligned} g(e_i, e_j) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(dx_k(e_i)dx_k(e_j) + dy_k(e_i)dy_k(e_j)) + \varepsilon\eta(e_i)\eta(e_j) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(dx_k(2\frac{\partial}{\partial y_i})dx_k(2\frac{\partial}{\partial y_j}) + dy_k(2\frac{\partial}{\partial y_i})dy_k(2\frac{\partial}{\partial y_j})\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik}\delta_{jk}) \\
&= \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
g(\phi e_i, \phi e_j) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} (dx_k(\phi e_i)dx_k(\phi e_j) + dy_k(\phi e_i)dy_k(\phi e_j)) + \varepsilon\eta(\phi e_i)\eta(\phi e_j) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} dx_k(2(\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial z}))dx_k(2(\frac{\partial}{\partial x_j} + y_j\frac{\partial}{\partial z})) \\ +dy_k(2(\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial z}))dy_k(2(\frac{\partial}{\partial x_j} + y_j\frac{\partial}{\partial z})) \end{array} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(dx_k(\frac{\partial}{\partial x_i})dx_k(\frac{\partial}{\partial x_j}) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik}\delta_{jk}) \\
&= \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
g(e_i, \phi e_j) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} (dx_k(e_i)dx_k(\phi e_j) + dy_k(e_i)dy_k(\phi e_j)) + \varepsilon\eta(e_i)\eta(\phi e_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(dx_k(\frac{\partial}{\partial y_i})dx_k(\frac{\partial}{\partial x_j} + y_j\frac{\partial}{\partial z}) + dy_k(\frac{\partial}{\partial y_i})dy_k(\frac{\partial}{\partial x_j} + y_j\frac{\partial}{\partial z}) \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ve $g(e_i, \xi) = g(\phi e_i, \xi) = 0, g(\xi, \xi) = \varepsilon$ olduğundan φ tabanı ortogonaldir. Burada

$$X = \overline{X}^i e_i + \overline{X}^{n+i} e_{n+i} + \overline{X}^{2n+1} e_{2n+1}$$

ve

$$Y = \overline{Y}^j e_j + \overline{Y}^{n+j} e_{n+j} + \overline{Y}^{2n+1} e_{2n+1}$$

olsun. Böylece

$$\phi X = \varepsilon(\overline{X}^i e_{n+i} - \overline{X}^{n+i} e_i), \ \ \phi Y = \varepsilon(\overline{Y}^j e_{n+j} - \overline{Y}^{n+j} e_j)$$

dir. $\eta(\phi X) = \eta(\phi Y) = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
g(\phi X, \phi Y) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(dx_k(\phi X)dx_k(\phi Y) + dy_k(\phi X)dy_k(\phi Y)) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{X}^i dx_k(e_{n+i})\overline{Y}^j dx_k(e_{n+j}) + (-\overline{X}^{n+i})dy_k(e_i)(-\overline{Y}^{n+j})dy_k(e_j)\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}4\left(\overline{X}^i\overline{Y}^j + \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^{n+j}\right)\delta_{ki}\delta_{kj}\ , \qquad i = j = k \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}^i\overline{Y}^i + \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^{n+i}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
g(X, Y) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(dx_k(X)dx_k(y) + dy_k(X)dy_k(Y)) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(dx_k(\overline{X}^{n+i}e_{n+i})dx_k(\overline{Y}^{n+j}e_{n+j}) + dy_k(\overline{X}^i e_i)dy_k(\overline{Y}^j e_j)\right) \\
&\quad + \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}^i\overline{Y}^i + \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^{n+i}\right) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \\
&= g(\phi X, \phi Y) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla $g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y)$ sonucuna ulaşırız. Böylece $(R^{2n+1}(-3\varepsilon), \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik manifoldur.

Teorem 3.2.2. $(\phi, \xi, \eta, \varepsilon)$ yapısı ile verilen $(2n+1)$ boyutlu bir hemen hemen kontak M manifoldunda

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir 'g' Riemanian veya Lorentzian metrik tanımlanabilir (Belkhelfa 2002).

İspat. Her düzgün manifold parakompak olduğundan Riemannian metrik tanımlanabilir. Kabul edelim ki $h^{'}$, M de Riemanian metrik olsun ve 'h' metriğini de

$$h(X,Y)=h^{'}(\phi^2(X),\phi^2(Y))+\varepsilon\eta(X)\eta(Y) \tag{3.2.9}$$

şeklinde tanımlayalım.

h ın simetrik olduğu aşikardır.

h ın iki lineer olduğunu ispatlayalım. Burada $h^{'},\phi$ ve η nın lineerliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
h(\lambda X+\varphi X^{'},Y) &= h^{'}(\phi^2(\lambda X+\varphi X^{'}),\phi^2(Y))+\varepsilon\eta(\lambda X+\varphi X^{'})\eta(Y)\\
&= h^{'}(\lambda\phi^2(X)+\varphi\phi^2(X^{'}),\phi^2(Y))+\varepsilon(\lambda\eta(X)+\varphi\eta(X^{'}))\eta(Y)\\
&= \lambda h^{'}(\phi^2(X),\phi^2(Y))+\varphi h^{'}(\phi^2(X^{'}),\phi^2(Y))\\
&\quad +\varepsilon\lambda\eta(X)\eta(Y)+\varepsilon\varphi\eta(X^{'})\eta(Y)\\
&= \lambda(h^{'}(\phi^2(X),\phi^2(Y))+\varepsilon\eta(X)\eta(Y))+\varphi(h^{'}(\phi^2(X^{'}),\phi^2(Y))\\
&\quad +\varepsilon\eta(X^{'})\eta(Y))\\
&= \lambda h(X,Y)+\varphi h(X^{'},Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca h simetrik olduğundan bilineerdir.

Son olarak h ın nondejenere olduğunu ispatlamalıyız. $\forall X\in\chi(M)$ için

$$h(X,Y)=h^{'}(\phi^2(X),\phi^2(Y))+\varepsilon\eta(X)\eta(Y)=0$$

olsun. $Y=\xi$ alırsak

$$h^{'}(\phi^2(X),\phi^2(\xi))+\varepsilon\eta(X)\eta(\xi)=0$$

olur. (3.2.2) den $\eta(X)=0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$h^{'}(\phi^2(X),\phi^2(Y))=0$$

olur. Burada $Y = X$ alırsak

$$h^{'}(\phi^2(X), \phi^2(X)) = 0$$

olur. Pozitif tanımlılıktan ve $\eta(X) = 0$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \phi^2(X) &= 0 \\ -X + \eta(X)\xi &= 0 \\ X &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $h^{'}$ Riemannian metrik ise h da Riemannian veya Lorentzian metrik dir. Şimdi 'g' yi

$$g(X,Y) = \frac{1}{2}(h(X,Y) + h(\phi(X), \phi(Y)) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y)) \tag{3.2.10}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada g nin bilineer ve simetrik olduğunu görmek kolaydır, fakat nondejenere olduğunu göstermeliyiz. (3.2.9)'da $Y = \xi$ alırsak

$$h(X,\xi) = h^{'}(\phi^2(X), \phi^2(\xi)) + \varepsilon\eta(X)\eta(\xi)$$

elde edilir. (3.2.2) den $\phi^2(\xi) = 0$ olduğundan ve (3.2.1) den $h(X,\xi) = \varepsilon\eta(X)$ olur. Böylece

$$\eta(X) = \varepsilon h(X,\xi) \tag{3.2.11}$$

elde edilir. (3.2.11) de $X = \xi$ alırsak

$$h(\xi,\xi) = \varepsilon \tag{3.2.12}$$

Şimdi $\forall X \in \chi(M)$ için

$$g(X,Y) = \frac{1}{2}(h(X,Y) + h(\phi(X), \phi(Y)) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y)) = 0$$

olsun. $Y=\xi$ alırsak

$$\frac{1}{2}(h(X,\xi)+h(\phi(X),\phi(\xi))+\varepsilon\eta(X)\eta(\xi))=0$$

olur. (3.2.2) den

$$\frac{1}{2}(h(X,\xi)+\varepsilon\eta(X))=0$$

dır. (3.2.11) den $\varepsilon\eta(X)=0$ ise $\eta(X)=0$ olur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2}(h(X,Y)+h(\phi(X),\phi(Y))=0$$

elde edilir. Burada $Y=X$ alırsak

$$\frac{1}{2}(h(X,X)+h(\phi(X),\phi(X))=0$$

(3.2.9) dan

$$\begin{aligned} h(\phi(X),\phi(X)) &= h^{'}(\phi^3(X),\phi^3(X)) \\ &= h^{'}(-X,-X) \\ &= h^{'}(X,X) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(h(X,X)+h(\phi(X),\phi(X)) &= \frac{1}{2}(h^{'}(\phi^2(X),\phi^2(X))+h^{'}(X,X) \\ 0 &= \frac{1}{2}(h^{'}(-X,-X)+h^{'}(X,X)) \\ 0 &= h^{'}(X,X) \end{aligned}$$

olduğundan ve $h^{'}$ nün pozitif tanımlı olmasından $X=0$ bulunur. Böylece g metriği nondejenere olur. Benzer şekilde (3.2.10) dan $Y=\xi$ alırsak yine (3.2.1) den ve (3.2.2) den

$$g(X,Y)=\frac{1}{2}(h(X,\xi)+\varepsilon\eta(X))$$

olur. (3.2.11) den

$$\eta(X) = \varepsilon g(X, \xi) \tag{3.2.13}$$

elde edilir. (2.1.13) de $X = \xi$ alırsak

$$g(\xi, \xi) = \varepsilon \tag{3.2.14}$$

sonucuna ulaşırız. Ayrıca (3.2.10) da X yerine ϕX, Y yerine ϕY yazarsak

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}(h(\phi(X), \phi(Y)) + h(\phi^2(X), \phi^2(Y)) + \varepsilon\eta(\phi(X))\eta(\phi(Y)))$$

dir. (3.2.1) ve (3.2.2) nin (ii) kullanırsak

$$\begin{aligned} g(\phi(X), \phi(Y)) &= \frac{1}{2}(h(\phi(X), \phi(Y)) + h(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi) \\ &= \frac{1}{2}(h(X, Y) + h(\phi(X), \phi(Y)) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y)) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \\ &= g(X, Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1. $(2n+1)$ boyutlu M manifoldu hemen hemen kontak yapısı ile verilsin. Bu durumda Teorem 3.2.2 gereğince

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir 'g' Riemannian veya Lorentzian metrik vardır. Dolayısıyla Tanım 3.2.4 den $(M, \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapıdır.

Sonuç 3.2.2. Sonuç 3.2.1 de 'g' metriğinde Y yerine $\phi(Y)$ yazarsak

$$g(\phi(X), \phi^2(Y)) = g(X, \phi(Y)) - \varepsilon\eta(X)\eta(\phi(Y))$$

olur. (3.2.2) nin (ii) şıkkından $\eta(\phi(Y))=0$ dır.Böylece

$$\begin{aligned} g(\phi(X),-Y+\eta(Y)\xi) &= g(X,\phi(Y)) \\ -g(\phi(X),Y)+\eta(Y)g(\xi,\phi(X)) &= g(X,\phi(Y)) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.2.13) den $g(\xi,\phi(X))=\varepsilon\eta(\phi(X))=0$ olduğundan

$$g(\phi(X),Y)+g(X,\phi(Y))=0 \tag{3.2.15}$$

bağıntısını elde ederiz. Böylece ϕ ye karşılık gelen matris antisimetriktir.

Teorem 3.2.3. M, $2n+1$ boyutlu kontak manifoldu verilsin. Dolayısıyla M de kontak η 1-formu vardır. Bu η 1-formu yardımıyla M de

$$d\eta(X,Y)=\varepsilon g(X,\phi(Y)) \tag{3.2.16}$$

olacak şekilde $(\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısı vardır. Tersine, $(M,\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda Φ 2-formunu

$$\Phi(X,Y)=\varepsilon g(X,\phi(Y))$$

olarak tanımlarsak $\eta\wedge(\Phi)^n\neq 0$ dır (Yano 1984).

Tanım 3.2.3. M, $(2n+1)$ boyutlu manifoldu $(\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısı verilsin. Şayet $d\eta(X,Y)=\varepsilon g(X,\phi(Y))$ oluyorsa $(M,\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ ye kontak metrik manifold, $(\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ yapısına da M de kontak metrik yapı denir (Belkhelfa 2002).

Örnek 3.2.3. $(R^{2n+1}(-3\varepsilon),\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunda $\eta=\frac{1}{2}(dz-\sum\limits_{i=1}^{n}y_idx_i)$ 1-formunu göz önüne alırsak $d\eta=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(dx_i\wedge dy_i)$ dir. Burada her

$$X=X_i\frac{\partial}{\partial x_i}+X_{n+i}\frac{\partial}{\partial y_i}+X_{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}$$

ve

$$Y = Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_{n+i} \frac{\partial}{\partial y_i} + Y_{2n+1} \frac{\partial}{\partial z}$$

için

$$\begin{aligned}
d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(dx_i \wedge dy_i)(X,Y) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(dx_i(X)dy_i)(Y) - (dx_i)(Y)(dy_i)(X)) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_iY_{n+i} - Y_iX_{n+i})
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $X = \begin{bmatrix} X_i & X_{n+i} & X_{2n+1} \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
g(X,\phi(Y)) &= \frac{1}{4}X \begin{bmatrix} \delta_{ij} + \varepsilon y_i y_j & 0 & -\varepsilon y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon y_j & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon\delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon y_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i \\ Y_{n+i} \\ Y_{2n+1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} X_i & X_{n+i} & X_{2n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ij} + \varepsilon y_i y_j & 0 & -\varepsilon y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon y_j & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon Y_{n+i} \\ -\varepsilon Y_i \\ \varepsilon y_i Y_{n+i} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon \begin{bmatrix} X_i & X_{n+i} & X_{2n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon Y_{n+i} - (y_i)^2 Y_{n+i} + (y_i)^2 Y_{n+i} \\ -\varepsilon Y_i \\ -y_i Y_{n+i} + y_i Y_{n+i} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon \begin{bmatrix} X_i & X_{n+i} & X_{2n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon Y_{n+i} \\ -\varepsilon Y_i \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \varepsilon \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_iY_{n+i} - Y_iX_{n+i}) \\
&= \varepsilon d\eta(X,Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısı ile $d\eta(X,Y) = \varepsilon g(X,\phi(Y))$ eşitliğine ulaşmış oluruz. $(R^{2n+1}(-3\varepsilon), \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ Kontak metrik manifolddur.

Sonuç 3.2.3. Her kontak metrik manifold, kontak manifolddur.

Tanım 3.2.4. M, $2n+1$ boyutlu manifoldu $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ kontak metrik yapısı ile verilsin. Şayet ξ killing vektör alanı ise M ye **K-Kontak** manifold, $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ yapısına da **K-Kontak** yapı denir (Belkhelfa 2002).

Teorem 3.2.4. M, $2n+1$ boyutlu manifoldu $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ kontak metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.
$i)$ M bir K-Kontak manifoldtur.
$ii)$ $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = 0 \tag{3.2.17}$$

dır.
$iii)$ $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi = -\phi(X) \tag{3.2.18}$$

dır (Blair 1976).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ M bir K-Kontak manifold olsun. Dolayısıyla ξ bir killing vektör olur. M aynı zamanda kontak metrik manifold olduğundan

$$d\eta(X, Y) = \varepsilon g(X, \phi(Y)) \tag{3.2.19}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} 2d\eta(X, Y) &= X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta[X, Y] \\ &= Xg(Y, \xi) - Yg(X, \xi) - g([X, Y], \xi) \\ &= g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) - g(\nabla_Y X, \xi) - g(X, \nabla_Y \xi) \\ &\quad -g(\nabla_X Y, \xi) - g(\nabla_Y X, \xi) \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$2d\eta(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi) \tag{3.2.20}$$

elde edilir. Ayrıca ξ killing vektör olduğundan $L_\xi g = 0$ dır. Burada $(L_\xi g)(X,Y)$ yi hesaplarsak

$$\begin{aligned}(L_\xi g)(X,Y) &= \xi g(X,Y) - g([\xi,X],Y) - g(X,[\xi,Y]) \\ &= g(\nabla_\xi X,Y) + g(\nabla_\xi Y,X) - g(\nabla_\xi X,Y) + g(\nabla_X \xi,Y) \\ &\quad -g(\nabla_\xi Y,X) + g(\nabla_Y \xi,X)\end{aligned}$$

ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$(L_\xi g)(X,Y) = g(\nabla_X \xi,Y) + g(X,\nabla_Y \xi) \qquad (3.2.21)$$

olur, burada $L_\xi g = 0$ olduğundan

$$g(\nabla_X \xi,Y) + g(X,\nabla_Y \xi) = 0 \qquad (3.2.22)$$

eşitliğini elde ederiz.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ (3.2.17) sağlansın. Dolayısıyla

$$g(\nabla_X \xi,Y) = -g(X,\nabla_Y \xi) \qquad (3.2.23)$$

olur. (3.2.20) ve (3.2.23) den

$$d\eta(X,Y) = g(\nabla_X \xi,Y) = g(X,\phi(Y)) \qquad (3.2.24)$$

elde edilir. ϕ antismetrik olduğundan

$$g(X,\phi(Y)) = -g(\phi X,Y) = g(\nabla_X \xi,Y)$$

olur ve bu eşitlik $\forall X \in \chi(M)$ için sağlandığından

$$\nabla_X \xi = -\phi(X)$$

sonucuna ulaşılır.

$(iii) \Rightarrow (i)$:$\forall X \in \chi(M)$ için $\nabla_X \xi = -\phi(X)$ olsun.(3.2.21) den ve ϕ antisimetrik olduğundan

$$\begin{aligned}(L_\xi g)(X,Y) &= g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi)\\ &= g(-\phi(X), Y) + g(X, -\phi(Y))\\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Böylece ξ killing vektör ve M manifoldu K-Kontak manifolddur.

3.3 Hemen Hemen Kontak Manifoldlarda Torsiyon Tensörü

M, $2n+1$ boyutlu manifoldunda (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontak metrik yapısı verilsin. Biliyoruz ki R reel eksen de bir manifolddur. Dolayısıyla $M \times R$ kartezyen çarpım uzayı da $(2n+2)$ boyutlu bir çarpım manifoldu olacaktır. Burada R deki vektör alanları

$$\chi(R) = \left\{ f\frac{d}{dt} : f \in C^\infty(M, R) \right\}$$

şeklindedir. Şimdi 'J' kompleks dönüşümünü

$$\begin{aligned} J &: \chi(M \times R) \longmapsto \chi(M \times R)\\ &: (X, f\frac{d}{dt}) \longrightarrow J(X, f\frac{d}{dt})\end{aligned}$$

ve

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi(X) - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{3.3.1}$$

olarak tanımlayalım. Bu dönüşümde

$i)$ Lineer bir dönüşümdür.

$ii)$ $J^2 = -I$

özellikleri vardır (Yano 1984).

İspat. *i)* $\forall\,(X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt}) \in \chi(M\times R)$ için

$$\begin{aligned}
J(\lambda(X, f\frac{d}{dt}) + \mu(Y, g\frac{d}{dt})) &= J((\lambda X + \mu Y, (\lambda f + \mu g)\frac{d}{dt})) \\
&= (\phi(\lambda X + \mu Y) - (\lambda f + \mu g)\xi, \eta(\lambda X + \mu Y)\frac{d}{dt}) \\
&= (\lambda\phi(X) + \mu\phi(Y) - \lambda f\xi - \mu g\xi, \lambda\eta(X)\frac{d}{dt} + \mu\eta(Y)\frac{d}{dt}) \\
&= (\lambda\phi(X) - \lambda f\xi, \lambda\eta(X)\frac{d}{dt}) + (\lambda\phi(X) - \mu g\xi, \mu\eta(Y)\frac{d}{dt}) \\
&= \lambda J(X, f\frac{d}{dt}) + \mu J(Y, g\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

olur. Böylece J nin lineer olduğu görülür.
ii) $\forall(X, f\frac{d}{dt}) \in \chi(M\times R)$ için

$$\begin{aligned}
J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= J(J(X, f\frac{d}{dt})) \\
&= J(\phi(X) - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \\
&= (\phi(\phi(X) - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\phi(X) - f\xi)\frac{d}{dt}) \\
&= (\phi^2(X) - f\phi(\xi) - \eta(X)\xi, ((\eta\circ\phi)(X) - f\eta(\xi))\frac{d}{dt}
\end{aligned}$$

(3.2.1) ve (3.2.2) den

$$\begin{aligned}
J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= (-X + \eta(X)\xi - \eta(X)\xi, -f\frac{d}{dt}) \\
&= (-X,\ -f\frac{d}{dt}) \\
&= -(X,\ f\frac{d}{dt}) \\
&= -I(X,\ f\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

olur. Bu $\forall(X, f\frac{d}{dt}) \in \chi(M\times R)$ için sağlandığından $J^2 = -I$ dir. Burada J ye $M\times R$ üzerinde hemen hemen kompleks yapı denir.

Tanım 3.3.1.(Nijenhuis Torsiyon Tensörü) F bir M manifoldu üzerinde (1,1) tipinde tensör alanı olmak üzere N_F tensör alanı

$$\begin{aligned} N_F : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X,Y) &\longrightarrow N_F\,(X,Y) \end{aligned}$$

ve

$$N_F\,(X,Y) = F^2([X,Y]) + [F(X),F(Y)] - F([F(X),Y]) - F([X,F(Y)])$$

olacak şekilde (1,2) tipinde bir tensör alanıdır. N_F tensör alanına Nijehuis tensör alanı denir. Burada $F = J$ alırsak

$$N_J(X,Y) = -\,[X,Y] + [J(X),J(Y)] - J([J(X),Y]) - J([X,J(Y)]$$

elde edilir (Yano 1984).

Tanım 3.3.2.(İntegrallenebilir manifold) Şayet Nijehuis torsiyonu N_J özdeş olarak sıfır ise, J hemen hemen komleks yapıya **integrallenebilir** denir (Yano 1984).

Tanım 3.3.3.(Normal manifold) Şayet $M \times R$ de J hemen hemen komleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ,ξ,η) hemen hemen kontak yapısına **normal** yapı denir (Yano 1984).

Sonuç 3.3.1. N_F Nijenhuis torsiyon tensörü iki lineer ve antismetrik tensördür.

Tanım 3.3.4.($\chi(M\times R)$ de Braket Operatörü) $(2n+1)$ boyutlu bir M manifoldu, $(\phi,\xi,\eta,)$ hemen hemen kontak yapısı ile verilsin. $M\times R$ nin de bir manifold olduğunu belirtmiştik. $M \times R$ deki operatörü

$$\begin{aligned} [\,,] \; &: \; \chi(M \times R) \times \chi(M \times R) \longrightarrow \chi(M \times R) \\ &: \; (\,(X, f\frac{d}{dt}),(Y, g\frac{d}{dt})) \longrightarrow \left[(X, f\frac{d}{dt}),(Y, g\frac{d}{dt})\right] \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\left[(X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt})\right]=\left([X,Y]\,,(X(g)-Y(f))\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu operatör

$i)$ Anti simetriktir

$ii)$ Jakobi özdeşliğini sağlar.

Böylece tanımladığımız bu operatör bir Lie braketidir (Blair 2002).

İspat. $i)\forall\,(X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt})\in\chi(M\times R)$ için

$$\begin{aligned}\left[(X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt})\right] &= \left([X,Y]\,,(X(g)-Y(f))\frac{d}{dt}\right)\\ &= -\left([Y,X]\,,(Y(f)-X(g))\frac{d}{dt}\right)\\ &= -\left[(Y,g\frac{d}{dt}),\,(X,f\frac{d}{dt})\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece anti simetrik olduğu görülür.

$ii)$ $\forall A=\,(X,f\frac{d}{dt}),B=(Y,g\frac{d}{dt}),C=(Z,h\frac{d}{dt})\in\chi(M\times R)$ için

$$\begin{aligned}[A,[B,C]] &= \left[(X,f\frac{d}{dt}),\left[(Y,g\frac{d}{dt}),(Z,h\frac{d}{dt})\right]\right]\\ &= \left([X,[Y,Z]]\,,(XY(h)-XZ(g)-[Y,Z]\,(f))\,\frac{d}{dt}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[B,[C,A]] &= \left[(Y,g\frac{d}{dt}),\left[(Z,h\frac{d}{d_t}),(X,f\frac{d}{dt})\right]\right]\\ &= \left([Y,[Z,X]]\,,(YZ(h)-YX(g)-[Z,X]\,(f))\,\frac{d}{dt}\right)\\ [C,[A,B]] &= \left[(Z,h\frac{d}{d_t}),\left[(X,f\frac{d}{d_t}),(Y,g\frac{d}{dt})\right]\right]\\ &= \left([Z,[X,Y]]\,,(ZX(h)-ZY(g)-[X,Y]\,(f))\,\frac{d}{dt}\right)\end{aligned}$$

burada

$$[X,Y]=XY-YX$$

eşitlğini göz önüne alırsak ve $T = [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [B, [C, A]]$ dersek

$$\begin{aligned} T &= \left(\begin{array}{c} [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]], \\ \left(\begin{array}{c} [X,Y](f) - [X,Y](f) + [Y,Z](f) \\ -[Y,Z](f) + [Z,X](f) - [X,Y](f) \end{array} \right) \dfrac{d}{dt} \end{array} \right) \\ &= (0, 0\frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

olduğundan jakobi özdeşliği sağlanır. Şimdi $N_J((X,0),(Y,0))$ ve $N_J((X,0),(0,\frac{d}{dt}))$ değerlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} N_J((X,0),(Y,0)) &= -[(X,0),(Y,0)] + [J(X,0), J(Y,0)] - J([J(X,0),(Y,0)]) \\ &\quad -J([(X,0), J(Y,0)] \\ &= -([X,Y],0) + \left([\phi(X),\phi(Y)], (\phi(X)\eta(Y) - \phi(Y)\eta(X))\frac{d}{dt}\right) \\ &\quad -\left(\phi[\phi(X),Y] + (Y\eta(X))\xi, \eta[\phi(X),Y]\frac{d}{dt}\right) \\ &\quad -\left(\phi[Y,\phi(X)] - (X\eta(Y))\xi, \eta[X,\phi(Y)]\frac{d}{dt}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_J((X,0),(Y,0)) &= (-[X,Y] + [\phi(X),\phi(Y)] - \phi[\phi(X),Y] - \phi[Y,\phi(X)] \\ &\quad -Y\eta(X)\xi + (X\eta(Y))\xi, (\phi(X)\eta(Y) - \phi(Y)\eta(X) \\ &\quad -\eta[\phi(X),Y] - \eta[X,\phi(Y)])\frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} N^1(X,Y) &= -[X,Y] + [\phi(X),\phi(Y)] - \phi[\phi(X),Y] - \phi[Y,\phi(X)] - Y\eta(X)\xi \\ &\quad +(X\eta(Y))\xi \\ &= -[X,Y] + \eta[X,Y]\xi + [\phi(X),\phi(Y)] - \phi[\phi(X),Y] - \phi[Y,\phi(X)] \\ &\quad -Y\eta(X)\xi + (X\eta(Y))\xi - \eta[X,Y]\xi \\ &= -[X,Y] + \eta[X,Y]\xi + [\phi(X),\phi(Y)] - \phi[\phi(X),Y] - \phi[Y,\phi(X)] \\ &\quad +(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta[X,Y])\xi \end{aligned}$$

dir. (3.2.1) den

$$\begin{aligned} N^1(X,Y) &= \phi^2[X,Y] + [\phi(X),\phi(Y)] - \phi[\phi(X),Y] - \phi[Y,\phi(X)] \\ &\quad + (X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta[X,Y])\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$N_\phi(X,Y) = \phi^2[X,Y] + [\phi(X),\phi(Y)] - \phi[\phi(X),Y] - \phi[Y,\phi(X)] \tag{3.3.2}$$

ve

$$2d\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta[X,Y] \tag{3.3.3}$$

olduğundan

$$N^1(X,Y) = N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{3.3.4}$$

elde edilir. Ayrıca ikinci tarafa

$$N^2(X,Y) = \phi(X)\eta(Y) - \phi(Y)\eta(X) - \eta[\phi(X),Y] - \eta[X,\phi(Y)] \tag{3.3.5}$$

dersek ve

$$\begin{aligned} (L_{(\phi X)}\eta)Y &= \phi(X)\eta(Y) - \eta[\phi X, Y] \\ (L_{(\phi Y)}\eta)X &= \phi(Y)\eta(X) - \eta[\phi Y, X] \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak

$$(L_{(\phi X)}\eta)Y - (L_{(\phi Y)}\eta)X = \phi(X)\eta(Y) - \phi(Y)\eta(X) - \eta[\phi(X),Y] - \eta[X,\phi(Y)]$$

olur. (3.3.4) den

$$N^2(X,Y) = (L_{(\phi X)}\eta)Y - (L_{(\phi Y)}\eta)X \tag{3.3.6}$$

elde edilir. Şimdi $N_J((X,0),(0,\frac{d}{dt}))$ yi hesaplarsak

$$N_J((X,0),(0,\frac{d}{dt})) = -\left[(X,0),(0,\frac{d}{dt})\right] + \left[J(X,0),J(0,\frac{d}{dt})\right]$$

$$
\begin{aligned}
&-J\left[J(X,0),(0,\frac{d}{dt})\right]-J(\left[(X,0),J(0,\frac{d}{dt})\right] \\
= &\left(-\left[\phi(X),\xi\right],\xi\eta(X)\frac{d}{dt}\right)+\left(\phi\left[X,\xi\right],\eta\left[X,\xi\right]\frac{d}{dt}\right) \\
= &\left(-\left[\phi(X),\xi\right]+\phi\left[X,\xi\right],(\xi\eta(X)+\eta\left[X,\xi\right])\frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Burada

$$
\begin{aligned}
N^3(X) &= -\left[\phi(X),\xi\right]+\phi\left[X,\xi\right] \\
N^4(X) &= \xi\eta(X)+\eta\left[X,\xi\right]
\end{aligned}
$$

dersek, bunları düzenlediğimizde

$$
N^3(X)=\left[\xi,\phi(X)\right]-\phi\left[X,\xi\right] \tag{3.3.7}
$$

$$
N^4(X)=\xi\eta(X)-\eta\left[\xi,X\right] \tag{3.3.8}
$$

dir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
(L_\xi\phi)X &= \left[\xi,\phi(X)\right]-\phi\left[X,\xi\right] \\
(L_\xi\eta)X &= \xi\eta(X)-\eta\left[\xi,X\right]
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
N^3(X) &= (L_\xi\phi)X \\
N^4(X) &= (L_\xi\eta)X
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.3.1. $2n+1-$boyutlu M manifoldu (ϕ,ξ,η) hemen hemen kontak yapısıyla verilsin. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter koşul N^1, N^2, N^3 ve N^4 tensörlerinin sıfır olmasıdır (Yano 1984).

İspat.$(\Rightarrow)$:

$$N_J((X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt}))=N_J((X,0)+(0,,f\frac{d}{dt}),(Y,0)+(0,g\frac{d}{dt}))$$

Burada J nin lineerliğini, N_J nin bilineer ve antisimetrik oluşunu kullanırsak

$$\begin{aligned} N_J((X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt})) &= N_J((X,0),(Y,0))+gN_J((X,0),(0,\frac{d}{dt})) \\ &\quad -fN_J((Y,0),(0,\frac{d}{dt}))+fgN_J((0,\frac{d}{dt}),(0,\frac{d}{dt})) \end{aligned}$$

elde edilir. $N_J((0,\frac{d}{dt}),(0,\frac{d}{dt}))=0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} N_J((X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt})) &= N_J((X,0),(Y,0))+gN_J((X,0),(0,\frac{d}{dt})) \\ &\quad -fN_J((Y,0),(0,\frac{d}{dt})) \\ &= \left(N^1(X,Y),N^2(X,Y)\right)+g\left(N^3(X),N^4(X)\right) \\ &\quad -f\left(N^3(Y),N^4(Y)\right) \\ &= (N^1(X,Y)+gN^3(X)-fN^3(Y),N^2(X,Y) \\ &\quad +gN^4(X)-fN^4(Y)) \end{aligned}$$

olur. Şayet $N_J=0$ ise

$$N^1(X,Y)+gN^3(X)-fN^3(Y)=0 \tag{3.3.9}$$

$$N^2(X,Y)+gN^4(X)-fN^4(Y)=0 \tag{3.3.10}$$

elde edilir. (3.3.2)den N_ϕ ve (3.3.3) den $d\eta$ antisimetrik olduğu görülür. Böylece (3.3.4) den N^1 de antismetrik olur. (3.3.9) eşitliği $\forall X,Y\in\chi(M)$ için sağlanır. (3.3.9) da $X=Y$ alırsak

$$N^1(X,X)=(f-g)N^3(X) \qquad (\,f\neq g) \tag{3.3.11}$$

elde edilir. N^1 antisimetrik olduğundan $N^1(X,X)=0$ dır. Dolayısıyla

$$(f-g)N^3(X)=0$$

ise

$$N^3(X)=0$$

olur. (3.3.5) den N^2 de antisimetrik olduğu görülür. Benzer yolla (3.3.10) dan

$$N^4(X)=0$$

bulunur. $N^3(X)=0$ ve $N^4(X)=0$ eşitlikleri $\forall X\in\chi(M)$ için doğru olduğundan (3.3.9) ve (3.3.10) eşitliklerini kullanırsak $N^1(X,Y)=0$ ve $N^2(X,Y)=0$ elde edilir. Burada ispat yapılırken $f\neq g$ kabul edilmişti. $f=g$ için (3.3.9) da $Y=-X$ yazılırsa ve $N^1(X,X)=0$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned}-N^1(X,X)+fN^3(X)+fN^3(X) &= 0\\ 2fN^3(X) &= 0\end{aligned}$$

$f\neq 0$ olduğundan

$$N^3(X)=0$$

elde edilir. Aynı işlemleri (3.3.10) da yaparsak $N^4(X)=0$ elde edilir, yine (3.3.9) ve (3.3.10) dan $N^1(X,Y)=0$ ve $N^2(X,Y)=0$ olduğu görülür.

$(\Leftarrow)$: Tersine kabul edelim ki $N^1(X,Y)=N^2(X,Y)=N^3(X)=N^4(X)=0$ olsun.

$$\begin{aligned}N_J((X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt})) &= (N^1(X,Y)+gN^3(X)-fN^3(Y),\ N^2(X,Y)\\ &\quad +gN^4(X)-fN^4(Y))\\ &= (0,0)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\forall\ (X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt})\in\chi(M\times R)$ için sağlandığından $N_J\equiv 0$ dır. Dolayısıyla (ϕ,ξ,η) hemen hemen kontak yapısı normaldir.

Teorem 3.3.2. $2n+1-$boyutlu M manifoldu (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısıyla verilsin. Şayet $N^1 = 0$ ise $N^2 = N^3 = N^4 = 0$ dır (Yano 1984).

İspat. Şayet $N^1 = 0$ ise $N^1(X, \xi) = 0$ dır.(3.3.2), (3.3.3) ve (3.3.4) den

$$N^1(X, \xi) = [\xi, X] + \phi\,[\xi, \phi(X)] - (\xi\eta(X))\xi = 0 \tag{3.3.12}$$

elde edilir. Her iki tarafın 'η' altında görüntüsünü alırsak

$$\eta\,[\xi, X] + \eta(\phi\,[\xi, \phi(X)]) - (\xi\eta(X))\eta(\xi) = 0 \tag{3.3.13}$$

(3.2.1) den

$$\eta\,[\xi, X] - (\xi\eta(X)) = 0 \tag{3.3.14}$$

olur. (3.3.8) den

$$\begin{aligned} N^4(X) &= (L_\xi\eta)X \\ &= \eta\,[\xi, X] - (\xi\eta(X)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.12) de X yerine $\phi(X)$ alırsak

$$\eta\,[\xi, \phi(X)] = 0$$

olur. (3.3.12) de her iki tarafa ϕ yi uygularsak

$$\begin{aligned} \phi\,[\xi, X] + \phi^2\,[\xi, \phi(X)] - (\xi\eta(X))\phi(\xi) &= 0 \\ \phi\,[\xi, X] - [\xi, \phi(X)] + \eta\,[\xi, \phi(X)] &= 0 \\ \phi\,[\xi, X] - [\xi, \phi(X)] &= 0 \end{aligned}$$

ise

$$N^3(X) = (L_\xi\phi)X = \phi\,[\xi, X] - [\xi, \phi(X)] = 0$$

elde edilir. Ayrıca $N^1 = 0$ dan $N^1(\phi(X), Y) = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
N^1(\phi(X), Y) &= -[\phi(X), Y] + \eta[\phi(X), Y]\xi + [-X + \eta(X)\xi, \phi(Y)] \\
&\quad -\phi[-X + \eta(X)\xi, Y] - \phi[\phi(X), \phi(Y)] + \phi(X)\eta(Y)\xi \\
&\quad -Y\eta(\phi(X))\xi - \eta[\phi(X), Y]\xi \\
0 &= -[\phi(X), Y] - [X, \phi(Y)] + [\eta(X)\xi, \phi(Y)] - \phi[-X + \eta(X)\xi, Y] \\
&\quad -\phi[\phi(X), \phi(Y)] + \phi(X)\eta(Y)\xi \\
0 &= -[\phi(X), Y] - [X, \phi(Y)] - \phi(Y)\eta(X)\xi + \eta(X)[\xi, \phi(Y)] \\
&\quad -\phi[-X + \eta(X)\xi, Y] - \phi[\phi(X), \phi(Y)] + \phi(X)\eta(Y)\xi
\end{aligned}$$

her iki tarafa η yü uygulayıp $\eta[\xi, \phi(X)] = 0$ 'ı göz önüne alırsak

$$\phi(X)\eta(Y) - \phi(Y)\eta(X) - \eta[\phi(X), Y] - \eta[X, \phi(Y)] = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $N^2(X, Y) = 0$ dır. Böylece ispat biter.

Sonuç 3.3.2. $2n+1-$boyutlu M manifoldu (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısıyla verilsin. Bu durumda her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta((\phi(X), \phi(Y)) = d\eta(X, Y)$$

dir (Yano 1984).

İspat. (3.3.3) de X yerine $\phi(X)$ alırsak

$$2d\eta(\phi(X), Y) = \phi(X)\eta(Y) - Y\eta(\phi(X)) - \eta[\phi(X), Y]$$

olur. Benzer şekilde Y yerine $\phi(Y)$ yazarsak

$$2d\eta(X, \phi Y) = X\eta(\phi(Y)) - \phi(Y)\eta(X) - \eta[X, \phi(Y)]$$

elde edilir. Burada iki eşitliği taraf tarafa toplar ve $\eta \circ \phi = 0$ özdeşliğini kullanırsak

$$2d\eta(\phi(X), Y) + 2d\eta(X, \phi Y) = \phi(X)\eta(Y) - \phi(Y)\eta(X) - \eta\left[\phi(X), Y\right] - \eta\left[X, \phi(Y)\right]$$

olur ve

$$2d\eta(\phi(X), Y) + 2d\eta(X, \phi Y) = N^2(X, Y) \tag{3.3.15}$$

elde edilir. Şayet $N^1 = 0$ ise $N^2 = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} 2d\eta(\phi(X), Y) + 2d\eta(X, \phi(Y)) &= 0 \\ d\eta(\phi(X), Y) + d\eta(X, \phi(Y)) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Burada Y yerine $\phi(Y)$ yazarsak

$$\begin{aligned} d\eta(\phi(X), \phi(Y)) + d\eta(X, \phi^2(Y)) &= 0 \\ d\eta(\phi(X), \phi(Y)) + d\eta(X, -Y + \eta(X)\xi) &= 0 \\ d\eta(\phi(X), \phi(Y)) - d\eta(X, Y) + \eta(X)d\eta(X, \xi) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$2d\eta(X, \xi) = X\eta(\xi) - \xi\eta(X) - \eta\left[X, \xi\right]$$

dir. Burada $X\eta(\xi) = X(1) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 2d\eta(X, \xi) &= -\xi\eta(X) - \eta\left[X, \xi\right] \\ &= -\xi\eta(X) + \eta\left[\xi, X\right] \\ &= -(L_\xi\eta)X \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$d\eta((\phi(X), \phi(Y)) = d\eta(X, Y) \tag{3.3.16}$$

elde edilir. Bu bize, $N^2 = 0$ olması durumunda (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısının, ϕ altında $d\eta$ nın invaryantlığını söyler.

Sonuç 3.3.3. $2n+1-$boyutlu M manifoldu (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısıyla verilsin. (ϕ, ξ, η) yapısı normaldir ancak ve ancak $N^1 = 0$ dır (Yano 1984).

Teorm 3.3.3. $2n+1-$boyutlu M manifoldu $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ kontak metrik yapısıyla verilsin. h lineer operatörünü

$$\begin{aligned} h : \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ X \quad &\longrightarrow h(X) = \tfrac{1}{2}\left(L_\xi \phi\right)(X) \end{aligned}$$

ve $h = \frac{1}{2} L_\xi \phi$ olarak tanımlayalım. Bu durumda h operatörü

i) Simetrik

ii) ϕ ile anti-komutatif (Yani, $\phi h = -h\phi$)

iii) $trh = 0$

iv) $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi = -\phi X - \phi h X$$

v) Şayet M üç boyutlu ise $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \phi)Y = \varepsilon g(X + hX, Y)\xi - \eta(Y)\left(X + hX\right) \ .$$

(Blair 2002).

Tanım 3.3.5. $2n+1-$boyutlu M manifoldu $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ normal kontak metrik yapısıyla verilsin. Bu durumda M manifolduna **Sasaki** manifold ve $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ yapısına da **Sasaki** yapı denir (Belkhelfa 2002).

Lemma 3.3.1. ϕ nin kovaryant türevi $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısı için

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 3\varepsilon d\Phi(X, \phi(Y), \phi(Z)) - 3\varepsilon d\Phi(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \phi(X)) \\ &\quad + \varepsilon\eta(X)N^{(2)}(Y, Z) + 2\varepsilon d\eta(\phi(Y), X)\eta(Z) - 2\varepsilon d\eta(\phi(Z), X)\eta(Y) \end{aligned}$$

dir. Burada $\Phi(X,Y)=\varepsilon g(X,\phi(Y))$ dir. Özel olarak $\Phi=d\eta$ kontak durumunda

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\phi)Y,Z) &= g(N^{(1)}(Y,Z),\phi(X))+2\varepsilon d\eta(\phi(Y),X)\eta(Z) \\ &\quad -2\varepsilon d\eta(\phi(Z),X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

elde edilir (Belkhelfa 2002).

Teorem 3.3.4. $2n+1-$boyutlu M manifoldu $(\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısıyla verilsin. Bu durumda M manifoldu Sasaki manifoldudur ancak ve ancak $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$(\nabla_X\phi)Y=\varepsilon g(X,Y)\xi-\eta(Y)X\ . \tag{3.3.18}$$

(Belkhelfa 2002).

İspat. $(\Rightarrow)$Kabul edelim ki $(\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısı M de Sasaki yapı olsun. Bu durumda M manifoldu kontak metrik manifolddur ve $\Phi\equiv d\eta$ dır. Ayrıca Sasaki manifoldun tanımından $N^{(1)}=N^{(2)}=0$ dır. Böylece (3.3.17) den

$$g((\nabla_X\phi)Y,Z)=\varepsilon d\eta(\phi(Y),X)\eta(Z)-\varepsilon d\eta(\phi(Z),X)\eta(Y)$$

dir. Yapı kontak metrik yapı olduğundan $\Phi(X,Y)=d\eta(X,Y)=\varepsilon g(X,\phi(Y))$ dır. Dolayısıyla,

$$g((\nabla_X\phi)Y,Z)=\varepsilon g(\phi(X),\phi(Y))\eta(Z)-\varepsilon g(\phi(X),\phi(Z))\eta(Y)$$

elde edilir. Yapı hemen hemen kontak metrik yapı olduğundan

$$g(\phi(X),\phi(Y))=g(X,Y)-\varepsilon\eta(X)\eta(Y)$$

dir. Böylece,

$$g((\nabla_X\phi)Y,Z) = \eta(Z)\left[g(X,Y)-\varepsilon\eta(X)\eta(Y)\right]-\eta(Y)\left[g(X,Z)-\varepsilon\eta(X)\eta(Z)\right]$$

$$\begin{aligned} &= \eta(Z)g(X,Y) - \eta(Y)g(X,Z) \\ &= \varepsilon g(Z,\xi)g(X,Y) - g(\eta(Y)X,Z) \\ &= g(\varepsilon g(X,Y)\xi - \eta(Y)X,Z) \end{aligned}$$

son eşitlik $\forall Z \in \chi(M)$ sağlandığından ve g nondejenere olduğundan

$$(\nabla_X \phi)Y = \varepsilon g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

elde edilir

($\Leftarrow$:) Tersine M, $2n+1$ boyutlu manifoldu $(\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısı ile verilsin ve (3.3.17) özdeşliği sağlansın. (3.3.17) de $Y=\xi$ alırsak

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi)Y &= \varepsilon g(X,\xi)\xi - \eta(\xi)X \\ &= \eta(X)\xi - X \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi)Y &= X\phi(\xi) - \phi(\nabla_X \xi) \\ &= -\phi(\nabla_X \xi) \end{aligned}$$

olduğundan

$$-\phi(\nabla_X \xi) = \eta(X)\xi - X$$

olur. Burada ϕ yi tekrar uygularsak

$$-(-\nabla_X \xi + \eta(\nabla_X \xi)\xi) = \eta(X)\phi(\xi) - \phi(X)$$

elde edilir. Burada $g(\xi,\xi)=\varepsilon$ eşitliğinde X yönünde kovaryant türev alırsak

$$\begin{aligned} \eta(\nabla_X \xi) &= g(\nabla_X \xi,\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Burada $\phi(\xi) = 0$ olduğundan

$$\nabla_X \xi = -\phi(X)$$

elde edilir. Teorem 3.2.4 den ξ nin Killing vektör alanı olduğu görülür. Ayrıca,

$$\begin{aligned} (\nabla_X \eta)Y &= X\eta(Y) - \eta(\nabla_X Y) \\ (\nabla_X \eta)Y &= Y\eta(X) - \eta(\nabla_Y X) \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak

$$\begin{aligned} (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_X \eta)Y &= X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) \\ &= 2d\eta(X,Y) \end{aligned}$$

eşitliğinden ve (3.2.20) den

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\left((\nabla_X \eta)Y - (\nabla_X \eta)Y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca ξ Killing vektör alanı olduğundan Teorem 3.2.4 ve (3.2.17) den dolayı

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -g(\nabla_Y \xi, X)$$

dir. Dolayısıyla

$$d\eta(X,Y) = g(\nabla_X \xi, Y) \tag{3.3.19}$$

elde edilir. (3.2.18) den

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= g(-\phi(X), Y) \\ &= -g(\phi(X), Y) \\ &= g(X, \phi(Y)) \\ &= \Phi(X,Y) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Böylece $\Phi = d\eta$ olduğu görülür. Bu ise bize η nın Kontak metrik yapı ve (M,η) nın Kontak metrik manifold olduğunu söyler. Diğer taraftan

$$\alpha(X,Y) = (\phi\nabla_Y\phi - \nabla_{\phi Y}\phi)X - (\phi\nabla_X\phi - \nabla_{\phi X}\phi)Y$$

dersek

$$\begin{aligned}
\alpha(X,Y) &= \phi(\nabla_Y\phi)X - (\nabla_{\phi Y}\phi)X - \phi(\nabla_X\phi)Y - (\nabla_{\phi X}\phi)Y \\
&= \phi\left(\nabla_Y\phi X - \phi(\nabla_Y X)\right) - (\nabla_{\phi Y}\phi X - \phi(\nabla_{\phi Y}X)) - \phi\left(\nabla_X\phi Y - \phi(\nabla_X Y)\right) \\
&\quad +(\nabla_{\phi X}\phi Y - \phi(\nabla_{\phi X}Y)) \\
&= \phi^2(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + \phi(\nabla_Y\phi X - \nabla_{\phi X}Y) + \phi(\nabla_{\phi Y}X - \nabla_X\phi Y) \\
&\quad +\nabla_{\phi X}\phi Y - \nabla_{\phi Y}\phi X \\
&= \phi^2([X,Y]) + \phi([Y,\phi X]) + \phi([\phi Y, X]) + [\phi X, \phi Y] \\
&= \phi^2([X,Y]) + [\phi X,\phi Y] - \phi([\phi X, Y]) - \phi([X,\phi Y]) \\
&= N_\phi(X,Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.3.18) den

$$\begin{aligned}
N_\phi(X,Y) &= \phi\left(g(X,Y)\xi - \eta(X)Y\right) - g(\phi(Y),X)\xi + \eta(X)\phi(Y) \\
&\quad -\phi\left(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\right) + g(\phi(X),Y)\xi - \eta(Y)\phi(X) \\
&= -\eta(X)\phi(Y) - g(\phi(Y),X)\xi + \eta(X)\phi(Y) + \eta(Y)\phi(X) \\
&\quad +g(\phi(X),Y)\xi - \eta(Y)\phi(X) \\
&= -(\varepsilon g(\phi(Y),X) + \varepsilon g(\phi(Y),X))\xi \\
&= -2\varepsilon g(\phi(Y),X)\xi \\
&= -2d\eta(X,Y)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(X,Y) &= N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \\
&= 0
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Böylece M manifoldunun Sasaki manifold olduğu görülür.

Örnek 3.3.1. $(R^{2n+1}(-3\varepsilon),\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik manifold idi. Diğer taraftan metriğimiz şayet

$$g_{ab}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\delta_{ij}+\varepsilon y_i y_j & 0 & -\varepsilon y_i\\ 0 & \delta_{ij} & 0\\ -\varepsilon y_j & 0 & \varepsilon\end{bmatrix}$$

ise

$$g^{ab}=4\begin{bmatrix}\delta_{ij} & 0 & y_i\\ 0 & \delta_{ij} & 0\\ y_j & 0 & \varepsilon+\mid y\mid^2\end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Burada $\mid y\mid^2=\sum(y^i)^2$ dir. Ayrıca kristofel sembollerini

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{kh}\left(g_{ih,j}+g_{hj,i}-g_{ij,h}\right)$$

olduğunu biliyoruz . Burada Einstein toplam sembolü kullanılmıştır. Ayrıca virgül kovaryant türev anlamındadır. Bu formülden Kristofel sembollerini hesaplarsak

$$\begin{aligned}
\Gamma_{(n+i)j}^{k} &= \frac{1}{2}g^{kh}\left(g_{(n+i)h,j}+g_{hj,(n+i)}-g_{(n+i)j,h}\right),\ h=1,...,2n+1;\ i,j,k=1,2,...,n,\\
&= \frac{1}{2}(g^{k1}g_{1j,(n+i)}+...+g^{kn}g_{nj,(n+i)}+\ g^{k(n+1)}g_{(n+1)j,(n+i)}\\
&\quad +...+g^{k(2n)}g_{(2n)j,(n+i)}+g^{k(2n+1)}g_{(2n+1)j,(n+i)}\ )\\
&= \frac{1}{2}(g^{kk}g_{kj,(n+i)}+g^{k(2n+1)}g_{(2n+1)j,(n+i)})\\
&= \frac{1}{2}\left(4\frac{\partial}{\partial y_i}(\frac{1}{4}(\delta_{kj}+\varepsilon y_k y_j))+4y_k\frac{\partial}{\partial y_i}(-\frac{1}{4}\varepsilon y_j)\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}(y_k y_j))-y_k\frac{\partial}{\partial y_i}(y_j)\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{2}\left(y_k\frac{\partial}{\partial y_i}(y_j)+y_j\frac{\partial}{\partial y_i}(y_k)-y_k\frac{\partial}{\partial y_i}(\varepsilon y_j)\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{2}y_j\frac{\partial}{\partial y_i}(y_k)\\
&= \frac{\varepsilon}{2}\delta_{ki}y_j
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{k}_{(n+i)(2n+1)} &= -\frac{\varepsilon}{2}\delta_{ik}, \Gamma^{n+k}_{ij} = -\frac{\varepsilon}{2}(\delta_{kj}y_i + \delta_{ki}y_j), \Gamma^{n+k}_{i(2n+1)} = \frac{\varepsilon}{2}\delta_{ki} \\
\Gamma^{2n+1}_{i(n+j)} &= \frac{1}{2}(\varepsilon y_i y_j - \delta_{ij}), \Gamma^{2n+1}_{(n+i)(2n+1)} = -\frac{\varepsilon}{2}y_i
\end{aligned}
$$

dir. Diğer Kristofel sembolleri sıfırdır. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\phi e_j &= \overline{\nabla}_{2\frac{\partial}{\partial y_i}} 2(\frac{\partial}{\partial x_j} + y_j\frac{\partial}{\partial z}), \qquad\qquad i,j = 1,...,n \\
&= 4\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y_i}}(y_j\frac{\partial}{\partial z})\right) \\
&= 4\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial y_j}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial z} + y_j\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y_i}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= 4\left(\Gamma^{p}_{(n+i)j}\partial_p + \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial z} + y_j\Gamma^{p}_{(n+i)(2n+1)}\partial_p\right), \;\; p = 1,...,2n+1 \\
&= 4\begin{pmatrix} \Gamma^{k}_{(n+i)j}\partial_k + \Gamma^{n+k}_{(n+i)j}\partial_{n+k} + \Gamma^{2n+1}_{(n+i)j}\partial_{2n+1} + \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial z} \\ +y_j(\Gamma^{k}_{(n+i)(2n+1)}\partial_k + \Gamma^{n+k}_{(n+i)(2n+1)}\partial_{n+k} + \Gamma^{2n+1}_{(n+i)(2n+1)}\partial_{2n+1}) \end{pmatrix} \\
&= 4\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2}\delta_{ki}y_j\partial_k + 0\partial_{n+k} + \frac{1}{2}(\varepsilon y_i y_j - \delta_{ij})\partial_{2n+1} + \delta_{ij}\partial_{2n+1} \\ +y_j(-\frac{\varepsilon}{2}\delta_{ik}\partial_k + 0\partial_{n+k} - \frac{\varepsilon}{2}y_i\partial_{2n+1} \end{pmatrix} \\
&= 4\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2}\delta_{ki}y_j\partial_k + \frac{1}{2}\varepsilon y_i y_j\partial_{2n+1} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{2n+1} + \delta_{ij}\partial_{2n+1} \\ -\frac{\varepsilon}{2}\delta_{ik}y_j\partial_k - \frac{\varepsilon}{2}y_i y_j\partial_{2n+1} \end{pmatrix} \\
&= 4\left(-\frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{2n+1} + \delta_{ij}\partial_{2n+1}\right) \\
&= 4\frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{2n+1} \\
&= \delta_{ij}2\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \delta_{ij}\xi
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\overline{\nabla}_{e_i}\phi e_j = \delta_{ij}\xi = -\overline{\nabla}_{\phi e_i}e_j \;, \quad \overline{\nabla}_{\xi}e_i = -\varepsilon\phi e_i = \overline{\nabla}_{e_i}\xi \,, \tag{3.3.20}
$$

$$\overline{\nabla}_\xi \phi e_i = \varepsilon e_i = \overline{\nabla}_{\phi e_i}\xi\,, \quad \overline{\nabla}_{e_i} e_j = \overline{\nabla}_{\phi e_i}\phi e_j = \overline{\nabla}_\xi \xi = 0$$

olarak bulunur. Burada Y sabit bir vektör olmak üzere ve $X = \overline{X}^i e_i + \overline{X}^{n+i} e_{n+i} + \overline{X}^{2n+1}\xi$ ve $Y = \overline{Y}^i e_i + \overline{Y}^{n+i} e_{n+i} + \overline{Y}^{2n+1}\xi$ sabit vektör alanı için

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y &= \overline{\nabla}_X(\overline{Y}^i e_i + \overline{Y}^{n+i} e_{n+i} + \overline{Y}^{2n+1}\xi) \\
&= \overline{X}^i\overline{Y}^i\overline{\nabla}_{e_i} e_i + \overline{X}^i\overline{Y}^{n+i}\overline{\nabla}_{e_i} e_{n+i} + \overline{X}^i\overline{Y}^{2n+1}\overline{\nabla}_{e_i} e_{2n+1} \\
&\quad + \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^i\overline{\nabla}_{e_i} e_i + \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^{n+i}\overline{\nabla}_{e_i} e_{n+i} + \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^{2n+1}\overline{\nabla}_{e_i} e_{2n+1} \\
&\quad + \overline{X}^{2n+1}\overline{Y}^i\overline{\nabla}_{e_i}\xi + \overline{X}^{2n+1}\overline{Y}^{n+i}\overline{\nabla}_{e_i}\xi + \overline{X}^{2n+1}\overline{Y}^{2n+1}\overline{\nabla}_\xi\xi \\
&= \varepsilon\overline{X}^i\overline{Y}^{n+i}\xi - \varepsilon\overline{X}^i\overline{Y}^{2n+1} e_{n+i} - \varepsilon\overline{X}^{n+i}\overline{Y}^i\xi + \varepsilon\overline{X}^{n+i}\overline{Y}^{2n+1} e_i \\
&\quad - \varepsilon\overline{X}^{2n+1}\overline{Y}^i e_{n+i} + \varepsilon\overline{X}^{2n+1}\overline{Y}^{n+i} e_i \\
&= -\varepsilon\overline{Y}^{2n+1}\left(\overline{X}^i e_{n+i} - \overline{X}^{n+i} e_i\right) - \varepsilon\overline{X}^{2n+1}\left(\overline{Y}^i e_{n+i} - \overline{Y}^{n+i} e_i\right) \\
&\quad + \varepsilon\left(\overline{X}^i\overline{Y}^{n+i} - \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^i\right)\xi
\end{aligned}$$

dır, burada $\phi X = \varepsilon(\,\overline{X}^i e_{n+i} - \overline{X}^{n+i} e_i)$ ve $\phi Y = \varepsilon(\,\overline{Y}^j e_{n+j} - \overline{Y}^{n+j} e_j)$ olduğundan

$$\overline{\nabla}_X Y = -\eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y + \varepsilon\left(\overline{X}^i\overline{Y}^{n+i} - \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^i\right)\xi$$

elde edilir. Ayrıca $\overline{\nabla}_X\xi = -\phi X$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece

$$\begin{aligned}
X\eta(Y) &= \varepsilon g(\overline{\nabla}_X Y, \xi) + \varepsilon g(Y, \overline{\nabla}_X\xi) \\
&= \varepsilon g(\varepsilon\left(\overline{X}^i\overline{Y}^{n+i} - \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^i\right)\xi, \xi) - \varepsilon g(Y, \phi X) \\
&= \varepsilon\left(\overline{X}^i\overline{Y}^{n+i} - \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^i\right) - \varepsilon g(Y, \phi X)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\varepsilon\left(\overline{X}^i\overline{Y}^{n+i} - \overline{X}^{n+i}\overline{Y}^i\right) = X\eta(Y) + \varepsilon g(Y, \phi X)$$

elde edilir. Böylece

$$\overline{\nabla}_X Y = -\eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y + (X\eta(Y) + \varepsilon g(Y, \phi X))\,\xi \tag{3.3.21}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\phi(\overline{\nabla}_X Y) &= -\eta(Y)\phi^2 X - \eta(X)\phi^2 Y \\
&= -\eta(Y)(-X + \eta(X)\xi - \eta(X)(-Y + \eta(Y)\xi) \\
&= \eta(Y)X - \eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(X)Y - \eta(X)\eta(Y)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\overline{\nabla}_X \phi Y$ yi hesaplarsak

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X \phi Y &= -\eta(\phi Y)\phi X - \eta(X)\phi^2 Y + (X\eta(\phi Y) + \varepsilon g(\phi Y, \phi X))\,\xi \\
&= -\eta(X)\phi^2 Y + \varepsilon g(\phi Y, \phi X)\xi \\
&= -\eta(X)(-Y + \eta(Y)\xi) + \varepsilon(g(Y, X) - \varepsilon\eta(Y)\eta(X))\xi \\
&= \eta(X)Y - \eta(Y)\eta(X)\xi + \varepsilon g(Y, X)\xi - \eta(Y)\eta(X)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Biliyoruz ki

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_X \phi\right) Y &= \overline{\nabla}_X \phi Y - \phi(\overline{\nabla}_X Y) \\
&= \eta(X)Y - \eta(Y)\eta(X)\xi + \varepsilon g(Y, X)\xi - \eta(X)\eta(Y)\xi \\
&\quad -\eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi - \eta(X)Y + \eta(X)\eta(Y)\xi \\
&= \varepsilon g(X, Y)\xi - \eta(Y)X
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\left(\overline{\nabla}_X \phi\right) Y = \varepsilon g(X, Y) - \eta(X)Y$$

sonucuna ulaşırız. Böylece $(R^{2n+1}(-3\varepsilon), \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ Sasaki manifold olur.

Teorem 3.3.5. $2n+1-$boyutlu M manifoldu $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ kontak metrik yapısıyla verilsin. Bu durumda $N^2 = N^4 = 0$ dır. Ayrıca,

$$N^3 = 0 \Leftrightarrow \ \xi \text{ killing vektördür.}$$

önermesi doğrudur (Yano 1984).

İspat.($\Rightarrow$) Yapımız kontak metrik manifold yapısı olduğundan $d\eta(X,Y) = \varepsilon g(X,\phi(Y))$ dir. Burada X yerine $\phi(X), Y$ yerine de $\phi(Y)$ yazarsak

$$\begin{aligned} d\eta(\phi(X),\phi(Y)) &= \varepsilon g(\phi(X),\phi^2(Y)) \\ &= -\varepsilon g(X,\phi^3(Y)) \\ &= -\varepsilon g(X,-\phi(Y)) \\ &= \varepsilon g(X,\phi(Y)) \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$d\eta(\phi(X),\phi(Y)) = d\eta(X,Y) \tag{3.3.22}$$

elde edilir. Ayrıca (3.3.22) de Y yerine de $\phi(Y)$ yazarsak

$$\begin{aligned} d\eta(\phi(X),\phi^2(Y)) &= d\eta(X,\phi(Y)) \\ d\eta(\phi(X),-Y+\eta(Y)\xi) &= d\eta(X,\phi(Y)) \\ -d\eta(\phi(X),Y)+\eta(Y)d\eta(\phi(X),\xi) &= d\eta(X,\phi(Y)) \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} d\eta(\phi(X),\xi) &= \varepsilon g(\phi(X),\phi(\xi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$d\eta(\phi(X),Y) + d\eta(X,\phi(Y)) = 0 \tag{3.3.22}$$

elde edilir. (3.3.15) den $N^2 = 0$ olur. Diğer taraftan $d\eta(X,\xi) = g(X,\phi(\xi)) = 0$ ve

$$d\eta(X,\xi) = \frac{1}{2}(X\eta(\xi) - \xi\eta(X) - \eta([X,\xi])$$

olduğundan

$$\xi\eta(X) - \eta([X,\xi]) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} N^{(4)}(X) &= (L_\xi \eta)X \\ &= \xi\eta(X) - \eta([X,\xi]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu $\forall X \in \chi(M)$ için sağlandığından $N^{(4)} = 0$ elde edilir. Böylece birinci kısmın ispatı biter. İkinci kısmın ispatında

$$\begin{aligned} (L_\xi g)(X,\xi) &= \xi g(\xi, X) - g([\xi, X], \xi) - g(X, [\xi, \xi]) \\ &= \xi\eta(X) - \eta([\xi, X] \\ &= (L_\xi \eta)(X) \end{aligned}$$

ve böylece $(L_\xi g)(X,\xi) = 0$ elde edilir. Biliyoruz ki η ile $d\eta$ formları Lie türevi altında değişmez olduğundan $L_\xi d\eta \equiv 0$ dır. Dolayısıyla $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(L_\xi d\eta)(X,Y) = 0$$

olur. Böylece açılımı yaparsak

$$\xi d\eta(X,Y) - d\eta([\xi, X], Y) - d\eta(X, [\xi, Y]) = 0$$

dir. Ayrıca $d\eta(X,Y) = \varepsilon g(X, \phi(Y))$ eşitliğinden

$$\varepsilon\xi g(X,\phi(Y)) - \varepsilon g([\xi, X], \phi(Y)) - \varepsilon g(X, \phi([\xi, Y])) = 0 \tag{3.3.24}$$

elde edilir. Diğer tarafdan

$$\begin{aligned} (L_\xi g)(X,\phi(Y)) &= \xi g(\phi(Y), X) - g([\xi, X], \phi(Y)) - g(X, [\xi, \phi(Y)]) \\ g(X, (L_\xi \phi)(Y)) &= g(X, [\xi, \phi(Y)] - g(X, \phi([\xi, Y])) \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$(L_\xi g)(X,\phi(Y))+g(X,(L_\xi\phi)(Y))=\xi g(\phi(Y),X)-g([\xi,X],\phi(Y)-g(X,\phi([\xi,Y]))$$

elde edilir. (3.3.24) den

$$(L_\xi g)(X,\phi(Y))+g(X,(L_\xi\phi)(Y))=0$$

sonucuna ulaşırız. Burada $N^3=0$ ise

$$(L_\xi g)(X,\phi(Y))=0$$

olur. Bu eşitlik $\forall X,Y\in\chi(M)$ için sağlandığından $L_\xi g\equiv 0$ dır. Dolayısıyla ξ killing vektördür.

$(\Leftarrow)$: Tersine ξ killing vektör ise $L_\xi g\equiv 0$ olacağından $g(X,(L_\xi\phi)(Y))=0$ olur. Bu eşitlik $\forall X\in\chi(M)$ için sağlandığından $N^3=0$ dır. Böylece ispat biter.

Teorem 3.3.6. Hemen hemen kontak (ϕ,ξ,η) yapısı ile verilen differansiyellenebilir bir M manifoldu, hemen hemen kontak metrik olacak şekilde Riemannian metriği kabul ettiği gibi Lorentzian metriği de kabul eder (Belkhelfa 2002).

İspat. h_0 bir Riemannian metrik ve $h_0(\xi,\xi)=1$ olsun. ξ^* da h_0 metriği ile bağlantılı ξ nin dual vektörü olmak üzere

$$\widetilde{h}\equiv h_0-(1-\varepsilon)\xi^*\otimes\xi^* \tag{3.3.25}$$

olarak tanımlayalım. Burada $\widetilde{h}$ nın bir Lorentzian metrik olduğu Teorem 3.2.2 deki gibi ispatlanır. Burada

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(\xi,\xi) &= h_0(\xi,\xi)-(1-\varepsilon)\xi^*(\xi)\otimes\xi^*(\xi)\\ &= 1-(1-\varepsilon)\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

dir. $h, (0,2)$ tensör alanını

$$h(X,Y) = \widetilde{h}(\phi^2(X), \phi^2(Y)) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y)$$

olarak tanımlayalım. Yine Teorem 3.2.2 deki gibi h ın da Lorentzian metrik olduğu ispatlanabilir. Burada

$$\begin{aligned} h(\xi,\xi) &= \widetilde{h}(\phi^2(\xi), \phi^2(\xi)) + \varepsilon\eta(\xi)\eta(\xi) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $Y = \xi$ alırsak

$$\begin{aligned} h(X,\xi) &= \widetilde{h}(\phi^2(X), \phi^2(\xi)) + \varepsilon\eta(X)\eta(\xi) \\ h(X,\xi) &= \varepsilon\eta(X) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde h metriğinden yararlanarak g yi

$$g(X,Y) = \frac{1}{2}\left(h(X,Y) + h(\phi(X), \phi(Y)) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y)\right) \tag{3.3.26}$$

şeklinde tanımlarsak g nin bir Lorentzian metrik olduğunu kolayca görebiliriz. Burada

$$\begin{aligned} g(\xi,\xi) &= \frac{1}{2}\left(h(\xi,\xi) + h(\phi(\xi), \phi(\xi)) + \varepsilon\eta(\xi)\eta(\xi)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon + 0 + \varepsilon) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

ve benzer şekilde (3.3.26) de $Y = \xi$ alırsak

$$\begin{aligned} g(X,\xi) &= \frac{1}{2}\left(h(X,\xi) + h(\phi(X), \phi(\xi)) + \varepsilon\eta(X)\eta(\xi)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon\eta(X) + 0 + \varepsilon\eta(X)\right) \\ &= \varepsilon\eta(X) \end{aligned}$$

her iki tarafı ε ile çarparsak

$$\eta(X) = \varepsilon g(X, \xi) \tag{3.3.27}$$

elde edilir. (3.3.26) de X yerine $\phi(X)$ ve Y yerine $\phi(Y)$ yazarsak

$$\begin{aligned}
g(\phi(X), \phi(Y)) &= \frac{1}{2}\left(h(\phi(X), \phi(Y)) + h(\phi^2(X), \phi^2(Y)) + \varepsilon\eta(\phi(X))\eta(\phi(Y))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(h(\phi(X), \phi(Y)) + h(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(h(X, Y) + h(\phi(X), \phi(Y)) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y)\right) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y)
\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \tag{3.3.28}$$

elde edilir. g Lorentzian metriği $g(\xi, \xi) = \varepsilon$ ve (3.3.27) şartını sağlar.

Teorem 3.3.7. $2n+1-$boyutlu M manifoldu $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ kontak metrik yapısı ile verilsin. Şayet M bir K-Kontak manifold ise M nin her bir noktasında ξ yi kapsayan düzlem kesitleri için kesitsel eğriliği 'ε 'na eşittir (Belkhelfa 2002).

İspat. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
K(\xi, X) &= \frac{g\left(R(\xi, X)X, \xi\right)}{g(\xi, \xi)g(X, X) - g(\xi, X)^2} \\
&= -\frac{g\left(R(\xi, X)\xi, X\right)}{g(\xi, \xi)g(X, X) - g(\xi, X)^2}
\end{aligned}$$

eşitliğini hesaplamalıyız. Ayrıca

$$\begin{aligned}
R(\xi, X)\xi &= \nabla_\xi\nabla_X\xi - \nabla_X\nabla_\xi\xi - \nabla_{[\xi, X]}\xi \\
&= \nabla_\xi\nabla_X\xi - \nabla_X\nabla_\xi\xi - \nabla_{\nabla_\xi X}\xi + \nabla_{\nabla_X\xi}\xi
\end{aligned}$$

dir. Manifold K-Kontak olduğundan Teorem 3.2.4 den $\nabla_X\xi = -\phi(X)$ dir. Böylece $\nabla_\xi\xi = -\phi(\xi) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$R(\xi, X)\xi = -\nabla_\xi\phi(X) + \phi(\nabla_\xi X) - \phi(\nabla_X\xi)$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\nabla_\xi \phi)(X) + \phi^2(X) \\
&= -(\nabla_\xi \phi)(X) - X + \varepsilon g(X,\xi)\xi
\end{aligned}
$$

elde edilir. ξ killing vektör alanı olduğundan Toerem 3.3.5 den $L_\xi \phi \equiv 0$ dır. Dolayısı ile $\forall X \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
(L_\xi \phi)(X) &= [\xi, \phi(X)] - \phi\,[\xi, X] \\
0 &= \nabla_\xi \phi X - \nabla_{\phi(X)}\xi - \phi(\nabla_\xi X) + \phi(\nabla_X \xi) \\
0 &= \nabla_\xi \phi X + \phi^2(X) - \phi(\nabla_\xi X) - \phi^2(X) \\
0 &= \nabla_\xi \phi X - \phi(\nabla_\xi X) \\
0 &= (\nabla_\xi \phi)(X)
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca X ile ξ ortogonal olduğundan $g(X,\xi) = 0$ dır. Dolayısıyla

$$R(\xi, X)\xi = -X$$

sonucuna ulaşırız. Böylece X birim vektör olduğundan

$$
\begin{aligned}
K(\xi, X) &= -\frac{g\,(-X, X)}{g(\xi,\xi)g(X,X) - g(\xi,X)^2} \\
&= \frac{g\,(X, X)}{g(\xi,\xi)g(X,X) - g(\xi,X)^2} \\
&= \frac{1}{\varepsilon.1 - 0} \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

Lemma 3.3.2. $2n+1$ boyutlu $(M, \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ Sasaki manifoldu verilsin. Bu durumda aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$1)\, R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \qquad (3.3.29)$$

ve

$$
\begin{aligned}
2)\, R(X,\xi)Y &= \eta(Y)X - \varepsilon g(X,Y)\xi \\
&= -(\nabla_X \phi)(Y)
\end{aligned}
$$

üstelik bütün ξ ye ortogonal olan X birim vektörleri için

$$
R(X,\xi)X = \varepsilon\xi
$$

dir (Belkhelfa 2002).

İspat. Sasaki manifoldları aynı zamanda K-Kontak manifold olduklarından Teorem 3.2.4 den $\nabla_X \xi = -\phi(X)$ dir.

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\
&= -\nabla_X \phi(Y) + \nabla_Y \phi(X) - \phi([X,Y]) \\
&= -\left(\nabla_X \phi(Y) - \phi(\nabla_X Y)\right) + \left(\nabla_Y \phi(X) - \phi(\nabla_Y X)\right) \\
&= -(\nabla_X \phi)(Y) + (\nabla_Y \phi)(X)
\end{aligned}
$$

M Sasaki manifoldu olduğundan (3.3.18) den

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= -\left(\varepsilon g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\right) + \left(\varepsilon g(X,Y)\xi - \eta(X)Y\right) \\
&= \eta(Y)X - \eta(X)Y
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
g(R(X,\xi)Y,Z) &= g(R(Z,Y)\xi,X) \\
&= g(\eta(Y)Z - \eta(Z)g(Y,X) \\
&= g(\eta(Y)X,Z) - \varepsilon g(g(X,Y)\xi,Z) \\
&= g(\eta(Y)X - \varepsilon g(X,Y)\xi,Z)
\end{aligned}
$$

dir. Bu $\forall Z \in \chi(M)$ için sağlandığından ve 'g' metriği nondejenere olduğundan

$$R(X,\xi)Y = \eta(Y)X - \varepsilon g(X,Y)\xi$$

sonucuna ulaşırız. Burada Y yerine X alırsak

$$R(X,\xi)X = \eta(X)X - \varepsilon g(X,X)\xi$$

olur. X ile ξ ortogonal ve X birim olduğundan $\eta(X) = \varepsilon g(X,\xi) = 0$, $g(X,X) = 1$ dir. Dolayısı ile

$$R(X,\xi)X = -\varepsilon\xi$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

Teorem 3.3.8. ξ bir killing birim vektör alanı olmak üzere, Lorentzian veya Riemannian bir M manifoldunda $R(X,Y)\xi = \varepsilon g(\xi,Y)X - \varepsilon g(\xi,X)Y$ ise M bir Sasaki manifoldudur (Belkhelfa 2002).

İspat. $\eta(X) = \varepsilon g(X,\xi)$ idi. Ayrıca ξ killing vektör alanı olduğundan $\nabla_X \xi = -\phi(X)$ olduğunu biliyoruz ayrıca

$$R(X,\xi)Y = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} R(X,\xi)Y &= -\nabla_X \phi(Y) + \phi(\nabla_X Y) \\ &= -(\nabla_X \phi)(Y) \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

elde edilir. Bu (3.3.29), (3.3.30) ve $\eta(Z) = \varepsilon g(\xi, Z)$ eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \phi)(Y), Z) &= g(-R(X,\xi)Y, Z) \\ &= g(R(\xi,X)Y, Z) \\ &= g(R(Y,Z)\xi, X) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z, X) \\
&= \eta(Z)g(Y, X) - g(Z, \eta(Y)X) \\
&= g(\varepsilon g(Y, X)\xi, Z) - g(\eta(Y)X, Z) \\
&= g(\varepsilon g(Y, X)\xi - \eta(Y)X, Z)
\end{aligned}
$$

olur. Son eşitlik $\forall Z \in \chi(M)$ için sağlandığından

$$(\nabla_X \phi)(Y) = \varepsilon g(Y, X)\xi - \eta(Y)X$$

olur. (3.3.18) den M nin Sasaki manifoldu olduğu görülür.

3.4. ϕ-Kesitsel Eğrilik

Tanım 3.4.1. $(M, \phi, \eta, \xi, g, \varepsilon)$ 2n+1-boyutlu kontak metrik manifold ve $X \in \chi(M)$ birim vektör alanı da ξ karakteristik vektör alanına dik olsun. $\{X, \phi X\}$ cümlesi bir düzlem kesitinin tabanı olmak üzere

$$K(X, \phi X) = g(R(X, \phi X)\phi X, X) \tag{3.4.1}$$

eişitliğine $\phi-$kesitsel eğriliği denir (Yano1984).

Tanım 3.4.2. $(M, \phi, \eta, \xi, g, \varepsilon)$ 2n+1-boyutlu kontak metrik manifold olsun.

$$B : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \Re$$

olarak tanımlı K (0,4) tensörü $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ ve $\forall \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W} \in D$ için

$$
\begin{aligned}
i &: B(W, Z, X, Y) = -B(Z, W, X, Y) = -B(W, Z, Y, X) \\
ii &: B(W, Z, X, Y,) = B(X, Y, W, Z) \\
iii &: B(W, Z, X, Y) + B(W, X, Y, Z) + B(W, Y, Z, X) = 0 \\
iv &: B(\overline{W}, \overline{Z}, \overline{X}, \overline{Y}) = B(\phi\overline{W}, \phi\overline{Z}, \overline{X}, \overline{Y}) = B(\overline{W}, \overline{Z}, \phi\overline{X}, \phi\overline{Y}) \\
v &: B(\xi, \overline{Z}, \overline{X}, \overline{Y}) = B(\overline{W}, \xi, \overline{X}, \overline{Y}) = B(\overline{W}, \overline{Z}, \xi, \overline{Y}) = B(\overline{W}, \overline{Z}, \overline{X}, \xi) = 0
\end{aligned}
$$

özeliklerini sağlasın. Burada (ii) özeliği (i) ve (iii) nin bir sonucu olarak da söylenebilir.

Teorem 3.4.1. B ve T (0,4) tensörleri (i),(ii),(iii),(iv) ve (v) özeliklerini sağlasın. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $B(X,Y,X,Y) = T(X,Y,X,Y)$ eşitliği sağlanıyorsa $\forall W, Z, X, Y \in \chi(M)$ için

$$B(W,Z,X,Y) = T(W,Z,X,Y) \tag{3.4.2}$$

dir.

İspat. B ve T (0,4) tensörleri (i),(ii),(iii),(iv) ve (v) koşullarını sağlıyorsa $B - T$ (0,4) tensörü de (i),(ii),(iii),(iv) ve (v) koşullarını sağlar. Kabulden $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $(B-T)(X,Y,X,Y) = 0$ dır. Y yerine $Y + W$ koyarsak

$$(B-T)(X, Y+W, X, Y+W) = 0$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
(B-T)(X,Y+W,X,Y+W) &= (B-T)(X,Y,X,Y) + (B-T)(X,Y,X,W) \\
&\quad + (B-T)(X,W,X,Y) + (B-T)(X,W,X,W) \\
&= (B-T)(X,Y,X,W) + (B-T)(X,W,X,Y) \\
&= 2\,(B-T)(X,Y,X,W)
\end{aligned}$$

olduğundan $\forall X, Y, W \in \chi(M)$ için

$$(B-T)(X,Y,X,W) = 0 \tag{3.4.3}$$

çıkar. Şimdi (3.4.3) de X yerine $X + Z$ koyarsak $(B-T)(X+Z, Y, X+Z, W) = 0$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
(B-T)(X+Z,Y,X+Z,W) &= (B-T)(X,Y,X,W) + (B-T)(X,Y,Z,W) \\
&\quad + (B-T)(Z,Y,X,W) + (B-T)(Z,Y,Z,W)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (B-T)(X,Y,Z,W) + (B-T)(Z,Y,X,W) \\
&= (B-T)(X,Y,Z,W) - (B-T)(X,W,Y,Z)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$(B-T)(X,Y,Z,W) = (B-T)(X,W,Y,Z)$$

çıkar. Burada Y, Z, W vektör alanları yerine, sırasıyla, Z, W, Y yazarsak

$$(B-T)(X,Y,Z,W) = (B-T)(X,Z,W,Y)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
3(B-T)(X,Y,Z,W) &= (B-T)(X,Y,Z,W) + (B-T)(X,Z,W,Y) \\
&\quad + (B-T)(X,W,Y,Z)
\end{aligned}
$$

ve (iii) den $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için $(B-T)(X,Y,Z,W) = 0$ ve

$$
\begin{aligned}
(B-T)(X,Y,Z,W) &= (B-T)(Z,W,X,Y) \\
&= -(B-T)(W,Z,X,Y)
\end{aligned}
$$

olduğundan $(B-T)(W,Z,X,Y) = 0$ ve $B(W,Z,X,Y) = T(W,Z,X,Y)$ elde edilir.

Teorem 3.4.2. B ve T (0,4) tensörleri (i),(ii),(iii),(iv) ve (v) özeliklerini sağlasın. Bu durumda $\forall \overline{X}, \overline{Y} \in D$ için $B(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y}) = T(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})$ eşitliği sağlanıyorsa $\forall W,Z,X,Y \in \chi(M)$ için $B(W,Z,X,Y) = T(W,Z,X,Y)$ $(B \equiv T)$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\forall \overline{X}, \overline{Y} \in D$ için

$$B(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y}) = T(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y}) \tag{3.4.4}$$

eşitliği sağlansın. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\overline{X}, \overline{Y} \in D$ olmak üzere

$$\begin{aligned} X &= \overline{X} + \eta(X)\xi \\ Y &= \overline{Y} + \eta(Y)\xi \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

olarak yazabiliriz. Burada B ve T tensörleri (i),(ii),(iii),(iv) ve (v) koşullarını sağladığından $B-T$ de (0.4) tipinde bir tensördür ve (i),(ii),(iii),(iv) ve (v) koşullarını sağlar. $(B-T)(X,Y,X,Y)$ eşitliğine bakarsak ($A = B-T$ dersek)

$$\begin{aligned} (B-T)(X,Y,X,Y) &= (B-T)(\overline{X}+\eta(X)\xi, \overline{Y}+\eta(Y)\xi, \overline{X}+\eta(X)\xi, \overline{Y}+\eta(Y)\xi) \\ &= (B-T)(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y}) + \eta(Y)A(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\xi) \\ &\quad +\eta(X)A(\overline{X},\overline{Y},\xi,\overline{Y}) + \eta(X)\eta(Y)A(\overline{X},\overline{Y},\xi,\xi) \\ &\quad +\eta(Y)A(\overline{X},\xi,\overline{X},\overline{Y}) + \eta(Y)^2A(\overline{X},\xi,\overline{X},\xi) \\ &\quad +\eta(X)\eta(Y)A(\overline{X},\xi,\xi,\overline{Y}) + \eta(X)\eta(Y)^2A(\overline{X},\xi,\xi,\xi) \\ &\quad +\eta(X)A(\xi,\overline{Y},\overline{X},\overline{Y}) + \eta(X)\eta(Y)A(\xi,\overline{Y},\overline{X},\xi) \\ &\quad +\eta(X)^2A(\xi,\overline{Y},\xi,\overline{Y}) + \eta(X)^2\eta(Y)A(\xi,\overline{Y},\xi,\xi) \\ &\quad +\eta(X)\eta(Y)A(\xi,\xi,\overline{X},\overline{Y}) + \eta(X)\eta(Y)^2A(\xi,\xi,\overline{X},\xi) \\ &\quad +\eta(X)^2\eta(Y)A(\xi,\xi,\xi,\overline{Y}) + \eta(X)^2\eta(Y)^2A(\xi,\xi,\xi,\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. (v) koşulundan

$$(B-T)(X,Y,X,Y) = (B-T)(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})$$

olur. (3.4.4) den $(B-T)(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y}) = 0$ dır. Dolayısıyla $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $(B-T)(X,Y,X,Y) = 0$ olur. Son önerme $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $B(X,Y,X,Y) = T(X,Y,X,Y)$ önermesi ile denk önermedir. Teorem 3.4.1 den $\forall W, Z, X, Y \in \chi(M)$ için $B(W,Z,X,Y) = T(W,Z,X,Y)$ olur. Böylece ispat biter.

Teorem 3.4.3. B ve T (0,4) tensörleri (i),(ii),(iii),(iv) ve (v) koşullarını sağlasın. Bu durumda $\forall \overline{X} \in D$ için $B(\overline{X},\phi\overline{X},\overline{X},\phi\overline{X}) = T(\overline{X},\phi\overline{X},\overline{X},\phi\overline{X})$ eşitliği sağlanıyorsa

$\forall \overline{X}, \overline{Y} \in D$ için

$$B(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{X}, \overline{Y}) = T(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{X}, \overline{Y})$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $\forall \overline{X} \in D$ için $B(\overline{X}, \phi\overline{X}, \overline{X}, \phi\overline{X}) = T(\overline{X}, \phi\overline{X}, \overline{X}, \phi\overline{X})$ olsun Böylece $\forall \overline{X} \in D$ için $(B-T)(\overline{X}, \phi\overline{X}, \overline{X}, \phi\overline{X}) = 0$ olur. Burada $\overline{X}$ yerine $\overline{Y} \in D$ için $\overline{X} + \overline{Y}$ yazarsak kabulden

$$I : (B-T)\left(\overline{X}+\overline{Y}, \phi\left(\overline{X}+\overline{Y}\right), \overline{X}+\overline{Y}, \phi\left(\overline{X}+\overline{Y}\right)\right) = 0$$

ve bu eşitliği açarsak $\forall \overline{X}, \overline{Y} \in D$ için

$$\begin{aligned} 0 &= I = 4(B-T)(\overline{X}, \phi\overline{Y}, \overline{X}, \phi\overline{Y}) + 2(B-T)(\overline{X}, \phi\overline{X}, \overline{Y}, \phi\overline{Y}) \\ &\quad +4(B-T)(\overline{X}, \phi\overline{X}, \overline{X}, \phi\overline{Y}) + 4(B-T)(\overline{Y}, \phi\overline{Y}, \overline{Y}, \phi\overline{X}) \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

olur. Benzer şekilde $\overline{X}$ yerine $\overline{X} - \overline{Y}$ yazarsak, kabulden

$$II : (B-T)\left(\overline{X}+\overline{Y}, \phi\left(\overline{X}+\overline{Y}\right), \overline{X}+\overline{Y}, \phi\left(\overline{X}+\overline{Y}\right)\right) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &= II = 4(B-T)(\overline{X}, \phi\overline{Y}, \overline{X}, \phi\overline{Y}) + 2(B-T)(\overline{X}, \phi\overline{X}, \overline{Y}, \phi\overline{Y}) \\ &\quad -4(B-T)(\overline{X}, \phi\overline{X}, \overline{X}, \phi\overline{Y}) - 4(B-T)(\overline{Y}, \phi\overline{Y}, \overline{Y}, \phi\overline{X}) \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

olur. (3.4.6) ve (3.4.7) den

$$2(B-T)(\overline{X}, \phi\overline{Y}, \overline{X}, \phi\overline{Y}) + (B-T)(\overline{X}, \phi\overline{X}, \overline{Y}, \phi\overline{Y}) = 0 \tag{3.4.8}$$

eşitliklerine ulaşırız. (i),(iii) ve (iv) den kolayca

$$(B-T)(\overline{X}, \phi\overline{X}, \overline{Y}, \phi\overline{Y}) - (B-T)(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{X}, \overline{Y}) - (B-T)(\overline{X}, \phi\overline{Y}, \overline{X}, \phi\overline{Y}) = 0 \tag{3.4.9}$$

elde edilir. (3.4.8) ve (3.4.9) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak

$$3\,(B-T)\,(\overline{X},\phi\overline{Y},\overline{X},\phi\overline{Y})+(B-T)\,(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})=0 \tag{3.4.10}$$

olur. (3.4.10) de $\overline{Y}$ yerine $\phi\overline{Y}$ alırsak

$$3\,(B-T)\,(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})+(B-T)\,(\overline{X},\phi\overline{Y},\overline{X},\phi\overline{Y})=0 \tag{3.4.11}$$

eld edilir. (3.4.10) ve (3.4.11) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$(B-T)\,(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})+(B-T)\,(\overline{X},\phi\overline{Y},\overline{X},\phi\overline{Y})=0$$

ve sonuç olarak $(B-T)\,(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})=0$ olur. Böylece $\forall\overline{X},\overline{Y}\in D$ için

$$B(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})=T(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})$$

olur.

Örnek 3.4.1. 2n+1-boyutlu $(M,\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ Sasaki manifoldu olsun

$$\begin{aligned} B(W,Z,X,Y) &= R(W,Z,X,Y) \\ &\quad -\frac{3\varepsilon}{4}\left(g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)\right) \\ &\quad +\frac{\varepsilon}{4}\begin{pmatrix} \eta(X)\eta(Z)g(Y,W)-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\ +\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z) \\ +g(\phi Y,Z)g(\phi X,W)-g(\phi X,Z)g(\phi Y,W) \\ +2g(X,\phi Y)g(\phi Z,W) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

ve

$$B_0(W,Z,X,Y)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W) \\ +\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\ +\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z) \\ +g(\phi Y,Z)g(\phi X,W)-g(\phi X,Z)g(\phi Y,W) \\ +2g(X,\phi Y)g(\phi Z,W) \end{pmatrix} \tag{3.4.13}$$

olarak tanımlarsak B ve B_0 (0,4) tensörlerinin 4-lineer olduğu açıktır. $\forall \overline{Z},\overline{X},\overline{Y}\in D$ olduğundan $\eta(\overline{X})=\eta(\overline{Y})=\eta(\overline{Z})=0$ dır. $B(\xi,\overline{Z},\overline{X},\overline{Y})$ yi hesaplarsak

$$\begin{aligned} B(\xi,\overline{Z},\overline{X},\overline{Y}) &= R(\xi,\overline{Z},\overline{X},\overline{Y})-\frac{3\varepsilon}{4}\left(g(\overline{Y},\overline{Z})g(X,\xi)-g(\overline{X},\overline{Z})g(\overline{Y},\xi)\right) \\ &\quad +\frac{\varepsilon}{4}\begin{pmatrix} \eta(\overline{X})\eta(\overline{Z})g(\overline{Y},\xi)-\eta(\overline{Y})\eta(\overline{Z})g(\overline{X},\xi) \\ +\eta(\overline{X})\eta(\xi)g(\overline{X},\overline{Z})-\eta(\overline{X})\eta(\xi)g(\overline{Y},\overline{Z}) \\ +g(\phi\overline{Y},\overline{Z})g(\phi\overline{X},\xi)-g(\phi\overline{X},\overline{Z})g(\phi\overline{Y},\xi) \\ +2g(\overline{X},\phi\overline{Y})g(\phi\overline{Z},\xi) \end{pmatrix} \\ &= R(\xi,\overline{Z},\overline{X},\overline{Y}) \\ &= g(R(\overline{Z},\xi)\overline{X},\overline{Y}) \\ &= g(-\varepsilon\xi,\overline{Y}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (i),(ii),(iii),(iv) ve (v) koşullarını sağladığı da gösterilebilir. $\{X,Y\}$ ortonormal tabanı için

$$K^*(X,Y)=B(X,Y,X,Y)$$

olarak tanımlayalım. Şayet X,Y lineer bağımsız keyfi iki vektör alanı ise

$$K^*(X,Y)=\frac{B(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}$$

olarak yazabiliriz. Böylece $\pi = sp\{X, \phi(X)\}$ için

$$\begin{aligned}
K^*(X,\phi(X)) &= \frac{B(X,\phi(X),X,\phi(X))}{g(X,X)g(\phi(X),\phi(X)) - g(X,\phi(X))^2} \\
&= \frac{B(X,\phi(X),X,\phi(X))}{g(X,X)g(\phi(X),\phi(X))}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şayet $\overline{X} \in D$ ise

$$\begin{aligned}
K^*\left(\overline{X},\phi(\overline{X})\right) &= \frac{B(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X}))}{g(\overline{X},\overline{X})g(\phi(\overline{X}),\phi(\overline{X}))} \\
&= \frac{B(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X}))}{g(\overline{X},\overline{X})^2}
\end{aligned}$$

olur. B ve B_0 ın tanımından

$$\begin{aligned}
B(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X})) &= R(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X})) \\
B_0(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X})) &= g(\overline{X},\overline{X})^2
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $\left\|\overline{X}\right\| = \left\|\phi\overline{X}\right\|$ eşitliğini de kullanırsak

$$\begin{aligned}
K^*\left(\overline{X},\phi(\overline{X})\right) &= \frac{R(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X}))}{g(\overline{X},\overline{X})^2} \\
&= \frac{R(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X}))}{\left\|\overline{X}\right\|^4} \\
&= R(\frac{\overline{X}}{\left\|\overline{X}\right\|},\frac{\phi(\overline{X})}{\left\|\phi\overline{X}\right\|},\frac{\overline{X}}{\left\|\overline{X}\right\|},\frac{\phi(\overline{X})}{\left\|\phi\overline{X}\right\|}) \\
&= K\left(\frac{\overline{X}}{\left\|\overline{X}\right\|},\frac{\phi(\overline{X})}{\left\|\phi\overline{X}\right\|}\right)
\end{aligned}$$

dir. Burada $\left\{\frac{\overline{X}}{\left\|\overline{X}\right\|},\frac{\phi(\overline{X})}{\left\|\phi\overline{X}\right\|}\right\}$ ortonormaldir. Sasaki uzayımızın $\phi-$kesitsel eğriliği bir 'c' sabitine eşit ise

$$K^*\left(\overline{X},\phi(\overline{X})\right) = K\left(\frac{\overline{X}}{\left\|\overline{X}\right\|},\frac{\phi(\overline{X})}{\left\|\phi\overline{X}\right\|}\right) = c$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{B(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X}))}{B_0(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X}))} &= K^*\left(\overline{X},\phi(\overline{X})\right)\\ &= c\end{aligned}$$

olduğundan

$$B(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X})) = cB_0(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X}))$$

elde edilir. Burada $T(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X})) = (cB_0)\,(\overline{X},\phi(\overline{X}),\overline{X},\phi(\overline{X}))$ dersek

$$T \equiv cB_0$$

4-lineer tensörü (i),(ii),(iii),(iv) ve (v) koşullarını sağlar. Teorem 3.4.3 den $\forall \overline{X},\overline{Y} \in D$ için

$$B(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y}) = (cB_0)\,(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})$$

olur. Teorem 3.4.2 den $\forall W,Z,X,Y \in \chi(M)$ için $B(W,Z,X,Y) = (cB_0)\,(W,Z,X,Y)$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}& R(W,Z,X,Y) - \frac{3\varepsilon}{4}\left(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\right)\\ & +\frac{\varepsilon}{4}\begin{pmatrix} \eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\ +\eta(Y)\eta(W)g(X,Z) - \eta(X)\eta(W)g(Y,Z) \\ +g(\phi Y,Z)g(\phi X,W) - g(\phi X,Z)g(\phi Y,W) \\ +2g(X,\phi Y)g(\phi Z,W)\end{pmatrix}\\ = \ & \frac{c}{4}\begin{pmatrix} g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W) \\ +\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\ +\eta(Y)\eta(W)g(X,Z) - \eta(X)\eta(W)g(Y,Z) \\ +g(\phi Y,Z)g(\phi X,W) - g(\phi X,Z)g(\phi Y,W) \\ +2g(X,\phi Y)g(\phi Z,W)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve

$$R(X,Y)Z = \frac{c+3\varepsilon}{4}\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right) \tag{3.4.14}$$

$$+\frac{c-\varepsilon}{4}\left(\begin{array}{c}\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X+g(X,Z)\eta(Y)\xi \\ -g(Y,Z)\eta(X)\xi+g(\phi Y,Z)\phi X \\ -g(\phi X,Z)+2g(X,\phi Y)\phi Z\end{array}\right)$$

elde edilir.

3.5 Sasaki Manifoldlarının İntegral Alt Manifoldları

Tanım 2.5.2. ve Tanım 2.5.3 de dağılım ile integral alt manifoldlarının tanımlarını verdik. Sonuç 3.1.1 de (N,η) Kontak manifoldu için

$$D=\{X\in\chi(N):\eta(X)=0\}$$

cümlesini de $\chi(N)$ nin $2n$ boyutlu Kontak dağılım olarak tanıtmıştık. $m-$boyutlu M manifoldu (N^{2n+1},η) Kontak manifoldunun alt manifoldu olsun. Bu tanımlar altında şayet her $X\in\chi(M)$ için $\eta(X)=0$ oluyorsa M manifolduna N^{2n+1} Kontak manifoldunun integral alt manifoldu denir. $X,Y\in\chi(M)$ için $[X,Y]\in\chi(M)$ olduğundan

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak M manifoldu N^{2n+1} Kontak manifoldunun integral alt manifoldu ise

i) Her $X\in\chi(M)$ için $\eta(X)=0$

ii) Her $X,Y\in\chi(M)$ için $d\eta(X,Y)=0$

özelikleri sağlanır. Bu iki özeliğin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.5.1. $2n+1$ boyutlu bir Kontak manifoldun, integral alt manifoldunun maksimum boyutu 'n' dir (Blair 1976).

Lemma 3.5.1. $(N^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ kontak metrik manifold ve M^p de N^{2n+1} manifoldunun integral alt manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X \in \chi(M^p)$ için

$$\phi(X) \in \chi(M^p)^{\perp}$$

dir (Blair 1976).

İspat. M^p de 'g' metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu ∇ ve N^{2n+1} Sasaki uzayında 'G' metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu da $\overline{\nabla}$ ise $\forall X, Y \in \chi(M^p)$ için Gauss formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X \\ &= \nabla_X Y + h(X,Y) - \nabla_Y X - h(Y,X) \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X \end{aligned}$$

olduğundan $[X,Y] \in \chi(M^p)$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} G([X,Y],\xi) &= G(\overline{\nabla}_X Y,\xi) - G(\overline{\nabla}_Y X,\xi) \\ &= -G(\overline{\nabla}_X \xi, Y) + G(\overline{\nabla}_Y \xi, X) \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.3.3 den

$$\begin{aligned} G([X,Y],\xi) &= -G(-\phi X - \phi hX, Y) + G(-\phi Y - \phi hY, X) \\ &= 2G(\phi X, Y) + G(\phi hX, Y) - G(\phi hY, X) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca h simetrik ve $\phi h = -h\phi$ olduğundan

$$\begin{aligned} G(\phi hY, X) &= -G(hY, \phi X) \\ &= -G(Y, h\phi X) \\ &= G(Y, \phi hX) \end{aligned}$$

dır. Böylece

$$G([X,Y],\xi) = 2G(\phi X, Y) \tag{3.5.1}$$

eşitliği elde edilir. $[X,Y] \in \chi(M^p)$ ve M^p de N^{2n+1} manifoldunun integral alt manifoldu olduğundan $G([X,Y],\xi) = 0$ dır. Böylece (3.5.1) den $\forall Y \in \chi(M^p)$ için $G(\phi X, Y) = 0$ ve $\phi(X) \in \chi(M^p)^\perp$ olur.

Sonuç 3.5.1. $(N^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ Sasaki manifoldu ve

$$i : M^p \longrightarrow i(M^p) \subset N^{2n+1}$$

olacak şekilde daldırma (inclusion) dönüşümünü ele alalım. Burada M^p manifoldunu N^{2n+1} Sasaki uzayının alt manifoldu olarak düşünebiliriz. Tanım 3.2.2 gereğince eğer M^p manifoldu N^{2n+1} Sasaki uzayının integral alt manifoldu ise $\forall X \in \chi(M^p)$ için $\eta(X) = 0$ dır. Bunun tersi de doğrudur. M^p manifoldu üzerindeki metrik 'g' ve N^{2n+1} manifoldu üzerindeki metrik de 'G' olmak üzere

$$g(X,Y) = G\left(i_*(X), i_*(Y)\right) \tag{3.5.2}$$

olur. Ayrıca M^p de 'g' metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu ∇ ve N^{2n+1} Sasaki uzayında 'G' metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu da $\overline{\nabla}$ olsun. Böylece $\forall X, Y \in \chi(M^p)$ için Gaus formülü

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{3.5.3}$$

ve $\forall X \in \chi(M^p), \forall\ \xi_i \in \chi(M^p)$ için de Weingarten formülü

$$\overline{\nabla}_X \xi_i = -A_{\xi_i} X + D_X^\perp \xi_i \tag{3.5.4}$$

dir. Burada

$$A_{\xi_i} = A_i$$

olarak göstereceğiz. ve A_i ye ξ_i normal vektör alanına karşılık gelen şekil operatörü diyeceğiz. Biliyoruz ki $2n+1$-boyutlu kontak manifoldun integral alt manifoldunun maksimum boyutu 'n' dir. M^p manifoldunu N^{2n+1} in integral alt manifoldu ve $p = n$ alırsak M^n in ortonormal bir tabanı $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ şeklinde vardır. Lemma 3.5.1

den N^{2n+1} de ortonormal bir tabanını

$$\{X_1, X_2, ..., X_n, \xi_1 = \phi X_1, \xi_2 = \phi X_2, ..., \xi_n = \phi X_n, \xi\}$$

olarak seçebiliriz. $\forall X, Y, Z \in \chi(M^p)$ için Gaus ve Weingarten formüllerinden

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X h(Y, Z)$$

ve

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z = \nabla_X \nabla_Y Z + h(X, \nabla_Y Z) - A_{h(Y,Z)} X + D_X^{\perp} h(Y, Z) \tag{3.5.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + h(Y, \nabla_X Z) - A_{h(X,Z)} Y + D_Y^{\perp} h(X, Z) \tag{3.5.6}$$

olur. Ayrıca

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z = -\nabla_{[X,Y]} Z + h([X, Y], Z) \tag{3.5.7}$$

dir. (3.5.5), (3.5.6) ve (3.5.7) den

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - A_{h(Y,Z)} X + A_{h(X,Z)} Y + h(X, \nabla_Y Z) \\ &\quad -h(Y, \nabla_X Z) - h([X, Y], Z) + D_X^{\perp} h(Y, Z) - D_Y^{\perp} h(X, Z) \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} I &:= R(X, Y)Z - A_{h(Y,Z)} X + A_{h(X,Z)} Y \\ II &:= h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X, Y], Z) + D_X^{\perp} h(Y, Z) - D_Y^{\perp} h(X, Z) \end{aligned}$$

dersek I ifadesi M^n manifoldunun teğetinde II ifadesi de normalinde olduğundan $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^p)$ için

$$g(\overline{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) + g(A_{h(X,Z)} Y, W) - g(A_{h(Y,Z)} X, W) \tag{3.5.9}$$

olur. Ayrıca (3.4.14) dan $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^p)$ için

$$g(\overline{R}(X,Y)Z,W) = \frac{c+3\varepsilon}{4}\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right)$$

ve

$$\begin{aligned} h(X,Z) &= \sum_{\alpha} g(A_\alpha X, Z)\xi_\alpha \\ h(Y,Z) &= \sum_{\alpha} g(A_\alpha Y, Z)\xi_\alpha \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} g(A_{h(X,Z)}Y,W) &= \sum_{\alpha} g(A_\alpha Y, Z) g(A_\alpha X, W) \\ g(A_{h(Y,Z)}X,W) &= \sum_{\alpha} g(A_\alpha X, Z) g(A_\alpha Y, W) \end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= \frac{c+3\varepsilon}{4}\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right) \\ &\quad + \sum_{\alpha}\left(g(A_\alpha Y,Z)g(A_\alpha X,W) - g(A_\alpha X,Z)g(A_\alpha Y,W)\right) \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

elde edilir.

Teorem 3.5.2.$(N^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ Sasaki manifoldu ve

$$i : M^n \longrightarrow i(M^n) \subset N^{2n+1}$$

olacak şekilde daldırma (inlusion) dönüşümü olsun. M^n integral alt manifoldu ise M^n in ortonormal bir tabanı $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ve tabana tamamlama teoreminden den N^{2n+1} de ortonormal bir tabanı

$$\{X_1, X_2, ..., X_n, \xi_1 = \phi X_1, \xi_2 = \phi X_2, ..., \xi_n = \phi X_n, \xi_0 = \xi\}$$

olarak seçebiliriz. Bu tabanın dual tabanı

$$\left\{w^1, ..., w^n, w^{n+1}, ..., w^{2n}, w^0 = \eta\right\}$$

olsun. Gerçekten burada $\eta(\xi) = 1$ ve $\eta(X_i) = \eta(\phi X_i) = 0$ olduğundan $w^0 = \eta$ dır. Bu durumda

i) $h^0 \equiv 0$ dır.

ii) Birinci Kartan yapı denklemi

$$dw^A = -\sum_{B=0}^{2n} w_B^A \Lambda w^B$$

olmak üzere $\left[w_B^A\right]$ matrisi antisimetriktir.

iii) $i^* = n + i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ olmak üzere $w_j^{i^*} = w_i^{j^*}$ dir.

iv) $w_j^{i^*} = \sum\limits_{k=0}^{2n} h_{jk}^i w^k$, $w_j^0 = \sum\limits_{k=0}^{2n} h_{jk}^0 w^k = 0$ dır (Blair 1976).

İspat. i) Burada $\eta(\xi) = 1$ ve $\eta(X_i) = \eta(\phi X_i) = 0$ olduğundan $w^0 = \eta$ dır. Böylece

$$\forall X, Y \in \chi(M^n)$$

için

$$h(X, Y) = \sum_{k=0}^{n+1} h^k(X, Y)\xi_k$$

dır. Böylece $h^0(X, Y) = G(h(X, Y), \xi)$ dir. Diğer taraftan Gauss formülünde $\nabla_X Y$ teğetsel bileşen olduğundan $h^0(X, Y) = G(\overline{\nabla}_X Y, \xi)$ olur. $G(Y, \xi) = 0$ ise

$$\begin{aligned} h^0(X, Y) &= G(\overline{\nabla}_X Y, \xi) \\ &= -G(Y, \overline{\nabla}_X \xi) \\ &= G(Y, \phi X) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $X \in \chi(M^n)$ ve M^n nin integral alt manifold olduğundan

$$\phi X \in \chi(M^n)^{\perp}$$

ve $h^0(X,Y) = G(Y,\phi X) = 0$ dır.
ii) $dw^A = -\sum\limits_{B=0}^{2n} w_B^A \Lambda w^B$ iken $w_j^i(X) = w^i\left(\overline{\nabla}_X X_j\right)$ ve

$$\overline{\nabla}_{X_i} X_j = \sum_{k=0}^{2n} w_j^k\left(X_i\right) X_k \tag{3.5.11}$$

olarak tanımlanır. Burada $G(X_i, X_j) = \delta_{ij}$ olduğundan $\forall i, j = 1, ..., 2n$ için

$$G(\overline{\nabla}_{X_p} X_i, X_j) + G(X_i, \overline{\nabla}_{X_p} X_j) = 0$$

dır. (3.5.11) den

$$\sum_{k=0}^{2n} w_i^k\left(X_p\right) G(X_k, X_j) + \sum_{k=0}^{2n} w_j^k\left(X_p\right) G(X_k, X_i) = 0$$

ve

$$w_i^j\left(X_p\right) + w_j^i\left(X_p\right) = 0$$

olur. böylece $w_i^j = -w_j^i$ olduğundan $\left[w_B^A\right]$ matrisi antisimetriktir.
iii) Benzer şekilde $\forall i, j = 1, ..., n$ için $G(\phi X_i, X_j) = 0$ dır. Böylece

$$G(\overline{\nabla}_{X_p} \phi X_i, X_j) + G(\phi X_i, \overline{\nabla}_{X_p} X_j) = 0 \tag{3.5.12}$$

dir. Burada N^{2n+1} Sasaki uzay olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\overline{\nabla}_{X_i} \phi\right) X_j &= \varepsilon G(X_i, X_j)\xi - \eta(X_j) X_i \\ &= \varepsilon \delta_{ij} \xi \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan

$$\left(\overline{\nabla}_{X_i} \phi\right) X_j = \overline{\nabla}_{X_i} \phi X_j - \phi\left(\overline{\nabla}_{X_i} X_j\right)$$

olduğundan

$$\overline{\nabla}_{X_i} \phi X_j = \phi\left(\overline{\nabla}_{X_i} X_j\right) + \varepsilon \delta_{ij} \xi \tag{3.5.13}$$

elde edilir. (3.5.12) eşitliğinde $G(\overline{\nabla}_{X_p}\phi X_i, X_j)$ hesaplarsak

$$\begin{aligned} G(\overline{\nabla}_{X_p}\phi X_i, X_j) &= G(\phi\left(\overline{\nabla}_{X_p}X_i\right) + \varepsilon\delta_{ip}\xi, X_j) \\ &= G(\phi\left(\overline{\nabla}_{X_p}X_i\right), X_j) + G(\varepsilon\delta_{ip}\xi, X_j) \\ &= G(\phi\left(\overline{\nabla}_{X_p}X_i\right), X_j) + \varepsilon\delta_{ip}G(\xi, X_j) \\ &= G(\phi\left(\overline{\nabla}_{X_p}X_i\right), X_j) \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.5.12)

$$G(\phi\left(\overline{\nabla}_{X_p}X_i\right), X_j) + G(\phi X_i, \overline{\nabla}_{X_p}X_j) = 0$$

ve eşitliklerinden

$$G(\phi X_i, \overline{\nabla}_{X_p}X_j) - G(\overline{\nabla}_{X_p}X_i, \phi X_j) = 0$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (3.5.11) den ve

$$\sum_{k=0}^{2n} w_j^k\left(X_p\right) G(X_k, \phi X_i) - \sum_{k=0}^{2n} w_i^k\left(X_p\right) G(X_k, \phi X_j) = 0$$

eşitliklerinden de $w_j^{i^*}\left(X_p\right) - w_i^{j^*}\left(X_p\right) = 0$ ve $w_j^{i^*} = w_i^{j^*}$ sonucuna ulaşırız.

iv) Burada $h^i(X,Y) = g(A_iX,Y)$ olmak üzere $h^i_{jk} = h^i(X_j,X_k) = g(A_iX_j,X_k)$ olarak tanımlanır. $w_j^{i^*} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \lambda^i_{jk}w^k$ dersek

$$\begin{aligned} w_j^{i^*}\left(X_p\right) &= \left(\sum_{k=0}^{2n} \lambda^i_{jk}w^k\right)\left(X_p\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \lambda^i_{jk}w^k\left(X_p\right) \\ &= \lambda^i_{jp} \end{aligned}$$

olur. Böylece $w_j^i(X) = w^i\left(\overline{\nabla}_X X_j\right)$ eşitliğnden

$$\begin{aligned} \lambda^i_{jp} &= w_j^{i^*}\left(X_p\right) \\ &= w^{i^*}\left(\overline{\nabla}_{Xp}X_j\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= G\left(\overline{\nabla}_{Xp}X_j, \phi X_i\right) \\
&= G\left(-\overline{\nabla}_{Xp}\phi X_i, X_j\right) \\
&= G\left(-\overline{\nabla}_{Xp}\xi_i, X_j\right) \\
&= G\left(-\overline{\nabla}_{Xp}\xi_i, X_j\right) \\
&= g(A_i X_p, X_k)
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $\lambda^i_{jp} = g(A_i X_p, X_k) = h^i_{jp}$ olur. Bu da bize $w^{i^*}_j = \sum\limits_{k=0}^{2n} h^i_{jk} w^k$ olduğunu söyler.

Teorem 3.5.3. $(N^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ Sasaki manifoldu ve

$$
i : M^n \longrightarrow i(M^n) \subset N^{2n+1}
$$

olacak şekikde daldırma (inclusion) dönüşümü ve M^n manifoldu da N^{2n+1} Sasaki uzayının integral alt manifoldu olsun. Bu durumda $\forall i, j = 1, 2, ..., n$ için
i) $A_i X_j = A_j X_i$
ii) $tr\left(\sum\limits_i A_i^2\right)^2 = \sum\limits_{i,j} (trA_i A_j)^2$
dir (Blair 1976).

İspat. i) Teorem 3.5.1 den $w^{i^*}_j = w^{j^*}_i$ ise

$$
w^{i^*}_j = \sum_{k=0}^{2n} h^i_{jk} w^k = \sum_{k=0}^{2n} h^j_{ik} w^k = w^{j^*}_i
$$

olur. Böylece $h^i_{jk} = h^j_{ik}$ eşitliğine ulaşmış oluruz. Ayrıca $h^i_{jk} = g(A_i X_j, X_k)$ ve $h^j_{ik} = g(A_j X_i, X_k)$ olduğundan $\forall X_k \in \chi(M^n)$ için

$$
g(A_i X_j, X_k) = g(A_j X_i, X_k)
$$

olur. Böylece $A_i X_j = A_j X_i$ eşitliğini elde ederiz.

ii)

$$\left(\sum_{i=1}^{p} A_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{p} A_i A_j \tag{3.5.14}$$

ve $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ve $C = [c_{ij}]$ için

$$tr(ABC) = \sum_{i,j,k} a_{ij} b_{jk} c_{ki} \tag{3.5.15}$$

olduğunu görmek kolaydır. Burada $h^i_{jk} = g(A_i X_j, X_k)$ olduğundan A_i ye karşılık gelen matris $A_i = \left[h^i_{jk}\right]$ dır. Dolayısıyla (3.5.14) ve (3.5.15) den

$$\begin{aligned} tr\left(\sum_i A_i^2\right)^2 &= tr\left(\sum_{i,j=1} A_i^2 A_j^2\right) \\ &= \sum_{i,j=1} trA_i^2 A_j^2 \\ &= \sum h^i_{kl} h^i_{lm} h^j_{mn} h^j_{nk} \\ &= \sum h^k_{il} h^m_{li} h^m_{jn} h^k_{nj} \\ &= \sum_{k,m} (trA_k A_m)^2 \end{aligned}$$

olur.

4. $\mathbf{R}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ SASAKİ UZAYI

4.1 $\mathbf{R}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki Uzayında İzometrik İmmersiyonun Özelikleri

Örnek 3.2.1, Örnek 3.2.2, Örnek 3.2.3 ve Örnek 3.3.1 de yapılan işlemlerle $(R^{2n+1}(-3\varepsilon), \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ altılısının Sasakian uzay olduğu gösterilmişti. Bu uzayda

$$(x_i, y_i, z) = (x_1, .., x_n, y_1, .., y_n, z)$$

standart koordinatlar iken $\eta = \frac{1}{2}(dz - \sum y_i dx_i)$ 1-formunu tanımlamıştık. Burada karakteristik vektör alanı $\xi = 2\dfrac{\partial}{\partial z}$ ve ϕ endomorfizmine karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon\delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon y_i & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.1}$$

idi. Ayrıca 'g' metriği

$$g = \frac{1}{4}\sum(dx_i^2 + dy_i^2) + \varepsilon\eta\otimes\eta \tag{4.1.2}$$

olmak üzere, bu metriğe karşılık gelen matrisi

$$g_{ab} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \delta_{ij} + \varepsilon y_i y_j & 0 & -\varepsilon y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon y_j & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

olarak bulmuştuk. $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayının $\left(\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, \partial_{n+i} = \dfrac{\partial}{\partial y_i}, \partial_{2n+1} = \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$doğal tabanından başka

$$\varphi = \left(e_i = 2\frac{\partial}{\partial y_i}, e_{n+i} = \varepsilon\phi e_i = 2\varepsilon(\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial z}), e_{2n+1} = \xi = 2\frac{\partial}{\partial z}\right)\ (i = 1, 2, ..., n) \tag{4.1.3}$$

tabanı ortonormal bir taban idi. Şimdi $U \in R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ vektörünün doğal tabanda

$$U = U^A\partial_A + U^{2n+1}\partial_{2n+1}$$

ve $\varphi-$ tabanında yazılışı da $U=\overline{U}^A e_A+\overline{U}^{2n+1}e_{2n+1}$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
U &= \overline{U}^A e_A+\overline{U}^{2n+1}e_{2n+1}\\
&= \overline{U}^i e_i+\overline{U}^{n+i}e_{n+i}+\overline{U}^{2n+1}e_{2n+1}\\
&= \overline{U}^i(2\frac{\partial}{\partial y_i})+\overline{U}^{n+i}2(\frac{\partial}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial}{\partial z})+\overline{U}^{2n+1}(2\frac{\partial}{\partial z})\\
&= 2\overline{U}^i\frac{\partial}{\partial y_i}+2\overline{U}^{n+i}\frac{\partial}{\partial x_i}+2(\overline{U}^{2n+1}+\sum y_i\overline{U}^{n+i})\frac{\partial}{\partial z}\\
&= 2\overline{U}^{n+i}\partial_i+2\overline{U}^i\partial_{n+i}+2(\overline{U}^{2n+1}+\sum y_i\overline{U}^{n+i})\partial_{2n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulmuş olduğumuz son eşitliği $U=U^i\partial_i+U^{n+i}\partial_{n+i}+U^{2n+1}\partial_{2n+1}$ ile kıyaslarsak

$$\overline{U}^{n+i}=\frac{1}{2}U^i,\overline{U}^i=\frac{1}{2}U^{n+i},\overline{U}^{2n+1}=\frac{1}{2}(U^{2n+1}-\sum y_iU^i)$$

eşitliklerini ulaşırız. Ayrıca burada

$$\begin{aligned}
\eta(e_j) &= \frac{1}{2}(dz-\sum y_i dx_i)(2\frac{\partial}{\partial y_j})\\
&= dz(\frac{\partial}{\partial y_i})-\sum y_i dx_i(\frac{\partial}{\partial y_j})\\
&= 0-\sum y_i 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\eta(e_{n+i}) &= \frac{1}{2}(dz-\sum y_i dx_i)(2(\frac{\partial}{\partial x_j}+y_j\frac{\partial}{\partial z}))\\
&= dz(\frac{\partial}{\partial x_j}+y_j\frac{\partial}{\partial z})-\sum y_i dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}+y_j\frac{\partial}{\partial z})\\
&= y_j-\sum y_i dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j})\\
&= y_j-\sum y_i\delta_{ij}\\
&= y_j-y_j\\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece distrubutionun

$$D = Sp\{e_i, \phi e_i, i = 1, ..., 2n\}$$

olduğu görülür (Baikousis 1991).

Sonuç 4.1.1. $m-$ boyutlu M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının alt manifoldu ve

$$x : M \to R^{2n+1}(-3\varepsilon)$$

dönüşümü izometrik immersiyon olsun. Bu immersiyonu

$$x = (x^A, x^{2n+1}),\ (A = 1, 2, ..., 2n)$$

koordinat fonksiyonları ile verelim. Böylece

$$x = x^A \partial_A + x^{2n+1} \partial_{2n+1}$$

olur. $a = \overline{a}^A \partial_A + \overline{a}^{2n+1} \partial_{2n+1}$ sıfırdan farklı ve ξ ya dik bir sabit vektör olsun. Bu durumda $\overline{a}^A = c^t$(sabit) ve $\overline{a}^{2n+1} = 0$ dır. $f_a = g(x, a)$ fonksiyonu için (2.9.7) deki spektral ayrışımı ve a vektörü yerine e_A $(A = 1, 2, ..., 2n)$ alırsak da (2.9.8) deki spektral ayrışımı elde ederiz. Bu durmda p ve q değerleri $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ deki koordinat sisteminden bağımsızdır. Şayet (E_A, ξ) $(A = 1, 2, ..., 2n)$ diğer bir ortonormal sistem ise

$$x = \overline{x}^A \partial_A + \overline{x}^{2n+1} \xi = \overline{x}^A u_A^B E_B + \overline{x}^{2n+1} \xi = \widetilde{x}^B E_B + \overline{x}^{2n+1} \xi$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu durumda $\widetilde{x}^B = \overline{x}^A u_A^B$ yeni bileşenlerin spektral ayrışımı p ve q tamsayıları ile ölçülür. Böylece p ve q değerleri iyi tanımlıdır. $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzay olduğundan (3.2.1), (3.2.13) ve (3.2.16) eşitlikleri sağlanır. Bundan dolayı (2.9.8), (3.2.1), (3.2.13) eşitliklerini ve (3.2.16) spektral ayrışımı kullanırsak

$$\phi^2(x) = \phi^2 x_0 + \sum_{t=p}^{q} \phi^2 x_t \tag{4.1.4}$$

spektral ayrışımını elde ederiz. Burada

$$\Delta g(x_t, e_A) = \lambda_t g(x_t, e_A)$$

dir. $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında kompak M alt manifoldu veya

$$x : M \to R^{2n+1}(-3\varepsilon)$$

izometrik immersiyonu için M ile bağlantılı $[p, q]$ ikililerini elde ederiz. Bu $[p, q]$ ikilisine $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında M manifoldunun mertebesi deriz. Şayet q sonlu ise x immersiyonuna sonlu tipte aksi halde sonsuz tipte deriz. (4.1.4) spektral ayrışımında sıfırdan farklı k tane $\phi^2 x_t$ ler var ise $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında kompakt M alt manifolduna $k-$tipli deriz (Baikousis 1991).

Lemma 4.1.1. m boyutlu M manifoldu, $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasakian uzayında integral alt manifoldu olsun. Burada izometrik immersion

$$x : M \to R^{2n+1}(-3\varepsilon) \tag{4.1.5}$$

olmak üzere

i) $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasakian uzayında, $X \in \chi(M)$ olmak üzere x izometrisi M nin yer vektörü için

$$\overline{\nabla}_X x = X - \eta(x)\phi X + (X\eta(x) + \varepsilon g(x, \phi X))\xi \tag{4.1.6}$$

dir. Burada $\overline{\nabla}$ konneksiyonu (4.1.2) metriğinden elde edilen $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ deki Levi Civita koneksiyonudur.

ii) Şayet H vektör alanı M nin ortalama eğrilik vektör alanı ise

$$\Delta g(x, e_A) = -mg(H, e_A), \quad A = 1, 2, ..., 2n \tag{4.1.7}$$

dir (Baikousis 1991).

ispat. *i)* $X=\overline{X}^i e_i+\overline{X}^{n+i}e_{n+i}+\overline{X}^{2n+1}\xi$ ve $x=\overline{x}^i e_i+\overline{x}^{n+i}e_{n+i}+\overline{x}^{2n+1}\xi$ olmak üzere

$$\overline{\nabla}_X x=X-(\overline{X}^i\overline{x}^{n+i}+\overline{X}^{n+i}\overline{x}^i)\xi-\varepsilon\overline{X}^{2n+1}(\overline{x}^i e_{n+i}-\overline{x}^{n+i}e_i)-\varepsilon\overline{x}^{2n+1}(\overline{X}^i e_{n+i}-\overline{X}^{n+i}e_i)$$

ve

$$\begin{aligned} X\eta(x) &= \eta(X)-2\overline{X}^i\overline{x}^{n+i}\\ \varepsilon g(x,\phi X) &= \overline{X}^i\overline{x}^{n+i}-\overline{X}^{n+i}\overline{x}^i \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$-(\overline{X}^i\overline{x}^{n+i}+\overline{X}^{n+i}\overline{x}^i)=X\eta(Y)+\varepsilon g(Y,\phi X)-\eta(X)$$

olur. Böylece

$$\overline{\nabla}_X x=X-\eta(X)(\phi x+\xi)-\eta(x)\phi X+(X\eta(x)+\varepsilon g(x,\phi X))\xi \tag{4.1.8}$$

elde edilir. M manifoldu, $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında integral altmanifoldu olduğundan $\eta(X)=0$ dır. Böylece (4.1.6) eşitliğini elde ederiz.

ii) Ayrıca

$$Xg(x,e_A)=g(\overline{\nabla}_X x,e_A)+g(x,\overline{\nabla}_X e_A)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X x,e_A) &= g(X-\eta(X)(\phi x+\xi)-\eta(x)\phi X+(X\eta(x)+\varepsilon g(x,\phi X))\xi,e_A)\\ &= g(X,e_A)-\eta(X)g(\phi x,e_A)-\eta(x)g(\phi X,e_A) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(x,\overline{\nabla}_X e_A) &= g(x,-\eta(e_A)\phi X-\eta(X)\phi e_A+(X\eta(e_A)+\varepsilon g(e_A,\phi X))\,\xi)\\ &= g(x,-\eta(X)\phi e_A+\varepsilon g(e_A,\phi X)\xi)\\ &= \eta(X)g(\phi x,e_A)+g(x,\xi)\varepsilon g(\phi X,e_A)\\ &= \eta(X)g(\phi x,e_A)+\varepsilon^2\eta(x)g(\phi X,e_A) \end{aligned}$$

$$= \quad \eta(X)g(\phi x, e_A) + \eta(x)g(\phi X, e_A)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} Xg(x, e_A) &= g(X, e_A) - \eta(X)g(\phi x, e_A) - \eta(x)g(\phi X, e_A) \\ &\quad +\eta(X)g(\phi x, e_A) + \eta(x)g(\phi X, e_A) \\ &= g(X, e_A) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ den M manifolduna indirgenmiş konneksiyon ∇ olmak üzere Laplace denklemi

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\nabla_{E_i} E_i \right) f - E_i E_i f \right)$$

idi.. Burada $f = g(x, e_A)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla_{E_i} E_i g(x, e_A) &= g(\nabla_{E_i} E_i, e_A) \\ &= g(\overline{\nabla}_{E_i} E_i - B(E_i, E_i), e_A) \\ &= g(\overline{\nabla}_{E_i} E_i, e_A) - g(B(E_i, E_i), e_A) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} E_i E_i f &= E_i E_i g(x, e_A) \\ &= E_i g(E_i, e_A) \\ &= g(\overline{\nabla}_{E_i} E_i, e_A) + g(E_i, \overline{\nabla}_{E_i} e_A) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $E_i \in \chi\left(R^{2n+1}(-3\varepsilon)\right)$ ve $g(E_i, e_{2n+1}) = 0$ olduğundan

$$E_i = \sum_{B=1}^{2n} \lambda_i^B e_B$$

olarak yazabiliriz. Böylece

$$g(E_i, \overline{\nabla}_{E_i} e_A) = \sum_{B=1}^{2n} \sum_{C=1}^{2n} \lambda_i^B \lambda_i^C g(e_B, \overline{\nabla}_{e_C} e_A)$$

olur. (3.3.20) den $(A, B, C = 1, 2, ..., 2n)$, $(i = 1, 2, ..., m)$ için $g(e_B, \overline{\nabla}_{e_C} e_A) = 0$ ve $g(E_i, \overline{\nabla}_{E_i} e_A) = 0$ olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}
\Delta g(x, e_A) &= -\sum_{i=1}^{m} g(B(E_i, E_i), e_A) \\
&= -g\left(\sum_{i=1}^{m} B(E_i, E_i), e_A\right) \\
&= -g(mH, e_A) \\
&= -mg(H, e_A)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\Delta g(\phi^2 x, a) &= \Delta g(x, \phi^2 a) \\
&= \Delta g(x, \sum_{i=1}^{m} \lambda^A e_A) \\
&= \lambda^A \Delta g(x, e_A) \\
&= -m \sum_{i=1}^{m} \lambda^A g(H, e_A) \\
&= -mg(H, \sum_{i=1}^{m} \lambda^A e_A) \\
&= -mg(H, \phi^2 a) \\
&= mg(H, a) - \eta(a) g(H, \xi)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $M \subset R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ $m-$boyutlu olduğundan $\{E_1, E_2, ..., E_m\}$ ortonormal bazı vardır. $\left\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{2n-m}, \xi\right\}$ de normalindeki ortonormal vektör alanı olsun. Burada ξ karakteristik vektör alanına karşılık gelen şekil operatörü (Weingarten map) $A_\xi = 0$ dır. Böylece

$$H = \sum_{i=1}^{2n-m} (trA_{\xi_i})\xi_i + (trA_\xi)\xi$$

$$= \sum_{i=1}^{2n-m} (trA_{\xi_i})\xi_i$$

eşitliğinden $g(H, \xi) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\Delta g(\phi^2 x, a) = mg(H, a)$$

eşitliğine ulaşırız. Burada $a = e_A$ alıp

$$\begin{aligned} g(\phi^2 x, e_A) &= g(x, \phi^2 e_A) \\ &= -g(x, e_A) \end{aligned}$$

eşitliğini kullanırsak (4.1.7) eşitliğini elde ederiz.

Sonuç 4.1.2. $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayında

$$\begin{aligned} N^{2n}(c) &= \left\{x \in R^{2n+1}(-3\varepsilon) : g(x - x_0, x - x_0) - \varepsilon\left(\eta(x - x_0)\right)^2 = c\right\} \quad (4.1.9) \\ &= \left\{x \in R^{2n+1}(-3\varepsilon) : \frac{1}{4}\sum\left((x^i - x_0^i)^2 + (y^i - y_0^i)^2\right) = c\right\} \end{aligned}$$

silindirini tanımlıyalım. Burada $f(x) = g(x - x_0, x - x_0) - \varepsilon\left(\eta(x - x_0)\right)^2 - c$ dersek $X \in R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ için (2.2.20) ve (4.1.7) den

$$Xf = 2g(x - x_0, X - \eta(X)\xi) \tag{4.1.10}$$

elde ederiz. Çünkü,

$$Xf = 2g(\overline{\nabla}_X(x-x_0), x-x_0) - 2\eta(x-x_0)g(\overline{\nabla}_X(x-x_0), \xi) - 2\eta(x-x_0)g(x-x_0, \overline{\nabla}_X\xi)$$

dir. (2.2.20) ve (4.1.8) den

$$\overline{\nabla}_X(x-x_0) = X - \eta(X)(\phi(x-x_0)+\xi) - \eta(x-x_0)\phi X + (X\eta(x-x_0) + \varepsilon g(x-x_0, \phi X))\xi$$

ve $\overline{\nabla}_X\xi = -\phi X$ olduğundan

$$\begin{aligned} Xf &= 2g(X, x-x_0) - 2\eta(x-x_0)g(x-x_0,\phi X) - 2\varepsilon\eta(x-x_0)\eta(X) \\ &\quad +2\varepsilon\eta(x-x_0)X\left[\eta(x-x_0)\right] + 2\eta(x-x_0)g(x-x_0,\phi X) \\ &\quad -2\eta(x-x_0)\left(\varepsilon\eta(X) - \varepsilon\eta(X) + \varepsilon X\left[\eta(x-x_0)\right] + g(x-x_0,\phi X)\right) \\ &\quad +2\eta(x-x_0)g(x-x_0,\phi X) \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$Xf = 2g(x-x_0, X-\eta(X)\xi)$$

elde edilir. Burada $-\phi^2 X = X - \eta(X)\xi$ olduğundan

$$\begin{aligned} Xf &= 2g(x-x_0, -\phi^2 X) \\ &= g(-2\phi^2(x-x_0), X) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $Xf = g(gradf, X)$ ve metrik nondejenere olduğundan

$$gradf = -2\phi^2(x-x_0) \tag{4.1.11}$$

elde edilir. Burada *gradf* vektörü silindirin normalinde olan bir vektördür.

$$gradf = -2\phi^2(x-x_0) = 2\left((x-x_0) - \eta(x-x_0)\xi\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X(gradf) &= 2\left(\overline{\nabla}_X(x-x_0) - (\overline{\nabla}_X\eta(x-x_0))\xi - \eta(x-x_0)\overline{\nabla}_X\xi\right) \\ &= 2\begin{pmatrix} X - \eta(X)(\phi(x-x_0)+\xi) - \eta(x-x_0)\phi X \\ +(X\eta(x-x_0) + \varepsilon g(x-x_0,\phi X))\xi \\ -\varepsilon g(X - \eta(X)(\phi(x-x_0)+\xi) - \eta(x-x_0)\phi X \\ +(X\eta(x-x_0) + \varepsilon g(x-x_0,\phi X))\xi, \xi)\xi \\ -\varepsilon g(x-x_0, \overline{\nabla}_X\xi)\xi + \eta(x-x_0)\phi X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \quad 2\left[\begin{array}{c} X-\eta(X)(\phi(x-x_0)+\xi)+X\eta(x-x_0)\xi+\varepsilon g(x-x_0,\phi X))\xi \\ -X\eta(x-x_0)\xi-\varepsilon g(x-x_0,\phi X))\xi+\varepsilon g(x-x_0,\phi X))\xi \end{array}\right]$$

gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$\overline{\nabla}_X(gradf)=2\left[X-\eta(X)(\phi(x-x_0)+\xi)+\varepsilon g(x-x_0,\phi X))\xi\right] \tag{4.1.12}$$

elde ederiz. Burada $N^{2n}(c)$ silindirinin $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ deki ikinci temel formu $\overline{B}$ ise

$$\overline{B}(X,Y)=-\frac{1}{4c^2}g\left(\overline{\nabla}_X(gradf),Y\right)gradf \tag{4.1.13}$$

dir. Çünkü, $Z=\dfrac{gradf}{\|gradf\|}$ vektör alanı $N^{2n}(c)$ ye dik bir vektör alanıdır. Burada

$$\begin{aligned} \|gradf\|^2 &= g(gradf,gradf) \\ &= 4g(\phi^2(x-x_0),\phi^2(x-x_0)) \\ &= 4g(\phi(x-x_0),\phi(x-x_0)) \\ &= 4\left(g(x-x_0,x-x_0)-\varepsilon\eta(x-x_0)^2\right) \\ &= 4c^2 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\|gradf\|=2c$ ve $Z=\dfrac{gradf}{2c}$ elde edilir. Ayrıca biliyoruz ki

$$\begin{aligned} \overline{B}(X,Y) &= -g(A_ZX,Y)Z \\ &= -g(\overline{\nabla}_XZ,Y)Z \\ &= -\frac{1}{4c^2}g(\overline{\nabla}_X(gradf),Y)gradf \end{aligned}$$

dır. Böylece (4.1.12) ve (4.1.13) den

$$\overline{B}(X,Y)=-\frac{1}{4c^2}\left[\begin{array}{c} g(X,Y)-\varepsilon\eta(X)\eta(Y)-\eta(X)g(\phi(x-x_0),Y) \\ +\varepsilon g(x-x_0,\phi X)g(\xi,Y) \end{array}\right]gradf$$

olur. Bu eşitliği

$$\overline{B}(X,Y) = -\frac{1}{2c^2}\left[\begin{array}{c} g(X,Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \\ -g(\phi(x-x_0), \eta(X)Y + \eta(Y)X \end{array}\right] gradf \tag{4.1.14}$$

olarak da yazabiliriz. Burada $X, Y \in \chi(N^{2n}(c))$ dir. Ayrıca $\xi f = 0$ olduğundan $\xi \in \chi(N^{2n}(c))$ dir ve $\overline{B}(\xi,\xi) = 0$ dır. Böylece $N^{2n}(c)$ deki $\overline{H}$ ortalama eğrilik vektör alanı

$$\overline{H} = \frac{2n-1}{2nc^2}\phi^2(x-x_0)$$

dir. Çünkü $N^{2n}(c)$ nin ortonormal bir bazını $(E_1, E_2, ..., E_{2n-1}, \xi)$ olarak seçebilirim. Böylece $\eta(E_i) = 0$ ve (4.1.14) den

$$\begin{aligned} \overline{B}(E_i,E_i) &= -\frac{1}{2c^2}g(E_i,E_i)gradf \\ &= -\frac{1}{2c^2}(-2\phi^2(x-x_0)) \\ &= \frac{1}{c^2}(\phi^2(x-x_0)) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\overline{B}(\xi,\xi) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\overline{B}(E_i,E_i) \\ &= \frac{2n-1}{2nc^2}\phi^2(x-x_0) \end{aligned}$$

elde edilir (Baikousis 1991).

Sonuç 4.1.3. m boyutlu M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında, $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan integral altmanifold olsun. $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında M manifoldunun ikinci temel formu B ve $N^{2n}(c)$ silindirinde M manifoldunun ikinci temel formu da B'

olsun. Eğer

$$\begin{bmatrix} R^{2n+1}(-3\varepsilon)\,\text{Kon.} & N^{2n}(c)\ \text{Kon.} & M \text{ de Kon.} & \text{İkinci temel form} \\ \overline{\nabla} & & \nabla & B \\ & \nabla' & \nabla & B' \\ \overline{\nabla} & \nabla' & & \overline{B} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlarsak Gauss denkleminden

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y) \tag{4.1.15}$$

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + B'(X,Y) \tag{4.1.16}$$

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla'_X Y + \overline{B}(X,Y) \tag{4.1.17}$$

eşitliklerini elde ederiz. (4.1.16) ve (4.1.17) den

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B'(X,Y) + B(X,Y)$$

olur. Böylece son eşitlik ve (4.1.15) den her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$B(X,Y) = B'(X,Y) + \overline{B}(X,Y) \tag{4.1.18}$$

eşitliği elde edilir. H ve H' vektör alanları sırasıyla $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayı ve $N^{2n}(c)$ silindirnde M manifoldunun ortalama vektör alanları olsun. $m-$boyutlu M manifoldu $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının integral altmanifoldu olduğundan bir ortonormal tabanı $\{E_1, E_2, ..., E_m\}$ vardır. (4.1.14) den

$$\overline{B}(E_i, E_i) = \frac{1}{c^2} g(E_i, E_i)\phi^2(x - x_0)$$

olur. (4.1.18) den

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} B(E_i, E_i) &= \sum_{i=1}^{m} B'(E_i, E_i) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{c^2} g(E_i, E_i)\phi^2(x - x_0) \\ mH &= mH' + m\frac{1}{c^2}\phi^2(x - x_0) \end{aligned}$$

ve

$$H = H' + \frac{1}{c^2}\phi^2(x - x_0) \tag{4.1.19}$$

eşitliğini elde ederiz (Baikousis 1991).

Lemma 4.1.2. $m - M$ manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ nin integral altmanifoldu olsun. M manifoldu $N^{2n}(c)$ silindirinde yatar $\Leftrightarrow$ $x - x_0$ vektörü M nin dikindedir (Baikousis 1991).

İspat. M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ nin integral altmanifoldu ise $\forall X \in \chi(M)$ için $\eta(X) = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} Xf &= 2g(x - x_0, X - \eta(X)\xi) \\ &= 2g(x - x_0, X) \end{aligned}$$

olur. Şimdi XXf 'i hesaplarsak

$$\begin{aligned} XXf &= 2g(x - x_0, \overline{\nabla}_X X) + 2g(\overline{\nabla}_X (x - x_0), X) \\ &= 2g(x - x_0, \overline{\nabla}_X X) \\ &\quad +2g(X - \eta(x - x_0)\phi X + (X\eta(x - x_0) + \varepsilon g(x - x_0, \phi X))\xi, X) \\ &= 2g(x - x_0, \overline{\nabla}_X X) + 2g(X, X) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\overline{\nabla}_X X = \nabla_X X + B(X, X)$ olduğundan

$$XXf = 2g(\nabla_X X + B(X, X), x - x_0) + 2g(X, X)$$

olur. $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ nin $m - M$ integral altmanifoldunun bir ortonormal tabanı $(E_1, E_2, ..., E_m)$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^{m} ((\nabla_{E_i} E_i)f - E_i E_i f) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} 2g(\nabla_{E_i} E_i, x - x_0) - 2g(\nabla_{E_i} E_i, x - x_0) \\ -2g(B(E_i, E_i), x - x_0) - 2g(E_i, E_i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2\sum_{i=1}^{m}\left(g(E_i,E_i)+g(B(E_i,E_i),x-x_0)\right) \\ &= -2\left(m+g(mH,x-x_0)\right) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\Delta f = -2m\left(1+g(H,x-x_0)\right) \tag{4.1.20}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1. $R^5(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $N^4(c)$ de yatan her M^2 integral yüzeyi düzdür (Baikousis 1991).

İspat. Biliyoruz ki $\|gradf\| = 2c$ dir. M^2 yüzeyinin $\{X_1, X_2\}$ ortonormal tabanı

$$\begin{aligned} \phi X_1 &= \frac{gradf}{\|gradf\|} \\ &= -\frac{1}{c}\phi(x-x_0) \end{aligned}$$

olacak şekilde seçelim. Böylece

$$\{X_1, X_2, \xi_1 = \phi X_1, \xi_2 = \phi X_2, \xi\}$$

vektör alanları $R^5(-3\varepsilon)$ Sasak uzayının ortonormal bir tabanı olur. (4.1.15) den

$$g(B(X_i,X_j),\xi_1) = g(\overline{B}(X_i,X_j),\xi_1)$$

dir. Çünkü $\xi_1 = -\frac{1}{c}\phi(x-x_0)$ vektör alanı $N^{2n}(c)$ silindirinin normalindedir ve $B'(X_i,X_j)$ de M^2 nin normalinde fakat, $N^{2n}(c)$ silindirinin teğetinde olan bir vektör alanıdır. Böylece $g(B'(X_i,X_j),\xi_1) = 0$ dır. (4.1.14) de $\eta(X_i) = \eta(X_j) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{B}(X_i,X_j) &= -\frac{1}{2c^2}g(X_i,X_j)gradf \\ &= -\frac{1}{c}g(X_i,X_j)\xi_1 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} g(B(X_i, X_j), \xi_1) &= g(-\frac{1}{c} g(X_i, X_j)\xi_1, \xi_1) \\ &= -\frac{1}{c} g(X_i, X_j) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca biliyoruz ki

$$\overline{\nabla}_{X_i} X_j = \nabla_{X_i} X_j + B(X_i, X_j)$$

ve $g(X_j, \xi_1) = 0$ ise

$$g(\overline{\nabla}_{X_i} X_j, \xi_1) + g(\overline{\nabla}_{X_i} \xi_1, X_j) = 0$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned} g(B(X_i, X_j), \xi_1) &= g(\overline{\nabla}_{X_i} X_j, \xi_1) \\ &= g(-\overline{\nabla}_{X_i} \xi_1, X_j) \\ &= g(A_{\xi_1} X_i, X_j) \end{aligned}$$

dir. Son eşitlikten

$$g(A_{\xi_1} X_i, X_j) = g(-\frac{1}{c} X_i, X_j)$$

elde edilir. Böylece $A_1 X_i = -\frac{1}{c} X_i$ ve $A_1 = -\frac{1}{c} I$ sonucuna ulaşırız. Burada $A_{\xi_i} = A_i$ $(i = 1, 2)$ dönüşümleri M^2 yüzeyinin şekil operatörleridir. Kabul edelim ki

$$\begin{aligned} A_2 X_1 &= a_{11} X_1 + a_{21} X_2 \\ A_2 X_2 &= a_{12} X_1 + a_{22} X_2 \end{aligned}$$

olsun. Teorem 5.3.2. den

$$\begin{aligned} a_{11} &= g(A_2 X_1, X_1) = g(-\overline{\nabla}_{X_1} \xi_2, X_1) = 0 \\ a_{21} &= g(A_2 X_1, X_2) = g(A_1 X_2, X_2) = g(-\frac{1}{c} X_2, X_2) = -\frac{1}{c} \\ a_{12} &= g(A_2 X_2, X_1) = g(X_2, A_2 X_1) = -\frac{1}{c} \end{aligned}$$

$$a_{22} = g(A_2X_2, X_2) = a$$

eşitliklerini yazabiliriz. Böylece şekil operatörlerini

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{c} & a \end{bmatrix} \tag{4.1.21}$$

olarak elde ederiz. Burada a reel değerli bir fonksiyondur.(3.5.10) eşitliğinden M^2 nin Gaus eğriliği

$$\begin{aligned} K(X_1, X_2) &= \sum_{i=1}^{2} \left(g(A_iX_1, X_1)g(A_iX_2, X_2) - g(A_iX_1, X_2)^2 \right) \\ &= g(A_1X_1, X_1)g(A_1X_2, X_2) - g(A_1X_1, X_2)^2 \\ &\quad + g(A_2X_1, X_1)g(A_2X_2, X_2) - g(A_2X_1, X_2)^2 \\ &= \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.2. m boyutlu M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının kompakt integral alt manifoldu olsun. M manifoldu 1-tiplidir ancak ve ancak M manifoldu $N^{2n}(c)$ de yatan minimal alt manifolddur. Burada $c^2 = \frac{m}{\lambda_p}$ dir (Baikousis 1991).

İspat. Şayet M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında 1-tipli ise $\Delta g(x_P, e_A) = \lambda_p g(x_P, e_A)$ dır. Burada $\phi^2 x = \phi^2 x_0 + \phi^2 x_P$ ve $\phi^2 x_0$ de $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayında sabit vektördür. Böylece (2.5) den $\Delta g(\phi^2 x, e_A) = mg(H, e_A)$, ($A = 1, 2, ..., 2n$) dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \Delta g(\phi^2 x, e_A) &= \Delta g(\phi^2 x_0 + \phi^2 x_P, e_A) \\ &= \Delta g(\phi^2 x_P, e_A) \\ &= \Delta g(x_P, \phi^2 e_A) \\ &= -\Delta g(x_P, e_A) \\ &= -\lambda_p g(x_P, e_A) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_p g(x_P, \phi^2 e_A) \\
&= \lambda_p g(\phi^2 x_P, e_A)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$mg(H, e_A) = \lambda_p g(\phi^2 x_P, e_A)$$

dir. Böylece $\phi^2 x_P = \phi^2(x - x_0)$ olduğundan

$$g(mH - \lambda_p \phi^2(x - x_0), e_A) = 0, \ (A = 1, 2, ..., 2n)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $mH - \lambda_p \phi^2(x - x_0) = \mu\xi$ dır. $A_\xi = 0$ olduğundan $g(H, \xi) = 0$ dır. Böylece $\mu = 0$ çıkar. $\mu = 0$ ise $H = \dfrac{\lambda_p}{m}\phi^2(x - x_0)$ olarak elde edilir. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
g(H, X) &= g(\frac{\lambda_p}{m}\phi^2(x - x_0), X) \\
&= \frac{\lambda_p}{m} g(x - x_0, \phi^2 X) \\
&= -\frac{\lambda_p}{m} g(x - x_0, X)
\end{aligned}
$$

$g(H, X) = 0$ olduğundan $\forall X \in \chi(M)$ için $g(x - x_0, X) = 0$ dır Böylece $\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı $(x - x_0)$ in normalindedir. Lemma 4.1.1 den Bazı M manifoldları $c\rangle 0$ için $N^{2n}(c)$ de yatarlar. (4.1.19) den $H = H' + \dfrac{1}{c^2}\phi^2(x - x_0)$ idi. Böylece

$$H' = (\frac{\lambda_p}{m} - \frac{1}{c^2})\phi^2(x - x_0) \qquad (4.1.22)$$

olur. Burada H' ortalama eğrilik vektör alanı; $N^{2n}(c)$ silindirinde M manifoldunun ortalama eğrilik vektör alanıdır. Yani H' vektör alanı, $N^{2n}(c)$ nin teğet uzayında M manifolduna diktir . Böylece H' vektör alanı *gradf* vektör alanına dik olduğundan $H' = 0$ dır. Sonuc olarak (4.1.22) den $\dfrac{\lambda_p}{m} - \dfrac{1}{c^2} = 0$ ve $c^2 = \dfrac{m}{\lambda_p}$ elde edilir.
Tersine M manifoldu $N^{2n}(c)$ de minimal alt manifold olsun Lemma 4.1.1 in (ii) şıkkından $\Delta g(x, e_A) = -mg(H, e_A)$ ve (4.1.19) dan $H = H' + \dfrac{1}{c^2}\phi^2(x - x_0)$ dir. M

manifoldu minimal olduğundan $H' = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
\Delta g(x, e_A) &= -mg(H, e_A) \\
&= -mg(\frac{1}{c^2}\phi^2(x - x_0), e_A) \\
&= -\frac{m}{c^2} g(x - x_0, \phi^2 e_A) \\
&= \frac{m}{c^2} g(x - x_0, e_A)
\end{aligned}$$

olur. Spektral ayrışımı düşünürsek

$$g(x, e_A) = g(x_0, e_A) + \sum_{t=1}^{\infty} g(x, e_A)_t \tag{4.1.23}$$

dir. Burada $\Delta g(x, e_A)_t = \lambda_t g(x, e_A)_t$ ve

$$\begin{aligned}
\Delta g(x_0, e_A) &= \frac{m}{c^2} g(x_0 - x_0, e_A) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\Delta g(x, e_A) &= \Delta g(x_0, e_A) + \sum_{t=1}^{\infty} \Delta g(x, e_A)_t \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t g(x, e_A)_t
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\Delta g(x, e_A) &= \frac{m}{c^2} g(x - x_0, e_A) \\
&= \frac{m}{c^2} g(x, e_A) - \frac{m}{c^2} g(x_0, e_A) \\
&= \frac{m}{c^2} \left(g(x_0, e_A) + \sum_{t=1}^{\infty} g(x, e_A)_t \right) - \frac{m}{c^2} g(x_0, e_A) \\
&= \frac{m}{c^2} g(x_0, e_A) + \frac{m}{c^2} \sum_{t=1}^{\infty} g(x, e_A)_t - \frac{m}{c^2} g(x_0, e_A) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{m}{c^2} g(x, e_A)_t
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\sum\limits_{t=1}^{\infty} \lambda_t g(x, e_A)_t = \sum\limits_{t=1}^{\infty} \frac{m}{c^2} g(x, e_A)_t$ ve

$$\sum_{t=1}^{\infty} (\lambda_t - \frac{m}{c^2}) g(x, e_A)_t = 0, \ A = 1, 2, ..., 2n \tag{4.1.24}$$

eşitliğine ulaşırız. Kabul edelim ki $A \in \{1, 2, ..., 2n\}$ ve her s için $g(x, e_A)_s \neq 0$ olsun. Böylece (4.1.24) den

$$\sum_{t=1}^{\infty} (\lambda_t - \frac{m}{c^2}) \left(g(x, e_A)_t, g(x, e_A)_s \right) = 0 \tag{4.1.25}$$

olur. Burada $(,)$ $C^{\infty}(M)$ uzayında tanımlı bir iç çarpımdır. Δ Laplace operatörü self adjoint olduğundan

$$\lambda_t \left(f_t, f_s \right) = \left(\lambda_t f_t, f_s \right) = \left(\Delta f_t, f_s \right) = \left(f_t, \Delta f_s \right) = \left(f_t, \lambda_s f_s \right) = \lambda_s \left(f_t, f_s \right)$$

olur. Böylece $(\lambda_t - \lambda_s) \left(f_t, f_s \right) = 0$ ve $t \neq s$ için $\left(f_t, f_s \right) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak (4.1.25) den $t \neq s$ için $g(x, e_A)_t \neq 0$ olduğu zaman

$$\lambda_t - \frac{m}{c^2} = 0 \tag{4.1.26}$$

olur. (4.1.26) denklemi tam olarak bir çözüme sahip olduğundan, M manifoldu 1-tiplidir.

4.2 $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki Uzayında Alt Manifoldların Bazı Özelikleri

M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $m-$boyutlu integral alt manifoldu olsun. Böylece $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayında M üzerindeki ortonormal vektör alanlarını $X_1, ..., X_m$ olarak tanımlarsak, baza tamamlamadan $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ deki ortonormal taban vektör alanlarını

$$\left(X_1, ..., X_m, \xi_{m+1}, \xi_{m+2}, ..., \xi_{2n+1} = \xi \right)$$

olarak tanımlayabiliriz. Ayrıca D de $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de M nin normal konneksiyonu olsun. Şayet $X \in \chi(M)$ ise (2.2.20) den

$$\overline{\nabla}_X e_A = \varepsilon g(\phi X, e_A), \quad A = 1, 2, ..., 2n$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} Xg(H, e_A) &= g(\overline{\nabla}_X H, e_A) + g(H, \overline{\nabla}_X e_A) \\ &= g(-A_H X + D_X H, e_A) + 0 \\ &= -g(A_H X, e_A) + g(D_X H, e_A) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\Delta g(H, e_A) = g\begin{pmatrix} \sum\limits_{t=1}^{m} (D_{\nabla_{X_i} X_i} H - D_{X_i} D_{X_i} H + A_{D_{X_i} H} X_i + (\nabla_{X_i} A_H) X_i \\ +B(X_i, A_H X_i) - \eta(D_{X_I} H)\phi X_i), e_A \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$\Delta^D H = \sum_{t=1}^{m} (D_{\nabla_{X_i} X_i} H - D_{X_i} D_{X_i} H) \tag{4.2.1}$$

ve

$$tr(\overline{\nabla} A_H) = \sum_{t=1}^{m} \left(A_{D_{X_i} H} X_i + (\nabla_{X_i} A_H) X_i\right) \tag{4.2.2}$$

dir. Ayrıca ξ_{m+2} vektörünü H ortalama eğrilik vektör alalnına paralel seçersek

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{m} B(X_i, A_H X_i) &= \sum_{t=m+1}^{2n} tr(A_H A_\alpha)\xi_\alpha \\ &= (trA_{m+1}^2)H + \sum_{t=m+2}^{2n} tr(A_H A_\alpha)\xi_\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Burada A_α terimi ξ_α ile bağlantılı $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de M manifoldunun Weingarten dönüşümüdür. $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de uyumlu vektör alanı (allied mean curvature) nı

$$a(H) = \sum_{t=m+2}^{2n} tr(A_H A_\alpha)\xi_\alpha$$

olarak tanımlarız. Yukarıdaki eşitliklerden

$$\Delta g(H, e_A) = g\left(tr(\overline{\nabla} A_H) + \Delta^D H + (tr A^2_{m+1})H + a(H) - \sum_{t=1}^{m} \eta(D_{X_i} H)\phi X_i, e_A \right) \tag{4.2.3}$$

olur (Baikousis 1994).

Teorem 4.2.1. M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de bir Kompakt integral alt manifoldu olsun. Şayet M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de ortalama eğrilik vektör alanı, paralel ise M manifoldu 1-tipdendir ancak ve ancak

1) $tr A^2_{m+1}$ sabittir.
2) $tr(\overline{\nabla} A_H) = 0$
3) $a(H) = 0$ (Chen yüzeyi.)

dir (Baikousis 1994).

İspat. M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de paralel ise $DH = 0$ dır. Böylece $\Delta^D H = 0$ olduğu tanımından kolayca görülür. M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de 1-tipli olsun. H' ortalama eğrilik vektör alanı, $N^{2n}(c)$ de M manifoldunun ortalama eğrilik vektör alanıdır. Yani H' vektör alanı, $N^{2n}(c)$ nin teğet uzayında M manifolduna diktir . Böylece H' vektör alanı $gradf$ vektör alanına dik olduğundan $H' = 0$ dır. Dolayısıyla (4.1.19) dan

$$H = \frac{1}{c^2}\phi^2(x - x_0)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \Delta g(H, e_A) &= \frac{1}{c^2}\Delta g(\phi^2(x - x_0), e_A) \\ &= \frac{1}{c^2}\Delta g(x - x_0, \phi^2 e_A) \\ &= -\frac{1}{c^2}\Delta g(x - x_0, e_A) \\ &= -\frac{1}{c^2}\Delta g(x, e_A) \end{aligned}$$

Lemma 2.1 (ii) den

$$\Delta g(H, e_A) = \frac{m}{c^2} g(H, e_A) \tag{4.2.4}$$

elde ederiz. $\lambda = \dfrac{m}{c^2}$ için (4.2.3) ve (4.2.4) dan

$$g\left(tr(\overline{\nabla} A_H) + (trA_{m+1}^2)H + a(H) - \lambda H, e_A\right) = 0, \quad A = 1, 2, ..., 2n$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$tr(\overline{\nabla} A_H) + (trA_{m+1}^2)H + a(H) - \lambda H = \mu\xi$$

sonucuna ulaşırız . $tr(\overline{\nabla} A_H)$ nın tanımından , bu vektörün M manifoldunun teğet uzayında ve H ortalama eğrilik vektör alanı ξ ye dik olduğundan (1),(2) ve (3) özeliklerinin sağlandığı görülür. Karşıt olarak (1),(2) ve (3) özelikleri sağlansın. Bu eşitlikleri (4.2.3) da yerine yazarsak $trA_{m+1}^2 = \lambda$ (sabit) için

$$\Delta g(H, e_A) = \lambda g(H, e_A)$$

çıkar. Teorem 4.1.2 deki benzer işlemlerle M manifoldunun 1-tipden olduğu görülür. Farzedelim ki M manifoldu $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan ve $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının n-boyutlu integral alt manifoldu olsun. M manifoldunu H ortalama eğrilik vektör alanı (4.1.19) deki gibidir. ζ vektör alanını H' ye paralel birim vektör olarak seçersek $H' = a'\zeta$ olarak yazabiliriz. Burada $a' = \|H'\|$ dir. $X_1, X_2, ..., X_n$ vektör alanları M manifoldunun lokal ortonormal bazları olsun. Böylece $N^{2n}(c)$ silindirinin normali $\tau = -\phi^2(x - x_0)$ olmak üzere M manifoldunun ortonormal vektör alanını $\xi_{n+1} = \dfrac{1}{a}H$ $(a = \|H\|)$, $\xi_{n+2} = \dfrac{\zeta + a'\tau}{ca}$ olarak seçebiliriz. Burada

$$\begin{aligned} g(\xi_{n+1}, \xi_{n+1}) &= g(\xi_{n+2}, \xi_{n+2}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğu açıktır. $g\left(\phi^2(x - x_0),\, H'\right) = 0$ olduğundan

$$g(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}) = g\left(\frac{1}{a}H,\, \frac{\zeta + a'\tau}{ca}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{ca^2} g\left(H,\zeta\right) + \frac{a'}{ca^2} g\left(H,\tau\ \right) \\
&= \frac{1}{ca^2} g\left(H' + \frac{1}{c^2}\phi^2(x-x_0), \frac{1}{a'}\ H'\right) \\
&\quad + \frac{a'}{ca^2} g\left(H' + \frac{1}{c^2}\phi^2(x-x_0), -\phi^2(x-x_0)\ \right) \\
&= \frac{1}{ca^2} g\left(H', \frac{1}{a'}\ H'\right) + \frac{a'}{ca^2} g\left(\frac{1}{c^2}\phi^2(x-x_0), -\phi^2(x-x_0)\ \right) \\
&= \frac{1}{a'ca^2} g\left(H',\ H'\right) - \frac{a'}{c^3a^2} g\left(\phi^2(x-x_0), \phi^2(x-x_0)\ \right) \\
&= \frac{(a')^2}{a'ca^2} - \frac{a'c^2}{c^3a^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca $\xi_{n+2} = \dfrac{\zeta + a'\tau}{ca}$ eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
1 &= g(\frac{\zeta + a'\tau}{ca}, \frac{\zeta + a'\tau}{ca}) \\
&= \frac{1}{c^2a^2} g\left(\frac{1}{a'}H', \frac{1}{a'}\ H'\right) + \frac{(a')^2}{c^2a^2} g(\tau,\tau) \\
&= \frac{1}{c^2a^2} + \frac{(a')^2c^2}{c^2a^2}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\frac{1}{c^2} + (a')^2 = a^2 \tag{4.2.5}
$$

sonucuna ulaşırız. Teorem 4.1.1 deki metodu kullanırsak $\tau = -\phi^2(x - x_0)$ için $A_\tau = -I$ ve $trA_\tau = -n$ olur. Böylece $A_\alpha = A_{\xi_\alpha}$ ve $H = \frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} B(X_i, X_i)$ olmak üzere

$$
H = \frac{1}{n} \sum_{\alpha,t=1}^{n} g(A_{n+\alpha}X_i, X_i)\xi_{n+\alpha} \tag{4.2.6}
$$

olarak da elde edilir. $\xi_{n+\alpha} = \phi X_\alpha$ ve $H = a\phi X_1$ olarak seçersek, $(\phi X_1, \phi X_2, ..., \phi X_n)$ vektör alanlarının lineer bağımsızlığından ve (4.2.6) dan

$$
trA_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} g(A_\alpha X_i, X_i) = na
$$

$\alpha \geq 2$ için

$$tr A_{n+\alpha} = \sum_{i=1}^{n} g(A_{n+\alpha} X_i, X_i) = 0 \tag{4.2.7}$$

olur. Ayrıca $H = a\xi_{n+1}$ ise $A_H = aA_{n+1}$ dir. Dolayısıyla $A_H = na^2$ olduğu görülür. Ayrıca $H' = a'\zeta$ ve (4.1.19) den $H = a'\zeta - \frac{1}{c^2}\tau$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
tr A_\zeta &= tr A_{\frac{1}{a'}H + \frac{1}{a'c^2}\tau} \\
&= \frac{1}{a'} tr A_H + \frac{1}{a'c^2} tr A_\tau \\
&= \frac{na^2}{a'} - \frac{n}{a'c^2} \\
&= \frac{n}{a'}(a^2 - \frac{1}{c^2}) \\
&= \frac{n(a')^2}{a'} \\
&= na'
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Ayrıca $H = a'\zeta - \frac{1}{c^2}\tau$ ve $\xi_{n+2} = \dfrac{\zeta + a'\tau}{ca}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
tr A_H A_{n+2} &= \frac{1}{ac}\left(a' tr A_\zeta^2 + \frac{1}{c^2} tr A_\zeta - (a')^2 tr A_\zeta - \frac{na'}{c^2}\right) \\
&= \frac{1}{ac}\left(a' tr A_\zeta^2 + \frac{na'}{c^2} - (a')^2 na' - \frac{na'}{c^2}\right) \\
&= \frac{a'}{ac}\left(tr A_\zeta^2 - n(a')^2\right)
\end{aligned}$$

ve

$$tr A_H A_{n+2} = \frac{a'}{ac}\left(tr A_\zeta^2 - n(a')^2\right) \tag{4.2.8}$$

elde dilir. $H = H' - \frac{1}{c^2}\tau$ ise $tr A_H A_{n+\alpha} = tr A_{H'} A_{n+\alpha} + \frac{1}{c^2} tr A_{n+\alpha}$ ve (4.2.7) den

$$tr A_H A_{n+\alpha} = tr A_{H'} A_{n+\alpha}, \quad \alpha = 3, 4, ..., 2n \tag{4.2.9}$$

sonucuna ulaşırız. $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında, τ ya dik M manifoldunun herhangi bir normal vektörü σ için $A_\sigma = A'_\sigma$ ve $D\sigma = D'\sigma$ dır. Çünkü

$$\overline{\nabla}_X \sigma = -A_\sigma X + D_X \sigma \tag{4.2.10}$$

$$\nabla'_X \sigma = -A'_\sigma X + D'_X \sigma$$

dir. Burada D, $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ da M manifoldunun normal konneksiyonu ve D' de $N^{2n}(c)$ de M manifoldunun normal konneksiyonudur. Ayrıca biliyoruz ki

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X \sigma &= \nabla_X \sigma + B(\sigma, X) \\
\nabla'_X \sigma &= \nabla_X \sigma + B'(\sigma, X)
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$B(\sigma, X) = B'(\sigma, X) + \overline{B}(\sigma, X)$$

elde ederiz. $N^{2n}(c)$ nin boyutu $2n$ dir. $N^{2n}(c)$ nin birim normal vektörü

$$\tau = -\frac{1}{c}\phi^2(x - x_0)$$

ve $\overline{B}(\sigma, X) = \lambda\tau$ olduğundan

$$\begin{aligned}
g(\overline{\nabla}_X \sigma, \tau) &= g(\nabla_X \sigma + B(\sigma, X), \tau) \\
&= g(\nabla_X \sigma, \tau) + \lambda g(\tau, \tau) \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Ayrıca $g(\sigma, \tau) = 0$, $A_\tau = -\frac{1}{c}I$ ve $\sigma \in \chi(m)^\perp$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\lambda &= g(\overline{\nabla}_X \sigma, \tau) \\
&= -g(\overline{\nabla}_X \tau, \sigma) \\
&= -g(-A_\tau X + D_X \tau, \sigma) \\
&= g(A_\tau X, \sigma) \\
&= -\frac{1}{c} g(X, \sigma) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece $B(\sigma, X) = B'(\sigma, X)$ elde edilir. Dolayısıyla $\overline{\nabla}_X \sigma = \nabla'_X \sigma = \nabla_X \sigma$ sonucuna ulaşırız. (4.2.10) den $A_\sigma = A'_\sigma$ ve $D\sigma = D'\sigma$ olur. Böylece

$a(H)=\sum\limits_{t=m+2}^{2n} tr(A_HA_\alpha)\xi_\alpha$ olduğundan

$$\begin{aligned} a(H) &= tr(A_HA_{m+2})\xi_{m+2}+\sum_{t=m+3}^{2n} tr(A_HA_\alpha)\xi_\alpha \\ &= \frac{a'}{ac}\left(trA_\zeta^2-n(a')^2\right)\xi_{m+2}+\sum_{t=m+3}^{2n} tr(A_HA_\alpha)\xi_\alpha \end{aligned}$$

dir. Burada $a'(H')=\sum\limits_{t=m+3}^{2n} tr(A_HA_\alpha)\xi_\alpha$ dersek

$$a(H)=\frac{a'}{ac}\left(trA_\zeta^2-n(a')^2\right)\xi_{m+2}+a'(H') \tag{4.2.11}$$

elde edilir. Burada $a'(H')$ vektör alanı $N^{2n}(c)$ de M nin uyumlu ortalama eğrilik vektör alanıdır. Üstelik $A_{m+1}=A_{\frac{1}{a}H}$ olduğundan

$$\begin{aligned} trA_{m+1}^2 &= \frac{1}{a}trA^2_{(a'\zeta-\frac{1}{c^2}\tau)} \\ &= \frac{1}{a}tr(a'A_\zeta+\frac{1}{c^2}I)^2 \\ &= \frac{1}{a}\left((a')^2trA_\zeta^2+\frac{2a'}{c^2}trA_\zeta+\frac{1}{c^2}trI\right) \end{aligned}$$

ve

$$trA_{m+1}^2=\frac{1}{a}\left((a')^2trA_\zeta^2+\frac{2n(a')^2}{c^2}+\frac{n}{c^2}\right) \tag{4.2.12}$$

elde edilir. $\Delta^D H$ için (4.2.1) den

$$\begin{aligned} \Delta^D H &= \Delta^{D'}H'-\frac{1}{c^2}\sum_{t=1}^{m}\left(D_{\nabla_{X_i}X_i}\tau-D_{X_i}D_{X_i}\tau\right) \\ &= \Delta^{D'}H'-\frac{1}{c^2}\sum_{t=1}^{m}\left(g(x-x_0,\xi_{n+i})\xi_{n+i}-g(x-x_0,n\phi H)\xi\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat $g(x-x_0,\xi_{n+i})\xi_{n+i}=g(\tau,\xi_{n+i})\xi_{n+i}=\tau$ ve $g(x-x_0,X_i)=0$ olduğundan

$$g(x-x_0,\phi H)=g(x-x_0,a\phi\xi_{n+1})=-ag(x-x_0,X_1)=0$$

elde edilir. Böylece

$$\Delta^D H = \Delta^{D'} H' - \frac{1}{c^2}\tau \tag{4.2.13}$$

olur. Üstelik

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{m} \eta(D_{X_i}H)\phi X_i &= \sum_{t=1}^{m} g(D_{X_i}H,\xi)\xi_{n+i} \\ &= \sum_{t=1}^{m} ag(\xi_{n+1},\phi X_i)\xi_{n+i} \\ &= a\xi_{n+1} \end{aligned}$$

veya

$$\sum_{t=1}^{m} \eta(D_{X_i}H)\phi X_i = H \tag{4.2.14}$$

elde edilir. (4.2.3), (4.2.8) ve (4.2.14) den

$$\Delta g(H,e_A) = g\left(\begin{array}{c} tr(\overline{\nabla} A_H) + \Delta^{D'}H' + a'(H') - \frac{n}{c^2}((a')^2 + \frac{1}{c^2})\tau \\ +(trA_\zeta^2 + \frac{n}{c^2} - 1)H', e_A \end{array}\right) \tag{4.2.15}$$

olur.

Teorem 4.2.2. M manifoldu $N^{2n}(c)$ de silindirinde yatan $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $n-$boyutlu kompak integral alt manifoldu olsun. M manifoldu $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayında 2-tipdendir ancak ve ancak

i) M manifoldunun $N^{2n}(c)$ de a' ortalama eğriliği sabit ve

$$(a')^2 = \left(\frac{c}{n}\right)^2 \left(\frac{n}{c^2} - \lambda_p\right)\left(\lambda_q - \frac{n}{c^2}\right)$$

olarak verilir.

ii) $tr(\overline{\nabla} A_H) = 0$

iii) $\phi^2(\Delta^{D'}H') + a'(H') + (trA_\zeta^2 + \frac{n}{c^2} - 1)H' = (\lambda_p + \lambda_q)H'$

dir (Baikousis 1991).

İspat. Şayet M manifoldu 2-tipden ise $R^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayında M nin x pozisyon vektörü için

$$\phi^2 x = \phi^2 x_0 + \phi^2 x_p + \phi^2 x_q$$

yazabiliriz. Burada $\phi^2 x_0$ sabit vektör ve $\Delta g(x_p, e_A) = \lambda_p g(x_p, e_A)$, $\Delta g(x_q, e_A) = \lambda_q g(x_q, e_A)$ $(A = 1, 2, ..., 2n)$ dir. Üstelik $\Delta g(x, e_A) = -ng(H, e_A)$ olduğundan $-ng(H, e_A) = g(\lambda_p x_p + \lambda_q x_q, e_A)$ ve

$$-n\Delta g(H, e_A) = g(\lambda_p^2 x_p + \lambda_q^2 x_q, e_A)$$

eşitliklerini elde ederiz. Çünkü

$$\begin{aligned}
\Delta g(x, e_A) &= \Delta g(x_0 + x_1 + x_2, e_A) \\
&= \Delta g(x_0, e_A) + \Delta g(x_p, e_A) + \Delta g(x_q, e_A) \\
&= \Delta g(x_p, e_A) + \Delta g(x_q, e_A) \\
&= \lambda_p g(x_p, e_A) + \lambda_q g(x_q, e_A) \\
&= g(\lambda_p x_p + \lambda_q x_q, e_A)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $-ng(H, e_A) = g(\lambda_p x_p + \lambda_q x_q, e_A)$

$$\begin{aligned}
-n\Delta g(H, e_A) &= \lambda_p \Delta g(x_p, e_A) + \lambda_q \Delta g(x_q, e_A) \\
&= \lambda_p \lambda_p g(x_p, e_A) + \lambda_q \lambda_q g(x_q, e_A) \\
&= g(\lambda_p^2 x_p + \lambda_q^2 x_q, e_A)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\Delta g(x_p, e_A) = \lambda_p g(x_p, e_A)$ ve $\Delta g(x_q, e_A) = \lambda_q g(x_q, e_A)$ eşitliklerini toplarsak

$$\Delta g(H, e_A) = g\left((\lambda_p + \lambda_q)H + \frac{1}{n}\lambda_p \lambda_q (x - x_0), e_A\right)$$

elde ederiz. Çünkü $-ng(\lambda_p H, e_A) = g(\lambda_p^2 x_p + \lambda_p \lambda_q x_q, e_A)$ ve $-ng(\lambda_q H, e_A) = g(\lambda_p \lambda_q x_p + \lambda_q^2 x_q, e_A)$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$-ng((\lambda_p + \lambda_q)H, e_A) = g\left((\lambda_p + \lambda_q)H + \frac{1}{n}\lambda_p \lambda_q (x - x_0), e_A\right)$$

sonucuna ulaşırız. Ayrıca $H = H' - \frac{1}{c^2}\tau$ olduğundan

$$-ng((\lambda_p + \lambda_q)H, e_A) = g\left((\lambda_p + \lambda_q)H' - (\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)\tau, e_A\right) \quad (4.2.16)$$

sonucuna ulaşırız. (4.2.15) ve (4.2.16) denklemlerinde metrik nondejenere olduğundan

$$\begin{gathered} tr(\overline{\nabla}A_H) + \Delta^{D'}H' + a'(H') - \frac{n}{c^2}((a')^2 + \frac{1}{c^2})\tau \\ +(trA_\zeta^2 + \frac{n}{c^2} - 1)H' = (\lambda_p + \lambda_q)H' - (\tfrac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \tfrac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)\tau \end{gathered}$$

dir. Burada $tr(\overline{\nabla}A_H)$ terimi M nin teğet uzayında ve diğer terimler M nin normal uzayında olduğundan dolayı $tr(\overline{\nabla}A_H) = 0$ olur. Böylece yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned} (\lambda_p + \lambda_q)H' - (\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)\tau &= \Delta^{D'}H' + a'(H') \\ &\quad -\frac{n}{c^2}((a')^2 + \frac{1}{c^2})\tau + (trA_\zeta^2 + \frac{n}{c^2} - 1)H' \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

dır. Burada τ vektör alanı $N^{2n}(c)$ nin normali, diğer terimler de teğetinde olduğundan

$$-\frac{n}{c^2}((a')^2 + \frac{1}{c^2}) = -(\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} (a')^2 &= \frac{c^2}{n}(\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q) - \frac{1}{c^2} \\ &= \frac{c^2}{n^2}\left(n(\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q) - \frac{n^2}{c^4}\right) \\ &= \frac{c^2}{n^2}\left(\frac{n}{c^2}\lambda_q - \frac{n^2}{c^4} - \lambda_p\lambda_q + \frac{n}{c^2}\lambda_p\right) \\ &= \frac{c^2}{n^2}\left(\frac{n}{c^2}(\lambda_q - \frac{n}{c^2}) - \lambda_p(\lambda_q - \frac{n}{c^2})\right) \\ &= \left(\frac{c}{n}\right)^2\left(\frac{n}{c^2} - \lambda_p\right)\left(\lambda_q - \frac{n}{c^2}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.2.17) denklemi düzenlersek

$$(\lambda_p + \lambda_q)H' = \Delta^{D'}H' + a'(H') + (trA_\zeta^2 + \frac{n}{c^2} - 1)H' \quad (4.2.18)$$

olur. $a'(H')$ ve H' vektör alanları ξ karakteristik vektör alanına dik olduklarından

$$g(a'(H'),\xi) = g(H',\xi) = 0$$

dır. Böylece

$$\eta\,(a'(H')) = \eta\,(H') = 0$$

olur. (4.2.18) denkleminin her iki tarafının ϕ^2 altında görüntüsünü alırsak

$$-\phi^2(\Delta^{D'}H') + a'(H') + (trA_\zeta^2 + \frac{n}{c^2} - 1)H' = (\lambda_p + \lambda_q)H' \qquad (4.2.19)$$

bulunur.

Tersine (i),(ii) ve (iii) özelikleri sağlansın. (ii) den $tr(\overline{\nabla}A_H) = 0$ dır. Bu eşitliği (4.2.15) de yazarsak

$$\Delta g(H,e_A) = g\left(\Delta^{D'}H' + a'(H') - \frac{n}{c^2}((a')^2 + \frac{1}{c^2})\tau + (trA_\zeta^2 + \frac{n}{c^2} - 1)H', e_A\right)$$

olur. Ayrıca (i) den

$$-\frac{n}{c^2}((a')^2 + \frac{1}{c^2}) = -(\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)$$

ve

$$g(\phi^2(\Delta^{D'}H'), e_A) = g(\Delta^{D'}H', e_A)$$

eşitliğini göz önüne alırsak (iii) den

$$\Delta g(H,e_A) = g\left((\lambda_p + \lambda_q)H' - (\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)\tau, e_A\right)$$

eşitliğine ulaşırız. Burada $H = H' - \frac{1}{c^2}\tau$ olduğundan

$$\Delta^2 g(H,e_A) = (\lambda_p + \lambda_q)\Delta g(H,e_A) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q g(\tau, e_A)$$

buluruz. Lemma 4.1.1 in (ii). şıkkından $\Delta g(x-x_0,e_A) = -ng(H,e_A)$ dır. Böylece

$$\Delta^2 g(x-x_0,e_A) = -n\Delta g(H,e_A)$$

ve $\tau = -\phi^2(x-x_0)$ olduğundan

$$-\frac{1}{n}\Delta^2 g(x-x_0,e_A) = -\frac{1}{n}(\lambda_p+\lambda_q)\Delta g(x-x_{0p},e_A) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q g(-\phi^2(x-x_0),e_A)$$

ve

$$\Delta^2 g(x-x_0,e_A) = (\lambda_p+\lambda_q)\Delta g(x-x_{0p},e_A) - \lambda_p\lambda_q g(x-x_0,e_A) \qquad (4.2.20)$$

eşitliklerini elde ederiz. Spektral ayrışımını düşünürsek

$$g(x,e_A) = g(x_0,e_A) + \sum_{t=1}^{\infty} g(x,e_A)_t, \quad A = 1,2,...,2n \qquad (4.2.21)$$

olur. Burada $g(x_0,e_A)$ sabit ve $\Delta g(x,e_A)_t = \lambda_t g(x,e_A)_t$ dir. Böylece (4.2.21) den

$$g(x-x_0,e_A) = \sum_{t=1}^{\infty} g(x,e_A)_t$$

bulunur. Her iki tarafa Laplas operatörünü uygularsak

$$\begin{aligned} \Delta g(x-x_0,e_A) &= \sum_{t=1}^{\infty} \Delta g(x,e_A)_t \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t g(x,e_A)_t \end{aligned}$$

ve

$$\Delta^2 g(x-x_0,e_A) = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t^2 g(x,e_A)_t$$

elde edilir. (4.2.20) den

$$(\lambda_p+\lambda_q)\Delta g(x-x_{0p},e_A) - \lambda_p\lambda_q g(x-x_0,e_A) = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t^2 g(x,e_A)_t$$

ve

$$(\lambda_p+\lambda_q)\sum_{t=1}^{\infty}\lambda_t g(x,e_A)_t-\lambda_p\lambda_q\sum_{t=1}^{\infty}g(x,e_A)_t=\sum_{t=1}^{\infty}\lambda_t^2 g(x,e_A)_t$$

olur. Böylece

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\lambda_t^2-(\lambda_p+\lambda_q)\lambda_t+\lambda_p\lambda_q\right)g(x,e_A)_t=0 \tag{4.2.22}$$

elde edilir. Farzedelim ki bazı $s\in A$ lar için $g(x,e_A)_s\neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\lambda_t^2-(\lambda_p+\lambda_q)\lambda_t+\lambda_p\lambda_q\right)(g(x,e_A)_t,g(x,e_A)_s)=0$$

olur. Dolayısıyla

$$\lambda_t^2-(\lambda_p+\lambda_q)\lambda_t+\lambda_p\lambda_q=0\,,\quad (g(x,e_A)_t\neq 0$$

eşitliği elde edilir. (4.2.21) den bu denklemin sıfırdan farklı iki tane reel çözümü olduğu görülmektedir. Böylece M manifoldu 2-tipdendir.

4.3 $\mathbf{R}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki Uzayında Silindirde Yatan İntegral Alt Manifoldlar

Tanım 4.3.1. γ bir N Riemann manifoldu üzerinde yay parametresi ile verilmiş, r yinci mertebeden ve γ boyunca ortonormal vektör alanları $E_1,E_2,...,E_r$ olan Frenet eğrisi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\gamma^{\cdot} &= E_1,\nabla_{\gamma^{\cdot}}E_1=k_1E_2,\nabla_{\gamma^{\cdot}}E_2=-k_1E_1+k_2E_3,...\\ ,\nabla_{\gamma^{\cdot}}E_{r-1} &= -k_{r-2}E_{r-2}+k_{r-1}E_r,\nabla_{\gamma^{\cdot}}E_r=-k_{r-1}E_{r-1}\end{aligned}$$

dir. Burada $k_1,k_2,...,k_r$ ler s nin C^{∞} fonksiyonlarıdır ve k_j ye j inci eğrilik fonksiyonu denir. Şayet $k_1,k_2,...,k_{r-1}$ eğrilik fonksiyonları sabit ise (osculating) mertebesi r olan Frenet helis eğrisi denir. Örneğin geodezikler (osculating) mertebesi 1 olan Frenet helis eğrisidir. Çemberler (osculating) mertebesi 2 olan Frenet helis eğrisidir(Baikousis 1991).

Teorem 4.2.1. M manifoldu $N^4(c)$ silindirinde yatan ve $R^5(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının

2-tipli integral yüzeyi olsun. Böylece M yüzeyi

i) Mertebesi 3 olan iki helis,

ii) Mertebesi 3 olan ve mertebesi 4 olan iki helis,

iii) $R^5(-3\varepsilon)$ de bir geodezik ve Mertebesi 3 olan bir helis,

iv) Bir çember ve mertebesi 3 olan bir helis,

eğrilerinin lokal olarak Riemann çarpımıdır (Baikousis 1991).

İspat. X_1 ve X_2, M manifoldunun lokal ortonormal vektör alanları olsun. Böylece

$$\xi_1 = \phi X_1, \xi_2 = \phi X_2, \xi$$

de ortonormal vektör alanlarının bir lokal alanlarının formudur. ξ_i ye bağlı Weingarten dönüşümünü A_i olarak tanımlayalım $(i = 1, 2)$. X_1 ve X_2 taban vektörlerini öyle seçeriz ki A_1 şekil operatörüne (Weingarten dönüşümünü) karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ şeklinde olur. Bu şekilde seçersek genellikten bir şey kaybetmeyiz. Böylece

$$\begin{aligned} A_1X_1 &= \lambda_{11}X_1 + \lambda_{21}X_2 \\ A_1X_2 &= \lambda_{12}X_1 + \lambda_{22}X_2 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= g(A_1X_1, X_1) = a \\ \lambda_{21} &= \lambda_{12} = g(A_1X_1, X_2) = g(A_1X_2, X_1) = 0 \\ \lambda_{22} &= g(A_1X_2, X_2) = d \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} A_2X_1 &= \mu_{11}X_1 + \mu_{21}X_2 \\ A_2X_2 &= \mu_{12}X_1 + \mu_{22}X_2 \end{aligned}$$

dersek $A_2X_1 = A_1X_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= g(A_2X_1, X_1) \\ &= g(A_1X_2, X_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\mu_{12} &= \mu_{21} = g(A_2X_1, X_2) \\ &= g(A_1X_2, X_2) \\ &= d\end{aligned}$$

ve

$$\mu_{21} = g(A_2X_2, X_2) = b$$

dersek A_2 ye kaşılık gelen matris $\begin{bmatrix} 0 & d \\ d & b \end{bmatrix}$ olur. Ayrıca biliyoruz ki $A_\xi = 0$ dır. Böylece M yüzeyinin ortalama eğrilik vektör alanı

$$\begin{aligned}H &= \sum_{t=1}^{3} tr(A_i)\xi_i \\ &= \frac{1}{2}(a+d)\xi_1 + \frac{1}{2}b\xi_2\end{aligned}$$

dir. Burada $a.b.d$ ler M manifoldu üzerinde tanımlanan reel değerli fonksiyonlardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}K(X_1, X_2) &= \sum_{i=1}^{2} \left(g(A_iX_1, X_1)g(A_iX_2, X_2) - g(A_iX_1, X_2)^2\right) \\ &= \left(g(A_1X_1, X_1)g(A_1X_2, X_2) - g(A_1X_1, X_2)^2\right) \\ &\quad + \left(g(A_2X_1, X_1)g(A_2X_2, X_2) - g(A_2X_1, X_2)^2\right) \\ &= ad - d^2\end{aligned}$$

olur. Burada M manifoldu düz (flat) olduğundan $K(X_1, X_2) = 0$ dır. Böylece

$$d(a-d) = 0 \tag{4.3.1}$$

elde edilir. Ayrıca $w^k(\nabla_X X_i) = w_i^k(X)$ olarak tanımlarsak $w^k(\nabla_{X_j} X_i) = w_i^k(X_j)$ olur. Böylece $\nabla_{X_j} X_i = \lambda_{ij}^p X_p$ dersek

$$\begin{aligned} w^k(\nabla_{X_j} X_i) &= \lambda_{ij}^p w^k(X_p) \\ &= \lambda_{ij}^p \delta_p^k \\ &= \lambda_{ij}^k \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\lambda_{ij}^k = w^k(\nabla_{X_j} X_i) = w_i^k(X_j)$ olur ve

$$\nabla_{X_j} X_i = w_i^k(X_j) X_k (i, j, k, = 1, 2)$$

eşitliğini elde ederiz. (1.1.19) ve (2.2.18) den

$$\overline{\nabla}_X \phi Y = \varepsilon g(X, Y) + \phi(\overline{\nabla}_X Y) - \eta(Y) X$$

dir. Bu eşitlikde $X = X_j, Y = X_i$ yazarsak

$$\overline{\nabla}_{X_j} \phi X_i = \varepsilon g(X_j, X_i) + \phi(\overline{\nabla}_{X_j} X_i) - \eta(X_i) X_j$$

elde ederiz. M manifoldu integral alt manifold olduğundan $\eta(X_i) = 0$ dır. Ayrıca $\overline{\nabla}_{X_j} X_i = \nabla_{X_j} X_i + B(X_j, X_i)$ ve $\xi_i = \phi X_i$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_j} \xi_i &= \varepsilon \delta_{ij} \xi + \phi(\nabla_{X_j} X_i + B(X_j, X_i)) \\ &= \varepsilon \delta_{ij} \xi + \phi(\nabla_{X_j} X_i) + \phi B(X_j, X_i) \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\phi B(X_j, X_i) = \sum_{k=1}^{2} \phi\left(g(A_k X_i, X_j) \xi_k\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{2} g(A_k X_i, X_j)\phi\xi_k \\
&= \sum_{k=1}^{2} g(A_i X_k, X_j)\phi^2 X_k \\
&= -\sum_{k=1}^{2} g(A_i X_j, X_k) X_k \\
&= -A_i X_j
\end{aligned}$$

ve $\nabla_{X_j} X_i = w_i^k(X_j)X_k$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_j}\xi_i &= \varepsilon\delta_{ij}\xi + \phi(w_i^k(X_j)X_k) - A_i X_j \\
&= -A_i X_j + \varepsilon\delta_{ij}\xi + w_i^k(X_j)\phi(X_k) \\
&= -A_i X_j + \varepsilon\delta_{ij}\xi + w_i^k(X_j)\xi_k
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan biliyoruz ki Weingarten formülünden $\overline{\nabla}_{X_j}\xi_i = -A_i X_j + D_{X_j}\xi_i$ dir. Böylece

$$D_{X_j}\xi_i = \varepsilon\delta_{ij}\xi + w_i^k(X_j)\xi_k \tag{4.3.2}$$

elde edilir. Ayrıca $\nabla_{X_j} X_1 = w_1^1(X_j)X_1 + w_1^2(X_j)X_2$ ve $\nabla_{X_j} X_2 = w_2^1(X_j)X_1 + w_2^2(X_j)X_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
w_1^1(X_j) &= g(\nabla_{X_j} X_1, X_1) \\
w_1^2(X_j) &= g(\nabla_{X_j} X_1, X_2) \\
w_2^1(X_j) &= g(\nabla_{X_j} X_2, X_1) \\
w_2^2(X_j) &= g(\nabla_{X_j} X_2, X_2)
\end{aligned}$$

olur. $g(X_1, X_1) = 1$ ve $g(X_2, X_2) = 1$ olduğundan

$$w_1^1(X_j) = g(\nabla_{X_j} X_1, X_1) = g(\nabla_{X_j} X_2, X_2) = w_2^2(X_j) = 0$$

dır. $g(X_1, X_1) = 0$ ise $g(\nabla_{X_j} X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_{X_j} X_2) = 0$ olduğundan $w_1^2(X_j) +$

$w_2^1(X_j) = 0$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} D_{X_j}\xi_1 &= \varepsilon\delta_{1j}\xi + w_1^1(X_j)\xi_1 + w_1^2(X_j)\xi_2 \\ &= w_1^2(X_j)\xi_2 + \varepsilon\delta_{1j}\xi \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

ve

$$\begin{aligned} D_{X_j}\xi_2 &= \varepsilon\delta_{2j}\xi + w_2^1(X_j)\xi_1 + w_2^2(X_j)\xi_2 \\ &= w_2^1(X_j)\xi_1 + \varepsilon\delta_{2j}\xi \\ &= -w_1^2(X_j)\xi_1 + \varepsilon\delta_{2j}\xi \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

eşitliklerini elde ederiz. (4.3.1) eşitliğini irdelersek

1.Durum: $d = 0$ ise bu durumda $A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ elde ederiz. (2.3.14) den

$$\begin{aligned} R_{XY}Z &= \frac{c+3\varepsilon}{4}\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right) \\ &\quad + \frac{c-\varepsilon}{4}\left(\begin{array}{c} \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi \\ +\Phi(Z,Y)\phi X - \Phi(Z,X)\phi Y + 2\Phi(X,Y)\phi Z \end{array}\right) \end{aligned}$$

dir. Burada $c = -3\varepsilon$ olduğundan bu denklem

$$R_{XY}Z = -\varepsilon\left(\begin{array}{c} \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi \\ +\Phi(Z,Y)\phi X - \Phi(Z,X)\phi Y + 2\Phi(X,Y)\phi Z \end{array}\right)$$

olarak yazabiliriz. Eğer $X = X_1, Y = X_2, Z = \xi_i$ alırsak

$$R_{X_1X_2}\xi_i = -\varepsilon\left(\begin{array}{c} \eta(X_1)\eta(\xi_i)X_2 - \eta(X_2)\eta(\xi_i)X_1 + g(X_1,\xi_i)\eta(X_2)\xi - g(X_2,\xi_i)\eta(X_1)\xi \\ +\Phi(\xi_i,X_2)\phi X_1 - \Phi(\xi_i,X_1)\phi X_2 + 2\Phi(X_1,X_2)\phi\xi_i \end{array}\right)$$

ve

$$R_{X_1X_2}\xi_i = -\varepsilon\left(\Phi(\xi_i,X_2)\phi X_1 - \Phi(\xi_i,X_1)\phi X_2 + 2\Phi(X_1,X_2)\phi\xi_i\right)$$

elde edilir. Ayrıca biliyoruz ki $\Phi(X,Y)=\varepsilon g(X,\phi Y)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}\Phi(X_1,X_2) &= \varepsilon g(X_1,\phi X_2)\\ &= \varepsilon g(X_1,\xi_i)\\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan

$$R_{X_1X_2}\xi_i=-\varepsilon\left(\Phi(\xi_i,X_2)\phi X_1-\Phi(\xi_i,X_1)\phi X_2\right) \tag{4.3.5}$$

eşitliğine ulaşırız. Diğer taraftan ,

$$R_{X_1X_2}\xi_i=\overline{\nabla}_{X_1}\overline{\nabla}_{X_2}\xi_i-\overline{\nabla}_{X_2}\overline{\nabla}_{X_1}\xi_i-\overline{\nabla}_{[X_1,X_2]}\xi_i \tag{4.3.6}$$

dir. Burada Weingarten formülünden $\overline{\nabla}_{X_2}\xi_i=-A_iX_2+D_{X_2}\xi_i$ ve

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{X_1}\overline{\nabla}_{X_2}\xi_i &= -\overline{\nabla}_{X_1}A_iX_2+\overline{\nabla}_{X_1}D_{X_2}\xi_i) \qquad (4.3.7)\\ &= -\left(\nabla_{X_1}A_iX_2+B(X_1,A_iX_2)\right)-A_{D_{X_2}\xi_i}X_1+D_{X_1}\overline{D}_{X_2}\xi_i\end{aligned}$$

ve

$$\overline{\nabla}_{X_2}\overline{\nabla}_{X_1}\xi_i=-\left(\nabla_{X_2}A_iX_1+B(X_2,A_iX_1)\right)-A_{D_{X_1}\xi_i}X_2+D_{X_2}D_{X_1}\xi_i \tag{4.3.8}$$

dir. Ayrıca

$$[X_1,X_2]=\nabla_{X_1}X_2-\nabla_{X_2}X_1$$

olduğundan Weingarten formülünden

$$\overline{\nabla}_{[X_1,X_2]}\xi_i=A_i(\nabla_{X_1}X_2)-A_i(\nabla_{X_2}X_1)+D_{[X_1,X_2]}\xi_i \tag{4.3.9}$$

elde edilir. (4.3.7),(4.3.8) ve (4.3.9) yi (4.3.6) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned}R_{X_1X_2}\xi_i &= -(\nabla_{X_1}A_i)X_2+(\nabla_{X_2}A_i)X_1-A_{D_{X_2}\xi_i}X_1+A_{D_{X_1}\xi_i}X_2 \qquad (4.3.10)\\ &\quad +B(X_2,A_iX_1)-B(X_1,A_iX_2)+R^D_{X_1X_2}\xi_i\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Burada

$$
\begin{aligned}
I &: = -(\nabla_{X_1}A_i)X_2 + (\nabla_{X_2}A_i)X_1 - A_{D_{X_2}\xi_i}X_1 + A_{D_{X_1}\xi_i}X_2 \\
II &: = +B(X_2, A_iX_1) - B(X_1, A_iX_2) + R^D_{X_1X_2}\xi_i \\
III &: = -\varepsilon\Phi(\xi_i, X_2)\phi X_1 + \varepsilon\Phi(\xi_i, X_1)\phi X_2
\end{aligned}
$$

dersek (4.3.5) ve (4.3.10) dan

$$I + II = III$$

olur. Burada I eşitliği M manifoldunun teğet uzayında ve II ve III eşitlikleri de M manifoldunun normal uzayında olduğundan; $II = III$ ve

$$-(\nabla_{X_1}A_i)X_2 + (\nabla_{X_2}A_i)X_1 - A_{D_{X_2}\xi_i}X_1 + A_{D_{X_1}\xi_i}X_2 = 0 \tag{4.3.11}$$

dır. (4.3.11) da $i = 1$ için

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla_{X_1}A_1(X_2) - A_1(\nabla_{X_1}X_2) - \nabla_{X_2}A_1(X_1) + A_1(\nabla_{X_2}X_1) \\
&\quad + A_{D_{X_2}\xi_1}X_1 - A_{D_{X_1}\xi_1}X_2
\end{aligned} \tag{4.3.12}
$$

dir. Burada $A_1(X_1) = aX_1$, $A_1(X_2) = 0 = A_2(X_1)$ ve $A_2(X_2) = bX_2$ dır. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\nabla_{X_1}X_2 &= w_2^1(X_1)X_1 + w_2^2(X_1)X_2 = w_2^1(X_1)X_1 \\
\nabla_{X_2}X_1 &= w_1^1(X_2)X_1 + w_1^2(X_2)X_2 = w_1^2(X_2)X_2
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
A_1(\nabla_{X_1}X_2) &= A_1(w_2^1(X_2)X_1) = aw_2^1(X_1)X_1 \\
A_1(\nabla_{X_2}X_1) &= A_1(w_1^2(X_2)X_2) = 0 \\
\nabla_{X_1}A_1(X_2) &= 0 \\
\nabla_{X_2}A_1(X_1) &= \nabla_{X_2}aX_1 = a\nabla_{X_2}X_1 + X_2(a)X_1 \\
&= aw_1^2(X_2)X_2 + X_2(a)X_1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu işlemleri devam ettirirsek

$$\begin{aligned} A_{D_{X_2}\xi_1}X_1 &= A_{w_1^2(X_2)\xi_2+\varepsilon\delta_{12}\xi}X_1 \\ &= w_1^2(X_2)A_2(X_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A_{D_{X_1}\xi_1}X_2 &= A_{w_1^2(X_1)\xi_2+\varepsilon\delta_{11}\xi}X_2 \\ &= w_1^2(X_1)A_2X_2+\varepsilon A_\xi X_2 \\ &= bw_1^2(X_1)X_2 \end{aligned}$$

böylece (4.3.12) den

$$\big(aw_2^1(X_1)+X_2(a)\big)\,X_1+\big(aw_1^2(X_2)+bw_1^2(X_1)\big)\,X_2=0$$

elde edilir $\{X_1,X_2\}$ lineer bağımsız ve $w_2^1(X_1)=-w_1^2(X_1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} -aw_1^2(X_1)+X_2(a) &= 0 \\ aw_1^2(X_2)+bw_1^2(X_1) &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

sonucuna ulaşırız. $i=2$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{X_1}A_2(X_2)-A_2(\nabla_{X_1}X_2)-\nabla_{X_2}A_2(X_1)+A_2(\nabla_{X_2}X_1) \\ &\quad +A_{D_{X_2}\xi_2}X_1-A_{D_{X_1}\xi_2}X_2 \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} A_2(\nabla_{X_1}X_2) &= 0 \\ A_1(\nabla_{X_2}X_1) &= bw_1^2(X_2)X_2 \\ \nabla_{X_1}A_2(X_2) &= bw_2^1(X_1)X_1+X_1(b)X_2 \\ \nabla_{X_2}A_2(X_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{D_{X_2}\xi_2}X_1 &= -aw_1^2(X_2)X_1 \\ A_{D_{X_1}\xi_2}X_2 &= 0 \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikleri (4.3.14) de yerine yazarsak

$$\left(-aw_1^2(X_2) + bw_2^1(X_1)\right) X_1 + \left(bw_1^2(X_2) + X_1(b)\right) X_2 = 0$$

ve $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned} -aw_1^2(X_2) + bw_2^1(X_1) &= 0 \\ bw_1^2(X_2) + X_1(b) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $w_1^2(X_2) = -w_2^1(X_2)$ ve $w_1^2(X_1) = -w_2^1(X_1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} -aw_1^2(X_2) + bw_2^1(X_1) &= aw_2^1(X_2) + bw_2^1(X_1) \\ &= -aw_1^2(X_2) - bw_1^2(X_1) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} aw_1^2(X_2) + bw_1^2(X_1) &= 0 \\ bw_1^2(X_2) + X_1(b) &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

elde edilir (4.3.13) ve (4.3.15) den

$$\begin{aligned} i) \quad -aw_1^2(X_1) + X_2(a) &= 0 \\ ii) \quad bw_1^2(X_2) + X_1(b) &= 0 \\ iii) \quad bw_1^2(X_1) + aw_1^2(X_2) &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

bağıntılarını elde ederiz. M manifoldu $N^4(c)$ silindirinde yatan ve $R^5(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının 2-tipden integral yüzeyi olduğundan Teorem 4.1.4 den $tr\overline{\nabla}A_H = 0$ dır.

(4.2.2) da $m = 2$ alıp açarsak

$$\begin{aligned} tr(\overline{\nabla} A_H) &= A_{D_{X_1}H}X_1 + A_{D_{X_2}H}X_2 + \nabla_{X_1}A_H(X_1) + \nabla_{X_2}A_H(X_2) \\ &\quad -A_H(\nabla_{X_1}X_1) - A_H(\nabla_{X_2}X_2) \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $H = \frac{1}{2}a\xi_1 + \frac{1}{2}b\xi_2$ ve $\nabla_{X_1}X_1 = w_1^2(X_1)X_2, \nabla_{X_2}X_2 = w_2^1(X_2)X_1$ olduğundan

$$\begin{aligned} A_{D_{X_1}H}X_1 &= \frac{1}{2}a\left[X_1(a) - bw_1^2(X_1)\right]X_1 \\ A_{D_{X_2}H}X_2 &= \frac{1}{2}b\left[X_2(b) + aw_1^2(X_2)\right]X_2 \\ \nabla_{X_1}A_H(X_1) &= \frac{1}{2}2aX_1(a)X_1 + \frac{1}{2}a^2w_1^2(X_1)X_2 \\ \nabla_{X_2}A_H(X_2) &= \frac{1}{2}2bX_2(b)X_2 - \frac{1}{2}b^2w_1^2(X_2)X_1 \\ A_H(\nabla_{X_1}X_1) &= \frac{1}{2}b^2w_1^2(X_1)X_2 \\ A_H(\nabla_{X_2}X_2) &= -\frac{1}{2}a^2w_1^2(X_2)X_1 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} tr(\overline{\nabla} A_H) &= \frac{1}{2}\left[aX_1(a) - abw_1^2(X_1) + 2aX_1(a) - b^2w_1^2(X_2) + a^2w_1^2(X_2)\right]X_1 \\ &\quad +\frac{1}{2}\left[abw_1^2(X_2) + bX_2(b) + 2bX_2(b) - b^2w_1^2(X_1) + a^2w_1^2(X_1)\right]X_2 \end{aligned}$$

olur. Burada $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız ve $tr(\overline{\nabla} A_H) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} i)\ \ abw_1^2(X_1) - (a^2 - b^2)w_1^2(X_2) - 3aX_1(a) &= 0 \qquad (4.3.17) \\ ii)\ \ (a^2 - b^2)w_1^2(X_1) + abw_1^2(X_2) + 3bX_2(b) &= 0 \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Teorem 4.1.4 den ortalama eğrilik vektör alanı sabit olduğundan

$$a^2 + b^2 = \lambda_0^2 \ \ (sb) \qquad (4.3.18)$$

dir. Kabul edelim ki $\{X_1, X_2\}$ bazının belirttiği koordinat komşuluğu $\{x, y\}$ olsun.

Böylece

$$\begin{aligned} a, b : M &\longmapsto \Re \\ (x, y) &\longmapsto a(x, y), b(x, y) \end{aligned}$$

şeklinde fonksiyonlardır. (4.3.18) den

$$a(x,y) = \lambda_0 \cos f(x,y),\ a(x,y) = \lambda_0 \sin f(x,y) \tag{4.3.19}$$

olarak düşünebiliriz. (4.3.16) den $bw_1^2(X_1) = -aw_1^2(X_2)$ ve $w_1^2(X_2) = -\dfrac{1}{b}X_1(b)$ eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri (4.2.17) (i) de yerlerine yazarsak

$$(b^2 - 2a^2)X_1(b) + 3abX_1(a) = 0 \tag{4.3.20}$$

elde ederiz. Benzer şekilde (4.3.17) nın (ii). şıkkından,

$$(a^2 - 2b^2)X_2(b) + 3abX_2(b) = 0 \tag{4.3.21}$$

sonucuna ulaşırız. (4.3.19) ve (4.3.20) den

$$-2\lambda_0^3 f_x \cos f = 0$$

ve böylece $f_x = 0$ çıkar. (4.3.20) ve (4.3.21) den

$$2\lambda_0^3 f_y \cos f = 0$$

ve $f_y = 0$ olur. $f_x = f_y = 0$ ise f sabit dolayısıyla a ve b de sabittir. Ayrıca a ve b sabit ise

$$\begin{aligned} w_1^2(X_1) &= \frac{1}{a}X_2(a) = 0 \\ w_1^2(X_2) &= -\frac{1}{b}X_1(b) = 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\overline{\nabla}_{X_1} X_1 = a\xi_1,\ \overline{\nabla}_{X_1}\xi_1 = -aX_1 + \varepsilon\xi,\ \overline{\nabla}_{X_i}\xi = -\xi_i, \tag{4.3.22}$$

$$\overline{\nabla}_{X_2}X_2 = b\xi_2,\ \overline{\nabla}_{X_2}\xi_2 = -bX_2 + \varepsilon\xi$$

eşitliklerini elde ederiz. Çünkü,

$$\overline{\nabla}_{X_1}X_1 = \nabla_{X_1}X_1 + B(X_1, X_1)$$

dir. Burada

$$\nabla_{X_1}X_1 = \nabla_{X_1}X_2 = w_1^1(X_1)X_1 + w_1^2(X_1)X_2 = 0$$

ve

$$B(X_1, X_1) = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi$$

dersek $\lambda_1 = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_1)$, $\lambda_2 = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_2)$ ve $\lambda_3 = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi)$ olur. Ayrıca $g(X_1, \xi_1) = 0$ ise $g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_1) + g(X_1, \overline{\nabla}_{X_1}\xi_1) = 0$ ve böylece $A_1X_1 = -\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1$ olduğundan

$$\lambda_1 = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_1) = g(A_1X_1, X_1) = a$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_2) = g(A_2X_1, X_1) = 0 \\
\lambda_3 &= g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi) = g(A_\xi X_1, X_1) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu bulduklarımızı yerlerine yazarsak $\overline{\nabla}_{X_1}X_1 = a\xi_1$ sonucuna ulaşırız. Diğer taraftan Weingarten formülünden

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1 &= -A_1X_1 + D_{X_1}\xi_1 \\
&= -aX_1 + w_1^2(X_1)\xi_2 + \varepsilon\delta_{11}\xi \\
&= -aX_1 + \varepsilon\xi
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde diğerlerinin de ispatları yapılabilir. Şimdi eğrimizin teğet vektör alanı $X_1 = E_1$ olsun. Böylece

$$\overline{\nabla}_{E_1}E_1 = a\xi_1 = k_1E_2$$

olur. Burada şayet $a\rangle 0$ ise $k_1 = a$ ve $E_2 = \xi_1$ dir. Eğer $a\langle 0$ ise $k_1 = -a$ ve $E_2 = -\xi_1$ dir. Ayrıca biliyoruz ki $a = 0$ ise X_1-eğrisi $R^5(-3\varepsilon)$ nun bir geodezik eğrisidir. Farzedelim ki $a\rangle 0$ olsun. Böylece

$$\overline{\nabla}_{E_1}E_1 = aE_2,\ \overline{\nabla}_{E_1}E_2 = -aE_1 + \varepsilon\xi = -k_1E_1 + k_2E_3$$

olur. Bu eşitlikten $k_2 = \varepsilon$ ve $E_3 = \xi$ dır. Dolayısıyla $k_3 = 0$ elde edilir. Tanım 4.1.1 den X_1-eğrisinin $R^5(-3\varepsilon)$ uzayında 3-mertebeden helis olduğu görülür. Benzer işlemleri yaparsak $a < 0$ durumu için de aynı sonucu elde ederiz. $X_2 = E_1$ seçersek benzer işlemler sonucunda X_2-eğrisinin $R^5(-3\varepsilon)$ uzayında 3-mertebeden helis olduğu görülür. Aynı şekilde $b = 0$ durumunda X_2-eğrisi $R^5(-3\varepsilon)$ uzayında bir geodeziktir. Böylece (i) ve (iii) şıklarını elde etmiş oluruz.

2.Durum: Çarpımın sıfır olabilmesi için $a = d$ olabilir. Bu durumda şekil operatörleri

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & b \end{bmatrix}$$

dir.Böylece

$$A_1X_1 = aX_1,\ A_1X_2 = aX_2,\ A_2X_1 = aX_2$$

ve $A_2X_2 = aX_1 + b\,X_2$ olur. Ayrıca

$$\nabla_{X_j}X_i = w_i^k(X_j)X_k \text{ ve } w_2^2(X_1) = w_1^1(X_2) = 0$$

olduğundan

$$\nabla_{X_1}X_2 = w_2^1(X_1)X_1,\ \nabla_{X_2}X_1 = w_1^2(X_2)X_2$$

dir. İşlemleri devam ettirirsek

$$\begin{aligned} A_1(\nabla_{X_1}X_2) &= w_2^1(X_1)A_1X_1 = aw_2^1(X_1)X_1 \\ A_1(\nabla_{X_2}X_1) &= w_1^2(X_2)A_1X_2 = aw_1^2(X_2)X_2 \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\nabla_{X_1} A_1(X_2) &= X_1(a)X_2 + a\nabla_{X_1}X_2 \\
&= X_1(a)X_2 + aw_2^1(X_1)X_1 \\
\nabla_{X_2} A_1(X_1) &= X_2(a)X_1 + a\nabla_{X_2}X_1 \\
&= X_2(a)X_1 + aw_1^2(X_2)X_2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.3.3) de $j = 2$ için $D_{X_2}\xi_1 = w_1^2(X_2)\xi_2$ olur. Böylece

$$
A_{D_{X_2}\xi_1} X_1 = w_1^2(X_2)A_2X_1 = aw_1^2(X_2)X_2
$$

benzer şekilde

$$
D_{X_1}\xi_1 = w_1^2(X_1)\xi_2 + \varepsilon\xi
$$

ve

$$
A_{D_{X_1}\xi_1} X_2 = w_1^2(X_1)A_2X_2 = w_1^2(X_1)\,(aX_1 + b\,X_2)
$$

olur. Bulduğumuz değerleri (4.3.12) yerlerine yazıp düzenlersek

$$
\left(-X_2(a) - aw_1^2(X_1)\right) X_1 + \left(X_1(a) + aw_1^2(X_2) - bw_1^2(X_1)\right) X_2 = 0
$$

elde edilir. $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$
\begin{aligned}
aw_1^2(X_1) + X_2(a) &= 0 \\
bw_1^2(X_1) - aw_1^2(X_2) - X_1(a) &= 0
\end{aligned}
\tag{4.3.23}
$$

eşitlikleri bulunur. Benzer şekilde $i = 2$ için

$$
\begin{aligned}
A_2(\nabla_{X_1}X_2) &= aw_2^1(X_1)X_2 \\
A_1(\nabla_{X_2}X_1) &= w_1^2(X_2)\,(aX_1 + b\,X_2) \\
\nabla_{X_1} A_2(X_2) &= X_1(a)X_1 + X_1(b)X_2 + aw_1^2(X_1)X_2 + bw_2^1(X_1)X_1 \\
\nabla_{X_2} A_2(X_1) &= X_2(a)X_2 + aw_2^1(X_2)X_1 \\
A_{D_{X_2}\xi_2} X_1 &= -aw_1^2(X_2)X_1
\end{aligned}
$$

$$A_{D_{X_1}\xi_2}X_2 = -aw_1^2(X_1)X_2$$

elde ederiz. Böylece (4.3.14) den

$$\big(bw_2^1(X_1) + aw_1^2(X_2) + X_1(a)\big)\, X_1 + \big(3aw_1^2(X_1) + bw_1^2(X_2) + X_1(b) - X_2(a)\big)\, X_2 = 0$$

benzer şekilde $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız ve $w_2^1(X_1) = -w_1^2(X_1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} i) &: \ aw_1^2(X_1) + X_2(a) = 0 \\ ii) &: \ bw_1^2(X_1) - aw_1^2(X_2) - X_1(a) = 0 \\ iii) &: \ 3aw_1^2(X_1) + bw_1^2(X_2) + X_1(b) - X_2(a) = 0 \end{aligned} \qquad (4.3.24)$$

eşitliklerini elde ederiz. Diğer taraftan $H = a\xi_1 + \frac{1}{2}b\xi_2$ olduğundan

$$\begin{aligned} D_{X_1}H &= D_{X_1}(a\xi_1 + \frac{1}{2}b\xi_2) \\ &= X_1(a)\xi_1 + aD_{X_1}\xi_1 + \frac{1}{2}X_1(b)\xi_2 + \frac{1}{2}bD_{X_1}\xi_2 \\ &= X_1(a)\xi_1 + a\left(w_1^2(X_1)\xi_2 + \varepsilon\xi\right) + \frac{1}{2}X_1(b)\xi_2 - \frac{1}{2}bw_1^2(X_1)\xi_1 \\ &= \left(X_1(a) - \frac{1}{2}bw_1^2(X_1)\right)\xi_1 + \left(aw_1^2(X_1) + \frac{1}{2}X_1(b)\right)\xi_2 + \varepsilon a\xi \end{aligned}$$

benzer şekilde

$$D_{X_2}H = \left(X_2(a) - \frac{1}{2}bw_1^2(X_2)\right)\xi_1 + \left(\frac{1}{2}X_2(b) + aw_1^2(X_2)\right)\xi_2 + \frac{1}{2}\varepsilon b\xi$$

olur. İşlemleri 1.Durum daki gibi yaparsak

$$\begin{aligned} A_{D_{X_1}H}X_1 &= \left(aX_1(a) - \frac{1}{2}abw_1^2(X_1)\right)X_1 + \left(a^2w_1^2(X_1) + \frac{1}{2}aX_1(b)\right)X_2 \\ A_{D_{X_2}H}X_2 &= \left(\frac{1}{2}aX_2(b) + a^2w_1^2(X_2)\right)X_1 \\ &\quad + \left(aX_2(a) + \frac{1}{2}bX_2(b) + \frac{1}{2}abw_1^2(X_2)\right)X_2 \\ \nabla_{X_1}A_H(X_1) &= \left(2aX_1(a) + \frac{1}{2}abw_2^1(X_1)\right)X_1 + \left(a^2w_1^2(X_1) + \frac{1}{2}X_1(ab)\right)X_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{X_2} A_H(X_2) &= \left((a^2+\frac{1}{2}b^2)w_2^1(X_2)+\frac{1}{2}X_2(ab)\right)X_1 \\
&\quad \left(2aX_1(a)+bX_1(b)+\frac{1}{2}abw_1^2(X_2)\right)X_1 \\
A_H(\nabla_{X_1}X_1) &= \frac{1}{2}abw_1^2(X_1)X_1+\left(a^2+\frac{1}{2}b^2\right)w_1^2(X_1)X_2 \\
A_H(\nabla_{X_2}X_2) &= a^2w_2^1(X_2)X_1+\frac{1}{2}abw_2^1(X_2)X_2
\end{aligned}
$$

olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
tr(\overline{\nabla}A_H) &= \left[\begin{array}{c} -\frac{3}{2}abw_1^2(X_1)+\left(a^2-\frac{1}{2}b^2\right)w_1^2(X_2)+3aX_2(a) \\ +aX_2(b)+\frac{1}{2}bX_2(a) \end{array}\right]X_1 \\
&+\left[\begin{array}{c} \left(a^2-\frac{1}{2}b^2\right)w_1^2(X_1)+\frac{3}{2}abw_1^2(X_2)+3aX_2(a)+\frac{3}{2}bX_2(b) \\ +aX_1(b)+\frac{1}{2}bX_1(a) \end{array}\right]X_2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $tr(\overline{\nabla}A_H)=0$ ve $\{X_1,X_2\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{3}{2}abw_1^2(X_1)+\left(a^2-\frac{1}{2}b^2\right)w_1^2(X_2)+3aX_2(a)+aX_2(b)+\frac{1}{2}bX_2(a) \quad (4.3.25) \\
0 &= \left(a^2-\frac{1}{2}b^2\right)w_1^2(X_1)+\frac{3}{2}abw_1^2(X_2)+3aX_2(a)+\frac{3}{2}bX_2(b)+aX_1(b)+\frac{1}{2}bX_1(a)
\end{aligned}
$$

eşitliklerine ulaşırız. Ayrıca ortalama eğrilik vektör alanı sabit olduğundan

$$
a^2+\frac{1}{4}b^2=\lambda_0^2 \ (sb) \qquad (4.3.26)
$$

dir. Böylece

$$
a(x,y)=\lambda_0\cos f(x,y),\ a(x,y)=2\lambda_0\sin f(x,y)
$$

diyebiliriz. Buradan

$$
\begin{aligned}
X_1(a) &= -\lambda_0 f_{,1}\sin f(x,y),\ X_1(b)=2\lambda_0 f_{,1}\cos(x,y) \\
X_2(a) &= -\lambda_0 f_{,2}\sin f(x,y),\ X_1(b)=2\lambda_0 f_{,2}\cos(x,y)
\end{aligned}
$$

olur. (4.3.24) (i) den $aw_1^2(X_1) = -X_2(a)$ ve (4.3.24) (ii) den

$$w_1^2(X_2) = -\frac{b}{a}X_2(a) - \frac{1}{a}X_1(a)$$

olur. (4.3.24) (iii) den ise

$$\left(4a^2 + b^2\right) X_2(a) + abX_1(a) - a^2X_1(b) = 0 \tag{4.3.27}$$

elde edilir. (4.3.25) birinci eşitliğinden

$$b\left(2a^2 + b^2\right) X_2(a) + a\left(4a^2 + b^2\right) X_1(a) + 2a^3X_2(b) = 0 \tag{4.3.28}$$

ve ikinci eşitlikten

$$\left(2a^2 - b^2\right) X_2(a) - abX_1(a) + \frac{3}{2}abX_2(b) + a^2X_1(b) = 0 \tag{4.3.29}$$

sonucuna ulaşırız. (4.2.27) veya (4.2.28) eşitliğinden

$$2f_{,2}\sin f + f_{,1}\cos f = 0$$

ve (4.3.28) den

$$f_{,2}\cos^2 f = 0$$

elde edilir. Son iki denklemi çözersek $f_{,1} = f_{,2} = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla a ve b sabit ve $w_1^2 \equiv 0$ olur. Diğer taraftan $d = 0$ durumundakine benzer işlemleri yaparsak

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_1}X_1 &= a\xi_1,\ \overline{\nabla}_{X_1}\xi_1 = -aX_1 + \varepsilon\xi,\ \overline{\nabla}_{X_i}\xi = -\xi_i, \\ \overline{\nabla}_{X_2}X_2 &= a\xi_1 + b\xi_2,\ \overline{\nabla}_{X_2}\xi_1 = -aX_2,\ \overline{\nabla}_{X_2}\xi_2 = -aX_1 - bX_2 + \varepsilon\xi \end{aligned} \tag{4.3.30}$$

sonucuna ulaşırız. Kabul edelim ki $X_1 = E_1$ olsun Böylece (4.2.30) dan

$$\overline{\nabla}_{E_1}E_1 = a\xi_1 = k_1E_2$$

olur. Burada şayet $a\rangle 0$ ise $k_1 = a$ ve $E_2 = \xi_1$ dir. Eğer $a\langle 0$ ise $k_1 = -a$ ve

$E_2 = -\xi_1$ dir. Ayrıca biliyoruz ki $a = 0$ ise X_1-eğrisi $R^5(-3\varepsilon)$ nun bir geodezik eğrisidir. Farzedelim ki $a > 0$ olsun. Böylece

$$\overline{\nabla}_{E_1} E_1 = aE_2, \overline{\nabla}_{E_1} E_2 = -aE_1 + \varepsilon\xi = -k_1 E_1 + k_2 E_3$$

olur. Bu eşitlikten

$$k_2 = \varepsilon, E_3 = \xi \text{ ve } \overline{\nabla}_{E_1} E_3 = -\xi_1 = -k_2 E_2$$

dir. Dolayısıyla $k_3 = 0$ olur. Tanım 4.2.1 den X_1-eğrisinin $R^5(-3\varepsilon)$ uzayında 3-mertebeden helis olduğu görülür. Benzer işlemleri yaparsak $a \langle 0$ durumu için de aynı sonucu elde ederiz. Şayet $X_2 = E_1$ dersek (4.3.30) dan

$$\overline{\nabla}_{E_1} E_1 = a\xi_1 + b\xi_2 = k_1 E_2$$

dir . Böylece

$$E_2 = \frac{a\xi_1 + b\xi_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad k_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

olduğunu görürüz. Burada a ve b sabit olduğundan $\sqrt{a^2 + b^2}$ de sabittir. Böylece

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{E_1} E_2 &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \overline{\nabla}_{X_2} \xi_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \overline{\nabla}_{X_2} \xi_2 \\
&= \frac{-a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} X_2 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-aX_1 - bX_2 + \varepsilon\xi \right) \\
&= \frac{-\left(a^2 + b^2\right)}{\sqrt{a^2 + b^2}} X_2 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-aX_1 + \varepsilon\xi \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada şayet $b > 0$ ise

$$E_3 = \frac{-aX_1 + \varepsilon\xi}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad k_2 = \frac{b\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

eşitliğine ulaşırız. Şayet $b < 0$ ise

$$E_3 = \frac{-aX_1 + \varepsilon\xi}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad k_2 = -\frac{b\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dir. Şayet $b = 0$ ise $k_2 = 0$ olacağından X_2-eğrisi bir çember olacaktır. Şayet $b > 0$

ise (4.3.30) dan

$$\overline{\nabla}_{E_1} E_3 = -\sqrt{a^2+1}\xi_2 = -k_2 E_2 + k_3 E_4$$

elde edilir. Gerekli işlemleri yaparsak $a > 0$ ise

$$E_4 = \frac{b\xi_1 - a\xi_2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad k_3 = \frac{a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

veya $a\langle 0$ ise

$$E_4 = -\frac{b\xi_1 - a\xi_2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad k_3 = -\frac{a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

eşitliklerine ulaşabiliriz. Şayet $a = 0$ ise $k_3 = 0$ olacağından X_2-eğrisi 3 üncü mertebeden helis olur. Şayet $a\rangle 0$ ise

$$\overline{\nabla}_{E_1} E_4 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(aX_1 - \varepsilon\xi\right) = -k_3 E_3$$

olur. Böylece k_1, k_2, k_3 sabit $k_4 = 0$ ve X_2-eğrisi 4 üncü mertebeden helis olur. $a, b\langle 0$ şartı için benzer durumlar elde edilir. Böylece ispat biter.

Örnek 4.3.1. $x : M \longmapsto R^5(-3\varepsilon)$ izometrik immersiyonu

$$x = \left(a\cos\frac{s}{a}, b\cos\frac{t}{b}, a\sin\frac{s}{a}, b\sin\frac{t}{b}, z(s,t)\right)$$

olarak verilsin. Böylece

$$x_s = \left(-\sin\frac{s}{a}, 0, \cos\frac{s}{a}, 0, z_s\right), x_t = \left(0, -\sin\frac{t}{b}, 0, \cos\frac{t}{b}, z_t\right)$$

olur. M yüzeyi integral alt yüzeyi olduğundan $\eta(x_s) = \eta(x_t) = 0$ olacaktır. Burada

$$\eta = \frac{1}{2}\left(dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2\right)$$

olduğundan

$$\eta(x_s) = \frac{1}{2}\left(dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2\right)\left(-\sin\frac{s}{a}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cos\frac{s}{a}\frac{\partial}{\partial y^1} + z_s\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(z_s + a\sin^2\frac{s}{a}\right)$$

ve böylece $z_s + a\sin^2\frac{s}{a} = 0$ elde ederiz. $z_s = -a\sin^2\frac{s}{a}$ integre edersek

$$z(s,t) = \frac{a^2}{4}\sin^2\frac{s}{a} - \frac{as}{2} + f(t) \tag{4.3.31}$$

olur. Benzer şekilde $z_t = -b\sin^2\frac{s}{b}$ olduğu görülür. (4.3.31) ifadesinde t ye göre kısmi türev alıp integre edersek

$$f(t) = \frac{b^2}{4}\sin^2\frac{s}{b} - \frac{bt}{2}$$

bulunur. Son ifade (4.3.31) de yerine yazılırsa $z(s,t)$ fonksiyonunu

$$z(s,t) = \frac{a^2}{4}\sin^2\frac{s}{a} + \frac{b^2}{4}\sin^2\frac{s}{b} - \frac{1}{2}(as+bt) \tag{4.3.32}$$

olarak buluruz. Burada açıkca görebiliriz ki

$$g(x,x) - \varepsilon\eta(x)^2 = \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$$

dir. Böylece M yüzeyi $c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ olmak üzere

$$N^4(c) = \left\{x \in R^5(-3\varepsilon) : g(x,x) - \varepsilon\eta(x)^2 = \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)\right\}$$

silindiri üzerindedir. $R^5(-3\varepsilon)$ uzayındaki φ- tabanı

$$\varphi = \left\{\begin{array}{c} e_1 = 2\frac{\partial}{\partial y^1}, e_2 = 2\frac{\partial}{\partial y^2}, e_3 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ e_4 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial}{\partial z}\right), e_5 = 2\frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right\}$$

ve $y^1 = a\sin\frac{s}{a}$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_s &= \left(-\sin\frac{s}{a}, 0, \cos\frac{s}{a}, 0, z_s\right) \\ &= -\sin\frac{s}{a}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cos\frac{s}{a}\frac{\partial}{\partial y^1} - a\sin^2\frac{s}{a}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\cos\frac{s}{a}\left(2\frac{\partial}{\partial y^1}\right) - \frac{1}{2}\sin\frac{s}{a}\left(2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{s}{a}e_1 - \frac{1}{2}\sin\frac{s}{a}e_3 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$x_t = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{b}e_2 - \frac{1}{2}\sin\frac{t}{b}e_4$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \phi x_s &= \frac{1}{2}\cos\frac{s}{a}\phi e_1 - \frac{1}{2}\sin\frac{s}{a}\phi e_3 \\ \phi x_t &= \frac{1}{2}\cos\frac{t}{b}\phi e_2 - \frac{1}{2}\sin\frac{t}{b}\phi e_4 \end{aligned}$$

dir. Burada $\phi e_1 = \varepsilon e_3$ ve $\phi e_2 = \varepsilon e_4$ olduğundan, sırasıyla, $\phi e_3 = -\varepsilon e_1$, $\phi e_4 = -\varepsilon e_2$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \phi x_s &= \frac{\varepsilon}{2}\left(\sin\frac{s}{a}e_1 + \cos\frac{s}{a}e_3\right) \\ \phi x_t &= \frac{\varepsilon}{2}\left(\sin\frac{t}{b}e_2 + \cos\frac{t}{b}e_4\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada açıkca $g(x_s, x_s) = g(x_t, x_t) = \dfrac{1}{4}$ ve $g(x_s, x_t) = 0$ dır. Bu yüzden $X_1 = 2x_s$ ve $X_2 = 2x_t$ dersek $\{X_1 = 2x_s,\ X_2 = 2x_t\}$ cümlesi M manifoldunun tanjant uzayının lokal ortonormal tabanı olur. Böylece $\phi X_1 = 2\phi x_s$, $\phi X_2 = 2\phi x_t, \xi$ de ortonormal normal vektör alanları olur. İzometrik immersiyonun tanımından

$$x^1 = a\cos\frac{s}{a}, x^2 = b\cos\frac{t}{b}, y^1 = a\sin\frac{s}{a}, y^2 = b\sin\frac{t}{b}$$

dir. Son eşitlikten

$$\cos\frac{s}{a} = \frac{x^1}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{y^1}{a}\right)^2}, \cos\frac{t}{b} = \frac{x^2}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{b}\right)^2}$$

olduğu görülür. Böylece

$$e_1\left(\cos\frac{s}{a}\right) = -\frac{2}{a}\tan\frac{s}{a} \tag{4.3.33}$$

$$\begin{aligned}
e_3\left(\cos\frac{s}{a}\right) &= \frac{4}{a}\\
e_1\left(\sin\frac{s}{a}\right) &= \frac{2}{a}\\
e_3\left(\sin\frac{s}{a}\right) &= -\frac{4}{a}\cot\frac{s}{a}
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_1}X_1 &= \cos\frac{s}{a}e_1\left(\cos\frac{s}{a}\right)e_1 - \cos\frac{s}{a}e_1\left(\sin\frac{s}{a}\right)e_3 - \cos\frac{s}{a}\sin\frac{s}{a}\overline{\nabla}_{e_3}e_1\\
&\quad - \cos\frac{s}{a}\sin\frac{s}{a}\overline{\nabla}_{e_1}e_3 - \sin\frac{s}{a}e_3\left(\cos\frac{s}{a}\right)e_1 + \sin\frac{s}{a}e_3\left(\sin\frac{s}{a}\right)e_3
\end{aligned}$$

olur. Burada $\overline{\nabla}_{e_3}e_1 = -\ \overline{\nabla}_{e_1}e_3$ ve (4.3.33) den

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_1}X_1 &= \left[\cos\frac{s}{a}e_1\left(\cos\frac{s}{a}\right) - \sin\frac{s}{a}e_3\left(\cos\frac{s}{a}\right)\right]e_1\\
&\quad + \left[\sin\frac{s}{a}e_3\left(\sin\frac{s}{a}\right) - \cos\frac{s}{a}e_1\left(\sin\frac{s}{a}\right)\right]e_3\\
&= \left[\cos\frac{s}{a}\left(-\frac{2}{a}\tan\frac{s}{a}\right) - \frac{4}{a}\sin\frac{s}{a}\right]e_1\\
&\quad + \left[\sin\frac{s}{a}\left(-\frac{4}{a}\cot\frac{s}{a}\right) - \frac{2}{a}\cos\frac{s}{a}\right]e_3\\
&= -\frac{6}{a}\left(\sin\frac{s}{a}e_1 + \cos\frac{s}{a}e_3\right)\\
&= -\frac{6}{a}\xi_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$\overline{\nabla}_{X_1}X_1 = -\frac{6}{a}\xi_1,\ \overline{\nabla}_{X_2}X_2 = -\frac{6}{b}\xi_2,\ \overline{\nabla}_{X_2}X_1 = 0 \tag{4.3.34}$$

olur. Dolayısıyla (4.3.34) eşitliklerini Gauss formülünde yerlerine yazarsak teğetsel bileşenlerinin sıfır olduğu görülür. Böylece

$$B(X_1,X_1) = -\frac{6}{a}\xi_1,\ B(X_2,X_2) = -\frac{6}{b}\xi_2,\ \ B(X_1,X_2) = 0 \tag{4.3.35}$$

olur. Ayrıca

$$H = \frac{1}{2}B(X_1,X_1) + \frac{1}{2}B(X_2,X_2) + \frac{1}{2}B(\xi,\xi)$$

olduğundan

$$H = -\frac{3}{a}\xi_1 - \frac{3}{b}\xi_2$$

eşitliğini elde ederiz. Burada şekil operatörünü hesaplamak için

$$\begin{aligned} A_1X_1 &= a_{11}X_1 + a_{21}X_2 \\ A_1X_2 &= a_{12}X_1 + a_{22}X_2 \end{aligned}$$

dersek

$$\begin{aligned} a_{11} &= g(A_1X_1, X_1) = g(-\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1, X_1) \\ a_{21} &= g(A_1X_1, X_2) = g(-\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1, X_2) \\ a_{12} &= g(A_1X_2, X_1) = g(-\overline{\nabla}_{X_2}\xi_1, X_1) \\ a_{22} &= g(A_1X_2, X_2) = g(-\overline{\nabla}_{X_2}\xi_1, X_2) \end{aligned}$$

olur. Şayet $g(\xi_1, X_1) = 0$ eşitliğinde her iki tarafın X_1 yönünde kovaryant türevini alısak

$$g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_1) + g(\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1, X_1) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} a_{11} &= g(-\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1, X_1) = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_1) = -\frac{6}{a} \\ a_{12} &= a_{21} = g(-\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1, X_2) = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_2, \xi_1) = 0 \\ a_{22} &= g(-\overline{\nabla}_{X_2}\xi_1, X_2) = g(\overline{\nabla}_{X_2}X_2, \xi_1) = 0 \end{aligned}$$

ve ξ_1 normal vektör alanına karşılık gelen şekil oporatörü $A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur. Benzer işlemleri yaparsak $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{b} \end{bmatrix}$ eşitliğini elde ederiz. (4.3.34) den açıkca görülür ki $\nabla_{X_i}X_j = 0$ dır. Dolayısıyla M manifoldunun Laplace operatörü

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{2} X_iX_if$$

olur. Şayet $\phi^2 x_1 = -a\phi x_s$ ve $\phi^2 x_2 = -b\phi x_t$ dersek

$$\begin{aligned}\phi^2 x_1 + \phi^2 x_2 &= -a\phi x_s - b\phi x_t \\ &= \left(-\frac{a}{2}\sin\frac{s}{a}, -\frac{b}{2}\sin\frac{t}{b}, -\frac{a}{2}\cos\frac{s}{a}, -\frac{b}{2}\cos\frac{t}{a}, 0\right)\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\phi^2 x = \left(-\frac{a}{2}\sin\frac{s}{a}, -\frac{b}{2}\sin\frac{t}{b}, -\frac{a}{2}\cos\frac{s}{a}, -\frac{b}{2}\cos\frac{t}{a}, 0\right)$ dir. Böylece

$$\phi^2 x = \phi^2 x_1 + \phi^2 x_2$$

elde edilir. Burada

$$\Delta g(x_1, e_A) = \frac{1}{a^2} g(x_1, e_A),\ \Delta g(x_2, e_A) = \frac{1}{b^2} g(x_2, e_A),\ (A = 1, 2, 3, 4)$$

dir. Böylece M manifoldu $R^5(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının 2-tipden alt manifoldu olduğu görülür (Baikousis 1991).

5. ÜÇ BOYUTLU SASAKİ UZAYLARINDA EĞRİLER

5.1 Legendre Eğrilerin Serret-Frenet Çatısı

Teorem 5.1.1. *M bir* $(\phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ Kontak metrik yapısı ile verilmiş üç boyutlu manifold olsun. Bu durumda M bir Sasaki uzayıdır ancak ve ancak manifold üzerindeki her bir Legendre eğrisinin torsiyonu ε dur.

Bu teoremin $\varepsilon = 1$ durumundaki ilk ispatını 1994 yılında C.Baikousis ve D.E.Blair yapmıştır (Baikousis 1994). $\varepsilon = \pm 1$ durumundaki genel ispatı ise Belkhelfa ve arkadaşları tarafından verilmiştir (Belkhelfa 2002).

İspat. $(\Rightarrow)$: γ bir yay parametresi ile verilmiş Legendre eğrisi olsun. Bu durumda Frenet fomülleri

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} V_1 &= \varkappa V_2 \\ \nabla_{\gamma'} V_2 &= -\varkappa V_1 + \tau V_3 \\ \nabla_{\gamma'} V_3 &= -\varepsilon \tau V_2 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

dir. Burada $V_1 = \gamma'$ ve $\eta(\gamma') = \varepsilon g(\gamma', \xi) = 0$ dır. M Sasaki uzayı ise (3.3.18) den

$$\begin{aligned} (\nabla_{\gamma'}\phi)(\gamma') &= \varepsilon g(\gamma', \gamma')\xi - \eta(\gamma')\gamma' \\ &= \varepsilon \xi \end{aligned}$$

ve (2.8.3) den

$$(\nabla_{\gamma'}\phi)(\gamma') = \nabla_{\gamma'}\phi(\gamma') - \phi(\nabla_{\gamma'}\gamma')$$

elde edilir. Böylece

$$\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma') = \varepsilon\xi + \phi(\nabla_{\gamma'}\gamma') \tag{5.1.2}$$

sonucuna ulaşırız. Burada $g(\gamma', \xi) = 0$ ise γ' ile ξ ortogonaldir. Ayrıca $g(\nabla_{\gamma'}\xi, \xi) = -g(\phi(\gamma'), \xi) = 0$ olduğundan $\phi(\gamma')$ ile ξ de ortogonaldir. Benzer şekilde $\phi(\gamma')$ ile γ' de biribirine ortogonal olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $\{\gamma', \phi(\gamma'), \xi\}$ ortogonal çatısını elde ederiz. Burada $g(\gamma', \xi) = 0$ ise

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \xi) + g(\gamma', \nabla_{\gamma'}\xi) &= 0 \\
g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \xi) + g(\gamma', -\phi(\gamma')) &= 0 \\
g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \xi) + g(\gamma', \phi(\gamma')) &= 0 \\
g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \xi) &= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $\nabla_{\gamma'}\gamma'$ ile ξ ortogonaldir. Böylece

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \varkappa\phi(\gamma') \tag{5.1.3}$$

olduğu görülür. Burada $\varkappa$ değeri γ eğrisinin birinci eğriliğidir. Böylece

$$\begin{aligned}
\phi(\nabla_{\gamma'}\gamma') &= \varkappa\phi^2(\gamma') \\
&= \varkappa(-\gamma' + \eta(\gamma')\xi) \\
&= -\varkappa\gamma'
\end{aligned}$$

olur. (5.1.2) de yerine yazarsak

$$\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma') = -\varkappa\gamma' + \varepsilon\xi \tag{5.1.4}$$

sonucuna ulaşırız. Burada $V_1 = \gamma'$, $V_2 = \phi(\gamma')$, $V_3 = \xi$ dir. (5.1.1) ile (5.1.4) kıyaslarsak $\tau = \varepsilon$ dur.

$(\Leftarrow)$: Şimdi kabul edelim ki $\tau = \varepsilon$ olsun. Biliyoruz ki Teorem 3.3.3 den

$$\nabla_X\xi = -\phi(X) - \phi h(X) \tag{5.1.5}$$

dir. Burada $h = \frac{1}{2}L_\xi\phi$ dir. γ bir yay parametresi ile verilen Legendre eğrisi ise γ boyunca $g(\gamma', \xi) = 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \xi) + g(\gamma', \nabla_{\gamma'}\xi) &= 0 \\
g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \xi) + g(\gamma', -\phi h(\gamma')) &= 0
\end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Burada $g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma') = 0$ olduğundan $\nabla_{\gamma'}\gamma' = \varkappa E_2 = a\xi + b\phi(\gamma')$ dir. Böylece

$$E_2 = \frac{a\xi + b\phi(\gamma')}{\varkappa} \tag{5.1.6}$$

yazabiliriz. Ayrıca $a = \varepsilon g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \xi) = \varepsilon g(\gamma', \phi h(\gamma'))$ dir. Burada

$$\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma') = \overline{a}\gamma' + \overline{b}\phi(\gamma') + \overline{c}\xi$$

dersek ve $g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'), \phi(\gamma')) = \overline{b} = 0$, $\overline{a} = g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'), \gamma')$, $\overline{c} = \varepsilon g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'), \xi)$ olduğundan

$$\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma') = g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'), \gamma')\gamma' + \varepsilon g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'), \xi)\xi \tag{5.1.7}$$

elde ederiz. Ayrıca $g(\phi(\gamma'), \gamma') = 0$ ise $g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma') + g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'), \gamma') = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'), \gamma') &= -g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \phi(\gamma')) \\
&= g(\phi(\nabla_{\gamma'}\gamma'), \gamma') \\
&= g(\phi(a\xi + b\phi(\gamma'), \gamma') \\
&= g(\phi^2(\gamma'), \gamma') \\
&= -bg(\gamma', \gamma') \\
&= -b
\end{aligned}$$

ayrıca (5.1.5)de X yerine γ' alırsak

$$\nabla_{\gamma'}\xi = -\phi(\gamma') - \phi h(\gamma') \tag{5.1.8}$$

olur ve $g(\phi(\gamma'), \xi) = 0$ ise $g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'), \xi) + g(\phi(\gamma'), \nabla_{\gamma'}\xi) = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'), \xi) &= -g(\nabla_{\gamma'}\xi, \phi(\gamma')) \qquad (5.1.9) \\
&= -g(-\phi(\gamma') - \phi h(\gamma'), \phi(\gamma')) \\
&= g(\phi(\gamma') + \phi h(\gamma'), \phi(\gamma')) \\
&= -g(\gamma' + h(\gamma'), \phi^2(\gamma')) \\
&= -g(\gamma' + h(\gamma'), -\gamma')
\end{aligned}$$

$$= \quad g(\gamma' + h(\gamma'), \gamma')$$

elde edilir. Burada (5.1.9) ve (5.1.8) ifadelerini (5.1.7) da yerlerine yazarsak

$$\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma') = -b\gamma' + \varepsilon g(\gamma' + h(\gamma'), \gamma')\xi \tag{5.1.10}$$

olur. Ayrıca $V_2 = \dfrac{a}{\varkappa}\xi + \dfrac{b}{\varkappa}\phi(\gamma')$ vektör alanının γ yönünde kovaryant türevini alıp, (5.1.10) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma'}V_2 &= \left(\frac{a}{\varkappa}\right)'\xi + \frac{a}{\varkappa}\nabla_{\gamma'}\xi + \left(\frac{b}{\varkappa}\right)'\phi(\gamma') + \frac{b}{\varkappa}\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma') \\
&= \left(\frac{a}{\varkappa}\right)'\xi + \frac{a}{\varkappa}(-\phi(\gamma') - \phi h(\gamma')) + \left(\frac{b}{\varkappa}\right)'\phi(\gamma') \\
&\quad + \frac{b}{\varkappa}(-b\gamma' + \varepsilon g(\gamma' + h(\gamma'), \gamma')\xi) \\
&= \left[\frac{a'}{\varkappa} - \frac{a\varkappa'}{\varkappa^2} + \frac{\varepsilon b}{\varkappa}g(\gamma' + h(\gamma'), \gamma')\right]\xi - \frac{b^2}{\varkappa}\gamma' + \left[\frac{b'}{\varkappa} - \frac{a}{\varkappa} - \frac{b\varkappa'}{\varkappa^2}\right]\phi(\gamma') \\
&\quad - \frac{a}{\varkappa}\phi h(\gamma') \\
&= -\varkappa\gamma' + \tau V_3
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $h(\gamma')$ ile ξ ortogonaldir. Çünkü

$$h(\gamma') = \frac{1}{2}(L_\xi\phi)(\gamma') = \frac{1}{2}\left([\xi, \phi(\gamma')] - \phi([\xi, \gamma'])\right)$$

ise

$$\begin{aligned}
g(2h(\gamma'), \xi) &= g([\xi, \phi(\gamma')] - \phi([\xi, \gamma'], \xi) \\
&= g([\xi, \phi(\gamma')], \xi) \\
&= g(\nabla_\xi\phi(\gamma') - \nabla_{\phi(\gamma')}\xi, \xi) \\
&= g(\nabla_\xi\phi(\gamma') - (-\phi^2(\gamma') - \phi h(\phi(\gamma'))), \xi) \\
&= g(\nabla_\xi\phi(\gamma'), \xi)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $g(\phi(\gamma'),\xi)=0$ ise

$$g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'),\xi)+g(\phi(\gamma'),\nabla_\xi\xi)=0$$

olduğundan $g(\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma'),\xi)=0$ dır. Böylece $g(2h(\gamma'),\xi)=0$ elde edilir. Böylece

$$h(\gamma')=\delta\gamma'+\lambda\phi(\gamma') \qquad (5.1.11)$$

eşitliği elde edilir. (5.1.8) eşitliğinin her iki tarafının ϕ altında görüntüsünü alırsak $\phi h(\gamma')=\delta\phi(\gamma')-\lambda\gamma'$ olur. Ayrıca $a=\varepsilon g(\gamma',\phi h(\gamma'))$ eşitlğini de kullanırsak

$$\begin{aligned}\lambda &= -g(\phi h(\gamma'),\gamma')\\ &= -\varepsilon\left(\varepsilon g(\phi h(\gamma'),\gamma')\right)\\ &= -\varepsilon a\end{aligned}$$

elde ederiz. Şayet γ eğrisini, teğet vektör alanı her noktada h operatörünün karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör olacak şekilde seçersek $\lambda=-\varepsilon a=0$ olur. Böylece $a=0$ sonucuna ulaşırız. Böylece $V_2=\dfrac{b}{\varkappa}\phi(\gamma')=\phi(\gamma')$ ise $b=\varkappa$ olur ve (5.1.11) i (5.1.10) yerine yazarsak

$$\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma')=-b\gamma'+\varepsilon(1+\delta)\xi \qquad (5.1.12)$$

elde edilir. Böylece (5.1.12) yi (5.1.11) ile kıyaslarsak $V_1=\gamma', V_2=\phi(\gamma'), V_3=\xi$ olduğu görülür. Ayrıca bu kıyaslamadan $1+\delta=1$ ise $\delta=0$ olduğu görülür. Böylece (5.1.11) den $h=\frac{1}{2}L_\xi\phi\equiv 0$ olur. Biliyoruz ki $\forall X,Y\in\chi(M)$ için Teorem 3.3.3 den

$$(\nabla_X\phi)(Y)=\varepsilon g(X+h(X),Y)\xi-\eta(Y)(X+h(X)) \qquad (5.1.13)$$

dir. $h=\frac{1}{2}L_\xi\phi\equiv 0$ olduğundan

$$(\nabla_X\phi)(Y)=\varepsilon g(X,Y)\xi-\eta(Y)X$$

olur. Böylece Teorem 3.3.5 den M nin bir Sasaki uzayı olduğu görülür. γ bir Legendre eğrisi ise $V_1 = \gamma'$, $V_2 = \phi(\gamma')$ ve $V_3 = \xi$ olmak üzere

$$\nabla_{V_1} V_1 = \varkappa V_2 \tag{5.1.14}$$

$$\nabla_{V_1} V_2 = -\varkappa V_1 + \varepsilon V_3 \tag{5.1.15}$$

$$\nabla_{V_1} V_3 = -V_2 \tag{5.1.16}$$

dir.

Teorem 5.1.2. $R^3(-3\varepsilon)$ uzayındaki her hangi bir Legendre eğrisinin eğriliği, eğrinin Euclidean metriğine göre xy düzlemine izdüşüm eğrisinin eğriliğinin iki katına eşittir (Belkhelfa 2002).

İspat. Kabul edelimki $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eğrisi $R^3(-3\varepsilon)$ de bir Legendre eğrisi olsun. Parametreyi $\frac{1}{4}\left[x^{\cdot}(t)^2 + y^{\cdot}(t)^2\right] = 1$ olacak şekilde seçebiliriz. Burada $\gamma^{\cdot}(t) = x^{\cdot}(t)\dfrac{\partial}{\partial x} + y^{\cdot}(t)\dfrac{\partial}{\partial y} + z^{\cdot}(t)\dfrac{\partial}{\partial z}$ olarak yazabiliriz. Burada $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ ve $\dfrac{\partial}{\partial z}$ baz vektörlerini

$$e_2 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right), e_1 = 2\frac{\partial}{\partial y} \text{ ve } \xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

ortonormal vektör alanaları cinsinden çekip $\gamma^{\cdot}(t)$ de yerine yazarsak

$$\gamma^{\cdot}(t) = \frac{1}{2}\left(x^{\cdot}(t)e_2 + y^{\cdot}(t)e_1 + \left[z^{\cdot}(t) - yx^{\cdot}(t)\right]\xi\right) \tag{5.1.17}$$

elde edilir. Burada eğrimiz Legendre eğrisi olduğundan $\eta(\gamma^{\cdot}(t)) = 0$ dır. Böylece (5.1.17) den

$$z^{\cdot}(t) - yx^{\cdot}(t) = 0 \tag{5.1.18}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $\dfrac{1}{4}\left[x^{\cdot}(t)^2 + y^{\cdot}(t)^2\right] = 1$ eşitliğinden $x^{\cdot}(t) = -2\sin\theta(t)$, $y^{\cdot}(t) = 2\cos\theta(t)$ olduğunu düşünürsek ve $\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = 0$ eşitliklerini de kullanırsak

$$\nabla_{\gamma^{\cdot}(t)}\gamma^{\cdot}(t) = \frac{1}{2}\left(x^{\cdot\cdot}(t)e_2 + y^{\cdot\cdot}(t)e_1\right)$$

olur. Böylece $\varkappa = \left\| \nabla_{\gamma^{\cdot}(t)} \gamma^{\cdot}(t) \right\|$ eğriliğimiz

$$\varkappa = |\theta^{\cdot}(t)| \tag{5.1.19}$$

dir. Diğer taraftan γ nın xy düzlemine izdüşüm eğrisi için $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ dersek $\|\alpha^{\cdot}(t)\| = 4$ olur. Burada $\|.\|$ Euclidean normdur. $\alpha(t)$ eğrisinin eğriliğinin

$$K_\alpha = \frac{|x^{\cdot\cdot}(t)y^{\cdot}(t) - x^{\cdot}(t)y^{\cdot\cdot}(t)|}{(x^{\cdot}(t)^2 + y^{\cdot}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olduğunu biliyoruz. Değerleri yerlerine yazarsak $K_\alpha = \frac{4}{4^{\frac{3}{2}}}\theta^{\cdot}(t)$ eşitliğini elde ederiz. Son eşitlikte her iki tarafın karesini alırsak

$$K_\alpha^2 = \frac{4^2}{4^3}(\theta^{\cdot}(t))^2 = \frac{4^2}{4^3}\varkappa^2$$

olur. Dolayısıyla $\varkappa^2 = 4K_\alpha^2$ sonucuna ulaşırız.

5.2 Üç Boyutlu Sasaki Uzayında Genel Legendre Eğrileri

γ bir Legendre eğrisi ise $T = \gamma'$, $N = \phi(\gamma')$ ve $B = \xi$ olmak üzere (5.1.14) den

$$N = \frac{1}{\varkappa}\nabla_T T$$

dir. (5.1.15) den $\nabla_T(\dfrac{1}{\varkappa}\nabla_T T) = -\varkappa T + \varepsilon B$ olur. Bu denklemi düzenlersek

$$\left(\frac{1}{\varkappa}\right)' \nabla_T T + \frac{1}{\varkappa}\nabla_T \nabla_T T = -\varkappa T + \varepsilon B \tag{5.2.1}$$

elde ederiz. (5.2.1) den tekrar türev alırsak

$$\left(\frac{1}{\varkappa}\right)'' \nabla_T T + \left(\frac{1}{\varkappa}\right)' \nabla_T^2 T + \left(\frac{1}{\varkappa}\right)' \nabla_T^2 T + \frac{1}{\varkappa}\nabla_T^3 T = -\varkappa' T - \varkappa \nabla_T T + \varepsilon \nabla_T B$$

olur. Burada $\nabla_T B = -N = -\dfrac{1}{\varkappa}\nabla_T T$ yazıp düzenlersek

$$\nabla_T^3 T + 2\varkappa\left(\frac{1}{\varkappa}\right)' \nabla_T^2 T + \varkappa\left(\left(\frac{1}{\varkappa}\right)'' + \varkappa + \frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\nabla_T T + \varkappa' T = 0$$

olur. Burada $\left(\dfrac{1}{\varkappa}\right)' = -\dfrac{\varkappa'}{\varkappa^2}$ ve $\left(\dfrac{1}{\varkappa}\right)'' = 2\left(\dfrac{\varkappa'}{\varkappa^2}\right)^2 - \dfrac{\varkappa''}{\varkappa^3}$ eşitliklerini yerlerine yazarsak

$$\nabla_T^3 T - 2\frac{\varkappa'}{\varkappa}\nabla_T^2 T + \left(-\frac{\varkappa''}{\varkappa} + 2\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)^2 + \varkappa^2 + \varepsilon\right)\nabla_T T + \varkappa' T = 0 \qquad (5.2.2)$$

genel denklemine ulaşırız. Aslında (5.2.2) denklemi Legendre eğriler için genel bir denklemdir (Kocayiğit 2004).

5.3 Üç Boyutlu Sasaki Uzay Formunda Legendre Helis Eğrileri

γ Legendre eğrisi üç boyutlu bir $(M(c), \phi, \xi, \eta, g)$ Sasaki uzay formu üzerinde $V_1 = T = \gamma'$, $V_2 = N = \phi(\gamma')$ ve $V_3 = B = \xi$

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset R &\to M \\ s &\to \gamma(s) \end{aligned}$$

şeklinde regüler eğri ve "s" ler de eğrinin kendi yay parametresi olsun. M uzay formu üzerinde kovaryant türev $\overline{\nabla}$ olmak üzere Frenet denklemlerinin

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{V_1} V_1 &= \varkappa V_2 \\ \overline{\nabla}_{V_1} V_2 &= -\varkappa V_1 + \varepsilon V_3 \\ \overline{\nabla}_{V_1} V_3 &= -V_2 \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\{V_1 = T = \gamma',\ V_2 = N = \phi(\gamma'),\ V_3 = B = \xi\}$ Frenet vektörleri ve $\varkappa$ da eğrinin eğriliğidir. Eğrimiz keyfi hızlı bir eğri iken hızı $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ dir. Ayrıca "t" keyfi bir parametre olmak üzere $\Gamma = \Gamma(t, z)$ varyasyonunu

$$\begin{aligned} \Gamma : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\to M(c) \\ (t, z)\, s &\to \Gamma(t, z) \end{aligned}$$

olacak şekilde düşünelim. Şayet varyasyon vektör alanı $Z = Z(t,z)$ ise

$$Z(t) = \frac{\partial \Gamma(t,z)}{\partial z} |_{z=0}$$

olur. Burada $\gamma(t) = \Gamma = \Gamma(t,0)$ ve $V = V(t)$ de herhangi bir "t" anınındaki hız vektörüdür. Bu kısımdan sonra $v(s,z), Z(s,z), V_i(s,z)$ ve $k_1(s,z)$ şeklinde düşüneceğiz (Barros).

Teorem 5.3.1: γ bir $(M(c), \phi, \xi, \eta, g)$ Sasaki uzay formu üzerinde

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset R &\to M(c) \\ s &\to \gamma(s) \end{aligned}$$

şeklinde regüler eğri ve "s" de eğrinin kendi yay parametresi olsun. Yukarıdaki notasyonları kullanırsak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

H 1) $[V, Z] = 0$

H 2) $\frac{\partial v}{\partial z} |_{z=0} = g(\overline{\nabla}_{V_1} Z, V_1) v$

H 3) $\frac{\partial \varkappa^2}{\partial z} |_{z=0} = 2\varkappa g(\overline{\nabla}^2_{V_1} Z, V_2) - 4\varkappa^2 g(\overline{\nabla}_{V_1} Z, V_1) + 2c\varkappa g(Z, V_2)$

dir (Barros 1997).

Tanım 5.3.1. γ Legendre eğrisi üç boyutlu bir $(M(c), \phi, \xi, \eta, g)$ Sasaki uzay formu üzerinde

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset R &\to M(c) \\ s &\to \gamma(s) \end{aligned}$$

şeklinde regüler eğri ve "s" de eğrinin kendi yay parametresi olsun. Şayet

$$\frac{\partial v}{\partial z} |_{z=0} = \frac{\partial \varkappa^2}{\partial z} |_{z=0} = \frac{\partial \tau^2}{\partial z} |_{z=0} = 0$$

ise $Z = Z(s)$ vektör alanına γ eğrisi boyunca Killing vektör alanı denir. Buarada $M(c)$ Sasaki uzay formu olduğundan biliyoruzki $\tau = 1$ dir. Böylece

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial z} |_{z=0} = 0$$

eşitliğinin sağlandığını söyleyebiliriz (Barros 1997).

Tanım 5.3.2. γ Legendre eğrisi üç boyutlu bir $(M(c), \phi, \xi, \eta, g)$ Sasaki uzay formu üzerinde

$$\gamma : I \subset R \to M(c)$$
$$s \to \gamma(s)$$

şeklinde regüler eğri ve "s" de eğrinin kendi yay parametresi olsun. Şayet γ eğrisi-boyunca bir $Z(s)$ Killing vektör alanı var ve

$$\|Z\| = c^t \text{ (sabit) ve } g(Z, V_1) = c^t \text{ (sabit)}$$

ise γ eğrisine genel helis denir (Barros 1997).

Teorem.5.3.2. $(M(c), \phi, \xi, \eta, g)$ Sasaki uzay formu üzerinde $\gamma = \gamma(s)$ Legendre eğrisi genel helistir ancak ve ancak γ eğrisinin eğriliği sabittir.

İspat. Kabul edelimki $\gamma = \gamma(s)$ Legendre eğrisi genel helis olsun. Burada Killing vektör alanının boyunu $\|Z\| = 1$ alırsak genelden bir şey kaybetmeyiz. Şayet

$$Z = fV_1 + gV_2 + hV_3$$

şeklinde düşünürsek

$$f = g(Z, V_1) = \cos\theta$$

$\theta = c^t$(sabit) olur. Z Killing vektör alanının V_1 yönünde kovaryant türevini alırsak

$$\overline{\nabla}_{V_1} Z = -gk_1V_1 + (fk_1 - h + g')\, V_2 + (g + h')\, V_3$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$\frac{\partial v}{\partial z}\,|_{z=0} = g(\overline{\nabla}_{V_1} Z, V_1)v = 0$$

eşitliğini kullanırsak $gk_1 = 0$ ve $g = 0$ olur. Ayrıca $\|Z\| = 1$ olduğundan $h = \sin\theta$ ve

$$Z = \cos\theta V_1 + \sin\theta V_3 \tag{5.3.1}$$

dir. Böylece

$$\overline{\nabla}_{V_1} Z = (\varkappa\cos\theta - \sin\theta)\, V_2 \tag{5.3.2}$$

ve

$$\overline{\nabla}^2_{V_1} Z = -\varkappa\,(\varkappa\cos\theta - \sin\theta)\, V_1 + \varkappa' \cos\theta V_2 + (\varkappa\cos\theta - \sin\theta)\, V_3 \tag{5.3.3}$$

eşitliklerini elde ederiz. (5.3.1), (5.3.2), (5.3.3) ve

$$\frac{\partial\varkappa^2}{\partial z}\,|_{z=0} = 2\varkappa g(\overline{\nabla}^2_{V_1} Z, V_2) - 4\varkappa^2 g(\overline{\nabla}_{V_1} Z, V_1) + 2c\varkappa g(Z, V_2) = 0$$

eşitliğinden $2\varkappa\varkappa'\cos\theta = 0$ ve $\varkappa' = 0$ olur. Böylece $\varkappa = c^t$ (sabit) sonucuna ulaşırız. Tersine kabul edelimki $\gamma = \gamma\,(s)$ Legendre eğrisi sabit eğrilikli olsun. Bu durumda

$$Z = \frac{-\varkappa V_1 + V_3}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} \tag{5.3.4}$$

vektör alanını tanımlarsak

$$\overline{\nabla}_{V_1} Z = -\sqrt{\varkappa^2 + 1} V_2 \tag{5.3.5}$$

ve

$$\overline{\nabla}^2_{V_1} Z = -\sqrt{\varkappa^2 + 1}\,(-\varkappa V_1 + V_3) \tag{5.3.6}$$

olur. Teorem 5.3.1 ve (5.3.3), (5.3.4), (5.3.5) eşitliklerinden

$$\frac{\partial v}{\partial z}\,|_{z=0} = \frac{\partial\varkappa^2}{\partial z}\,|_{z=0} = 0$$

olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca $\|Z\| = 1$ (sabit) ve $g(Z, V_1) = \dfrac{-\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} = c^t$ (sabit) dir. Böylece $\gamma = \gamma\,(s)$ Legendre eğrisi ekseni $Z = \dfrac{-\varkappa V_1 + V_3}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}}$ olan bir helistir.

Örnek 5.3.1. Kabul edelimki $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eğrisi $R^3(-3\varepsilon)$ de bir Legendre eğrisi olsun. Burada parametreyi $\frac{1}{4}\left[x^{\cdot}(t)^2 + y^{\cdot}(t)^2\right] = 1$ olacak şekilde seçebiliriz. Böylece $x^{\cdot}(t) = -2\sin\theta(t)$, $y^{\cdot}(t) = 2\cos\theta(t)$ ve $\varkappa = |\theta^{\cdot}(t)|$ olduğunu Teorem 5.1.2 de bulmuştuk. Şayet eğrimiz Legendre helis eğrisi ise $\varkappa = \left|\dot{\theta}(\ t)\right| = c^t$ (sabit) olmalıdır. Böylece $\dot{\theta}(\ t) = c_1$ (sabit) ve $\theta(t) = c_1 t + c_2$ $(c_1, c_2$ sabit) olur. $\theta(t)$ değerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} x^{\cdot}(t) &= -2\sin(c_1 t + c_2) \\ y^{\cdot}(t) &= 2\cos(c_1 t + c_2) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki denklemi integre edersek

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{c_1}\cos(c_1 t + c_2) + x_0 \\ y(t) &= \frac{2}{c_1}\sin(c_1 t + c_2) + y_0 \end{aligned}$$

olur. Eğrimiz Legendre eğrisi olduğundan (5.1.18) eşitliği sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} z^{\cdot}(t) &= y(t)x^{\cdot}(t) \\ &= -2\left(\frac{2}{c_1}\sin(c_1 t + c_2) + y_0\right)\sin(c_1 t + c_2) \\ &= -\frac{4}{c_1}\sin^2(c_1 t + c_2) - 2y_0\sin(c_1 t + c_2) \end{aligned}$$

olur. Son eşitliği integre edersek

$$z(t) = \frac{1}{c_1^2}\sin 2(c_1 t + c_2) + \frac{2y_0}{c_1}\cos(c_1 t + c_2) - \frac{2}{c_1^2}t + z_0$$

sonucuna ulaşırız. Böylece $\gamma(t)$ Legendre helis eğrisinin genel denklemini

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{c_1}\cos(c_1 t + c_2) + x_0 \\ \frac{2}{c_1}\sin(c_1 t + c_2) + y_0 \\ \frac{1}{c_1^2}\sin 2(c_1 t + c_2) + \frac{2y_0}{c_1}\cos(c_1 t + c_2) - \frac{2}{c_1^2}t + z_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde buluruz. Burada $c_1, c_2, x_0,\ y_0, z_0$ lar birer sabitdir.

5.4 Biharmonik Legendre Eğrileri

M, n-boyutlu Riemanian manifold ve E_t^m de m-boyutlu semi Euclidean uzay olsun. Farzedelim ki $x : M \longrightarrow E_t^m$ bir izometrik immersiyon olsun. Dolayısıyla E_t^m deki M nin pozisyon vektörü

$$\triangle x = -nH \tag{5.4.1}$$

eşitlğini sağlar. Burada H, E_t^m deki M nin ortalama eğrilik vektör alanıdır ve $n = boyM = rankJx$ dir. Eğer $x : M \longrightarrow E_t^m$ dönüşümünde, $\triangle^2 x = 0$ ise bu izometrik immersiyona biharmoniktir denir. (5.4.1) denkleminden görülmektedir ki 'x' immersiyonu minimaldir ancak ve ancak 'x' biharmoniktir. Açıkca her minimal immersiyon biharmoniktir. Şayet M manifoldunu bir boyutlu yani $n = 1$ ve $m = 3$ alırsak, (5.4.1) denklemi $\triangle x = -H$ ve burada $V_1 = \gamma'$ olmak üzere $H = \nabla_{V_1} V_1$ $= \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} x$ olur. Dolayısıyla $\triangle = -\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'}$ olduğu görülür. Bunu 's' bir yay parametresi olmak üzere $\triangle = -\dfrac{d^2}{ds^2}$ olarak da ifade edebiliriz. $x : M^1 \longrightarrow E_t^3$ izometrik immersiyon dönüşümünde $\triangle = -\dfrac{d^2}{ds^2}$ olduğundan, $\triangle^2 x = 0$ olması $\dfrac{d^4 x}{ds^4} = 0$ olmasını gerektirir. Böylece son diferansiyel denklemi çözersek

$$x(s) = c_1 s^3 + c_2 s^2 + c_3 s + c_4 \tag{5.4.2}$$

elde ederiz. Burada c_1, c_2, c_3, c_4 değerleri, E_s^3 uzayında sabit vektörlerdir (Belkhelfa 2002).

Teorem 5.4.1. $x : M^1 \longrightarrow E_t^3$ dönüşümü 1-boyutlu Riemanian manifold M^1 den E_t^3'e izometrik immersiyon olsun. 'x' immersiyonu biharmoniktir ancak ve ancak aşağıdaki şartları sağlar.

1) $t = 0, 1$ veya 2 ve 'x' immersiyonu lineerdir.

2) $t = 1$ ve E_1^3 deki katı hareket

$$x(s) = (\delta s^3 + \overline{\delta} s^2, \delta s^2 + \overline{\delta} s^3, s)$$

şeklindedir. Burada $\delta, \overline{\delta}$ sabit olup $\delta^2 + \overline{\delta}^2 \neq 0$ dır veya

$$x(s) = (\frac{\delta^2}{6}s^3, \frac{\delta}{2}s^2, -\frac{\delta^2}{6}s^3 + s)$$

olmasıdır. Yine burada δ sabittir.

3) $t = 2$ ve E_2^3 deki katı hareket δ sabit olmak üzere

$$x(s) = (\frac{\delta^2}{6}s^3, \frac{\delta}{2}s^2, \frac{\delta^2}{6}s^3 + s)$$

dir (Belkhelfa 2002).

Teorem 5.4.2. $(M, \phi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ 3-boyutlu Sasaki uzayında bir Legendre eğrisi biharmoniktir ancak ve ancak eğrinin birinci eğriliği 0 veya 1 dir. Böylece $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında Biharmonik Legendre eğrileri Legendre geodezikleridir veya a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c ve c_0 birer sabit olmak üzere

$$\gamma(s) = (a_1 s + b_1, a_2 s + b_2, a_1 a_2 \frac{s^2}{2} + b_2 a_1 s + b_3) \tag{5.4.3}$$

ve

$$\gamma(s) = (2\sin s + 1, 2\sin s + c, -(2s - \sin 2s) + 2c\cos s + c_0) \tag{5.4.4}$$

olan birer Legendre eğrileridir (Belkhelfa 2002).

İspat. γ bir yay parametresi ile verilmiş Legendre eğrisi olsun. Burada $H = \nabla_{\gamma'}\gamma'$ dersek $\triangle H = -\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}H$ olur. Ayrıca $H = \nabla_{\gamma'}\gamma' = \varkappa\phi(\gamma')$ olduğundan

$$\nabla_{\gamma'}H = \varkappa\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma') + \varkappa'\phi(\gamma')$$

elde edilir. $\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma') = \varepsilon\xi - \varkappa\gamma'$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'}H &= \varkappa(\varepsilon\xi - \varkappa\gamma') + \varkappa'\phi(\gamma') \\ &= \varkappa\varepsilon\xi - \varkappa^2\gamma' + \varkappa'\phi(\gamma') \end{aligned}$$

elde ederiz. $\triangle H = -\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}H$ olduğundan

$$\triangle H = \varkappa'\varepsilon\xi + \varkappa\varepsilon\nabla_{\gamma'}\xi - 2\varkappa\varkappa'\gamma' - \varkappa^2\nabla_{\gamma'}\gamma' + \varkappa''\phi(\gamma') + \varkappa'\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma')$$

olur. Burada Frenet formüllerini ve $\nabla_{\gamma'}\phi(\gamma') = \varepsilon\xi - \varkappa\gamma'$ eşitliğini kullanıp düzenlersek

$$\triangle H = (3\varkappa\varkappa')\,\gamma' + \left(\varkappa(\varkappa^2+\varepsilon) - \varkappa''\right)\phi(\gamma') - (2\varepsilon\varkappa')\,\xi \qquad (5.4.5)$$

elde edilir. Böylece '$\triangle H = 0$ dır ancak ve ancak

$$3\varkappa\varkappa' = 0, \varkappa(\varkappa^2+\varepsilon) - \varkappa'' = 0 \text{ ve } 2\varepsilon\varkappa' = 0$$

dır. Burada $2\varepsilon\varkappa' = 0$ dır ancak ve ancak $\varkappa' = 0$ dır. Böylece $\varkappa = k(sabit)$ çıkar. $\varkappa$ sabit olduğundan $\varkappa(\varkappa^2+\varepsilon) - \varkappa'' = 0$ denklemi $\varkappa(\varkappa^2+\varepsilon) = 0$ olmasını gerektirir. Son eşitlikten $\varkappa = 0$ veya $\varkappa^2 + \varepsilon = 0$ olması gerekir. $\varkappa = 0$ olması Legendre biharmoniklerin geodezikler olmasını gerektirir. Ayrıca $g(\xi,\xi) = \varepsilon = -1$ iken $\varkappa^2 + \varepsilon = 0$ denkleminin çözümü $\varkappa = 1$ dir. Dolayısıyla üç boyutlu Sasaki uzayında Legendre Biharmonik eğrileri aynı zamanda helislerdir. Bunun tersi doğru değildir. Kabul edelimki $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eğrisi $R^3(-3\varepsilon)$ de bir Legendre eğrisi olsun. Parametreyi

$$\frac{1}{4}\left[x^{\cdot}(t)^2 + y^{\cdot}(t)^2\right] = 1$$

olacak şekilde seçebiliriz. Burada

$$\gamma^{\cdot}(t) = x^{\cdot}(t)\frac{\partial}{\partial x} + y^{\cdot}(t)\frac{\partial}{\partial y} + z^{\cdot}(t)\frac{\partial}{\partial z}$$

olarak yazabiliriz. Burada $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ ve $\frac{\partial}{\partial z}$ taban vektörlerni

$$e_2 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right), e_1 = 2\frac{\partial}{\partial y} \text{ ve } \xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanları cinsinden çekip $\gamma^{\cdot}(t)$ de yerlerine yazarsak

$$\gamma^{\cdot}(t) = \frac{1}{2}\left(x^{\cdot}(t)e_2 + y^{\cdot}(t)e_1 + \left[z^{\cdot}(t) - yx^{\cdot}(t)\right]\xi\right)$$

elde edilir. Burada eğrimiz Legendre eğrisi olduğundan $\eta(\gamma^{\cdot}(t)) = 0$ dır. $\eta(e_2) = \eta(e_1) = 0$ olduğundan $z^{\cdot}(t) = yx^{\cdot}(t)$ elde edilir. Ayrıca (5.4.3) ve (5.4.4) eğrilerinin $z^{\cdot}(t) = yx^{\cdot}(t)$ denklemini sağladığı ve birinci eğriliklerinin sırasıyla, 0 ve 1 olduğunu görmek kolaydır.

Sonuç 5.4.1. Teorem 5.3.2. ve Teorem 5.4.2. den açıkca görülmektedirki, üç boyutlu Sasaki uzayında bir biharmanik Legendre eğrisi Legendre helis eğrisidir.

5.5 Legendre Bertrant Eğri Çiftleri

Teorem 5.5.1. Üç boyutlu Sasaki uzayında bir Legendre eğrisinin Bertrant reel Legendre eğri çifti kendisidir.

İspat. M, üç boyutlu Sasaki uzay ve $U, V \subset M$ eğrileri de, sırası ile, (I, α) ve (I, β) koordinat komşuluğu ile verilen eğriler Legendre Bertrant eğrileri olsun. U ve V eğrilerinin frenet üçlüleri, sırası ile,

$$\{T = \alpha', N = \phi(\alpha'), B = \xi\} \text{ ve } \{T^* = \beta^\bullet, N^* = \phi(\beta^\bullet), B^* = \xi\}$$

olacaktır. Burada U ve V eğrilerinin yay parametreleri, sırası ile, 's' ve's^*' ve ayrıca $\alpha' = \dfrac{d\alpha}{ds}$ ve $\beta^\bullet = \dfrac{d\beta}{ds^*}$ dir. Kabul edelim ki U ve V eğrilerinin paremetreleri aynı 's' olsun. Dolayısıyla Bertrant eğrileri olduklarından

$$N = \phi(\alpha') = \lambda\phi(\beta^\bullet) = N^*$$

dir. Burada $\lambda = \pm 1$ dir. $\beta^\bullet = \dfrac{ds}{ds^*}\beta'$ ve ϕ lineer olduğundan

$$\phi(\alpha') = \lambda \frac{ds}{ds^*}\phi(\beta')$$

olur. Son eşitlikte her iki tarafın ϕ altında görüntüsünü alır ve eğrilerin Legendre eğrisi olmasını kullanırsak

$$\beta' = \pm \frac{ds^*}{ds}\alpha' = k\alpha' = kT$$

sonucuna ulaşırız. Bu eğriler Legendre eğrileri olduklarından $\beta(s) = \alpha(s) + \mu N$ olarak yazabiliriz. Her iki tarafın $\dfrac{d}{ds}$ e göre türevini alırsak

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \alpha'(s) + \mu' N + \mu N' \\ kT &= T + \mu' N - \mu \varkappa T + \mu \varepsilon \xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$(k - 1 + \mu\varkappa)T - \mu' N - \mu\varepsilon\xi = 0$$

olur. $\{T, N, B\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan $k - 1 + \mu\varkappa = 0, -\mu' = 0$ ve $-\mu\varepsilon = 0$ olur. Bu denklemler çözülürse $\mu = 0$ ve $k = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $\beta(s) = \alpha(s)$ sonucuna ulaşırız. Bu ise bize üç boyutlu Sasaki uzayında bir eğrinin Bertrant çiftinin sadece kendisi olduğunu söyler.

5.6 Involüt(Basıt) ve Evolüt(Mebsut)

Teorem 5.6.1. Üç boyutlu Sasaki uzayında Involüt-Evolüt Legendre reel eğri çifti yoktur.

İspat. M, üç boyutlu Sasaki uzay ve $U, V \subset M$ involut-evolut eğrileri de, sırası ile, (I, α) ve (I, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in M$ noktalarında U ve V nin Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla,

$$\{T = \alpha', N = \phi(\alpha'), B = \xi\} \text{ ve } \{T^* = \beta^\bullet, N^* = \phi(\beta^\bullet), B^* = \xi\}$$

olsun. $U, V \subset M$ involut-evolut eğrileri olduklarından $g(T, T^*) = 0$ dır. Burada $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda T$ olarak yazabiliriz. Son eşitlikte her iki tarafın s ye göre türevini alırsak $\beta'(s) = \alpha'(s) + \lambda' T + \lambda T'$ dir. Dolayısıyla,

$$\frac{ds^*}{ds} T^* = (1 + \lambda')T + \lambda \varkappa N \tag{5.6.1}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} g(\frac{ds^*}{ds} T^*, T) &= g((1+\lambda')T, T) + g(\lambda \varkappa N, T) \\ \frac{ds^*}{ds} g(T^*, T) &= (1+\lambda')g(T,T) + \lambda \varkappa g(N,T) \end{aligned}$$

olur. $g(T, T^*) = g(N,T) = 0$ ve $g(T,T) = 1$ eşitliklerini kullanır ve $1+\lambda' = 0$ değerini (5.6.1) de yerine yazarsak $T^*(s) = N(s)$ ve $\frac{ds^*}{ds} = \lambda \varkappa$ olur. Burada $N = \phi(\alpha')$ ve $T^* = \beta^\bullet$ olduğundan $\phi(\alpha') = \beta^\bullet$ dır. Her iki tarafın ϕ altında görüntüsünü alırsak eğriler Bertrant eğrileri olduğundan $\alpha' = \phi(\beta^\bullet)$ olur. Böylece $T(s) = N^*(s)$ olduğunu görürüz. $T^*(s) = N(s)$ eşitliğinin $\frac{d}{ds}$ e göre türevini alırsak $\frac{ds^*}{ds} \varkappa^* N^* = -\varkappa T + \varepsilon \xi$ elde edilir. Her iki tarafın normunu alırsak

$$\varkappa N = \frac{ds^*}{ds}(-\varkappa^* T^* + \varepsilon \xi)$$

elde ederiz. Tekrar her iki tarafın normunu alırsak

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 ((\varkappa^*)^2 + 1) = \varkappa^2 \tag{5.6.2}$$

elde ederiz. (5.6.1) ve (5.6.2) eşitliklerini oranlarsak

$$\frac{(\varkappa^*)^2}{(\varkappa^*)^2 + 1} = \frac{\varkappa^2 + 1}{\varkappa^2}$$

olur. Böylece

$$(\varkappa^*)^2 \varkappa^2 = (\varkappa^*)^2 \varkappa^2 + (\varkappa^*)^2 + \varkappa^2 + 1$$

ve $(\varkappa^*)^2 + \varkappa^2 + 1 = 0$ eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla üç boyutlu Sasaki uzayında involut- evolut Legendre eğrileri reel değildir.

5.7 Küresel Legendre Eğrileri

M, üç boyutlu bir Sasaki uzayı olsun. Bu uzayda $H_1^2 = \{X \in M : g(X,X) = -1\}$ ve $S_1^2 = \{X \in M : g(X,X) = 1\}$ olarak tanımlayalım. Ayrıca M, üç boyutlu bir Sasaki uzayda $\alpha : I \subset R \longrightarrow M$ de bir (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir Legendre eğrisi olsun. Dolayısıyla bu uzaydaki çatımız

$$\{V_1 = T = \alpha', V_2 = N = \phi(\alpha'), V_3 = B = \xi\}$$

dir.

Tanım 5.7.1(Eğrilik Ekseni, Eğrilik merkezi) $U \subset M$ Legendre eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $P = \alpha(s_0) \in U$ noktasında sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri olan

$$a = \alpha(s_0) + \frac{1}{\varkappa} V_2(s_0) + \lambda V_3(s_0)$$

doğrusuna U eğrisinin $P \in M$ noktasındaki **eğrilik ekseni** denir. Eğrilik ekseni üzerindeki

$$C(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\varkappa} V_2(s_0)$$

noktasına da M nin $P \in M$ noktasındaki **Eğrilik merkezi** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 5.7.2.(Oskülatör Küresi) $U \subset M$ Legendre eğrisiyle $P \in U$ noktasında sonsuz yakın dört noktası ortak olan küreye, M nin $P \in M$ noktasındaki **Oskülatör Küresi** veya **Eğrilik küresi** adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 5.7.1. $U \subset M$ Legendre eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasındaki oskülatör küre merkezi 'a' ise

$$a(s) = \alpha(s) + m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3 \tag{5.7.1}$$

dir. Burada

$$\{V_1 = T = \alpha', V_2 = N = \phi(\alpha'), V_3 = B = \xi\}$$

$\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet üç ayaklısı ve

$$m_2 = \frac{1}{\varkappa} \text{ ve } m_3 = m_2' \tag{5.7.2}$$

dür.

İspat. $U \subset M$ üzerinde (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen ve yay parametresi 's' olan bir legendre eğrisi alalım. Bu eğri ile sonsuz yakın ortak dört noktası olan Oskülatör kürenin merkezi 'a' ve yarıçapı 'r' olsun. Burada 'a' ve 'r' sabittir. Buna göre

$$\begin{aligned} f &: I \longrightarrow R \\ &: s \longrightarrow f(s) = g(a(s) - \alpha(s), a(s) - \alpha(s)) \pm r^2 \end{aligned}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $\alpha(s)$ noktasında oskülatör küre ile U nun sonsuz yakın dört ortak noktası olması için

$$f(s) = f'(s) = f''(s) = f'''(s) = 0$$

olmalıdır. Buna göre $f(s) = 0$ ise

$$g(a(s) - \alpha(s), a(s) - \alpha(s)) = \mp r^2$$

dir.

$$f'(s) = -2g(V_1, a(s) - \alpha(s)) = 0$$

ise $g(V_1, a(s) - \alpha(s)) = 0$ dır. (5.7.1) den

$$g(V_1, m_1V_1 + m_2V_2 + m_3V_3) = 0$$

ve dolayısıyla $m_1 = 0$ dır. $f''(s) = 0$ ise

$$g(V_1', a(s) - \alpha(s)) - g(V_1, V_1) = 0$$

dolayısıyla

$$g(V_1', a(s) - \alpha(s)) - 1 = 0$$

elde edilir. Burada $V_1' = \varkappa V_2$ olduğundan

$$\varkappa g(V_2, a(s) - \alpha(s)) - 1 = 0 \tag{5.7.3}$$

(5.7.1) ve $m_1 = 0$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\varkappa V_2, m_2 V_2 + m_3 V_3) - 1 &= 0 \\ m_2 \varkappa g(V_2, V_2) - 1 &= 0 \\ m_2 \varkappa - 1 &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $m_2 = \dfrac{1}{\varkappa}$ elde edilir. $f'''(s) = 0$ eşitliğinden de

$$\varkappa' g(V_2, a(s) - \alpha(s)) + \varkappa g(V_2', a(s) - \alpha(s)) = 0$$

elde ederiz. $V_2' = -\varkappa V_1 + \varepsilon V_3$ ve (5.7.1) den

$$\varkappa' g(V_2, m_2 V_2 + m_3 V_3) + \varkappa g(-\varkappa V_1 + \varepsilon V_3, m_2 V_2 + m_3 V_3) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. $g(\xi, \xi) = g(V_3, V_3) = \varepsilon$ olduğunu kullanıp bu son eşitliği düzenlersek

$$\begin{aligned} \varkappa' g(V_2, m_2 V_2) + \varkappa g(\varepsilon V_3, m_3 V_3) &= 0 \\ \varkappa' m_2 g(V_2, V_2) + \varepsilon m_3 \varkappa g(V_3, V_3) &= 0 \\ \varkappa' m_2 + \varepsilon^2 m_3 \varkappa &= 0 \\ \varkappa' m_2 + m_3 \varkappa &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$m_3 = -\frac{\varkappa'}{\varkappa^2} = m_2'$$

olur. Böylece ispat biter.

Sonuç 5.7.1. $U \subset M$ üzerinde (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s)$ noktasındaki Oskilatör kürenin merkezi 'a' ve yarçaqpı 'r' ise $m_1 = 0$ ve (5.7.1) den

$$a(s) = \alpha(s) + m_2V_2 + m_3V_3$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} g(a(s) - \alpha(s), a(s) - \alpha(s)) &= \mp r^2 \\ g(m_2V_2 + m_3V_3, m_2V_2 + m_3V_3) &= \mp r^2 \\ m_2^2 g(V_2, V_2) + m_3^2 g(V_3, V_3) &= \mp r^2 \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$m_2^2 + \varepsilon m_3^2 = \mp r^2 \tag{5.7.4}$$

elde edilir.

Tanım 5.7.3(Küresel Legendre Eğrileri) M, üç byutlu bir Sasaki uzayı ve $U \subset M$ de Legendre eğrisi olsun. $U \subset H_1^2$ veya $U \subset S_1^2$ ise, U ya M Sasaki uzayında küresel Legendre eğrisi denir.

Teorem 5.7.2: H_1^2 ve S_1^2, orijin merkezli küre ve $U \subset H_1^2$ veya $U \subset S_1^2$ küresel Legendre eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $s \in I$ yay parametresi olmak üzere

$$-m_i(s) = g(\alpha(s), V_i(s)) \quad (i = 1, 2) \text{ ve } -m_3(s) = \varepsilon g(\alpha(s), V_i(s)) \tag{5.7.5}$$

dir. Burada $\alpha(s)$ yi $\overrightarrow{O\alpha(s)}$ vektörü olarak düşünüyoruz.

İspat. $\forall s \in I$ için $\alpha(s) \in H_1^2$ veya $\alpha(s) \in S_1^2$ olduğundan $g(\alpha(s), \alpha(s)) = \mp r^2$ yazabiliriz. Son eşitlikte 's' ye göre türev alırsak

$$-m_1 = g(V_1, \alpha(s)) = 0$$

olur. Son eşitliğin tekrar türevini alırsak $\varkappa g(V_2, \alpha(s)) + 1 = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla

$$-m_2 = -\frac{1}{\varkappa} = g(V_2, \alpha(s)) \tag{5.7.6}$$

olur. (5.7.6) de tekrar türev alırsak

$$\begin{aligned} -m_2' &= g(V_2', \alpha(s)) + g(V_2, V_1) \\ &= g(-\varkappa V_1 + \varepsilon V_3, \alpha(s)) \\ &= -\varkappa g(V_1, \alpha(s)) + \varepsilon g(V_3, \alpha(s)) \end{aligned}$$

olur. Burada $m_2' = m_3$ ve $g(V_1, \alpha(s)) = 0$ olduğundan $-m_3 = \varepsilon g(V_3, \alpha(s))$ elde ederiz. Böylece ispat biter.

Teorem 5.7.3. H_1^2 ve S_1^2, orijin merkezli küre ve $U \subset H_1^2$ veya $U \subset S_1^2$ küresel Legendre eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda U eğrisinin her noktasındaki oskülatör küresi H_1^2 veya S_1^2 dir.

İspat. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s) \in U$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı

$$\{V_1 = T = \alpha', V_2 = N = \phi(\alpha'), V_3 = B = \xi\}$$

idi. $\alpha(s)$ noktasındaki Oskülatör kürenin merkezi Teorem 5.7.2 gereğince

$$a(s) = \alpha(s) + m_2 V_2 + m_3 V_3$$

dir. Bu ifadeyi, Teorem.5.7.2 gereğince

$$a(s) = \alpha(s) - g(V_2, \alpha(s))V_2 - \varepsilon g(V_3, \alpha(s))V_3 \tag{5.7.7}$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\alpha(s) = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$$

dersek

$$\lambda_1 = g(V_1, \alpha(s)) = 0, \lambda_2 = g(V_2, \alpha(s)) \text{ ve } \lambda_3 = \varepsilon g(V_3, \alpha(s))$$

olduğunu görürüz. Böylece

$$\alpha(s) = g(V_2, \alpha(s))V_2 + \varepsilon g(V_3, \alpha(s))V_3$$

olarak yazabiliriz. Son eşitliği (5.7.7) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} a(s) &= \alpha(s) - \alpha(s) \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise her noktadaki oskülatör küre ile eğrinin üzerinde yattığı kürenin merkezlerinin çakıştığını gösterir. Böylece ispat biter.

Teorem 5.7.4. M, üç boyutlu bir Sasaki uzay ve $U \subset M$ Legendre eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $g(\xi, \xi) = \varepsilon = 1$ iken $m_3 \neq 0$ ve $m_2 \neq 0$ veya $g(\xi, \xi) = \varepsilon = -1$ iken de $m_3 \neq ce^{\pm s}$ ve $m_2 \neq ce^{\pm s}$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör kürenin yarıçapı sabittir ancak ve ancak oskülatör kürelerin merkezleri aynıdır.

İspat. ($\Rightarrow$) Sonuç 5.7.1 gereğince $\alpha(s)$ noktasında Oskülatör kürenin yarıçapı '$r(s)$' ise (5.7.4) den $m_2^2 + \varepsilon m_3^2 = \mp r(s)^2$ dir. Burada $r(s)$ sabit ise son eşitlikte türev alırsak $m_2 m_2' + \varepsilon m_3' m_3 = 0$ elde ederiz. Burada $m_2' = m_3$yazarsak

$$\begin{aligned} m_2 m_3 + \varepsilon m_3' m_3 &= 0 \\ (m_2 + \varepsilon m_3') m_3 &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $m_3 \neq 0$ olduğundan

$$m_2 + \varepsilon m_3' = 0 \tag{5.7.8}$$

dır. Diğer taraftan $a(s) = \alpha(s) + m_2 V_2 + m_3 V_3$ eşitliğinde her iki tarafın türevini alıp Frenet formüllerini ve $m_2 = \dfrac{1}{\varkappa}$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
D_{\alpha'} a(s) &= V_1 + m_2' V_2 + m_2 V_2' + m_3' V_3 + m_3 V_3' \\
&= V_1 + m_3 V_2 + m_2(-\varkappa V_1 + \varepsilon V_3) + m_3' V_3 - m_3 V_2 \\
&= V_1 + m_3 V_2 - m_2 \varkappa V_1 + m_2 \varepsilon V_3 + m_3' V_3 - m_3 V_2 \\
&= V_1 + m_3 V_2 - \frac{1}{\varkappa} \varkappa V_1 + m_2 \varepsilon V_3 + m_3' V_3 - m_3 V_2 \\
&= V_1 + m_3 V_2 - V_1 + m_2 \varepsilon V_3 + m_3' V_3 - m_3 V_2 \\
&= (\varepsilon m_2 + m_3') V_3
\end{aligned}$$

olur. Son eşitliği düzenlediğimizde

$$D_{\alpha'} a(s) = \varepsilon \left(m_2 + \varepsilon m_3'\right) V_3 \tag{5.7.9}$$

elde ederiz. (5.7.8) den $D_{\alpha'} a(s) = 0$ olur. Böylece $\forall s \in I$ için $a(s) = k(sabit)$ çıkar.

$(\Leftarrow)\, \forall s \in I$ için $a(s) = k(sabit)$ olsun. Dolayısıyla $D_{\alpha'} a(s) = 0$ olur. (5.7.9) da $\left(m_2 + \varepsilon m_3'\right) V_3 = 0$ elde ederiz. Böylece $m_2 + \varepsilon m_3' = 0$ olur. Diğer taraftan (5.7.4) den $m_2^2 + \varepsilon m_3^2 = \mp r(s)^2$ idi. Burada yay parametresine göre türev alıp, $m_2' = m_3$ eşitliğini de kullanırsak

$$\begin{aligned}
\pm r \frac{dr}{ds} &= m_2 m_2' + \varepsilon m_3' m_3 \\
&= m_2 m_3 + \varepsilon m_3' m_3
\end{aligned}$$

olur. Son eşitliği düzenlersek

$$\pm r \frac{dr}{ds} = m_3 \left(m_2 + \varepsilon m_3'\right) \tag{5.7.10}$$

elde ederiz. $m_2 + \varepsilon m_3' = 0$ olduğundan ve (5.7.10) den $r\dfrac{dr}{ds} = 0$ olur. $g(\xi, \xi) = \varepsilon = 1$ iken $m_3 \neq 0$ ve $m_2 \neq 0$ veya $g(\xi, \xi) = \varepsilon = -1$ iken de $m_3 \neq ce^{\pm s}$ ve $m_2 \neq ce^{\pm s}$ olduğunda

$$r(s) = \sqrt{m_2^2 + \varepsilon m_3^2} \neq 0$$

olduğundan $r\dfrac{dr}{ds} = 0$ eşitliğinin sağlanabilmesi için $\dfrac{dr}{ds} = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $r(s)$ yarıçapı sabit olur. Böylece ispat biter.

Teorem 5.7.5. M, üç boyutlu bir Sasaki uzayı ve $U \subset M$ Legendre eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $g(\xi, \xi) = \varepsilon = 1$ iken $m_3 \neq 0$ ve $m_2 \neq 0$ veya $g(\xi, \xi) = \varepsilon = -1$ iken de $m_3 \neq ce^{\pm s}$ ve $m_2 \neq ce^{\pm s}$ olsun. Bu durumda U bir küresel eğridir ancak ve ancak $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Oskülatör kürelerin merkezleri aynı noktadır.

İspat. $(\Rightarrow)$ $U \subset H_1^2$ veya $U \subset S_1^2$ küresel Legendre eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Teorem 5.7.3 den her noktadaki Oskülatör küreler H_1^2 veya S_1^2 dir. Dolayısıyla her noktadaki Oskülatör kürelerin merkezleri aynıdır.
$(\Leftarrow)$ $\forall s \in I$ için $\alpha(s) \in U$ noktasındaki Oskülatör kürelerin merkezleri sabit bir 'b' olsun. O halde Teorem 5.7.4 gereğince Oskülatör kürelerin yarıçapları sabittir. Dolayısıyla $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktası Oskülatör küre üzerinde olduğundan ve Oskülatör kürelerin merkezleri ve yarıçapları sabit olduğundan eğrimiz Oskülatör küre üzerindedir. Yani $U \subset H_1^2$ veya $U \subset S_1^2$ dir.

Teorem 5.7.6. M, üç boyutlu bir Sasaki uzayı ve $U \subset M$ Legendre eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $g(\xi, \xi) = \varepsilon = 1$ iken $m_3 \neq 0$ ve $m_2 \neq 0$ veya $g(\xi, \xi) = \varepsilon = -1$ ikende $m_3 \neq ce^{\pm s}$ ve $m_2 \neq ce^{\pm s}$ olsun. Bu durumda U bir küresel eğridir ancak ve ancak

$$\varepsilon m_2 + m_3' = 0 \tag{5.7.11}$$

dır.

İspat.$(\Rightarrow)$ U bir küresel eğri olsun. Teorem 5.7.5 den Oskülatör kürelerin merkezleri

$\forall s \in I$ için sabittir. Bu durumda $D_{\alpha'} a(s) = 0$ olur. (5.7.9) den $\varepsilon\left(m_2 + \varepsilon m_3'\right) V_3 = 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(m_2 + \varepsilon m_3'\right) &= \varepsilon m_2 + m_3' \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

$(\Leftarrow)$ $\varepsilon m_2 + m_3' = 0$ olsun (5.7.9) den

$$\begin{aligned} D_{\alpha'} a(s) &= \varepsilon\left(m_2 + \varepsilon m_3'\right) V_3 \\ &= \left(\varepsilon m_2 + m_3'\right) V_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\forall s \in I$ için '$a(s)$' sabit olur. Teorem 5.7.5 den $U \subset M$ Legendre eğrisi küreseldir.

(5.7.11) Denkleminin Çözümü: (5.7.2) den $m_3 = m_2'$ olduğundan $m_3' = m_2''$ olur. Son eşitliği (5.7.11) da yerine yazarsak

$$m_2'' + \varepsilon m_2 = 0 \qquad (5.7.12)$$

elde edilir. Şayet $g(\xi, \xi) = \varepsilon = 1$ ise (5.7.12) diferansiyel denkleminin çözümü

$$m_2 = \frac{1}{\varkappa} = A \cos s + B \sin s \qquad (5.7.13)$$

olur. Eğer $g(\xi, \xi) = \varepsilon = -1$ ise denklem $m_2'' - m_2 = 0$ şeklinde olacağından bu diferansiyel denklemin çözümü için

$$m_2 = \frac{1}{\varkappa} = A \cosh s + B \sinh s \qquad (5.7.14)$$

elde edilir. Burada $m_3 \neq ce^{\pm s}$ ve $m_2 \neq ce^{\pm s}$ koşulundan dolayı $A \neq B$ olmalıdır.

5.8 $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki Uzayında Küresel Legendre Eğrileri

$M = R^3$ de $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ standart koordinatlar olsun ve $\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$ 1-formunu düşünelim. Burada $\xi = 2\dfrac{\partial}{\partial z}$ olduğu görülür. Ayrıca ϕ endomorfizmine karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon y & 0 \end{bmatrix}$$

dır ve 'g' metriğini

$$g = \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) + \varepsilon\eta \otimes \eta$$

olarak tanımlarsak bu metriğe karşılık gelen matris

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+\varepsilon y^2 & 0 & -\varepsilon y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon y & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

olur. Burada

$$e_1 = 2\frac{\partial}{\partial y}, e_2 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right), e_3 = \xi = 2\frac{\partial}{\partial z} \tag{5.8.1}$$

vektör alanlarının 'g' metriği altında ortogonal olduğunu görmek kolaydır. Burada $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(\xi)$ leri hesaplarsak

$$\begin{aligned} \phi(e_2) &= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -2\varepsilon\frac{\partial}{\partial y} \\ &= -\varepsilon\, e_1 \end{aligned}$$

olur ve benzer şekilde hesaplanırsa $\phi(e_1) = \varepsilon e_2, \phi(\xi) = 0$ olduğu görülür. Burada

$$\nabla_{e_2} e_1 = -\xi, \nabla_{e_1} e_2 = \xi, \nabla e_1\xi = \nabla_\xi e_1 = -\varepsilon e_2, \nabla_{e_2}\xi = \nabla_\xi e_2 = \varepsilon e_1$$

olduğu görülür. Kabul edelim ki $X = (x, y, z)$ Kontak küre üzerindeki herhangi bir nokta olsun. Böylece $g(X, X) = \pm r^2$ olacaktır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} g(X,X) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\varepsilon y^2 & 0 & -\varepsilon y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon y & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+\varepsilon xy^2-\varepsilon yz \\ y \\ -\varepsilon xy+\varepsilon z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\left(x^2+\varepsilon x^2y^2-\varepsilon xyz+y^2-\varepsilon xyz+\varepsilon z^2\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında orijin merkezli küre denklemi

$$x^2 + y^2 + \varepsilon z^2 + \varepsilon x^2 y^2 - 2\varepsilon xyz = r^2 \tag{5.8.2}$$

olur. Ayrıca yay parametresi ile verilen Legendre eğrisi

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow R^3(-3\varepsilon) \\ s &\longrightarrow \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)) \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Böylece $\dot{\gamma}(s) = \left(\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s)\right)$ veya

$$\dot{\gamma}(s) = \dot{x}(s)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}(s)\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}(s)\frac{\partial}{\partial z} \tag{5.8.3}$$

olur. (5.8.1) den

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}(e_2 - y\xi), \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}e_1, \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\xi \tag{5.8.4}$$

dır. (5.8.4) eşitliklerini (5.8.3) de yerlerine yazarsak

$$\dot{\gamma}\ (s) = \dot{x}\ (s)\frac{1}{2}\,(e_2 - y\xi) + \dot{y}\ (s)\frac{1}{2}\,e_1 + \dot{z}\ (s)\frac{1}{2}\xi$$

ve

$$\dot{\gamma}\ (s) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}\ e_2 + \dot{y}\ \ e_1 + \left[\dot{z}\ - y\ \dot{x}\right]\xi\right) \tag{5.8.5}$$

elde edilir. Böylece

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}\ \eta(\ e_2) + \dot{y}\ \eta(\ e_1) + \left[\dot{z}\ - y\ \dot{x}\right]\eta(\xi)\right)$$

olur. Burada $\eta(\ e_1) = \eta(\ e_2) = 0$ ve $\eta(\xi) = 1$ olduğunu görmek kolaydır. Eğrimiz Legendre eğrisi ise $\eta(\dot{\gamma}) = 0$ olmalıdır. Böylece $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında legendre eğrisi olma koşulu

$$\dot{z}\ - y\ \dot{x} = 0 \tag{5.8.6}$$

dir. Eğrimiz şayet küre üzerinde Legendre eğrisi ise (5.8.2) ve (5.8.6) eşitliklerini sağlamalıdır. Ayrıca küre merkezi $a(s)$ olmak üzere γ eğrisi bir küresel eğri ise

$$a(s) = \gamma(s) + m_2V_2 + m_3V_3$$

eşitliği sağlanır. Burada küre orijin merkezli ise $a(s) = O$ dır. Böylece

$$\gamma(s) = -m_2V_2 - m_3V_3 \tag{5.8.7}$$

olur. Burada $V_2 = \phi\ \dot{\gamma}$ ve $V_3 = \xi$ dir. (5.8.5) ve (5.8.6) den $\dot{\gamma}\ (s) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}\ \ e_2 + \dot{y}\ \ e_1\right)$ olur. Böylece

$$\phi\ \dot{\gamma} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}\ \phi(\ e_2) + \dot{y}\ \phi(\ e_1)\right)$$

ve

$$\phi\ \dot{\gamma} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon\ \dot{y}\ \ e_2 - \varepsilon\ \dot{x}\ \ e_1\right) \tag{5.8.8}$$

elde edilir. (5.8.7) de $a = -m_2$ ve $b = -m_3$ dersek

$$(x(s), y(s), z(s)) \;\; = \;\; a\frac{1}{2}\left(\varepsilon\ \dot{y}\ \ e_2 - \varepsilon\ \dot{x}\ \ e_1\right) + b\xi$$

$$= \frac{\varepsilon a \overset{\cdot}{y}}{2} e_2 - \frac{\varepsilon a \overset{\cdot}{x}}{2} e_1 + b\xi$$

olur. (5.8.1) den ve

$$(x(s), y(s), z(s)) = x(s)\frac{\partial}{\partial x} + y(s)\frac{\partial}{\partial y} + z(s)\frac{\partial}{\partial z}$$

eşitliğini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} x(s)\frac{\partial}{\partial x} + y(s)\frac{\partial}{\partial y} + z(s)\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\varepsilon a \overset{\cdot}{y}}{2} 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\varepsilon a \overset{\cdot}{x}}{2} 2\frac{\partial}{\partial y} + 2b\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \varepsilon a \overset{\cdot}{y} \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon a \overset{\cdot}{x} \frac{\partial}{\partial y} + \left(2b + \varepsilon a y \overset{\cdot}{y}\right) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

ve

$$x(s)\frac{\partial}{\partial_x} + y(s)\frac{\partial}{\partial_y} + z(s)\frac{\partial}{\partial_z} = \varepsilon a \overset{\cdot}{y} \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon a \overset{\cdot}{x} \frac{\partial}{\partial y} + \left(2b + \varepsilon a y \overset{\cdot}{y}\right) \frac{\partial}{\partial z} \tag{5.8.9}$$

eşitliğini elde ederiz. $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ doğal bazın lineer bağımsızlığından

$$x = \varepsilon a \overset{\cdot}{y} \tag{5.8.10}$$

$$y = -\varepsilon a \overset{\cdot}{x} \tag{5.8.11}$$

$$z = 2b + \varepsilon a y \overset{\cdot}{y} \tag{5.8.12}$$

denklemlerine ulaşırız. (5.8.10) ve (5.8.11) eşitliklerini oranlarsak

$$x \overset{\cdot}{x} + y \overset{\cdot}{y} = 0$$

ve bu diferansiyel denklemi çözersek 'c' sabit olmak üzere

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{5.8.13}$$

eşitliğine ulaşırız. Ayrıca $A = -A_1$ve $B = -B_1$ dersek

$$\begin{aligned} a &= -m_2 = A\cos s + B\sin s, (\ \varepsilon = 1 \text{ için}) \qquad (5.8.14) \\ a &= -m_2 = A\cosh s + B\sinh s, \ (\varepsilon = -1 \text{ için}) \end{aligned}$$

dir. (5.7.2) den

$$\dot{a} = b \text{ ve } \dot{b} = -\varepsilon a \qquad (5.8.15)$$

olur. (5.8.12) ve (5.8.15) den

$$\dot{z} = -2\varepsilon a + \varepsilon \, \dot{a} \, y \, \dot{y} + \varepsilon a (\dot{y})^2 + \varepsilon a y \, \ddot{y} \qquad (5.8.16)$$

elde edilir. (5.8.6) ve (5.810) dan

$$\dot{z} = \varepsilon \, \dot{a} \, y \, \dot{y} + \varepsilon a y \, \ddot{y} \qquad (5.8.17)$$

olur. Böylece (5.8.16) ve (5.8.17) den

$$\varepsilon a (\dot{y})^2 - 2\varepsilon a = 0$$

ve

$$y = \pm\sqrt{2}s + c_0$$

elde edilir. Böylece (5.8.1) den

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{2}a \qquad (5.8.18) \\ z &= 2b \pm \sqrt{2}\varepsilon a \left(\pm\sqrt{2}s + c_0\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. $\varepsilon = 1$ için (5.8.17) ve (5.8.18) deki değerleri (5.8.13) de yerlerine yazarsak

$$2\left(A\cos s + B\sin s\right)^2 + \left(\pm\sqrt{2}s + c_0\right)^2 = c^3 \qquad (5.8.19)$$

ve $\varepsilon = -1$ için

$$2\left(A\cosh s + B\sinh s\right)^2 + \left(\pm\sqrt{2}s + c_0\right)^2 = c^3 \qquad (5.8.20)$$

elde ederiz. (5.8.19) ve (5.8.20) eşitliklerinin ya reel çözümü yoktur veya bir ile birden çok reel çözümler elde edilebilir. Yani bu denklemlerden bir parametreye bağlı reel çözüm bulmamız mümkün değildir. Sonuç olarak üç boyutlu Sasaki uzayında kontak küre üzerinde genel olarak Legendre eğrisi reel değildir.

5.9 $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki Uzayda Silindirde Yatan Legendre Eğrileri

$R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $N^2(c)$ silindirini

$$\begin{aligned} N^2(c) &= \left\{u = (x, y, z) \in R^3(-3\varepsilon) : g(u - u_0, u - u_0) - \varepsilon\left(\eta(u - u_0)\right)^2 = c^2\right\} \\ &= \left\{u = (x, y, z) \in R^3(-3\varepsilon) : \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right) = c^2\right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlarız (Baikousis 1991).

Teorem 5.9.1. *M manifoldu $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $N^2(c)$ silindirinde yatan birim hızlı Legendre eğrisinin genel denklemi*

$$\gamma(s) = \left(\frac{2}{c_1}\cos\theta(s) + x_0, \frac{2}{c_1}\sin\theta(s) + y_0, \frac{2}{c_1^2}\sin 2\theta(s) - \frac{2}{c_1^2}\theta(s) + \frac{2y_0}{c_1}\cos\theta(s) + z_0\right) \tag{5.9.1}$$

dir. Burada x_0, y_0, z_0, c_1 sabit ve $\theta(s) = c_1 s + c_2$ şeklindedir (Baikousis 1994).

İspat. M manifoldu $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayda $N^2(c)$ silindirinde yatan ve (I, γ) birim koordinat komşuluğu ile verilen Legendre eğrisi olsun. Eğrimizin yay parametresi 's' ve $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ dersek $N^2(c)$ nin tanımından

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (2c)^2$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} x(s) &= 2c\cos\theta(s) + x_0 \\ y(s) &= 2c\sin\theta(s) + y_0 \end{aligned}$$

ve

$$\gamma(s) = (2c\cos\theta(s) + x_0, 2c\sin\theta(s) + y_0, z(s))$$

şeklin yazabiliriz. Eğer M eğrisi $R^3(-3\varepsilon)$ de Legendre eğrisi ise $\eta(\gamma'(t)) = 0$ dır. $R^3(-3\varepsilon)$ de Legendre eğri olma şartı

$$z'(s) = y(s)x'(s)$$

idi. Böylece

$$\begin{aligned} z^{'}(s) &= (2c\sin\theta(s) + y_0)(-2c\theta^{'}(s)\sin\theta(s)) \\ z^{'}(s) &= -4c^2\theta^{'}(s)\sin^2\theta(s) - 2cy_0\theta^{'}(s)\sin\theta(s) \end{aligned}$$

integre edersek

$$z(t) = c^2\sin 2\theta(s) - 2c^2\theta(s) + 2cy_0\cos\theta(s) + z_0$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$\gamma(s) = \left(2c\cos\theta(s) + x_0, 2c\sin\theta(s) + y_0, c^2\sin 2\theta(s) - 2c^2\theta(s) + 2cy_0\cos\theta(s) + z_0\right)$$

olur. Burada x_0, y_0, z_0, c ler sabittir. Şayet eğrimiz birim hızlı ise

$$\begin{aligned} \|\gamma'(s)\|^2 &= g(\gamma'(s), \gamma'(s)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\gamma'(t) = \left(-2c\theta^{'}(s)\sin\theta(s), 2c\theta^{'}(s)\cos\theta(s), -4c^2\theta^{'}(s)\sin^2 t - 2cy_0\theta^{'}(s)\sin\theta(s)\right)$$

olduğundan

$$g(\gamma'(s), \gamma'(s)) = \frac{1}{4}\left((dx(\gamma'(s)))^2 + (dy(\gamma'(s)))^2\right) + \varepsilon\left(\eta(x'(s))\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left((dx(\gamma'(s)))^2 + (dy(\gamma'(s)))^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(-2c\theta^{'}(s)\sin\theta(s)\right)^2 + \left(2c\theta^{'}(s)\cos\theta(s)\right)^2\right) \\
&= c^2\left(\theta^{'}(s)\right)^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $\|\gamma'(s)\| = c\theta^{'}(s) = 1$ olduğundan $\theta^{'}(s) = \dfrac{1}{c}$ sonucuna ulaşırız. $\dfrac{1}{c} = c_1$ dersek

$$\theta(s) = c_1 s + c_2$$

elde edilir. Böylece $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $N^2(c)$ silindirinde yatan birim hızlı Legendre eğrisinin genel denklemini $c = \dfrac{1}{c_1}$ yazarsak

$$\gamma(s) = \left(\frac{2}{c_1}\cos\theta(s) + x_0, \frac{2}{c_1}\sin\theta(s) + y_0, \frac{2}{c_1^2}\sin 2\theta(s) - \frac{2}{c_1^2}\theta(s) + \frac{2y_0}{c_1}\cos\theta(s) + z_0\right)$$

olarak buluruz.

Sonuç 5.9.1. (5.1.19) dan, $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında her hangi birim hızlı Legendre eğrisinin birinci eğriliğinin

$$\varkappa = \left|\theta^{'}(s)\right|$$

olduğunu biliyoruz. Böylece $\varkappa = \left|\theta^{'}(s)\right| = c_1(\text{sabit})$ olur. Sonuç olarak $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $N^2(c)$ silindirinde yatan herhangi bir Legendre eğrisi sabit eğriliklidir (Baikousis 1994).

Teorem 5.9.2. $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $N^2(c)$ silindirinde yatan herhangi bir M Legendre eğrisi 1-tipdendir (Baikousis 1994).

İspat. Teorem 5.9.1 den herhangi bir birim hızlı Legendre eğrisi $\gamma_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve $\theta(s) = c_1 s + c_2$ olmak üzere

$$\gamma(s) = \gamma_0 + \left(\frac{2}{c_1}\cos\theta(s), \frac{2}{c_1}\sin\theta(s), \frac{2}{c_1^2}\sin 2\theta(s) - \frac{2}{c_1^2}\theta(s) + \frac{2y_0}{c_{1\,0}}\cos\theta(s)\right)$$

olarak verilebilir. Böylece

$$\gamma'(s) = \left(-2\sin\theta(s), 2\cos\theta(s), \frac{4}{c_1}\cos 2\theta(s) - \frac{2}{c_1} - 2y_0 \sin\theta(s) \right)$$

dır. $\|\gamma'(s)\| = 1$ olduğundan

$$X_1 = \gamma'(s) = \left(-2\sin\theta(s), 2\cos\theta(s), \frac{4}{c_1}\cos 2\theta(s) - \frac{2}{c_1} - 2y_0 \sin\theta(s) \right)$$

olur. ∇ bu eğri üzerinde konneksiyon olmak üzere, her eğri kendi üzerinde geodezik olduğundan $\nabla_{X_1} X_1 = 0$ dır. Böylece

$$\overline{\nabla}_{X_1} X_1 = \nabla_{X_1} X_1 + B(X_1, X_1)$$

ise

$$\overline{\nabla}_{X_1} X_1 = B(X_1, X_1)$$

elde edilir Ayrıca M nin Laplasiyeni $X_1 = \gamma'(s)$ olduğundan

$$\Delta f = -X_1 X_1 f = -f''$$

dir. Burada $f \in C^\infty(M)$ dir. (5.9.4) den ve

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}e_1, \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{1}{2}e_2 - y\frac{1}{2}\xi \right), \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\xi$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \gamma(s) - \gamma_0 &= \frac{2}{c_1}\cos\theta(s)\left(\frac{1}{2}e_2 - y\frac{1}{2}\xi \right) + \frac{2}{c_1}\sin\theta(s)\left(\frac{1}{2}e_1 \right) \\ &\quad + \left(\frac{4}{c_1}\cos 2\theta(s) - \frac{2}{c_1} - 2y_0\sin\theta(s) \right)\frac{1}{2}\xi \\ &= \frac{1}{c_1}\sin\theta(s)e_1 + \frac{1}{c_1}\cos\theta(s)e_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{c_1}\cos 2\theta(s) - \frac{2}{c_1} - 2y_0\sin\theta(s) \right) - y\frac{1}{c_1}\cos\theta(s) \right)\xi \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$g(\gamma(s)-\gamma_0,e_1)=\frac{1}{c_1}\sin\theta(s) \text{ ve } g(\gamma(s)-\gamma_0,e_2)=\frac{1}{c_1}\cos\theta(s)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\Delta g(\gamma(s)-\gamma_0,e_1) &= -\left(\frac{1}{c_1}\sin\theta(s)\right)'' \\ &= -\left(\cos\theta(s)\right)' \\ &= c_1\sin\theta(s)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Delta g(\gamma(s)-\gamma_0,e_2) &= -\left(\frac{1}{c_1}\cos\theta(s)\right)'' \\ &= \sin\theta(s) \\ &= c_1\cos\theta(s)\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak

$$\Delta g(\gamma(t)-\gamma_0,e_A)=\frac{1}{c_1^2}g(\gamma(s)-\gamma_0,e_A),\ \ (A=1,2)$$

elde ederiz. Bunun manası M eğrisi 1-tipdendir. Böylece Örnek 5.3.1, Sonuç 5.10.1 ve Teorem 5.10.2 nin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.9.3. $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ eğrisi $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $N^2(c)$ silindirinde yatan herhangi bir regüler Legendre eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki özelikler sağlanır.

i) γ eğrisi sabit eğrlilikli bir eğridir.

ii) γ eğrisi sonlu tipli eğridir.

iii) γ eğrisi 1-tipli eğridir.

iv) γ eğrisi helisdir eğrisidir.

5.11 $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında Silindirde Yatan Keyfi Eğriler

Teorem 5.10.1. *M manifoldu $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $N^2(c)$ silindirinde yatan 1-tipden eğri ise sabit eğriliklidir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Yani $N^2(c)$ silindirinde yatan sabit eğirilikli her eğri 1-tipden değildir.*

İspat. M manifoldu $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $N^2(c)$ silindirinde yatan, (I,γ) birim koordinat komşuluğu ile verilen ve yay parametresi 's' olan bir eğri olsun.

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

dersek $N^2(c)$ nin tanımından

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (2c)^2$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} x(s) &= 2c\cos\theta(s) + x_0 \\ y(s) &= 2c\sin\theta(s) + y_0 \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Böylece eğrimiz $\gamma(s) = (2c\cos\theta(s) + x_0, 2c\sin\theta(s) + y_0, z(s) + z_0)$ şeklindedir. Türev alırsak

$$\gamma'(s) = \left(-2c\theta^{'}(s)\sin\theta(s), 2c\theta^{'}(s)\cos\theta(s), z'(s)\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Şayet $g(\gamma'(t), \gamma'(t))$ değerini hesaplarsak

$$\begin{aligned} g(\gamma'(s), \gamma'(s)) &= \frac{1}{4}\left((dx(\gamma'(s)))^2 + (dy(\gamma'(s)))^2\right) + \varepsilon\,(\eta(\gamma'(s)))^2 \\ &= \frac{1}{4}\left((dx(\gamma'(s)))^2 + (dy(\gamma'(s)))^2\right) + \varepsilon\,(\eta(\gamma'(s)))^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(-2c\theta^{'}(s)\sin\theta(s)\right)^2 + \left(2c\theta^{'}(s)\cos\theta(s)\right)^2\right) + \varepsilon\,(\eta(\gamma'(s)))^2 \\ &= c^2\left(\theta^{'}(s)\right)^2 + \varepsilon\,(\eta(\gamma'(s)))^2 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\eta(\gamma'(s)) &= (dz - ydx)\left(-2c\theta^{'}(s)\sin\theta(s), 2c\theta^{'}(s)\cos\theta(s), z'(s)\right) \\
&= z'(s) - (2c\sin\theta(s) + y_0)\left(-2c\theta^{'}(s)\sin\theta(s)\right) \\
&= z'(s) + 4c^2\theta^{'}(s)\sin^2\theta(s) + 2cy_0\theta^{'}(s)\sin\theta(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer

$$a = z'(s) + 4c^2\theta^{'}(s)\sin^2\theta(s) + 2cy_0\theta^{'}(s)\sin\theta(s)$$

dersek ve şayet eğrimiz birim hızlı ise $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 1$ ve

$$c^2\left(\theta^{'}(s)\right)^2 + \varepsilon a^2 = 1$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = 1$ ise

$$a = \sqrt{1 - c^2\left(\theta^{'}(s)\right)^2} \tag{5.10.1}$$

$\varepsilon = -1$ ise

$$a = \sqrt{c^2\left(\theta^{'}(s)\right)^2 - 1} \tag{5.10.2}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \left(x^{'}(s), y^{'}(s), z^{'}(s)\right) \\
&= x^{'}(s)\frac{\partial}{\partial x} + y^{'}(s)\frac{\partial}{\partial y} + z^{'}(s)\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \tag{5.10.3}$$

dir. Burada

$$e_1 = 2\frac{\partial}{\partial y}, e_2 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right), e_3 = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}e_1, \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(e_2 - y\xi\right), \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\xi \tag{5.10.4}$$

olur. (5.10.4) eşitliklerini (5.10.3) de yerlerine yazarsak

$$\gamma'(s) = x^{'}(s)\frac{1}{2}\left(e_2 - y\xi\right) + y^{'}(s)e_1 + \frac{1}{2}z^{'}(s)\xi$$

ve

$$\gamma'(s) = \frac{1}{2}\left(y^{'}(s)e_1 + x^{'}(s)e_2 + a\xi\right) \tag{5.10.5}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma' &= \frac{1}{2}\left(y^{''}(s)e_1 + x^{''}(s)e_2 + a^{'}\xi\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(y^{'}(s)\overline{\nabla}_{\gamma'}e_1 + x^{'}(s)\overline{\nabla}_{\gamma'}e_2 + a\overline{\nabla}_{\gamma'}\xi\right) \end{aligned} \tag{5.10.6}$$

olur. Burada ikinci tarafı hesaplarsak

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\gamma'}e_1 &= x^{'}\overline{\nabla}_{e_2}e_1 + a\overline{\nabla}_{\xi}e_1 \\ &= -x^{'}\xi - \varepsilon a e_2 \end{aligned} \tag{5.10.7}$$

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\gamma'}e_2 &= y^{'}\overline{\nabla}_{e_1}e_2 + a\overline{\nabla}_{\xi}e_2 \\ &= y^{'}\xi + \varepsilon a e_1 \end{aligned} \tag{5.10.8}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\gamma'}\xi &= y^{'}\overline{\nabla}_{e_1}\xi + x^{'}\overline{\nabla}_{e_2}\xi \\ &= -\varepsilon y^{'}e_2 + \varepsilon x^{'}e_1 \end{aligned} \tag{5.10.9}$$

dir. (5.10.7), (5.10.8) ve (5.10.9) eşitliklerini (5.10.6) de yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma' &= \frac{1}{2}\left(y^{''}e_1 + x^{''}e_2 + a^{'}\xi + 2\varepsilon x^{'}e_1 - 2\varepsilon y^{'}e_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(y^{''} + 2\varepsilon a x^{'}\right)e_1 + \left(x^{''} - 2\varepsilon a y^{'}\right)e_2 + a^{'}\xi\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece birinci eğrilik $\varkappa = \left\| \overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma' \right\|$ olduğundan

$$\varkappa^2 = \frac{1}{4} \left\{ \left(y^{''} + 2\varepsilon a x^{'} \right)^2 + \left(x^{''} - 2\varepsilon a y^{'} \right)^2 + \varepsilon a^2 \right\} \tag{5.10.10}$$

olur. (5.10.10) eşitliğini düzenlersek

$$\varkappa^2 = \frac{1}{4} \left\{ \left(y^{''} \right)^2 + \left(x^{''} \right)^2 + 4a^2 \left(\left(x^{'} \right)^2 + \left(y^{'} \right)^2 \right) + 2\varepsilon a (y^{''} x^{'} - x^{''} y^{'}) + \varepsilon a^2 \right\} \tag{5.10.11}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} x^{'} &= -2c\theta^{'} \sin\theta \text{ ve } \ddot{x} = -2c\theta^{''} \sin\theta - 2c \left(\theta^{'} \right)^2 \cos\theta \\ y^{'} &= 2c\theta^{'} \cos\theta \text{ ve } y^{''} = 2c\theta^{''} \cos\theta - 2c \left(\theta^{'} \right)^2 \sin\theta \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left(y^{''} \right)^2 + \left(x^{''} \right)^2 = 4c^2 \left(\left(\theta^{''} \right)^2 + \left(\theta^{'} \right)^4 \right) \tag{5.10.12}$$

$$\left(y^{'} \right)^2 + \left(x^{'} \right)^2 = 4c^2 \left(\theta^{'} \right)^2 \tag{5.10.13}$$

$$\begin{aligned} y^{''} x^{'} - x^{''} y^{'} &= -\left(y^{'} \right)^2 \left(\frac{x^{'}}{y^{'}} \right)^{'} \\ &= 4c^2 \left(\theta^{'} \right)^2 \cos^2\theta (\theta^{'} (1 + \tan^2\theta)) \end{aligned}$$

ve

$$y^{''} x^{'} - x^{''} y^{'} = 4c^2 \left(\theta^{'} \right)^3 \tag{5.10.14}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = 1$ için (5.10.1), (5.10.12), (5.10.13) ve (5.10.14) ü (5.10.11) de yerlerine yazarsak

$$\varkappa^2 = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} 4c^2 \left(\left(\theta^{''} \right)^2 + \left(\theta^{'} \right)^4 \right) + 16c^2 \left(\theta^{'} \right)^2 \left(1 - c^2 \left(\theta^{'} \right)^2 \right) \\ +8c^2 \left(\theta^{'} \right)^3 \sqrt{1 - c^2 \left(\theta^{'} \right)^2} + \dfrac{c^4 \left(\theta^{'} \right)^2 \left(\theta^{''} \right)^2}{1 - c^2 \left(\theta^{'} \right)^2} \end{array} \right\} \tag{5.10.15}$$

ve $\varepsilon = -1$ için (5.10.2), (5.10.12), (5.10.3) ve (5.10.14) ü (5.10.11) de yerlerine yazarsak

$$\varkappa^2 = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{c} 44c^2\left(\left(\theta''\right)^2 + \left(\theta'\right)^4\right) + 16c^2\left(\theta'\right)^2\left(c^2\left(\theta'\right)^2 - 1\right) \\ -8c^2\left(\theta'\right)^3\sqrt{c^2\left(\theta'\right)^2 - 1} - \dfrac{c^4\left(\theta'\right)^2\left(\theta''\right)^2}{c^2\left(\theta'\right)^2 - 1} \end{array}\right\} \tag{5.10.16}$$

olur. Şayet eğrimiz 1-tipden ise

$$\begin{aligned} \Delta g(\gamma - \gamma_0, e_1) &= \lambda g(\gamma - \gamma_0, e_1) \\ \Delta g(\gamma - \gamma_0, e_2) &= \lambda g(\gamma - \gamma_0, e_2) \end{aligned} \tag{5.10.17}$$

olmalıdır. $X_1 = \gamma'$ olmak üzere eğrimiz birim hızlı eğri ve her eğri kendi üzerinde geodezik olduğundan Laplas denklemi $\Delta f = -X_1X_1f = -f''$ olur. Burada .

$$\begin{aligned} \gamma(s) - \gamma_0 &= 2c\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + 2c\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \\ &= 2c\cos\theta\left(\frac{1}{2}e_2 - y\frac{1}{2}\xi\right) + 2c\sin\theta\left(\frac{1}{2}e_1\right) + z\frac{1}{2}\xi \\ &= c\sin\theta e_1 + c\cos\theta e_2 + \left(\frac{z}{2} - cy\cos\theta\right)\xi \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} g(\gamma - \gamma_0, e_1) &= c\sin\theta \\ g(\gamma - \gamma_0, e_2) &= c\cos\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\Delta f = -f''$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \Delta g(\gamma - \gamma_0, e_1) &= c\theta''\cos\theta - c\left(\theta'\right)^2\sin\theta \\ \Delta g(\gamma - \gamma_0, e_2) &= -c\theta''\sin\theta - c\left(\theta'\right)^2\cos\theta \end{aligned}$$

elde edilir. (5.10.16) dan

$$c\theta''\cos\theta - c\left(\theta'\right)^2\sin\theta = \lambda c\sin\theta \tag{5.11.18}$$

ve

$$-c\theta^{''}\sin\theta - c\left(\theta^{'}\right)^{2}\cos\theta = \lambda c\cos\theta \qquad (5.11.19)$$

olur. (5.10.18) eşitliğini cosθ ile (5.10.19) eşitliğini de -sin θ ile çarpıp toplarsak $\theta^{''} = 0$ ve $\theta^{'} = \mu$(sabit) çıkar. (5.10.15) ve (5.10.16) dan eğrimizin birinci eğriliğinin sabit olduğu görülür. Dolayısıyla $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $N^2(c)$ silindirinde yatan her 1-tipden eğri sabit eğriliklidir. Acaba bunun tersi doğru mudur? Kabul edelim ki eğrimiz sabit eğrilikli ve $\varkappa = k$ (sabit) olsun. $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $\varepsilon = 1$ ve $N^2(c)$ silindirinde $c = 1$ alalım. Eğrimizin 1-tipden olabilmesi için $\dot{\theta}$ nın sabit olması gerekir. Şimdi $s = F(y)$ ve $\theta^{'}(s) = y$ ve $-1\langle y, y_0\langle 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F &: (-1,1) \longrightarrow F(-1,1) \\ y &\longrightarrow F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\sqrt{4-3u^2}du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{k^2+12u^4-16u^3-8u^3\sqrt{1-u^2}}} \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Burada $F(y_0) = 0$ dır. Ayrıca

$$F'(y) = \frac{\sqrt{4-3y^2}}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{k^2+12y^4-16y^3-8y^3\sqrt{1-y^2}}}\rangle 0$$

olduğundan monoton artandır. Böylece F fonksiyonu birebirdir. Dolayısıyla tersi vardır ve türevlenebilirdir. Böylece $s, s_0 \in F(-1,1)$ için

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} F^{-1}(u)du$$

olarak tanımlarsak $\varkappa = k$ (sabit) olur. Fakat $\theta^{'}(s)$ sabit olmadığından eğrimiz 1-tipden olmaz.

Sonuç 5.10.1. M manifoldu $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $N^2(c)$ silindirinde yatan ve (I,γ) birim koordinat komşuluğu ile verilen sonlu 1-tipden bir eğri olsun.

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

dersek bu eğrinin genel denklemi

$$\begin{aligned} x(s) &= 2c\cos\theta(s) + x_0 \\ y(s) &= 2c\sin\theta(s) + y_0 \end{aligned}$$

$$\gamma(s) = (2c\cos(c_1 s + c_2) + x_0, 2c\sin(c_1 s + c_2) + y_0, z(s))$$

şeklindedir.

Teorem 5.10.2. *M* manifoldu $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $N^2(c)$ silindirinde yatan ve (I, γ) birim koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.
1) γ eğrisi 1-tipli eğridir.
2) γ eğrisi sonlu tipli eğridir.

İspat. M manifoldu $R^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $N^2(c)$ silindirinde yatan ve (I, γ) birim koordinat komşuluğu ile verilen sonlu k-tipden bir eğri olsun. $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ dersek $N^2(c)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} x(s) &= 2c\cos\theta(s) + x_0 \\ y(s) &= 2c\sin\theta(s) + y_0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(\gamma - \gamma_0, e_1) &= c\sin\theta \\ g(\gamma - \gamma_0, e_2) &= c\cos\theta \end{aligned} \tag{5.10.20}$$

olduğunu Teorem 5.10.1. den biliyoruz. $\gamma(s)$ eğrisi sonlu k-tipden bir eğri olduğundan

$$\phi^2(\gamma(s) - \gamma_0) = \phi^2\gamma_1(s) + \phi^2\gamma_2(s) + ... + \phi^2\gamma_k(s) \tag{5.10.21}$$

ve

$$\begin{aligned} \Delta g(\gamma_i, e_1) &= \lambda_i g(\gamma_2, e_1) \\ \Delta g(\gamma_i, e_2) &= \lambda_i g(\gamma_2, e_2) \end{aligned} \tag{5.10.22}$$

şeklinde $\gamma_1(s), \gamma_2(s), , \gamma_k(s)$ eğrileri vardır. $f = g(\gamma_i, e_A)$ $(A = 1, 2$ ve $i = 1, 2, ..., k)$ için $\Delta f = -f''$ olduğunu biliyoruz. (5.10.22) den

$$f'' + \lambda_i f = 0 \tag{5.10.23}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu denklemi çözersek

$$\begin{aligned} g(\gamma_i, e_1) &= A_{i1}\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right) + A_{i2}\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right) \\ g(\gamma_i, e_2) &= B_{i1}\cos\left(\sqrt{\lambda_i}s\right) + B_{i2}\sin\left(\sqrt{\lambda_i}s\right) \end{aligned}$$

ve

$$\gamma_i(s) = \left(A_{i1}\cos\sqrt{\lambda_i}s + A_{i2}\sin\sqrt{\lambda_i}s\right)e_1 + \left(B_{i1}\cos\sqrt{\lambda_i}s + B_{i2}\sin\sqrt{\lambda_i}s\right)e_2 + \varphi\,\xi$$

olur. (5.10.21) den

$$\begin{aligned} g(\gamma - \gamma_0, e_1) &= \sum_{i=1}^{k}\left(A_{i1}\cos\sqrt{\lambda_i}s + A_{i2}\sin\sqrt{\lambda_i}s\right) \\ g(\gamma - \gamma_0, e_2) &= \sum_{i=1}^{k}\left(B_{i1}\cos\sqrt{\lambda_i}s + B_{i2}\sin\sqrt{\lambda_i}s\right) \end{aligned} \tag{5.10.24}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.10.20) ve (5.10.24) den

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\left(A_{i1}\cos\sqrt{\lambda_i}s + A_{i2}\sin\sqrt{\lambda_i}s\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k}\left(B_{i1}\cos\sqrt{\lambda_i}s + B_{i2}\sin\sqrt{\lambda_i}s\right)\right)^2 = c^2$$

dir. Son eşitlikte her iki tarafının türevini alırsak

$$\left\{\begin{array}{c} \sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt{\lambda_j}\left(A_{i1}\cos\sqrt{\lambda_i}s+A_{i2}\sin\sqrt{\lambda_i}s\right)\left(-A_{j1}\sin\sqrt{\lambda_j}s+A_{j2}\cos\sqrt{\lambda_j}s\right) \\ +\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt{\lambda_j}\left(B_{i1}\cos\sqrt{\lambda_i}s+B_{i2}\sin\sqrt{\lambda_i}s\right)\left(-B_{j1}\sin\sqrt{\lambda_j}s+B_{j2}\cos\sqrt{\lambda_j}s\right)=0 \end{array}\right\}$$

olur. Böylece

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\left[\sqrt{\lambda_j}\left(\begin{array}{c} -(A_{i1}A_{j1}+B_{i1}B_{j1})\cos\sqrt{\lambda_i}s\sin\sqrt{\lambda_j}s \\ +(A_{i1}A_{j2}+B_{i1}B_{j2})\cos\sqrt{\lambda_i}s\cos\sqrt{\lambda_j}s \\ -(A_{i2}A_{j1}+B_{i2}B_{j1})\sin\sqrt{\lambda_i}s\sin\sqrt{\lambda_j}s \\ +(A_{i2}A_{j2}+B_{i2}B_{j2})\sin\sqrt{\lambda_i}s\cos\sqrt{\lambda_j}s \end{array}\right)\right]=0 \tag{5.10.25}$$

eşitliği elde edilir. (5.10.25) de $i=j$ ve $i\neq j$ durumlarını irdelersek

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt{\lambda i}\left((A_{i1}A_{i2}+B_{i1}B_{i2})\cos 2\sqrt{\lambda_i}s+\frac{1}{2}(A_{i2}^2+B_{i2}^2-A_{i1}^2-B_{i1}^2)\sin 2\sqrt{\lambda_i}s\right) \\ +\sum\limits_{i\neq j}^{k}\left(-\sqrt{\lambda_j}(A_{i1}A_{j1}+B_{i1}B_{j1})+\sqrt{\lambda_i}(A_{i2}A_{j2}+B_{i2}B_{j2})\right)\sin\sqrt{\lambda_i}s\cos\sqrt{\lambda_j}s \\ +\sum\limits_{i\neq j}^{k}\left[\sqrt{\lambda_j}\left(\begin{array}{c} +(A_{i1}A_{j2}+B_{i1}B_{j2})\cos\sqrt{\lambda_i}s\cos\sqrt{\lambda_j}s \\ -(A_{i2}A_{j1}+B_{i2}B_{j1})\sin\sqrt{\lambda_i}s\sin\sqrt{\lambda_j}s \end{array}\right)\right]=0 \end{array}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\cos 2\sqrt{\lambda_i}s$, $\sin 2\sqrt{\lambda_i}s$, $\cos\sqrt{\lambda_i}s\sin\sqrt{\lambda_j}s$, $\cos\sqrt{\lambda_i}s\cos\sqrt{\lambda_j}s$ ve $\sin\sqrt{\lambda_i}s\sin\sqrt{\lambda_j}s$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan her $i=1,2,...,k$ için

$$A_{i2}^2+B_{i2}^2=A_{i1}^2+B_{i1}^2 \tag{5.10.26}$$

$$A_{i1}A_{i2}+B_{i1}B_{i2}=0 \tag{5.10.27}$$

ve $i,j=1,2,...,k,\ i\neq j$ için

$$\sqrt{\lambda_j}(A_{i1}A_{j1}+B_{i1}B_{j1})=\sqrt{\lambda_i}(A_{i2}A_{j2}+B_{i2}B_{j2}) \tag{5.10.28}$$

$$A_{i1}A_{j2}+B_{i1}B_{j2}=0 \tag{5.10.29}$$

denklemleri elde edilir. Burada A_{i1}, A_{i2}, B_{i1} ve B_{i2} lerden en az birtanesi sıfırdan farklıdır. Kabul edelimki $A_{i1} \neq 0$ olsun. Böylece (5.10.27) den

$$A_{i2} = -\frac{B_{i1}B_{i2}}{A_{i1}}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliği (5.10.26) da yerine yazarsak

$$\frac{B_{i2}^2}{A_{i1}^2}\left(A_{i1}^2 + B_{i1}^2\right) = A_{i1}^2 + B_{i1}^2$$

ve

$$|B_{i2}| = |A_{i1}|\,, \quad |B_{i1}| = |A_{i2}|$$

olur. Burada her $i = 1, 2, ..., k$ için

$$B_{i2} = A_{i1},\ B_{i1} = -A_{i2} \tag{5.10.30}$$

alırsak genel halden bir şey kaybetmeyiz. (5.10.28) ve (5.10.30) dan

$$\sqrt{\lambda_j}(A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2}) = \sqrt{\lambda_i}(A_{i2}A_{j2} + A_{i1}A_{j1})$$

ve

$$\left(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right)(A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2}) = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada $i \neq j$ iken $\lambda_i \neq \lambda_j$ olduğundan

$$A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} = 0 \tag{5.10.31}$$

dir. (5.10.29) ve (5.10.30) eşitliklerinden

$$A_{i1}A_{j2} - A_{i2}A_{j1} = 0 \tag{5.10.32}$$

olur. Burada $A_{i1} \neq 0$ kabulünden

$$\det\begin{bmatrix} A_{j1} & A_{j2} \\ A_{j2} & -A_{j1} \end{bmatrix} = 0$$

ve

$$A_{j1}^2 + A_{j2}^2 = 0 \tag{5.10.33}$$

olmalıdır. (5.10.33) eşitliğinden her $j = 1, 2, ..., k$ için $A_{j1} = A_{j2} = 0$ olur. Bu ise $A_{i1} \neq 0$ kabulümüzle çelişir. Bu çelişki ancak $k = 1$ olmasıyla giderilebilir. Böylece eğrimiz 1-tipden olur. Her 1-tipden eğri sonlu tipli olduğundan ispat biter.

KAYNAKLAR

Ata, E. 2004. Simplektik diferensiyel geometri üzerine. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aubin, T. 2001. A course in differential geometry. American Mathematical Society

Baikousis, C. and Blair, D.E. 1991. Finite type integral submanifold of the contact manifold $\mathbb{R}^{2n+3}(-3)$. Bulletin of the Institute of Matematics Academia Sinica, 19(4); 327-350.

Baikousis, C. and Blair, D.E. 1994. On Legendre curves in contact 3-manifolds. Geom. Dedicate, 49; 135-142.

Barros, M. 1997. General helices and a theorem of Lancret. Proc.Amer. Math. Soc., 125(5); 1503-1509.

Belkelfa, M. Hırıca, I.E., Rosca, R. and Verstraelen, L. 2002. On Legendre curves in Riemannian and Lorentzian Sasaki Spaces. Soochow J.Math. 28;81-91

Blair, D.E . 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Math. Vol. 509, Springer-Verlag.

Blair, D.E. 2002. Riemannian Geometry of Contact and Simplectic Manifolds, Birkhauser. Boston.

Boothby, W.M. 1986. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Acafemic Press.

Carmo, Manfredo Perdigao do. 1992. Riemannian Geometry. Birkhauser Boston.

Geiges, H. 2001. A Brief History of Contact Geometry and Topology. Expositiones Mathematicae. 19;25-53.

Gray, J.W. 1958. Some Global Properties of contact Structure. Annals of Mathematics. 69; 421-450.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri. Erten Matbaası, Ankara.

İlarslan, K. 2002. Öklid olmayan manifoldlar üzerindeki bazı özel eğriler. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kobayashi, S. and Nomizu, K. 1996. Foundations of differential geometry. Volume:1. Wiley-Interscience Publication.

Kocayiğit, H. 2004. Lorentz 3-manifoldlarında biharmonik eğriler ve kontak geometri. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ankara.

Martinet, J. 1971. Formes de Cotact sur les Varieties de dimension 3, Proc. of Liverpool. Singularities Symposium II, Springer-Varlag, 142-163.

O.Neill, E. 1983. Semi-Riemannian Geometry. Academic Press

Ogiue, K. 1964. On Almost Contact Manifolds Admitting Axiom of Planes or Axiom of Free Mobility. Kodai Math.16;223-232.

Steenrod, N. 1951. The Topology of Fibre Bundles. Princeton university Press. New Jersey.

Yano, K. and Kon, M. 1984. Structures on Manifolds. Series in Pure Matematics, Vol:3, Singapore.

Yılmaz, D. 1999. Holonomi Grupları.Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ankara.

Walschop, G. 2004. Metric Structures in Differetial Geometry. Springer Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Çetin CAMCI
Doğum Yeri : Ordu
Doğum Tarihi : 25.03.1971
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Samsun Mithat Paşa Lisesi (1989)
Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü (1993)
Yüksek Lisans : Çanakkale 18 Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2000)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Van - Gevaş, Güzelkonak İlköğretim Okulu 1994-1998
Çanakkale-Merkez, Gökçalı İlköğretim Okulu 1998-1999
18 Mart Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Böl., Arş. Gör. 1999-2001
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölmü, Arş. Gör. 2001-...