T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BRAHMAGUPTA DÖRTGENLERİ İLE BRAHMAGUPTA n – GENLERİNİN OLUŞTURULMASI ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Lütfiye YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI
KONYA, 2007

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BRAHMAGUPTA DÖRTGENLERİ İLE BRAHMAGUPTA n – GENLERİNİN OLUŞTURULMASI ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Lütfiye YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

Bu tez 05 / 09 / 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
(DANIŞMAN)

Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK
(JÜRİ)

Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen KOÇER
(JÜRİ)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BRAHMAGUPTA DÖRTGENLERİ İLE
BRAHMAGUPTA n – GENLERİNİN OLUŞTURULMASI
ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Lütfiye YILMAZ

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
2007, $iv + 58$ Sayfa

Jüri : Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
Yard. Doç. Dr. Süleyman SOLAK
Yard. Doç. Dr. E.Gökçen KOÇER

Bu çalışmada; ilk olarak Heron dörtgenleri tanıtılmış; Heron dörtgenlerinin oluşumu hakkında bilgi verilmiştir. Ardından Brahmagupta dörtgenlerinin oluşturulması incelenmiştir. Son olarak da Heron üçgenlerinin farklı yollarla birleştirilmesiyle meydana gelen Brahmagupta dörtgenlerinin ve Brahmagupta n – genlerinin oluşumu incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Heron Dörtgeni, Brahmagupta Dörtgeni, Kirişler Dörtgeni, Brahmagupta n – genleri

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

A RESEARCH ON CONSTRUCTION OF BRAHMAGUPTA QUADRILATERALS WITH BRAHMAGUPTA n - GONS

Lütfiye YILMAZ

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Primary Education

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR

2007, *iv* + 58 Pages

Jury: Asist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR

Asist. Prof. Dr. Süleyman SOLAK

Asist. Prof. Dr. E.Gökçen KOÇER

In this study, firstly the Heron quadrilaterals are introduced.After that, formation of the Brahmagupta quadrilaterals are examined.As a resault, the Brahmagupta quadrilaterals which are formed by combining the different ways of Heron triangles and formation of Brahmagupta n–gons are investigated.

Key Words: Heron Quadrilateral, Brahmagupta Quadrilateral, Cyclic Quadrilateral and Brahmagupta n – gons.

ÖNSÖZ

İnsanın çevresini saran eşya ve varlıkların çoğu geometrik şekil ve cisimlerden oluşur. Ayrıca insan işini ya da mesleğini yürütürken geometrik şekil ve cisimler kullanır. Bu varlıklardan en etkili şekilde yararlanabilmek için, bunları ve aralarındaki ilişkiyi iyi tanımak gerekir.

Üçgenler geometride önemli bir yer tutar. Aynı maddeden yapılan üçgen, dörtgen, beşgen, vb. geometrik şekillerin kenar veya köşelerine kuvvet uygulandığında sadece üçgen kendini korumaya çalışır. Yani kenarları kırılana kadar şeklinde bir değişikliğe izin vermez. Ama diğer çokgenler, üçgen gibi dayanıklı olmayıp, kuvvete karşı koyamayarak şekil değiştirirler. Bunları da kuvvetlendirmek için köşegenlere ihtiyaç duyulur ki zaten köşegenlerle birlikte çokgenleri üçgenlere bölmüş oluruz.

Bu çalışma; K. R. S. Sastry'nin "Brahmagupta Dörtgenleri" ile "Brahmagupta n – genlerinin İnşası" isimli makaleleri üzerine kurulmuştur. Öncelikle, Heron dörtgenlerinin Heron üçgenleri yardımıyla oluşumu incelenmiştir. Sonra; Heron dörtgenleri ile Brahmagupta dörtgenleri arasındaki farklılığı göstermek için Brahmagupta dörtgenlerinin yapısı ele alınmıştır. Son olarak da; Heron üçgenlerinin farklı yollarla birleştirilmesiyle meydana gelen dört ve daha çok kenarlı Brahmagupta çokgenlerinin oluşturulması verilmiştir.

"Brahmagupta Dörtgenleri ile Brahmagupta n – genlerinin Oluşturulması Üzerine Bir Araştırma" isimli tez konusunun tespitinde ve hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR' e ve her zaman yanımda olan ; benden yardımlarını esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Lütfiye YILMAZ
Ağustos – 2007

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Heron üçgenleri antik çağlardan beri popüler çalışma alanlarından biri olagelmiştir. Aslında bu popülerliği, Heron' un yaşadığı çağdan önceki kültürlerde de görmek mümkündür.

Heron milattan sonra birinci yüzyılda Alexandria (Mısır) da yaşamış bir matematikçidir. Eğer bir ABC üçgeninin *a, b, c* kenarları ve *Alanı* doğal sayılardan oluşuyorsa buna Heron' un anısına Heron üçgeni denir. Eğer bu elemanlardan bazıları rasyonel ise (tam sayı değilse) bu üçgene rasyonel Heron üçgeni denir. Bir *ABC* üçgeninin kenar uzunlukları *a, b, c* ve yarı çevre uzunluğu da $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ olmak üzere bu üçgenin alanı, iyi bilinen $A(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ formülü ile verilir ki buna Heron formül denir (Sastry, 2001 – 2).

Dickson (1971), antik çağdan zamanına kadar konumuzla ilgili birçok çalışmanın özetini eserinde toplamıştır.

Yedinci yüzyılda Hintli astronom ve matematikçi Brahmagupta (M.S. 598 de doğdu) ardışık tam sayı kenarlı Heron üçgenleri üzerinde çalışmış ve ilk sekiz tanesini tespit etmiştir. Bundan dolayı ardışık kenarlı Heron üçgenlerine Brahmagupta üçgenleri de denir (Beauregard, 1998).

Bir rasyonel Heron çokgeni ise rasyonel Heron üçgenine benzerdir. Daha genel olarak; tam sayı kenarlı, köşegenli ve alanlı bir çokgene Heron çokgeni denir. Brahmagupta; Heron üçgenlerini kullanarak tam sayı kenarlı, tam sayı köşegenli ve tam sayı alanlı olup da köşeleri bir çember üzerinde olan dörtgenleri (kirişler dörtgenini) yani Brahmagupta dörtgenlerini ve 2 den büyük olan n doğal sayısı için Brahmagupta n – genlerini üretmiştir (Sastry, 2002).

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; çalışmayla ilgili kaynak araştırması, ilgili tanımlar ve temel teoremler asıl kaynaklarından alınarak verilmiştir. İkinci bölümde; Heron dörtgenlerinin oluşumu; üçüncü bölümde de Brahmagupta dörtgenlerinin oluşumu incelenmiştir. Son bölümde ise Heron üçgenlerinin farklı yollarla birleştirilmesiyle meydana gelen dört ve daha çok kenarlı Brahmagupta çokgenlerinin oluşumu incelenmiştir.

1.1. Kaynak Araştırması

Sierpinski (1962) de; eserinde tamsayı kenarlı üçgenlerin özel çeşidi olan Pythagorean üçgenlerini alan, kenar, çevre v.b. yönleriyle incelemiştir. Ayrıca bu; Pythagorean üçgenleri ile ilgili olarak müstakil yazılmış ilk eserdir.

Dickson (1971); eserinin basım yılına kadar olan sayılar teorisi ile ilgili gelişmeleri, açık problemleri ve çalışmaları özetlemiştir. Dördüncü bölümde rasyonel dik üçgenleri, beşinci bölümde de üçgenleri, dörtgenleri incelemiş ve geniş bir literatür verilmiştir.

Guy (1994) de; sayılar teorisinin geçmişten eserin basıldığı 1994 yılına kadarki çözülememiş problemler ile bu problemlerle ilgili yayınları ve özetlerini veren bir eser yazmıştır. Eserinin; *Diophantine Equations* isimli bölümünün D21 inci kesiminde Heron üçgenleri ile kaynakları ve ilgili çözülememiş problemleri vermiştir.

Beauregard ve Suryanarayan (1998) de, Brahmagupta' nın 1400 üncü doğum yılı anısına yayınladıkları makalede ardışık tam sayı kenarlı Heron üçgenlerinin; yani Brahmagupta üçgenlerinin Pell denklemine bağlı olarak nasıl üretildiğini ortaya koymuşlardır.

Yiu (1998); bu eserinin onuncu bölümünde; kenarlar, köşegenler ve açılardan faydalanarak dörtgenlerin özelliklerini incelemiştir.

Buchholz ve MacDougall (1999) da; kenarları geometrik veya aritmetik dizi oluşturan rasyonel alanlı üçgenler ve kirişler dörtgenleri üzerine çalışmışlardır. Bu çalışmada kenarları aritmetik diziden olan üçgenlerin sonsuz bir ailesi için özelliklerinin tamamı verilmiş; kenarları geometrik dizi olan hiçbir üçgenin olmayacağı gösterilmiştir. Ayrıca kenarları aritmetik veya geometrik diziden alınan bir kirişler dörtgeninin olmayacağı da gösterilmiş; her iki tür dörtgenin varlığının araştırılmasında da eliptik eğriler kullanılmıştır.

Sastry (2001 – 1) de; Heron üçgenini üretmek için Gergonne – Cevian ve kenarortay perspektifini ele alarak Heron üçgenlerinin λ – ailesini tanımlamıştır. Ayrıca Heron üçgenleri ile ilgili bazı problemlerin elemanter çözümlerini vermiştir.

Sastry (2001 – 2) de; Heron üçgenlerine $0< \theta < \pi$ olmak üzere açılar yolu ile farklı bir tanımlama getirilmiştir.

Sastry (2001 – 3) yaptığı çalışmada**;** *a, b, c* bir üçgenin kenarları ve yarı çevresi de $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ olmak üzere $A(ABC)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ biçiminde verilen Heron alan formülünden hareketle, Brahmagupta' ya göre n $\geq$ 3 ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere kenarları $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ve yarı çevre uzunluğu $s=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$ olan bir devirli n – genin alanını da Δ_n ile gösterilmek üzere, $\Delta_n=\sqrt{(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)\ldots(s-a_n)}$ biçiminde vermiştir.

Buchholz ve MacDougall (2001), bu çalışmalarında rasyonel kenarlı ve alanlı kirişler n – genini n = 3 için Heron üçgenlerine, n = 4 için Brahmagupta dörtgenlerine, n = 5 ve n = 6 için de Robins beşgenine ve Robins altıgenine dönüştürmüşlerdir. Bu düşünceden hareketle, bu tip bazı özel çokgenlerin alanları ve kenarları için daha önce elde edilen sonuçları bu tip özel kirişler n – genleri için genellemişlerdir. Ayrıca, 6 dan büyük kenarlı kirişler n – genleri için yapılan hesaplamalarda yaklaşım metotları kullanmışlardır.

Sastry (2002) de; Heron üçgenlerinden Brahmagupta dörtgenlerinin sonsuz bir ailesinin sayısal yolla üretilmesi verilmiştir.

Beauregard ve Zelator (2002) un yaptıkları bu çalışmada; bir dörtgenin; P çevresi, A alanı ve k da pozitif bir reel sayı olmak üzere P = kA şartını sağlayan tamsayı kenarlı kirişler dörtgenlerinin sayısı N(k) ile gösterilmiştir. P = kA şartını sağlayan kirişler dörtgenine k - mükemmel denmiştir. N(k) nın sonlu olduğu ve k > 4 için N(k) = 0 olduğu gösterilmiştir. Ayrıca k bir tamsayı olduğunda N(1) = 7, N(3) = 2 ve N(2) = N(4) = 1 olduğu hesaplanmıştır.

LaRosa (2003) de yaptığı çalışmada dörtgenlerin alanının; kenarlarının ve iç açılarının birlikte kullanılarak genişletilmesi incelemiş; yarı çevre uzunluğu ve trigonometrik fonksiyonları kullanılarak kirişler dörtgeni ve teğetler dörtgeninde kullanmak için formüller üretmiştir.

Svratan, Veljan ve Viladimir (2004), ın yaptıkları bu çalışmada; Gauss ve Robins formüllerinin birleştirilmesiyle herhangi bir kirişler beşgeninin alanı için genellemeler verilmiştir. Ayrıca üçgenler ve dörtgenler geometrisi çalışmalarından yüz yıllar sonra beşgenlerin trivial olmayan geometrisine ulaşılmıştır.

Sastry (2005 – 1) de; Pythagorean üçgenlerinden faydalanılarak; Heron üçgenlerinden, Brahmagupta dörtgenlerini ve Brahmagupta n–genlerini oluşturma yollarını vermiştir.

Sastry (2005 – 2) de; Heron dörtgenlerinin yeni bir ailesini Heron açıları yoluyla tanımlamaya çalışılmıştır.

Ayoub (2006) da; bir kirişler dörtgeninde köşegenlerin de çevrel çemberin kirişleri olmasından faydalanarak kirişler dörtgeninin; kenarlarının üç farklı şekilde sıralanabileceğini göstermiş; kirişler dörtgeninin köşegenlerinin, alanının ve çevrel çemberinin çapının hesaplamalarını yapmıştır.

1.2. Ön Bilgiler

Bu kesimde, çalışmamızın daha sonraki bölümlerinde kullanacağımız tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 1.2.1. *a, b* tam sayılar olmak üzere $a = b.c$ olacak şekilde bir *c* tam sayısı varsa *b, a* yı *böler* denir ve $b|a$ biçiminde gösterilir (Şenay, 1989).

Tanım 1.2.2. $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun.

i) $d|a$ ve $d|b$ ise d ye *a* ile *b* nin bir *ortak böleni* denir.

ii) *d, a* ile *b* nin bir ortak böleni olsun. Eğer *a* ile *b* nin her *c* ortak böleni için $c|d$ ise, d ortak bölenine, *a ile b nin en büyük ortak böleni* (ebob) denir ve ebob(*a, b*) veya (*a, b*) ile gösterilir (Şenay, 1989).

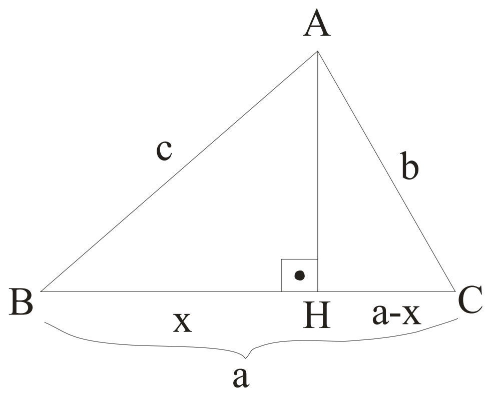
Tanım 1.2.3. *a* ve *b* gibi iki pozitif tam sayının en büyük ortak böleni 1 ise bu iki sayıya *aralarında asaldır* denir ve bu ebob(*a, b*) = (*a, b*) = 1 biçiminde gösterilir (Şenay, 1989).

Teorem 1.2.1 (Heron Formülü). Kenar uzunlukları *a, b, c* ve yarı çevre uzunluğu da $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ olan bir *ABC* üçgenin alanı *A(ABC)* ile gösterilir ve

$$A(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

formülü ile hesaplanır. Bu formül Yunan matematikçi Heron of Alexandria tarafından bulunduğu için *Heron alan formülü* olarak bilinir (Dickson, 1971).

İspat.



Şekil 1.1. ABC Üçgenin İki Dik Üçgene Bölünüşü

Şekil 1.1. de görüldüğü gibi $[AH]\perp[BC]$ olacak şekilde $[AH]$ yüksekliğini çizelim.

$$|BH|=x \Rightarrow |HC|=a-x \ \ ve \ |AH|=h$$

olsun. *AHC* ve *ABH* dik üçgenlerinde Pythagorean teoreminden;

$$(a-x)^2+h^2=b^2 \tag{1.1}$$

$$x^2+h^2=c^2 \tag{1.2}$$

yazılabilir. Bu (1.1) ve (1.2) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak;

$$\begin{aligned}(a-x)^2-x^2=b^2-c^2 &\Rightarrow a^2-2ax+x^2-x^2=b^2-c^2\\ 2ax=a^2-b^2+c^2 &\Rightarrow x=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\end{aligned} \tag{1.3}$$

bulunur. Bu *x* ifadesini (1.1) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2+h^2=c^2$$

$$h^2=c^2-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2 \Rightarrow h^2=\frac{4a^2c^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)^2}{4a^2}$$

$$=4a^2h^2=4a^2c^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)^2$$

$$4a^2h^2=\left[2ac-\left(a^2-b^2+c^2\right)\right].\left[2ac+\left(a^2-b^2+c^2\right)\right] \quad \text{(iki kare farkı)}$$

$$4a^2h^2 = \left[b^2 - (a-c)^2\right].\left[(a+c)^2 - b^2\right]$$
$$4a^2h^2 = (b-a+c).(b+a-c).(a+c-b).(a+c+b)$$

$$4a^2h^2 = (a+b+c-2a)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)(a+b+c)$$
$$4a^2h^2 = (2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)(2s), \qquad (\text{çünkü } a+b+c=2s)$$
$$4a^2h^2 = 2.2.2.2(s-a)(s-b)(s-c)s$$
$$\sqrt{4a^2h^2} = \sqrt{16.s.(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$2ah = 4.\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

olur. Her iki tarafı 4 e bölersek;

$$\frac{a.h}{2} = A(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1.4}$$

bulunur ki ispat biter (Şahin, 1997).

Tanım 1.2.4. Kenar uzunlukları *a, b, c* tam sayıları ve alanı da tamsayı olan *ABC* üçgenine *Heron üçgeni,* (*a, b, c)* üçlüsüne de *Heron üçlüsü* denir (Kramer ve Luca, 2001).

Tanım 1.2.5. Bir *ABC* üçgeninde $0 < \theta < \pi$ olmak üzere θ açısının hem sinüsü hem de kosinüsü rasyonel sayı ise bu θ açısına *Heron açısı* denir (Sastry, 2001).

Tanım 1.2.6. *a, b* ve *c* doğal sayıları $a^2 + b^2 = c^2$ denklemini sağlıyorsa o zaman dik kenar uzunlukları *a* ile *b*, hipotenüsünün uzunluğu da *c* olan bir dik üçgen vardır denir. Bu dik üçgene *Pythagorean üçgeni*; Pythagorean üçgeninin kenar uzunluklarından oluşan (*a, b, c*) üçlüsüne de *Pythagorean üçlüsü* denir. Pythagorean üçgenleri ailesini; bir dik açı ihtiva eden özel Heron üçgenleri ailesi olarak da görebiliriz (Sierpinski, 1962).

Tanım 1.2.7. Ölçüsü 0º den büyük, 90º den küçük olan açıya *dar açı*, ölçüsü 90º olan açıya *dik açı*, ölçüsü 90º den büyük olan açıya *geniş açı* denir (Gustafson ve Frisk, 1991).

Tanım 1.2.8. Bir açısı dik açı olan üçgene *dik üçgen*, bir açısı geniş açı olan üçgene *geniş açılı üçgen,* üç açısı da dar açı olan üçgene de *dar açılı üçgen* denir (Gustafson ve Frisk, 1991).

Teorem 1.2.2 (Kosinüs Teoremi). Bir *ABC* üçgeninin kenar uzunlukları *a, b, c* ve iç açıları da *A, B, C* ise;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

dir (Ayres, 1954).

Teorem 1.2.3 (Sinüs Teoremi). Bir *ABC* üçgeninin kenar uzunlukları *a, b, c*; iç açıları *A, B, C* ve çevrel çemberinin yarıçapı da *R* ise;

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} = 2R$$

dir (Ayres, 1954).

Tanım 1.2.9. $n \in Z^+$ *ve* $n \geq 3$ olmak üzere, aynı düzlemdeki yalnız A_1, A_2, A_3, ... , A_n noktalarında kesişen ve ardışık üç nokta doğrusal olmayacak şekilde $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$,...,$[A_nA_1]$ doğru parçalarının birleşim kümesine *çokgen* denir (Şahin, 1997).

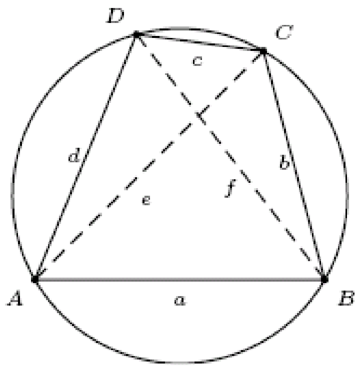
Tanım 1.2.10. Bir çokgenin kenarlarının uzantılarını aldığımızda, bu uzantılar çokgeni kesmiyorsa bu tip çokgen *dışbükey(konveks)*, eğer uzantılar çokgeni kesiyor ise bu tip çokgene de *içbükey(konkav) çokgen* denir (Şahin, 1997).

Tanım 1.2.11. Herhangi üçü doğrusal olmayan *A, B, C, D* noktalarını birleştiren, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ doğru parçaları yalnız uç noktalarında kesişiyorlarsa, bu doğru parçalarının birleşimine *dörtgen* denir (Şahin, 1997).

Tanım 1.2.12. Verilen bir ABCD dörtgeninde *A* ile *C* ve *B* ile *D* köşelerini birleştiren $[AC]$ ile $[BD]$ doğru parçalarına *ABCD* dörtgeninin *köşegenleri* denir (Şahin, 1997).

Tanım 1.2.13. Bir çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasına *kiriş* denir (Şahin, 1997).

Tanım 1.2.14. Kenarları bir çemberin kirişleri olan dörtgene*, kirişler dörtgeni* denir (Şahin, 1997).



Şekil 1.2. Kirişler Dörtgeni

Şekildeki $[AB], [BC], [DC], [AD]$ doğru parçaları çemberin kirişleridir. Dolayısıyla, *ABCD* bir kirişler dörtgenidir. Yani kirişler dörtgeni; "köşeleri aynı çember üzerinde olan dörtgen" diye de tanımlanabilir.

Kirişler dörtgeninin köşegenleri her zaman çemberin merkezinden geçmez. Yalnızca kare, dikdörtgen, gibi özel dörtgenlerin köşegenleri merkezden geçer (Şahin, 1997).

Teorem 1.2.4. Bir kirişler dörtgeninde, karşılıklı açılar bütünlerdir.

İspat. Şekil 1.2. deki *ABCD* bir kirişler dörtgenidir.

$$m(A)+m(C)=m(B)+m(D)=180^0$$

olduğunu göstermeliyiz. *A* açısı çevre açı olduğu ve *DCB* yayını gördüğü için,

$$m(A)=\frac{m\left(\widehat{DCB}\right)}{2} \tag{1.5}$$

dir. *C* açısı da çevre açı ve $\widehat{DAB}$ yayını görüyor. O halde,

$$m(C)=\frac{m\left(\widehat{DAB}\right)}{2} \tag{1.6}$$

olur. (1.3) ve (1.4) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$m(A)+m(C)=\frac{m\left(\widehat{DCB}\right)}{2}+\frac{m\left(\widehat{DAB}\right)}{2}=\frac{m\left(\widehat{DCB}\right)+m\left(\widehat{DAB}\right)}{2}=\frac{360^0}{2}=180^0$$

bulunur (Çemberin tüm yayının ölçüsü 360^0 dir). Benzer şekilde,

$$m(B)+m(D)=180^0$$

bulunur (Şahin, 1997).

Teorem 1.2.5. Bir *ABC* üçgeninde *A, B, C* açılar olmak üzere;

$$i)\ Sin2A = 2SinA.CosA = \frac{2TanA}{1+Tan^2 A},$$

$$ii)\ Cos2A = 2Cos^2 A - 1 = \frac{1-Tan^2 A}{1+Tan^2 A},$$

$$iii)\ Sin(A \pm B) = SinA.CosB \pm SinB.CosA,$$

$$iv)\ Cos(A \pm B) = CosA\ CosB \mp SinA.SinB,$$

dir (Ayres, 1954).

Tanım 1.2.15. *ABC* üçgeninin bir *A* dar açısı için; $SinA = Sin(\pi - A)$ ve $CosA = -Cos(\pi - A)$ dır (Ayres, 1954).

Teorem 1.2.6. Bir *ABC* üçgeninin kenar uzunlukları *a, b, c* ve açıları da *A, B, C* ise;

$$A(ABC) = \frac{1}{2}abSinC = \frac{1}{2}acSinB = \frac{1}{2}bcSinA$$

dir (Rich, 1963).

Tanım 1.2.16. Çemberin merkezinden çıkan iki ışının oluşturduğu açıya *çemberin merkez açısı* denir. Merkez açının gördüğü yayın ölçüsüne de *merkez açının ölçüsü* denir (Rich, 1963).

Tanım 1.2.17. Köşesi çemberin üzerinde olup kenarları bu çemberin üzerinde olan açılara *çevre açı* denir (Rich, 1963).

Teorem 1.2.7. Çemberin bir çevre açısının ölçüsü, aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir (Rich, 1963).

Tanım 1.2.18. Bir çemberin herhangi iki noktası arasındaki parçasına *yay* denir (Rich, 1963).

Teorem 1.2.8. Bir çemberde aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşittir (Rich, 1963).

Teorem 1.2.9. Bir çemberde; eş kirişleri gören çevre açılar eş ve eş çevre açıların gördüğü kirişler de eş olur (Rich, 1963).

Teorem 1.2.10. *n* kenarlı bir çokgenin bir köşesinden geçen köşegenler çokgeni ($n - 2$) tane üçgene ayırırlar (Rich, 1963).

2. HERON ÜÇGENLERİNİN VE HERON DÖRTGENLERİNİN OLUŞTURULMASI

2.1. Pythagorean Üçgenlerinden Heron Üçgenlerinin Oluşturulması

Bu kesimde; Pythagorean Üçgenleri yardımıyla Heron üçgenlerini oluşturacağız.

Bir (a, b, c) Pythagorean üçgenin kenarları tam olarak; u ile v; $u > v$ şartını sağlayan doğal sayılar ve $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere

$$a = \lambda(u^2 - v^2), \qquad b = \lambda(2uv), \qquad c = \lambda(u^2 + v^2) \tag{2.1}$$

formülleri ile verilir. Bir Pythagorean üçgeninin alanı da tam sayı olduğundan bu üçgen aynı zamanda bir Heron üçgenidir.

Bütün Pythagorean üçgenlerinin dik açıları ortak olduğundan, Pythagorean üçgenleri, Heron üçgenlerinin dik açılı ailesi olarak tanımlanabilir (Sastry, 2001 – 2).

Bu bize tüm Heron üçgenlerinin genel bir kümesinin bir ortak Heron açısı ihtiva eden aileler aracılığı ile tanımlanabileceği hakkında bir fikir verir (Sastry, 2005 – 2).

Açıklık ve kolaylık için sayısal örnekler verelim ve buradan bir genel sonuca ulaşalım.

Örnek 2.1. Bir üçgende $CosA = \frac{3}{5}$ şartını sağlayan bir A açısı için bir Heron üçgen ailesi bulunuz.

Çözüm. Bir Heron üçgenleri ailesinin her bir ABC üçgeninin $CosA = \frac{3}{5}$ ile verilen bir ortak Heron açısı ihtiva ettiğini kabul edelim. Kosinüs teoremi bu ailenin bir (a, b, c) elemanına uygulanırsa;

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\frac{3}{5}bc = b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc \\ &= b^2 - \frac{6}{5}bc + \frac{25}{25}c^2 = b^2 - \frac{6}{5}bc + \frac{9}{25}c^2 + \frac{16}{25}c^2 \\ &= \left(b - \frac{3}{5}c\right)^2 + \left(\frac{4}{5}c\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$a^2 = \left(b - \frac{3}{5}c\right)^2 + \left(\frac{4}{5}c\right)^2 \tag{2.2}$$

yazılabilir. *a, b, c* ler doğal sayılar olduklarından (a, $b - \frac{3}{5}c$, $\frac{4}{5}c$) üçlüsü bir Pythagorean üçlüsü olmalıdır. Yani;

$$a = \lambda\left(u^2 + v^2\right), \qquad b - \frac{3}{5}c = \lambda\left(u^2 - v^2\right), \qquad \frac{4}{5}c = \lambda(2uv) \tag{2.3}$$

olur ki burada *u, v* ler aralarında asal doğal sayılar ve *c* yi tam sayı yapan λ nın en küçük değeri 2 dir (λ çifttir). Buradan;

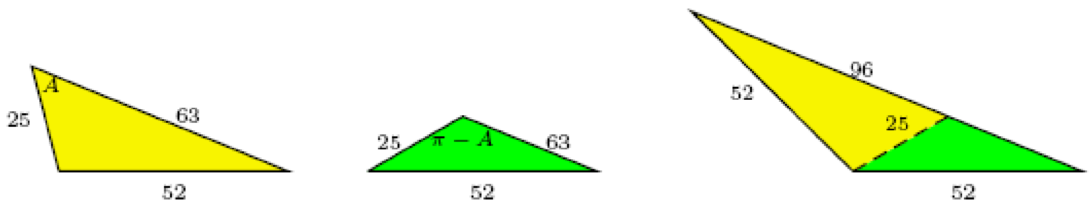
$$(a, b, c) = (2(u^2 + v^2), (u + 2v)(2u - v), 5uv), (u, v) = 1, 2u > v \tag{2.4}$$

olarak tanımlarız. A nın bütünleyen açısını ihtiva eden, yani $CosA' = -\frac{3}{5}$ olan $A'B'C'$ Heron üçgeni belirlemek için benzer bir yöntem uygulanırsa;

$$(a', b', c') = (2(u^2 + v^2), (u - 2v)(2u + v), 5uv), (u, v) = 1, u > 2v \tag{2.5}$$

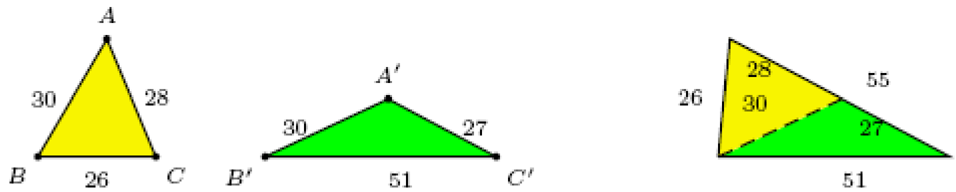
elde edilir. Biz; (2.4) ailesinde $CosA = \frac{3}{5}$ ve (2.5) te de $CosA' = -\frac{3}{5}$ olmasının *u* ile *v* nin seçilişinden bağımsız olduğunu kolaylıkla kontrol edebiliriz (Sastry, 2005 – 1).

Örnek 2.2.1. (2.4) ile (2.5) de $u = 5$, $v = 1$ alındığında, $(a, b, c) = (52, 63, 25)$ ve $(a', b', c') = (52, 33, 25)$ elde edilir. Bu üçgenler; 25 ortak kenarları boyunca Şekil 2.1. deki gibi birleştirilebilir. Sonuçta; (96, 52, 52) ikizkenar üçgeni elde edilmiş olur ki bu üçgenden sadeleştirme yolu ile (24, 13, 13) üçgenine ulaşılır (Sastry, 2005 – 1).



Şekil 2.1. Ortak Kenarlı İki Heron Üçgeniyle Yeni Bir Heron Üçgeni Elde Edilmesi

Örnek 2.2.2. (2.4) de $u = 3$, $v = 2$ alır ve (a, b, c) sıralı üçlüsünü en büyük ortak bölenleri ile kısaltırsak; $(a, b, c) = (13, 14, 15)$ olarak elde edilir. Sonra (2.5) de *u* ve *v* nin $u = 4$, $v = 1$ biçiminde farklı değerlerini aldığımızda, $(a', b', c') = (17, 9, 10)$ elde edilir. Burada m(BAC) + m($B'A'C'$) = π olması gerektiğini hatırlayalım. Bu durumda ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri bitişik hale getirilemez (birleştirilemez). Bu durumda; bu üçgenlerde $|AB| = |A'B'|$ olacak şekilde uygun benzerlik dönüşümleri yapılmalı ve sonra bu üçgenler birleştirilmelidir. Bu durumda Şekil 2.2 deki gibi (55, 26, 51) yeni Heron üçgeni olarak elde edilir (Sastry, 2005 – 1).



Şekil 2.2. Ortak Kenarlı Hale Getirilen İki Heron Üçgeninden Yeni Bir Heron Üçgeni Elde Edilmesi

Yukarıda (2.4) ve (2.5) ifadelerinden bulunan bazı (*a, b, c*) ve (a', b', c') ler ile bu sıralı üçlülerin 3. bileşenleri boyunca birleştirilmesiyle ele edilen $(a, b+b', a)$ lar Tablo 2.1 ile verilmiştir.

Tablo 2.1

u	*v*	*a*	*b*	*c*	*a'*	*b'*	*c'*	*a*	*b+b'*	*a*
3	1	20	25	15	20	7	15	20	32	20
4	1	34	42	20	34	18	20	34	60	34
5	1	52	63	25	52	33	25	52	96	52
5	2	58	72	50	58	12	50	58	84	58
6	1	74	88	30	74	52	30	74	140	74
7	1	100	117	35	100	75	35	100	192	100
7	2	106	132	70	106	48	70	106	180	106
7	3	116	143	105	116	17	105	116	160	116
8	1	130	150	40	130	102	40	130	252	130
8	3	146	182	120	146	38	120	146	220	146
9	1	164	187	45	164	133	45	164	320	164
9	2	170	208	90	170	100	90	170	308	170
9	4	194	238	180	194	22	180	194	260	194
10	1	202	228	50	202	168	50	202	396	202
10	3	218	272	150	218	92	150	218	364	218
11	1	244	273	55	244	207	55	244	480	244

Örnek 2.2. Bir üçgende $CosA = \frac{4}{5}$ şartını sağlayan bir *A* açısı için bir Heron üçgen ailesi bulunuz.

Çözüm. Bir Heron üçgenleri ailesinin her bir *ABC* üçgeni elemanının $CosA = \frac{4}{5}$ ile verilen bir ortak Heron açısı ihtiva ettiğini kabul edelim. Kosinüs teoremi bu ailenin bir (*a, b, c*) elemanına uygulanırsa;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\frac{4}{5}bc = b^2 + c^2 - \frac{8}{5}bc$$
$$= b^2 - \frac{8}{5}bc + \frac{25}{25}c^2 = b^2 - \frac{8}{5}bc + \frac{16}{25}c^2 + \frac{9}{25}c^2$$
$$= \left(b - \frac{4}{5}c\right)^2 + \left(\frac{3}{5}c\right)^2$$

elde edilir. Buradan;

$$a^2 = \left(b - \frac{4}{5}c\right)^2 + \left(\frac{3}{5}c\right)^2 \tag{2.6}$$

yazılabilir. *a, b, c* ler doğal sayılar olduklarından (a, $b - \frac{4}{5}c$, $\frac{3}{5}c$) üçlüsü bir Pythagorean üçlüsü olmalıdır. Yani;

$$a = \lambda\left(u^2 + v^2\right), \quad b - \frac{4}{5}c = \lambda\left(u^2 - v^2\right), \quad \frac{3}{5}c = \lambda(2uv) \tag{2.7}$$

olmalıdır. Burada *u, v* ler aralarında asal doğal sayılar ve *c* yi tam sayı yapan λ nın en küçük değeri 3 tür (λ, 3 ün katı olan bir doğal sayıdır) . Buradan;

$$(a, b, c) = (3(u^2 + v^2), (3u - v)(u + 3v), 10uv), (u, v) = 1, 3u > v \tag{2.8}$$

olarak tanımlarız. *A* nın bütünleyen açısını ihtiva eden, yani $CosA' = -\frac{4}{5}$ olan $A'B'C'$ Heron üçgeni belirlemek için benzer bir yöntem uygulanırsa;

$$(a', b', c') = (3(u^2 + v^2), (3u + v)(u - 3v), 10uv), (u, v) = 1, u > 3v \tag{2.9}$$

elde edilir. Biz; (2.8) ailesinde ve $CosA = \frac{4}{5}$ (2.9) da $CosA' = -\frac{4}{5}$ olmasının *u* ile *v* nin seçilişinden bağımsız olduğunu kolaylıkla kontrol edebiliriz.

Yukarıda (2.8) ve (2.9) ifadelerinden bulunan bazı (*a, b, c*) ve (a', b', c') ler ile bu sıralı üçlülerin 3. bileşenleri boyunca birleştirilmesiyle ele edilen $(a, b + b', a)$ lar Tablo 2.2 ile verilmiştir.

Tablo 2.2

u	*v*	*a*	*b*	*c*	*a'*	*b'*	*c'*	*a*	*b+b'*	*a*
4	1	51	77	40	51	13	40	51	90	51
5	1	78	112	50	78	32	50	78	144	78
6	1	111	153	60	111	57	60	111	210	111
7	2	159	247	140	159	23	140	159	270	159
7	2	159	247	140	159	23	140	159	270	159
8	1	195	253	80	195	125	80	195	378	195
9	1	246	312	90	246	168	90	246	480	246
9	2	255	375	180	255	87	180	255	462	255
10	1	303	377	100	303	217	100	303	594	303
10	3	327	513	300	327	33	300	327	546	327

Örnek 2.3. Bir üçgende $CosA=\frac{5}{13}$ şartını sağlayan bir A açısı için bir Heron üçgen ailesi bulunuz.

Çözüm. Bir Heron üçgen ailesinin her bir ABC elemanının $CosA=\frac{5}{13}$ ile verilen bir ortak Heron açısı ihtiva ettiğini kabul edelim. Kosinüs teoremi bu ailenin bir (*a, b, c*) elemanına uygulanırsa;

$$a^2=b^2+c^2-2\frac{5}{13}bc=\left(b-\frac{5}{13}c\right)^2+\left(\frac{12}{13}c\right)^2 \tag{2.10}$$

elde edilir. *a, b, c* ler doğal sayılar olduklarından $\left(a,\ b-\frac{5}{13}c,\ \frac{12}{13}c\right)$ üçlüsü bir Pythagorean üçlüsü olmalıdır. Yani;

$$a=\lambda\left(u^2+v^2\right),\qquad b-\frac{5}{13}c=\lambda\left(u^2-v^2\right),\qquad \frac{12}{13}c=\lambda(2uv) \tag{2.11}$$

bulunur ki burada *u, v* aralarında asal doğal sayılar ve *c* yi tam sayı yapan λ nın en küçük değeri 6 dır (λ, 6 nın katı olan bir doğal sayıdır). Buradan;

$$(a,b,c)=(6(u^2+v^2),\ (2u+3v)(3u-2v),\ 13uv),\quad (u,v)=1,\ 3u>2v \tag{2.12}$$

olarak tanımlarız. *A* nın bütünleyen açısını ihtiva eden, yani $CosA'=-\frac{5}{13}$ olan $A'B'C'$ Heron üçgeni belirlemek için benzer bir yöntem uygulanırsa;

$$(a',b',c')=(6(u^2+v^2),\ (2u-3v)(3u+2v),\ 13uv),\quad (u,v)=1,\ 2u>3v \tag{2.13}$$

elde edilir. Biz; (2.12) ailesinde $CosA=\frac{5}{13}$ ve $CosA'=-\frac{5}{13}$ (2.13) de olmasının *u* ile *v* nin seçilişinden bağımsız olduğunu kolaylıkla kontrol edebiliriz.

Yukarıda (2.12) ve (2.13) ifadelerinden bulunan bazı (*a, b, c*) ve (a',b',c') ler ile bu sıralı üçlülerin 3. bileşenleri buyunca birleştirilmesiyle ele edilen $(a,b+b',a)$ lar Tablo 2.3 ile verilmiştir.

Tablo 2.3

u	*v*	*a*	*b*	*c*	*a'*	*b'*	*c'*	*a*	*b+b'*	*a*
2	1	30	28	26	30	8	26	30	36	30
3	1	60	63	39	60	33	39	60	96	60
4	1	102	110	52	102	70	52	102	180	102
5	1	156	169	65	156	119	65	156	288	156
5	2	174	176	130	174	76	130	174	252	174
5	3	204	171	195	204	21	195	204	192	204
6	1	222	240	78	222	180	78	222	420	222
7	1	300	323	91	300	253	91	300	576	300
7	2	318	340	182	318	200	182	318	540	318
7	3	348	345	273	348	135	273	348	480	348
7	4	390	338	364	390	58	364	390	396	390
8	1	390	418	104	390	338	104	390	756	390
8	3	438	450	312	438	210	312	438	660	438
8	5	534	434	520	534	34	520	534	468	534

Örnek 2.4. Bir üçgende $CosA = \frac{7}{25}$ şartını sağlayan bir A açısı için bir Heron üçgen ailesi bulunuz.

Çözüm. Bir Heron üçgen ailesinin her bir ABC elemanının $CosA = \frac{7}{25}$ ile verilen bir ortak Heron açısı ihtiva ettiğini kabul edelim. Kosinüs teoremi bu ailenin bir (*a, b, c*) elemanına uygulanırsa;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\frac{7}{25}bc = \left(b - \frac{7}{25}c\right)^2 + \left(\frac{24}{25}c\right)^2 \tag{2.14}$$

elde edilir. *a, b, c* ler doğal sayılar olduklarından (a, $b - \frac{7}{25}c$, $\frac{24}{25}c$) üçlüsü bir Pythagorean üçlüsü olmalıdır. Yani;

$$a = \lambda\left(u^2 + v^2\right), \qquad b - \frac{7}{25}c = \lambda\left(u^2 - v^2\right), \qquad \frac{24}{25}c = \lambda(2uv) \tag{2.15}$$

elde edilir ki burada *u, v* ler aralarında asal doğal sayılar ve *c* yi tam sayı yapan λ nın en küçük değeri 12 dir (λ, 12 nin katı olan bir doğal sayıdır). Buradan;

$$(a, b, c) = (12(u^2 + v^2), (3u + 4v)(4u - 3v), 25uv), \quad (u, v) = 1,\ 4u > 3v \tag{2.16}$$

olarak tanımlarız. A nın bütünleyen açısını ihtiva eden, yani $CosA' = -\frac{7}{25}$ olan $A'B'C'$ Heron üçgeni belirlemek için benzer bir yöntem uygulanırsa;

$$(a', b', c') = (12(u^2 + v^2), (3u - 4v)(4u + 3v), 25uv), \quad (u, v) = 1,\ 3u > 4v \tag{2.17}$$

elde edilir. Biz; (2.16) ailesinde $CosA = \frac{7}{25}$ ve (2.17) de $CosA' = -\frac{7}{25}$ olmasının *u* ile *v* nin seçilişinden bağımsız olduğunu kolaylıkla kontrol edebiliriz.

Yukarıda (2.16) ve (2.17) ifadelerinden bulunan bazı (*a, b, c*) ve (a', b', c') ler ile bu sıralı üçlülerin 3. bileşenleri buyunca birleştirilmesiyle ele edilen $(a, b + b', a)$ lar Tablo 2.4 ile verilmiştir.

Tablo 2.4

u	*v*	*a*	*b*	*c*	*a'*	*b'*	*c'*	*a*	*b+b'*	*a*
2	1	60	50	50	60	22	50	60	72	60
3	1	120	117	75	120	75	75	120	192	120
3	2	156	102	150	156	18	150	156	120	156
4	1	204	208	100	204	152	100	204	360	204
4	2	240	200	200	240	88	200	240	288	240
5	1	312	323	125	312	253	125	312	576	312
5	2	348	322	250	348	182	250	348	504	348
5	3	408	297	375	408	87	375	408	384	408
6	1	444	462	150	444	378	150	444	840	444
7	1	600	625	175	600	527	175	600	1152	600

Daha genel olarak; $CosA = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ şartını sağlayan ortak *A* açılı Heron üçgen aileleri ile bütünleyen açı ailesi de $CosA' = -\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ olarak tanımlanan aile de sırasıyla; $(u, v) = (p, q) = 1$, $pu > qv$ ve $p > q$ olduğunda,

$$(a, b, c) = (pq(u^2 + v^2), (pu - qv)(qu + pv), (p^2 + q^2)uv) \tag{2.18}$$

ve $(u, v) = (p, q) = 1$, $qu > pv$ ve $p > q$ olduğunda da

$$(a', b', c') = (pq(u^2 + v^2), (pu + qv)(qu - pv), (p^2 + q^2)uv) \tag{2.19}$$

biçiminde verilir. (2.18) ve (2.19) un alanları sırası ile $\frac{1}{2}.b.c.SinA$ ve $\frac{1}{2}.b'.c'.SinA'$ olarak verilir. (2.18) ve (2.19) da $p = 2$, $q = 1$ alındığında (2.4) ve (2.5) ifadelerine ulaşıldığını ve BAC açısı ile $B'A'C'$ açılarının bütünler olduğunu belirtelim. Böylece, $qu > pv$ olduğunda bu üçgenleri ortak kenarlarında birleştirilerek yeni bir üçgen elde edebiliriz.

Yukarıda (2.18) ve (2.19) ifadelerinden bulunan bazı (*a, b, c*) ve (a', b', c') ler ile bu sıralı üçlülerin 3. bileşenleri boyunca birleştirilmesiyle ele edilen $(a, b + b', a)$ lar Tablo 2.5 ile verilmiştir.

Tablo 2.5

p	*q*	*u*	*v*	*a*	*b*	*c*	*a'*	*b'*	*c'*	*a*	*b+b'*	*a*
2	1	2	1	10	12	10	10	0	10	10	12	10
3	2	2	1	30	28	26	30	8	26	30	36	30
3	5	2	1	75	13	68	75	77	68	75	90	75
4	3	2	1	60	50	50	60	22	50	60	72	60
5	3	2	1	75	77	68	75	13	68	75	90	75
5	4	2	1	100	78	82	100	42	82	100	120	100
5	4	3	1	200	187	123	200	133	123	200	320	200
5	4	3	2	260	154	246	260	46	246	260	200	260
5	4	4	1	340	336	164	340	264	164	340	600	340
5	4	4	3	500	248	492	500	32	492	500	280	500
6	5	2	1	150	112	122	150	68	122	150	180	150
6	5	3	1	300	273	183	300	207	183	300	480	300
6	5	3	2	390	216	366	390	84	366	390	300	390
6	5	4	1	510	494	244	510	406	244	510	900	510
6	5	4	3	750	342	732	750	78	732	750	420	750
6	5	5	1	780	775	305	780	665	305	780	1440	780
6	5	5	2	870	740	610	870	520	610	870	1260	870
6	5	5	3	1020	645	915	1020	315	915	1020	960	1020
6	5	5	4	1230	490	1220	1230	50	1220	1230	540	1230

Gerçekten; (2.4) ve (2.5) veya (2.18) ve (2.19) ailelerinin benzer şekilde birleştirilebileceği gerçeğinden hareketle, ikizkenar Heron üçgenlerinin bütün ailesi

$$(a, b, c) = (2(u^2 - v^2), u^2 + v^2, u^2 + v^2), \quad u > v \,, \quad (u, v) = 1 \qquad (2.20)$$

biçiminde bulunur.

Bununla beraber (2.4) ile (2.5) veya (2.18) ile (2.19) aileleri başka bir yolla da birleştirilebilir. Bu Heron üçgenlerinin tam kümesini üretir.

Daha genel olarak; eğer (2.4) veya (2.18) de $u = u_1$, $v = v_1$ ve (2.5) veya (2.19) da da $u = u_2$, $v = v_2$ olarak alınır ve gerekli benzerlik dönüşümleri uygulanarak bitiştirmeyle (e.b.o.b.la kısalttıktan sonra);

$$(a, b, c) = (u_1v_1(u_2^2 + v_2^2), (u_1^2 - v_1^2)u_2v_2 + (u_2^2 - v_2^2)u_1v_1, u_2v_2(u_1^2 + v_1^2)) \qquad (2.21)$$

elde edilir (Sastry, 2005 – 1).

Tablo 2.6. (2.21) den elde edilen bazı (*a, b, c*) ler

u_1	v_1	u_2	v_2	a	b	c	u_1	v_1	u_2	v_2	a	b	c
2	1	2	1	10	12	10	6	1	5	2	174	476	370
3	2	2	1	30	28	26	6	1	5	3	204	621	555
4	1	2	1	20	42	34	6	1	5	4	246	754	740
4	3	2	1	60	50	50	6	5	2	1	150	112	122
5	1	2	1	25	63	52	6	5	3	2	390	216	366
5	2	2	1	50	72	58	6	5	4	1	510	494	244
5	3	2	1	75	77	68	6	5	4	3	750	342	732
5	4	2	1	100	78	82	7	1	2	1	35	117	100
5	2	3	2	130	176	174	7	1	3	1	70	200	150
6	1	2	1	30	88	74	7	1	3	2	91	323	300
6	1	3	1	60	153	111	11	6	2	1	330	368	314
6	1	3	2	78	240	222	11	7	2	1	385	375	340
6	1	4	1	102	230	148	11	8	2	1	440	378	370
6	1	4	3	150	462	444	11	9	2	1	495	377	404
6	1	5	1	156	319	185	11	10	2	1	550	372	442

2.2. Heron Üçgenleriyle Heron Dörtgenlerinin Oluşturulması

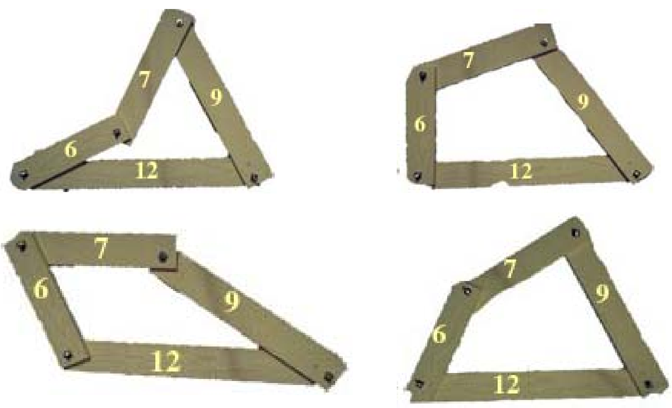
Bu kesimde; Heron Üçgenleri ve Heron açıları yardımıyla, Heron dörtgenlerinin oluşturulmasına çalışacağız.

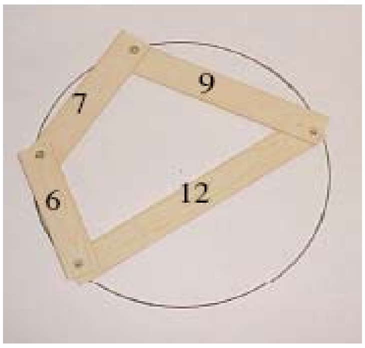
Heron formülü üçgenin kenarlarını kullanarak alanını bulmak için kullanılan bir formüldür. Biz de bu formülü dörtgenin alanını bulmak için kenarlarını ve iç açılarını kullanarak geliştireceğiz.

Üçgenler yapısal olarak kuvvetlidir. Ne kadar ağırlık konulursa konulsun hareket etmeyeceklerdir. Şekil 2.3 deki ilk üçgen; üzerine hiçbir kuvvet uygulanmamaktadır ve o düz durmaktadır. İkinci üçgen üzerine büyük bir kuvvet konulduğunu göstermektedir. Yine de, yapısından dolayı esnememekte yada hareket etmemektedir. Geometrik şekillerin oluşturulmasında üçgenlerin kullanılmasının nedenlerinden biri de budur.

Şekil 2.3. Bir Üçgenin; Ağırlık Uygulanmamış ve Uygulanmış Hali

Yapı olarak güçlü olan üçgenler; sadece üçgen eşitsizliğini sağlıyorsa bir fonksiyondur ve üçgen eşitsizliği teoremi; üçgenin iki kenarının uzunlukları toplamının, üçüncü kenarının uzunluğundan daha büyük olması gerektiğini belirtir. Dörtgenler için de; "Dörtgenlerin Eşitsizlik Kuramı" olarak adlandırılan benzer bir durum vardır. Bu teorem; bir dörtgenin, üç kenarının uzunlukları toplamının, kalan kenarın uzunluğundan daha büyük olduğunu ifade eder. Üçgen ve dörtgenlerin aynı eşitsizlik kuramına paylaşmalarına rağmen dörtgenler, üçgenlerden farklı olarak yapısal olarak güçlü değildir. Onlar şekil değiştirebilirler. Şekil 2.4. dörtgenlerin hareket edebilirliğini göstermektedir.





Şekil 2.4. Aynı Kenar Uzunluğuna Sahip Farklı Şekildeki Dörtgenler

Şekil 2.4. teki dörtgenlerin tümü aynı kenar uzunluklarına sahip olmasına rağmen eş değildirler. Şekiller sadece bükülmüştür.

Dörtgenlerin şekli değiştiğinde, yükseklikleri de değişir. Bu sebepten alanları da değişecektir. Yine de, bir dörtgenin alan formülüne, yükseklikleri dahil etmeyiz, sadece kenar uzunluklarını kullanırız. O zaman bu değişimi hesaplamada kenarlar arasındaki açıları dahil etmenin bir yolunu bulmamız gerekir.

Bir üçgende kenarlar değişmez; her üçgen için sadece bir muhtemel açı ölçümü vardır. Bu yüzden alan için açı ölçümünün formüle dahil edilmesine gerek yoktur. Çünkü Heron, bir üçgenin alanı için, sadece kenarlarını kullanarak bir formül geliştirmiştir. Bu formül Teorem 1.2.1 ile verilmiş ve ispatlanmıştır.

Bu ifadeyi kullanarak aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 2.5. Kenar uzunlukları $a = 8$, $b = 15$ ve $c = 17$ olan bir ABC üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm. İlk olarak s nin yani yarı çevrenin değerini bulalım;

$$s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s = \frac{8+15+17}{2} \Rightarrow s = \frac{40}{2} \Rightarrow s = 20$$

olur. ABC nin alanını Heron formülüyle bulmak için a, b ve c değerleri yerine yazılırsa;

$$A(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{20(20-8)(20-15)(20-17)}$$
$$= \sqrt{20.12.5.3} = 60$$

bulunur.

Örnek 2.6. Kenar uzunlukları $k = 29$, $l = 21$ ve $m = 20$ olan bir KLM üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm. İlk olarak s nin yani yarı çevrenin değerini bulalım.

$$s=\frac{k+l+m}{2}\Rightarrow s=\frac{29+21+20}{2}\Rightarrow s=\frac{70}{2}\Rightarrow s=35$$

olur. KLM nin alanını Heron formülüyle bulmak için $k,\ l$ ve m değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}A(KLM)&=\sqrt{s(s-k)(s-l)(s-m)}=\sqrt{35(35-29)(35-21)(35-20)}\\&=\sqrt{35.6.14.15}=210\end{aligned}$$

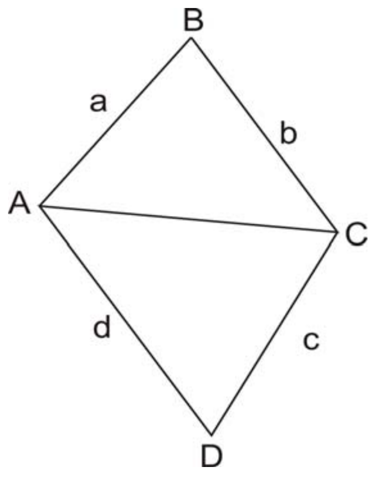
bulunur.

Yukarıda verilen örneklerde üçgenlerin alanları hesaplanırken hiç açı kullanılmadı. Sadece kenar uzunlukları ve yarı çevre işleme alındı. Bu formüle bir kenar olarak d yi de eklersek formül;

$$A(ABCD)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{2.22}$$

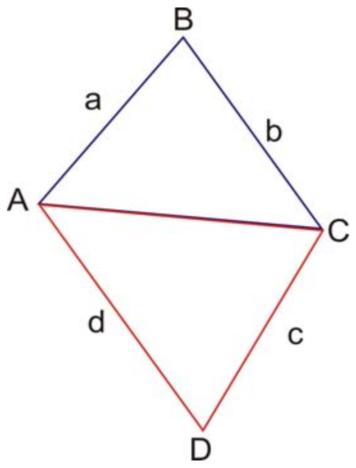
olur. Yukarıda bahsedildiği ve orijinal şekillerden de hatırlanacağı gibi, sadece kenarların kullanılamayacağı; açı ölçülerinin de hesaba katılması gerektiği görülüyor. Bu yüzden alanları değiştirmek ve hareket ettirmek için şekillerin niteliklerini birleştirerek dörtgenlerle ilgili benzer bir formül bulmak istiyoruz.

Teorem 2.1. Bir $ABCD$ dörtgeninin iç açıları Heron açısı ise bu dörtgen bir Heron Dörtgenidir (Sastry, 2005 – 2).



Şekil 2.5. Heron Dörtgeni

İspat. İlk olarak dörtgeni; ABC ve ADC biçiminde iki üçgene ayıracağız.



Şekil 2.6. Heron Dörtgeninin İki Üçgene Bölünmesi

Kosinüs teoremi; ABC ve ADC üçgenleri için sırasıyla uygulanırsa,

$$\left|AC\right|^2 = a^2 + b^2 - 2abCosB \text{ ve } \left|AC\right|^2 = c^2 + d^2 - 2cdCosD \qquad (2.23)$$

olacağını biliyoruz. Her iki denklemin sol tarafları aynı olduğundan sağ tarafları da eşit olur. Yani;

$$a^2 + b^2 - 2abCosB = c^2 + d^2 - 2cdCosD \qquad (2.24)$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi;

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2abCosB - 2cdCosD \qquad (2.25)$$

biçiminde düzenleyerek her iki tarafın karesini alırsak;

$$\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 = \left(2abCosB - 2cdCosD\right)^2 \qquad (2.26)$$

olur. Öte yandan ABC ve ADC üçgenlerinin alanlarının toplamı $ABCD$ dörtgenin alanına eşit olur. Bu durumu;

$$A(ABCD) = A(ABC) + A(ADC) = \frac{1}{2}abSinB + \frac{1}{2}cdSinD \qquad (2.27)$$

biçiminde ifade edebiliriz. Burada $A(ABCD) = A$ denilerek, bu eşitliğin her iki tarafı 4 ile çarpılırsa;

$$4A = 2abSinB + 2cdSinD \qquad (2.28)$$

elde edilir. Her iki tarafın karesini alırsak;

$$16A^2 = (2abSinB + 2cdSinD)^2 \qquad (2.29)$$

bulunur. Şimdi (2.26) ve (2.29) denklemlerini taraf tarafa toplarsak;

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=\left(2abCosB-2cdCosD\right)^2 \\ +\left(2abSinB+2cdSinD\right)^2 \tag{2.30}$$

elde edilir. Son eşitliğimizin sağ tarafındaki birinci eşitliği;

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=\left(2abCosB-2cdCosD\right)\left(2abCosB-2cdCosD\right) \\ +\left(2abSinB+2cdSinD\right)^2$$

biçiminde açar ve hesaplarsak;

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=4a^2b^2Cos^2B-8abcdCosBCosD \\ +4c^2d^2Cos^2D+\left(2abSinB+2cdSinD\right)^2 \tag{2.31}$$

olacaktır. Aynı düşünceyle eşitliğin sağ tarafındaki ikinci parantezi de açarak hesaplarsak;

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=4a^2b^2Cos^2B-8abcdCosBCosD+4c^2d^2Cos^2D \\ +\left(2abSinB+2cdSinD\right)\left(2abSinB+2abSinD\right)$$

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=4a^2b^2Cos^2B-8abcdCosBCosD+4c^2d^2Cos^2D \\ +4a^2b^2Sin^2B+8abcdSinBSinD+4c^2d^2Sin^2D \tag{2.32}$$

bulunur. Bu son ifadeyi;

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=(4a^2b^2Cos^2B+4a^2b^2Sin^2B)-8abcdCosBCosD \\ +8abcdSinBSinD+(4c^2d^2Sin^2D+4c^2d^2Cos^2D) \tag{2.33}$$

biçiminde yeniden düzenleyelim ve eşitliğin sağ tarafındaki ilk parantezi $4a^2b^2$ ortak çarpan parantezine ve son parantezi de $4c^2d^2$ ortak çarpan parantezine alalım. O zaman

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=4a^2b^2(Cos^2B+Sin^2B)-8abcdCosBCosD \\ +8abcdSinBSinD+4c^2d^2(Sin^2D+Cos^2D) \tag{2.34}$$

elde edilir. Burada

$$Cos^2B+Sin^2B=1 \quad \text{ve} \quad Cos^2D+Sin^2D=1$$

olduğundan;

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=4a^2b^2-8abcdCosBCosD+4c^2d^2+8abcdSinBSinD \tag{2.35}$$

ifadesine ulaşılır. Bu son ifadeyi

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=4a^2b^2+4c^2d^2+8abcdSinBSinD-8abcdCosBCosD \tag{2.36}$$

biçiminde yeniden yazar ve eşitliğin sağ tarafındaki son iki terimi $8abcd$ parantezine alırsak;

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\left(CosBCosD-SinBSinD\right) \qquad (2.37)$$

elde edilir. Daha sonra,

$$CosBCosD-SinBSinD=Cos(B+D)$$

trigonometrik özdeşliğini yerine yazarsak;

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16A^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcdCos\left(B+D\right) \qquad (2.38)$$

olur. Eşitliğin her iki yanından $\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2$ yi çıkarırsak;

$$16A^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcdCos\left(B+D\right)-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 \qquad (2.39)$$

ifadesine ulaşılır. Sağ tarafı çarpanlara ayırabilmek için $8abcd$ ilave eder ve çıkarırsak

$$16A^2=\left(4a^2b^2+4c^2d^2\right)+8abcd-8abcd-8abcdCos\left(B+D\right)-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 \qquad (2.40)$$

bulunur. Son ifadeyi

$$16A^2=\left(4a^2b^2+4c^2d^2+8abcd\right)-8abcd-8abcdCos\left(B+D\right)-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 \qquad (2.41)$$

biçiminde yazarsak;

$$16A^2=\left(2ab+2cd\right)^2-8abcd-8abcdCos\left(B+D\right)-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 \qquad (2.42)$$

olur. Bu ifade;

$$16A^2=\left[\left(2ab+2cd\right)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2\right]-8abcd\left(1+Cos\left(B+D\right)\right) \qquad (2.43)$$

biçiminde tekrar yazılarak, çarpanlarına ayrılırsa;

$$\begin{aligned}16A^2=&\left[(2ab+2cd)-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right]\left[(2ab+2cd)+\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right]\\&-8abcd\left(1+Cos(B+D)\right)\end{aligned} \qquad (2.44)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}16A^2&=(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)\\&\quad-8abcd(1+Cos(B+D))\\&=(c^2+2cd+d^2-a^2+2ab-b^2)(a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2)\\&\quad-8abcd(1+Cos(B+D))\\&=\left[(c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)\right]\left[(a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2)\right]\\&\quad-8abcd(1+Cos(B+D))\\&=\left[\left(c+d\right)^2-\left(a-b\right)^2\right]\left[\left(a+b\right)^2-(c-d)^2\right]-8abcd\left(1+Cos\left(B+D\right)\right)\end{aligned} \qquad (2.45)$$

bulunur. Burada trigonometrik terimimizi 2 sayısı ile çarpar ve bölersek;

$$16A^2=\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]-16abcd\left(\frac{1+Cos\left(B+D\right)}{2}\right) \quad (2.46)$$

ifadesine ulaşırız. Öte yandan;

$$Cos\left(\frac{B+D}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+Cos\left(B+D\right)}{2}} \Rightarrow Cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)=\frac{1+Cos\left(B+D\right)}{2}$$

olur ki bu eşitliği son denklemde yerine yazarsak;

$$16A^2=\left[\left(c+d\right)^2-\left(a-b\right)^2\right]\left[\left(a+b\right)^2-\left(c-d^2\right)\right]-16abcdCos^2\left(\frac{B+D}{2}\right) \quad (2.47)$$

bulunur. Eşitliğimizin sağ tarafındaki ilk terimdeki ifadeleri çarpanlarına ayırırsak;

$$\begin{aligned}16A^2 &= (c+d+b-a)(c+d+a-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)\\ &\quad -16abcdCos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)\end{aligned} \quad (2.48)$$

ifadesine ulaşılır.

Burada dörtgenin çevresine $a+b+c+d=2s$ diyecek olursak; $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ olacaktır. Bu düşünceden hareketle son eşitliğimizi;

$$\begin{aligned}16A^2 &= (c+d+b+a-a-a)(c+d+a+b-b-b)(a+b+d+c-c-c).\\ &\quad (a+b+c+d-d-d)-16abcdCos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)\end{aligned} \quad (2.49)$$

biçiminde düzenler ve $a+b+c+d=2s$ yazarsak;

$$16A^2=(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)-16abcdCos^2\left(\frac{B+D}{2}\right) \quad (2.50)$$

olur. Buradan

$$16A^2=2(s-a)2(s-b)2(s-c)2(s-d)-16abcdCos^2\left(\frac{B+D}{2}\right) \quad (2.51)$$

ve

$$16A^2=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-16abcdCos^2\left(\frac{B+D}{2}\right) \quad (2.52)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafını 16 ile sadeleştirirsek;

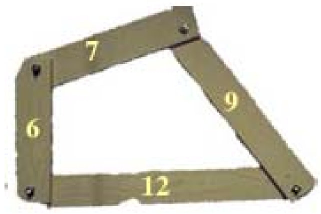
$$A^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcdCos^2\left(\frac{B+D}{2}\right) \quad (2.53)$$

bulunur. Her iki tarafın karekökünü alırsak;

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcdCos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)} \qquad (2.54)$$

ifadesine ulaşılır ki bu formül herhangi bir dörtgenin alanını verir (LaRosa, 2003).

Örnek 2.7. Kenarları a = 7, b = 9, c = 12, d = 6 ve açıları $m(ABC) = 90^0$, $m(BCD) = 102^0$, $m(CDA) = 115^0$, $m(DAB) = 53^0$ olan dörtgeninin alanını bulunuz.



Şekil 2.7. Kenarları Verilmiş Bir Dörtgen

Çözüm. Önce s yi hesaplayalım.

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{12+9+7+6}{2} = \frac{34}{2} = 17 \Rightarrow s = 17$$

olur. Şimdi alan formülünde kenarları ve yarı çevre değerini yerine yazalım.

$$A(ABCD) = \sqrt{(17-12)(17-9)(17-7)(17-6) - 12.9.7.6.Cos^2\left(\frac{90+115}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{5.8.10.11 - 12.9.7.6.Cos^2\left(\frac{90+115}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{4400 - 4536.Cos^2\left(\frac{205}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{4400 - 4536.Cos^2 102,5}$$

olarak bulunur. $Cos^2\left(102,5\right)$ değerini hesaplar ve yerine yazarsak;

$$A(ABCD) = \sqrt{4400 - 4536.Cos^2 102,5} = \sqrt{4400 - 212,49} = \sqrt{4187,5} = 64,7$$

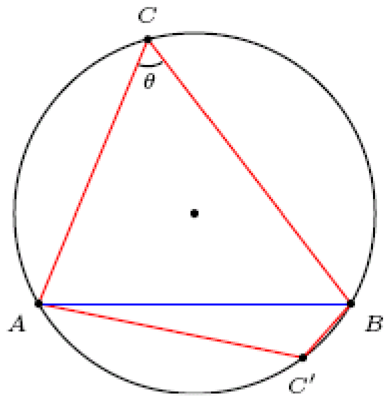
elde edilir ki böylece

$$A(ABCD) = 64,7\,\text{cm}^2$$

dir (LaRosa, 2003).

3. BRAHMAGUPTA DÖRTGENLERİNİN OLUŞTURULMASI

Bu bölümde Tanım 1.2.14 ile verilen kirişler dörtgeninin ya da Brahmagupta dörtgeninin özelliklerini veriyoruz. Daha sonra kullanacağımız için; çember geometrisi ve trigonometriden bazı iyi bilinen sonuçlarla başlıyoruz.



Şekil 3.1. Bir *ABC* Üçgeni ve Çevrel Çemberi

Şekil 3.1 *R* yarıçaplı bir çemberin [*AB*] kirişini göstermektedir. *C* ve *C′*, *AB* kirişinin ayırdığı farklı çember yayları üzerindeki noktalar olsun. Buradan;

$$\mathrm{m}(ACB) + \mathrm{m}(AC'B) = \pi \;\text{ ve }\; |\mathrm{AB}| = 2R\,Sin\theta \tag{3.1}$$

bulunur.

Brahmagupta dörtgenleri üzerindeki çalışmalarımız boyunca aşağıdaki gösterimleri standart olarak kullanacağız.

Teorem 3.1. *ABCD* köşe noktaları aynı çember üzerinde bulunan bir dörtgen (yani kirişler dörtgeni) olsun. Ayrıca bu dörtgenin; *a*, *b*, *c*, *d* kenar uzunluklarını; *e* ile *f* de köşegen uzunluklarını göstersin. Bu durumda $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ olmak üzere;

$$A(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{3.2}$$

biçiminde verilir. Ayrıca;

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}, \tag{3.3}$$

$$f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}, \tag{3.4}$$

dir (Sastry, 2002).

İspat. Teorem 1.2.4. ten kirişler dörtgeninde karşılıklı açıların bütünler olduğunu biliyoruz. Böylece *B* ve *D* açıları da karşılıklı açılar olduğuna göre ölçümleri toplamı 180^0 dir. Bunu alan formülünde yerine koyalım.

$$A(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcdCos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)} \tag{3.5}$$

$$A(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcdCos^2\left(\frac{180^0}{2}\right)} \tag{3.6}$$

olur ki burada $Cos\frac{180^0}{2} = 0$ olduğundan;

$$A(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{3.7}$$

elde edilir.

Tekrar Şekil 1.2. ye dönersek; *B* ve *D* açıları karşılıklı açılar olduğundan ölçümleri toplamı 180^0 dir. Bu da $CosB = -CosD$ olması anlamına gelir. Buradan;

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2abCosB \quad \text{ve} \quad e^2 = c^2 + d^2 - 2cdCosD \tag{3.8}$$

olur. Bu son iki ifadenin sol tarafları aynı olduğundan;

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2abCosB = c^2 + d^2 - 2cdCosD \tag{3.9}$$

yazabiliriz ki böylece;

$$\frac{a^2+b^2-e^2}{2ab} + \frac{c^2+d^2-e^2}{2cd} = CosB + CosD = 0 \tag{3.10}$$

elde ederiz. Yani;

$$\frac{a^2+b^2-e^2}{2ab} + \frac{c^2+d^2-e^2}{2cd} = 0 \tag{3.11}$$

dir. Burada gerekli işlemler yapıldığında;

$$e^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)} \tag{3.12}$$

ifadesine ulaşırız ki bu da;

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \tag{3.13}$$

olması demektir.

Benzer şekilde, *A* ve *C* açıları da dörtgende karşılıklı açılar olduğundan ölçümleri toplamı 180^0 dir. Bu da; $CosA = -Cos\,C$ olması anlamına gelir. Buradan da yukarıdakine benzer şekilde işlem yapıldığında;

$$f = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \tag{3.14}$$

bulunur.

Eğer (3.7) ifadesinde d = 0 alınırsa; bu ifade a, b, c kenarlı bir üçgene dönüşür ki alan formülü de bilinen Heron formülüdür.

Teorem 3.2 (Ptolemy Teoremi). Bir *ABCD* kirişler dörtgeninin kenar uzunluklarını $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ ile ve köşegen uzunluklarını da $|AC| = e$, $|BD| = f$ ile gösterelim. O zaman, kirişler dörtgenin köşegenlerinin çarpımı, karşılıklı kenarlarının çarpımlarının toplamına eşittir. Yani;

$$e.f = ac + bd \tag{3.15}$$

dir.

İspat. Yukarıda *ABCD* kirişler dörtgeninin köşegen uzunluklarının nasıl hesaplandığı verilmişti. Şimdi de bunlar birbirleri ile çarpılsın;

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \quad \text{ve} \quad f = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

ise;

$$e.f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \cdot \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \cdot \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} = \sqrt{(ac+bd)^2} = ac+bd$$

elde edilir ki ispat biter.

3.1. Heron Açıları ile Brahmagupta Dörtgenlerinin Tanıtılması

Bu kesimde; Heron açılarının terimlerinden hareketle Brahmagupta dörtgenlerinin bir oluşumunu vereceğiz.

Teorem 1.2.5. e göre $t = Tan\dfrac{\theta}{2}$ ise $Sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ve $Cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ dir.

Teorem 1.2.4. e göre, bir kirişler dörtgenin karşılıklı açıları bütünler olduğundan, böyle bir *ABCD* dörtgeni daima bir köşesine göre sınıflandırılabilir ki, bu açılar için $A,\ B \leq \dfrac{\pi}{2}$ ve $C,\ D \geq \dfrac{\pi}{2}$ olur. Bir *ABCD* kirişler dörtgeninin, bir dikdörtgen olması için gerek ve yeter şart $A = B = \dfrac{\pi}{2}$ olmasıdır. Ayrıca bu kirişler dörtgenin bir yamuk olması için gerek ve yeter şart ise $A = B$ olmasıdır.

Bir *ABCD* kirişler dörtgeninde $m\left(CAD\right) = m\left(CBD\right) = \theta$ olsun. Bu dörtgenin rasyonel olması için gerek ve yeter şart *A, B* ve θ açılarının Heron açıları olmasıdır.

Teorem 3.3. *ABCD* bir Brahmagupta dörtgeni ve m(DAC) = θ olmak üzere $t = Tan\dfrac{\theta}{2}$, $t_1 = Tan\dfrac{D}{2}$ ve $t_2 = Tan\dfrac{C}{2}$ ise;

$$a = \left(t\left(t_1 + t_2\right) + \left(1 - t_1 t_2\right)\right)\left(t_1 + t_2 - t\left(1 - t_1 t_2\right)\right),$$

$$b = \left(1 + t_1^2\right)\left(t_2 - t\right)\left(1 + t t_2\right),$$

$$c = t(1 + t_1^2)\left(1 + t_2^2\right),$$

$$d = \left(1 + t_2^2\right)\left(t_1 - t\right)\left(1 + t t_1\right),$$

$$e = t_1\left(1 + t^2\right)\left(1 + t_2^2\right),$$

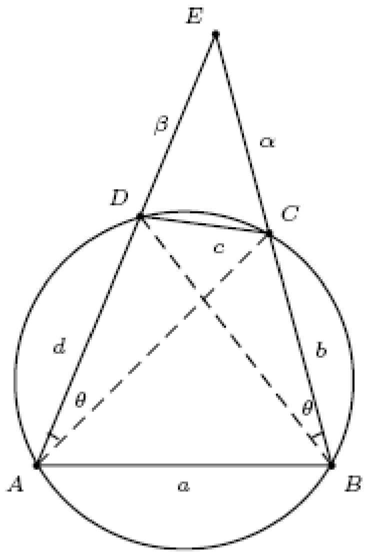
$$f = t_2\left(1 + t^2\right)\left(1 + t_1^2\right),$$

$$A(ABCD) = t_1 t_2\left(2t\left(1 - t_1 t_2\right) - \left(t_1 + t_2\right)\left(1 - t^2\right)\right)\left(2\left(t_1 + t_2\right)t + \left(1 - t_1 t_2\right)\left(1 - t^2\right)\right),$$

$$2R = \frac{\left(1 + t_1^2\right)\left(1 + t_2^2\right)\left(1 + t^2\right)}{2}$$

Olur (Sastry, 2002).

İspat. Bir *ABCD* Brahmagupta dörtgenin [*AD*] ve [*BC*] kenarları paralel olmamak üzere [*AD*] yi, *D* noktasından ve [*BC*] yi de *C* noktasından uzatarak, bu iki uzantının kesişim noktasını *E* ile gösterelim (*A, B* $\leq \dfrac{\pi}{2}$ kabulü altında, bu doğrular sadece, dörtgenin dikdörtgen olması durumunda paralel olur).



Şekil 3.2. Bir *ABCD* Kirişler Dörtgeninden Oluşturulan *EAB* Üçgeni

Şekil 3.2. de $|EC| = \alpha$ ve $|ED| = \beta$ olsun. *ABCD* kirişler dörtgeni olduğu için karşılıklı açıları bütünlerdir. Yani;

$$m(C)+m(C')=\pi \text{ ve } m(D)+m(D')=\pi \tag{3.16}$$

olur. Ayrıca Teorem 1.2.4. te de belirtildiği gibi

$$m(D)+m(B)=\pi \tag{3.17}$$

dir. O zaman;

$$\pi-m(D)=m(B)=m(D') \tag{3.18}$$

olacağı açıktır. Yani;

$$m(EDC) = m(EBA) \tag{3.19}$$

olur. Yine *ABCD* kirişler dörtgeni olduğu için;

$$m(A)+m(C)=\pi \tag{3.20}$$

dir. O zaman;

$$\pi-m(C)=m(A)=m(C') \tag{3.21}$$

olacağı açıktır. Yani

$$m(ECD)= m(EAB) \tag{3.22}$$

olur. Burada *E* ortak açı olduğundan ve (3.19) ile (3.22) den, Açı-Açı-Açı benzerlik teoremine göre *EAB* ile *ECD* üçgenlerinin benzer olduğu görülür ve *EAB* ~ *ECD* biçiminde gösterilir. O halde;

$$\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|EB|}{|ED|}=\frac{|EA|}{|EC|}=\lambda \tag{3.23}$$

olarak yazılabilir. Burada, Tanım 1.2.15. ten faydalanarak;

$$SinC = Sin(\pi - C) = SinC' = SinA \text{ ve } SinB = Sin(\pi - B) = SinB' = SinD \tag{3.24}$$

yazılabilir. Öyle ki;

$$\frac{a}{c}=\frac{\alpha+b}{\beta}=\frac{\beta+d}{\alpha}=\lambda \tag{3.25}$$

veya

$$a=\lambda c, \quad b=\lambda\beta-\alpha, \quad d=\lambda\alpha-\beta, \quad \lambda>\max\left(\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{3.26}$$

olur. Ayrıca Sinüs Teoreminden;

$$e=2RSinB=2RSinD=\frac{R}{\rho}\alpha \text{ ve } f=2RSinA=2RSinC=\frac{R}{\rho}\beta \tag{3.27}$$

elde edilir. Burada R, $ABCD$ kirişler dörtgeninin yarıçapı; ρ da ECD üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapıdır. Böylece;

$$\alpha = 2\rho.SinD, \qquad \beta = 2\rho Sin\, C, \qquad c = 2\rho SinE \tag{3.28}$$

bulunur. Ptolemy Teoreminden $ac+bd=ef$ idi. Yukarıda bulunan e ile f değerleri ile benzerlik kurarak bulunan a, b, c ve d değerleri Ptolemy Teoreminde yerine yazılırsa;

$$\frac{R^2}{\rho^2}.\alpha\beta = c^2\lambda + (\beta\lambda-\alpha)(\alpha\lambda-\beta) \tag{3.29}$$

elde edilir. Bu son denklem düzenlenirse;

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 = \lambda^2-\frac{\alpha^2+\beta^2-c^2}{\alpha\beta}\lambda+1=\lambda^2-2\lambda.Cos\,E+1$$

$$=\lambda^2-2\lambda.Cos\,E+Cos^2\,E+Sin^2\,E=(\lambda-Cos\,E)^2+Sin^2E$$

yani

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^2=(\lambda-Cos\,E)^2+Sin^2E \tag{3.30}$$

olur. Bu da;

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^2-(\lambda-Cos\,E)^2=Sin^2\,E \tag{3.31}$$

şeklinde yazılabilir. Burada iki kare farkı özdeşliği kullanılarak;

$$\left(\frac{R}{\rho}-\lambda+CosE\right)\left(\frac{R}{\rho}+\lambda-CosE\right)=Sin^2E \tag{3.32}$$

elde edilir. Teorem 1.2.5. ten faydalanarak, E açısının da bir Heron açısı olduğu söylenir. Böylece Tanım 1.2.5. ten $SinE$ ve $CosE$ ler rasyonel olur. R ve λ nın rasyonel değerlerini elde ederken bir t rasyonel sayısı için;

$$\frac{R}{\rho}-\lambda+CosE=t.SinE \text{ ve } \frac{R}{\rho}+\lambda-CosE=\frac{SinE}{t} \tag{3.33}$$

olarak kabul edelim. Bu ifadelerden;

$$R=\frac{\rho}{2}SinE\left(t+\frac{1}{t}\right)=\frac{c}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right) \text{ ve } \lambda=\frac{1}{2}SinE\left(\frac{1}{t}-t\right)+CosE \tag{3.34}$$

elde edilir. Burada R nin ifadesinden $t=Tan\frac{\theta}{2}$ olacağı açıktır. Çünkü**;**

$$R=\frac{c}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\frac{c}{4}\left(Tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{Tan\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{c}{4}\left(\frac{Tan^2\frac{\theta}{2}+1}{Tan\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{c}{4}\left(\frac{\frac{Sin^2\frac{\theta}{2}+Cos^2\frac{\theta}{2}}{Cos^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{Sin\frac{\theta}{2}}{Cos\frac{\theta}{2}}}\right)$$

$$R=\frac{c}{4}\left(\frac{1}{Cos^2\frac{\theta}{2}}.\frac{Cos\frac{\theta}{2}}{Sin\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{c}{4}\left(\frac{1}{Cos\frac{\theta}{2}.Sin\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{c}{2}.\left(\frac{1}{2Cos\frac{\theta}{2}Sin\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{c}{2}\left(\frac{1}{Sin\theta}\right)$$

olup, yani

$$R=\frac{c}{2Sin\theta} \tag{3.35}$$

dir. Buradan da;

$$c=2RSin\theta \tag{3.36}$$

olduğu görülür. Eğer burada C ve D Heron açıları için; $t_1=Tan\frac{D}{2}$ ve $t_2=Tan\frac{C}{2}$ alınırsa, Teorem 1.2.5. ten;

$$CosD=\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2},\ SinD=\frac{2t_1}{1+t_1^2} \text{ ve } CosC=\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2},\ SinC=\frac{2t_2}{1+t_2^2} \tag{3.37}$$

elde edilir. Burada bulduğumuz değerleri;

Cos(D + C) = CosD CosC – SinD.SinC = – CosE

denkleminde yerine yazarsak;

$$CosE = \frac{(t_1+t_2)^2-(1-t_1t_2)^2}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)} \tag{3.38}$$

bulunur. Benzer şekilde

Sin(D + C) = SinD.CosC + SinC.CosD = SinE

olup

$$SinE = \frac{2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)} \tag{3.39}$$

elde edilir. Yukarıda (3.28) ile (3.36) da

$c = 2\rho.SinE = 2R.Sin\theta$

idi. Burada da *SinE* ve *Sinθ* değerlerini yerine yazarsak;

$$c = 2\rho\frac{2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)} = 2R\frac{2t}{1+t^2} \tag{3.40}$$

olur. Gerekli işlemleri yaptığımızda;

$$c = \frac{\rho}{R}(1+t^2)(t_1+t_2)(1-t_1t_2) = t(1+t_1^2)(1+t_2^2) \tag{3.41}$$

bulunur. Sonuçta

$$c = t(1+t_1^2)(1+t_2^2) \tag{3.42}$$

olup, (3.28) de $\alpha = 2\rho.SinD$ ve $c = 2\rho.Sin\ E$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\rho = \frac{c}{2SinE} = \frac{t\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)}{2\dfrac{2\left(t_1+t_2\right)\left(1-t_1t_2\right)}{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)}} \tag{3.43}$$

olur. Bunu ve $SinD = \dfrac{2t_1}{1+t_1^2}$ değerini $\alpha = 2\rho.SinD$ de yerine yazar ve gerekli kısaltma

işlemlerini yaparsak;

$$\alpha = \frac{tt_1(1+t_1^2)(1+t_2^2)^2}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)} \tag{3.44}$$

olur. Benzer şekilde $\beta = 2\rho.Sin\ C$ idi. Burada da

$$\rho = \frac{c}{2SinE} = \frac{t\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)}{2\dfrac{2\left(t_1+t_2\right)\left(1-t_1t_2\right)}{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)}} \quad \text{ve} \quad SinC = \frac{2t_2}{1+t_2^2}$$

değerini $\beta = 2\rho.SinC$ de yerine yazar ve gerekli kısaltma işlemlerini yaparsak;

$$\beta = \frac{tt_2(1+t_1^2)^2(1+t_2^2)}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)} \tag{3.45}$$

bulunur. Yine yukarda yapılan işlemlerde;

$$\lambda = \frac{1}{2}SinE\left(\frac{1}{t}-t\right)+CosE$$

bulunmuştu. Buradan da $SinE$ ve $CosE$ değerleri yerine yazılırsa;

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)}\left(\frac{1}{t}-t\right)+\frac{(t_1+t_2)^2-(1-t_1t_2)^2}{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)} \tag{3.46}$$

elde edilir. Yukarıda yapılan işlemlerde; bulunan tüm bu değerleri $ABCD$ Brahmagupta dörtgeninin kenarlarını, köşegenlerini, alanını ve bu dörtgeni çevreleyen çemberin çapını bulmada kullanalım.

$$\begin{aligned}
a = \lambda c &= \left(\frac{1}{2}\frac{2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)}\left(\frac{1}{t}-t\right)+\frac{(t_1+t_2)^2-(1-t_1t_2)^2}{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)}\right)\left(t\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)\right) \\
&= \left[(t_1+t_2)(1-t_1t_2)(1-t^2)+t(t_1+t_2)^2-t(1-t_1t_2)^2\right](t_1+t_2)(1-t_1t_2) \\
&= \left[(t_1+t_2)(1-t_1t_2)-t^2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)+t(t_1+t_2)^2-t(1-t_1t_2)^2\right] \\
&= (t_1+t_2)\left[(1-t_1t_2)+t(t_1+t_2)\right]-t(1-t_1t_2)\left[t(t_1+t_2)+(1-t_1t_2)\right] \\
&= \left[(t_1+t_2)-t(1-t_1t_2)\right]\left[(1-t_1t_2)+t(t_1+t_2)\right]
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde; $b = \lambda\beta - \alpha$, $d = \lambda\alpha - \beta$, ifadelerinde de λ , α ve β değerleri yerine yazılırsa;

$$b = \left(1+t_1^2\right)(t_2-t)(1+tt_2), \qquad d = \left(1+t_2^2\right)(t_1-t)(1+tt_1),$$

olarak bulunur. Burada $\lambda > \max\left(\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}\right)$ dır; çünkü $\lambda - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{b}{\beta}$ dır. Yani $\frac{b}{\beta}$ nın pozitif değer olması için λ nın $\frac{\alpha}{\beta}$ nın maksimum değerinden daha büyük olması gerekir. Benzer durum $\frac{\beta}{\alpha}$ için de geçerlidir. Ayrıca sinüs teoreminden;

$$e = 2RSinB = 2RSinD = \frac{R}{\rho}.\alpha ,$$

idi. Eğer; $R = \dfrac{c}{2Sin\theta}$ ve $\rho = \dfrac{c}{2SinE}$ değerleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa;

$$e = 2R\ SinB = 2R\ Sin\ D = \frac{R}{\rho}.\alpha = \frac{\frac{c}{2Sin\theta}}{\frac{c}{2SinE}}.\ \alpha = \frac{SinE}{Sin\theta}.\ \alpha$$

$$= \frac{\frac{2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}}{\frac{2t}{1+t^2}}.\frac{tt_2(1+t_1^2)^2(1+t_2^2)}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)} = t_1(1+t^2)(1+t_1^2)$$

bulunur. Benzer işlemler $f = 2R.SinA = 2R.SinC = \frac{R}{\rho}.\beta$ için de uygulanırsa;

$$f = t_2(1+t^2)(1+t_1^2)$$

olur. Ayrıca

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} \quad \text{ve} \quad A(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

idi. Önce yukarıda bulduğumuz *a, b, c* ve *d* ifadelerinde parantezler açılırsa;

$$a = (t(t_1+t_2) + (1-t_1t_2))(t_1+t_2-t(1-t_1t_2))$$

$$= (tt_1+tt_2+1-t_1t_2)(t_1+t_2-t+tt_1t_2)$$

$$= tt_1^2 + tt_1t_2 - t^2t_1 + t^2t_1^2t_2 + tt_1t_2 + tt_2^2$$

$$-t^2t_2 + t^2t_1t_2^2 + t_1 + t_2 - t + tt_1t_2 - t_1^2t_2 - t_1t_2^2 + tt_1t_2 - tt_1^2t_2^2$$

$$= tt_1^2 + 4\,tt_1t_2 - t^2t_1 - t^2t_2 - t_1^2t_2 - t_1t_2^2 - t + t_1 + t_2\ t^2t_1t_2^2 + t^2t_1^2t_2 - tt_1^2t_2^2 + tt_2^2$$

$$b = (1+t_1^2)(t_2-t)(1+tt_2) = (t_2 - t + t_1^2t_2 - t_1^2t)(1+tt_2)$$

$$= t_2 - t + t_1^2t_2 - t_1^2t + tt_2^2 - t^2t_2 + tt_1^2t_2^2 - t^2t_1^2t_2$$

$$c = t(1+t_1^2)(1+t_2^2)$$

$$= t + tt_1^2 + tt_2^2 + tt_1^2t_2^2$$

$$d = (1+t_2^2)(t_1-t)(1+tt_1) = (t_1 - t + t_1t_2^2 - tt_2^2)(1+tt_1)$$

$$= (t_1 - t + t_1t_2^2 - tt_2^2 + tt_1^2 - t^2t_1 + tt_1^2t_2^2 - t^2t_1t_2^2)$$

bulunur. Bulduğumuz ifadeler; s de yerine yazılırsa;

$$a+b+c+d = 2tt_1^2t_2^2 + 2tt_1^2 + 2tt_2^2 - 2t^2t_1^2 - 2t^2t_2^2 + 4tt_1t_2 - 2t + 2t_1 + 2t_2$$

den

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} = tt_1^2t_2^2 + tt_1^2 + tt_2^2 - t^2t_1^2 - t^2t_2^2 + 2tt_1t_2 - t + t_1 + t_2$$

elde edilir. Sonra da;

$$(s-a) = \frac{b+c+d-a}{2} = t_1t_2\left[2t(t_1t_2-1) + (1-t^2)(t_1+t_2)\right]$$

$$(s-b) = \frac{a+c+d-b}{2} = t_1\left[2t(t_1+t_2) + (1-t^2)(1-t_1t_2)\right]$$

$$(s-c) = \frac{a+b+d-c}{2} = \left[2t(t_1t_2-1) + (1-t^2)(t_1+t_2)\right]$$

$$(s-d) = \frac{a+b+c-d}{2} = t_2\left[2t(t_1+t_2) + (1-t^2)(1-t_1t_2)\right]$$

olur. Burada yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa;

$$A(ABCD)^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

$$A(ABCD)^2 = t_1^2t_2^2\left[2t(t_1t_2-1) + (1-t^2)(t_1+t_2)\right]^2\left[2t(t_1+t_2) + (1-t^2)(1-t_1t_2)\right]^2$$

elde edilir ki, her iki tarafın karekökü alınırsa;

$$A(ABCD) = t_1t_2\left[2t(t_1t_2-1) + (1-t^2)(t_1+t_2)\right]\left[2t(t_1+t_2) + (1-t^2)(1-t_1t_2)\right]$$

bulunur. Benzer şekilde;

$$c = 2RSin\theta \text{ ve } c = t(1+t_1^2)(1+t_2^2)$$

olduğundan;

$$2R = \frac{c}{Sin\theta} = \frac{t(1+t_1^2)(1+t_2^2)}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{(1+t^2)(1+t_1^2)(1+t_2^2)}{2}$$

dir. Bu ifadelerde *m, n, p, q, u, v* tamsayıları için $t_1 = \frac{n}{m}$, $t_2 = \frac{q}{p}$ ve $t = \frac{v}{u}$ olarak alınır; kenarlar ve köşegenlerdeki paydalar sadeleştirilirse, Brahmagupta dörtgenleri elde edilir. Ayrıca her bir Brahmagupta dörtgeni bu yolla elde edilir.

Sonuç 3.3.1. Yukarıdaki *ABCD* dörtgeninin parametrik gösteriminde $t_1 = t_2 = \frac{n}{m}$ seçilir ve $t = \frac{v}{u}$ yazılırsa;

$$a=\left(m^2u-n^2u+2mnv\right)\left(2mnu-m^2v+n^2v\right),$$

$$b=d=\left(m^2+n^2\right)\left(nu-mv\right)\left(mu+nv\right),$$

$$c=\left(m^2+n^2\right)^2uv,$$

$$e=f=mn(m^2+n^2)\left(u^2+v^2\right)$$

biçiminde Brahmagupta yamuğunun kenar ve köşegenleri verilir. Ayrıca alanı;

$$A(ABCD)=2m^2n^2(nu-mv)(mu+nv)\big((m+n)u-(m-n)v\big)\big((m+n)v+(m-n)u\big)$$

olup, çevrel çemberinin çapı da;

$$2R=\frac{\left(m^2+n^2\right)^2\left(u^2+v^2\right)}{2}$$

biçiminde verilir (Sastry, 2002).

İspat. $a=\left(t\left(t_1+t_2\right)+\left(1-t_1t_2\right)\right)\left(t_1+t_2-t\left(1-t_1t_2\right)\right)$

$$=\left[\frac{v}{u}\left(\frac{n}{m}+\frac{n}{m}\right)+\left(1-\frac{n}{m}\frac{n}{m}\right)\right]\left[\frac{n}{m}+\frac{n}{m}-\frac{v}{u}\left(1-\frac{n}{m}\frac{n}{m}\right)\right]$$

$$=\left[2\frac{vn}{um}+\left(\frac{m^2-n^2}{m^2}\right)\right]\left[2\frac{n}{m}-\frac{v}{u}\left(\frac{m^2-n^2}{m^2}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{2vnm+um^2-un^2}{um^2}\right]\left[\frac{2mnu-vm^2+vn^2}{um^2}\right]$$

$$=\left(m^2u-n^2u+2mnv\right)\left(2mnu-m^2v+n^2v\right)\frac{1}{u^2m^4},$$

$$b=\left(1+t_1^2\right)\left(t_2-t\right)\left(1+tt_2\right)$$

$$=\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)\left(\frac{n}{m}-\frac{v}{u}\right)\left(1+\frac{v}{u}\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{m^2+n^2}{m^2}\right)\left(\frac{nu-mv}{mu}\right)\left(\frac{um+vn}{um}\right)$$

$$=\left(m^2+n^2\right)\left(nu-mv\right)\left(mu+nv\right)\frac{1}{u^2m^4}$$

ve

$$d=\left(1+t_2^2\right)\left(t_1-t\right)\left(1+tt_1\right)$$

$$=\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)\left(\frac{n}{m}-\frac{v}{u}\right)\left(1+\frac{v}{u}\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{m^2+n^2}{m^2}\right)\left(\frac{nu-mv}{mu}\right)\left(\frac{um+vn}{um}\right)$$

$$=\left(m^2+n^2\right)\left(nu-mv\right)\left(mu+nv\right)\frac{1}{u^2m^4}$$

bulunur ki burada $t_1 = t_2$ olduğundan $d = b$ elde edildi. Öte yandan

$$c = t(1+t_1^2)(1+t_2^2)$$

$$= \frac{v}{u}\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right) = \frac{v}{u}\left(\frac{m^2+n^2}{m^2}\right)^2 = \frac{v}{u}\left(\frac{m^2+n^2}{m^2}\right)^2\frac{u}{u}$$

$$= \left(m^2+n^2\right)^2 uv\frac{1}{u^2m^4},$$

$$e = t_1\left(1+t^2\right)\left(1+t_2^2\right) = \left[\frac{n}{m}\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{n}{m}\left(\frac{u^2+v^2}{u^2}\right)\left(\frac{m^2+n^2}{m^2}\right)\right] = \left[\frac{n}{m}\left(\frac{u^2+v^2}{u^2}\right)\left(\frac{m^2+n^2}{m^2}\right)\right]\frac{m}{m}$$

$$= mn\left(u^2+v^2\right)\left(m^2+n^2\right)\frac{1}{u^2m^4}$$

ve

$$f = t_2\left(1+t^2\right)\left(1+t_1^2\right) = \left[\frac{n}{m}\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{n}{m}\left(\frac{u^2+v^2}{u^2}\right)\left(\frac{m^2+n^2}{m^2}\right)\right] = \left[\frac{n}{m}\left(\frac{u^2+v^2}{u^2}\right)\left(\frac{m^2+n^2}{m^2}\right)\right]\frac{m}{m}$$

$$= mn\left(u^2+v^2\right)\left(m^2+n^2\right)\frac{1}{u^2m^4}$$

bulunur ki burada $t_1 = t_2$ olduğundan $e = f$ elde edilir. Alana gelince;

$$a = \left(m^2u - n^2u + 2mnv\right)\left(2mnu - m^2v + n^2v\right)\frac{1}{u^2m^4},$$

$$b = \left(m^2+n^2\right)\left(nu-mv\right)\left(mu+nv\right)\frac{1}{u^2m^4},$$

$$c = \left(m^2+n^2\right)^2 uv\frac{1}{u^2m^4},$$

$$d = \left(m^2+n^2\right)\left(nu-mv\right)\left(mu+nv\right)\frac{1}{u^2m^4},$$

olduğundan;

$$2s = a+b+c+d = \left[\begin{array}{l}\left(m^2u-n^2u+2mnv\right)\left(2mnu-m^2v+n^2v\right)\\ +2\left(m^2+n^2\right)\left(nu-mv\right)\left(mu+nv\right)+\left(m^2+n^2\right)^2 uv\end{array}\right]\frac{1}{u^2m^4}$$

$$=(4m^3nu^2-2m^4uv-4m^3nv^2+2n^4uv+8m^2n^2uv)\ \frac{1}{u^2m^4}$$

olur. Buradan da;

$$s=\frac{a+b+c+d}{2}=(2m^3nu^2-m^4uv-2m^3nv^2+n^4uv+4m^2n^2uv)\ \frac{1}{u^2m^4}\,,$$

bulunur. Alanın;

$$A(ABCD)=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

olduğunu biliyoruz. O zaman gerekli işlemler yapıldığında;

$$(s-a)=2n^2(mnu^2-m^2uv-mnu^2+n^2uv)\ \frac{1}{u^2m^4}\,,$$

$$(s-b)=mn(m^2u^2-m^2v^2+4mnuv-n^2u^2+n^2v^2)\ \frac{1}{u^2m^4}\,,$$

$$(s-c)=2m^2(mnu^2-m^2uv-mnu^2+n^2uv)\ \frac{1}{u^2m^4}$$

$$(s-d)=mn(m^2u^2-m^2v^2+4mnuv-n^2u^2+n^2v^2)\ \frac{1}{u^2m^4}$$

olur. Bulduğumuz bu değerleri taraf tarafa çarparsak;

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)=4m^4n^4\left[m^2u^2-m^2v^2+4mnuv-n^2u^2+n^2v^2\right]^2$$
$$\left[mnu^2-m^2uv-mnv^2+n^2uv\right]^2\left(\frac{1}{u^2m^4}\right)^4$$

olur ki bu da alan formülünde yerine yazılırsa;

$$A(ABCD)=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$=2m^2n^2\left[m^2(u^2-v^2)+4mnuv-n^2(u^2-v^2)\right].\left[mn(u^2-v^2)+uv(m^2+n^2)\right]\left(\frac{1}{u^2m^4}\right)^2$$

$$=2m^2n^2\left[(m^2-n^2)(u^2-v^2)+4mnuv\right].\left[(nu-mv)(mu+nv)\right]\left(\frac{1}{u^2m^4}\right)^2$$

$$=2m^2n^2\left[(nu-mv)(mu+nv)\right]\left[(nu-mv)(mu+nv)\right]\left(\frac{1}{u^2m^4}\right)^2$$

$$=2m^2n^2\left(nu-mv\right)\left(mu+nv\right)\left[\left(m+n\right)u-\left(m-n\right)v\right]\left[\left(m+n\right)v-\left(m-n\right)u\right]\left(\frac{1}{u^2m^4}\right)^2$$

elde edilir. Ayrıca çevrel çemberin çapı;

$$2R=\frac{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)\left(1+t^2\right)}{2}=\frac{\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{m^2+n^2}{m^2}\right)^2\left(\frac{u^2+v^2}{u^2}\right)}{2}=\frac{\left(m^2+n^2\right)^2\left(u^2+v^2\right)}{2u^2m^4}$$

$$=\frac{\left(m^2+n^2\right)^2\left(u^2+v^2\right)}{2}.\frac{1}{u^2m^4}$$

olarak hesaplanır. Bu dörtgende kenarların ve köşegenlerin her birini bunların en küçük ortak katları olan $\frac{1}{u^2m^4}$ ile bölersek;

$$a = \left(m^2u - n^2u + 2mnv\right)\left(2mnu - m^2v + n^2v\right),$$
$$b = d = \left(m^2 + n^2\right)\left(nu - mv\right)\left(mu + nv\right),$$
$$c = \left(m^2 + n^2\right)^2 uv,$$
$$e = f = mn(m^2 + n^2)\left(u^2 + v^2\right),$$
$$A(ABCD) = 2m^2n^2(nu - mv)(mu + nv)\left((m+n)u - (m-n)v\right)\left((m+n)v + (m-n)u\right)$$
$$2R = \frac{\left(m^2 + n^2\right)^2\left(u^2 + v^2\right)}{2}$$

değerlerine ulaşırız ki ispat biter.

Sonuç 3.3.1 de verilen ifadelere uygun bazı *m, n, u, v* değerlerine karşılık elde edilen dörtgenlerin alanları ile kenar, köşegen ve çevrel çemberlerinin çap uzunlukları Tablo 3.1 ile verilmiştir.

Tablo 3.1

m	*n*	*u*	*v*	*a*	*b = d*	*c*	*e= f*	*A(ABCD)*	*2R*
1	2	1	1	7	15	25	20	192	25
1	1	2	1	8	6	8	10	48	10
1	2	2	3	102	40	150	130	4032	162,5
1	3	1	2	88	70	200	150	6048	250
1	4	1	2	38	306	578	340	44352	722,5
2	1	3	1	117	35	75	100	2688	125
3	2	3	1	837	429	507	780	266112	845
2	1	4	1	208	90	100	170	11088	212,5
3	1	4	1	608	130	400	510	39312	850
4	5	4	3	15708	10168	20172	20500	177964800	21012,5
1	2	3	5	297	65	375	340	17472	425
2	1	5	1	323	165	125	260	29568	325
2	1	6	1	462	260	150	370	63648	462,5
2	1	7	1	625	375	175	500	120000	625
5	3	7	1	27548	20672	8092	25500	325036800	28900
2	1	7	2	638	240	350	530	94848	662,5
2	1	7	3	627	85	525	580	39168	725
2	1	8	1	812	510	200	650	206448	812,5
3	1	5	1	1012	320	500	780	145152	1300
3	1	7	2	1768	230	1400	1590	218592	2650

Sonuç 3.3.2. Yukarıdaki *ABCD* kirişler dörtgeni [AD] ve [BC] kenarları paralel olmayan bir Brahmagupta dörtgeni ise [AD] yi *D* noktasından ve [BC] yi de *C* noktasından uzatırsak *E* onların kesişim noktasını göstermek şartıyla bir *ECD* üçgeni

oluşur. Eğer bu *ECD* üçgeni kenar uzunlukları $|CD| = m^2 + n^2$, $|EC| = 2mn$, $|ED| = m^2 - n^2$ olan bir dik üçgen olarak seçilirse;

$$a = (m^2 + n^2)(u^2 - v^2),$$

$$b = \big((m-n)u - (m+n)v\big)\big((m+n)u + (m-n)v\big),$$

$$c = 2(m^2 + n^2)uv,$$

$$d = 2(nu - mv)(mu + nv),$$

$$e = 2mn(u^2 + v^2),$$

$$f = (m^2 - n^2)(u^2 + v^2);$$

$$A(ABCD) = mn(m^2 - n^2)(u^2 + 2uv - v^2)(u^2 - 2uv - v^2)$$

$$2R = (m^2 + n^2)(u^2 + v^2)$$

elde edilir. Burada , $\frac{u}{v} > \frac{m}{n}$; $\frac{u}{v} > \frac{m+n}{m-n}$ dir (Sastry, 2002).

İspat. Eğer $t_1 = Tan\frac{D}{2}$ ise $SinD = \frac{2t_1}{1+t_1^2} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ olduğundan $t_1 = \frac{n}{m}$ olur.

Eğer $t_2 = Tan\frac{C}{2}$ ise $SinC = \frac{2t_2}{1+t_2^2} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ olduğundan $t_2 = \frac{m-n}{m+n}$ bulunur.

Eğer $t = Tan\frac{\theta}{2}$ ise $Sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2uv}{u^2+v^2}$ olduğundan $t = \frac{v}{u}$ olur. Ayrıca

$$a = \big(t(t_1 + t_2) + (1 - t_1t_2)\big)\big(t_1 + t_2 - t(1 - t_1t_2)\big)$$

idi. Burada t, t_1 ve t_2 değerlerini yerine yazarsak,

$$a = \left[\frac{v}{u}\left(\frac{n}{m} + \frac{m-n}{m+n}\right) + \left(1 - \frac{n}{m}\frac{m-n}{m+n}\right)\right]\left[\frac{n}{m} + \frac{m-n}{m+n} - \frac{v}{u}\left(1 - \frac{n}{m}\frac{m-n}{m+n}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{v}{u}\left(\frac{mn + n^2 + m^2 - mn}{m(m+n)}\right) + \left(\frac{m^2 + mn - mn + n^2}{m(m+n)}\right)\right]$$

$$\left[\frac{mn + n^2 + m^2 - mn}{m(m+n)} - \frac{v}{u}\left(\frac{m^2 + mn - mn + n^2}{m(m+n)}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{v(m^2 + n^2) + u(m^2 + n^2)}{um(m+n)}\right]\left[\frac{u(m^2 + n^2) - v(m^2 + n^2)}{um(m+n)}\right]$$

$$= (m^2 + n^2)(u^2 - v^2)\frac{(m^2 + n^2)}{u^2m^2(m+n)^2}$$

olur. Benzer şekilde t, t_1 ve t_2 değerlerini; *b, c, d, e, f, A(ABCD)* ve $2R$ değerlerinde de yerine yazarsak;

$$b = (1 + t_1^2)(t_2 - t)(1 + tt_2)$$

$$b=\left(\left(m-n\right)u-\left(m+n\right)v\right)\left(\left(m+n\right)u+\left(m-n\right)v\right)\ \frac{\left(m^2+n^2\right)}{u^2m^2(m+n)^2}$$

$$c=t(1+t_1^2)\left(1+t_2^2\right)=2(m^2+n^2)uv\ \frac{\left(m^2+n^2\right)}{u^2m^2(m+n)^2}$$

$$d=\left(1+t_2^2\right)\left(t_1-t\right)\left(1+tt_1\right)=2(nu-mv)(mu+nv)\ \frac{\left(m^2+n^2\right)}{u^2m^2(m+n)^2}$$

$$e=t_1\left(1+t^2\right)\left(1+t_2^2\right)=2mn(u^2+v^2)\ \frac{\left(m^2+n^2\right)}{u^2m^2(m+n)^2}$$

$$f=t_2\left(1+t^2\right)\left(1+t_1^2\right)=\left(m^2-n^2\right)\left(u^2+v^2\right)\ \frac{\left(m^2+n^2\right)}{u^2m^2(m+n)^2}$$

$$A(ABCD)=t_1t_2\left(2t\left(1-t_1t_2\right)-\left(t_1+t_2\right)\left(1-t^2\right)\right)\left(2\left(t_1+t_2\right)t+\left(1-t_1t_2\right)\left(1-t^2\right)\right)$$

$$=mn(m^2-n^2)(u^2+2uv-v^2)(u^2-2uv-v^2)\left(\frac{\left(m^2+n^2\right)}{u^2m^2(m+n)^2}\right)^2$$

$$2R=\frac{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)\left(1+t^2\right)}{2}=\left(m^2+n^2\right)\left(u^2+v^2\right)\frac{\left(m^2+n^2\right)}{u^2m^2(m+n)^2}$$

elde edilir. Burada da kenarların ve köşegenlerin her birini, bunların en küçük ortak katları olan $\frac{\left(m^2+n^2\right)}{u^2m^2(m+n)^2}$ ile bölersek aranan değerleri buluruz.

Sonuç 3.3.2 de verilen ifadelere uygun bazı *m, n, u, v* değerlerine karşılık elde edilen dörtgenlerin alanları ile kenar, köşegen ve çevrel çemberlerinin çap uzunlukları Tablo 3.2 ile verilmiştir.

Tablo 3.2.

m	*n*	*u*	*v*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*A(ABCD)*	*2R*
2	1	3	1	40	0	30	14	40	30	168	50
2	1	4	1	75	13	40	36	68	51	966	85
2	1	5	1	120	32	50	66	104	78	2856	130
2	1	6	1	175	57	60	104	148	111	6486	185
2	1	7	1	240	88	70	150	200	150	12648	250
2	1	7	2	225	23	140	96	212	159	7446	265
2	1	8	1	315	125	80	204	260	195	22278	325
2	1	8	2	300	52	160	144	272	204	15456	340
2	1	9	1	400	168	90	266	328	246	36456	410
2	1	9	2	385	87	180	200	340	255	27798	425
3	1	4	1	150	72	80	26	102	136	3864	170
3	1	5	1	240	132	100	64	156	208	11424	260
3	1	6	1	350	208	120	114	222	296	25944	370
3	1	7	1	480	300	140	176	300	400	50592	500
3	1	7	2	450	192	280	46	318	424	29784	530
3	1	8	1	630	408	160	250	390	520	89112	650
3	1	8	2	600	288	320	104	408	544	61824	680

3	1	9	1	800	532	180	336	492	656	145824	820
3	1	9	2	770	400	360	174	510	680	111192	850
3	2	6	1	455	31	156	360	444	185	32430	481
3	2	7	1	624	72	182	506	600	250	63240	650
3	2	8	1	819	123	208	676	780	325	111390	845
3	2	9	1	1040	184	234	870	984	410	182280	1066
4	1	5	1	408	280	170	42	208	390	28560	442
4	1	6	1	595	429	204	100	296	555	64860	629
4	1	7	1	816	608	238	174	400	750	126480	850
4	1	8	1	1071	817	272	264	520	975	222780	1105
4	1	9	1	1360	1056	306	370	656	1230	364560	1394
4	1	9	2	1309	867	612	76	680	1275	277980	1445

Sonuç 3.3.3. Yukarıdaki *ABCD* kirişler dörtgeni [AD] ve [BC] kenarları paralel olmayan bir Brahmagupta dörtgeni ise [AD] yi *D* noktasından ve [BC] yi de *C* noktasından uzatırsak *E* onların kesişim noktasını göstermek şartıyla bir *ECD* üçgeni oluşur. Eğer bu *ABCD* kirişler dörtgeninde θ açısı; $A + B - \theta = \dfrac{\pi}{2}$ olarak seçilirse, [AB] kenarı *ABCD* nin çevrel çemberinin çapı olur. Bu durumda;

$$t = Tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-t_3}{1+t_3} = \frac{t_1+t_2-1+t_1t_2}{t_1+t_2+1-t_1t_2}$$

elde edilir. Burada $t_1 = \dfrac{n}{m}$, $t_2 = \dfrac{q}{p}$ ve $t = \dfrac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p-(m-n)q}$ olarak alınırsa;

$$a = (m^2+n^2)(p^2+q^2),$$

$$b = (m^2-n^2)(p^2+q^2),$$

$$c = ((m+n)p-(m-n)q)((m+n)q-(m-n)p)\ ,$$

$$d = (m^2+n^2)(p^2-q^2),$$

$$e = 2mn(p^2+q^2),$$

$$f = 2pq(m^2+n^2)$$

$$A(ABCD) = 4mnpq(mq+np)(mp-nq)$$

ve

$$2R = (m^2+n^2)(p^2+q^2)$$

biçiminde olan bir Brahmagupta dörtgenini elde ederiz (Sastry, 2002).

İspat. $t = Tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-t_3}{1+t_3} = \dfrac{t_1+t_2-1+t_1t_2}{t_1+t_2+1-t_1t_2} = \dfrac{t_1+t_2-(1-t_1t_2)}{t_1+t_2+(1-t_1t_2)} = \dfrac{1-\dfrac{1-t_1t_2}{t_1+t_2})}{1+\dfrac{1-t_1t_2}{t_1+t_2})}$

ise; $t_3 = \dfrac{1-t_1t_2}{t_1+t_2}$ olur. Buradan da $t_1 = \dfrac{n}{m}$ ve $t_2 = \dfrac{q}{p}$ değerlerini yerine yazarsak,

$$t_3 = \frac{1-t_1t_2}{t_1+t_2} = \frac{1-\frac{n}{m}\frac{q}{p}}{\frac{n}{m}+\frac{q}{p}} = \frac{mp-nq}{mp}.\frac{mp}{np+mq} = \frac{mp-nq}{np+mq}$$

olur. Yani;

$$t = \frac{1-t_3}{1+t_3} = \frac{1-\dfrac{mp-nq}{np+mq}}{1+\dfrac{mp-nq}{np+mq}} = \frac{np+mq-mp+nq}{np+mq}.\frac{np+mq}{np+mq+mp-nq}$$

$$= \frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}$$

bulunur. Bu t, t_1 ve t_2 değerleri

$$a = \left(t(t_1+t_2)+(1-t_1t_2)\right)\left(t_1+t_2-t(1-t_1t_2)\right)$$

ifadesinde yerine yazılırsa,

$$a = \left(t(t_1+t_2)+(1-t_1t_2)\right)\left(t_1+t_2-t(1-t_1t_2)\right)$$

$$= \left[\left(\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)\left(\frac{n}{m}+\frac{q}{p}\right)+\left(1-\frac{n}{m}\frac{q}{p}\right)\right].$$

$$\left[\frac{n}{m}+\frac{q}{p}+\left(\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)\left(1-\frac{n}{m}\frac{q}{p}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\left((m+n)q-(m-n)p\right)(np+mq)+(mp-nq)\left((m+n)q-(m-n)p\right)}{mp\left((m+n)p(m-n)q\right)}\right].$$

$$\left[\frac{(np+mq)\left((m+n)p+(m-n)q\right)-\left((m+n)q-(m-n)p(mp-nq)\right)}{mp\left((m+n)p-(m-n)q\right)}\right]$$

$$= \frac{\left[m(m+n)(p^2+q^2)-n(m-n)(p^2+q^2)\right]}{\left[n(m+n)(p^2+q^2)+m(m-n)(p^2+q^2)\right]}.\frac{1}{m^2p^2\left[(m+n)p+(m-n)q\right]^2}$$

$$= (m^2+n^2)(p^2+q^2)\frac{(m^2+n^2)(p^2+q^2)}{m^2p^2\left[(m+n)p+(m-n)q\right]^2}$$

bulunur. Benzer işlemler *b, c, d, e, f,* alan ve 2R için yapıldığında;

$$b=\left(1+t_1^2\right)\left(t_2-t\right)\left(1+tt_2\right)$$

$$=\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)\left(\frac{q}{p}-\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)\left(1+\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\frac{q}{p}\right)$$

$$=\left(m^2-n^2\right)\left(p^2+q^2\right)\frac{\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)}{m^2p^2\left[(m+n)p+(m-n)q\right]^2}$$

$$c=t(1+t_1^2)\left(1+t_2^2\right)=\left(\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\frac{q}{p}\right).\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right).\left(1+\frac{q^2}{p^2}\right)$$

$$=(\,(m+n)p+(m-n)q\,)(\,(m+n)q-(m-n)p\,)\frac{\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)}{m^2p^2\left[(m+n)p+(m-n)q\right]^2}$$

$$d=\left(1+t_2^2\right)\left(t_1-t\right)\left(1+tt_1\right)$$

$$=\left(1+\frac{q^2}{p^2}\right)\left(\frac{n}{m}-\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)\left(1+\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\frac{n}{m}\right)$$

$$=\left(m^2+n^2\right)\left(p^2-q^2\right).\frac{\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)}{m^2p^2\left[(m+n)p+(m-n)q\right]^2}$$

$$e=t_1\left(1+t^2\right)\left(1+t_2^2\right)$$

$$=\frac{n}{m}\left[1+\left(\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)^2\right]\left[1+\frac{q^2}{p^2}\right]$$

$$=2mn(p^2+q^2)\frac{\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)}{m^2p^2\left[(m+n)p+(m-n)q\right]^2}$$

$$f=t_2\left(1+t^2\right)\left(1+t_1^2\right)$$

$$=\frac{q}{p}\left[1+\left(\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)^2\right]\left[1+\frac{n^2}{m^2}\right]$$

$$=2pq(m^2+n^2)\frac{\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)}{m^2p^2\left[(m+n)p+(m-n)q\right]^2}$$

$$A(ABCD)=t_1t_2\left(2t\left(1-t_1t_2\right)-\left(t_1+t_2\right)\left(1-t^2\right)\right)\left(2\left(t_1+t_2\right)t+\left(1-t_1t_2\right)\left(1-t^2\right)\right)$$

$$=\frac{n}{m}\frac{q}{p}\left[2\left(\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)\left(1-\frac{n}{m}\frac{q}{p}\right)-\left(\frac{n}{m}+\frac{q}{p}\right)\left(1-\left(\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)^2\right)\right]$$

$$\left[2\left(\frac{n}{m}+\frac{q}{p}\right)\left(\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)+\left(1-\frac{n}{m}\frac{q}{p}\right)\left(1-\left(\frac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)^2\right)\right]$$

$$= 4mnpq(mq+np)(mp-nq)\left(\frac{\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)}{m^2p^2\left[(m+n)p+(m-n)q\right]^2}\right)^2$$

$$2R=\frac{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)\left(1+t^2\right)}{2}=\frac{\left(1+\dfrac{n^2}{m^2}\right)\left(1+\dfrac{q^2}{p^2}\right)\left(1+\left(\dfrac{(m+n)q-(m-n)p}{(m+n)p+(m-n)q}\right)^2\right)}{2}$$

$$=\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)\frac{\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)}{m^2p^2\left[(m+n)p+(m-n)q\right]^2}$$

elde edilir. Burada da kenarların ve köşegenlerin her birini, bunların en küçük ortak katları olan $\dfrac{\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)}{m^2p^2\left[(m+n)p+(m-n)q\right]^2}$ ile bölersek aranan değerleri buluruz.

Sonuç 3.3.3 te verilen ifadelere uygun bazı *m, n, p, q* değerlerine karşılık elde edilen dörtgenlerin alanları ile kenar, köşegen ve çevrel çemberlerinin çap uzunlukları ile alanları Tablo 3.3 ile verilmiştir.

Tablo 3.3

m	***n***	***p***	***q***	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	*A(ABCD)*	*2R*
2	1	2	1	25	15	7	15	20	20	192	25
3	2	2	1	65	25	33	39	60	52	1344	65
4	1	3	2	221	195	21	85	104	204	10560	221
4	1	4	3	425	375	87	119	200	408	39936	425
4	3	2	1	125	35	75	75	120	100	4800	125
4	3	3	1	250	70	88	200	240	150	16848	250
4	3	3	2	325	91	253	125	312	300	29376	325
4	3	4	1	425	119	87	375	408	200	39936	425
4	3	4	3	625	175	527	175	600	600	96768	625
5	1	3	2	338	312	0	130	130	312	20280	338
5	1	4	3	650	600	72	182	250	624	77520	650
5	1	5	4	1066	984	184	234	410	1040	210000	1066
5	2	2	1	145	105	17	87	100	116	5760	145
5	3	3	2	442	208	280	170	390	408	61560	442
5	2	4	3	725	525	333	203	500	696	154560	725
5	2	5	3	986	714	264	464	680	870	285000	986
5	4	3	2	533	117	435	205	520	492	73920	533
5	4	4	1	697	153	185	615	680	328	107520	697
7	6	3	1	850	130	400	680	840	510	189000	850
9	8	2	1	725	85	525	435	720	580	144000	725
11	7	2	1	850	360	400	510	770	680	231000	850

4. DÖRT VE DAHA ÇOK KENARLI BRAHMAGUPTA ÇOKGENLERİNİN OLUŞTURULMASI

Genel olarak; n, 2 den büyük bir doğal sayı olmak üzere kenarları, köşegenleri ve alanı rasyonel olan bir n – gen, rasyonel Heron n – geni olarak isimlendirilir. Bu rasyoneller uygun bir benzerlik dönüşümü ile tamsayıya dönüştürüldüğünde bir Heron n – geni elde edilir.

Eğer bir Heron n – genin kenarları bir çevrel çember içine çizilebiliyorsa, yani kenarları çemberin kirişleri ise bu n – gene bir Brahmagupta n – geni denir.

Bu bölümde de Brahmagupta'nın prensibini; Heron üçgenleri ve tamsayı kenarlı, köşegenli ve alanlı kirişler dörtgeni inşa etmede Pythagorean üçgenlerini yan yana (bitişik olarak) kullanabilmeyi; Heron üçgenlerini kendilerinden ayırarak birkaç n ≥ 3 olan tamsayı kenarlı, köşegenli ve alanlı iç teğet n – gen inşa etmeyi inceleyeceğiz.

Pythagorean üçgenleri ailesini; bir dik açı ihtiva eden özel Heron üçgenleri ailesi olarak tanımlanmıştı. Bu bize tüm Heron üçgenlerinin genel bir kümesinin bir ortak Heron açısı ihtiva eden aileler aracılığı ile tanımlanabileceği hakkında bir fikir vermişti.

Brahmagupta;

$\cos A + \cos A' = 0$

olacak şekilde ABC ve $A'B'C'$ gibi iki Heron üçgeni almış ve onları ortak kenarları boyunca birleştirerek yeni bir Heron üçgeni tanımlamıştır. Bu bize; n ≥ 3 ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olan rasyonel Brahmagupta n – genlerinin uygun Heron üçgenleri ailelerinin elemanlarından inşa etmenin yolu olan, genel Brahmagupta prensibini verir. Burada; rasyoneller uygun bir bezerlik dönüşümüyle tamsayılara dönüştürülebildiği gerçeğinden hareketle, rasyonel Brahmagupta n – genleri elde edilmiş olur.

Şimdi ya tümü bir aileden; ya da birkaçı bir aileden birkaçı bütünleyen açı ailesinden olan Heron üçgenleri alarak onları Brahmagupta n – genleri inşa etmede uygunca kullanabiliriz. Konunun daha iyi açıklığa kavuşturulabilmesi için sayısal örnekler verelim.

Geniş bir şekilde $n = 4$ durumunu irdeleyelim. Bu durum önceki bölümde incelediğimizden farklıdır. Aşağıdaki tablo ilkel (a, b, c) leri ve uygun bir şekilde (a, b, c) den üretilmiş en büyük üçgenleri belirtmektedir. Verilen tabloda T_1 den T_6 ya kadar olan üçgenler (2.4) ailesine; T_7, T_8 ise (2.5) üçgen ailesine aittir. Bu üçgenler daha sonra gelecek olan dörtgenleri oluşturmada kullanılacaktır.

Tablo 4. 1. Heron Üçgenleri

	u	*v*	İlkel(*a, b, c*)	En büyük(*a, b, c*)
T_1	3	1	(4, 5, 3)	(340, 425, 255)
T_2	4	1	(17, 21, 10)	(340, 420, 200)
T_3	5	3	(68, 77, 75)	(340, 385, 375)
T_4	7	6	(85, 76, 105)	(340, 304, 420)
T_5	9	2	(85, 104, 45)	(340, 416, 180)
T_6	13	1	(68, 75, 13)	(340, 375, 65)
T_7	4	1	(17, 9, 10)	(340, 180, 200)
T_8	13	1	(340, 297, 65)	(340, 297, 65)

Aynı veya farklı Heron üçgenleri, farklı yollarla birleştirilebilir. Bunu ilk olarak dörtgenlerin olduğu örnekte ele alalım. Çünkü n = 4 durumu için kullanılan inşa yöntemlerinin benzerleri $n > 4$ durumu için de geçerli olacaktır. Bundan dolayı $n = 5$ ve $n = 6$ için de örnekler verilebilir (Sastry, 2005 – 1).

4.1. Brahmagupta Dörtgenleri

Brahmagupta dörtgenleri aşağıdaki yollarla üretilebilir:

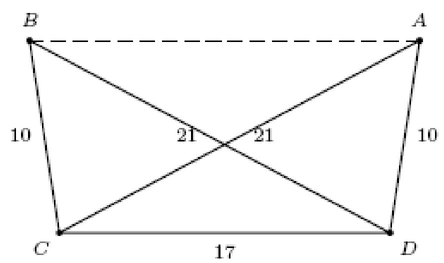
i) (2.4) ailesinden (anılan sıraya göre (2.18)) veya (2.5) ailesinden bir üçgen alınır (anılan sıraya göre (2.19) bundan böyle bu şekilde anlaşılacak) ve kendileri ile birleştirilir,

ii) Aynı aileden iki farklı üçgen alınarak bitişik hale getirilir(birleştirilir),

iii) (2.4) ailesinden alınan bir üçgenle, (2.5) ailesinden bir üçgen bitişik hale getirilir.

Şimdi de her bir durum için birer örnek verelim.

Örnek 4.1. T_2 yani primitif $(a, b, c) = (17, 21, 10)$ üçgenini alalım ve yukarıdaki gibi kendisi ile bitişik hale getirelim (Sastry, 2005 – 1).



Şekil 4.1. Bir Heron Üçgeninin Kendisiyle Bitiştirilmesinden Oluşan Brahmagupta Dörtgeni

Burada $m(CAD) = m(CBD)$ olduğundan $ABCD$ bir kirişler dörtgeni olur. Bu dörtgene Ptolemy Teoremini uyguladığımızda bilinmeyen $|AB|$ kenarı;

$$|BD|.|AC| = |BC|.|AD| + |CD|.|AB|$$

$$21.21=10.10+17.|AB| \Rightarrow 441=100+17.|AB| \Rightarrow 441 - 100 = 17.|AB| \Rightarrow$$

$$\frac{441-100}{17} = \frac{341}{17} = |AB|$$

olup rasyoneldir. Kenarların ve köşegenlerin her birinin 17 katının alınmasıyla $ABCD$ Brahmagupta dörtgeni elde edilir ki gerçekte bu;

$$|AB| = 341, \quad |BC| = |AD| = 170, \quad |CD| = 289, \quad |AC| = |BD| = 357$$

olan bir ikizkenar yamuktur (Şekil 4.1 deki gibi). Gerçek alanı daha iyi hesaplayabilmek için, alanın tamsayı olduğunu gösterirken bir tartışmayı verelim. Aşağıda vereceğimiz bu tartışma daha genel durumlara uygulanabilir. Tanım 1.2.5, Teorem 1.2.5 ve Teorem 1.2.8 den faydalanarak;

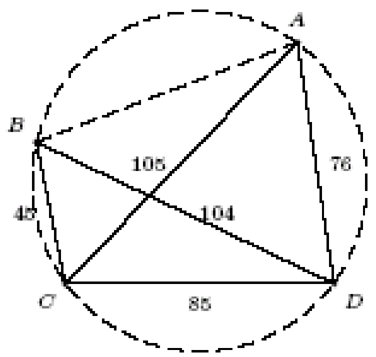
$$m(BAC) = m(BDC), \ m(ABD) = m(ACD) \text{ ve } m(BAD) = m(BAC) + m(CAD)$$

yazılabileceğinden BAD de bir Heron açısıdır ve ABD üçgeni de bir Heron üçgenidir deriz. $ABCD$; BCD ve BDA Heron üçgenlerinin toplamı biçiminde parçalanabileceğinden $ABCD$ nin alanı da tamsayı olacaktır.

Bu özel ekleme herhangi bir kenar boyunca; örneğin 17, 10 veya 21 de yapılabilir. Ancak bu serbestlik farklı Heron üçgenlerinin eklenmesini içeren yapıları kapsamaz. Bunun geçerli olup olmadığı Ptolemy Teoremi ile kontrol edilir.

Örnek 4.2. Tablo 4.1 ile verilen T_4, T_5 primitif üçgenlerini bitişik hale getirerek Brahmagupta Dörtgenleri oluşturunuz (Sastry, 2005 – 1).

Çözüm. Bu iki yolla yapılabilir.



Şekil 4.2. Bir Kenarları Ortak Olan Heron Üçgenlerinin Ortak Kenarları Üzerinde Birleştirilmesiyle Oluşturulmuş Bir Brahmagupta Dörtgeni

i) Şekil 4.2. de aynı aileden alınan ve ortak kenarları üzerinden birleştirilen iki Heron üçgeninden oluşturulan bir Brahmagupta dörtgeni verilmiştir. Örnek 4.1 de yaptığımız bilinmeyen kenarı hesaplama işlemini burada da uygulayalım.

$$105.104 = 45.76 + 85.\ |AB| \Rightarrow 10920 = 3420 + 85.\ |AB| \Rightarrow$$

$$10920 - 3420 = 85.\ |AB| \Rightarrow \frac{7500}{85} = \frac{85.|AB|}{85} \Rightarrow \frac{1500}{17} = |AB|$$

bulunur. Alan formülünde de verilenler yerine yazılırsa;

$$s = \frac{1}{2}\left(45 + 76 + 85 + \frac{1500}{17}\right) = \frac{2501}{17} \text{ olduğundan;}$$

$$A(ABCD) = \sqrt{\left(\frac{2501}{17} - 45\right)\left(\frac{2501}{17} - 76\right)\left(\frac{2501}{17} - 85\right)\left(\frac{2501}{17} - \frac{1500}{17}\right)}$$

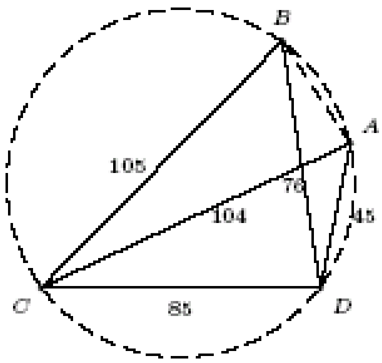
$$= \sqrt{\frac{1736}{17}.\frac{1209}{17}.\frac{1056}{17}.\frac{1001}{17}} = \frac{1489488}{289} = 5153{,}937716$$

olur. Yani Şekil 4.2. nin, 17 kez büyütülmesine ihtiyaç vardır. Bu durumda kenarları, köşegenleri ve alanı da;

$$|AB| = 1500,\ |BC| = 45,\ \ |CD| = 85,\ |DA| = 76\ \ |AC| = 105,\ |BD| = 104,$$

$$A(ABCD) = 1489488$$

olur ki bunlar tamsayıdır. Buradan dörtgenin Brahmagupta dörtgeni olduğu sonucu çıkar.



Şekil 4.3. Bir Ortak Kenarları Olan Heron Üçgenlerinin Ortak Kenarları Üzerinde Ters Yönde Birleştirilmesiyle Oluşturulan Brahmagupta Dörtgeni

ii) Şekil 4.3. ile gösterilen ikinci birleştirmede ise aynı aileden alınan ve ortak kenarları üzerinde ters yönde birleştirilen iki Heron üçgeninden oluşturulan bir Brahmagupta dörtgeni verilmiştir. Burada da yapılan hesaplama sonucu;

$$76.104 = 45.105 + 85\,.|AB| \Rightarrow 7904 = 4725 + 85\,.|AB| \Rightarrow$$

$$7904 - 4725 = 85\,.|AB| \Rightarrow \frac{3179}{85} = \frac{85.|AB|}{85} \Rightarrow \frac{187}{5} = |AB|$$

bulunur. Alan formülünde de verilenler yerine yazılırsa;

$s = \frac{1}{2}\left(45+85+105+\frac{1500}{17}\right) = \frac{681}{5}$ olduğundan;

$$A(ABCD) = \sqrt{\left(\frac{681}{5}-45\right)\left(\frac{681}{5}-85\right)\left(\frac{681}{5}-105\right)\left(\frac{681}{5}-\frac{187}{5}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{456}{5}.\frac{256}{5}.\frac{156}{5}.\frac{494}{5}} = \frac{94848}{25} = 3793{,}92$$

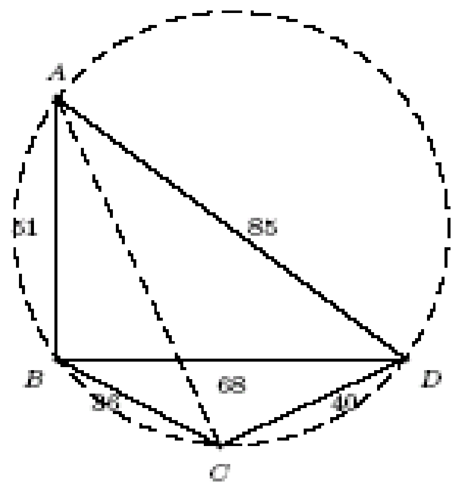
olur. Yani Şekil 4.3' ün 5 kat büyütülmesi ihtiyacı vardır. Bu durumda kenarları, köşegenleri ve alanı da;

$|AB| = 187$, $|BC| = 105$, $|CD| = 85$, $|DA| = 45$ $|AC| = 104$, $|BD| = 76$,

$A(ABCD)$=94848

olur ki bunlar tamsayıdır. Buradan dörtgenin Brahmagupta dörtgeni olduğu sonucu çıkar.

Örnek 4.3. A ve $\pi - A$ bütünleyen açılarını içeren T_1 ve T_7 primitif üçgenlerini bitişik hale getirelim. Bunu iki yolla yapmak mümkündür. Şekil 4.4 e ve Şekil 4.5 e bakınız (Sastry, 2005 – 1).



Şekil 4.4 Bir Ortak Kenarlı ve Tepe Açıları Birbirini Bütünleyen Heron Üçgenlerinin Ortak Kenarları Üzerinde Birleştirilmesiyle Oluşturulan Brahmagupta Dörtgeni

Burada da yapılan hesaplama sonucu;

$$|AC|.68 = 36.85 + 40.51 \Rightarrow |AC|.68 = 3060 + 2040 \Rightarrow |AC|.68 = 5100 \Rightarrow$$

$$|AC| = \frac{5100}{68} = 75$$

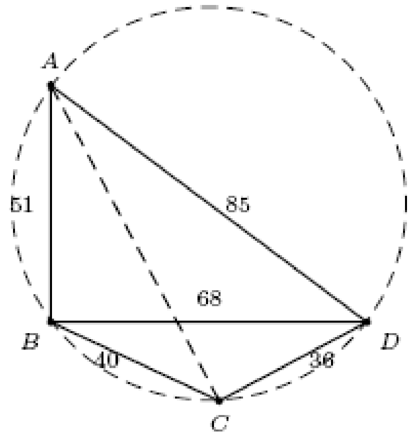
bulunur. Alan formülünde de verilenler yerine yazılırsa;

$$s = \frac{1}{2}(51+36+40+85) = 106$$

olduğundan;

$$A(ABCD) = \sqrt{(106-51)(106-36)(106-40)(106-85)} = \sqrt{55.70.66.21} = 2310$$

olur. Benzer şekilde işlemleri Şekil 4.5 için de uygularsak;



Şekil 4. 5. Bir Ortak Kenarlı Ve Tepe Açıları Birbirini Bütünleyen Heron Üçgenlerinin Ortak Kenarları Üzerinde Ters Yönde Birleşmesiyle Oluşan Brahmagupta Dörtgeni

$$|AC|.68 = 40.85 + 36.51 \Rightarrow |AC|.68 = 3400 + 1836 \Rightarrow |AC|.68 = 5236$$

$$|AC| = \frac{5236}{68} = 77$$

bulunur. Alan formülünde de verilenler yerine yazılırsa;

$$s = \frac{1}{2}(51+36+40+85) = 106$$

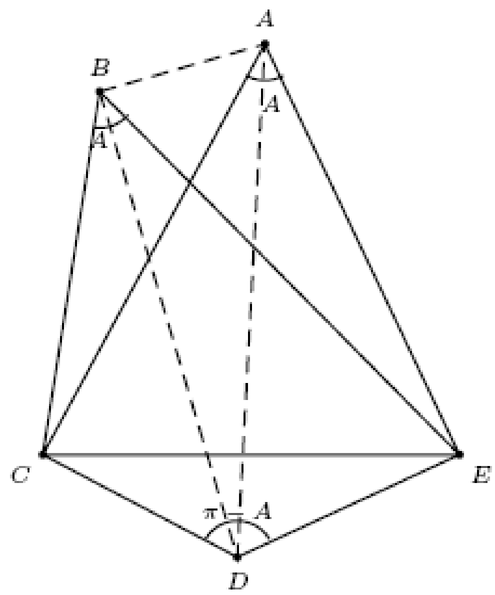
olduğundan;

$$A(ABCD) = \sqrt{(106-51)(106-36)(106-40)(106-85)} = \sqrt{55.70.66.21} = 2310$$

olur.

4.2. Brahmagupta Beşgenleri

Bir Brahmagupta beşgeni inşa etmek için üç tane Heron üçgenine ihtiyacımız vardır ki bunların ya hepsi (2.4) ten veya bazıları (2.4) ten ve bazıları da (2.5) ten alınarak birleştirmeyle oluşturulur. Yukarıda Örnek 4.1 de olduğu gibi, burada bir üçgen iki defa da kullanılabilir. Böylece bir Brahmagupta beşgeni ikiden fazla yolla oluşturulabilir. Biz sadece T_3, T_4 ve T_7 deki büyütülmüş üçgenlerini, kullanarak bir örnek verelim.



Şekil 4.6. Brahmagupta Beşgeni

Şekil 4.6 da;

$|BC| = 385$, $|CD| = 200$, $|DE| = 180$, $|EA| = 304$, $|AC| = 420$, $|BE| = 375$ ve $|CE| = 340$

tır ve bu bir Brahmagupta beşgenidir. Çünkü *ABCE, ACDE* ve *BCDE* dörtgenlerine sırasıyla Ptolemy Teoremi uygulanırsa $|AB|$ kenarı ile $|AD|$ ve $|BD|$ köşegenleri hesaplanabilir. Örneğin *ABCE* dörtgenine Ptolemy Teoremini uygulayalım;

$$|AC|\,.\,|BE| = |BC|.|AE| + |EC|.|AB|$$

$$420\ .\ 375 = 385\ .\ 304 + 340\ .\ |AB| \Rightarrow 157500 = 117040 + 340\ .\ |AB| \Rightarrow$$

$$157500 - 117040 = 340\ .\ |AB| \Rightarrow \frac{40460}{340} = \frac{340.|AB|}{340} \Rightarrow \frac{2023}{17} = |AB|$$

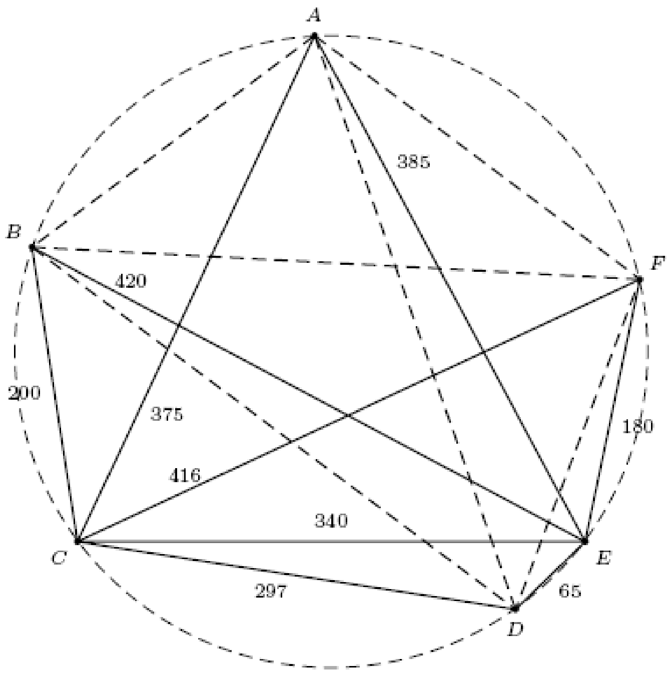
elde ederiz. Benzer şekilde $|AD|$ ve $|BD|$ köşegenleri hesaplanırsa;

$$|AD| = \frac{7215}{17}, \qquad |BD| = \frac{6820}{17}$$

bulunur ki buradan şeklin 17 kat büyütülmesi gerektiği görülmektedir. *ABCE* Brahmagupta dörtgeni ve *ACD* Heron üçgeninin Şekil 4.6 daki gibi eklenmesiyle oluşmuş olan *ABCDE* beşgeninin alanı tamsayı olmalıdır. Bu işlemlerden de anlaşılacağı gibi *ABCDE* bir kirişler beşgeni olmalıdır.

4.3 Brahmagupta Altıgenleri

Şimdi bir Brahmagupta altıgeninin kolay bir inşasını oluşturmak için ; (2.4) ve (2.5) ailelerinden herhangi bir kombinasyonla alınabilecek en fazla dört tane Heron üçgenine ihtiyaç vardır. Biz Şekil 4.7 deki altıgeni örneklemede(tanımlamada); T_2, T_3, T_5, T_8 üçgenlerini kullandık.



Şekil 4.7 Brahmaupta Altıgeni

Burada da bilinmeyen kenar ve köşegenler; kirişler dörtgeninde bilinmeyen kenar veya köşegeni bulmak için kullanılan Ptolemy Teoremi yardımıyla bulunur. Örneğin *ABCDEF* altıgeninden *BCEF* dörtgeni incelenecek olursa;

$$|BE|.|FC| = |BC|.|FE| + |CE|.|BF| \Rightarrow \quad 420.416 = 200.180 + 340.|BF| \Rightarrow$$

$$174720 = 36000 + 340.|BF| \Rightarrow 174720 - 36000 = 340.|BF| \Rightarrow$$

$$138720 = 340.\left|BF\right| \Rightarrow \frac{138720}{340} = \frac{340.\left|BF\right|}{340} \Rightarrow 408 = \left|BF\right|$$

Diğer bilinmeyen kenarlar da benzer şekilde bulunur.

4.4 Sonuç

n > 3 için Brahmagupta n – genlerinin tanımlanması problemindeki zorluk; bütün Heron üçgen aileleri (2.18) ve (2.19) (gerçekte sadece (2.18) biçiminde oluşturularak çözüldü. Üçgenler bu çalışmada verildiği gibi bitişik hale getirilerek; yeni üçgenler, dörtgenler, beşgenler ve n – genler oluşturulabilir. Genellikle bir Brahmagupta n – genini inşa etmek için; (2.18) ve (2.19) dan alınması gereken, en çok $n - 2$ tane Heron üçgeninin herhangi bir uygun kombinasyonuna ihtiyaç vardır.

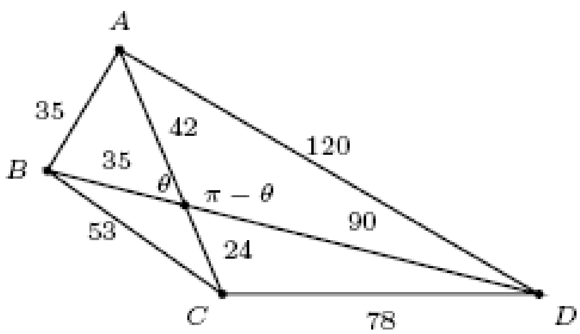
Burada; "n – 2 tane Heron üçgeni verildiğinde; hepsi bir tek aileden veya m tanesi bir Heron ailesinden geriye kalan (n – 2) – m tanesi de bütünleyen açı ailesinden alınarak kaç tane Brahmagupta n – geni inşa edilebilir?" sorusu akla gelir ki bu sorunun cevaplandırılabilmesi için yeni araştırmalara ihtiyaç vardır.

Şimdi doğal olarak; "Heron üçgenlerinin seçilen uygun ailelerinden birleştirme yoluyla elde edilen Heron n – genlerinin oluşturulması" konjektürü (varsayımı) akla gelir. Bu konjektürün varlığını destekleyen; 2 Heron dörtgeninin bu yolla oluşturulma örneğini vererek çalışmamızı bitiriyoruz.

Örnek 4.4. $Cos\theta = \frac{3}{5}$ ailesinden; 7(5, 5, 6) ve 6(4, 13, 15) üçgenleri ile bütünleyen aileden ($Cos\theta = -\frac{3}{5}$ ile) (35, 53, 24) ve 6(7, 15, 20) üçgenlerinin birleştirilmesiyle;

$$\left|AB\right| = 35,\ \left|BC\right| = 53,\ \left|CD\right| = 78,\qquad \left|AD\right| = 120,\ \left|AC\right| = 66\ ,\ \left|BD\right| = 125$$

ve alanı da 3300 olan $ABCD$ Heron dörtgeni elde edilir(Şekil 4.8).

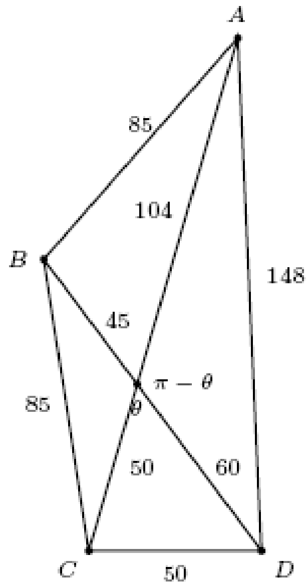


Şekil 4.8. Heron Dörtgeni

Örnek 4.5. Aynı Heron üçgenleri ailesinden 10(5, 5, 6), (85, 45, 104) üçgenleri ile 5(17, 9, 10) ve 4(37, 15, 26) üçgenleri ile birleştirildiğinde

$|AB| = 85,\ |BC| = 85,\ |CD| = 50,\quad |AD| = 148,\ |AC| = 154\ ,\ |BD| = 105$

ve alanı da 6468 olan $ABCD$ Heron dörtgenini elde etmiş oluruz (Şekil 4.9).



Şekil 4.9. Heron Dörtgeni

5. KAYNAKLAR

[1] Ayoub, B. A., 2006, Area, Diagonals and Circumcircle of A Cyclic Quadrilateral, Mathematics and Computer Education; 40, 1; 58 – 63.

[2] Ayres, F., 1954, Schaum's Outline of Theory and Problems of Plane and Spherical Trigonometry, Schaum Publishing Co, New York.

[3] Beauregard, R.A., Suryanarayan, E.R.,1998, "The Brahmagupta Triangles", The College Mathematic Journal; 29, 1, 13 – 17.

[4] Beauregard R.A., Zelator K.D., 2002, Perfect Cyclic Quadrilaterals, Mathematics Magazine; 75, 2; 138 – 143

[5] Buchholz R.H., MacDougall J.A., 1999, Heron Quadrilaterals With Sides In Arithmetic Or Geometric Progression, Bulletin of the Aust. Math. Soc., 59, 263 – 269.

[6] Buchholz R.H., MacDougall J.A., 2001, Cyclic Poligons With Rational Sides and Area Perfect Pyramids, Bull. Aust. Math. Soc., 45, 3, 1 – 34.

[7] Dickson, L.E., 1971, History of The Theory of Numbers, Diophantine Analysis, 2, Chelsea Publishing Company New York.

[8] Gustafson, R. D., Frisk, P.D., 1991, Elementary Geometry, Third Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York.

[9] Guy, R. K., 1994, Unsolved Problems in Number Theory, Springer – Verlag, New York.

[10] Kramer, A. V. , Luca, F., 2001, Some Remarks on Heron Triangles, Acad.Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 27; 25 – 38.

[11] LaRosa V., 2003, A Derivation Of Formulas For The Area Of Irregular Quadrilaterals, presented at the Long Island Math Fair.

[12] Rich, B. , 1963, Schaum's Outline of Theory and Problems of Plane Geometry With Coordinate Geometry, Schaum Publishing Co, New York.

[13] Sastry, K. R. S., 2001 – 1, Heron Triangles: A Gergonne – Cevian and Median Perspective, Forum Geometricorum,1; 17 – 24.

[14] Sastry, K. R. S., 2001 – 2, Heron Angles, Mathematics and Computer Education 35, 1; 51 – 60.

[15] Sastry, K. R. S., 2001 – 3, Polygonal Area in the Manner of Brahmagupta, Mathematics and Computer Education, 35, 2; 147 – 151.

[16] Sastry, K.R. S., 2002, Brahmagupta Quadrilaterals, Forum Geometricorum, 2; 167 – 173.

[17] Sastry, K. R. S., 2005 – 1, Construction of Brahmagupta n – gons, Forum Geometricorum, 5; 119 – 126.

[18] Sastry, K. R. S., 2005 – 2, A Description of a Family of Heron Quadrilaterals, Mathematics and Computer Education; 39, 1; 72 – 77.

[19] Sierpinski, W., 1962, Pythagorean Triangles, Graduate School of Science, Yeshiva University

[20] Svrtan D., Veljan D., Vladimir V., 2004, Geometry of Pentagons: from Gauss to Robbins, arXiv:math. MG/0403503, 1; 29 Mar 2004

[21] Şahin, R. Ve Ark., 1997, Sürat Geometri 2, Sürat Yayınları, İstanbul.

[22] Şenay, H., 1989, Sayılar Teorisine Giriş, Selçuk Ün. Fen – Edebiyat Fak., Konya

[23] Yiu, P., 1998, Notes on Euclidean Geometry, http://www.math.fau.edu/yiu/EuclideanGeometryNotes.pdf.