

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENİŞLETİLMİŞ AYRISIM METODUNUN İKİ VE (2+1) - BOYUTLU
BOUSSINESQ
DENKLEMLERİNE UYGULANMASI**

Nedim AKGÜN

Tez Yöneticisi

Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

ELAZIG , 2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENİŞLETİLMİŞ AYRISIM METODUNUN İKİ VE (2+1) – BOYUTLU
BOUSSINESQ DENKLEMLERİNE UYGULANMASI**

Nedim AKGÜN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez, / / 2007 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK

Üye:

Üye:

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../.../.... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TESEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması için fedakarca, her zaman için hiçbir yardımını benden esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK'e ve Yrd. Doç. Dr. Mustafa İNÇ'e sonsuz tesekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Tesekkür

İçindekiler.....I

Özet..... II

Abstract.....III

Giris 1

1.BÖLÜM..... 1

1.1.Temel Tanım ve Teoremler..... 2

2.BÖLÜM..... 6

2.1.Adomian Ayrisim Yöntemi..... 6

2.2.Adomian Polinomlarının Hesaplanması 8

2.2.1.Lineer Olmayan Polinomlar..... 8

2.2.2.Trigonometrik Lineer Olmayanlık 10

2.2.3.Üstel Lineer Olmayanlık..... 12

2.2.4.Logaritmik Lineer Olmayanlık 13

2.2.5.Bileşik Fonksiyonlar İçin Adomian Polinomları 15

3.BÖLÜM..... 18

Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929)..... 18

3.1.Genelleştirilmiş Ayrisim Metodunun İki-Boyutlu ve (2+1)- Boyutlu Boussinesq
Denklemlerine Uygulanması..... 20

3.1.1. Genelleştirilmiş Ayrisim Metodunun İki-Boyutlu Boussinesq Denklemlerine
Uygulanması 20

3.1.2. Genelleştirilmiş Ayrisim Metodunun (2+1) -Boyutlu Boussinesq Denklemlerine
Uygulanması 25

KAYNAKLAR 32

ÖZGEÇMİŞ..... 33

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENISLETİLMİS AYRISIM METODUNUN İKİ VE (2+1) – BOYUTLU BOUSSINESQ DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

Nedim AKGÜN

Firat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2007, Sayfa: 33

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde Ayrisim metodu ve lineer olmayan terimler için Adomian polinomları hesaplandı.

Üçüncü bölüm çalışmanın esas kısmı olup, bu bölümde genişletilmiş ayrisim metodu iki ve (2+1) – boyutlu Boussinesq denklemlerine uygulandı ve sayısal sonuçlar incelendi.

Anahtar Kelimeler: Adomian ayrisim metodu, Adomian polinomları, Boussinesq denklemi.

ABSTRACT

M. S. Thesis

APPLYING MODIFIED DECOMPOSITION METHOD TO TWO AND (2+1) DIMENSIONAL BOUSSINESQ EQUATIONS

Nedim AKGÜN

**Firat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
2007, Sayfa: 33**

This thesis is arranged in three chapters.

In first chapter, some basic definitions and theorems are given.

In second chapter, we calculated Adomian polynoms for decomposition method and non linear terms.

In third chapter which is the main of thesis, we applied modified decomposition method to two and (2+1) dimension Boussinesq equations and numerical results are examined.

Keywords: Adomian Decomposition Method, Adomian Polynoms, Boussinesq equation.

GIRIS

Özel bir metot yardimiyla polinomlari hesaplanan ve bilinmeyen fonksiyonun ayristirilmasina dayanan ayrisim metodu yaklasik yirmi sene kadar önce G. Adomian tarafından bulundu.

Bu metotla lineer ve lineer olmayan fonksiyonel denklemleri (fizik, mühendislik, biyoloji, tipta kompermental analiz, astro fizik, nükleer reaktörler, lazerler, kompütür çipleri, radar, milli ekonomideki davranis, cebirsel, kısmi türevli, adi diferansiyel denklemler, integral denklemler ve bunlar gibi pek çok denklemi ve problemi) çözmek mümkündür.

Bu metodun ilkeleri pek çok makalede ve birkaç kitapta uygulandi, fakat kullanilabilir teorik veriler Cherruault ve ekibinin [1],[5],[11] çalismalariyla hizlandi.

G. Adomian ilk olarak genel durumlari kapsayan pek çok örnek üzerinde çalisti. Fakat uygulamalarda bazi basit denklemleri seçip hesaplarin kolaylasmasini sagladi ve bu çalismalarda genellikle baslangiç ve sinir sartlari ayrisim metodunun hesaba katilmasini saglayacak sekilde basit olanlar seçildi.

Bu metodun etkinligi baslangiçta yalnız örneklerde denenmis ve yakinsakligini ortaya koyacak hiçbir açıklama yapılmamisti. Daha sonra Cherruault çalismalarinda ayrisim metodunun yakinsakligini kanitladi ve bu metodu biyolojik modellere uyguladi [1] ,[2], [11],[12].

Adomian ayrisim metoduyla verilen bir problemin yapisi degistirilmeyecek ve lineerizasyon yapılmayacaktır.

Yapilan çalışma üç bölüme ayrılmistir. Birinci bölümde temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde Adomian Ayrisim metodu anlatildi. Adomian polinomların hesaplanması gösterildi.

Üçüncü bölümde, ise ayrisim metodu baslangiç sartli iki ve $(2+1)$ -boyutlu Boussinesq denklemlerine uygulandi.

1.BÖLÜM

1.1.Temel Tanim ve Teoremler

Tanim1.1.1

L bos olmayan bir cümle ve K , reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Asagidaki sartlar saglaniyorsa L ye K üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayi) denir [13]:

$+$, $.$ Iki islem olmak üzere,

A) $L, +$ islemine göre degismeli bir gruptur. Yani,

G1) Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir (kapalilik özelligi)

G2) Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir (birlesme özelligi)

G3) Her $x \in L$ için $x + q = q + x = x$ olacak sekilde $q \in L$ vardır

(özdes elamanvarligi)

G4) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = q$ olacak sekilde $(-x) \in L$ vardır

(ters elaman varligi)

G5) Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir (degisme özelligi)

B) $x, y \in L$ ve $a, b \in K$ olmak üzere asagidaki sartlar saglanir:

L1) $a.x \in L$ dir (skalerle çapmaya göre kapalilik)

L2) $a(x + y) = a.x + b.y$ dir.

L3) $(a + b)x = a.x + b.y$

L4) $(a.b)x = a(b.x)$ dir.

L5) $1x = x$ dir (burada 1, K nin birim elamanidir)

Tanim1.1.2.

Lineer uzaylarda tanimli dönüşümlere operatör denir [13].

Tanim1.1.3.

L ve L' ayni bir K cismi üzerinde iki lineer uzay olsun.

$T : L \longrightarrow L'$ operatörü ,

$T(x + y) = T(x) + T(y)$ ve $T(a.x) = aT(x)$ sartlarini sagliyorsa T ye lineer operatör denir ($a \in K$) [14].

Tanim1.1.4.

$K = R$ veya $K = C$ olmak üzere L, K üzerinde bir vektör uzayi olsun.

$f : L \longrightarrow K$ operatörüne fonksiyonel denir [14].

Tanim 1.1.5.

X bir vektör uzayi olsun. $\|.\| : X \rightarrow R^+$ dönüşümü asagidaki sartlari sagliyorsa, bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

$\forall x, y \in X$ için

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = q$

$$N3) \|ax\| = |a| \|x\| \quad (a \text{ skaler})$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir [13]. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayi tam ise, yani bu uzaydan alinan her Cauchy dizisi bu normlu uzayin bir noktasina yakinsiyorsa bu normlu uzaya Banach uzayi denir [8].

Tanim 1.1.6

Bagimli bir degiskeni ve bu bagimli degiskenin bir yada çok bagimsiz degiskene göre türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir [6].

Tanim 1.1.7

Bagimli degiskenin yalnız bir bagimsiz degiskene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir [6].

Tanim 1.1.8

Bagimli degiskenin iki yada daha çok bagimsiz degiskene göre kısmi türevlerini içeren diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Bu kısmi diferansiyel denklem;

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}) = 0,$$

formunda verilir [6].

Tanim1.1.9

$$F(x, y, y') = 0,$$

denkleminde F fonksiyonu y ve y' ye göre lineerse yani denklem

$$A(x) + B(y)y' + C(x) = 0$$

biçimindeyse lineer differansiyel denklem adini alır.

Tanim 1.1.10

Bir degiskenin skaler bir fonksiyon için Adomian polinomu asagidaki sekilde verilir.

Fonksiyonu n defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde Adomian polinomlari

$$A_n = \frac{1}{n} f \left(\sum_{i=0}^{\infty} U_i \right) = 0$$

formülü ile tanımlanir [14].

Tanim 1.1.11

A, B, C birer sabit sayi olmak üzere, x ve y serileri arsinda kesin olan türden çesitli fonksiyonel iliskilere deterministik iliski denir. Örneğin,

$$y = Ax + B \text{ (Dogrusal iliski)}$$

$$\log y = \log (Ax + B) \text{ (Tam logaritmik iliski)}$$

ifadeleri birer deterministik iliskilerdir. Bunlardan baska daha pek çok deterministik iliski tipleri yazilabilir [7].

Çünkü serilerden birinin aldigi deger bilindiginde, diger serinin alabilecegi deger kesin olarak hesaplanabilir.

Örneğin bir gazin hacmi ile basinci arasindaki ters yönlü iliski, elektrik akimi ile direnç arasindaki ters yönlü iliskiler hep birer birer deterministik iliskidir.

Tanim 1.1.12

Önceden hangi degerleri alacagi kesin olarak bilinmeyen, fakat yaklasik olarak bir egilim belirleyen, olaylar arasindaki iliskilere stokastik iliski denir.

Bu tür iliskilere konu olan olaylarin, hangi sonucu alacagi deney veya olay gerçeklesmeden bilinemez, ancak yaklasik olarak belli bir hata payi ile tahmin edilebilir [7].

Tanim 1.1.13

Hata, genellikle gerçek deger ile yaklasik deger arasindaki fark olarak tanimlanir. x_g ile gerçek degeri, x_y ile yaklasik degeri gösterecek olursak;

$$\Delta X = |X_g - X_y|$$

ile tanimlanan ΔX 'e “mutlak hata” denir.

Mutlak hatanın gerçek degere oranina “bagil hata” olarak tanimlanmasina ragmen gerçek deger bilinmediginden bagil hata;

$$e = \frac{\Delta X}{X_y}$$

ile hesaplanir. Gerçek deger de

$$X_g = X_y \pm \Delta X$$

olarak ifade edilir [15].

Teorem 1.1.1

İki degiskenli bir fonksiyon için Adomion polinomlari asagidaki formda verilir.

$$\begin{aligned}
A_n(U_0, V_0) &= f(U_0, V_0), \quad A_0(U_0, \dots, U_n; V_0, \dots, V_n) \\
&= \sum \frac{U_1^{p_1}}{p_1!} \dots \frac{U_n^{p_n}}{p_1! q_1!} \frac{V_1^{q_1}}{q_1!} \dots \frac{V_n^{q_n}}{q_1!} \frac{\partial^{p_1 + p_2 + \dots + p_n + q_1 + q_2 + \dots + q_n}}{\partial u^{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \partial v^{q_1 + q_2 + \dots + q_n}} \\
p_1 + \dots + n p_n + q_1 + \dots + n q_n &= n \quad f(U_0, V_0), n \neq 0
\end{aligned}$$

2. BÖLÜM

2.1. Adomian Ayrısım Yöntemi

Ayrısım yöntemi bir seri metodu olduğu ve birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere basarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir. Genel olarak bu metodu verecek olursak, kabul edelim ki F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferansiyel operatör olmak üzere

$$F(u) = g(x), \quad (2.1.1)$$

denklemini ele alalım. (2.1.1) denkleminde L ; verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini, R ; lineer operatörden kalan kısmını ve N ; ise diferansiyel denklemden lineer olmayan terimi göstermek üzere

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (2.1.2)$$

şeklinde ayırarak yazalım. L bir lineer operatör ve tersi de mevcut olsun (2.1.2) eşitliği

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (2.1.3)$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitliğin her iki tarafı L^{-1} operatörü ile sol taraftan (2.1.3) eşitliğine uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (2.1.4)$$

bulunur.

L ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (2.1.4) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra

$$u = u(0) + tu'(0) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (2.1.5)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (2.1.5) ile elde edilen eşitlikteki Nu lineer olmayan terim

ve $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n polinomları özel polinomlardır

ve bu polinomlar daha sonra tartışılacaktır. (2.1.5) eşitliğindeki $u(x, t)$ ayrıştırılmış seri

çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç

değeri ve denklemin sağ taraf fonksiyonunun integrali olmak üzere $u_0 = a + bt - L^{-1}g$ ile

bulunur daha sonra u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek

ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (2.1.6)$$

sekinde yazilabilir ve serinin yakinsak olduğu varsayilacaktır. Bu seri çözümü kullanilarak (2.1.5) esitligi tekrar yazilirsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.1.7)$$

sekinde genel seri formu elde edilir. Benzer olarak , (2.1.7) esitligi açık sekinde

$$\begin{cases} u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, n \geq 0, \end{cases} \quad (2.1.8)$$

formunda yazilabilir. Buradaki A_n polinomlari her bir lineer olmayan terim için genellestirilebilir ve bu genellestirmede A_0 sadece u_0 a, A_1 sadece u_0 ve u_1 e, A_2 ise, u_0, u_1, u_2 ye bagli ve benzer sekinde (2.1.8) esitligindeki bütün A_n Adomian polinomlari elde edilebilir. A_n Adomian polinomu da ayristirilmis hali ise literatürde

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0), \\ A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0), \\ A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0), \\ A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0), \\ A_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dl^n} \left[\Phi \left(\sum_{k=1}^{\infty} l^{k_{u_k}} \right) \right]_{l=0}, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

sekinde verilmektedir. Bu Adomian polinomlari elde etmek için bir alternatif metot ise tarafindan gelistirilmistir. Bazi problemlerin sayisal çözümlerinin daha hassas olması istenildigi durumlarda ayrisim serisi için çok sayida terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (2.1.10) genel formülün kullanılması, istenildigi kadar çok sayida (2.1.6) ayristirma serisinin terimlerinin hesaplanmasinda kolayliklar saglamaktadır.

Ayrisim metodu kullanilarak $u(x, t)$ kapali çözüm fonksiyonunun bu fonksiyona ait sayisal çözümlerin elde edilmesi için

$$f_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x, t); \quad n \geq 0 \quad (2.1.11)$$

olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x, t) \quad (2.1.12)$$

ifadesinin (1.1.8.) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Buna ilaveten (2.1.12) şeklindeki ayrisim seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrisim serisinin yakınsaklığı literatürde birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrisim serisinin yakınsaklığı teorik olarak incelenmişlerdir. Bu çalışmalara ilaveten yakın zamandaki çalışmaları ayrisim serisinin yakınsaklığı bulmada yeni bir yaklaşım önerilmiştir.

2.2. Adomian Polinomlarının Hesaplanması

Wazwaz [10] lineer olmayan terimlerin adomian polinomlarını hesaplamak için son derece kullanışlı bir algoritma geliştirdi. Bu algoritmanın kullanılmasıyla A_n Adomian polinomlarının hesaplanması aşağıdaki yöntemle yapılır.

2.2.1. Lineer Olmayan Polinomlar

I. Durum

$$\text{Eğer } F(y) = y^2 \text{ ise } y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad (2.2.1)$$

olmak üzere $F(y) = y^2$ lineer olmayan terimi (2.2.1) de yerine yazılırsa

$$F(y) = (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 \quad (2.2.2)$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı açılırsa

$$F(y) = y_0^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + 2y_0y_3 + y_1^2 + 2y_0y_3 + 2y_1y_2 + \dots \quad (2.2.3)$$

elde edilir. (2.2.3)'teki açılımda indis toplamları aynı olan terimler bir araya getirilirse

$$\begin{aligned} F(y) = & y_0^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + y_1^2 + 2y_0y_3 + 2y_1y_2 \\ & + 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2 + 2y_0y_5 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

olur. (2.2.4)' den

$F(y) = y^2$ için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2, \\ A_1 &= 2y_0y_1, \\ A_2 &= y_1^2 + 2y_0y_2, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$A_3 = 2y_1y_2 + 2y_0y_3 ,$$

$$A_4 = y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_0y_4 ,$$

formunda bulunur.

II. Durum

Polinom tipinde verilen lineer olmayan terimler için $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere asagidaki genelleme yapılabilir;

$$A_0 = y_0^n$$

$$A_1 = ny_0^{(n-1)} ,$$

$$A_2 = \frac{1}{2}n(n-1)y_0^{(n-2)}y_1^2 + ny_0^{(n-1)}y_2 , \quad (2.2.6)$$

$$A_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)y_0^{(n-3)}y_1^3 + n(n-1)y_0^{(n-2)}y_1y_2 + ny_0^{(n-1)}y_3 ,$$

III. Durum

Eger $n \in \mathbb{Z}^-$ ise bu takdirde Adomian polinomlari

$$A_0 = -y_0^{-n} ,$$

$$A_1 = -ny_0^{-(n+1)} ,$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}n(n+1)y_0^{-(n+2)}y_1^2 - ny_0^{-(n+1)}y_2 , \quad (2.2.7)$$

$$A_3 = -\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)y_0^{-(n+3)}y_1^3 - n(n+1)y_0^{-(n+2)}y_1y_2 - ny_0^{-(n+1)}y_3 ,$$

formülüyle bulunur.

IV. Durum

Eger n ondalikli bir sayi ise bu takdirde Adomian polinomlari

$$A_0 = y_0^n ,$$

$$A_1 = ny_0^{n-1}y_1 ,$$

$$A_3 = ny_0^{n-1}y_3 + n(n-1)y_0^{n-2}y_1y_2 + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)y_0^{n-3}y_1^3 ,$$

$$\begin{aligned} A_4 = & ny_0^{n-1}y_4 + n(n-1)y_0^{n-2}\left(\frac{1}{2}y_2^2 + y_1y_3\right) + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)y_0^{n-3}y_1^2y_2 , \\ & + \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)y_0^{n-4}y_1^4 , \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

M

olarak hesaplanir.

V. Durum

Eger lineer olmayan terim

$$F(y) = yy_x \quad \text{ise}$$

$$\begin{cases} y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \\ y_x = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n_x} \end{cases} \quad (2.2.9)$$

olmak üzere (2.2.9) ifadesi

$$\begin{aligned} F(y) &= (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots) \times (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots) \\ &= y_0 y_{0_x} + y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x} + y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 \\ &\quad + y_{2_x} y_0 + y_{0_x} y_3 + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 + y_{3_x} y_0 \\ &\quad + y_{0_x} y_4 + y_0 y_{4_x} + y_{1_x} y_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

ve indis toplamları aynı olan ifadeler gruplandırılırsa

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0 y_{0_x} , \\ A_1 &= y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x} , \\ A_2 &= y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 + y_{2_x} y_0 , \\ A_3 &= y_{0_x} y_3 + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 + y_{3_x} y_0 , \\ A_4 &= y_{0_x} y_4 + y_0 y_{4_x} + y_{1_x} y_3 + y_{2_x} y_2 + y_{3_x} y_1 , \end{aligned}$$

N

bulunur.

2.2.2. Trigonometrik Lineer Olmayanlık

I. Durum

$F(y) = \sin y$ ise o zaman ilk olarak $A_0 = F(y_0)$ ifadesini diğer terimlerden ayırmalıyız, çünkü diğer terimler y_0 'a bağlı olarak hesaplanmaktadır.

$$F(y) = \sin y$$

Lineer olmayan terimi (2.2.11) de yerine yazılırsa

$$F(y) = \sin[y_0 + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots)] \quad (2.2.12)$$

ve bu ifadede $q = y_0$,

$$\begin{aligned} f &= y_1 + y_2 + y_3 + \dots \quad \text{alinirsa,} \\ \sin(q + f) &= \sin q \cos f + \cos q \sin f \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

ifadesinden

$$F(y) = \sin y_0 \cos(y_1 + y_2 + y_3 + \dots) + \cos y_0 \sin(y_1 + y_2 + y_3 + \dots) \quad (2.2.14)$$

bulunur. Burada $\cos(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)$ ve $\sin(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)$ ifadeleri Taylor serisine açılırsa

$$F(y) = \sin y_0 \left(1 - \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + \dots)^2 + \frac{1}{4!}(y_1 + y_2 + \dots)^4 - \dots\right) \quad (2.2.15)$$

$$+ \cos y_0 \left[(y_1 + y_2 + \dots) - \frac{1}{3!}(y_1 + y_2 + \dots)^3 + \dots\right]$$

ve böylece

$$F(y) = \sin y_0 \left[1 - \frac{1}{2!}(y_1^2 + 2y_1y_2 + \dots + \frac{1}{4!}y_1^4 + y_2^4 + \dots) - \dots\right] \quad (2.2.16)$$

$$+ \cos y_0 \left[(y_1 + y_2 + \dots) - \frac{1}{3!}(y_1^3 + y_2^3 + \dots) + \dots\right]$$

bulunur. (2.2.16) ifadesi düzenlenirse

$$A_0 = \sin y_0,$$

$$A_1 = y_1 \cos y_0,$$

$$A_2 = y_2 \cos y_0 - \frac{1}{2!}y_1^2 \sin y_0, \quad (2.2.17)$$

$$A_3 = y_3 \cos y_0 - y_1y_2 \sin y_0 - \frac{1}{3!}y_1^3 \cos y_0,$$

M

elde edilir.

II. Durum

Eğer $F(y) = \cos y$ ise yukarıda yapılan işlemlerin benzerini verilen lineer olmayan terim için uygulanırsa;

$$A_0 = \cos y_0,$$

$$A_1 = -y_1 \sin y_0,$$

$$A_2 = -y_2 \sin y_0 - \frac{1}{2!}y_1^2 \cos y_0,$$

$$A_3 = -y_3 \sin y_0 - y_1y_2 \cos y_0 - \frac{1}{3!}y_1^3 \sin y_0, \quad (2.2.18)$$

$$A_4 = -y_4 \sin y_0 - \left(\frac{1}{2!}y_2^2y_1y_3\right)\cos y_0 + \frac{1}{2!}y_1^2y_2 \sin y_0 + \frac{1}{4!}y_1^4 \cos y_0,$$

M

bulunur.

III. Durum

Eger $F(y) = \sinh y$ ve $F(y) = \cosh y$ seklinde hiperbolik lineer olmayanliga sahip ise ayni algoritma kullanilarak Adomian polinomlari, sirasiyla ,

$$\begin{aligned} A_0 &= \sinh y_0, \\ A_1 &= y_1 \cosh y_0, \\ A_4 &= y_4 \cosh y_0 + \left(\frac{1}{2!} y_1^2 + y_1 y_3\right) \sinh y_0, \\ &+ \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{4!} y_1^4 \sinh y_0, \\ &\text{M} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

ve

$$\begin{aligned} A_0 &= \cosh y_0, \\ A_1 &= y_1 \sinh y_0, \\ A_2 &= y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 \cosh y_0, \\ A_3 &= y_3 \sinh y_0 + y_1 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{3!} y_1^3 \sinh y_0, \\ A_4 &= y_4 \sinh y_0 + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 y_1 y_3\right) \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{4!} y_1^4 \cosh y_0, \\ &\text{M} \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

formüllerleriyle elde edilir.

2.2.3. Üstel Lineer Olmayanlik

I. Durum

Eger $F(y) = e^y$ ise bu takdirde $F(y_0) = e^{y_0}$ teriminin diger terimlerden ayrilmasi gerekir.

$F(y) = e^y$ ifadesi (2.3.1) de yerine yazilrsa

$$F(y) = e^{y_0 + y_1 + y_2 + \dots} \quad (2.2.21)$$

veya

$$F(y) = e^{y_0} e^{y_1 + y_2 + y_3 + \dots} \quad (2.2.22)$$

elde edilir.

Bu son ifadede;

$e^{y_1 + y_2 + \dots}$ terimi Taylor serisine açilrsa

$$\begin{aligned}
F(y) &= e^{y_0} x[1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots) + \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 + \dots] \\
&= e^{y_0} + y_1 e^{y_0} + (y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2) e^{y_0} + y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^3 e^{y_0} \\
&\quad + (y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4) e^{y_0} + \dots
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
A_0 &= e^{y_0}, \\
A_1 &= y_1 e^{y_0}, \\
A_2 &= (y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2) e^{y_0}, \\
A_3 &= (y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^3) e^{y_0}, \\
A_4 &= (y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4) e^{y_0}, \\
&\text{M}
\end{aligned}$$

elde edilir.

II. Durum

Eger $F(y) = e^{-y}$ ise bu takdirde Adomian polinomları

$$\begin{aligned}
A_0 &= e^{-y_0}, \\
A_1 &= -y_1 e^{-y_0}, \\
A_2 &= (-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2) e^{-y_0}, \\
A_3 &= (-y_3 + y_1 y_2 - \frac{1}{3!} y_1^3) e^{-y_0}, \\
A_4 &= (-y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 - \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4) e^{-y_0},
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

şeklinde olur.

2.2.4. Logaritmik Lineer Olmayanlık

I. Durum

Eger $F(y) = \lambda \ln y$, $y > 0$ ise bu takdirde bu ifade (2.2.1)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = \lambda \ln(y_0 + y_1 + y_2 + \dots) \tag{2.2.26}$$

bulunur. (2.2.26) ifadesi ise

$$F(y) = \lambda n \left[y_0 \left(1 + \frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right) \right] \quad (2.2.27)$$

formunda yazilabilir.

$$\lambda n (a b) = \lambda n a + \lambda n b \quad \text{oldugundan (2.2.27) ifadesi}$$

$$F(y) = \lambda n y_0 + \lambda n \left(1 + \frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right) \quad (2.2.28)$$

olur. (2.2.28)'de ikinci terim Taylor serisine açılırsa

$$F(y) = \lambda n y_0 + \left\{ \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \frac{y_3}{y_0} + \dots \right) \right\} \quad (2.2.29)$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^4 + \dots$$

elde edilir. (2.2.29)'da indis toplamlari ayni olan terimler gruplandirilirs, Adomian polinomlari asagidaki formda bulunur.

$$\begin{aligned} A_0 &= \lambda n y_0, \\ A_1 &= \frac{y_1}{y_0}, \\ A_2 &= \frac{y_2}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y_0^2}, \\ A_3 &= \frac{y_3}{y_0} - \frac{y_1 y_2}{y_0^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{y_0^3}, \\ A_4 &= \frac{y_4}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{y_0^2} - \frac{y_1 y_3}{y_0^2} + \frac{y_1^2 y_2}{y_0^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{y_0^4}, \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

II. Durum

Eger $F(y) = \lambda n(1+y)$, $-1 < y \leq 1$ ise o zaman Adomian polinomlari

$$A_0 = \lambda n(1+y_0),$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{y_1}{1+y_0}, \\
A_2 &= \frac{y_2}{1+y_2} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{2(1+y_0)^2}, \\
A_3 &= \frac{y_3}{1+y_0} - \frac{y_1 y_2}{(1+y_0)^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{(1+y_0)^3}, \\
A_4 &= \frac{y_4}{1+y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{(1+y_0)^2} - \frac{y_1 y_3}{(1+y_0)^2} + \frac{y_1^2 y_2}{(1+y_0)^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{(1+y_0)^4},
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

2.2.5. Bileske Fonksiyonlar İçin Adomian Polinomlari

I.Durum

Eger $F(y) = e^{-y^2}$ ise bu takdirde $u = y^2$ diyelim, böylece $F(y) = e^{-u}$ olur.

e^{-u} ve y^2 için Adomian polinomlari sirasiyla, (2.2.25) ve (2.2.5) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
A_0 &= e^{-u_0}, \\
A_1 &= -u_1 e^{-u_0}, \\
A_2 &= \frac{1}{2} e^{-u_0} (u_1^2 - 2u_2),
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

M

$$\begin{aligned}
B_0 &= y_0^2, \\
B_1 &= 2y_0 y_1, \\
B_2 &= y_1^2 + 2y_0 y_2,
\end{aligned}$$

M

sekinde yazilabilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
A_0(u_0) &= A_0[B_0(y_0)], \\
A_1(u_0, u_1) &= A_1[B_0(y_0), B_1(y_0, y_1)], \\
A_2(u_0, u_1, u_2) &= A_2[B_0(y_0), B_1(y_0, y_1), B_2(y_0, y_1, y_2)],
\end{aligned}$$

M

elde edilir. Buradan da $F(y) = e^{-y^2}$ fonksiyonu için Adomian polinomlari

$$A_0 = e^{-y_0^2}$$

$$A_1 = -2y_0y_1e^{-y_0^2} \quad (2.2.33)$$

$$A_2 = (2y_0^2y_1^2 - y_1^2 - 2y_0y_2)e^{-y_0^2}$$

M

II. Durum:

$F(y) = e^{-y} \sin(y/2)$ olsun. Burada

$$\begin{cases} e^{-y} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \\ \sin(y/2) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \end{cases} \quad (2.2.34)$$

şeklinde gösterelim. Böylece

$$F(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \right) \quad (2.2.35)$$

olur.

Buradan da;

$$\begin{aligned} F(y_0) &= A_0 B_0, \\ F(y_1) &= A_0 B_1 + A_1 B_0, \\ F(y_2) &= A_1 B_1 + A_0 B_2 + A_2 B_0, \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

M

$$F(y_n) = \sum_{i+j=n-1} A_i B_j,$$

elde edilir. Ayrıca $\sin(y/2)$ fonksiyonu için Adomian polinomları (2.2.18) den

$$\begin{aligned} B_0 &= \sin(y_0/2), \\ B_1 &= (y_1/2) \cos(y_0/2), \\ B_2 &= (y_2/2) \cos(y_0/2) - (y_1^2/8) \sin(y_0/2), \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

M

formunda hesaplanır. Böylece (2.2.36) ifadesinde, (2.2.25) ve (2.2.37) ifadeleri birlikte göz önüne alınırsa $F(y) = e^{-y} \sin(y/2)$ fonksiyonu için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} F(y_0) &= e^{-y_0} \sin(y_0/2), \\ F(y_1) &= e^{-y_0} (y_1/2) \cos(y_0/2) - y_1 e^{-y_0} \sin(y_0/2), \\ F(y_2) &= -y_1 e^{-y_0} (y_1/2) \cos(y_0/2) \\ &\quad + e^{-y_0} \left\{ (y_2/2) \cos(y_0/2) - (y_1^2/8) \sin(y_0/2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

$$+ e^{-y_0} \left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) \sin(y_0/2),$$

şeklinde elde edilir.

Denklemlerde ortaya çıkan lineer olmayan bileşke fonksiyonlara ait Adomian polinomları yukarıdaki işlemlere benzer şekilde hesaplanabilir.

3. BÖLÜM

JOSEPH VALENTIN BOUSSINESQ (1842-1929)

Joseph Valentin Boussinesq, 13 Mart 1842'de (Montpellier'e 30 km uzaklıktaki) Saint Andre de Sangonis'de doğdu. Babası Jacques bir çiftçi, annesi bir fabrikatörün kızı olan Anne-Marrie Cavalier'di. Bir erkek kardeşi vardı. Annesi Anne-Marrie Cavalier 1857 yılında hayatını kaybetti. 7 yaşından sonra kasabanın ilk okuluna başladı ve oradaki öğretmenleriyle, doğa hakkındaki çekici bulduğu olgular hakkındaki düşüncelerini paylaştı. Peder olan amcası ona Latince ve Yunanca öğretti. Bu bilgilerin yanında Boussinesq'in gençliği hakkında pek fazla bilgi yoktur.

Boussinesq 16 yaşında Montpellier ve Lycée'yi örnek alarak okutman oldu. Bunların paralelinde matematik ve mekanik alanlarında çalışsa da edebi yönü de gelişti. Gece gündüz bilim adına adanmış bir zaman diliminden sonra 19 yaşında matematik dalında diploma aldı. Mekanik ve matematiksel fizikten ilham almasına rağmen dini ve filozof konulara da ilgisi vardı.

19.Yüzyıl başlarında yaşamış olan Fourier ve Cauchy gibi bilim adamlarının çalışmalarını neredeyse ezbere biliyordu. Bu yüzyılın alışımlı bilim insanı portresinin dışına çıkarak tamamen mekanik istisna bir ismi oldu.

20 yaşında Agde Koleji'nde öğretmenlik yapmaya başladı. Bu ona, diğer işler arasında Lamé'nin çalışmaları izinde, bilim üzerinde çalışabilmesi için büyük bir zaman ve olanak sağlamış oldu. Bunun, ilk Akademik belgesini yayınlamasında önemli bir etkisi oldu. Bu belgede, ince ve dikkatli bir şekilde su jetinin yüzey üzerindeki darbelerini tarif eden bir problem çözülmüyordu. Bu çalışmadan sonra Agde'den ayrılarak, akademik kariyerine Vigan Koleji'nde Gap (Prof. James Dauphiné) ile devam etti. Geldiği Vigan şehrinde, 1869'da Mende'de görevli bir bakanın kızı olan Jeanne Giscard of Castling (1819-1894) ile evlendi.

O sıralar, ısığın dağılım teorisiyle uğraşıyordu. 1867'de Paris Bilim Akademisi'nde heterojen ortamlarda ısığın dağılımı konulu tezini vererek doktorasını aldı.

Boussinesq'in doktora tezi, Lamé'nin ısı teorisi önemli bir bakış açısı getirdi. Tez çalışmasından hemen sonra, bir etkiye maruz kalan elastik maddelerin üç baslıca yöne hareketlendiklerini sorgulayan bir çalışmayı Akademi'ye gönderdi.

Birkaç yıl önce, varsayımların basitleştirilmesi için bu soruya bir cevap arayan Saint-Coming (1797-1886) ise gerilimlerin eliptik dağılımlarını gösteren bir açıklama bulmuştur.

Ancak Boussinesq, mekanik alanda birçok ünlü bilim adamının takdirini toplayan daha genel bir çözüm yoluna giderek sonuca ulaşmıştır. Matematikçi Picard'e (1936) göre Boussinesq'in bulduğu çözümler elektromanyetik alanı hariç matematiğin bütün konularında kullanılabilirdi. Nitekim, yaptığı çalışmalar sonucu ortaya koyduğu kurallar, mekanikte, optikte, ısıda, elastik teorisinde, ısı teorisinde ve matematikteki diferansiyel denklemlerde oldukça kullanıldı.

Yazım ve anlatım tarzı basit olmaktan çok uzaktı ve bazen yaptığı açıklamalar yazının kendisinden daha uzun oluyordu. Yazılarını yazarken daktilo basında yorgun düşünüyordu, çünkü elde ettiği sonuç, tahmin ettiğinin üç kati çıkıyordu. Yaradılışı gereği her zaman yepyeni fikirlere sahipti. Çok ayrıntılı ve gerçeklerle dolu cümlelerini anlamak oldukça zordu.

1868'deki Fransız Alpleri'ndeki gezisinde, hidrodinamik konusuna ilgi duymaya başladı. O sıralar Saint-Coming ile aralarındaki mantığın benzerliği bir tesadüf değildi. Bu adam, onun teknik soruları hakkında konuşabileceği tek insandı. Sonra, bir aralar onunla birlikte üniversitede düzenlenen bir istasyon projesine katılmak istedi. Ancak bu projeye katılanların bir fizik diploması olması gerekiyordu. Bu konu hakkında çok düşünen Boussinesq, 1872'de çalıştığı kolejden ayrıldı ve bir yıl sonra 1873'de, Lille Bilimler Fakültesi'nde profesörlük ünvanını almayı başardı.

Bir süre katıların ve hidrodinamiğin mekanik kanunları üzerine çalışıp, problemlerin teorik yargısının, uzun zaman sonra anlamını kazanmasını sağladı. 1886'da adından söz ettirerek Bilim Akademisi'ne seçildi. Çalışmaları sonucunda, önceden anlaşılamayan birçok mekanik probleminin anlaşılmasını sağladı. Adını, “ Boussinesq Denklemi ” veya Boussinesq Problemi ”olarak bilinen, katıların mekanizminin çözülmesinde kullanılan problemlere vererek başarılı bir akademik kariyer geçirdi ve yine doğduğu yerde, 19 Şubat 1929'da hayata veda etti.

3.1. Genisletilmis Ayrisim Metodunun İki Ve (2+1)- Boyutlu Boussinesq Denklemlerine Uygulanmasi

3.1.1. Genisletilmis Ayrisim Metodunun İki Boyutlu Boussinesq Denklemlerine Uygulanmasi

Ayrisim metodu uygulamali matematikte yaklasik ve analitik çözümler için etkili bir yöntem olup bu yeni yaklasim uygulamada karsilasilan lineer ya da lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılan önemli bir metottur. Bu yaklasim kullanilarak ele alinan hem lineer olmayan problemleri lineerlestirmeksizin analitik çözümlerini ayrisim seri fonksiyonlari seklinde elde edilmektedir. Ayrica ele alinan problemlerin yaklasik sayisal çözümleri de bu ayrisim serisinin terimleri kullanilarak kolayca hesaplanabilmektedir.

Literatürde lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin sayisal çözümleri pek azdir. Özellikle son zamanlarda ortaya konan sayisal metotlar yardimiyla bu tür denklemlerin nümeriksel çözümleri yeni yeni yapilmaya baslanmistir.

Simdi 2. bölümde detaylica sunulan ve denklemlerde bulunan lineer olmayan terimler için hesaplanan Adomian polinomlariinin kullanilmasiyla

$$U_{tt} - U_{xx} + 3(U^2)_{xx} + U_{4x} = 0, \quad (3.1.1)$$

formundaki 2-boyutlu Boussinesq denkleminin genisletilmis ayrisim metodu yardimiyla sayisal çözümlerini bulup, analitik çözümü ile karsilastiracagiz. (3.1.1) denkleminde

$L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L_{xx} = \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ ve olmak üzere bu denklemi operatör formunda

$$L_t U - L_x U - 3(U^2)_{xx} + L_{xx} U = 0, \quad (3.1.2)$$

seklinde yazabiliriz. $U(x, t)$ çözüm fonksiyonunu bulmak için (3.1.2) denkleminin soldan L_t^{-1} operatörünü uygularsak

$$U(x, t) = U(x, 0) + t L_t^{-1} [L_x U(x, t) + NU(x, t) + L_{xx} U(x, t)] \quad (3.1.3)$$

esitligini elde ederiz. Burada $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt$ integral operatörü ve $NU(x, t) = 3(U^2)_{xx}$

ifadesi ise lineer olmayan terimi göstermektedir. Ayrisim metodu çözümü

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, t) \quad (3.1.4)$$

formunda aradigindan bu ifadeyi (3.1.1) de yerine yazarsak,

$$U(x,t) = U(x,0) + tU_t(x,0) + L_t^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(U_0, \dots, U_n) + L_{xx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,t) \right) \right] \quad (3.1.5)$$

bulunur. Burada

$A_n = N(U) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(U_0, \dots, U_n)$ ifadesi Adomian polinomu olarak adlandırılır. Herhangi bir kısmi diferansiyel denklemde ortaya çıkacak lineer olmayan terimin durumuna göre Adomian polinomlarının nasıl hesaplandığı 2. Bölümde geniş bir şekilde ifade edilmisti. Burada lineer olmayan $N(U) = 3(U^2)_{xx}$ fonksiyoneli ele alınarak A_n terimlerinin bazıları

$$\begin{aligned} A_0 &= 3(U_0^2)_{xx}, \\ A_1 &= 3(2U_0U_1)_{xx}, \\ A_2 &= 3(2U_0U_2 + U_1^2)_{xx}, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= 3(2U_0U_3 + 2U_1U_2)_{xx}, \\ A_4 &= 3(2U_0U_4 + 2U_1U_3 + U_2^2)_{xx}, \end{aligned}$$

şeklinde elde edebiliriz. Buna göre verilen başlangıç şartıyla birlikte 2-Boyutlu Boussinesq denklemini genişletilmiş ayrisim metodu ile çözerken aşağıdaki indirgeme bağıntısını kullanacağız,

$$\begin{aligned} U_0(x,t) &= U(x,0), \\ U_1(x,t) &= tU_t(x,0) + L_t^{-1}(L_x U_0 + A_0 + L_{xx} U_0), \\ U_{k+1}(x,t) &= L_t^{-1}(L_x U_k + A_k + L_{xx} U_k), \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Şimdi (3.1.1) formundaki lineer olmayan 2- boyutlu Boussinesq denklemini

$$\begin{aligned} U(x,0) &= \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x+1) \right] \\ U_t(x,0) &= \frac{-1}{4} c^{\frac{5}{2}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x+1) \right] \tanh \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x+1) \right] \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

başlangıç şartları ile birlikte, genişletilmiş ayrisim metodunu kullanarak bu denklemin çözüm fonksiyonunu araştıracağız. (3.1.8) başlangıç şartlarını (3.1.7) indirgeme formülünde kullanırsak, aşağıdaki terimleri elde ederiz.

$$\begin{aligned}
U_0(x, t) &= \frac{\sqrt{c}}{2} \sec h^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x+1) \right] \\
U_1(x, t) &= \frac{-1}{4} c^{\frac{5}{2}} \sec h^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x+1) \right] \tanh \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x+1) \right] t + L_t^{-1} (3A_0 + (U_0)_{xx} + (U_0)_{4x}), \quad (3.1.9) \\
U_2(x, t) &= \frac{1}{8} c^2 t \sec h^4 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x+1) \right] (-2(1+c)t + (1+c)t \cosh[\sqrt{c}(x+1)] - \sqrt{c} \sinh(x+1)) \\
U_3(x, t) &= \frac{1}{1536} (c^3(1+c)t^3 \sec h^8 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x+1) \right] (40t - 440ct + 15(1+33c)t \cosh[\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad - 24(3c+1)t \cosh[2\sqrt{c}(x+1)] + t \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] + ct \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] + 38\sqrt{c} \sinh[\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad + 16\sqrt{c} \sinh[2\sqrt{c}(x+1)] - 2\sqrt{c} \sinh[3\sqrt{c}(x+1)]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_4(x, t) &= \frac{1}{737280} (c^4 t^4 \sec h \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (1+x) \right]^7 (5760(10 - 10 \cosh[\sqrt{c}(x+1)] + \cosh[2\sqrt{c}(x+1)]) \\
&\quad \sec h \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x+1) \right] + (1+c)t^2 (-2604 + 52392c - 2562924c^2 6(-301 - 1546c + 540099c^2) \\
&\quad \cosh[\sqrt{c}(x+1)] - 96(-17 + 498c + 8183c^2) \cosh[2\sqrt{c}(x+1)] + 717 \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad + 13242c \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] + 62637c^2 \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] - 116 \cosh[4\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad - 616c \cosh[4\sqrt{c}(x+1)] - 1076c^2 \cosh[4\sqrt{c}(x+1)] + \cosh[5\sqrt{c}(x+1)] + 2c \cosh[5\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad + c^2 \cosh[5\sqrt{c}(x+1)]) \sec h \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x+1) \right]^5 - 96\sqrt{c}(1+c^2)t(302 \sinh \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x+1) \right] \\
&\quad - 57 \sinh \left[\frac{3}{2} \sqrt{c} (x+1) \right] + \sinh \left[\frac{5}{2} \sqrt{c} (x+1) \right])),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_5(x, t) &= \frac{1}{660602880} (c^5 t^6 \sec h \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x+1) \right]^{12} (21504c^2(-600 + 26670c + (59 - 33775c) \\
&\quad \cosh[\sqrt{c}(x+1)] + 4(133 + 2050c) \cosh[2\sqrt{c}(x+1)] - 123 \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad - 645c \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] + 4 \cosh[4\sqrt{c}(x+1)] + 10c \cosh[4\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad + (1+c)t^2(325536 - 12764448c + 773572320c^2 - 68035679328c^3 \\
&\quad + 3(93161 - 1159365c - 111932229c^2 + 31830110057c^3) \cosh[\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad - 16(11873 - 850413c + 44103507c^2 + 2023283441c^3) \cosh[2\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad - 164119 \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] + 1902075c \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] + 353172795c^2 \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad + 497330615c^3 \cosh[3\sqrt{c}(x+1)] - 8096 \cosh[4\sqrt{c}(x+1)] - 2190048c \cosh[4\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad - 48647904c^2 \cosh[4\sqrt{c}(x+1)] - 303205280c^3 \cosh[4\sqrt{c}(x+1)] + 11611 \cosh[5\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad + 224337c \cosh[6\sqrt{c}(x+1)] + 1879185c^2 \cosh[5\sqrt{c}(x+1)] + 5599387c^3 \cosh[6\sqrt{c}(x+1)] \\
&\quad - 496 \cosh[6\sqrt{c}(x+1)] - 3792c \cosh[6\sqrt{c}(x+1)] - 13008c^2 \cosh[6\sqrt{c}(x+1)] + \dots
\end{aligned}$$

Sayısal sonuçları hesaplamak için bu terimleri aşağıdaki ifadede yerine yazıp,

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, t) = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots \quad (3.1.10)$$

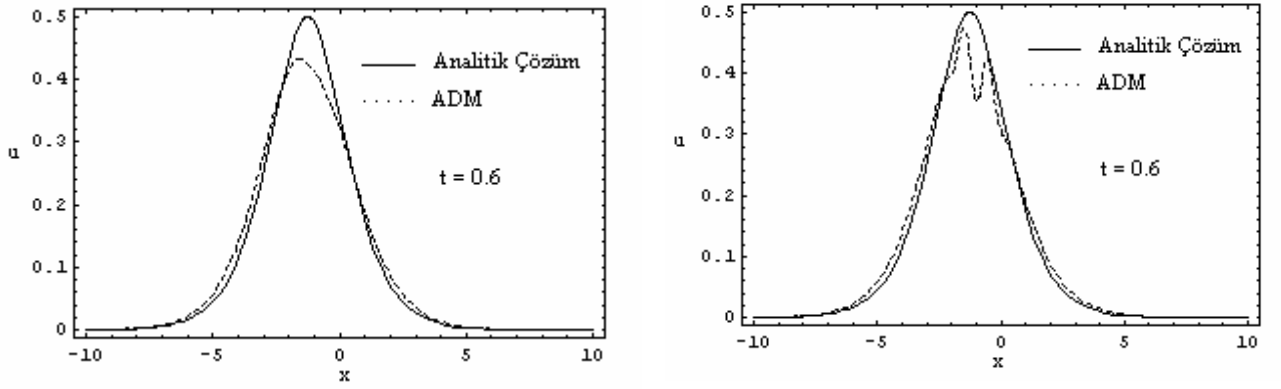
Mathematica veya Maple gibi programlardan yararlanmak gerekir. Çünkü hesaplamalar hem zaman alıcı hem de hata yapabilme oranı yüksektir. Burada elde edilen (3.1.9) ayrısım serisinin terimleri, (3.1.10) seri formunda yerlerine yazılır ve Taylor açılımı kullanılırsa (3.1.1) denkleminin kapalı formu

$$U(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} x + \frac{\sqrt{c}}{2} \sqrt{1+ct} \right]$$

şeklinde elde edilir. Sayısal karşılaştırma yapabilmek için lineer olmayan 2-boyutlu Boussinesq denkleminin ayrısım seri fonksiyonu ile analitik çözümünü göz önüne alacağız.

t/x	20	25	30	35	40
0.1	-1.13536×10^{-11}	-7.65003×10^{-14}	-5.15455×10^{-16}	-3.47311×10^{-18}	-2.34016×10^{-20}
0.2	-4.54354×10^{-11}	-3.06141×10^{-13}	-2.06276×10^{-15}	-1.38988×10^{-17}	-9.36493×10^{-20}
0.3	-1.02534×10^{-10}	-6.90868×10^{-13}	-4.65504×10^{-15}	-3.13654×10^{-17}	-2.11338×10^{-19}
0.4	-1.83324×10^{-10}	-1.23523×10^{-12}	-8.32291×10^{-15}	-5.60793×10^{-17}	-3.77859×10^{-19}
0.5	-2.88913×10^{-10}	-1.94668×10^{-12}	-1.31166×10^{-14}	-8.83791×10^{-17}	-5.95494×10^{-19}
0.6	-4.20881×10^{-10}	-2.83588×10^{-12}	-1.9108×10^{-14}	-1.28749×10^{-16}	-8.67501×10^{-19}
0.7	-5.81331×10^{-10}	-3.91698×10^{-12}	-2.63924×10^{-14}	-1.77831×10^{-16}	-1.19821×10^{-18}
0.8	-7.72935×10^{-10}	-5.208×10^{-12}	-3.50912×10^{-14}	-2.36443×10^{-16}	-1.59314×10^{-18}
0.9	-9.98996×10^{-10}	-6.73118×10^{-12}	-4.53544×10^{-14}	-3.05595×10^{-16}	-2.05908×10^{-18}
1.0	-1.26352×10^{-9}	-8.51353×10^{-12}	-5.73637×10^{-14}	-3.86513×10^{-16}	-2.60431×10^{-18}

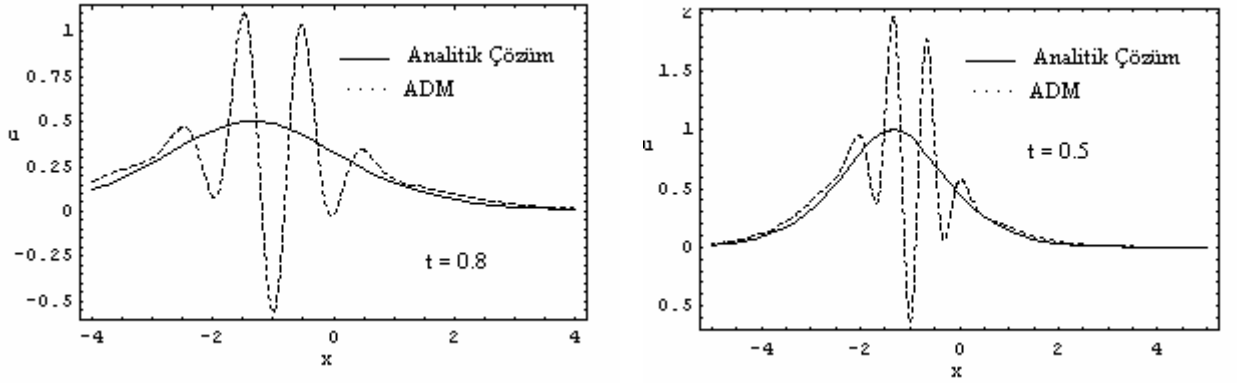
Tablo 1. $c = 1$ için ayrısım serisinin altı terimi kullanılarak elde edilen mutlak hatayı gösteren tablo.



Sekil 1. İki boyutlu Boussinesq denklemi için genişletilmiş ayrisim metodunun bes ve on terim kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ve analitik çözümü gösteren grafik.

t/x	20	25	30	35	40
0.1	-6.87025×10^{-15}	-5.83508×10^{-18}	-4.95588×10^{-21}	-4.20916×10^{-24}	-3.57495×10^{-27}
0.2	-2.85325×10^{-14}	-2.42334×10^{-17}	-2.0582×10^{-20}	-1.74808×10^{-23}	-1.48469×10^{-26}
0.3	-6.64626×10^{-14}	-5.64484×10^{-17}	-4.79431×10^{-20}	-4.07193×10^{-23}	-3.45839×10^{-26}
0.4	-1.22546×10^{-13}	-1.04082×10^{-16}	-8.83993×10^{-20}	-7.50798×10^{-23}	-6.37672×10^{-26}
0.5	-1.99512×10^{-13}	-1.6945×10^{-16}	-1.43918×10^{-19}	-1.22234×10^{-22}	-1.03816×10^{-25}
0.6	-3.01246×10^{-13}	-2.55856×10^{-16}	-2.17305×10^{-19}	-1.84563×10^{-22}	-1.56754×10^{-25}
0.7	-4.33107×10^{-13}	-3.67849×10^{-16}	-3.12423×10^{-19}	-2.65349×10^{-22}	-2.25368×10^{-25}
0.8	-6.02288×10^{-13}	-5.11538×10^{-16}	-4.34463×10^{-19}	-3.69×10^{-22}	-3.13402×10^{-25}
0.9	-8.18272×10^{-13}	-6.94979×10^{-16}	-5.90264×10^{-19}	-5.01326×10^{-22}	-4.25789×10^{-25}
1.0	-1.09342×10^{-16}	-9.28671×10^{-16}	-7.88744×10^{-19}	-6.69901×10^{-22}	-5.68964×10^{-25}

Tablo 2. $c=2$ için ayrisim serisinin altı terimi kullanılarak elde edilen mutlak hatayı gösteren tablo.



Sekil 2. iki boyutlu Boussinesq denklemi için genişletilmiş ayrısım metodunun on terimi kullanılarak elde edilen yaklasik ve analitik çözümü gösteren grafik, a) $c=1$ b) $c=2$

3.1.2. Genisletilmiş Ayrısım Metodunun

(2+1)-Boyutlu Boussinesq Denklemine Uygulanması

Simdi 2. bölümde detaylica sunulan ve denklemlerde bulunan lineer olmayan terimler için hesaplanan Adomian polinomlarının kullanilmasiyla

$$U_{tt} - U_{xx} - (U^2)_{xx} - U_{4x} - U_{yy} = 0, \quad (3.1.11)$$

formundaki (2+1)-boyutlu Boussinesq denkleminin genişletilmiş ayrısım metodu yardimiyla sayisal çözümlerini bulup, analitik çözümü ile karsilastiracagiz. (3.1.11)

denkleminde $L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L_{xx} = \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ ve $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ olmak üzere bu denklemi

operatör formunda

$$L_t U - L_x U - (U^2)_{xx} - L_{xx} U - L_y U = 0, \quad (3.1.12)$$

sekinde yazabiliriz. $U(x, y, t)$ çözüm fonksiyonunu bulmak için (3.1.12) denkleminde

soldan L_t^{-1} operatörünü uygularsak

$$U(x, y, t) = U(x, y, 0) + t U(x, y, 0) + L_t^{-1} [L_x U(x, y, t) + N U(x, y, t) + L_{xx} U(x, y, t) + L_y U(x, y, t)] \quad (3.1.13)$$

esitligini elde ederiz. Burada $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt$ integral operatörü ve

$N_u(x, y, t) = (U^2)_{xx}$ ifadesi ise lineer olmayan terimi göstermektedir. Ayrısım metodu çözümü (3.1.4)

formunda aradigindan, bu ifadeyi (3.1.1) de yerine yazarsak ,

$$U(x, y, t) = U(x, y, 0) + tU_t(x, y, 0) + L_t^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, y, t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(U_0, \dots, U_n) \right. \\ \left. + L_{xx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, y, t) \right) + L_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, y, t) \right) \right] \quad (3.1.14)$$

bulunur. Burada lineer olmayan $N(U) = (U^2)_{xx}$ fonksiyoneli ele alınarak A_n terimlerinin bazilari

$$\begin{aligned} A_0 &= (U_0^2)_{xx}, \\ A_1 &= (2U_0U_1)_{xx}, \\ A_2 &= (2U_0U_2 + U_1^2)_{xx}, \\ A_3 &= (2U_0U_3 + 2U_1U_2)_{xx}, \\ A_4 &= (2U_0U_4 + 2U_1U_3 + U_2^2)_{xx}, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

şeklinde elde edebiliriz. Buna göre verilen başlangıç şartıyla birlikte (2+1) boyutlu Boussinesq denklemini genişletilmiş ayrisim metodu ile çözerken aşağıdaki indirgeme bağıntısını kullanacağız,

$$\begin{aligned} U_0(x, y, t) &= U(x, y, 0), \\ U_1(x, y, t) &= tU_t(x, y, 0) + L_t^{-1}(L_x U_0 + A_0 + L_{xx} U_0 + L_y U_0), \\ U_{k+1}(x, y, t) &= L_t^{-1}(L_x U_k + A_k + L_{xx} U_k + L_y U_k), \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Şimdi (3.1.1) formundaki lineer olmayan (2+1)- boyutlu Boussinesq denklemini

$$\begin{aligned} U(x, y, 0) &= R - 6k^2 a^2 \tan^2[k(ax + by)] \\ U_t(x, y, 0) &= 6k^4 a^2 (a^2 + 2Ra^2 + 8k^2 a^2 b^4) \\ &\quad (\cos[2k(ax + by)] - \sec^4[k(ax + by)] - 2 \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

başlangıç şartları ile birlikte, genişletilmiş ayrisim metodunu kullanarak bu denklemin çözüm fonksiyonunu araştıracağız.

$$\begin{aligned} U_0(x, t) &= R - 6k^2 a^2 \tan^2[k(ax + by)], \\ U_1(x, t) &= 6k^4 t^2 a^2 (a^2 + 2Ra^2 + 8k^2 + b^2) (-2 + \cos[2k(ax + by)]) \sec^4[k(ax + by)] \\ &\quad + 12t^3 k a^2 l \sec^2[k(ax + by)] \tan[k(ax + by)], \\ U_2(x, t) &= -\frac{1}{8} k^5 t^3 a^2 ((1 + 2R)a^2 + 8k^2 a^4 + b^2) \sec^8[k(ax + by)] \\ &\quad (40kta^2 + 80kRta^2 + 2240k^3ta^4 + 40ktb^3 - 15kt(-a^2 - 2Ra^2 + 120k^2a^4 - b^2) \cos[2k(ax + by)] \\ &\quad - 24kt(a^2 + 2Ra^2 + b) \cos[4k(ax + by)] + kta^2 \cos[6k(ax + by)] + 2kRta^2 \cos[6k(ax + by)] \end{aligned}$$

$$+ 8k^3 t a^4 \cos[6k(ax + by)] + ktb^2 \cos[6k(ax + by)] - 38l \sin[2k(ax + by)] - 16l \sin[4k(ax + by)] + 2l \sin[6k(ax + by)], \quad (3.1.18)$$

t/x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	6.06259×10^{-10}	6.06492×10^{-10}	6.0673×10^{-10}	6.06973×10^{-10}	6.07221×10^{-10}
0.2	2.42291×10^{-9}	2.42379×10^{-9}	2.42468×10^{-9}	2.42559×10^{-9}	2.42652×10^{-9}
0.3	5.44892×10^{-9}	5.45076×10^{-9}	5.45265×10^{-9}	5.45458×10^{-9}	5.45655×10^{-9}
0.4	9.68652×10^{-8}	9.68993×10^{-9}	9.69281×10^{-9}	9.69607×10^{-9}	9.6994×10^{-9}
0.5	1.51417×10^{-8}	1.51464×10^{-8}	1.51512×10^{-8}	1.51561×10^{-8}	1.51611×10^{-8}
0.6	2.18244×10^{-8}	2.1831×10^{-8}	2.18378×10^{-8}	2.18448×10^{-8}	2.18519×10^{-8}
0.7	2.97487×10^{-8}	2.97578×10^{-8}	2.97672×10^{-8}	2.97768×10^{-8}	2.97866×10^{-8}
0.8	3.89326×10^{-8}	3.8945×10^{-8}	3.89578×10^{-8}	3.89708×10^{-8}	3.89842×10^{-8}
0.9	4.9398×10^{-8}	4.9415×10^{-8}	4.94323×10^{-8}	4.94512×10^{-8}	4.94682×10^{-8}
1.0	6.11702×10^{-8}	6.11933×10^{-8}	6.1217×10^{-8}	6.12411×10^{-8}	6.12658×10^{-8}

Tablo 3. (1) denkleminin tam çözümü (11) ve $0 \leq n \leq 3$ olmak üzere elde edilen sayısal sonuçlar $((f_3(x, y, t))$.

Böylece (3.1.6) denklemindeki Adomian polinomlarını (3.1.16) deki indirgeme bağıntısı birlikte kullanılırsa serinin diğer terimleri olan $U_1, U_2, U_3, \dots$ terimlerini de buluruz. Burada elde edilen (3.1.18) ayrışım serisinin terimleri, (3.1.4) seri formunda yerlerine yazılırsa,

$$U(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, y, t) = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots \quad (3.1.19)$$

şeklinde ayrışım serisinin çözüm fonksiyonu elde edilmiş olur. Elde edilen bu çözüm fonksiyonunu,

$$U(x, y, t) = R - 6k^2 a^2 \tan^2[k(ax + by - lt)]$$

şeklinde kapalı formda da yazabiliriz.

Sayısal karşılaştırma yapabilmek için lineer olmayan (2+1)- boyutlu Boussinesq denkleminin ayrışım seri fonksiyonu ile analitik çözümünü göz önüne alacağız.

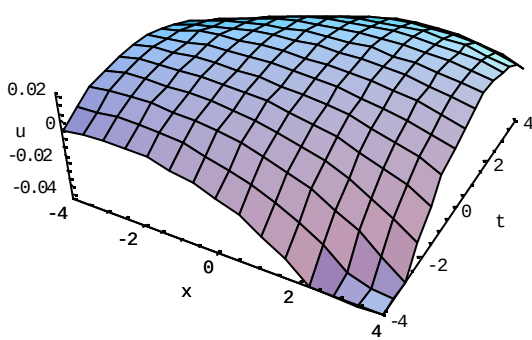
t/x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	6.00269×10^{-14}	6.00274×10^{-14}	6.00279×10^{-14}	6.00284×10^{-14}	6.00289×10^{-14}
0.2	2.40115×10^{-13}	2.40117×10^{-13}	2.40119×10^{-13}	2.40121×10^{-13}	2.40123×10^{-13}
0.3	5.40277×10^{-13}	5.40282×10^{-13}	5.40287×10^{-13}	5.40292×10^{-13}	5.40297×10^{-13}
0.4	9.60527×10^{-13}	9.60536×10^{-13}	9.60545×10^{-13}	9.60554×10^{-13}	9.60563×10^{-13}
0.5	1.50088×10^{-12}	1.5009×10^{-12}	1.50091×10^{-12}	1.50093×10^{-12}	1.50094×10^{-12}
0.6	2.16136×10^{-12}	2.16138×10^{-12}	2.1614×10^{-12}	2.16142×10^{-12}	2.16145×10^{-12}
0.7	2.94198×10^{-12}	2.94201×10^{-12}	2.94204×10^{-12}	2.94207×10^{-12}	2.9421×10^{-12}
0.8	3.84277×10^{-12}	3.84281×10^{-12}	3.84285×10^{-12}	3.84289×10^{-12}	3.84293×10^{-12}
0.9	4.86375×10^{-12}	4.8638×10^{-12}	4.86385×10^{-12}	4.8639×10^{-12}	4.86396×10^{-12}
1.0	6.00494×10^{-12}	6.00501×10^{-12}	6.00507×10^{-12}	6.00514×10^{-12}	6.0052×10^{-12}

Tablo 4. (1) denkleminin tam çözümü (11) ve $0 \leq n \leq 5$ olmak üzere elde edilen sayısal sonuçlar.

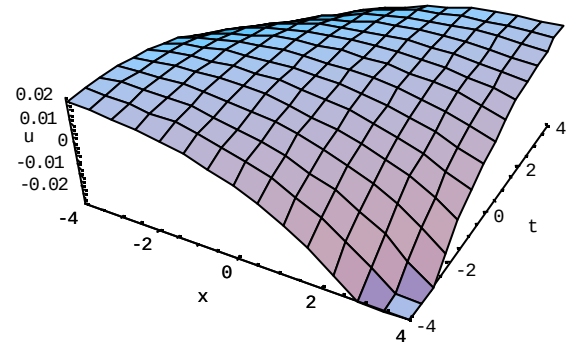
Tablo 1-5 deki sonuçlar x ve t nin çeşitli değerlerine karşılık gelen analitik ve yaklaşık çözümün farkı alınarak, yani mutlak hata $|U(x, y, t) - f_n(x, y, t)|$ formülü kullanılarak hesaplanmıştır. Burada ayrisim serisinin terim sayısı arttıkça elde edilen sayısal çözüm daha hassas olacağından n değeri Tablo 1 de 3, Tablo 2 de 5 ve Tablo 3 de ise 10, olarak seçilmiştir. Ayrıca mutlak hata hesaplanırken Tablo 1 de $a = 0.01$, $b = 0.1$, $k = 1$, $l = 0.1$, $y = 0.5$; Tablo 2 de $a = 0.01$, $b = 0.1$, $l = -0.1$, $y = 1$; Tablo 3 de $a = 0.01$, $b = 0.1$, $l = -0.1$, $y = 10$ alınarak hesaplamalar yapılmıştır. Burada sayısal çözümün hassaslığı x_i ve t_i ve sabit değerlerin seçimi ve ayrisim serisinin terimlerinin çokluğuna ve ele alınan denklemin çözüm fonksiyonunun yapısına bağlıdır.

t/x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.1	6.24521×10^{-14}	6.24526×10^{-14}	6.24531×10^{-14}	6.24536×10^{-14}	6.24541×10^{-14}
0.2	2.49875×10^{-13}	2.49877×10^{-13}	2.49879×10^{-13}	2.49881×10^{-13}	2.49883×10^{-13}
0.3	5.62372×10^{-13}	5.62376×10^{-13}	5.62381×10^{-13}	5.62385×10^{-13}	5.6239×10^{-13}
0.4	1.00005×10^{-12}	1.00005×10^{-12}	1.00006×10^{-12}	1.00007×10^{-12}	1.00008×10^{-12}
0.5	1.563×10^{-12}	1.56301×10^{-12}	1.56303×10^{-12}	1.56304×10^{-12}	1.56305×10^{-12}
0.6	2.25135×10^{-12}	2.25137×10^{-12}	2.25139×10^{-12}	2.2514×10^{-12}	2.25142×10^{-12}
0.7	3.0652×10^{-12}	3.06522×10^{-12}	3.06525×10^{-12}	3.06527×10^{-12}	3.0653×10^{-12}
0.8	4.00466×10^{-12}	4.0047×10^{-12}	4.00473×10^{-12}	4.00476×10^{-12}	4.00479×10^{-12}
0.9	5.06986×10^{-12}	5.0699×10^{-12}	5.06994×10^{-12}	5.06998×10^{-12}	5.07002×10^{-12}
1.0	6.2609×10^{-12}	6.26095×10^{-12}	6.261×10^{-12}	6.26105×10^{-12}	6.2611×10^{-12}

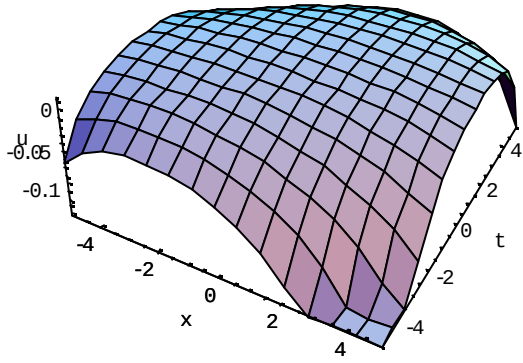
Tablo 5. (1) denkleminin tam çözümü (11) ve $0 \leq n \leq 10$ olmak üzere elde edilen sayısal sonuçlar.



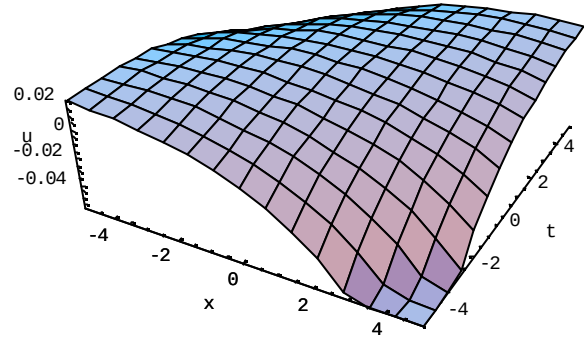
a) $f_3(x, y, t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonu



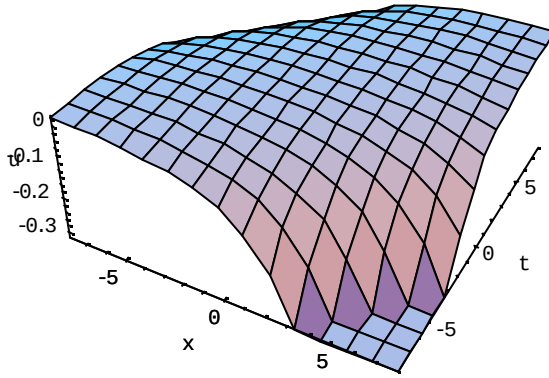
b) Analitik çözüm fonksiyonu



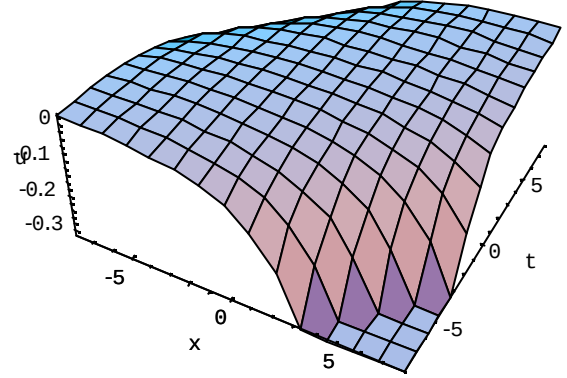
a) $f_5(x, y, t)$ yaklasik çözüm fonksiyonu



b) Analitik çözüm fonksiyonu



a) $f_{10}(x, y, t)$ yaklasik çözüm fonksiyonu



b) Analitik çözüm fonksiyonu

Sekil 3. Lineer olmayan (2+1)- boyutlu Boussinesq denkleminin $0 \leq n \leq 10$ olmak üzere

$f_n(x, y, t)$ yaklasik ve analitik çözüm fonksiyonlari, burada $a = 0.1$, $b = 0.1$, $k = 1$,

$l = 0.1$, $y = 0.5$ seklindedir.

Yukaridaki grafiklere dikkat edilecek olursa ayrisim serisinin terim sayisi arttikça yaklasik çözüm fonksiyonu analitik çözüm fonksiyonuna yaklasmaktadır. Sayisal çözümün hassasligi x_i ve y_i , y ve sabit degerlerin seçimine bagli olarak degismektedir. x ve t degeri ne kadar sifira yakin seçilirse o kadar hassas sonuçlar elde edilmektedir. x ve t nin büyük degerleri için yakinsayan veya hassas sonuçlar elde edebilmek için ayrisim serisine daha çok terim eklemek gerekir.

Ayrica bu metodun yakinsaklik ispatlari için [1-3] nolu referanslara bakilabilir.

Sonuç olarak, lineer olmayan iki ve (2+1)- boyutlu Boussinesq denkleminin çözümünün hassaslığı x , t ve y değerlerinin uygun seçimine ve ayrisim serisinin terimlerinin çokluguna baglidir.

KAYNAKLAR

- [1]Abbaoui, K. ve Cherruault, Y. ve Ndour M., 1995, The decomposition Method applied to differential systems, *Kybernetes*, 24 (8), 32-40
- [2]Abbaoui, K. ve Cherruault, Y. ve Seng, V., 1995, Practical formulae for the calculus of multivariable Adomian Polynomials, *Math. Comput. Modelling*, 22 (1), 89-93
- [3]Abbaoui, K., 1995, Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application a la résolution des équations issues de la Biologie et de la Médecine, These de Doctorat de l'Université de Paris VI, France.
- [4]Adomian, G., 1994, Solving frontier problems of Physics: The decomposition method, Boston: Kluwer Academic Publishers.
- [5]Cherruault, Y. , 1999, Optimisation, Méthodes Locales et Globales, Presses Univarsitaires de France.
- [6]Debnath, L., 1998, Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser, Berlin.
- [7]Karagöz, M., 1998, Istatistik Yöntemler, Malatya.
- [8]Kreyzig, E., 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York.
- [9]Wazwaz, A.M., 2000, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, *Appl. Math. Comput.*, 111, 33-51.
- [10]Senthilvelan, M., 2001, On the extended applications of homogenous balance method, *Appl.Math.Comput.* 123 381-388.
- [11]Cherruault, Y. , 1989, Convergence of Adomian's method, *Kybernetes*, 18 (2), 31-38.
- [12]Gabet, L., 1992, Modelisation mathématiques de la diffusion des Médicaments a travers les capillaires et dans les tissus a la suite d'une injection et esquisse d'une théorie décompositionnelle et applications aux equations aux dérivées partielles, Thèse de l'Ecole Centrale de Paris.
- [13]Kreyszig, E., 1978 Intruductory Functional AnalYSIS with Applications, John Wiley and Sons, New York.
- [14]Adomian, G., 1986, Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Pres, San Diego.
- [15]Kincaid, D. Cheney,W., 1990, Numerical Analysis, Cole Publishing Company, California.

ÖZGEÇMİS

12.01.1981 tarihinde Malatya ili, Dogansehir ilçesi, Sürgü kasabasi, Karsiyaka Mahallesiinde dogmusum. Ilkokulu, Sürgü Karsiyaka Ilkokulunda okudum. Ortaokulu, Abdulkadir Eris İlköğretim okulunda okudum. Liseyi, Sümer lisesinde okudum.1998 yilinda Malatya Meslek Yüksekokulu Tekstil bölümünü kazandim. Bu okuldan 2000 yilinda mezun oldum. 2001 yilinda Tokat Gaziosmanpasa Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandim. Bu bölümden 08.08.2005 tarihinde mezun oldum. Su anda Elazig Firat Üniversitesinde Yüksek Lisans yapmaktayim.