

**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

**AĞSIZ YÖNTEMLERLE YAPISAL
ANALİZ**

Mahmut PEKEDİS

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 625.03.00

Sunuş Tarihi : 07.08.2008

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hasan YILDIZ

Bornova-İZMİR

III

Mahmut PEKEDİS tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan “**Ağsız Yöntemlerle Yapısal Analiz**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim önergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 7 Ağustos 2008 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Doç. Dr. Hasan YILDIZ

.....

Raportör Üye: Doç. Dr. K. Turgut GÜRSEL

.....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ayhan NUHOĞLU

.....

ÖZET**AĞSIZ YÖNTEMLERLE YAPISAL
ANALİZ**

PEKEDİS, Mahmut

Yüksek Lisans Tezi, Makina Mühendisliği Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Hasan YILDIZ

Farklı tiplerdeki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde sayısal çözümleme yöntemlerinin uygulanması son yirmi yıldır oldukça ilgi uyandırmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü iki temel kısmı oluşturur. Denklem veya bilinmeyen fonksiyon yaklaşık olarak çözülür. Zayıf veya güçlü form, yaklaşık formatta türetilen denkleme yerleştirilerek bilinmeyen fonksiyon belirlenir. Bilinmeyen fonksiyon tam olarak kararlaştırılması için sınır koşulları uygulanır. Nümerik metodun doğruluk ve verimliliği bu iki kısmın doğruluk ve verimliliğine bağlıdır. Son on yıl boyunca çeşitli ağsız yöntemler (EBG,DPH,NİM,AYPG gibi) farklı mühendislik problemlerine uygulanarak başarılı bir şekilde geliştirilmiştir.

Bu çalışmada yeni ve son zamanlarda çok kullanılan nümerik metodlardan ağsız eleman bağımsız Galerkin ve radyal nokta interpolasyon yöntemi, elastik katı cisimler mekaniği problemlerine uygulanmıştır. Bu metodların çözümünde hareketli en küçük kareler prosüdürü ve radyal nokta interpolasyon yöntemi şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Ayrıca şekil fonksiyonları bir ve iki boyutlu çözüm bölgelerine uygulanıp x-y-z koordinat sisteminde çizdirilmiştir.

VI

Bu tezde katı cisim mekaniği problemi olarak bir ucu ankastre, diğer ucu da zorlanmaya maruz bırakılan iki boyutlu lineer, elastik bükülebilir kiriş incelenmiştir.

Yaklaşık denklem çözümü için araştırmacılar tarafından önerilip kullanılan radyal nokta interpolasyon yöntemi ve eleman bağımsız Galerkin gibi farklı teknikler, doğruluk ve verimlilik bakımından sonlu elemanlar yöntemi ve analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Ayrıca verimli olan metodun bulunmasında kirişin değişik kesitlerinde gerilme ve yer değiştirme değerleri incelenmiştir

Sonuç olarak radyal nokta interpolasyon metodu ve eleman bağımsız Galerkin yöntemlerinin doğruluk ve verimliliği sonlu elemanlar yöntemine göre daha iyi olduğu kararına varılmıştır. Ayrıca radyal nokta interpolasyon yöntemi ile eleman bağımsız Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında, eleman bağımsız Galerkin yönteminin seçilen kiriş problem için daha hassas sonuçlar verdiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Ağsız yöntemler, hareketli en küçük kareler yöntemi, eleman bağımsız Galerkin yöntemi, ağsız radyal nokta interpolasyon yöntemi, sonlu elemanlar metodu, yaklaşık metodlar.

ABSTRACT

**STRUCTURAL ANALYSIS WITH
MESHFREE METHODS**

PEKEDİS, Mahmut

Msc. Thesis, Mechanical Engineering Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hasan YILDIZ

There is a great of interest in applying numerical methods for solution of partial differential equations of various types of engineering problems in last two decades. Numerical solution of partial differential equations consists of two main parts. Equations or unknown functions are solved approximately. Then the unknown are determined by embedding approximated solution in the governing equations in the weak or strong form and boundary conditions are applied to solve unknown functions. Accuracy and efficiency of numerical method, strictly dependent to accuracy and efficiency of these two steps. During last decade various meshfree methods have been developed, (such as EBG, SPH, PIM, MLPG) were used successfully in different engineering problems.

In this study a new and popular element free Galerkin and radial point interpolation procedures of numerical methods are applied to elastic solid mechanics problem. Moving least square method and radial point interpolation method shape functions were used in solving of these

problems. However, these shape functions are applied to the 1D and 2D solution domains and plotted in x-y-z coordinate system.

The problem considered in this study is a 2D linear, elastic cantilever beam fixed at the end and subjected to a traction at the other free end.

In this study it was compared accuracy and efficiency of different techniques like radial point interpolation method, element free Galerkin with finite elements method, numerical methods which proposed and used by researchers for approximating the solution of equation. However stress and displacement approximate values studied to reveal the efficiency of methods in various cross-sections of the beam.

As a result it can be concluded that accuracy and efficiency of radial point interpolation method and element free Galerkin method are better than finite element methods. However, comparison of the numerical methods obtained by the element free Galerkin and radial point interpolation methods shows that element free Galerkin gives more accurate result for the selected problem.

Key Words: Meshfree methods, moving least squares method, element free Galerkin method, meshless radial point interpolation method, finite elements method, approximation methods.

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanmasında değerli katkılarından dolayı hocam Sayın Doç. Dr. Hasan YILDIZ'a en içten teşekkürlerimi sunar, yakın ilgisini esirgemeyen Yük. Müh. Nedim AKBULUT'a, tezin biçimlenmesinde desteğini aldığım arkadaşım Yük. Müh. Ali ÇINAR'a ve maddi, manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	V
ABSTRACT.....	VII
TEŞEKKÜR.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	XVII
TABLolar DİZİNİ.....	XXVIII
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	XXXI
1 NÜMERİK YÖNTEMLER.....	1
1.1 Giriş.....	1
1.2 Sonlu Farklar Metodu	1
1.3 Sonlu Hacimler Metodu	4
1.4 Sonlu Elemanlar Metodu.....	4
1.5 Nümerik Simülasyon.....	9
2 YAKLAŞIK METODLAR	12
2.1 Zayıf ve Güçlü Formlar.....	12
2.2 Ağırlıklı Artık Metodu	13
2.2.1 Sıralama Yöntemi (Kolakasyon Yöntemi).....	16

İÇİNDEKİLER(Devamı)

	<u>Sayfa</u>
2.2.2 Altbölge Metodu	18
2.2.3 En Küçük Kareler Yöntemi	18
2.2.4 Moment Yöntemi	20
2.2.5 Galerkin Yöneri.....	20
3 AĞSIZ YÖNTEMLER.....	22
3.1 Ağsız Metodların Tanımı.....	23
3.2 Ağsız Yöntemlerin Tarihi Gelişimi.....	23
3.3 Ağsız yöntemlerin kullanılmasının Nedenleri	27
3.4 Ağsız Yöntemlerin Çözüm Prosüdürü	30
4 AĞSIZ YÖNTEMLERİN ÇEŞİTLERİ	36
4.1 Formulasyon Prosüdürüne Göre Sınıflandırma	37
4.1.1 Zayıflatılmış Formlar Üzerine Temellendirilmiş Ağsız Yöntemler	37
4.1.2 Sıralama Teknikleri Üzerine Temelli Ağsız Yöntemler	40
4.1.3 Zayıf Form ve Kolakasyon Tekniklerin Bileşimi Üzerine Temelli, Ağsız Yöntemler	41

İÇİNDEKİLER(Devamı)

	<u>Sayfa</u>
4.2 Yaklaşık Fonksiyon Uyumuna Göre Sınıflandırma.....	41
4.2.1 En Küçük Kareler Yaklaşımına Göre Temellendirilen Ağsız Yöntemler	41
4.2.2 Yaklaşık Fonksiyon için İntegral Gösterimli Metodlara Temellendirilen Ağsız Yöntemler.....	43
4.2.3 Nokta İnterpolasyon Metoduna Dayanan Ağsız Yöntemler	44
4.2.4 Diğer Ağsız İnterpolasyon Metodlarına Dayanan Ağsız Yöntemler	45
4.3 Bölge Gösterimine Göre Sınıflandırma	45
4.3.1 Bölge Tipi Ağsız Yöntemler.....	46
4.3.2 Sınır Tipi Ağsız Yöntemler	46
4.4 Gelecekteki Gelişmeler	49
5 AĞSIZ ŞEKİL FONKSİYONLARIN TÜRETİLMESİ.....	50
5.1 Giriş.....	50
5.1.1 Ağsız İnterpolasyon/Yaklaşık Teknikler.....	50
5.1.2 Destek Bölgesi	53

İÇİNDEKİLER(Devamı)

	<u>Sayfa</u>
5.1.3 Ortalama Nodal Aralığının Belirlenmesi	54
5.2 Radyal Nokta İnterpolasyon Şekil Fonksiyonları	57
5.2.1 Konvansiyonel RNİM	57
5.2.2 Hermite Tipi RNİM	65
5.2.3 RNİM Şekil Fonksiyonlarının Çözüm Algoritması.....	72
5.3 RNİM Şekil Fonksiyonları için Örnek Problem	76
5.3.1 RNİM Şekil Fonksiyonları ve Türevleri	77
5.4 Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi	82
5.4.1 Ağırlık Fonksiyonlarının Seçimi	89
6 ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİ.....	96
6.1 Esas Sınır Koşulları	100
6.1.1 Lagrange Çarpanı.....	100
6.1.2 Penaltı Fonksiyonu.....	103
6.2 İntegrasyon.....	104
6.2.1 Direk Nodal İntegrasyonu	105

İÇİNDEKİLER(Devamı)

	<u>Sayfa</u>
6.2.2 Arka Plan Ağı veya Hücre Yapısı:.....	105
7 AĞSIZ RADYAL NOKTA İNTERPOLASYON YÖNTEMİ	107
7.1 Nümerik İnterpolasyon.....	116
7.2 Katılık Matrisinin Özelliği	119
7.3 Esas Sınır Koşullarının Uygulanması	120
7.3.1 Direk Metodu	121
7.3.2 Penaltı Yöntemi.....	122
8 KATI CİSİM MEKANİĞİNİN TEMELLERİ	124
8.1 Düzlem Gerilme ve Düzlem Şekil Değiştirme Bileşenleri	124
8.2 Denge Denklemleri	127
8.3 Sınır Şartları ve Başlangıç Koşulları.....	128
8.4 Timoshenko Kiriş İçin Analitik Çözüm Denklemleri.....	129
9 BİR BOYUTLU KİRİŞİN AĞSIZ ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜLMESİ	131
10 İKİ BOYUTLU TİMOSHENKO KİRİŞİNİN AĞSIZ YÖNTEMLER İLE ANALİZİ	134

İÇİNDEKİLER(Devamı)

	<u>Sayfa</u>
10.1 Analiz Algoritması	136
10.2 Analiz Sonuçları.....	140
10.2.1 σ_{xx} Sonuçları	143
10.2.2 σ_{xy} Sonuçları	149
10.2.3 u_x Sonuçları	152
10.2.4 u_y sonuçları.....	154
10.3 Parametrelerin Etkinliği.....	159
10.3.1 Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminde Sonuçları Etkileyen Parametreler	160
11 SONUÇLAR	172
12 ÖNERİLER.....	174
KAYNAKLAR.....	176
ÖZGEÇMİŞ.....	183

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 Sonlu farklar metodunda fonksiyonun hücrelere bölünerek gösterilişi.....	3
Şekil 1.2 5 doğrusal sonlu elemana ayrılmış 1 boyutlu cisim	5
Şekil 1.3 Diktörgen elemanlarla ayrılmış 2 boyutlu çözüm bölgesi	5
Şekil 1.4 Prizmatik elemanlarla ayrılmış 3 boyutlu cisim.....	6
Şekil 1.5 Elemanların düğümlerle birbirleriyle bağlantıları.....	6
Şekil 1.6 Nümerik simülasyon aşamaları (G.r. Liu, Y.T. Gu., 2005) .	10
Şekil 3.1 SEY ve ağsız yöntemler için problem çözüm akış şeması ..	30
Şekil 3.2 Üçgen elemanlarla modellenmiş bir çözüm bölgesi.....	32
Şekil 3.3 Düğümler ile modellenmiş bir çözüm bölgesi	33
Şekil 3.4 Ağsız metodlarda şekil fonksiyonlarının türetilmesinde kullanılan yerel destek bölgeler	34
Şekil 5.1 Dairesel destek bölgeler (rs:Destek bölge boyutu).....	55
Şekil 5.2 Diktörtgen destek bölgeler (rsx, rsy: destek bölgesinin x ve y yönlerindeki boyutları)	55
Şekil 5.3 Serbestlik dereceli ve normal türevi alınmış hermite tipli interpolasyon.....	66

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devamı)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.4 RNİM şekil fonksiyonlarının akış şeması	76
Şekil 5.5 Toplam 25 düzgün olarak dağılmış düğüm noktası kullanılarak ağsız şekil fonksiyonlarının bulunması	78
Şekil 5.6 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0,0]$ noktasında x 'gore türev alınarak türetilen RNİM şekil fonksiyonu.....	78
Şekil 5.7 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0,0]$ noktasında x 'e gore iki kere türev alınarak türetilen RNİM şekil fonksiyonu	79
Şekil 5.8 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0,0]$ noktasında y 'e gore iki kere türev alınan şekil fonksiyonlarının elde edilen değerleri	79
Şekil 5.9 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0.2,0.4]$ noktasındaki RNİM şekil fonksiyonu.....	80
Şekil 5.10 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0.2,0.4]$ noktasında x 'e göre türev alınarak türetilen RNİM şekil fonksiyonu.....	80
Şekil 5.11 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0.2,0.4]$ noktasında y 'e gore türev alınarak türetilen RNİM şekil fonksiyonu.....	81
Şekil 5.12 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0.2,0.4]$ noktasında x 'e gore iki kere türev alınan şekil fonksiyonlarının elde edilen değerleri..	81
Şekil 5.13 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0.2,0.4]$ noktasında y 'e gore iki kere türev alınan şekil fonksiyonlarının elde edilen değerleri..	82

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devamı)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.14 En küçük kareler yönteminde veri eşitlemesi	83
Şekil 5.15 Bir boyutlu problemler için ağırlık fonksiyonları ve etkinlik yarıçapları	90
Şekil 5.16 Ağırlık fonksiyonları. W1:Quartik spline, W2:Gauss fonksiyonu.....	92
Şekil 5.17 $X=[-1,1]$, $Y=[-1,1]$ noktaları arasındaki ağırlık fonksiyonu	92
Şekil 5.18 Merkez noktadaki ağırlık fonksiyonu.....	93
Şekil 5.19 Merkez noktasındaki şekil fonksiyonu	93
Şekil 5.20 (5x5) boyutunda üniform olarak dağıtılmış düğümler kullanılarak oluşturulmuş bölge. Çember merkezdeki düğümün destek bölgesini gstermektedir.....	94
Şekil 5.21 $x=[-2 \ 2]$ ve $y=[-2 \ 2]$ koordinatları arasında merkez düğümündeki ağırlık fonksiyonu	95
Şekil 5.22 $x=[-2 \ 2]$ ve $y=[-2 \ 2]$ koordinatları arasında merkez düğümündeki şekil fonksiyonu	95
Şekil 6.1 Eleman bağımsız Galerkin yönteminde integrasyon a) Arka plan ağı.....	105
Şekil 6.2 EBG için program akış şeması	106

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devamı)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 7.1 Ağsız global zayıf formda kullanılan arka plan hücreleri. Problem geometri bölgesi düğümlerle gösterilmiştir. Hücreler zayıf form integrallerini çözmek için oluşturulmuştur	108
Şekil 8.1 2 Boyutlu cisim Ω :Cisim bölgesi Γ :Cismin bölgesindeki global sınır, Γ_t :Kuvvet sınırı, Γ_u :Yer değiştirme sınırı, $n=\{n_x, n_y\}$ Sınır üzerindeki normal dış vektörlerdir.....	125
Şekil 9.1 1 boyutlu kirişte düğüm noktaları.....	131
Şekil 9.2 $f(x)=x$ kuvvetine maruz bırakılan 1 boyutlu ankastre çubuk	132
Şekil 9.3 1 boyutlu kirişe $f(x)=x$ yükü uygulanmasıyla elde edilen x yönündeki yer değiştirme değerleri	132
Şekil 10.1 $X=L$ noktasında tekil yük'e maruz bırakılan Timoshenko kirişi	136
Şekil 10.2 EBG yönteminde modellenilen toplam 7x13 adetinde düzenli olarak dağıtılmış düğümler	138
Şekil 10.3 Sonlu elemanlar metodunda ANSYS ile modellenmiş eleman ve sınır koşulları	139
Şekil 10.4 Ağsız metotta Meshfree 2D ile modellenmiş düğüm noktaları ve sınır koşulları.....	138

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devamı)

Sekil

Sayfa

Şekil 10.5 EBG metot analizinde kullanılan hücreler, Gauss kuadratik noktaları ve sınır analiz hatları..... 139

Şekil 10.6 206 adet düğüm sayısı kullanılarak radyal nokta interpolasyon metodunun uygulanmasıyla oluşturulan $y=0$ ekseninde, x eksenini boyunca analitik ve RNİM, yer değiştirme sonuçları..... 141

Şekil 10.7 206 adet düğüm sayısı kullanılarak $X=L/2$ noktalarında, y eksenini boyunca elde edilen radyal nokta interpolasyon ve anitilik metodlara ait σ_{xy} grafiği..... 142

Şekil 10.8 Analitik ve EBG yöntemlerinin uygulanmasıyla oluşturulan $y=0$ ekseninde x koordinatı boyunca elde edilen u_y yer değiştirme sonuçları..... 142

Şekil 10.9 $X=L/2$ noktalarında y eksenini boyunca eleman bağımsız Galerkin ve anitilik çözümünün uygulanmasıyla elde edilen σ_{xy} 'e ait çözüm sonuçları..... 143

Şekil 10.10 607 nokta kullanılarak analitik çözümünün uygulanmasıyla elde edilen σ_{xx} 'e ait gerilme dağılımı 144

Şekil 10.11 640 gauss kuadratik noktası, 40 hücre kullanılarak EBG metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xx} 'e ait gerilme dağılımı... 145

Şekil 10.12 206 düğüm noktası kullanılarak RNİM metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xx} 'e ait gerilme dağılımı..... 145

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devamı)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 10.13 72 adetinde eleman sayısı, SEY metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xx} 'e ait gerilme dağılımı	145
Şekil 10.14 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan birinci analiz kesiti $x=0.3327$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen σ_{xx} gerilmeleri.....	146
Şekil 10.15 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan birinci analiz kesiti $x=0.3327$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen σ_{xx} gerilmelerine ait hata miktarları	146
Şekil 10.16 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen σ_{xx} gerilmeleri.....	147
Şekil 10.17 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen σ_{xx} gerilmelerine ait hata grafiğı	148
Şekil 10.18 607 nokta kullanılarak analitik çözümün uygulanmasıyla elde edilen σ_{xy} 'e ait gerilme dağılımı	149

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devamı)

Sekil

Sayfa

Şekil 10.19 640 Gauss kuadratik noktası, 40 hücre kullanılarak EBG metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xy} 'e ait gerilme dağılımı.. 149

Şekil 10.20 206 düğüm noktası kullanılarak RNİM metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xy} 'e ait gerilme dağılımı..... 149

Şekil 10.21 72 adetinde eleman sayısı, 91 adetinde düğüm noktası kullanılarak SEY metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xy} 'e ait gerilme dağılımı 150

Şekil 10.22 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen σ_{xy} gerilmeleri 150

Şekil 10.23 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen σ_{xy} 'ye ait hata miktarları..... 151

Şekil 10.24 91 nokta kullanılarak analitik çözümün uygulanmasıyla elde edilen u_x 'e ait yer değiştirme dağılımı 152

Şekil 10.25 91 düğüm noktası kullanılarak EBG metodunun uygulanmasıyla elde edilen u_x 'e ait yer değiştirme dağılımı 152

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devamı)

Şekil**Sayfa**

Şekil 10.26 91 adetinde düğüm sayısı, 72 eleman sayısı kullanılarak SEY metodunun uygulanmasıyla elde edilen u_x 'e ait yer değiştirme dağılımı 152

Şekil 10.27 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen u_x 'e ait yer değiştirme grafiği.....153

Şekil 10.28 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen u_x 'e ait hata miktarı grafiği 153

Şekil 10.29 91 nokta kullanılarak analitik metodunun uygulanmasıyla elde edilen u_y 'e ait yer değiştirme dağılımı 154

Şekil 10.30 91 düğüm kullanılarak EBG metodunun uygulanmasıyla elde edilen u_y 'e ait yer değiştirme dağılımı 154

Şekil 10.31 91 adet düğüm sayısı, 72 eleman sayısı kullanılarak SEY metodunun uygulanmasıyla elde edilen u_y 'e ait yer değiştirme dağılımı 155

Şekil 10.32 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=24$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen u_y yer değiştirme grafiği 155

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devamı)**Şekil****Sayfa**

Şekil 10.33 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen u_y 'ye ait hata miktarı grafiği 156

Şekil 10.34 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen u_y yer değiştirme grafiği 157

Şekil 10.35 EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen u_y 'ye ait hata miktarı grafiği..... 157

Şekil 10.36 Analitik çözüm, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=L$, $y=0$ koordinat değerlerinde x eksenini boyunca elde edilen u_y çökme grafiği 158

Şekil 10.37 Analitik çözüm, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=L$, $y=0$ koordinat değerlerinde x eksenini boyunca elde edilen u_y 'ye ait hata miktarları 159

Şekil 10.38 Destek etkinlik bölge boyutunun eleman bağımsız Galerkin metodu üzerindeki etkisi 161

Şekil 10.39 Eleman bağımsız Galerkin yönteminde düğüm sayısına bağlı hata oranı. α_i parametresi 3.5 seçilmiştir. 162

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devamı)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 10.40 SEY yönteminde düğüm sayısına bağlı çözüm süresi ve EBG yöntemiyle karşılaştırılması (CPU time).....	164
Şekil 10.41 SEY yönteminde düğüm sayısına bağlı hata miktarları ve EBG yöntemiyle karşılaştırılması.....	164
Şekil 10.42 SEY’de (13x7), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y değerleri	167
Şekil 10.43 SEY’de (13x7), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y değerlerine ait hata miktarları	168
Şekil 10.44 SEY’de (20x11), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y değerleri	169
Şekil 10.45 SEY’de (20x11), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y değerlerine ait hata miktarları	169
Şekil 10.46 SEY’de (31x17), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y değerleri	170

Şekil 10.47 SEY’de (31x17), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı
kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y ’ait
hata miktarları 171

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
Tablo 3.1 Ağsız yöntemlerin tarihsel gelişimi (Liu G.R., 2002).....	26
Tablo 3.2 SEY ile ağsız yöntemler arasındaki farklılıklar (Liu G.R, Gu Y.T., 2005).....	29
Tablo 4.1 Ağsız metodların sınıflandırılması (Liu G.R., Gu Y.T., 2005)	47
Tablo 4.2 Ağsız yöntemlerin fonksiyon ve interpolasyonunda yöntemler (Liu G.R., Gu Y.T., 2005)	48
Tablo 5.1 Ağsız interpolasyon tekniklerin kategorileri (Liu G.R., Gu Y.T., 2005)	52
Tablo 5.2 Tipik temel radyal fonksiyonlar ve şekil parametreleri (Liu G.R., Gu Y.T., 2005.....	58
Tablo 5.3 Yoğun olarak desteklenmiş radyal temel fonksiyonlar	59
Tablo 5.4 Şekil 5.5'te gösterilen 25 düğüm noktasının koordinat değerleri.....	77
Tablo 9.1 EBG ve analitik çözüm sonucu elde edilen u_x değerleri..	133
Tablo 10.1 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan birinci analiz kesiti $x=0.3327$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen σ_{xx} gerilme ve hata değerleri.....	147

TABLOLAR DİZİNİ(Devamı)

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
Tablo 10.2 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen σ_{xx} gerilme ve hata değerleri.....	148
Tablo 10.3 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen σ_{xy} gerilme ve hata değerleri.....	151
Tablo 10.4 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen u_x yer değiştirme ve hata değerleri	154
Tablo 10.5 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=24$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen u_y yer değiştirme ve hata değerleri.....	156
Tablo 10.6 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen u_y yer değiştirme ve hata miktarı.....	158
Tablo 10.7 Analitik çözüm, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=L$, $y=0$ koordinat değerlerinde x eksenini boyunca elde edilen u_y 'ye ait değer ve hata miktarı	159

TABLOLAR DİZİNİ(Devamı)

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
Tablo 10.8 $x=48$ $y=6$ koordinat değerindeki nokta için SEY ve EBG yöntemlerinde düğüm sayısına bağlı çözüm süresi, (u_y değeri ve hata miktarı).....	165
Tablo 10.9 SEY’de (13x7), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y için değer ve hata miktarları.....	168
Tablo 10.10 SEY’de (20x11), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y için değer ve hata miktarları.....	170
Tablo 10.11 SEY’de (31x17), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y için gerçek değer ve hata miktarları	171

SİMGELER VE KISALTMALAR

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklamalar</u>
$A(x)$	Alan matrisi
$B_i(x)$	i.nci düğüm için alan fonksiyonu
b_x, b_y	Dış Yükler
c	Sönümleme katsayısı
f	Kuvvet
λ	Lagrange çarpanı
B_I	I düğümü için Lagrange çarpanı
w_i	i.nci X_{Qi} noktası için Gauss ağırlık fonksiyonu
J_{il}^B	Sınır için eğri integralinin Jacobian matrisi
n_{ct}	Γ_t sınırını oluşturmak için kullanılan eğri hücrelerinin sayısı
n_{gt}	Eğrideki Gauss noktalarının sayısı
$\bar{t}$	Doğal sınır koşulunda tanımlanmış zorlanma kuvveti
$\bar{u}$	Esas sınır koşulunda tanımlı yerdeğiştirme
ε	Birim şekil değiştirme
n_Q	Toplam kuadratik hücre sayısı
$F_I^{(t)}$	Nodal çekme kuvveti
J_{ik}^D	X_{Qi} noktasında yerleşen Gauss noktalarının arka plandaki hücresinde değişken alan integrasyonu
$F_I^{(b)}$	Nodal cisim kuvveti
u_i	i.nci düğüm noktasında tanımlı nodal alan değişkeni
u_s	n düğümlerindeki tüm alan değişkenlerini toplayan vektör

SİMGELER VE KISALTMALAR(Devamı)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklamalar</u>
$\phi_i(x)$	Destek bölgesindeki tanımlı düğüm noktalarını kullanarak $i.nci$ düğüm noktasındaki şekil fonksiyonu
$\alpha(x)$	Malzemeye bağlı parametre
E	Elastisite modülü
Γ	Çözüm bölgesi sınırları
I	Kesit atalet momenti
$[K]$	Katılık matrisi
$\bar{q}$	Doğal sınır şartı
$\{u\}$	Yer değiştirme vektörü
$\left\{\dot{u}\right\}$	Hız vektörü
$\left\{\ddot{u}\right\}$	İvme vektörü
X_i	Düğüm noktalarının geometrik yerleri
Ω	Çözüm bölgesi
$\hat{W}_i$	Ağırlık fonksiyonu
$\hat{V}_i$	Temel fonksiyon
n_x, n_y	Sınırlar üzerindeki normal dış vektörler
L	Türevsel operator matrisi
D	Malzeme sabiti
ρ	Kütle yoğunluğu
c	Sönümleme katsayısı
σ	Gerilme
$\bar{t}_i$	Çekme kuvveti

SİMGELER VE KISALTMALAR(Devamı)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklamalar</u>
d_c	X_q noktasında nodal aralık
d_{cx}	İki düğüm noktasındaki uzaklık
d_v	Ortalama nodal aralık
n_{DS}	Düğüm sayısı
V_s	Destek bölgesinin geometrik hacim
n_{VS}	V_s hacminde tanımlanan düğüm sayısı
$R(x)$	Radyal temel fonksiyon
$P_j[x]$	$X^T = [X, Y]$ koordinat değerleri
m	Polinomal temel fonksiyon sayısı
n	Radyal temel fonksiyon sayısı
r	x düğüm noktası ile x_i düğüm noktası arasındaki mesafe
q	Şekil parametresi
p_m	Polinomal moment matrisi
G	Genelleştirilmiş moment matrisi
l_{xj}	Cosinus yönleri
α_{sx}, α_{sy}	x yönlerindeki boyutsuz destek büyüklükler
d_{sx}, d_{sy}	Destek bölge boyutları
u_L^h	X noktası civarındaki yerel yaklaşım fonksiyonu
r	Etkinlik yarıçapı
Γ_u	Yer değiştirme sınırı
Γ_t	Çekme kuvveti sınırı

KISALTMALAR

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklamalar</u>
AYSİD	Ağsız yerel sınır integral denklemi
AYPG	Ağsız yerel Petrov Galerkin
AZGF	Ağsız zayıf güçlü form
DPH	Düzgün parçacık hidrodinamiği
EBG	Eleman bağımsız Galerkin
HEKY	Hareketli en küçük kareler yaklaşımı
HNİM	Hibrit nokta interpolasyon metodu
HSİD	Hibrit sınır integral denklemi
HSNİM	Hibrit sınır nokta interpolasyon metodu
HSRNM	Hibrit sınır radyal nokta interpolasyon metodu
NİM	Nokta interpolasyon metodu
RÇPM	Radyal çekirdek partikül metodu
RNİM	Radyal nokta interpolasyon metodu
SDRTF	Sımsıkı desteklenmiş radyal temel fonksiyonlar
SEM	Sınır elemanlar metodu
SEY	Sonlu elemanlar yöntemi
SFY	Sonlu farklar yöntemi
SHM	Sonlu hacimler metodu
SİD	Sınır integral denklemi
SNİM	Sınır nokta interpolasyon metodu
SNM	Sonlu nokta metodu
SRNİM	Sınır radyal nokta interpolasyon metodu
YİSM	Yerel integral sınır metodu
YNİM	Yerel nokta interpolasyon metodu
YRNİM	Yerel radyal nokta interpolasyon metodu
YÜÇPY	Yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemi

KISALTMALAR(Devamı)

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklamalar</u>
BEM	Boundary element method
BIE	Boundary integral equation
BPIM	Boundary point interpolation method
BRPIM	Boundary radial point interpolation method
CSRBF	Compactly supported radial basis functions
EFG	Element free Galerkin
FDM	Finite differences method
FEM	Finite elements method
FPM	Finite point method
FVM	Finite volumes method
HBIE	Hybrid boundary integral equation
HBPIM	Hybrid boundary point interpolation method
HBRPIM	Hybrid boundary radial point interpolation method
HPIM	Hybrid point interpolation method
PIM	Hybrid point interpolation method
LIBM	Local integral boundary method
LPIM	Local point interpolation method
MLBIE	Meshless local boundary integral equation
LRPIM	Local radial point interpolation method
MLPG	Meshless local Petrov Galerkin
MLS	Moving least squares
MWS	Meshless weak-strong
PIM	Point interpolation method
RKPM	Reproducing Kernel point method
RPIM	Radial point interpolation method
SPH	Smooth particul hydrodynamics

1 NÜMERİK YÖNTEMLER

1.1 Giriş

Son zamanlarda fen bilimciler ve mühendisler alışılmış analitik metodlarla çözümü çok zor hatta imkansız fiziksel problemlerle sık sık karşılaşmaktadır. Örneğin bir dış kuvvet takımı etkisinde üç boyutlu elastik bir cisim farzadelsin. Bu kuvvetler cismin ‘kesin ‘ tepkisini hesaplanması için deformasyonlar cinsinden yazılmış denklemlerin bir ‘kapalı form’ çözümü aranılması gerekmektedir. Bunun yanında genellikle karmaşık geometrik şekilli mühendislik problemlerinin böyle bir çözüm elde etmek için aşırı derecede zor ve çoğu zamanda imkansızdır. Bu tip problemler fen, mühendislik ve diğer bilim dallarında çok sık ortaya çıkmaktadır. Böyle tip problemlerle karşılaşan analizci doğal olarak ‘nümerik analiz’ adı verilen bir çözümleme analizine başvuracaktır.

Analitik metod veya başka metodlarla çözülemeyen problemlerin çözümünde , kullanılabilen çok sayıda nümerik yöntem yolu vardır. Sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemi, sonlu hacimler yöntemi, ağsız yöntemler bunlardan bir kısmıdır. Aşağıda genel olarak SFY, SHY, SEY ile ilgili temel bilgiler verilmiştir

1.2 Sonlu Farklar Metodu

Sonlu farklar hesabı sayısal yöntemlerde yaygın olarak kullanılmaktadır. Hatta sayısal işlemlerin pek çoğu için baz teşkil ederler.

Matematiksel problemler değişkenlerin sürekli fonksiyonları olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu fonksiyonlar kapalı bir formülle tanımlanmışlardır, ve bağımsız değişkenlerin verilmiş değerleri için fonksiyonların değerleri hesaplanabilir. Bir başka şekilde de fonksiyon, bağımsız değişkenlerin her bir değerine karşılık gelen değerlerin bir cümlesi olarak tanımlanabilir. Bu halde fonksiyon kapalı ya da açık bir formülle verilmemiştir.

Fonksiyonun, bağımsız değişkenin verilmiş sıralı değerler ile tanımlanması halinde, süreklilik aralığındaki herhangi bir noktada formülle tanımlama yoktur. Verilen aralık (veya bölge)’de fonksiyonun mevcut olduğu varsayılır. Sonlu farklar kullanılarak aralığın içinde herhangi bir noktadaki değeri için iyi bir yaklaşım bulmak olasıdır.

Karşılaşılan problemlerin pek çoğunda, kapalı bir formül şeklinde çözüm bulma olası ise de, bazen bu kapalı analitik çözüm yerine ayrık noktalar cümlesinde sonlu farklar kullanılarak çözüm elde etmek daha kolaydır (ağal, B., 1989).

Sonlu farklar metodunda sınır şartlarının oluşturulması kesin olduğu halde diferansiyel denklemin oluşturulmasında yakınsaklık vardır.

Sonlu farklar metodu hemen hemen her probleme uygulanabilen basit bir metoddur. Dayandığı esas, diferansiyeller yerine sonlu farkları alarak, problemin diferansiyel denklemini, fonksiyonun ayrık noktalardaki değerleriyle yaklaşık olarak ifade etmektir

Sonlu farklar metodunda türevsel ifadeler, sonlu farklar şekline dönüştürülerek denklem yaklaşık olarak çözülür. Herhangi bir

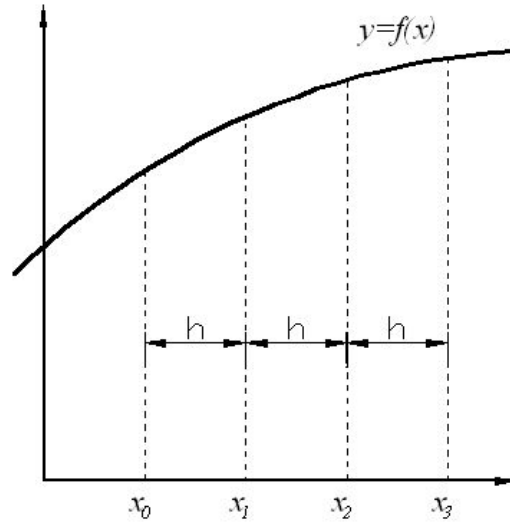
denklemin 1. türevli sonlu farklar metodunda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1.1)$$

Yaklaşık formatta fonksiyon aşağıdaki gibi kabul edilebilir.

$$f'(a) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1.2)$$

Sonlu farklar metodu kullanılarak problem yaklaşık olarak çözülmek istendiğinde öncelikle problem bölgesinin tanımlanması gerekir. Şekil 1.1’de görüldüğü gibi fonksiyon üniform olarak hücelere bölünmüştür (Morton, K.W. and Mayers, D.F., 2005).



Şekil 1.1 Sonlu farklar metodunda fonksiyonun hücelere bölünerek gösterilişi

1.3 Sonlu Hacimler Metodu

Bu metod son 70 yıldır sonlu farklar yöntemine paralel olarak gelişmiştir. Sonlu farklar metodunda kısmi diferansiyel denklemler cebirsel denklemler şeklinde gösterilip çözülürler. Sonlu farklar metodunda olduğu gibi elde edilmek istenen çözümler parçalara bölünmüş hücrelerde hesaplanır. Bu metodta ağ üzerindeki noktalar birleşerek hacimleri oluşturur.

Sonlu hacimler yönteminde kısmi diferansiyel denklemdeki farklı terim içeren hacim integralleri diverjans teoremi kullanılarak yüzey integtallerine dönüştürülür. Bu terimler daha sonra her bir hacimde akış olarak değerlendirilir. Ayrıca bu metodta düzgün yapıya sahip olmayan ağlar kolaylıkla formüle edilebilir. Bundan dolayı bu metod avantajlı sayılır (Shurina, O.P., Solonenko, T.V., Voitovich., 2002).

En çok hesaplamalı akışkanlar dinamiği problemlerinin çözülmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır

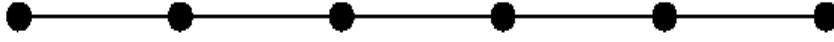
1.4 Sonlu Elemanlar Metodu

Bu yöntemde cisim, sonlu boyutta yani çok sayıda elemana ayrılır. Metod ismini burdan almaktadır. Cisim uzayda $n=(1,2,3)$ boyuta sahiptir.

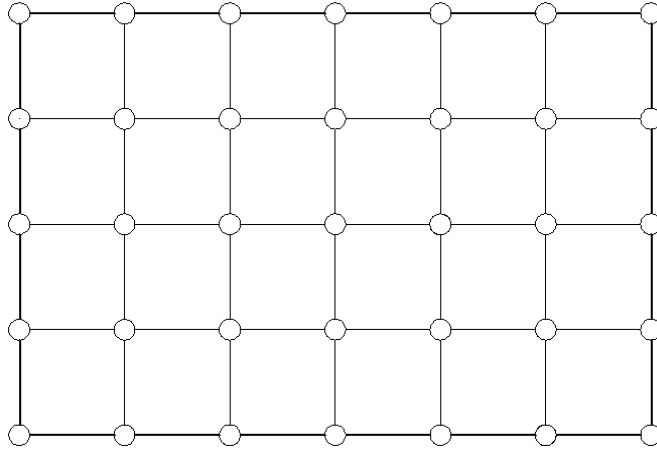
Bir boyutlu çözüm bölgesi şekil 1.2’de düğümlerle; iki boyutlu çözüm bölgesi Şekil 1.3’te dikdörtgen elemanlarla, üç boyutlu çözüm bölgesi Şekil 1.4’te olduğu gibi hacimsel elemanlara ayrılmaktadır. Bir boyutlu cisimlerde sonlu elemanlar farklı uzunluklarda

olabilmektedirler, ve bütün durumlarda çözüm bölgesini temsil eden sonlu elemanlar Şekil 1.5'te görüldüğü gibi düğümler ile bağlanması gerekmektedir.

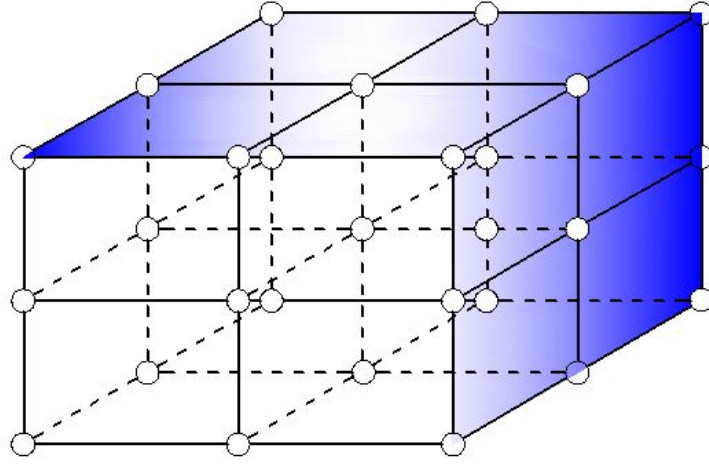
Elemanların düğümlerle birbirlerinin bağlantı durumu Şekil 1.5'te en iyi şekilde anlaşılmaktadır. Burada düzgün birim kalınlıkta dikdörtgen iki düzlem sonlu eleman vardır.



Şekil 1.2 5 doğrusal sonlu elemana ayrılmış 1 boyutlu cisim

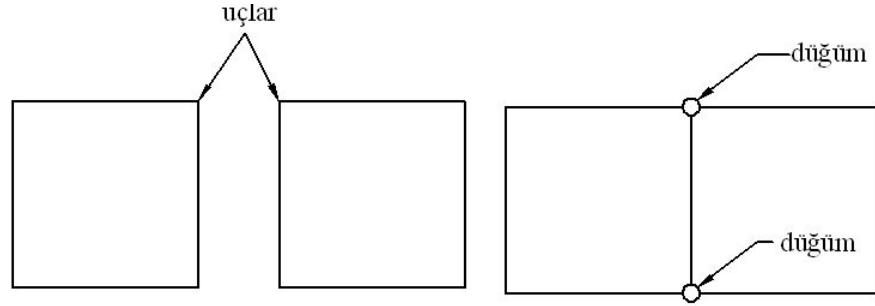


Şekil 1.3 Dikdörtgen elemanlarla ayrılmış 2 boyutlu çözüm bölgesi



Şekil 1.4 Prizmatik elemanlarla ayrılmış 3 boyutlu cisim

Şekil 1.5'te elemanların ayrı ve birbirlerine bağlanmamış şekilde verilmiştir. Elemanlar birbirleriyle ilişkisi somun civata ilişkisine benzetilebilir. Düğümler kaldırıldığında elemanlar birbirlerinden ayrılırlar.



Şekil 1.5 Elemanların düğümlerle birbirleriyle bağlantıları

Burada önemli olan nokta, düğümler kaldırıldığında elemanlar birbirlerinden ayrılacağından komşu sonlu elemanlar arasındaki fiziksel süreklilikte ortadan kalkar.

Yöntemin çözülmesinde bir sonraki adım, cismi temsil eden elemanların her birinin ‘eleman katılık matrisini’ (element stiffness matrix) tanımlamaktır. Daha sonra, eleman katılık matrisleri parçalara ayrılmış cismin tamamına ait sistem katılık matrisini oluşturmak üzere toplanır. Katılık matrisi oluşturmada cismin sonlu eleman modelindeki bütün düğümlerde kuvvetlerin dengesi ve yer değiştirmelerin sürekliliği sağlanmış olur.

$$[K].\{u\} = \{F\} \quad (1.3)$$

Denklem (1.3)’te $[K]$, katılık matrisini, $\{F\}$, bütün düğümlere uygulanan yükleri, $\{u\}$ ise yerdeğiştirmeleri göstermektedir. Denklem (1.3) incelendiğinde, parçalara ayrılmış cisimde birim yer değiştirme oluşturacak kuvveti temsil etmektedir. Buradan cismin sonlu eleman modelini bir yaya eşdeğer olarak düşünüldüğünde cismin katılık matrisi $[K]$, yay sabitine karşılık olmaktadır. Dolayısıyla sonlu elemanlar metodu esas itibarıyla katılık matrisinin analiz edildiği bir methodur. Denklem (1.3)’te katılık matrisi oluşturulduktan sonra yerdeğiştirmeler bulunur. Yer değiştirme değerleri ile gerilmeler ve şekil değişimleri bulunur.

Kısacası sonlu elemanlar metodunun çözüm prosedürü aşağıda maddelerle sıralanmıştır.

- a. Cisim öncelikle sonlu elemanlar sistemi halinde elemanlara bölünür.
- b. Elemanlara ait her birinin katılık matrisleri çıkartılır.
- c. $[K]$ sistem katılık matrisi ve $\{F\}$ kuvvetleri toplanır.

- d. $\{u\}$ tayin edilmesi işleminde sınır şartlarıyla denklem (1.3) çözülür.
- e. Elde edilen $\{u\}$ değerlerinden sonra elemanlara ait şekil değiştirmeler ve gerilmeler hesaplanır.

Kompleks mühendislik uygulamalarında genellikle boyutu büyük olan $[K]$ matrisleri oluşmaktadır. Bu yüzden denklem (1.3)'ün çözülmesinde bilgisayar ile oluşturulmuş kod tabanlı programlar veya hazır sonlu elemanlar paket programları kullanılmaktadır. Böylece sonlu elemanlar metodu otomatik hesap ile birleştirilmekle karmaşık problemlerin çözülmesi sağlanır.

Diğer nümerik yöntemler özellikle önceki başlıkta incelenen sonlu farklar metodu daha eski ve güvenilir olduğu halde sonlu elemanlar metodunun sonlu farklar yöntemine göre üstün kılan başlıca özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

- Sonlu elemanlar yöntemi, cisimlerin boyutları ve şekillerinin esnekliği nedeniyle verilen çözüm bölgelerini kolaylıkla ifade edilebilir. Hatta karmaşık şekilli bir cisimde daha güvenli olabilir
- Çok bağlantılı bölgeler için hassas çözümler incelenebilir. Sınır şartları kolaylıkla uygulanabilir.
- Sürekli ortam mekaniğine dayandığından sebep-sonuç ilişkisi etkin bir şekilde kullanılabilir.

Sonlu farklar metodu yukardaki maddelerde incelenen kavramları çözmede önemli ölçüde zorluk gösterir.

1.5 Nümerik Simülasyon

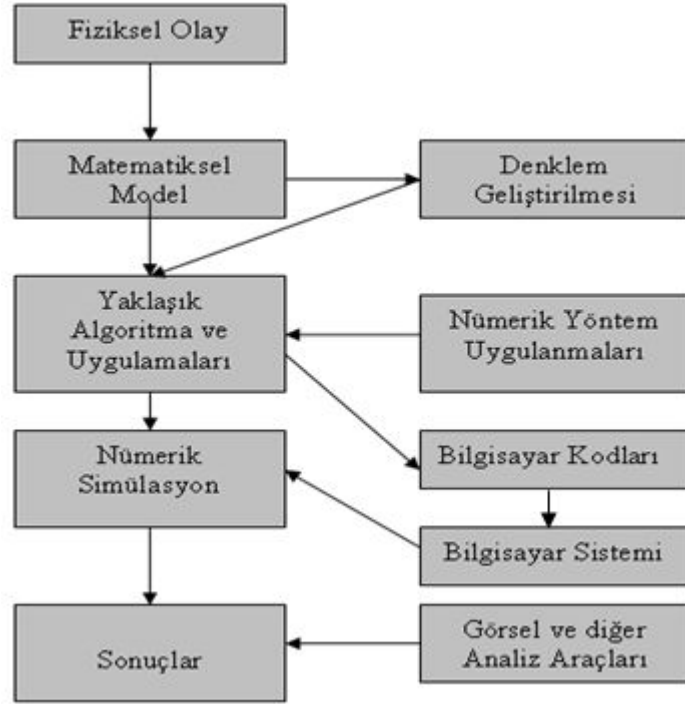
Doğadaki mekanik, jeolojik, elektriksel, kimyasal olaylar, bazen cebirsel, bazen diferansiyel, bazende integral denklemleriyle tanımlanabilir. Bu denklemler öncelikle analitik olarak çözülmeye çalışılır. Sadece basit ve pratik uygulamalar için tam çözüme ulaşılabilir. Lakin problemlerin çoğu kompleks bir yapıya sahiptirler. Dolayısıyla yaklaşık çözümleri elde edebilmek için nümerik yöntemler uygulamalıdır. Yakınçağda mühendisler ve fen bilimciler, değişik türdeki problemler için nümerik yöntem teknikleriyle, problemleri çözmeye aşına hale gelmişlerdir. Çünkü bilgisayar teknolojisinin hızlı gelişmesiyle, bilgisayar destekli simülasyon fen ve mühendislikte pratik problemlerin çözülmesinde, bu yöntemlerin önemini gittikçe artırmıştır.

Nümerik simülasyonun esası kompleks yapıdaki problemi basit ve ayrı ayrı matematiksel tanımlamaya dönüştürmektir. Uygun bir nümerik yöntem kullanıldığı müddetçe, karmaşık olan problem, verimli bir şekilde çözmek mümkündür.

Adım 1: Fiziksel olay belirlenir.

Adım 2: Uygun olan varsayımlarla fiziksel olay için matematiksel modeller kurulur. Bu matematiksel modeller genellikle uygun koşullarla (başlangıç koşulları, sınır koşulları gibi) desteklenir. Geliştirilmiş denklemler genellikle ya diferansiyel denklemler ya da integral denklemlerinden oluşurlar. Bu adım nümerik simülasyonun temel kısmını oluşturur.

Adım 3: Matematiksel model uygun olan nümerik yöntem ve algoritmalarla tanımlanır. Bu adım nümerik yöntem için bilgisayar destekli kod geliştirmektir.



Şekil 1.6 Nümerik simülasyon aşamaları (G.r. Liu, Y.T. Gu., 2005)

Adım 4: Nümerik olarak problem bilgisayar vasıtasıyla simüle edilir.

Adım 5: Adım 4'te bulunan değerlerle problem analiz edilir. İyi bir analiz elde etmek için çözülecek problem için uygun bir metod seçilmelidir. En çok kullanılan yöntemler sonlu farklar yöntemi (SFY), sonlu hacimler metodu (SHM) sonlu elemanlar yöntemi (SEY), sınır

elemanlar yöntemi (SEY) ve ağsız yöntemleridir. Şekil 1.6'da nümerik simülasyonun aşamaları verilmiştir.

Mühendislik sistemleri çok sayıda problemi içermektedir. Bu problemlerin pek çoğunun matematiksel modelinin kurulması ve simülasyonunun oluşturulması oldukça zordur. Bu zorlukların aşılması açısından sistemin tamamının değil de sadece sistemin performansını etkileyen en önemli parametrelerin modellenmesi, çoğu zaman sistem hakkında yeterli bilgi sağlar. Mühendislikte katı mekaniği, yapı mekaniği, akışkanlar mekaniği gibi pek çok alan mevcuttur ve her bir alanda fiziksel problemler farklı şekillerde ele alınmaktadır. Ancak matematiksel modeller yaklaşık olarak aynı olmaktadır. Matematik modeller diferansiyel denklemler kullanılarak oluşturulurlar. Bu modeller çoğu kez sonlu elemanlar, sonlu farklar sınır elemanlar yöntemi gibi sayısal yöntemler kullanılarak çözülüp fiziksel problemin simülasyonu gerçekleştirilir. Mevcut durumlarıyla bu sayısal yöntemlerin kullanılmasıyla elde edilen sayısal simülasyon sonuçlarının bazen yeterli olmamasından dolayı, ağsız yöntemler önerilmiştir.

2 YAKLAŞIK METODLAR

2.1 Zayıf ve Güçlü Formlar

Zayıf formların en güzel örneğini oluşturan nümerik metodlardan en çok kullanılanı sonlu farklar yöntemidir. Sonlu farklar yöntemleri yaklaşık çözümü bulmak için güçlendirilmiş formu kullanırlar. Bununla birlikte SFY, genellikle basit ve düzenli geometriye sahip problemleri çözmek için uygun bir ağ kullanır.

Güçlü formun karşıtı olan zayıflatılmış form yaklaşık fonksiyon üzerinde daha zayıf bir yapıya sahiptir. Fiziksel ve matematiksel prensiplere dayanarak sistem denkleminin integral operatörleri kullanılır. Bu çalışmada mekanik problemler inceleneceğinden dolayı zayıflatılmış form metodları kullanılacaktır.

Zayıflatılmış formu oluşturmak için iki temel kategori kullanılacaktır. Bunlardan birisi varyasyonel metodlar diğeri de artık metodlardır. Galerkin zayıflatılmış formu ve Petrov Galerkin zayıflatılmış formları, sistem denklemlerini oluşturmak için en çok kullanılan yaklaşımlardır. Aynı zamanda ağısız yöntemlerin formüllerini türetmek için de kullanılırlar. Hamilton prensibi ise genellikle dinamik problemlerin yaklaşık sistem denklemlerini türetmek için kullanılır. En küçük toplam potansiyel yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi veya diğeri yaklaşık metodlar, problemin tüm sistem denklemlerini oluşturmak için kullanılan yaygın metodlardır. Ağırlıklı artık metod ise matematiksel olarak uygun bir yöntem olup, birçok mühendislik problemlerin çözümünde tercih edilen bir metottur. Halen günümüzde kullanılıp geliştirilmeye devam edilmektedir.

2.2 Ağırlıklı Artık Metodu

Ağırlıklı artık metod kısmi diferansiyel denklemler veya adi diferansiyellerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kapsamlı ve etkin bir özelliğe sahiptir. Birçok nümerik metod genel ağırlıklı artık metod üzerine kuruludur.

Kısmi diferansiyel denklem

$$F(u) + b = 0 \quad \Omega : \text{Problem bölgesi} \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. F kısmi diferansiyel denklem operatörü sınır koşulunda aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$G(u) = g \quad \Gamma \text{ sınırında} \quad (2.2)$$

Birçok mühendislik probleminde sıradan diferansiyel denklemler veya kısmi diferansiyel denklemler ancak yaklaşık metodlarla çözülebilir.

u için birinci yaklaşık fonksiyon

$$u^h(x) = \sum_i^n \alpha_i B_i(x) = B\alpha \quad (2.3)$$

ifadesiyle tanımlanır.

Denklem (2.3)'te $B_i(x)$, i .nci temel fonksiyon terimi, α_i , i .nci terim için bilinmeyen katsayı, n , temel fonksiyon adedidir. (2.3) ifadesi (2.1) ve (2.2) denkleminde koyulursa denklem (2.4) ve (2.5) elde edilir.

$$F(u^h) + b \neq 0 \quad (2.4)$$

$$G(u^h) - g \neq 0 \quad (2.5)$$

Denklem (2.4) ve (2.5)'e problem bölgesinde sınır koşulları uygulanarak R_s ve R_b artık fonksiyonları bulunur.

$$R_s = F(u^h) + b \quad (2.6)$$

$$R_b = G(u^h) - g \quad (2.7)$$

Eğer (2.3)'teki denklem tam çözüm olarak kabul edilirse (2.6) ve (2.7) nolu denklemdeki R_s ve R_b artık değerleri 0 değerine eşit olacaktır. Ama birçok pratik problemde tam çözüm bulunamayacağından dolayı R_s ve R_b , 0 değerine eşit değildir. Ayrıca R_s ve R_b değerleri seçilen yaklaşık fonksiyonlara bağlı olarak da değişir. Artık fonksiyonunu mümkün olduğunca küçültmek için uygun bir fonksiyon çeşidi seçilip bazı teknikler kullanılabilir. ve ağırlıklı artık integral denklemleri 0 değerine eşitleyerek çözüme ulaşılır.

$$\int_{\Omega} \hat{W}_i R_s d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i R_b d\Gamma = 0 \quad (2.8)$$

Denklem (2.8)'de $i = 1, 2, \dots, n$, $\hat{W}$ ve $\hat{V}$, R_s ve R_b artık değerleri fonksiyonları için verilen ağırlık fonksiyonlarıdır.

Denklem (2.2)'de sınır koşuluna dayanarak $R_b = 0$ değerine ulaşılır.

Böylece (2.8)'deki denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\int_{\Omega} \hat{W}_i R_s d\Omega = 0 \quad (2.9)$$

(2.9)'daki denklem sonlu elemanlar yönteminde veya diğer yöntemlerde nümerik çözüme ulaşmak için sıklıkla kullanılan bir formüldür.

(2.6) ve (2.7) denklemindeki artık değerler, (2.8) denklemine yerleştirilirse denklem (2.10) elde edilir.

$$\int_{\Omega} \hat{W}_i [F(u^h) + b] d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i [G(u^h) - g] d\Gamma = 0 \quad (2.10)$$

(2.3)'deki denkleminde kullanılmasıyla

$$\int_{\Omega} \hat{W}_i [F(B\alpha) + b] d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i [G(B\alpha) - g] d\Gamma = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir.

(2.11)'deki denklem daha açık ifadelerle $i = 1, 2, \dots, n$ için yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \hat{W}_1 [F(B\alpha) + b] d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_1 [G(B\alpha) - g] d\Gamma &= 0 \\
\int_{\Omega} \hat{W}_2 [F(B\alpha) + b] d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_2 [G(B\alpha) - g] d\Gamma &= 0 \\
\int_{\Omega} \hat{W}_3 [F(B\alpha) + b] d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_3 [G(B\alpha) - g] d\Gamma &= 0 \\
\int_{\Omega} \hat{W}_n [F(B\alpha) + b] d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_n [G(B\alpha) - g] d\Gamma &= 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

bağıntısı elde edilir. Burada sistemin, n adet bilinmeyen için n adet denklem vardır.

(2.12) deki denklem takımındaki $\hat{W}_i$ ve $\hat{V}_i$ ağırlık fonksiyonu ise $B_i(x)$ temel bağımsızdır. Ayrıca $B_i(x)$ temel fonksiyonu belirli şartlar altında sürekliliğe sahiptir.

Bunlar ağırlıklı artık metodlar için en genel halidir. (2.12)'deki denklemler adi türevsel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemlerden elde edilmiştir. Farklı nümerik yaklaşımlar farklı ağırlık fonksiyonları seçilmesiyle bulunur.

Aşağıda birkaç metod incelenecektir.

2.2.1 Sıralama Yöntemi (Kolakasyon Yöntemi)

Kısmi veya adi diferansiyel denklem bir form olarak yazılması yerine problem bölgesine dağıtılmış noktalar olarak yazılabilir. Bu metod ilk olarak 1934 yılında metallerde enerji taşınması problemlerinde kullanılmıştır (Slater, J.C., 1934).

Kronecker delta fonksiyonları kullanılarak hem ağırlık hemde temel fonksiyon için (2.8)'deki denklem çözülmesiyle elde edilir.

Kronecker delta fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\begin{aligned} \hat{W}_i &= \delta(x - x_i) \\ \hat{V}_i &= \delta(x - x_i) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta(x - x_i) &= 0, & x &\neq x_i \\ \int_{x_i-c}^{x_i+c} \delta(x - x_i) dx &= 1 & c &\longrightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

(2.13)'te ki denklemi (2.8) denklemine yerleştirerek ağırlıklı artık fonksiyonundan sıralama metodu türetebilir.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta(x - x_i) R_s d\Omega + \int_{\Gamma} \delta(x - x_i) R_b d\Gamma &= \int_{\Omega} \delta(x - x_i) [F(B\alpha) + b] d\Omega + \\ \int_{\Gamma} \delta(x - x_i) [G(B\alpha) - g] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$R_s(x_i) + R_b(x_i) = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{veya} \quad [F(B(x_i)\alpha + b)] + [G(B(x_i)\alpha) - g] = 0 \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.16)'da ki denklem problemin bölgesinde seçilen n nokta için uygulanabilir.

2.2.2 Altbölge Metodu

Altbölge metodu sıralama metoduyla temel olarak aynıdır. Sıralama metodundan ayrılan tarafı artık fonksiyonun sabit noktalarda 0'a eşitlenmesi yerine, artık fonksiyonun integralini (Ω_i $i=1,2,3,,n$) için 0'a eşitliyerek bulunabilir (Biezeno, C.B. and Koch, J.J., 1923)

Bu metoda ağırlık fonksiyonu

$$W_i = \begin{cases} 1, & \Omega_i \text{ iç taraf} \\ 0, & \Omega \text{ dış taraf} \end{cases} \quad (2.18)$$

gibi olur.

Dolayısıyla (2.8) denklemi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{W}_i R_s d\Omega + \int_{\Gamma} V_i \hat{R}_b d\Gamma &= \int_{\Omega_i} \hat{W}_i R_s d\Omega + \int_{\Gamma_i} V_i R_b d\Gamma = \\ \int_{\Omega_i} [F(B\alpha) + b] d\Omega + \int_{\Gamma_i} [G(B\alpha) - g] d\Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

olur.

2.2.3 En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler yöntemi ilk olarak 1795 yılında Gauss ve 1806 yılında Legendre tarafından geliştirilmiştir. 1908 yılında Picone, diferansiyel denklemleri çözmek için bu metodu uygulamıştır.

$$J(\alpha_i) = \int_{\Omega} R_s . R_s d\Omega \quad (2.20)$$

Burada J ifadesinin minumun değeri aranılırsa;

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial(R_s \cdot R_s)}{\partial \alpha_i} d\Omega = 2 \int_{\Omega} \frac{\partial(R_s)}{\partial \alpha_i} R_s d\Omega = 0 \quad (2.21)$$

$$\text{veya} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial(R_s)}{\partial \alpha_i} R_s d\Omega = 0 \quad (2.22)$$

denklemini elde edilir.

Ağırlıklı artık metotta belirtildiği gibi, ağırlık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{W}_i = \frac{\partial R_s}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial F(u^h)}{\partial \alpha_i} \quad (2.23)$$

$$V_i = \frac{\partial R_b}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial G(u^h)}{\partial \alpha_i} \quad (2.24)$$

Dolayısıyla (2.8) denklemi

$$\int_{\Omega} \hat{W}_i R_s d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i R_b d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial R_s}{\partial \alpha_i} R_s d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial R_b}{\partial \alpha_i} R_b d\Gamma = 0 \quad (2.25)$$

elde edilir. Burada $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Bu ifadede ki n adet denklem çözülerek yaklaşık sonuç elde edilir.

2.2.4 Moment Yöntemi

Bu metotta ağırlık fonksiyonları $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ değişkenleri seçilir. Bu metod (1947) yılında Yamada ve (1951) yılında Fujita tarafından geliştirilmiştir.

Basit bir şekilde ifade edilirse;

$$\hat{W}_i = \hat{V}_i = X_i^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

denklemleri bulunur. (2.8)'deki denklem,

$$\int_{\Omega} \hat{W}_i R_s d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i R_s d\Gamma = \int_{\Omega} X_i^{i-1} R_s d\Omega + \int_{\Gamma} X_i^{i-1} R_b d\Gamma = 0 \quad (2.27)$$

gibi olur. (2.27) ifadesinden n adet bilinmeyen denklem için n adet denklem türetilir. n adetinde α_i çözülmesiyle yaklaşık çözüme ulaşılır.

2.2.5 Galerkin Yöntemi

Galerkin metodu (1915), özellik olarak ağırlıklı artık metodla aynı sayılır. Bu yöntemde test fonksiyonları yaklaşık alan fonksiyonunda kullanıldığı gibi ağırlık fonksiyonları olarak da kullanılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \hat{W}_i &= B_i \\ \hat{V}_i &= -B_i \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

(2.8) denklemi;

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} B_i R_s d\Omega + \int_{\Gamma} B_i R_b d\Gamma = \\ \int_{\Omega} B_i [F(B\alpha) + b] d\Omega - \int_{\Gamma} B_i [G(B\alpha) - g] = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

gibi olur. Burada n tane α_i katsayısı için n adet denklem çözülür.

Galerkin metodunda kullanılan sistem matrisi simetriktir. Buna ek olarak enerji prensibinden yararlanıldığı için fiziksel özelliğe sahiptir. Bundan dolayı ağırlıklı artık metodu nümerik yöntemlerde kullanıldığı için SEY' den sonra en çok tercih edilen yöntemdir

3 AĞSIZ YÖNTEMLER

Son yirmi yıldır sonlu elemanlar yöntemi nümerik mekanik biliminde yaygın olarak kullanılmaktadır. Fen ve mühendisliğin gelişmesine kayda değer yararlar sağlamıştır. Buna rağmen SEY yüksek deformlu ve yüksek ağa sahip problemlerin çözümünde yetersiz kalmaktadır. Yapısal çatlak optimizasyon problemlerinde yeniden çözüm elde etmek için tekrar ağ türetilmesinde zorluk göstermektedir. Sonlu elemanlar yönteminde alışılmış ağ tekniğiyle bu gibi zorlukların üstesinden geçmek imkansızdır.

Ağsız yöntemler, sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sonlu hacimlerinden ayrılan tarafı cismi bir takım nodal noktalara bölerek yaklaşık fonksiyon bu düğümler üzerinde türetilir. Bu yöntemde ağ ve eleman oluşturulması gerekmiyor. Ağ oluşturmada karşılaşılan zorluklar bu metodta görülmez. Mühendislik ve fen uygulamalarında daha esnek bir yaklaşım sunar.

Ağsız yöntemler günümüzde de yaygın olarak araştırmacıların ilgisini çekmektedir. Esnek çözüm, güçlü perfonmans ve verimli sonuçlarıyla araştırılacak çok zengin bir alandır. Ayrıca zaman gerektirecek problemler için etkili sonuçlar vaad etmektedir. Günümüzde geliştirilmiş yaygın ağsız yöntemler vardır, ve hala bu metodların geliştirilmeleri devam edilmektedir. Aynı zamanda bu gelişmelerden yararlanılacak birçok ağsız yöntem türleride mevcuttur. Mevcut durumları gösteriyorki ağsız yöntemler birçok araştırma gruplarının dikkatlerini üzerinde toplayacaktır.

3.1 Ağsız Metodların Tanımı

Ağsız yöntem, tanımlanan alanda ağ kurulmadan sistemin algoritmik denklemlerini kurmaya çalışan bir metod olarak tanımlanabilir. Ağsız yöntemler problem bölgesinde tanımlı düğüm noktalarını kullanarak sınır koşulları uygulayıp problemi çözer. Dağılmış düğümlere alan düğümleri denilir. Aralarında ağ oluşturmazlar. (Liu G.R., 2000)

Sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi uygun olan interpolasyonu veya yaklaşık çözümü bulmak için önceden ağ tanımlanması gerekmemektedir.

Birçok ağsız metod kompleks uygulamalarda kullanılıp iyi potansiyel göstermekle güçlü nümerik çözüm araçları haline gelmişlerdir. Bununla birlikte halen gelişim aşamasında olup, karmaşık mühendislik problemlerinde, rahat kullanılabilir araçlar haline gelebilmeleri için teknik sorunları günümüzde de çözmeye devam edilmektedir. Ağsız yöntemler SEY ile karşılaştırıldığında önemli farklılıklar olmayıp, SEY ile elde edilebilen tüm çözümler ağsız yöntemler kullanılarak ta elde edilebilir.

3.2 Ağsız Yöntemlerin Tarihi Gelişimi

Gelişmiş mühendislik tasarlanmasında bilgisayar destekli dizayn araçlarının kullanılmasına gereksinim duyulmaktadır. Böyle çözüm araçları mühendislik sistemlerinin simülasyonunda sık olarak kullanılmaktadır. Kompleks diferansiyel denklem ve kısmi diferansiyel denklem çözülerek problem simule edilir. Günümüzde sonlu elemanlar

yöntemi (SEY), sonlu farklar metodu (SFM), gibi nümerik metodlar kullanılarak karmaşık kısmi diferansiyel denklemler çözülür. Bu metodlarda problem bölgesi ağlara bölünmektedir. Ağ, önceden tanımlı düğümlerin birbirleriyle bağlantısı olarak ifade edilmektedir. Sonlu farklar yönteminde ağlar ızgara, sonlu hacimler yönteminde, hacim ve hücre, sonlu elemanlar yönteminde ise eleman olarak tanımlanmaktadır. Hacim, hücre ve elemanlar farklı fiziksel problemler için farklı tanımlandığından farklı fiziksel anlamlar taşımaktadırlar. Kısacası, ızgaralar, hacimler, hücreler ve elemanlar üstte tanımlanan ifadeye göre ağ olarak isimlendirilir. Ağ için önemli olan birbirleriyle etkileşimli olarak çözüm öncesinden tanımlanmış olmasıdır.

Problem çözüm öncesi tanımlanmış uygun bir ağ yapısı kullanılarak, verimli bir çözüm yoluyla ağ için bir takım algoritmik denklemlerle kompleks diferansiyel denklemler veya kısmi diferansiyel denklemler yaklaşık olarak çözülür. Tüm problem bölgesi için algoritmik denklemler kullanılarak ağ boyunca sistem çözülür.

Ağsız yöntemler de çözüm öncesinde ağ tanımlanmış olması gerekmiyor. Sadece problem bölgesi boyunca algoritmik denklemler sistemi kurulup problem çözülür. Ayrıca bu özellik tüm ağsız yöntemlerde ortaktır.

Ağsız metod için temel gereksinim, değişken alan interpolasyon çözümü için önceden ağ tanımlanması gerekmiyor. Ağsız metodlar için ideal gereksinim ise, kısmi diferansiyel denklemlerle oluşturulmuş bölge sınırında, uygun sınır koşulları altında, çözüm esnasında eleman yapısının tanımlanmasına ihtiyaç duyulmamaktadır. Günümüze kadar geliştirilmiş ağsız yöntemler tam anlamıyla ideal sayılmamaktadır.

Ağsız yöntemler bilimsel, teknoloji ve uygulamalarda yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar metodunun kompleks problemlerin çözümünde türettiği olumsuzluklardan dolayı ağsız yöntemlerin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur.

Atluri ve Zhu 1998 yılında yaptıkları çalışmada sayısal integrasyon işleminde hücre yapısı gerektirmeyen gerçek yapıda ağsız yöntem geliştirmişlerdir. Bu metodta alışılmış şekil ve ağırlık fonksiyonları yerine Petrov-Galerkin formülasyonu kullanılmıştır.

Nayroles ve çalışma arkadaşları 1992 yılında difüze eleman Galerkin yöntemini geliştirmişlerdir. Bu yöntem sahip olduğu avantajlarından biri, ağ oluşturulmadan düğümler toplanabilmiştir. Diğerleri ise düğümler arasındaki boşluğun çözüm hassasiyetini etkilememesidir.

Belytschko, 1994 yılında difüze eleman bağımsız Galerkin yöntemini araştırırken eleman bağımsız Galerkin yöntemini elde etti. Bu yöntemde şekil fonksiyonları olarak hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Aynı zamanda elde edilen bu yöntemle spesifik problemler için daha hassas sonuçlar alınmıştır. Bu metodta sınır koşullarının uygulanmasında Lagrange çarpanları kullanılmıştır (Belytschko, T., Lu, Y.Y and Gu, L., 1994). Ağsız yöntemlerin tarihsel gelişimi daha ayrıntılı bir biçimde Tablo 3.1’de verilmiştir.

Tablo 3.1 Ağsız yöntemlerin tarihsel gelişimi (Liu G.R., 2002)

Yöntem	Referans	Kullanılan Denklem Formu	Kullanılacak Fonksiyon
Difüze eleman yöntemi	Nayroles vd., 1992	Zayıf form	Heky ve Galerkin yöntemi
Eleman bağımsız Galerkin yöntemi	Belytschko vd., 1994	Zayıf form	Heky ve Galerkin yöntemi
Ağsız yerel Petrov Galerkin yöntemi	Atluri ve Zhu, 1998	Yerel zayıf form	Heky ve Petrov Galerkin yöntemi
Sonlu nokta yöntemi	Onate vd., 1996, Lisza ve Orkizs, 1980; Jersen,1980	Güçlü form	Sonlu türev açılımı (Taylor serisi), HEKY,
Düzgün parçacık hidrodinamiği	Lucy, 1977; Gingold ve Monaghan, 1977	Güçlü form	İntegral açılımı
Yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemi	Liu W.K vd., 1993	Güçlü veya zayıf form	İntegral açılımı (YÜÇPY)
h-p bulutu	Oden ve Abani, 1994, Armando ve Oden, 1995	Zayıf form	Birimin parçalanması, HEKY
Birimin parçalanması yöntemi	Babuska ve Melenk, 1995	Zayıf form	Birimin parçalanması, HEKY
Nokta interpolasyon yöntemi	Liu G.R. ve Gu, 1999, 2000b, 2001a,b,c,d	Zayıf form ve yerel zayıf form	Nokta interpolasyon
Sınır düğüm yöntemleri	Mukherjee ve Mukherjee, 1977	Zayıf form ve yerel zayıf form	HEKY
Sınır düğüm interpolasyon yöntemleri	Liu, G.R.ve Gu, 2000d, Gu ve Liu, G.R., 2001a,e	Zayıf form ve yerel zayıf form	Nokta interpolasyon

3.3 Ağsız yöntemlerin kullanılmasının Nedenleri

Nümerik yöntemler alanında önemli gelişmeler 1950 yılından bu yana sonlu elemanlar ve diğer nümerik metodlar da olmuştur. Sonlu elemanlar yönteminde karmaşık şekle sahip yapılar elemanlara ayrılır. Ayrılan elemanlar birbirleriyle ağ adı verilen topolojik olarak birbirleriyle bağlanmışlardır. SEY’de karmaşık şekle sahip cisimler, lineer ve nonlinear problemlerin çözümünde hassas sonuçlar verdiği için uygulamalarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca fen ve mühendislik problemlerin çözümünde sonlu elemanlar yöntemi çözüm prosedürüne göre tasarlanan SEY paketleri de yaygındır. Lakin SEY, bazı problemlerin çözümünde yetersiz kalmaktadır. Aşağıda bu maddelerden bir kısmı sıralanmıştır.

a. Ağ Oluşturma Süresinin Uzun Olması

Problem, sonlu elemanlar yönteminde çözülürken zamanın çoğunluğu ağ oluşturma sürecinde harcanmaktadır. Bu sürenin kısaltılabilmesi için de bilgisayar hızının yüksek tutulması gerekir.

b. Analize Uyarlanmanın Zor Olması

Sonlu elemanlar yönteminde arzu edilen en önemli parametrelerden biriside de çözüm sonucunda elde edilen değerlerin doğruluk payının yüksek olmasıdır. Bunun da elde edilebilmesi için (adaptive analysis) uyarlanma analizi gerçekleştirilmesi gerekir. Sonlu elemanlar yönteminde uyarlanma analizi yapılabilmesi için (sonuçların daha iyi yakınsamasını sağlamak için) geometri tekrardan daha çok

elemana bölünmesi gerekir. Bu özellik hem süre hemde uyarlanma açısından negatif yönde etki etmektedir.

c. Sonlu Elemanlar Metodun Bazı Problemlerde Kısıtlılığı

- Yüksek deformasyon sonucu elemanların çarpılmasından dolayı elde edilen çözüm sonuçlarının arzu edilecek şekilde olmaması.
- Katılarda çatlak sümülasyonun zor olması.
- Yüksek yük altında malzeme kırılma sümülasyonun zor olması. Sonlu elemanlar yöntemi süreklilik mekaniğine göre temellendirilmiş olup elemanlar dağılmazlık prensibine dayanmaktadır. Elemanlar arasındaki bağların kopması ile olumsuzluklar ortaya çıkmaktadır.

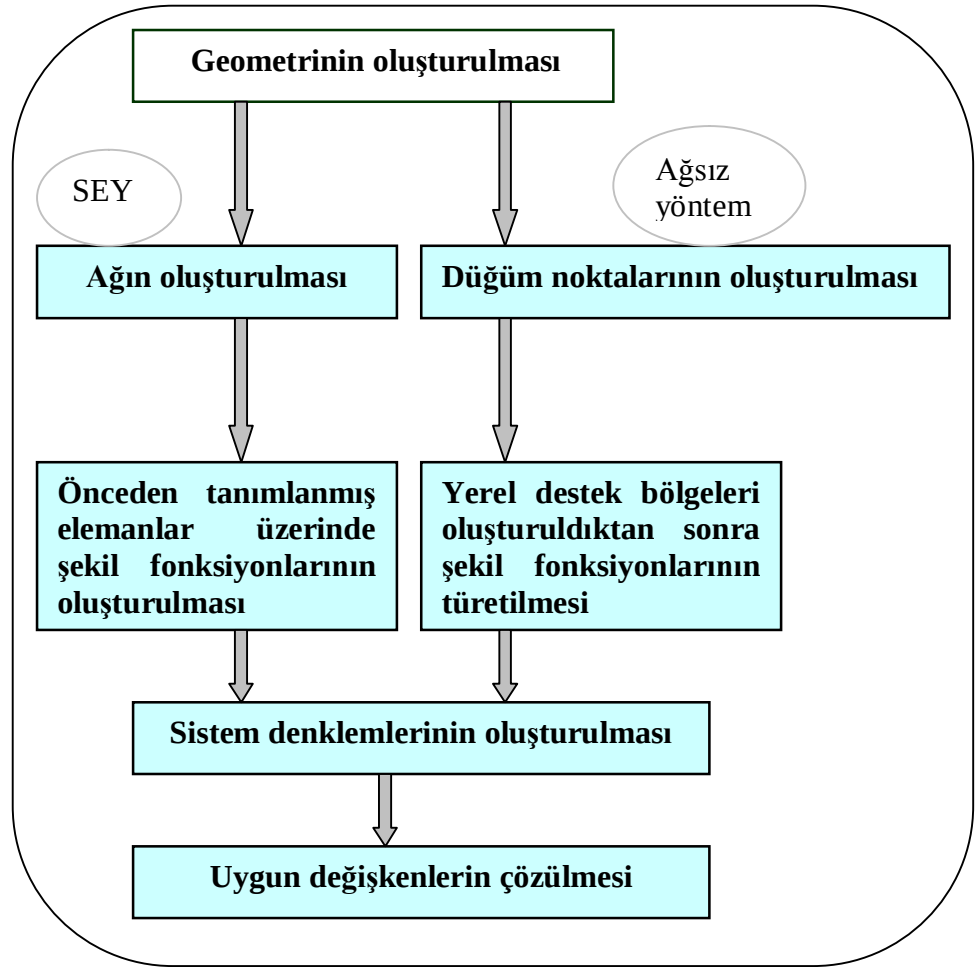
Günümüzde kullanılan ağsız yöntemlerle yukarıda incelenen maddelerin ihtiyaçları karşılanabilmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi ile ağsız yöntemler arasında temel farklılıklar Tablo 3.2’de verilmiştir.

Tablo 3.2 SEY ile ağsız yöntemler arasındaki farklılıklar (Liu G.R, Gu Y.T., 2005)

Özellik	SEY	Ağsız yöntem
Ağ	Evet	Hayır
Şekil fonksiyonu oluşturma	Önceden tanımlanmış elemanlar üzerinde tanımlı	Yerel destek bölgesi üzerinde tanımlı
Katılık matrisi	Birleşik, simetrik	Birleşik, kullanılan metoda bağlı olarak iyileştirmeler gerekir
Esas sınır koşulları uygunluğu	Basit ve standart	Kullanılan yöntemle göre iyileştirmeler gerekir
Hesaplama hızı	Hızlı	Kullanılan yöntemle göre SEY'den daha yavaştır
Doğruluğu	SFY'ye göre daha hızlı	SEY'e göre çözüm sonuçları daha iyi
Uyarlanmış analiz (3D)	3 boyutlu yapılar için uyarlanması zor	Daha kolay
Gelişim aşaması	İyi derecede geliştirilmiştir.	Az geliştirilmiştir.
Ticari yazılım paketleri	Çok	Nadir

3.4 Ağsız Yöntemlerin Çözüm Prosedürü

Bu kısımda temel olarak ağsız metodların çözüm aşamaları incelenecektir. ve yer yer sonlu elemanlar yöntemiyle karşılaştırılacaktır.



Şekil 3.1 SEY ve ağsız yöntemler için problem çözüm akış şeması

- Sonlu elemanlar yönteminde modelleme esnasında ağ kurulurken ağsız yöntemlerde düğümler kullanılmaktadır.
- Her iki metod ta şekil fonksiyonları türetme de değişkenlik gösterir. Sonlu elemanlar yönteminde şekil fonksiyonları önceden tanımlanmıştır. Bu fonksiyonlar aynı özelliği göstermektedir. Fakat ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonları seçilen yerel düğüm noktaları üzerinde genellikle sadece incelenen özel bir nokta için türetilir, ve incelenen nokta değiştikçe şekil fonksiyonları da değişir.

Sonlu elemanlar yöntemi ile ağsız yöntemlere ait problem çözüm akış şeması Şekil 3.1’de verilmiştir.

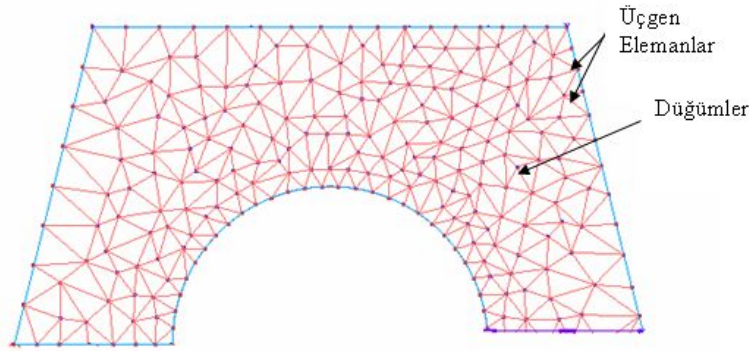
Ağsız yöntemler ile sonlu elemanlar yöntemi arasındaki temel farklılıklar dört basamağa göre sınıflandırılmıştır.

a) Bölge Gösterimi

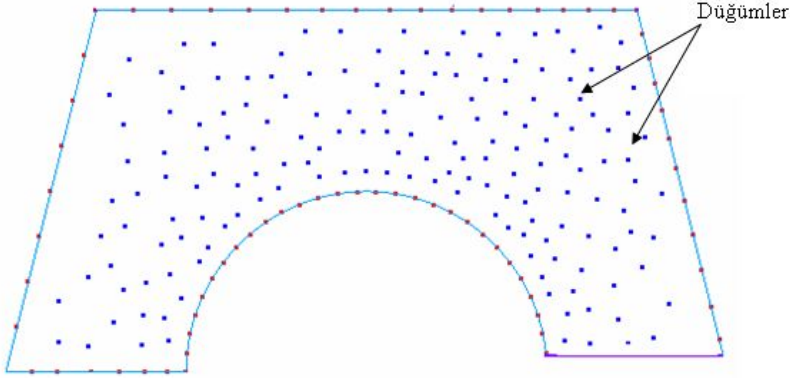
Yapılar, bileşenler veya bölgeler genellikle kompleks olup çeşitli yöntemlerle çözülebilmesi için uygun bir geometrik şekilde tanımlanması gerekir. Sonlu elemanlar yönteminde geometrik elemanın eğri yüzeyleri, eğri yüzeyli yüksek dereceli elemanlar kullanılarak modellenebilir. Bununla birlikte elemanlar sıralanarak geometri oluşturulmuş olur. Eğer lineer elemanlar kullanılırsa elemanların yüzeyleri düz çizgiler veya düz yüzeylerden oluşur. Şekil 3.2’de üçgensel elemanlar kullanılarak elemanlar üzerindeki düz çizgiler ve yüzeyler görülmektedir. Eğri yüzeylerinin gösterim doğruluğu elemanların sayısı ile kontrol edilmektedir. İyi yapılı elemanlar daha hassas sonuçlar vermektedir. Ayrıca çözüm sonucunun

doğruluk ve verimliliği kullanılan bilgisayar donanımı ve programına göre değişkenlik göstermektedir. Eleman sayısı ile çözüm süresi (CPU time) arasında doğru orantı ilişkisi bulunmaktadır. Bu durumda tüm geometri boyunca değilde sadece daha hassas sonuçlar elde edilmek istenilen bölgelerde ağ bölgesinin yani eleman sayısının artırılması gerekir. Ayrıca bölge, özel şekilli, üçgen veya dikdörtgen şekilli elemanlara düzgün olarak bölünmesi gerekir. Elemanlar arasında hiçbir boşluğun ve birbirleri üzerinde çakışmaması gerekir. Bunun yanında ağ türetme süresinde, elemanlar sahip oldukları süreklilikleri karuyabilmeleri gerekir. Sayılan koşulların yerine getirilebilmesi için otomatik ağ oluşturan paket programlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Lakin günümüzde tüm bu olumsuzlukları karşılayan hazır bir paket programı bulunmamaktadır. Bunun yanında sonlu elemanlar yönteminde aynı çözüm bölgesinde üçgensel elemanlarla modellenmiş olması ile dikdörtgen elemanlar ile modellenmiş olması durumunda çözüm sonuçları arasında değişkenlik görülebilmektedir. Hassas çözüm yapılmak istenen bölge daha çok elemana bölünmesi gerekir.

Ağız yöntemlerde bölge sınırları Şekil 3.3'te görüldüğü gibi düğümlerle gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Üçgen elemanlarla modellenmiş bir çözüm bölgesi



Şekil 3.3 Düğümler ile modellenmiş bir çözüm bölgesi

b) Fonksiyon İnterpolasyonun Oluşturulması

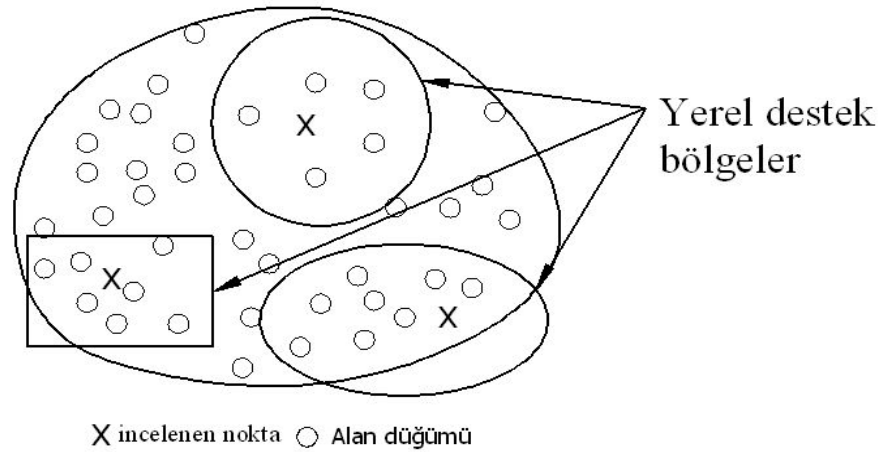
Ağsız yöntemlerde, ağ oluşturulmadığından dolayı alan değişkenleri, yer değiştirme elemanları $X = [x, y, z]$ problem geometrisinde yerel destek bölgesinin interpolasyon değerlerini kullanır.

$$u(x) = \Phi_i(x)u_i = \Phi^T(x)u_s \quad (3.1)$$

Denklem (3.1)'de n , yerel destek bölgesindeki düğüm sayısını, u_i , i .nci düğüm noktasındaki tanımlı nodal alan değişkeni, u_s , n düğümlerindeki tüm alan değişkenlerini toplayan vector, $\Phi_i(x)$, destek bölgesinde tanımlı düğüm noktalarını kullanarak i .nci düğüm noktasındaki şekil fonksiyonunu belirtir.

X noktasının yerel destek bölgesi, x noktasındaki yaklaşık fonksiyonu olarak destekleyecek düğüm noktalarını belirtir. Destek bölgesindeki her değişken x noktasında farklı boyut ve şekil özelliğine sahiptir. Yerel destek bölgeleri Şekil 3.4'te görüldüğü gibi genel olarak dairesel veya diktörtgen olarak seçilir.

Sonlu elemanlar yönteminde şekil fonksiyonları önceden tanımlanmış elemanlar üzerine inşa edilir. Eğer doğal koordinat sistemi kullanılırsa, şekil fonksiyonları bütün elemanlar için aynı özelliği teşkil etmektedir.



Şekil 3.4 Ağsız metodlarda şekil fonksiyonlarının türetilmesinde kullanılan yerel destek bölgeler

c) Sistem Denklemlerin Oluşturulması

Ağsız yöntemin şekil fonksiyonları zayıflatılmış veya güçlü formları kullanarak sistem denklemleri oluşturulur. Bu denklemler

öncelikle nodal matris formunda, sonradan da tüm problem geometrisi için global matris formatında yazılır. Lokal denklemler birleştirilerek tüm sistem için denklem takımının oluşturulması SEY'deki gibidir. Tek fark simetrik olma veya olmama durumu kullanılan yöntemle göre değişkenlik gösterir.

d) Global Ağsız Denklemlerin Çözülmesi

Bu aşama SEY ile aynı olup sadece çözüm için antisimetrik matrislere ihtiyaç duyulmaktadır.

4 AĞSIZ YÖNTEMLERİN ÇEŞİTLERİ

Ağsız yöntemlerin tarihsel gelişiminde 1977'e kadar izleri görülmektedir. Bu zaman da Lucy (1977), Gingold (1977), Monaghan (1977), yıldızların ve toz bulutların araştırılmasında, sınırları kullanmayarak astrofiziksel doğanın modellenmesinde, düzgün paçacık hidrodinamiğini (DPH) kullanmışlardır.

Ağsız yöntemlerle ilgili özellikle ağsız zayıf form metodları hakkında kayda değer gelişmeler 1990 yılından sonra görülmüştür. İlerleyen tarihlerde geniş araştırmalar yapılarak farklı metodlar geliştirilmiştir. GSFM (Liszka ve Orkizs, 1980), difüze eleman yöntemi (Nayroles vd.,1992), hücre metod partikülü (HMP) (Sulsky vd., 1992), yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemi (YÜÇPY) (Liu vd.,1995), eleman bağımsız Galerkin (EBG) (Belytschko vd., 1994), birimsel parçacık yöntemi (BPY) (Babuska ve Melenk., 1995,1996), h-p toz bulutu (Duarte ve Oden., 1995,1996), sonlu nokta metodu (SNM) (Onate vd., 1996), bağımsız ağ metodu (Yagawa ve Furukawa., 2000), ağsız yerel sınır integrasyon denklem metodu ve ağsız yerel Petrov Galerkin metodu (AYPG) (Atluri ve Zhu., 2000; Zhu.,2000) gibi ağsız metodlar geliştirilmiştir. Bu metodlar alan değişken interpolasyonları için ağa gereksinim duymazlar. Bir takım keyfi düğüm noktaları kullanılarak yaklaşık fonksiyonlar kurulur. Bu fonksiyonların kurulması için herhangi elemanın tanımlanmasına veya düğümler arasındaki bağlantıların olmasına gerek yoktur.

Ağsız yöntemlerin kullanılmasıyla, uyarlanma analizi ve simülasyon için daha etkili ve kolay olup geleneksel sonlu elemanlar çözüm yönteminde karşılaşılan olumsuzluklar minimize edilmesi amacıyla ağsız yöntemlerin gelişimi devam etmektedir.

Son yirmi yıldır birçok ağsız yöntem önerilmiş olup bu metodlarda zaman içerisinde kayda değer ilerlemeler görülmüştür.

Ağsız yöntemler değişik yol ve türlerine göre aşağıda üç temel gruba göre sınıflandırılmışlardır.

4.1 Formülasyon Prosedürüne Göre Sınıflandırma

Formülasyon prosedürüne göre ağsız yöntemler üç ana kategoriye ayrılır.

4.1.1 Zayıflatılmış Formlar Üzerine Temellendirilmiş Ağsız Yöntemler

Fiziksel problemi matematiksel olarak ifade eden diferansiyel denklemler, türevlendirilmiş sınır koşullarıyla farklı teknikler kullanılarak zayıflatılmış integral denklemlerine dönüştürülür. Zayıflatılmış formlar yardımıyla problem bölgesinde global veya yerel olarak oluşturulmuş arka plandaki hücreler kullanılarak nümerik integrasyon işlemleriyle birkaç cebirsel denklemlerle çözülür.

Zayıflatılmış formlar üzeri kurulu ağsız yöntemler 1990 yılları başlarında geliştirilmiş olup gelişimi halen devam etmektedir. Bu metodlar hakkında birçok önemli makale yayınlanmıştır. 1992 yılında Nayroles difüzyon elemanlar metodunu kullanarak Galerkin zayıflatılmış formunu oluşturmuştur. 1994 yılında Belytschko eleman bağımsız Galerkin yöntemi hakkında makale yayınlamıştır. Belytschko ve çalışma arkadaşları birçok mekanik problemlerin çözümünde EBG

metodunu kullanıp geliştirilmesine önemli katkılar sağlamışlardır. Zayıf form temelli ağsız yöntemler üzerinde 1994 yılından sonra hızlı bir şekilde incelemeler yapılmıştır, ve şu an birçok ağsız yöntem geliştirilmiştir. Temel olarak eleman bağımsız Galerkin (EBG) ve radyal nokta interpolasyon yöntemi (RNİM) bu gruba girmektedirler. Diğer önemli zayıflatılmış formlar üzerine kurulu ağsız yöntem, yeniden üretilen çekirdek parçacığı (YÜÇPY) yöntemidir. YÜÇPY 1995 yılında Liu ve arkadaşları tarafından önerilip nonlineer ve yüksek deformasyon problemlerinde kullanılmıştır. (Chen, 1996; Liu ve Jun., 1997), elastik olmayan yapılar (Chan.,1997), yapısal akustik (Uras., 1997), akışkanlar mekaniği (Liu,Jun.,1997)

Diğer zayıf form temelli ağsız yöntemler hp-bulutu (Armando ve Oden, 1997), birimsel parçacık sonlu elemanlar metodu (Melenk ve Babuska,1996), sonlu küresel metodu (De ve Bathe,2000), ağsız yöntem metodlarıdır (Yagawa ve Yamada, 1996).

4.1.1.1 Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi 1994 yılında Belytschko, Liu ve Gu tarafından önerilmiştir. Yöntem şekil fonksiyonları olarak hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları yaklaşımını kullanmaktadır. Temel olarak difuse eleman yöntemiyle aşağıda belirtilen üç fark dışında aynı yapıdadırlar.

- a. Bu metodta, Gauss kuadratik noktalarında sayısal integrasyon işlemi için hücre yapısı kullanılır. Belytschko 1994 yılında yaptığı incelemede bu metodun doğruluk ve verimliliği sonlu

elemanlarla karşılaştırıldığında daha hassas çözümler türettiğini öne sürmüştür. Fakat bu metod kuadratik noktalarda sayısal integrasyon işlemi için hücreler oluşturulması gerektiğinden gerçek ağırsız metod olarak kabul edilmemektedir. Ayrıca çözüm süresi diğer metodlara nazaran daha fazladır. Aynı düğüm sayısı kullanıldığında problem çözme süresi eleman bağımsız Galerkin yöntemi, sonlu elemanlara göre 4 ile 20 katı arasında değişiklik göstermektedir (Tablo 10.8)

- b. Bu metodta difüze eleman bağımsız Galerkin yönteminden farklı olarak sınır koşullarının uygulanması aşamasında Lagrange çarpanları kullanılmaktadır. (Bölüm 6.1.1)
- c. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları kullanıldığından şekil fonksiyonların türevleri tam olarak hesaplanmıştır. Bunun tersine difüze eleman Galerkin yönteminde şekil fonksiyonları olarak ağırlıklandırılmış hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları kullanıldığından şekil fonksiyonların türevleri tam olarak hesaplanmamıştır. Çünkü fonksiyonların türevleri alınırken bazı katsayılar ihmal edilmesi gerekmektedir (Belytschko., 1994).

4.1.1.2 Yeniden Üretilen Çekirdek Parçacığı Yöntemi

Düzgün parçacık hidrodinamiğinin gelişim aşamasında olduğu zamanda Liu ve çalışma arkadaşları bu metodu önermişlerdir. Yöntem temel olarak çekirdek fonksiyonu için düzenleyici bir çekirdeğin oluşturulmasıdır. Yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemi için $u(x)$ yaklaşık fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$u^h(x) = \int C(x, x-y) \Phi_\alpha(x-y) u(y) d\Omega y \quad (4.1)$$

Burada $C(x, x-y)$, sınır koşulları uygulanacak yöntem için düzeltme fonksiyonu, α ifadesi ise kernel fonksiyonu için genişletme parametresidir.

Yeniden üretilen denklem, lineer temel fonksiyonların polinomal değerleri ile ifade edilmesi gerekmektedir. Ayrıca bu metodta çözüm yapılabilmesi için çekirdek etrafındaki noktaların değerleri bilinmesi de gerekir. Formülasyon için nümerik integrasyon yöntemi uygulanırsa aşağıdaki bağıntı elde edilmiş olur.

$$u^h(x) = \sum_I \Phi_a(x, x - \bar{x}_I) u(x_I) \Delta V_I = \sum_I \Phi_I(x) u_I \quad (4.2)$$

Bu yaklaşımda sınır koşulları tam olarak uygulanamamaktadır. Bunun için bir takım dönüşümlerin yapılması gerekmektedir. Bu metod daha sonra frekans çözümü ve çift denge partikül metodu olarak ta genişletilmiştir (Liu vd., 1995, 1996, 1997).

4.1.2 Sıralama Teknikleri Üzerine Temelli Ağsız Yöntemler

Bu çeşit ağsız yöntemlere ağsız kolakasyon metodları veya ağsız güçlü formlar denilmektedir. Ağsız güçlü formlar uzun bir geçmişe sahiptirler. Sonlu farklar metodu (SFY) (Girault, 1974; Pavlin ve Perrone, 1975, Snell, 1981; Lizsa ve Orkizs, 1977, Krok ve Orkizs, 1989), ağsız kolakasyon metodları, (Kansa, 1980, Wu, 1992; Zhang ve

Krok, 2000; liu, 2002, 2003) ve sonlu nokta metodu (SNM) (Onate, 1996;1998;2001) tipik ağsız yöntemleri teşkil etmektedir.

4.1.3 Zayıf Form ve Kolakasyon Tekniklerin Bileşimi Üzerine Temelli, Ağsız Yöntemler

Bu çeşit metodlara ağsız zayıf-güçlü formlar da denilmektedir. (AZGF) metodu 2002 yılında liu G.R. ve Gu tarafından geliştirilmiştir. AZGF metodunun temeli, sistem denklemlerini oluştururken hem zayıf hem de yerel zayıf formlar aynı problem içinde kullanılır. Ama farklı düğüm noktalı gruplar için farklı denklemler ve sınır koşulları kullanılır. AZGF metodu integrasyon için en küçük hücreleri kullanır. Aynı zamanda kararlı ve mekanik denklemlerin çözümünde doğruluk payının yüksek olduğundan dolayı çözüm için ideal bir yöntemdir.

4.2 Yaklaşık Fonksiyon Uyumuna Göre Sınıflandırma

Keyfi düğüm noktaları üzerine temellendirilen interpolasyon yaklaşımli fonksiyon metodu, ağsız yöntemlerde en çok kullanılan sınıftır. Çünkü fonksiyon yaklaşık olarak tanımlanıp değerlere göre sonuçlar alır.

4.2.1 En Küçük Kareler Yaklaşımına Göre Temellendirilen Ağsız Yöntemler

En küçük kareler yaklaşımı 1981 yılında matematikçi Lancaster ve Salkausnas tarafından yüzey konstrüksiyon amacıyla kullanılıp

geliştirilmiştir (Lancaster ve Salkausnas, 1981). En küçük hareketli kareler metodunun geliştirilmesiyle birçok ağsız zayıf formların gelişmesine olanak sağlandı. Çünkü HEKY tüm problemin geometrisinde alan fonksiyonu için süreklilik yaklaşım tedarik edebilir. Günümüzde de ağsız şekil fonksiyonları türetilmesinde birçok ağsız metod ta yaygın kullanılmaktadır. Nayroles 1992 yılında, ilk olarak difüzyon elemanlar yönteminde HEKY şekil fonksiyonlarını kullanmıştır. Birçok metod ta, şekil fonksiyonların türetilmesinde bu yaklaşım kullanılmaktadır. Eleman bağımsız Galerkin (Belytschko, T., 1994) metodu ve ağsız yerel petrov Galerkin gibi.

4.2.1.1 Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi

1999 yılında Zhu, 2000 yılında Atluri ve Zhu iki çeşit ağsız yöntem önermişlerdir. Ağsız yerel sınır integral denklem (AYSİD) metodu ve ağsız radyal Petrov Galerkin (AYPG) metodudur. Her iki metodta da şekil fonksiyonlarının türetilmesinde hareketli en küçük kareler yaklaşımı kullanılır.

AYSİD metodu yerel sınırsal integral denklem formülasyonunu kullanırken AYPG metodu da yerel simetrik zayıf formu kullanır. Her iki metodta da integraller düzgün şekillendirilmiş bölgelerde ve sınırlarda hesaplanır. Çözüm için herhangi bir ağ veya arkaplan hücrelerinin tanımlanması gerekmemektedir. Bundan dolayı bu metod gerçek ağsız metod olarak isimlendirilir (Atluri ve Zhu., 1998a).

4.2.2 Yaklaşık Fonksiyon için İntegral Gösterimli Metodlara Temellendirilen Ağsız Yöntemler

Bu çeşit ağsız yöntemler, yaklaşık fonksiyonların integral formlarını kullanır. Yaygın olarak kullanılan düzgün parçacık hidrodinamiği (DPH) (Lucy, 1977; Gingold ve Monaghan, 1977; Gr Liu, 2003) ve YÜÇPY (Liu, 1995) olarak sıralanabilir.

DPH ilk olarak üç boyutlu açık uzayda özel astrofiziksel problemlerin çözümü için geliştirilmiştir. DPH yaklaşımı, problemin kısmi diferansiyel denklemini oluşturmak için güçlü formları kullanır. Son zamanlarda DPH metodu yüksek hızlı çarpışma problemlerin simülasyon edilmesi amacıyla uygulanmaktadır. G.r Liu ve çalışma arkadaşları patlama ve sızma uygulamaların simüle edilmesi amacıyla DPH metodunu kullanmışlardır. Bu metod ayrıca şok dalgaları uygulamalarında da kullanılmıştır (Lam vd., 2003).

4.2.2.1 Düzgün Parçacık Hidrodinamiği

Düzgün parçacık hidrodinamiği (DPH) en eski metod olup Gingold ve Monaghan tarafından 1977 yılında geliştirilmiştir. Ω problem bölgesinde $u(x)$ tek fonksiyonun türetilmesi çekirdek yaklaşımına dayanır. Bu yaklaşım aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$u^h(x) = \int w(x-y)u(y)d\Omega \quad (4.3)$$

Denklem (4.3)'te $u^h(x)$ ifadesi yaklaşık fonksiyonunu gösterirken, $w(x-y)$ ifadesi de bir çekirdek veya ağırlık fonksiyonunu belirtir. h parametresi de destek büyüklüğünü gösterir. Bu formülasyona nümerik kuadratik yöntem uygulanırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$u^h(x) = \sum_I w(x-x_I)U_I \Delta V_I = \sum_I \Phi_I(x)u_I \quad (4.4)$$

Denklem (4.3)'te ΔV_I , 3 boyutlu hacmi ifade eder. (I.ci düğüm noktası için), $\Phi_I(x) = w(x-x_I)\Delta V$, bağıntısı da yaklaşık fonksiyon için şekil fonksiyonunu göstermektedir (Chen, Y., Lee, J.D., Eskandirian, A., 2006).

Nümerik mekaniğin başlangıcı bu metoda dayanmaktadır. Aynı zamanda bu metod birçok uygulamalarda da kullanılmıştır. Galaksilerin dizilimi, oluşumu ve astrofizik uygulamaların modellenmesinde başarılı bir şekilde kullanılmıştır. Ayrıca bu metodla akışkan mekaniği problemlerinden galaksilerin dizilimi, nötron yıldızları, kara deliklerin birleşimi, süpernovaların modellenmesine kadar ve hatta evrenin modellenmesinde de bu metod kullanılmıştır (Gingold, R.A and Monaghan, J.J., 1977).

4.2.3 Nokta İnterpolasyon Metoduna Dayanan Ağsız Yöntemler

Nokta interpolasyon yöntemi (NİM), ağsız interpolasyon tekniği olup Gr Liu ve çalışma arkadaşları ağsız zayıf form metodlarında, yerel olarak dağılan düğüm noktalarını kullanarak çeşitli fonksiyonları türetmek için bu yöntemi kullanmışlardır. HEKY'den ayrılan farkı

Kronecker delta özelliği kullanılarak şekil fonksiyonları türetilmesidir.

4.2.4 Diğer Ağsız İnterpolasyon Metodlarına Dayanan Ağsız Yöntemler

Bu metodlar temel olarak h-p bulutu (Durarte ve Oden, 1995) ve birimin parçalanması yöntemi olarak (Melenk ve Babuska, 1997) gösterilebilir.

4.2.4.1 Birimin Parçalanması Yöntemi

1995 yılında Babuska ve Melenk, 1995 ve 1996 yıllarında Duarte ve Oden hareketli en küçük kareler yaklaşımının birimsel parçacık özelliklerini taşıdıklarını göstermişlerdir. Duarte ve Oden birimin parçalanması yöntemi ile yeni fonksiyonlar türetmeyi amaçlarken h-p bulutu adı verilen yeni bir ağsız metod elde etmişlerdir. Duarte ve Oden p dereceli polinomları kullanarak ağsız yöntemler interpolantlarını bulmuşlardır. Aynı şekilde Babuska ve Melenk, klasik sonlu elemanlar yönteminin çözüm prosedürünü, geliştirdikleri yönteme uygulayarak birimsel parçacık sonlu elemanlar yöntemini (BPSEY) elde etmişlerdir (Babuska ve Melenk., 1995, 1996), (Duarte ve Oden., 1995, 1996).

4.3 Bölge Gösterimine Göre Sınıflandırma

Sonlu elemanlar yönteminde ve sınır elemanlar yönteminde olduğu gibi ağsız yöntemler de bölge tanımına göre bölge tipi ve sınır tipi ağsız yöntemler olmak üzere ikiye ayrılırlar.

4.3.1 Bölge Tipi Ağsız Yöntemler

Bu yöntemlerde hem problem bölgesi hemde problemin sınırları, alan düğümleriyle gösterilir. Sistemin denklemleri tüm geometri için zayıf veya güçlü formlar kullanılarak bulunur.

4.3.2 Sınır Tipi Ağsız Yöntemler

Sınır tipi ağsız metodları formüle etmek için sınırsal integral denklemleri kullanılır. Bu çeşit ağsız metodlarda, geometrinin sınırlarında düğüm noktaları kurulmasıyla problem çözülür. Sınır integral denklemi (SİD), başlangıçta fonksiyonlar kurulmasıyla oluşturulur. Sistem denklemleri de ağsız şekil fonksiyonlarından yararlanılarak sınır düğüm noktalarından bulunur.

Mukherjee ve çalışma arkadaşları sınır düğüm metodunu önermişlerdir. (Mukherjee, 1997; Kothnur, 1999). Sınırsal ağsız yöntemde, saçılan düğümlere bağlı kalarak problem bölgesi gösterilir. Sınır düğüm metodu üç boyutlu potansiyel teori ve elasto statik problemlerinde kullanılmıştır. HEKY şekil fonksiyonlarında delta fonksiyon özelliği olmadığından dolayı SEY metodunda sınır koşul doğruluğu tam olarak elde edilemez.

Diğer sınır tipi ağsız yöntem yerel integral sınır (YİSM) (Zhu 1989; Sladek, 2002) metodudur. YİSM metodunda problem bölgesinin sınırı, dağıtılmış düğümler tarafından gösterilir. Herbir alan düğümü için sınırsal integral denklemlerini oluşturmak için düzenli yerel bölgeler kullanılır. YİSM lineer ve nonlinear sınır tipi değer

problemlerin çözülmesinde başarılı bir şekilde kullanılmıştır.(Zhu, 1998, 1999)

Son yıllarda genelleştirilmiş varyasyonel problemlere dayanan alternatif sınır eleman fonksiyonları geliştirilmiştir. 1991 yılında DiFigueiredo hibrit sınır integral denklemlerini önermiştir. Hibrit nokta interpolasyon metodu ve hibrit sınır radyal nokta interpolasyon metodu sınır problemlerini çözmek için formüle edilmiştir. HNİM ve HSRİM, HSİM içinde NİM ve RNİM şekil fonksiyonları kullanılarak formüle edilir. HSNİM ve HSRNİM’ de bulunan katılık matrisleri simetridir. Bu simetriklik özelliği HSNİM ve HSRNİM’in diğer ağsız metodlarda, simetrik sistem matrislerinin türetilmesinde avantaj sağlar.

Tablo 4.1 Ağsız metodların sınıflandırılması (Liu G.R., Gu Y.T., 2005)

<i>Sınıflandırma</i>	<i>Kategoriler</i>	<i>Ağsız yöntem örneği</i>
Formülasyon prosüdürüne göre	Güçlü form türetilmesine göre ağsız yöntemler	Ağsız sıralama metodu, NİM
	Zayıf form türetilmesine göre ağsız yöntemler	EBG, RNİM, AYPG, LRNİM
	Hem zayıf form hemde güçlü formların türetilmesine göre ağsız yöntemler	Ağsız zayıf güçlü form metodları
İnterpolasyon/ yaklaşık metoda göre	HEKY’ni kullanan ağsız yöntemler	EBG, AYPG
	Yaklaşık fonksiyon için integral açılımına kullanan ağsız yöntemler	DPH
	NİM’i kullanan ağsız yöntemler	RNİM, LRNİM
	Diğer interpolasyon gösterimini kullanan ağsız yöntemler	BPSEY, h-p bulutu
Bölge gösterimine göre	Bölge tipi ağsız yöntemler	DPH, EBG, RNİM, AYPG, LRNİM
	Sınır tipi ağsız yöntemler	YİSM, SRNİM, HSRNİM

Tablo 4.2 Ağsız yöntemlerin fonksiyon ve interpolasyonunda yöntemler (Liu G.R., Gu Y.T., 2005)

<i>Formülasyon gösterimi</i> <i>İnterpolasyon yaklaşımı</i>	<i>Güçlü form</i>	<i>Galerkin Zayıf formu</i>	<i>Petrov-Galerkin zayıf formu</i>	<i>Güçlü-zayıf form</i>	<i>En küçük kareler</i>	<i>Sınır integral denklemi</i>
HEKY	SNM	EBG	AYPG	AZGF	?	SNM
AZG	Sıralama, GSFY	?	?	?	?	?
RTF	Sıralama	Galerkin metodu	?	?	?	?
NİM	RNSM	NİM	YNİM	?	?	SNİM
RNİM	RNSM	RNİM	YRNİM	AZGF-RNİM	?	SRNİM
Hermite tipi interpolasyon yaklaşımı	RNSM	?	?	?	?	?
DPH(YÜÇPY)	DPH-YÜÇPY	YÜÇPY	?	?	?	?
BPY	h-p butu	BPSEY, h-p bulutu	?	?		

4.4 Gelecekteki Gelişmeler

Tablo 4.2’de ağsız yöntemlerin formülize ve interpolasyonunda kullanılan farklı yollar listelenmiştir. Tablodan açıkça anlaşılabileceği gibi ağsız yöntemler, farklı interpolasyon ve formülasyon prosüdürlerini kullanmaktadır. Tabloda boş olan yerler açıkça görülmektedir. Boş alanların doldurulmamasının nedeni bu yöntemle henüz çalışılmadığının veya problemler için kullanılan metodun uygun olmadığını ifade etmektedir.

Aşağıda dört alan ağsız yöntemleri geliştirmek için uygun olabilir.

- Ağsız yaklaşık fonksiyon için yeni metod geliştirilmesi.
- Yeni formülasyon prosüdürünün geliştirilmesi.
- Farklı yaklaşık fonksiyon ve formülasyon prosüdürlerine dayanan ağsız metodların geliştirilmesi.
- Fonksiyon yaklaşımları veya problem geometrisinin farklı bölümleri için formülasyon prosüdürlerine dayanan ağsız metodların geliştirilmesi.

5 AĞSIZ ŞEKİL FONKSİYONLARIN TÜRETİLMESİ

5.1 Giriş

Bu kısımda ağsız yöntemlerde kullanılan RNİM ve HEK şekil fonksiyonları hakkında bilgi verilecektir. Bu şekil fonksiyonları yerel olarak desteklenirler. Çünkü yerel bölgede tanımlı sadece birkaç alan düğümü şekil fonksiyonlarını türetmek için kullanılır. Ayrıca yerel bölgenin dışında ki şekil fonksiyonları sıfır değerinde değillerdir.

Sonlu elemanlar yönteminde sabit düğüm noktalarının belirlenmesi ve bu düğüm noktaları üzerinde elemanlar oluşturularak interpolasyon teknikleri kullanılıp şekil fonksiyonları türetilir. Bu çeşit interpolasyonlar hareketsiz elemanlar (stationary elements) interpolasyonu olarak adlandırılır. Ağsız yöntemlerde ise genellikle keyfi olarak dağılmış yerel destek bölgesi içinde alan düğümleri kullanılarak şekil fonksiyonları türetilir.

5.1.1 Ağsız İnterpolasyon/Yaklaşık Teknikler

Ağsız fonksiyonu türetmek için kullanılan metodun sahip olması gerekenler şunlardır.

1. Keyfi olarak seçilen alan düğümleri bölgeyi iyi bir şekilde kapsamalıdır.
2. Nümerik olarak kararlı olmalı.
3. Etkileşimli olarak desteklenebilmeleri gerekir.
4. Global zayıf formlar kullanıldığında problem geometrisi boyunca şekil fonksiyonlarını kullanan yöntemler elverişli

olması gerekir. Zayıf formlar kullanıldığında yerel kuadratik bölgesi boyunca uygun olması gerekir.

5. Eğer şekil fonksiyonları Kronecker delta özelliği taşıyorsa ideal şekil fonksiyon özelliğine sahiptir.
6. Fonksiyon hesaplanabilir özelliğe sahip olması gerekir.

Sistem denklemlerin oluşturulmasında kararlılık çözümü ve formulasyon prosedürü çok önemli rol oynamaktadır. Bu da ancak formulasyonu tam etkileyen baskın terimler özelliğine sahip problem temelli formulasyon prosedürünün tasarlanmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Diğer çözüm kararsızlığı yaygın olarak karşılaşılan DPH yaklaşık metodunun güçlü malzemeli hidrodinamiklere uygulanmasıyla oluşan gerilim kararsızlıklarıdır (Swegle, 1995; Baslara, 1995; Dyka ve İngeli, 1995; Morris, 1996; Dyka, 1997; Monaghan, 2000).

Problemde global zayıf formları kullanıldığında şekil fonksiyonlarının uygunluğu problem bölgesi boyunca uygun olması gerekmektedir. Yerel ağırlıklı artık kolakasyon yöntemi kullanıldığında sistem denklemlerini üretmek için sadece yerel ağırlık bölgesi içinde yerel uygunluğa gereksinim duyulmaktadır.

G.R Liu (2002), integral gösterimli, seri, diferansiyel ve integral açılımı olmak üzere ağırsız şekil fonksiyonlarını üç ana kategoriye ayırmıştır.

Tablo 5.1 Ağsız interpolasyon tekniklerin kategorileri (Liu G.R., Gu Y.T., 2005)

Kategoriler	Ağsız Yaklaşık Teknikler
İntegral Açılımı	Düz Partikül Hidrodinamiği (DPH)
	Yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemi (YÜÇPY)
Seri Açılımı	Hareketli en küçük kareler yöntemi (HEKY)
	Nokta interpolasyon metodları (RİM, RNİM)
	Birimsel parçacık metodu (BPM)
Diferansiyel açılımı	Genel sonlu farklar metodu

İntegral açılımlı metodta, ağırlıklı integral operasyonu yardımıyla lokal yerleşimli bölge içindeki veriler kullanılıp fonksiyon türetilir. Uygun ağırlık fonksiyonun seçilmesiyle şekil fonksiyonları oluşturulur. Bu genellikle DPH metodunda kullanılır.

Seri açılımlı metodlar, eskiden beri en çok kullanılan yöntemlerdir. Bu metod sonlu elemanlar yönteminde de yaygın olarak kullanılır. Keyfi dağıtılmış düğüm noktaları sayesinde ağsız metodlarda da kullanılmaktadır. Temel fonksiyonların kurulmasıyla uygunluğu sağlanır. En küçük kareler yöntemi yaygın olarak en çok kullanılan ağsız şekil metodudur. Nokta interpolasyon ağsız şekil yöntemi nadir olarak ta kullanılan metoddur.

Diferansiyel gösterimli metodlar, uzun zamandan beri sonlu farklar yönteminde kullanılıp geliştirilmiştir. Sonlu farklar yöntemi global sınır problemlerinde oldukça elverişli bir yöntem değildir. (Zienkiewicz ve Taylor, 2000). Diferansiyel gösterimli metodlar güçlü form fonksiyonlara dayanan sistem denklemlerinin oluşturulmasında kullanılır. Sonlu farklar metodu (SFM) ve genel sonlu farklar metodu gibi (GSFM).

5.1.2 Destek Bölgesi

İncelenecek noktanın interpolasyon doğruluğu Şekil 5.1’de görüldüğü gibi destek bölgesi içindeki düğümlere bağlıdır. Bundan dolayı uygun bir destek bölgesinin verimli ve doğru yaklaşımla seçilmesi gerekir.

x_q noktasında ki destek bölgesi için;

$$d_s = \alpha_s d_c \quad (5.1)$$

denklemini kullanılır. Burada α_s , destek bölge için boyutsuz parametre d_c , x_q noktasındaki nodal aralıktır.

(5.1) denklemdaki d_c , düzgün bir şekilde dağılmış iki komşu düğüm noktası arasındaki uzaklığı ifade etmektedir. Eğer düğüm noktaları üniform olmayacak şekilde dağılmışsa d_c, x_q ’nin destek bölgesindeki ortalama aralığı ifade etmektedir (Liu G.R., Gu Y.T., 2005)

Boyutsuz destek bölge parametresi olan α_s , destek bölgesinin gerçek boyutunu göstermektedir. Örneğin $\alpha_s = 2.1$ ifadesi, ortalama olarak destek bölgesinin yarıçapını ifade etmektedir.

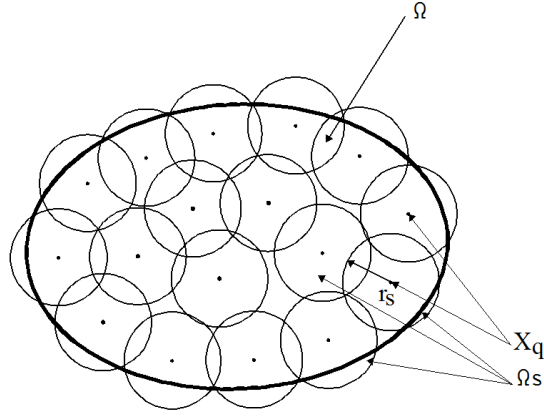
Gerçek düğüm noktası sayısı olan n , destek bölgesindeki tüm düğüm noktalarının miktarınca belirlenebilir. Öyle ki α_s parametresi analizden önce analist tarafından belirlenmesi gerekir. Bu da genellikle kompleks problemler için deneylerle bulunabilir. Genellikle α_s , 2 ile 3 değeri arasında çoğu problemler için verimli sonuçlar vermektedir (Liu, G.R. ve Gu, L.T., 2005)

5.1.3 Ortalama Nodal Aralığının Belirlenmesi

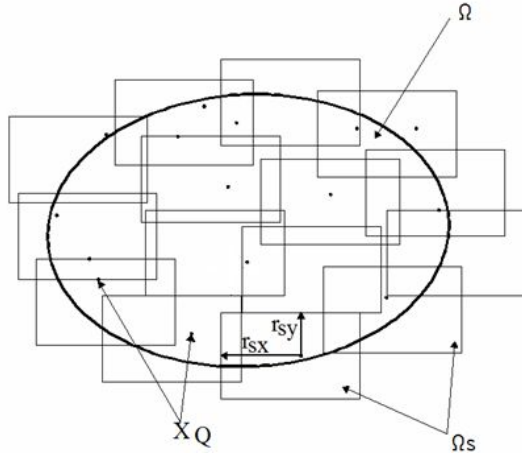
Bir boyutlu problemlerde ortalama nodal aralığının en basit ifadesi olarak;

$$d_v = \frac{d_s}{(n_{DS} - 1)} \quad (5.2)$$

gibi tanımlanır. Burada d_s , yaklaşık olarak (5.1) denklemindeki değer gibi kabul edilebilir. n_{DS} , toplam düğüm sayısıdır. Ağsız yöntemlerde X_q noktası için destek bölgeler Şekil 5.1 ve 5.2’de gösterilmiştir.



Şekil 5.1 Dairesel destek bölgeler (rs:Destek bölge boyutu)



Şekil 5.2 Dikdörtgen destek bölgeler (rsx, rsy: destek bölgesinin x ve y yönlerindeki boyutları)

iki boyutlu durumlar için ortalama nodal aralığı;

$$d_c = \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{n_{AS} - 1}} \quad (5.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada A_s , tahmin edilen destek bölgesinin alanı, n_{AS} , A_s alanında tanımlanan düğüm sayısıdır

3 boyutlu durumda nodal aralık;

$$d_c = \frac{\sqrt[3]{V_s}}{\sqrt[3]{n_{VS} - 1}} \quad (5.4)$$

şeklinde gösterilir. Denklemden V_s , destek bölgesinin hacmi, n_{VS} , V_s hacminde tanımlanan düğüm sayısıdır.

d_c parametresi belirlendikten sonra (5.1) denklemi kullanılarak üniform olmayacak şekilde dağılan düğümler içinde herhangi bir X_q noktasının destek bölgesinin boyutu olan d_s parametresi rahatlıkla bulunabilir.

d_s hesaplanma işlemi basamakları aşağıda verilmiştir.

1. d_c veya A_s verilerek X_q noktasında d_s tahmin edilir.
2. n_{DS} , A_s veya V_s bölgeleri içindeki düğüm sayısı bulunur.
3. Probleminin boyutuna göre d_c değerini hesaplanması için denklem (5.2), (5.3) veya (5.4) kullanılır.
4. Boyutsuz olarak verilen destek bölgesi içinde denklem (5.1) kullanılarak d_s değeri hesaplanır.

5.2 Radyal Nokta İnterpolasyon Şekil Fonksiyonları

5.2.1 Konvansiyonel RNİM

Genellikle RNİM şekil fonksiyonları ağırsız zayıf veya güçlü formlarla birlikte kullanılır. RNİM şekil fonsiyonları interpolasyon polinomları artırılıp aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x)a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x)b_j = R^T(x)a + P^T(x)b \quad (5.5)$$

Burada $R_i(x)$, radyal temel fonksiyonu, $p_j(x)$, $x^T = [x, y]$ uzay sistemindeki değerler, m , polinomal temel fonksiyon sayısı n , radyal temel fonksiyon sayısıdır.

α_i ve b_j katsayıları sabit olup belirlenecek değerlerdir.

Radyal temel fonksiyonunda $r(x)$ değişkeni ilgilenilen noktadaki x düğüm noktası ile x_i düğüm noktası arasındaki mesafedir. Örneğin iki boyutlu problemler için $r(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (5.6)$$

Çok çeşitli radyal temel fonksiyonları vardır. Ayrıca radyal temel fonksiyon özellikleri geniş bir şekilde araştırılmıştır. (Kansa, 1990; Sharan, 1997; Franke ve Schaback, 1997).

Tablo (5.2)'de multi quadric (MQ), Gaussuan (EXP), ince tabaka spline (thin plate spline) (TPS) ve logaritmik fonksiyonlar verilmiştir. Verimli bir sonuç için bazı şekil parametrelerinin belirlenmesi gerekir. Genellikle bu parametreler (α_c, q, η) verilen problem tipine göre nümerik olarak belirlenebilir.

Örneğin MQ-RBF'de şekil parametresi iki adettir. Bu parametreler $(\alpha_c$ ve $q)$ analist tarafından belirlenecektir. $q = 0.5$ değerinde en iyi çözüme yakınsadığı görülmüştür. Aynı zamanda akışkanlar mekaniği problemlerinde $q = 0.5$ ile 0.98 değerleri arasında iyi sonuçlar verdiği görülmüştür (Wang J.G, Liu G.R., 2001a, 2002c).

Tablo 5.2 Tipik temel radyal fonksiyonlar ve şekil parametreleri (Liu G.R., Gu Y.T., 2005)

İsim	Denklemleri	Şekil Parametreleri
Multi kuadratik	$R_i(x, y) = [r_i^2 + (\alpha_c d_c)]^2$	$\alpha_c \geq 0, q$
Gauss	$R_i(x, y) = \exp\left[-\alpha_c \left(\frac{r_i}{d_c}\right)^2\right]$	α_c
İnce tabaka spline (thin plate spline)	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	η
Logaritmik	$R_i(x, y) = r_i^\eta \log r_i$	η

Tablo 5.3 Yoğun olarak desteklenmiş radyal temel fonksiyonlar

SDRTF	Denklemleri	Referans
Wu-C2	$R(x, y) = \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)^5 \left(8 + 40 \frac{r}{\delta}\right) +$ $48 \frac{r^2}{\delta^2} + 25 \frac{r^3}{\delta^3} + 5 \frac{r^4}{\delta^4}$	Wu 1995
Wu-C4	$R(x, y) = \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)^6 \times$ $\left(6 + 36 \frac{r}{\delta} + 82 \frac{r^2}{\delta^2} + 72 \frac{r^3}{\delta^3} + 30 \frac{r^4}{\delta^4} + 5 \frac{r^5}{\delta^5}\right)$	Wu 1995
Wendland-C2	$R(x, y) = \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)^4 \left(1 + 4 \frac{r}{\delta}\right)$	Wendland 1995
Wendland-C4	$R(x, y) = \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)^6 + \left(3 + 18 \frac{r}{\delta} + 35 \frac{r^2}{\delta^2}\right)$	Wendland 1995
Wendland-C6	$R(x, y) = \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)^8 + \left(1 + 8 \frac{r}{\delta} + 25 \frac{r^2}{\delta^2} + 32 \frac{r^3}{\delta^3}\right)$	Wendland 1995

SDRTF: Sımsıkı desteklenmiş radyal temel fonksiyonları, δ : Yerel destek boyutu,

Buna ek olarak sımsıkı desteklenmiş radyal temel fonksiyonlar için de bazı formülasyonlar geliştirilmiştir (Wu,1995; Wendland, 1995). Bunlar Tablo 5.3’de verilmiştir. STRTF’deki şekil parametresi olan δ , yerel destek boyutunu gösterir. $r \geq \delta$ olduğunda değerler o kabul edilir (Liu, G.R vd., Gu, Y.T., 2004)

Denklem (5.5)’in α_i ve b_j belirlenebilmesi için, x noktasında destek bölgesi oluşturulur. n adet düğümlere değerler konularak α_i ve

b_j bulunur. Her düğüm noktası için n adet denklemin oluşması sağlanır.

Bu denklemler matris formatında aşağıdaki gibi yazılırsa;

$$U_s = R_o a + P_m b \quad (5.7)$$

denklemleri elde edilir.

Fonksiyon vektör değeri de,

$$U_s = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}^T \quad (5.8)$$

gibi olur.

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (5.9)$$

Polinom moment matrisi aşağıdaki gibi olur

$$P_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_m(x_1) & P_m(x_2) & \dots & P_m(x_n) \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (5.10)$$

Radyal temel fonksiyon için katsayılar;

$$a^T = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n\} \quad (5.11)$$

olur.

Polinom değerleri için vektör katsayıları

$$b^T = \{b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n\} \quad (5.12)$$

olur.

Denklem (5.9)'daki r_k

$$r_k = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} \quad (5.13)$$

olarak hesaplanır.

m adedinde sınır koşulları uygulanarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i) a_i = P_m^T a = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \quad (5.14)$$

Denklem (5.7) ve (5.14) kullanılarak aşağıdaki sıralı denklemler bulunur.

$$U_s = \begin{bmatrix} u_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_o & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

$$a_o^T = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n\} \quad (5.16)$$

$$u_s = \{u_1 \ u_2 \ u_n \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\} \quad (5.17)$$

R_o matrisi simetrik olduğundan G matrisi 0 değerine eşit olacaktır.

$$a_0 = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = G^{-1}U_s \quad (5.18)$$

Denklem (5.5) tekrar yazılırsa;

$$u(x) = R^T(x)a + P^T(x)b = \{R^T(x) \ P^T(x)\} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Şeklinde yazılabilir.

Denklem (5.18)'ün kullanılmasıyla

$$u(x) = \{R^T(x) \ P^T(x)\}G^{-1}U_s = \Phi^T(x)u_s \quad (5.20)$$

eşitliği elde edilir.

5.20 denkleminden RNİM şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Phi^T(x) &= \{R^T(x) \ P^T(x)\}G^{-1} \\ &= \{\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \dots \ \phi_n(x) \ \phi_{n+1}(x) \ \dots \ \phi_{m+n}(x)\} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Son olarak şekil fonksiyonları nodal yer değiştirme vektörünün bulunmasıyla (5.22) denklemi elde edilir.

$$\Phi^T = \{\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \dots \quad \phi_n(x)\} \quad (5.22)$$

Denklem (5.20) tekrar yazılırsa,

$$u(x) = \phi^T(x) u_s = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i \quad (5.23)$$

elde edilir.

$u(x)$ 'in türevi aşağıdaki gibi rahatlıkla bulunabilir.

$$u_{,i}(x) = \phi_{,i}^T U_s \quad (5.24)$$

Burada, l ifadesi x veya y koordinatlarını gösterir. R_o^{-1} terimi genellikle keyfi olarak dağıtılmış düğümlerde mevcuttur (Powel, 1992; Schaback,1994; Wendland, 1998).

Düğüm sayıları arttığında R_o 'nın değeri iyi bir şekilde sonuç vermez. Bu sonuç formülasyonda, düğümlerin hepsinin bölge boyunca konulmasıyla ağırsız kolakasyon yönteminden bulunmuştur. Global kolakasyon metodunun en önemli özelliklerden birisi simetrik formülasyon prosüdününün uygulanabilirliğidir.

Radyal temel fonksiyonları, nokta interpolasyon şekil fonksiyonlarını oluşturmadaki katkıları aşağıda sıralanmıştır.

- RTF'nin uygulanması polinomun tekillik problemini çözmede etkili rol oynar.
- RNİM şekil fonksiyonları stabil özelliğe sahiptir. Dolayısıyla keyfi ve düzensiz nodal dağılımlar için uygundur.

- RNİM şekil fonksiyonlarının uygulanması, üç boyutlu geometriler için kolaylıkla yapılabilir. Üç boyutlu interpolasyon için uzaklık aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (5.25)$$

- Akışkanlar mekaniği için RNİM şekil fonksiyonları, diğer şekil fonksiyonlarından daha uygundur (Liu, G.R. and Gu, Y.T., 2005)

RNİM şekil fonksiyonların dezavantajları aşağıda sıralanmıştır.

- RNİM şekil fonksiyonları HEKY ve NİM şekil fonksiyonlarıyla karşılaştırıldığında RNİM'in tam çözüme yakınsaması daha düşüktür.
- Bazı parametreler ağırsız metodta kullanılan RNİM şekil fonksiyonların önemli şekilde perfonmasını ve doğruluğunu etkilediğinden bu parametreler dikkatlice seçilmelidir.
- RNİM'de yerel destek geometrisinde daha fazla düğüm sayısı bulunması gerektiğinden dolayı hesaplanan denklem sayısı NİMe göre daha fazladır (Liu G.r, Y.T., Gu, 2005).

RNİM şekil fonksiyonlarının temel olan birkaç özelliği aşağıda sıralanmıştır.

1.Delta Fonksiyon Özelliği: RNİM şekil fonksiyonları kronecker delta özelliğini taşımaktadırlar.

2.Birimsel Bölünmeler: RNİM şekil fonksiyonları birimsel bölünme özelliğine sahiptirler.

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = 1 \quad (5.26)$$

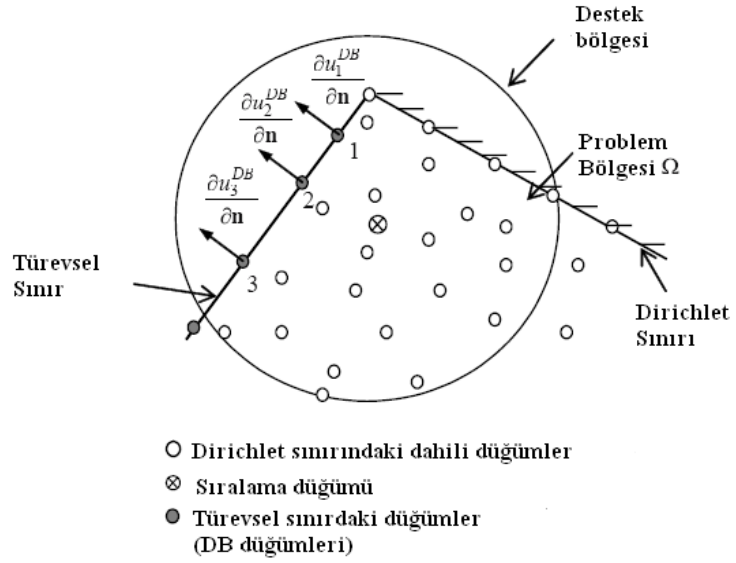
3. Destek Bölgesindeki Düğümlerin Yoğunluğu: RNİM şekil fonksiyonları destek bölgesinde oluşturulan düğümleri kullandığında, fonksiyon temel olarak sınıksız bir şekilde desteklenir. ve destek geometri haricindeki fonksiyonlar da 0 olarak kabul edilmektedir.

4. Süreklilik: RNİM şekil fonksiyonları genellikle radyal temel fonksiyonlarını kullanır. ve radyal temel fonksiyonlarının sürekliliği iyi olduğundan, RNİM şekil fonksiyonları da iyi dereceye sahip olurlar.

5. Çoğaltılabilirlik: En düşük terimli polinom ile RNİM şekil fonksiyonu lineer polinomun çoğaltılabilirliğini isbat etmektedir.

5.2.2 Hermite Tipi RNİM

Şekil (5.3)'te görüldüğü gibi incelenmek istenen noktadaki destek bölgesi ile DB (Dirichlet boundary) düğümlerinin türevleri bilinmeyen değerlerdir. Bu da DB düğüm noktalarının sadece fonksiyon değerine sahip olduğunu göstermeyip aynı zamanda değişkenler gibi normal türevlere de sahip olduğunu göstermektedir. Radyal temel fonksiyonlar kullanılarak Hermite tipi interpolasyonun uygulanmasıyla bulunmaktadır.



Şekil 5.3 Serbestlik dereceli ve normal türevi alınmış hermite tipli interpolasyon

Yaklaşık alan fonksiyonu $u(x)$, DB düğümlerinde yerel destek bölgesi ile normal türevler tüm düğüm noktalarında RTF'in lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x) \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_{DB}} \frac{\partial R_j}{\partial n} b_j + \sum_{k=1}^m p_k(x) c_k \quad (5.27)$$

Burada, α_i, b_j, c_k belirlenecek katsayılar, n , yerel destek bölgedeki düğüm sayısı, n_{DB} , yerel destek bölgedeki DB düğümlerinin sayısı, m , artırabilirlik için polinom değerlerinin sayısı, p_k , tek terimli, n , DB düğümündeki sınırda dışa dönük normal birim vektördür.

$$\begin{aligned}
R_i(x) &= R(\|x - x_i\|) \\
R_j^{DB}(x) &= R(\|x - x_j^{DB}\|) \\
\frac{\partial R_j^{DB}(x)}{\partial n} &= l_{xj} \frac{\partial R_j(x)}{\partial x} + l_{yj} \frac{\partial R_j(x)}{\partial y}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Burada x_i , yerel destek bölgede $i.nci$ düğüm sayısı için koordinat değeri, x_j^{DB} , $j.nci$ düğüm için koordinat değeridir.

$$l_{xj} = \cos(n, x_j), \quad l_{yj} = \cos(n, y_j) \tag{5.29}$$

DB düğümlerinde alan fonksiyon türevleri bilinmediğinden dolayı denklem (5.27)'deki gibi DB düğümleri için radyal temel fonksiyonlarının türevleri kullanılır.

Denklem (5.27) tekrar aşağıdaki gibi yazılırsa;

$$u^h(x) = B^T a_0 \tag{5.30}$$

gibi olur

Denklem (5.27)'da B temel fonksiyon vektörü aşağıdaki bağıntıda tanımlanmıştır.

$$B^T = \begin{bmatrix} R_1 & \dots & R_n & \frac{\partial R_1^{DB}}{\partial n} & \dots & \frac{\partial R_{n_{DB}}^{DB}}{\partial n} & 1 & x & y & \dots & p_m(x) \end{bmatrix}$$

a_0 katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$a_o^T = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ \dots \ b_{n_{DB}} \ c_1 \ \dots \ c_m\} \quad (5.31)$$

Denklem (5.27)'deki a_i, b_j, c_k katsayıları, destek bölgesi ile DB düğümlerinde fonksiyon türevlerinin değerleri ile destek bölgesinin tüm n nodal fonksiyon değerleri boyunca interpolasyon uygulanarak bulunur.

Yerel destek geometrisinde tüm n düğümleri için

$$u_l = u^h(x_l) = \sum_{i=1}^n R_i(x_l) \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_{DB}} \frac{\partial R_j^{DB}(x_l)}{\partial n} b_j + \sum_{k=1}^m p_k(x_l) c_k \quad (5.32)$$

olarak ifade edilir. Burada $l = 1, 2, 3, \dots, n$ 'e kadar gider.

Tüm DB düğümleri için

$$\frac{\partial u_l^{DB}}{\partial n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i(x_l^{DB})}{\partial n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_{DB}} \frac{\partial^2 R_j(x_l^{DB})}{\partial n^2} b_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial p_k(x_l^{DB})}{\partial n} c_k \quad (5.33)$$

gibi olur. Burada $l = 1, 2, 3, \dots, n_{DB}$ 'ye kadar gider.

Tam sınır için aşağıdaki sınırlar uygulanır.

$$\sum_{i=1}^n p_k(x_i) \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_{DB}} p_k(x_j) b_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (5.34)$$

(5.32) ve (5.34)'deki denklemler birlikte düzenlendiğinde;

$$u_s = \begin{Bmatrix} U_s \\ \frac{\partial U_{Db}}{\partial n} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & R_{DB} & P_m \\ P_{DB}^T & R_c & P_{DB} \\ P_m^T & P_{DB}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = G a_0 \quad (5.35)$$

bağıntısı elde edilir. Burada G , genelleştirilmiş moment matrisidir.

Düğümlerdeki polinomal moment matrisi;

$$P_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (5.36)$$

gibi olur

Polinom değerlerin 1. türevleri, n_{DB} DB düğümlerine dönüştürülür.

$$P_{DB} = \begin{bmatrix} 0 & l_{DBx1} & l_{DBy1} & \vdots & \partial p_m(x_1^{DB}) / \partial n \\ 0 & l_{DBx2} & l_{DBy2} & \vdots & \partial p_m(x_2^{DB}) / \partial n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & l_{DBxn} & l_{DByn} & \dots & \partial p_m(x_{n_{DB}}^{DB}) / \partial n \end{bmatrix}_{(n_{DB} \times n_l)} \quad (5.37)$$

Radyal temel fonksiyonların düğümlerdeki moment matrisi;

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_1(x_1) & R_2(x_1) & \dots & R_n(x_1) \\ R_1(x_2) & R_2(x_2) & \dots & R_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1(x_n) & R_2(x_n) & \dots & R_n(x_n) \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (5.38)$$

olur.

Radyal temel fonksiyonlarının DB düğümlerindeki 1.normal türevlerinin moment matrisi aşağıdaki gibi olur

$$R_{DB}^T = \begin{bmatrix} \partial R_1(x_1^{DB})/\partial n & \partial R_2(x_1^{DB})/\partial n & \dots & \partial R_n(x_1^{DB})/\partial n \\ \partial R_1(x_2^{DB})/\partial n & \partial R_2(x_1^{DB})/\partial n & \dots & \partial R_n(x_1^{DB})/\partial n \\ \dots & \dots & \dots & \partial R_n(x_1^{DB})/\partial n \\ \partial R_1(x_{n_{DB}}^{DB})/\partial n & \partial R_2(x_{n_{DB}}^{DB})/\partial n & \dots & \partial R_n(x_{n_{DB}}^{DB})/\partial n \end{bmatrix}_{(n_{DB} \times n)} \quad (5.39)$$

Radyal temel fonksiyonlarının DB düğümlerindeki 2.normal türevlerinin moment matrisi de aşağıdaki gibi olur.

$$R_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial R_1(x_1^{DB})}{\partial n} \right) & \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial R_2(x_1^{DB})}{\partial n} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial R_n(x_1^{DB})}{\partial n} \right) \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial R_1(x_2^{DB})}{\partial n} \right) & \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial R_2(x_2^{DB})}{\partial n} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial R_n(x_2^{DB})}{\partial n} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial R_1(x_{n_{DB}}^{DB})}{\partial n} \right) & \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial R_2(x_{n_{DB}}^{DB})}{\partial n} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial R_n(x_{n_{DB}}^{DB})}{\partial n} \right) \end{bmatrix}_{(n_{DB} \times n_{DB})} \quad (5.40)$$

Denklem (5.35)'de nodal değişkenlerin açılım vektörü,

$$U = [u(x_1) \quad \dots \quad u(x_n) \quad \frac{\partial u(x_1^{DB})}{\partial n} \quad \dots \quad \frac{\partial u(x_n^{DB})}{\partial n} \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (5.41)$$

olur.

Nodal fonksiyon değerlerinin vektöründe aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$U_s = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_n\} \quad (5.42)$$

Nodal normal değişkenlerin türevleri aşağıdaki denklemde belirtilmiştir.

$$\frac{\partial u_{DB}}{\partial n} = \left\{ \frac{\partial u_1^{DB}}{\partial n} \quad \frac{\partial u_2^{DB}}{\partial n} \quad \dots \quad \frac{\partial u_n^{DB}}{\partial n} \right\}^T \quad (5.43)$$

G dönüştürebilir özelliğe sahiptir. a_0 değerini bulmak için denklem (5.35) çözülürse;

$$a_0 = G^{-1}U_s \quad (5.44)$$

denklemini elde edilir.

(5.44) denklemini (5.27) denklemine konulursa;

$$u^h(x) = B^T a_0 = B^T G^{-1}U_s = \phi^T U_s \quad (5.45)$$

bağıntısı elde edilir. Burada ϕ , şekil fonksiyon vektörüdür.

$$\phi^T = B^T G^{-1} = [\phi_1 \cdots \phi_i \cdots \phi_n \phi_1^H \cdots \phi_{n_{DB}}^H \phi_1^P \cdots \phi_m^P]_{(n+n_{DB}+m) \times 1} \quad (5.46)$$

Son olarak yaklaşık fonksiyon ve türevleri (5.45)'deki denklem çözülmesiyle bulunur.

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \sum_{i=1}^n \phi_i u_i + \sum_{j=1}^{n_{DB}} \phi_j^H \frac{\partial u_j^{DB}}{\partial n} \\ \frac{\partial u^h(x)}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} u_i + \sum_{j=1}^{n_{DB}} \frac{\partial \phi_j^H}{\partial x} \frac{\partial u_j^{DB}}{\partial n} \\ \frac{\partial u^h(x)}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial y} u_i + \sum_{j=1}^{n_{DB}} \frac{\partial \phi_j^H}{\partial y} \frac{\partial u_j^{DB}}{\partial n} \end{aligned} \quad (5.47)$$

5.2.3 RNİM Şekil Fonksiyonlarının Çözüm Algoritması

Bu aşamada iki boyutlu problemler için çözüm basamakları incelenecektir.

5.2.3.1 Destek Bölgesinin Belirlenmesi

İki boyutlu geometride Ω , incelenen noktada değişik hallerde olabilir. Çembersel destek bölgeleri nadiren kullanılır. Çembersel veya diktörtgensel destek bölgeleri Şekil 5.1 ve 5.2' de belirtilmiştir.

Diktörtgensel destek bölgesi hem tertip etme hemde uygulama açısından daha kolay olduğundan örnekte diktörtgensel bölge kullanılacaktır.

Diktörtgensel destek bölgeleri kullanıldığında, destek bölge boyutları x ve y yönlerinde d_{sx} ve d_{sy} olarak adlandırılacaktır.

$$\begin{aligned} d_{sx} &= a_{sx} d_{cx} \\ d_{sy} &= a_{sy} d_{cy} \end{aligned} \quad (5.48)$$

a_{sx} ve a_{sy} , x yönlerindeki boyutsuz destek büyüklükleridir. Nadiren de olsa $a_{sx} = a_{sy}$, $d_{cx} = d_{cy}$, x_Q incelenen noktada x ve y yönlerinde nodal aralıklar olarak kullanılır. Eğer düğüm noktaları üniform olarak dağılmışlarsa d_{cx} , basit olarak x koordinatındaki iki düğüm noktası arasındaki mesafeyi belirtir. Hakeza d_{cy} 'de y koordinatındaki iki düğüm noktası arasındaki mesafeyi belirtmektedir. Düğüm noktaları üniform olmayacak şekilde dağıtılmışsa d_{cx} ve d_{cy} , X_q incelenen noktadaki destek bölgede ortalama nodal aralık olarak kabul edilir.

5.2.3.2 Radyal Temel Fonksiyonlarının Şekil Parametreleri

Örneğin analiz edilecek MQ-RBF için iki şekil parametresi mevcuttur. a_c ve q . Standart RBF'de, $q = \pm 0.5$ olarak alınabilir. Wang Gr. Liu (2001a, 2002c) akışkanlar mekaniği ve katı mekaniği için $q = 0.98$ ile 1.03 değerleri arasında verimli sonuçlar vereceğini belirlemişlerdir. Hem q , hem de a_c boyutsuz sabitlerdir.

Nodal aralık olan d_c ,

$$d_c = \sqrt{d_{cx}^2 + d_{cy}^2} \quad (5.49)$$

denklemleriyle bulunur. Burada d_{cx} ve d_{cy} , denklem (3.114)'te belirtilmiştir.

- EXP-RBF için tek şekil parametresi α_c 'dir. Bu değer 1'den küçük pozitif değer alır.
- TPS-RBF için tek şekil parametresi η 'dir

Şekil parametreleri radyal temel fonksiyonlarının performansı önemli ölçüde etkilemektedir. Teorik olarak tam değerleri bilinmemektedir. Ancak nümerik araştırmalar geliştirildikçe bunların değerleride bulunacaktır.

5.2.3.3 RNİM Şekil Fonksiyonlarının Hesaplanması

Denklem (5.21), RNİM şekil fonksiyonlarının hesabında kullanılmaktadır. Bu denklemin her iki tarafı G ile çarpılırsa;

$$\phi^T(x)G = \{R^T(x), p^T(x)\}G^{-1}G = \{R^T(x), p^T(x)\} \quad (5.50)$$

bağıntısı elde edilir.

Her iki tarafın transpozesi alınır;

$$(\phi^T(x)G)^{-1} = \{R^T(x), p^T(x)\}^T \quad (5.51)$$

gibi olur.

veya

$$G^T \phi(x) = \begin{Bmatrix} R(x) \\ p(x) \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

şeklinde de gösterilebilir

Standart denklem çözücüsü kullanılarak denklem (5.52) çözülrse G^{-1} hesaplanmadan direk olarak RNİM şekil fonksiyonları bulunabilir.

Denklem (5.52) kullanılarak RNİM şekil fonksiyonlarının türevleri bulunur.

$$\frac{\partial}{\partial x}(G^T \phi(x)) = \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} R(x) \\ p(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial R(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial p(x)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

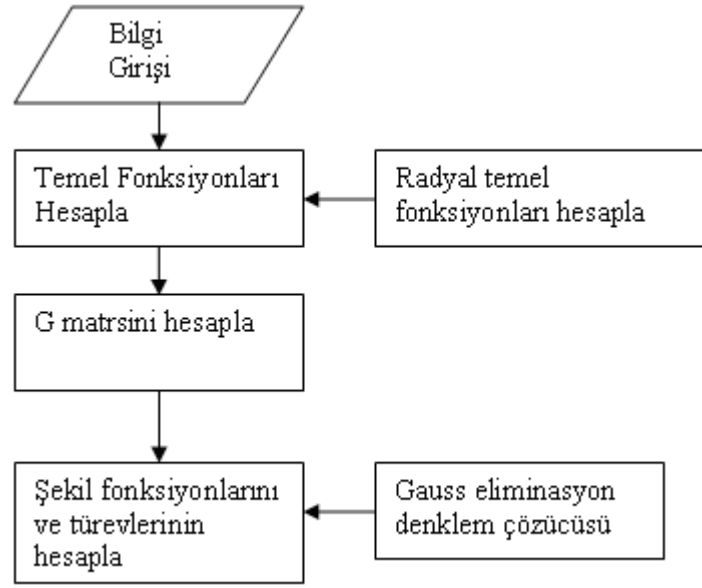
veya

$$G^T \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial R(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial p(x)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5.54)$$

İkinci türevleri de (5.55) denkleminde verilmiştir.

$$G^T \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial^2 x} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} \end{Bmatrix} \quad (5.55)$$

5.2.3.4 RNİM Şekil Fonksiyonlarının Türetilmesinin Akış Şeması



Şekil 5.4 RNİM şekil fonksiyonlarının akış şeması

5.3 RNİM Şekil Fonksiyonları için Örnek Problem

Bu örnek konvensiyonel RNİM'in şekil fonksiyonlarını ve türevlerini, destek bölgede 25 düğüm noktası kullanılarak bulunmuştur. 25 (5x5) düğüm noktası Şekil 5.5'de verilmiştir. $x_i \in [-1,1]$ ve $y_i \in [-1,1]$ koordinatları arasında hesap edilmiştir. Bu düğüm

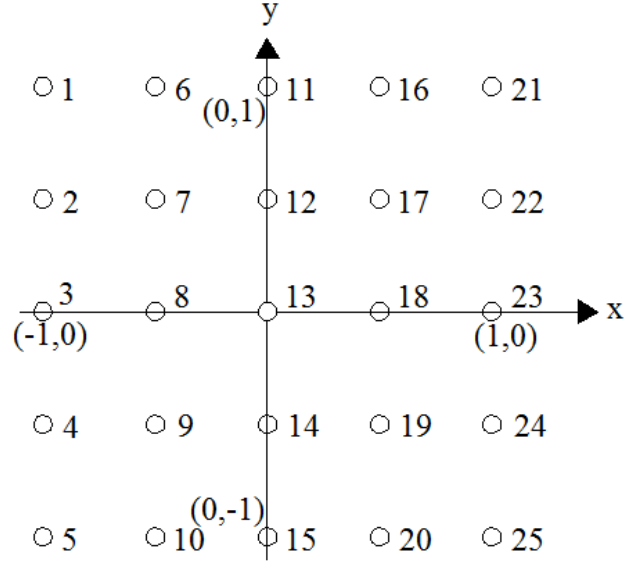
noktalarının koordinat değerleri Tablo 5.4 'te verilmiştir. Şekil fonksiyonları, bölgede herhangi bir nokta için bulunabilir.

5.3.1 RNİM Şekil Fonksiyonları ve Türevleri

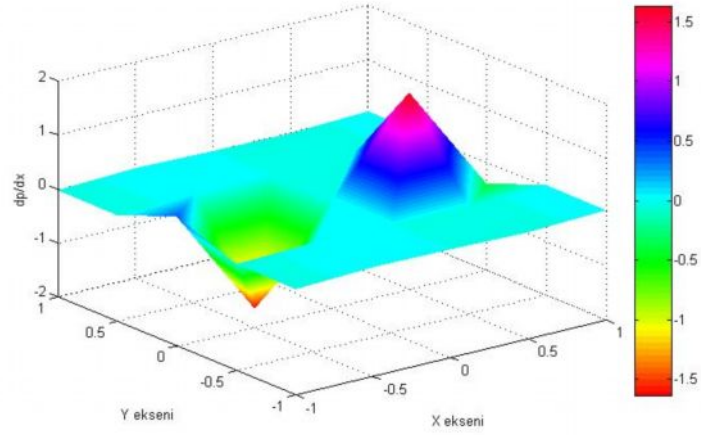
MQ radyal temel fonksiyonları kullanılacaktır. Şekil 5.6 ve 5.7 RNİM-MQ şekil fonksiyonlarını ve türevlerini göstermektedir. Şekil parametreleri $\alpha_c = 2$, $d_c = 0.5$, $q = 0.5$, $mbasis = 0$ alınmıştır.

Tablo 5.4 Şekil 5.5'te gösterilen 25 düğüm noktasının koordinat değerleri

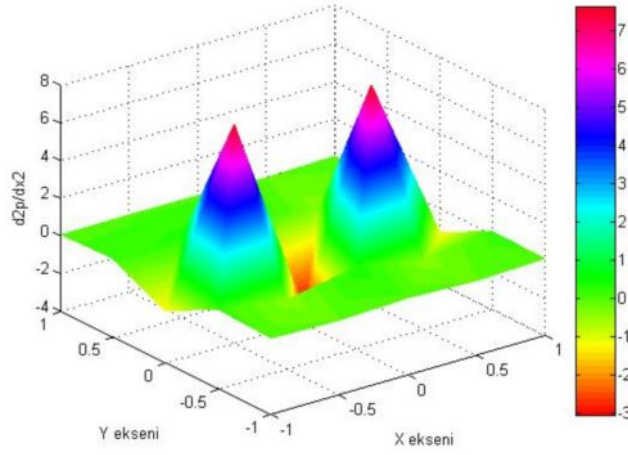
Düğüm	x	y	Düğüm	x	y
1	-1	1	14	0	-0,5
2	-1	0,5	15	0	-1
3	-1	0	16	0,5	1
4	-1	-0,5	17	0,5	0,5
5	-1	-1	18	0,5	0
6	-0,5	1	19	0,5	-0,5
7	-0,5	0,5	20	0,5	-1
8	-0,5	0	21	1	1
9	-0,5	-0,5	22	1	0,5
10	-0,5	-1	23	1	0
11	0	1	24	1	-0,5
12	0	0,5	25	1	-1
13	0	0			



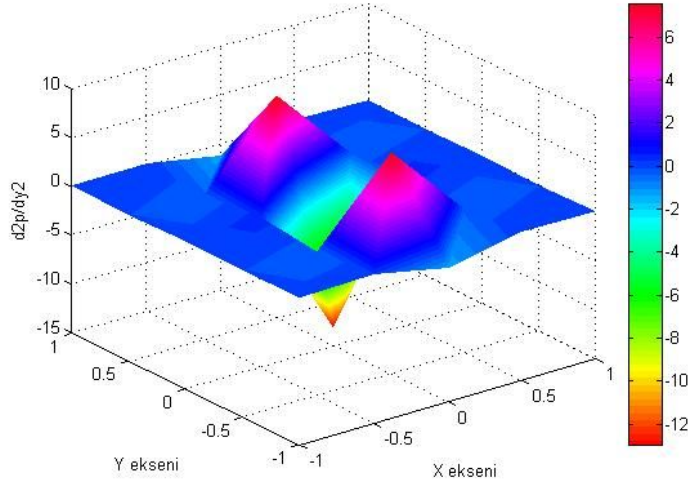
Şekil 5.5 Toplam 25 düzgün olarak dağılmış düğüm noktası kullanılarak ağırsız şekil fonksiyonlarının bulunması



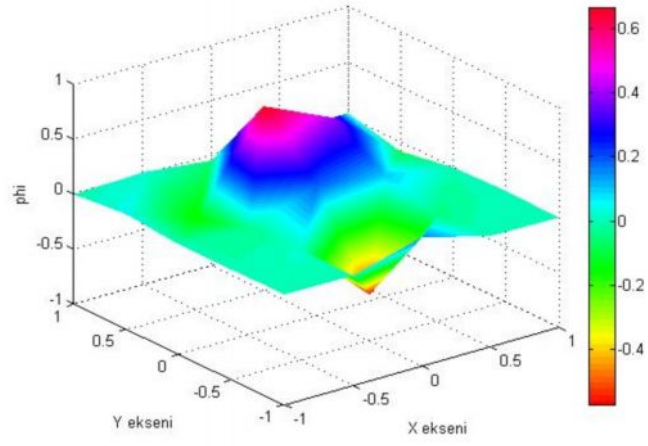
Şekil 5.6 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0,0]$ noktasında x 'göre türev alınarak türetilen RNİM şekil fonksiyonu



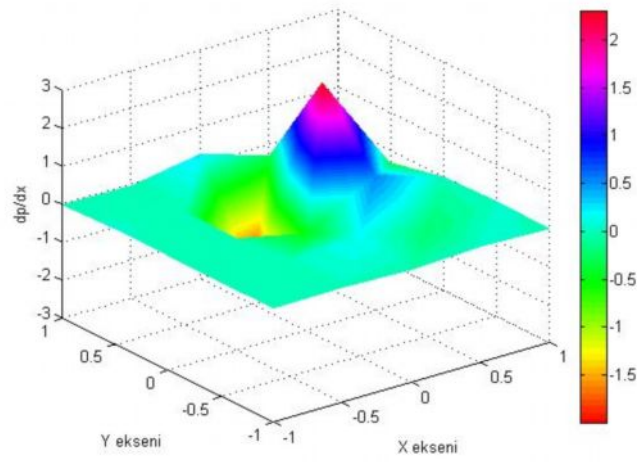
Şekil 5.7 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0,0]$ noktasında x 'e göre iki kere türev alınan şekil fonksiyonlarının elde edilen değerleri



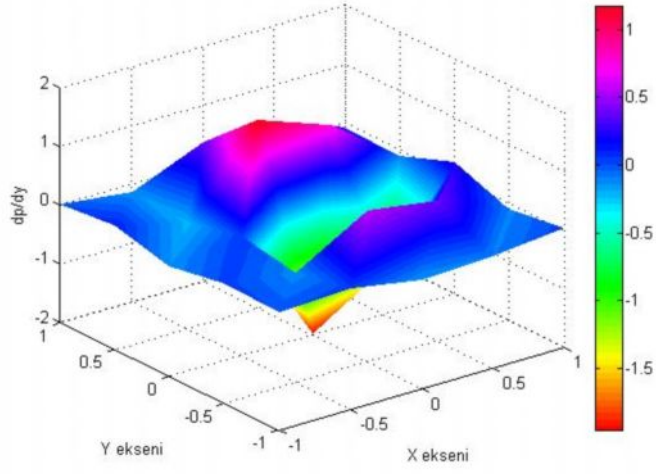
Şekil 5.8 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0,0]$ noktasında y 'e göre iki kere türev alınan şekil fonksiyonlarının elde edilen değerleri



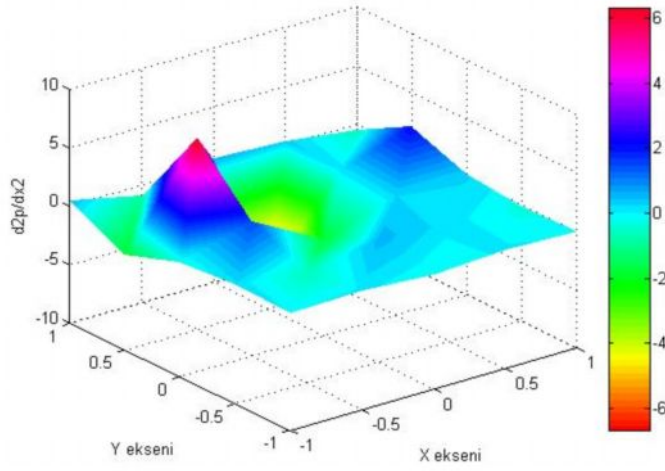
Şekil 5.9 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0.2, 0.4]$ noktasındaki RNİM şekil fonksiyonu



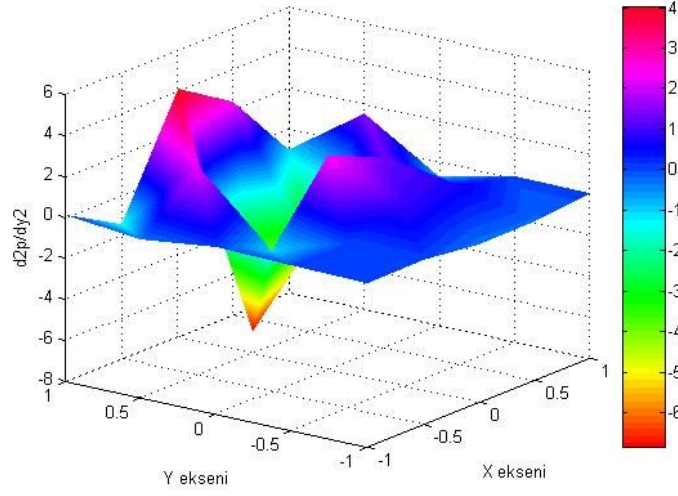
Şekil 5.10 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0.2, 0.4]$ noktasında x 'e göre türev alınarak türetilen RNİM şekil fonksiyonu



Şekil 5.11 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0.2, 0.4]$ noktasında y 'e göre türev alınarak türetilen RNİM şekil fonksiyonu



Şekil 5.12 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0.2, 0.4]$ noktasında x 'e göre iki kere türev alınan şekil fonksiyonlarının elde edilen değerleri



Şekil 5.13 13 nolu düğüm noktası için $x^T = [0.2, 0.4]$ noktasında y 'e göre iki kere türev alınan şekil fonksiyonlarının elde edilen değerleri

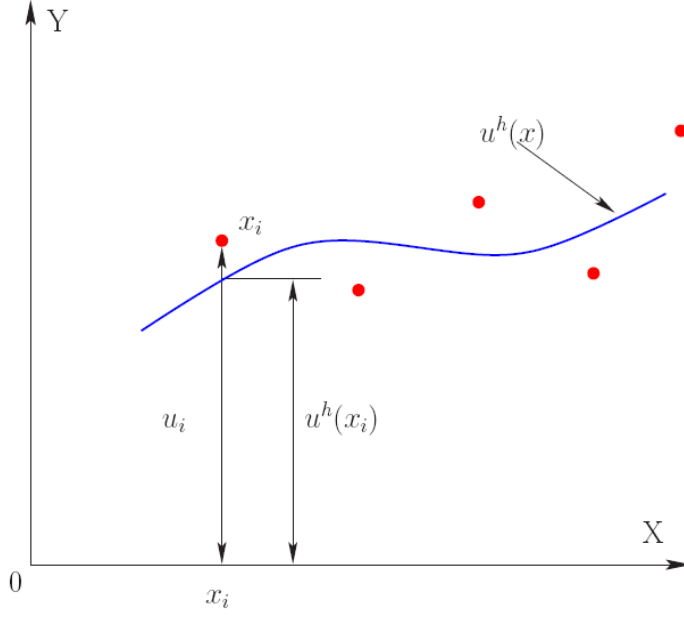
5.4 Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi

Basitçe en başta bir boyutlu problemler için örnekler incelenecektir. Daha sonra iki boyutlu problemler için incelenecektir. Örneğin $u^h(x)$ fonksiyonunda, (x_i, u_i) noktalarındaki fonksiyon değeri $u_i = u(x_i)$ ifadesine eşit olacaktır. $u^h(x)$ yaklaşık fonksiyonu için;

$$u^h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (5.56)$$

$$u^h(x) = p^T(x)a \quad (5.57)$$

gibi denklemlerle tanımlanır.



Şekil 5.14 En küçük kareler yönteminde veri eşitlemesi

a değerini bulabilmesi için u_i ile $u^h(x_i)$ değerleri için farkın karesi alınıp toplandığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$J = \sum_{i=1}^n [u^h(x_i) - u_i]^2 = \sum_{i=1}^n [p^T(x_i)a - u_i]^2 \quad (5.58)$$

a 'ya göre türev alınıp 0'a eşitlenirse

$$\sum_{i=1}^n p(x_i)p^T(x_i)a = \sum_{i=1}^n p(x_i)u_i \quad (5.59)$$

eşitliği elde edilir. Denklem (5.60), bilinmeyen a ve $u^h(x)$ değerlerinin bulunmasını sağlar.

Aşağıda belirtilen noktalarda yaklaşım fonksiyonu yazılsın.

x_i	1	2	3
u_i	1	1.5	4

$$p^T(x) = [1 \ x] \quad a^T = [a_0 \ a_2] \quad (5.60)$$

Değişkenler denklem (5.60)'a konulursa

$$\sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ x_i & x_i^2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \end{bmatrix} u_i \quad (5.61)$$

gibi olur, ve aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 16 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$a_0 = -\frac{5}{6}, \quad a_1 = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Elde edilen değerler interpolasyon fonksiyonuna konulursa;

$$u^h(x) = -\frac{5}{6} + \frac{3}{2}x \quad (5.63)$$

formülü elde edilir.

Hareketli en küçük kareler metodu, 1960 yılında Shepard tarafından özel noktalar arasında interpolasyonları türetmek için geliştirmiştir. Bu metod prosüdür olarak ağırlıklı en küçük kareler veri eşitlemesiyle aynı özelliği taşıyor. Tek farkı bu metodun her noktaya ayrı ayrı uygulanabilirliğidir.

HEK yaklaşımları; her düğüm etrafında bir mesnet oluşturan bir ağırlık fonksiyonu, bir polinom olan taban ve düğümün konumuna bağlı olan katsayılardan ibarettir. Her bir düğüm için, ağırlık fonksiyonu sadece düğüm etrafındaki mesnet denilen küçük bir bölgede (etki bölgesi) sıfırdan farklıdır. Bu etki bölgelerinin kesişimi düğümler arasındaki bağlantıyı sağlar. HEK yaklaşımlarının önemli bir özelliği sürekliliklerinin ağırlık fonksiyonun sürekliliğine bağlı olmasıdır. (Dolbow ve Belytschko., 1999). HEK fonksiyonları genellikle verilerin tam üzerinden geçmediğinden, bunlar yaklaşımlar olarak tanımlanırlar. $u(x)$ fonksiyonunun yaklaşımı olan $u^h(x)$ sabit katsayılı olmayan m . dereceden bir polinom kullanılarak oluşturulmuştur. Polinomun derecesi taban fonksiyonunun derecesine eşittir. 1 boyut için denklemler aşağıda verilmiştir.

Yaklaşık fonksiyon olan $u^h(x)$, m dereceli polinomal değere sahiptir. Sabit katsayı içermez.

x noktası civarındaki yerel yaklaşık fonksiyon

$$u_L^h(x, \bar{x}) = p^T(x) a(x) \quad (5.64)$$

şeklinde ifade edilir.

$$p^T(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^m] \quad (5.65)$$

$a(x)$ katsayıları,

$$a^T(x) = [a_0(x) \quad a_1(x) \quad a_2(x), \quad \dots \quad a_m(x)] \quad (5.66)$$

dır. Bilinmeyen noktadaki parametreler olan $a_j(x)$ değerleri bu noktada, yerel yaklaşım ve nodal parametreler arasında minimize edilmesiyle bulunur.

$$\begin{aligned} J &= \sum_{I=1}^n w(x - x_I) [u_L^h(x_I, x) - u_I]^2 \\ &= \sum_{I=1}^n w(x - x_I) [p^T(x_I) a(x) - u_I]^2 \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$w(x - x_I) \neq 0 \quad (5.68)$$

Minumun J değeri (5.67) denkleminin $a(x)$ 'e göre türev alınıp 0'a eşitlenmesiyle bulunur.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{I=1}^n w(x - x_I) 2 p_1(x_I) [p^T(x_I) a(x) - u_I] &= 0 \\ \sum_{I=1}^n w(x - x_I) 2 p_2(x_I) [p^T(x_I) a(x) - u_I] &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{I=1}^n w(x - x_I) 2 p_m(x_I) [p^T(x_I) a(x) - u_I] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

(5.69) denkleminde vektör ve tensörleri kullanılarak tekrar yazılırsa;

$$\sum_{l=1}^n w(x-x_l) 2p(x_l) [p^T(x_l) a(x) - u_l] = 0 \quad (5.70)$$

eşitliği elde edilir. Sabit terim olan 2 sayısını elimine edip değişkenler sağ tarafa atılırsa;

$$\sum_{l=1}^n w(x-x_l) p(x_l) p^T(x_l) a(x) = \sum_{l=1}^n w(x-x_l) p(x_l) u_l \quad (5.71)$$

bağıntısı bulunur.

$$A(x) a(x) = B(x) u \quad (5.72)$$

$$A(x) = \sum_{l=1}^n w(x-x_l) p(x_l) p^T(x_l) \quad (5.73)$$

$$B(x) = [w(x-x_1) p(x_1) \quad w(x-x_2) p(x_2) \quad \dots \quad w(x-x_n) p(x_n)] \quad (5.74)$$

Denklem (5.72)'den $a(x)$ değişkeni çözülüp denklem (5.64)'e yerleştirilirse hareketli en küçük kareler yaklaşımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$u^h(x) = p^T(x) [A(x)]^{-1} B(x) u \quad (5.75)$$

Bilinen yaklaşık form şeklinde yazılırsa;

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^N \Phi_I(x) u_I = \phi^T u \quad (5.76)$$

olarak sadeleştirilir.

Fonksiyon tekrar yazılırsa;

$$\phi^T(x) = p^T(x) [A(x)]^{-1} B(x) \quad (5.77)$$

olur.

x noktası için I düğüm noktasındaki şekil fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\phi_I(x) = p^T [A(x)]^{-1} w(x - x_I) p(x_I) \quad (5.78)$$

$A(x)$ matrisi radyal nokta interpolasyonu gibi moment matrisi olarak tanımlanır. Boyutu $m \times m$ 'dir. Bu matrisin hareketli en küçük noktalar yönteminde bulunmak istenen noktada tersi alınır.

Bir boyutlu lineer hal için moment matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$A(x) = w(x - x_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ x_1 & x_1^2 \end{bmatrix} + w(x - x_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} + \dots w(x - x_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n \\ x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

Denklemden açıkça görüldüğü gibi eğer n değeri 1'e eşitse x noktası sadece bir nodal aralığı içeriyor anlamına geliyor. m değeri 2'e eşit olursa matris tekil olup dönüştürülemez. Dönüştürülebilmesi için gerekli olan koşul $n \geq m$ olması gerekir.

Lineer durum için temel fonksiyon aşağıda yazılmıştır.

$$p^T(x) = [1 \ x \ y] \quad (5.80)$$

Kuadratik durum için temel fonksiyon

$$p^T(x) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2] \quad (5.81)$$

olur.

5.4.1 Ağırlık Fonksiyonlarının Seçimi

Şekil fonksiyonlarının oluşturulabilmeleri için ağırlık fonksiyonların oluşturulması gerekir. Fonksiyonlar seçilirken aşağıdaki özellikleri taşımaları gerekir.

$w(x - x_i) > 0$ olması durumunda destek bölgesinin iç kısmında çözüm yapıldığını $w(x - x_i) = 0$ olması durumunda destek bölgesinin dış kısmında çözüm yapıldığını göstermektedir.

Ağırlık fonksiyonları şekil fonksiyonlarının hassasiyetini önemli ölçekte etkilemektedir. Bu yüzden ağırlık fonksiyonları iyi bir şekilde seçilmesi gerekir.

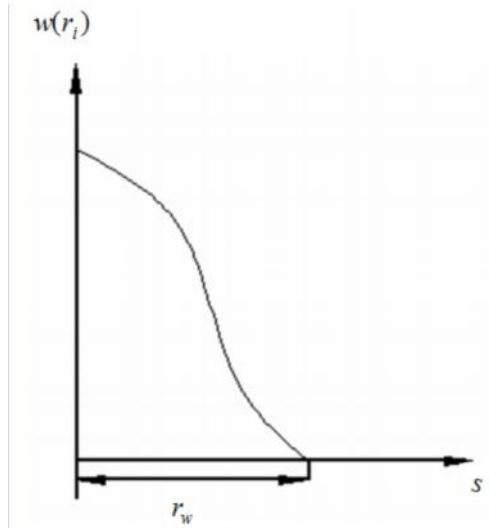
Genellikle quartic spline ve kübik spline hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonlarının türetilmesinde kullanılmaktadır. Bu fonksiyonlar denklem (5.83) ve (5.84)'te verilmiştir. Şekil (5.15)'de bir

boyutlu uygulamalar için ağırlık fonksiyonu ve etkinlik yarıçapı verilmiştir.

$$r_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|x - x_i|}{r_w} \quad (5.82)$$

Burada $d_i = |x - x_i|$ ifadesi incelenen x noktası ile x_i düğüm noktası arasındaki mesafedir. r_w parametresi ise ağırlık fonksiyonu için destek bölgesinin boyutunu (etkinlik yarıçapını) temsil etmektedir.

Şekil 5.17’de bir boyutlu problemler için ağırlık fonksiyonu ve etkinlik yarıçapı tanımı verilmiştir.



Şekil 5.15 Bir boyutlu problemler için ağırlık fonksiyonları ve etkinlik yarıçapları

Şekil 5.15’de belirtildiği gibi ağırlık fonksiyonu s parametresine bağlı olarak ifade edilmektedir. (5.82) bağıntısında x çözüm bölgesi

bağımsız değişkeni x_i ifadesi ise seçilmiş olan düğümlerin çözüm bölgesindeki koordinatlarını belirtmektedir.

Paydada yer alan r ifadesi ise etkinlik yarıçapını temsil etmektedir. Etkinlik yarıçapı r_w 'nin değeri tamamen analizi yapan kişi tarafından seçilmektedir.

En çok kullanılan ağırlık fonksiyonları kubik spline, quartik spline gauss fonksiyonu olup bu fonksiyonlar (5.83), (5.84), (5.85) denklemlerinde verilmiştir.

- Kubik spline fonksiyonu

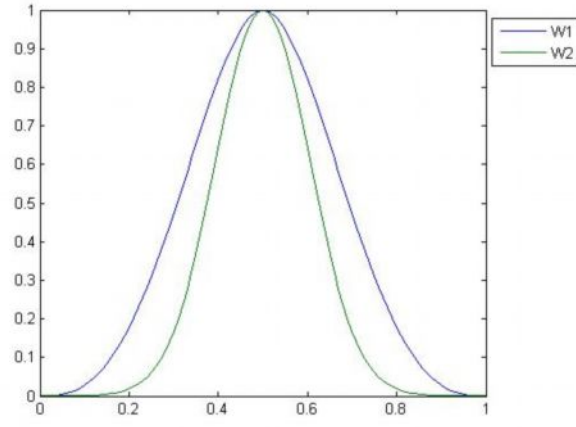
$$W_i(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 6r_i^2 + 4r_i^3 & r_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4r_i + 4r_i^2 - \frac{4}{3}r_i^3 & 0.5 \leq r_i \leq 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \quad (5.83)$$

- Quartik spline (W1) fonksiyonu

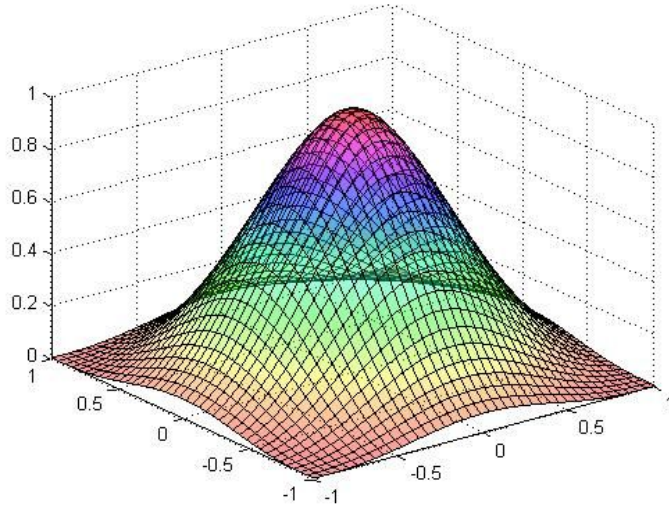
$$W_i(x) = \begin{cases} 1 - 6r_i^2 + 8r_i^3 - 3r_i^4 & r_i \leq 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \quad (5.84)$$

- Gauss (W2) fonksiyonu

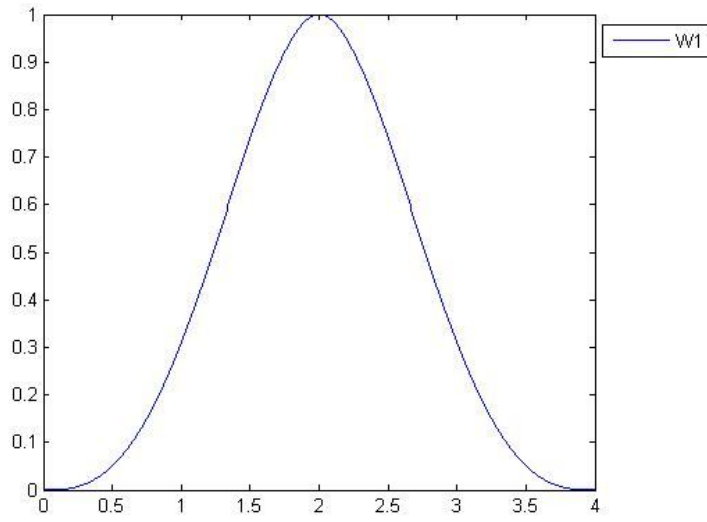
$$W_i(x) = \begin{cases} e^{-(r_i / \alpha)^2} & r_i \leq 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \quad (5.85)$$



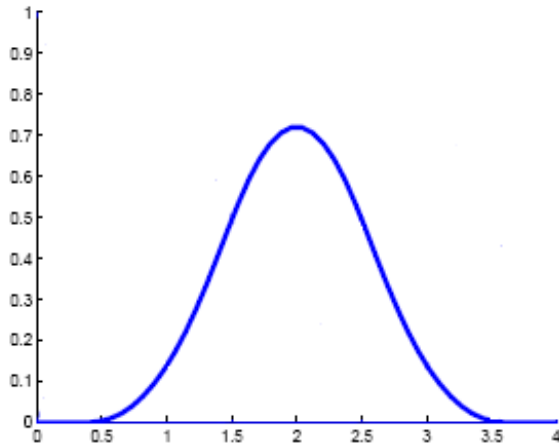
Şekil 5.16 Ağırlık fonksiyonları. W1:Quartik spline, W2:Gauss fonksiyonu



Şekil 5.17 $X=[-1,1]$, $Y=[-1,1]$ noktaları arasındaki ağırlık fonksiyonu



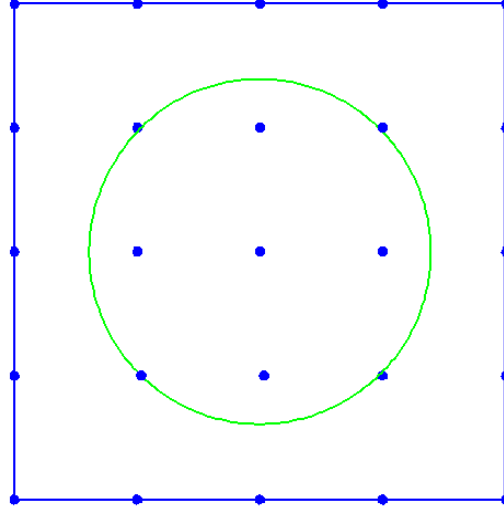
Şekil 5.18 Merkez noktadaki ağırlık fonksiyonu



Şekil 5.19 Merkez noktasındaki şekil fonksiyonu

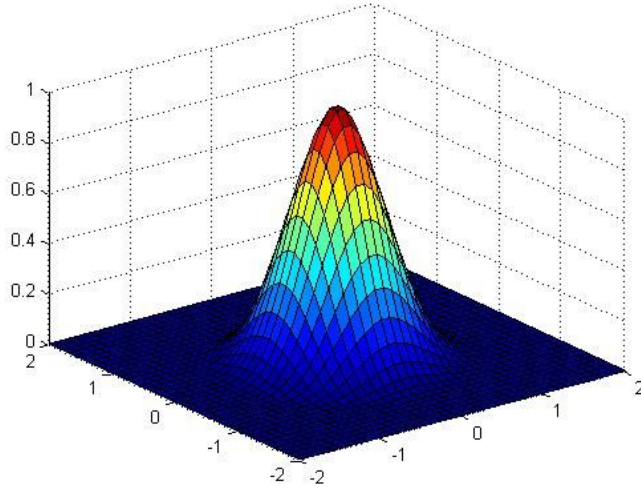
MLS fonksiyonlarının grafiksel olarak incelendiğinde hem ağırlık fonksiyonlarının hemde şekil fonksiyonlarının en iyi şekilde

anlaşılmasını sağlar. Bu amaçla 5 eşit düğüm noktasına bölünmüş $0 \leq x \leq 4$ noktaları arasında ağırlık ve şekil fonksiyonları Şekil 5.18 ve 5.19’da gösterilmiştir. Ağırlık fonksiyonu olarak quartik spline fonksiyonu kullanılmıştır. Etkinlik yarıçapı 2 olarak seçilmiştir. Ayrıca HEKY fonksiyonlarının Kronecker delta özelliği taşımadığı da unutulmamalıdır.

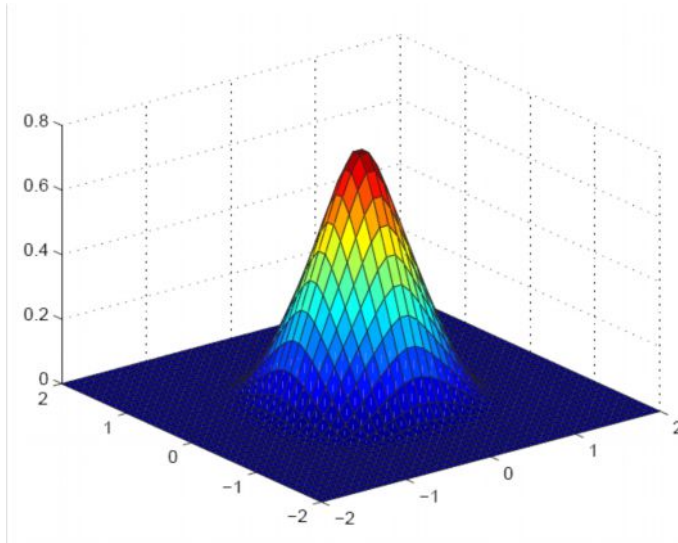


Şekil 5.20 (5x5) boyutunda üniform olarak dağıtılmış düğümler kullanılarak oluşturulmuş bölge. Çember merkezdeki düğümün destek bölgesini göstermektedir.

HEKY şekil fonksiyonları analiz edilmesi sırasında düğüm noktaları olarak 5×5 üniform olarak dağıtılmış düğümler Şekil 5.20’de verilmiştir. Yerel destek bölgesi olarak çembersel bölge seçilmiştir. Bölgenin çapı 1.4 olarak kabul edilmiştir. Lineer temel fonksiyonları kullanılmıştır. Ağırlık fonksiyonları olarak ta kuadrik spline fonksiyonları seçilmiştir. Analize ait üç boyutlu ağırlık ve şekil fonksiyonları Şekil 5.21 ve 5.22’de gösterilmiştir.



Şekil 5.21 $x=[-2\ 2]$ ve $y=[-2\ 2]$ koordinatları arasında merkez düğümündeki ağırlık fonksiyonu



Şekil 5.22 $x=[-2\ 2]$ ve $y=[-2\ 2]$ koordinatları arasında merkez düğümündeki şekil fonksiyonu

6 ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİ

Bu metod ağsız yöntemlerden en çok kullanılan yöntemlerden bir tanesidir. Metod şekil fonksiyonları olarak hareketli en küçük kareler yönteminin şekil fonksiyonlarını kullanır (Belytschko vd., 1994)

- Zayıf formdan sistem denklemleri türetilmesi için Galerkin prosedürü uygulanır.
- Arka plandaki ağla integrasyon uygulanır.

Ω alan geometrisinde tanımlı Γ 'ye bağlı bölge kabul edilsin. Sınır iki parçaya bölünsün. Γ_u ve Γ_t . Γ_u ifadesi yer değiştirme değerlerini, Γ_t 'de sınırdaki çekme kuvvetini belirtmektedir.

Elastostatik durumlar için alan denklemleri,

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (6.1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.3)$$

gibi tanımlanır.

Yer değiştirme(esas) ve çekme(doğal) sınır koşulları denklem (6.4) ve (6.5)'te verilmiştir.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \Gamma_u \text{ üzerinde tanımlı} \quad (6.4)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \Gamma_t \text{ üzerinde tanımlı} \quad (6.5)$$

Daha önceki bölümlerde belirtildiği gibi Galerkin prosedürü uygulanıp denge denklemini test fonksiyonu olan v ile çarpılırsa zayıf form elde edilir.

$$\int_{\Omega} v_i (\sigma_{ij,j} n_j + b_i) d\Omega = 0 \quad (6.6)$$

$v_i \sigma_{ij}$ için zincir kuralı uygulanırsa;

$$\int_{\Omega} (v_i \sigma_{ij}),_j d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega = 0 \quad (6.7)$$

elde edilir

Birinci terime Gauss teoremi uygulanırsa (6.8) elde edilir.

$$\int_{\Gamma} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega = 0 \quad (6.8)$$

Denklem (6.5)'te sınır koşulları denklem (6.8)'e uygulanırsa;

$$\int_{\Gamma} v_i \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega = 0 \quad (6.9)$$

elde edilir.

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ eşit olduğundan denklem aşağıdaki hale sadeleştirilir.

$$\sigma_{ij} v_{i,j} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) = \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \quad (6.10)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \int_{\Gamma} v_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega \quad (6.11)$$

Denklem vektör notasyonları şeklinde yazılıp son hal olarak aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T(u) C \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{t} \cdot v d\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega \quad (6.12)$$

Lagrange çarpanları metodu kullanılarak esas sınır koşulları uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir. Lagrange çarpanları sonraki başlıkta incelenecektir.

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T(u) C \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{t} \cdot v d\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} v \cdot \lambda d\Gamma \quad (6.13)$$

Lagrange çarpan ifadesi yaklaşık olarak;

$$\lambda = N_I(s)\lambda_I \quad (6.14)$$

gibi gösterilebilir

Denklemlerin en son hali olarak;

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T C B_J d\Omega \quad (6.16)$$

$$G_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \Phi_I N_K D S d\Gamma \quad (6.17)$$

$$f_I = \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I b d\Omega \quad (6.18)$$

$$q_K = - \int_{\Gamma_u} N_K S \bar{u} d\Gamma \quad (6.19)$$

S :2 boyutlular için diagonal matristir.

$$B_I = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

gibi olur

6.1 Esas Sınır Koşulları

Hareketli en küçük kare yöntemlerinin şekil fonksiyonları kronocker delta özelliği taşımadığından dolayı esas sınır koşulları sonlu elemanlar yönteminde kullanıldığı gibi kolay uygulanamıyor. Bunun için bazı teknikler önerilmiştir. Bunlardan biri zayıf formların modifikasyonu temelli metodlar, diğeri de şekil fonksiyonların modifiye edilmesiyle geliştirilen yöntemlerdir. Bunlar hakkında özet olarak bilgi verilecektir.

Zayıf formların modifikasyonu temelli metodlar, Lagrange çarpan metodu, penaltı metodu, ve Nietche metodu olarak üçe ayrılır.

Fonksiyonel terim olan Π skaler nicelik taşıyıp aşağıdaki integral formatında tanımlanır.

$$\Pi = \int_{\Omega} F(u, u_{,x}, \dots) d\Omega + \int_{\Gamma} E(u, u_{,x}, \dots) d\Gamma \quad (6.21)$$

Burada, u , bilinmeyen fonksiyon, F ve E , diferansiyel operatörlerdir.

Süreklilik fonksiyonu olan u 'nin çözülmesi Π 'nin keyfi değişimi δ_u 'yu kararlı yapar.

6.1.1 Lagrange Çarpanı

Sınır koşullarındaki fonksiyonun minumun değerleri için (6.22) denkleminde tanımlanmıştır.

$$\Pi = 2a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 18a_1 + 6a_2 \quad (6.22)$$

Sınırlarda,

$$a_1 = a_2 \quad (6.23)$$

gibi kabul edilebilir. λ , bilinmeyen parametrenin Lagrange çarpanının uygulanıp denklem çözülürse

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \Pi + \lambda(a_1 - a_2) \\ &= 2a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 18a_1 + 6a_2 + \lambda(a_1 - a_2) \end{aligned} \quad (6.24)$$

denklemini elde edilir. Bilinmeyen α_i ve λ değerlerine göre türev alınırsa;

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_1} = \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_2} = \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \lambda} = 0 \quad (6.25)$$

eşitliği bulunur. Denklem çözülürse aşağıdaki değerler bulunur.

$$a_1 = a_2 = -12 \quad \lambda = 6 \quad (6.26)$$

Sınırlarla fonksiyonel Π genel bir problem için kararlılık için

$$C(u) = 0 \quad \Gamma \text{ sınırında} \quad (6.27)$$

kabul edilir. Lagrange çarpanlarının eklenip aynı prosüdür sınırlara da uygulanmasıyla,

$$\bar{\Pi}(u, x) = \Pi(u) + \int_{\Gamma} \lambda^T C(u) d\Gamma \quad (6.28)$$

gibi denklem elde edilir.

Yeni fonksiyonel varyasyon aşağıdaki gibi bulunur.

$$\delta \bar{\Pi} = \delta \Pi + \int_{\Gamma} \delta \lambda^T C(u) d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda^T \delta C(u) d\Gamma \quad (6.29)$$

Farklı denklemlerin türetilmesi için Lagrange çarpanlarının yaklaşık olarak uygulanması gerekir.

$$\lambda = \sum_{i=1}^l N_i^L(x) \lambda_i \quad (6.30)$$

Lagrange çarpanlarının uzay interpolasyonları için bazı seçenekler mevcuttur.

- Sınırlardaki sonlu eleman interpolasyonu
- Sınırdaki ağsız yaklaşımlar
- Dirac delta fonksiyonunu kullanan nokta sıralama metodu

$$N_i^L(x) = \delta(x - x_i^L) \quad (6.31)$$

Burada x_i^L , Sınırdaki Γ boyunca yerleşmiş noktalar grubudur.

Bu metodun kullanılmasıyla elastostatik problemler için sistem denklemleri;

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (6.32)$$

$$G_{1K} = - \int_{\Gamma_u} \Phi_I N_K d\Gamma = - \begin{bmatrix} \Phi_I(X_K) & 0 \\ 0 & \Phi_I(X_K) \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

$$q_K = - \int_{\Gamma_u} N_K \bar{u} d\Gamma = - \bar{u}(x_K) \quad (6.34)$$

gibi olurlar.

6.1.2 Penaltı Fonksiyonu

Π tekrar aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} \Pi &= 2a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 18a_1 + 6a_2 \\ a_1 &= a_2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Burada $(a_1 - a_2)^2$ değeri ya pozitif, ya da 0'a eşit olduğu biliniyor. Bu da fonksiyonel $\delta(a_1 - a_2)^2$ kararlı hali için $a_1 = a_2$ olduğunu gösteriyor.

Yeni fonksiyon geliştirilirse;

$$\bar{\Pi} = \Pi + \alpha(a_1 - a_2)^2 \quad (6.36)$$

gibi denklem bulnur. α pozitif değer olup penaltı numarasını gösterir. Aynı şekilde önceki başlıktan aşağıdaki problem tekrar yazılırsa;

$$\Pi(u, \alpha) = \Pi(u) + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma} C(u)^T C(u) d\Gamma \quad (6.37)$$

formülü elde edilir.

Pratik açısından denklem tekrar aşağıda yazılmıştır.

$$\Pi(u, \alpha) = \Pi(u) + \alpha \int_{\Gamma} C(u)^T C(u) d\Gamma \quad (6.38)$$

Penaltı metodunun elastostatik problemlere uygulanıp aşağıdaki zayıf formlar çözülür.

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T(u) C \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{t} \cdot v d\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} u \cdot v d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_u} \bar{u} \cdot v d\Gamma \quad (6.39)$$

$$Ku = f \quad (6.40)$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T C B_J d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_u} \Phi_I \Phi_J d\Gamma \quad (6.41)$$

$$f_I = \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I b d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_u} \Phi_I \bar{u} d\Gamma \quad (6.42)$$

6.2 İntegrasyon

Hareketli en küçük kareler yönteminde şekil fonksiyonlarının, eleman bağımsız Galerkin yönteminde oluşturduğu en büyük dezavantaj

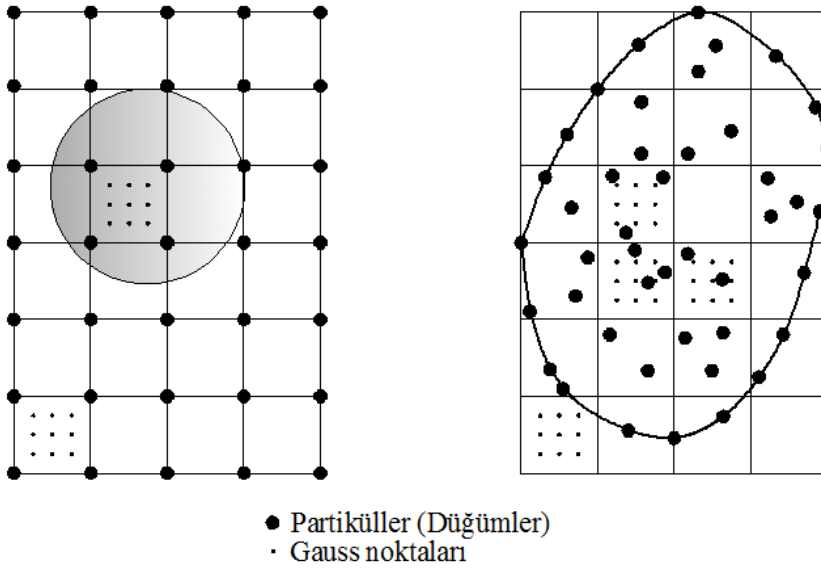
zayıf formların nümerik olarak integrasyon çözümü zorluluğudur. Bunun için çeşitli çözüm yolları geliştirilmiştir.

6.2.1 Direk Nodal İntegrasyonu

İntegral, integrasyon noktaları yerine düğümlerde hesaplanır. Sıralama metodundaki problemler için de uygulanabilir.

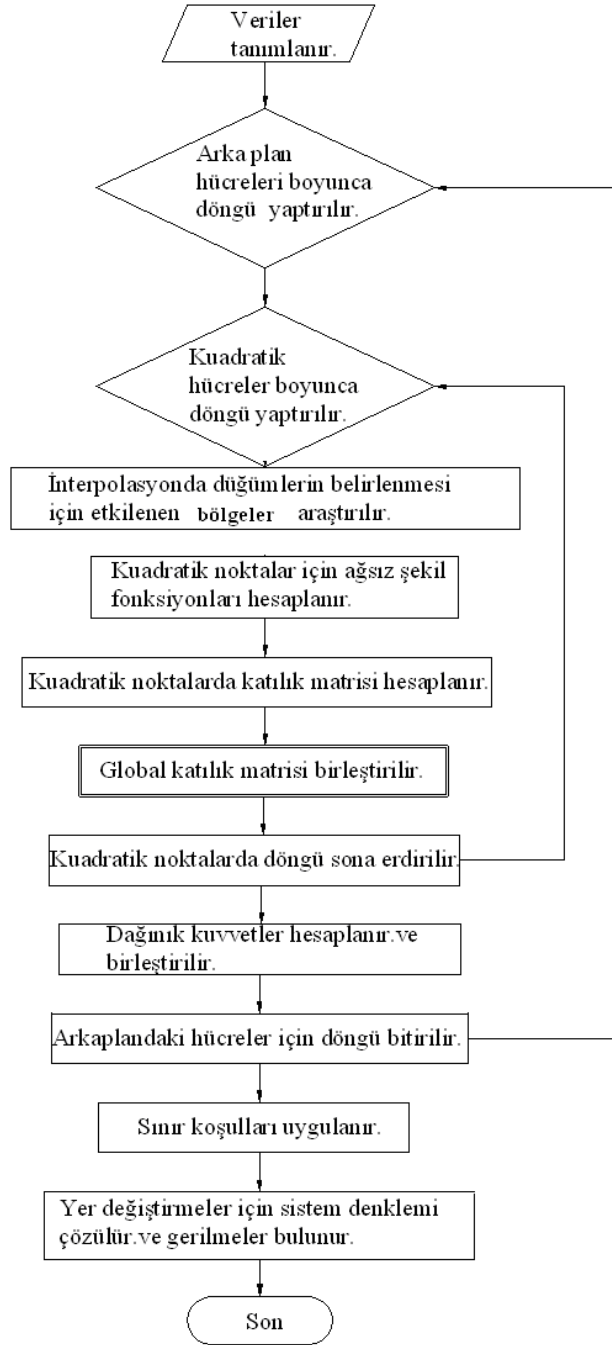
6.2.2 Arka Plan Ağı veya Hücre Yapısı:

Gauss kuadratik noktaları üzerindeki geometri integrasyon hücrelerine bölünür. Genellikle düzgün hücre yapıları kullanılır.



Şekil 6.1 Eleman bağımsız Galerkin yönteminde integrasyon a) Arka plan ağı

b) Arkaplan yapı hücreleri



Şekil 6.2 EBG için program akış şeması

7 AĞSIZ RADYAL NOKTA İNTERPOLASYON YÖNTEMİ

Ω alan geometrisinde Γ sınırında lineer elastik iki boyutlu katı mekaniği problemi için kısmi diferansiyel denklem ve sınır koşulları aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$L^T \sigma + b = 0 \quad \Omega \text{ alanında} \quad (\text{Denge denklemi}) \quad (7.1)$$

$$\sigma n = \bar{t} \quad \Gamma_t \text{ üzerinde} \quad (\text{Doğal sınır koşulu}) \quad (7.2)$$

$$u = \bar{u} \quad \Gamma_u \text{ üzerinde} \quad (\text{Esas sınır koşulu}) \quad (7.3)$$

Bu ifadelerden L , denklem (8.5)'te tanımlanan diferansiyel operatördür.

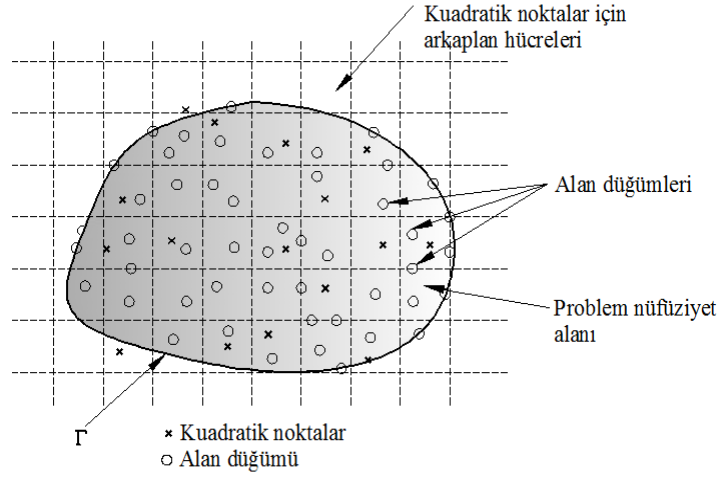
$\sigma^T = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}\}$, gerilme vektörü, $u^T = \{u \quad v\}$, yer değiştirme vektörü, $b^T = \{b_x \quad b_y\}$, cisim kuvvet vektörü, $\bar{t}$, Doğal sınır koşulunda tanımlanmış zorlanma kuvveti, $\bar{u}$, Esas sınır koşulunda tanımlı yerdeğiştirme, n , Şekil (8.1)'te gösterildiği gibi herhangi bir noktada dışa dönük birim vektördür.

Denklem (7.1) 'te standart varyasyonel zayıf form aşağıdaki gibi yazılabilir. (Bölüm 2.1'de verilmiştir).

$$\int_{\Omega} (L \delta u)^T (DLu) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (7.4)$$

Burada D , denklem (8.7)'de verilen düzlem gerilme için elastik katsayılar matrisidir

Denklem (7.4), global bölgede tanımlı zayıf formu ifade eder. Denklem (7.4)'ün çözülebilmesi için problem geometrisi arka planda hücrelere bölünür. Doğal sınır boyunca integrallerin çözülmesinde bu hücreler kullanılır (Liu G.R., Gu, 2001c; Wang and Liu, G.R. and Yan vd., 2002; Liu G.R., and Zhang vd., 2003). Alan değişkenleri bulunabilmesi için problem geometrisi alan düğümleriyle şekil (7.1)'de gösterilmiştir. Bu düğümler tüm geometrik bölge için 1'den N'e kadar numaralandırılmıştır.



Şekil 7.1 Ağsız global zayıf formda kullanılan arka plan hücreleri. Problem geometri bölgesi düğümlerle gösterilmiştir. Hücreler zayıf form integrallerini çözmek için oluşturulmuştur

$$u_{(2 \times 1)}^h = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \cdots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \Phi_{(2 \times 2n)} u_{(2n \times 1)} \quad (7.5)$$

Denklem 7.5'te, ϕ , şekil fonksiyonu matrisini, n , yerel destek bölgesindeki düğüm sayısını, u , yerel destek bölgesindeki düğümlerde yer değiştirme vektörüdür

Denklem (7.5) aşağıdaki gibi de yazılabilir

$$u_{(2 \times 1)}^h = \sum_I^n \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \end{Bmatrix} = \sum_I^n \phi_I u_I \quad (7.6)$$

Burada, ϕ_I , I düğümünün şekil fonksiyon matrisi, u_I , nodal yerdeğiştirmeleri ifade etmektedir

Denklem (7.6)'daki u^h , incelenen nokta veya kuadratik noktadaki yaklaşık yer değiştirme değerlerini belirtir.

Denklem (7.6) kullanılarak aşağıdaki denklem türetilebilir.

$$\delta u_{(2 \times 1)}^h = \phi_{(2 \times 2n)} \delta u_{(2n \times 1)} = \sum_I^n \Phi_I \delta u_I \quad (7.7)$$

Denklem (8.3) ve (7.6) uygulanıp yaklaşık yerdeğiştirmeler kullanılarak denklem (7.8) elde edilir..

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(3 \times 1)} &= L u^h = L_{(3 \times 2)} \Phi_{(2 \times 2n)} u_{(2n \times 1)} \\
&= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \cdots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \partial\phi_1/\partial x & 0 & \cdots & \partial\phi_n/\partial x & 0 \\ 0 & \partial\phi_1/\partial y & \cdots & 0 & \partial\phi_n/\partial y \\ \partial\phi_1/\partial y & \partial\phi_1/\partial x & \cdots & \partial\phi_n/\partial y & \partial\phi_n/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = B_{(3 \times 2n)} u_{(2n \times 1)} \\
&= \sum_I^n B_I u_I
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Burada B , uzama matrisini B_I , I düğümü için uzama matrisini gösterir. Denklem tekrar yazılırsa;

$$\begin{aligned}
L \delta u^h &= L_{(3 \times 2)} \Phi_{(2 \times 2n)} \delta u_{(2n \times 1)} = B_{(3 \times 2n)} \delta u_{(2n \times 1)} \\
&= \sum_I^n (B_I)_{(3 \times 2)} (\delta u_I)_{(2 \times 1)}
\end{aligned} \tag{7.9}$$

eşitlikleri bulunur. Problem bölgesinde incelenen noktadaki malzeme için denklemler kullanılarak gerilme vektörü bulunabilir.

$$\sigma = D \varepsilon = D_{(3 \times 3)} B_{(3 \times 2n)} u_{(2n \times 1)} = \sum_I^n D_{(3 \times 3)} (B_I)_{(3 \times 2)} (u_I)_{(2 \times 1)} \tag{7.10}$$

Denklem (7.8) ve (7.9), (7.4) denklemin ilk terimine koyulursa (7.11) bağıntısı elde edilir.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (L\delta u)^T (DLu) d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\sum_I^n B_I \delta u_I \right)^T \left(\sum_j^n DB_j u_j \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \sum_I^n \sum_J^n \delta u_I^T [B_I^T DB_J] u_J d\Omega
\end{aligned} \tag{7.11}$$

I ve J , nodal destek bölgesinde düğümler için yerel numaralandırma sistemine sahiplerdir. Tüm numaralandırma sistemi için 1'den N 'e kadar, düğümler lokalden global sisteme çevrilecektir.

Denklem (7.11) tekrar yazılırsa

$$\int_{\Omega} (L\delta u)^T (DLu) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_I^N \sum_J^N \delta u_I^T [B_I^T DB_J] u_J d\Omega \tag{7.12}$$

olur. İntegrasyon parametresi parantez içine alınıp denklem aşağıdaki hale gelir.

$$\int_{\Omega} (L\delta u)^T (DLu) d\Omega = \sum_I^N \sum_J^N \delta u_I^T \underbrace{\left(\int_{\Omega} B_I^T DB_J d\Omega \right)}_{K_{IJ}} u_J \tag{7.13}$$

Burada, K_{IJ} matrisi 2×2 boyutlarında olup nodal katılık matrisi olarak tanımlanır.

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} (B_I^T)_{(2 \times 3)} D_{(3 \times 3)} (B_J)_{(3 \times 2)} d\Omega \tag{7.14}$$

I ve J aynı kuadratik nokta intepolasyonun destek bölgesinde olmadığından K_{IJ} yok edilir.

Denklem (7.13) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_{\Omega} (L\delta u)^T (DLu) d\Omega = \sum_I^N \sum_J^N \delta u_I^T K_{IJ} u_J \quad (7.15)$$

Denklemin sağ tarafındaki terimler açılırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_I^N \sum_J^N \delta u_I^T K_{IJ} u_J &= \delta u_1^T K_{11} u_1 + \delta u_1^T K_{12} u_2 + \dots + \delta u_1^T K_{1N} u_N \\ &\quad + \delta u_2^T K_{21} u_1 + \delta u_2^T K_{22} u_2 + \dots + \delta u_2^T K_{2N} u_N \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \delta u_N^T K_{N1} u_1 + \delta u_N^T K_{N2} u_2 + \dots + \delta u_N^T K_{NN} u_N \\ &= \delta U^T K U \end{aligned} \quad (7.16)$$

Sonuç olarak denklem (7.13) aşağıdaki gibi olur.

$$\int_{\Omega} (L\delta u)^T (DLu) d\Omega = \delta U^T K U \quad (7.17)$$

K global katılık matrisi olup aşağıdaki formda yazılabilir.

$$K_{(2N \times 2N)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

U 'nun matris uzunluğu 3'tür.

Denklem (7.6)'daki veriler denklem (7.4)'ün ikinci terimine yerleştirilip, katılık matrisi türetilmesinde aynı argümanlar kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega = \int_{\Omega} (\delta \sum_I^n \Phi_I u_I)^T b d\Omega \quad (7.19)$$

Denklem (7.11)'deki veriler denklem (7.19) için uyarlanırsa;

$$\int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega = \int_{\Omega} (\delta \sum_I^N \Phi_I u_I)^T b d\Omega \quad (7.20)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılsa;

$$\int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega = \sum_I^N \delta u_I^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_I^T b d\Omega}_{F_I^b} \quad (7.21)$$

denklemleri elde edilir.

$F_I^{(b)}$ nodal cisim kuvveti olup aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$F_I^b = \int_{\Omega} \Phi_I^T b d\Omega \quad (7.22)$$

Burada b , cisim kuvvet vektörüdür.

Denklem (7.21) açılıp matris formatında;

$$\begin{aligned}
\sum_I^N \delta u_I^T \int_{\Omega} \Phi_I^T b d\Omega &= \sum_I^N \delta u_I^T F_I^b \\
&= \delta u_1^T F_1^b + \delta u_2^T F_2^b + \dots + \delta u_N^T F_N^b \\
&= \left\{ \delta u_I^T \quad \dots \quad \delta u_N^T \right\}_{(1 \times 2n)} \left\{ \begin{matrix} F_1^b \\ \vdots \\ F_N^b \end{matrix} \right\}_{(2N \times 1)} \\
&= \delta U^T F^b
\end{aligned} \tag{7.23}$$

gibi yazılabilir.

Burada $F^{(b)}$, bölgenin tamamında tüm düğümler için nodal cisim kuvvet vektörlerini toplayan global cisim kuvvet vektörüdür.

$$F^{(b)} = \left\{ \begin{matrix} F_1^b \\ \vdots \\ F_N^b \end{matrix} \right\}_{(2N \times 1)} \tag{7.24}$$

Denklem (7.4)'teki son terim özelliği ile (7.19) ve (7.24) denklemleriyle hemen hemen aynı olup tek fark kuvvet vektörü, çekme kuvvet vektöründeki interpolasyonlar sınır integrasyonlarıyla değiştirilmiştir.

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma &= \sum_I^n \delta u_I^T \int_{\Gamma_t} \Phi_I^T \bar{t} d\Gamma \\
&= \delta U^T \sum_I^N \underbrace{\int_{\Gamma_t} \Phi_I^T \bar{t} d\Gamma}_{(F_I^{(t)})_{(2 \times 1)}} = \delta U^T F^{(t)}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Burada $F_I^{(t)}$, Nodal zorlanma kuvveti vektörüdür.

$$(F_I^{(t)})_{(2 \times 1)} = \int_{\Gamma_t} \Phi_I^T \bar{t} d\Gamma \quad (7.26)$$

Denklem (7.25)'te, $F^{(t)}$, nodal çekme kuvvet vektörlerini kullanarak toplayan global zorlanma kuvvet vektörüdür.

(7.17), (7.23) ve (7.25) denklemleri (7.4) denklemine yerleştirilip aşağıdaki denklem bulunur.

$$\delta U^T KU - \delta U^T F^{(b)} - \delta U^T F^{(t)} = 0 \quad (7.27)$$

$$\text{veya } \delta U^T [KU - F^{(b)} - F^{(t)}] = 0 \quad (7.28)$$

δU , keyfi katsayı olduğundan bağıntı aşağıdaki gibi basitleştirebilir.

$$KU - F^{(b)} - F^{(t)} = 0 \quad (7.29)$$

$$KU = F^{(b)} + F^{(t)} \quad (7.30)$$

$$KU = F \quad (7.31)$$

Denklem (7.31) ağırsız radyal nokta interpolasyonu için yazılan son sistem denklemdir.

Nodal yerdeğiştirmeler bulunduktan sonra uzama ve gerilme elemanları denklem (7.8) ve (7.10)'dan bulunur.

7.1 Nümerik İnterpolasyon

Aşağıda incelenecek problem Ω global problem bölgesinde ve global çekme kuvveti Γ_t olan problem içindir. Şekil (7.1)'de verildiği gibi öncelikle problem bölgesi arkaplan hücrelerine bölünür. Dolayısıyla global interpolasyon hücrelerin üzerindeki integrallerin toplamından bulunur.

$$\int_{\Omega} G d\Omega = \sum_k^{n_c} \int_{\Omega_k} G d\Omega \quad (7.32)$$

Burada n_c , hücre sayısını G , integrandı belirtir. Ω_k , ise k .nci hücredeki bölgeyi tanımlar.

Gauss kuadrature sonlu elemanlar yönteminde interpolasyonları güçlendirmek için genellikle kullanılır. n_g , Gauss noktaları hücrelerde kullanıldığında denklem (7.32) aşağıdaki gibi olur.

$$\int_{\Omega} G d\Omega = \sum_k^{n_c} G d\Omega = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} w_i G(x_{Qi}) |J_{ik}^D| \quad (7.33)$$

Burada w_i , x_{Qi} noktasındaki Gauss ağırlık fonksiyonu, J_{ik}^D , x_{Qi} noktasında yerleşen Gauss noktalarının arkaplandaki hücrede k 'nın alan integrasyonunu belirtir.

Gauss kuadratik eğrisi aynı şekilde bulunabilir.

$$\int_{\Gamma_t} G d\Gamma = \sum_l^{n_{ct}} \int_{\Gamma_{tl}} G d\Omega = \sum_l^{n_{ct}} \sum_{i=1}^{n_{gt}} w_i^{\wedge} G(x_{Qi}) |J_{il}^B| \quad (7.34)$$

Burada $w_i^{\wedge}$, i .nci x_{Qi} noktasındaki Gauss ağırlık faktörü, J_{il}^B , sınır için eğri integralinin jacobian matrisi n_{ct} , Γ_t sınırını oluşturmak için kullanılan eğri hücrelerinin sayısı n_{gt} , eğrideki Gauss noktalarının sayısını ifade eder.

Nümerik olarak katılık matrisi olan K_{IJ} 'nın bulunabilmesi için denklem (7.32)'nin nümerik kuadratik formülasyonu (7.33) bağıntısında verilmiştir.

$$K_{IJ} = \sum_l^{n_{ct}} \sum_{i=1}^{n_{gt}} w_i^{\wedge} \underbrace{B_l^T(x_{Qi}) DB_j(x_{Qi}^D)}_{K_{IJ}^{ik}} |J_{ik}^D| = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} (K_{IJ}^{ik})_{(2 \times 2)} \quad (7.35)$$

K_{IJ}^{ik} aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$K_{IJ}^{ik} = w_i^{\wedge} B_l^T(x_{Qi}) DB_j(x_{Qi}) |J_{ik}^D| \quad (7.36)$$

Burada K_{IJ}^{ik} 'nın boyutu 2'dir.

Eğer I ve J kuadratik nokta x_{Qi} için yerel destek bölgesinde değiller ise K_{IJ}^{ik} yok edilir.

Denklem (7.22)'de verilen $F_I^{(b)}$ nodal cisim kuvveti bulunabilir.

$$F_I^{(b)} = \sum_k \sum_{i=1}^{n_g} \underbrace{w_i \Phi_I^T(x_{Qi}) b(x_{Qi})}_{F_I^{ik(b)}} \Big| J_{ik}^D \Big| = \sum_k \sum_{i=1}^{n_g} F_I^{ik(b)} \quad (7.37)$$

$F_I^{ik(b)}$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$F_I^{ik(b)} = w_i \Phi_I^T(x_{Qi}) b_I(x_{Qi}) \Big| J_{ik}^D \Big| \quad (7.38)$$

$F_I^{ik(b)}$ teriminin boyutu 2' dir.

$F_I^{(t)}$ nodal çekme kuvveti denklem (7.26)'de verilmiştir..

$$F_I^{(t)} = \sum_k \sum_{i=1}^{n_{gt}} \underbrace{w_i \Phi_I^T(x_{Qi}) \bar{t}(x_{Qi})}_{F_I^{ik(t)}} \Big| J_{il}^D \Big| = \sum_l \sum_{i=1}^{n_{gt}} F_I^{il(t)} \quad (7.39)$$

$F_I^{il(t)}$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$F_I^{il(t)} = w_i \Phi_I^T(x_{Qi}) \cdot t_I(\bar{x}_{Qi}) \Big| J_{il}^B \Big| \quad (7.40)$$

$F_I^{il(t)}$ 'nin teriminin boyutu 2' dir.

RNİM metodunda matrislerin toplanması kuadratik noktalara bağlıdır. Değişik kuadratik noktalar değişik destek bölgeleri kullanır. Yani şekil fonksiyonu olan Φ ile uzama matrisi olan B , farklı noktalar için farklı olabilirler. Ama sonlu elemanlar yönteminde bir elemanda Gauss noktaları aynı elemanlar kullanılıp interpolasyonlar elde edilir.

Global zayıf formlara dayanan ağsız yöntemler en çok araştırılan nümerik yöntemlerden biri olup (Dolbow ve Belytschko, 1999; Liu ve Yang, 1999, Liu) araştırmacılar bunlar ile ilgi çalışmalar yayınlamışlardır.

Bu çalışmalardan elde edilen sonuçlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

1. Kuadratik noktaların toplam sayısı n_Q , sabitlenmeyen alan düğümlerinin (N), en az $2/3$ oranında olması gerekir.

$$3N_Q > N_u \approx 2N \quad (7.41)$$

veya $N_Q > \frac{2}{3}N$, 2 boyutlu problemler için

2. Doğru ve verimli sonuçlar elde edilebilmesi için uygun kuadratik noktaların seçilmesi gerekir. Yaklaşık olarak verimli kuadratik nokta sayısı

$$n_Q = (3 \approx 9)N \quad 2 \text{ boyutlu problemler için} \quad (7.42)$$

Bu özellikler EBG yöntemi için uygulanmıştır. Mühtemelen RNİM için de uygulanabilir. (Liu G.R., 2002)

7.2 Katılık Matrisinin Özelliği

D matrisi simetrik olduğundan dolayı aşağıdaki formül yazılabilir.

$$[B_I^T D B_J]^T = [B_J^T D^T B_I] \quad (7.43)$$

$$\text{Dolayısıyla } [K_{IJ}]^T = K_{JI} \quad (7.44)$$

gibi olur.

Bu özellik global katılık matrisi olan K 'nın simetrik olduğunu gösteriyor. Global katılık matrisi K , uygun matrisler kullanılarak hesaplanır. $K_{IJ} \neq 0$ değeri sadece I ve J 'nin minumun bir kuadratik noktası tarafından kaplandığında bu değeri alır.

Eğer I ve J birbirinden uzak ve ayrı iseler herhangi bir destek noktasında aynı destek bölgesini paylaşamazlar. Bu yüzden K_{IJ} yok edilir. Bundan dolayı sıkı ve destek bölgesini kaplamazsa K_{IJ} , 0 değerini alır. ve global katılık matrisi olan K dağınık bir hale gelmiş olur. Eğer düğümler düzenli bir şekilde numaralandırılırsa K 'da bitişik olur.

7.3 Esas Sınır Koşullarının Uygulanması

RNİM formülasyonu, çekme koşulları Galerkin zayıf formu kullanılarak sistem denklemlerinde doğal olarak uygulanır. Bundan dolayı bazen bu koşullara doğal sınır koşulları da denmektedir. Bununla birlikte yer değiştirme sınır koşulları denklem (7.3)'te görüldüğü gibi formülasyon işlemine dahil edilmemiştir. Dolayısıyla (7.31) denklemini kurulduktan sonra esas sınır koşulları ayrık bir şekilde uygulanır. ve yer değiştirme sınır koşullarına esas sınır koşulları denilir.

Esas sınır koşulları sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi kolaylıkla uygulanabilir. Aşağıda incelenecek iki metod yaygın olarak sonlu elemanlarda kullanıldığı gibi radyal nokta interpolasyon yönteminde de uygulanabilir.

7.3.1 Direk Metodu

i .nci yer değiştirme elemanı aşağıdaki gibi verilsin.

$$u_i = \bar{u}_i \quad (7.45)$$

Esas sınır koşulları aşağıda belirtilen katılık matrisi ve global kuvvet vektörlerine yapılan modifikasyonlarla (7.31)'deki denkleme direk olarak uygulanır. Katılık matrisi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1(i-1)} & 0 & K_{1(i+1)} & \cdots & K_{1(2N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{(i-1)1} & \cdots & K_{(i-1)(i-1)} & 0 & K_{(i-1)(i+1)} & \cdots & K_{(i-1)(2N)} \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ K_{(i+1)1} & \cdots & K_{(i+1)(i-1)} & 0 & K_{(i+1)(i+1)} & \cdots & K_{(i+1)(2N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{(2N)1} & \cdots & K_{(2N)(i-1)} & 0 & K_{(2N)(i+1)} & \cdots & K_{(2N)(2N)} \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

Global kuvvet değerindeki değerler aşağıdaki hale dönüşür.

$$F_j \Rightarrow \begin{cases} u_i & i = j \\ F_j - K_{ji}u_i & i \neq j \end{cases} \quad (7.47)$$

(7.31) denklemi çözülmesiyle modifiye edilmiş katılık matrisi ve kuvvet vektörü kullanılarak tüm yer değiştirme elemanları bulunur.

Direk metodu esas sınır koşulları direk olarak uygulanabilir. Ama matris vektörlerinin değişmesine ek olarak hesap operetörlerine gereksinim duyar. Ayrıca direk metod algoritması kompleks yapıya sahiptir.

7.3.2 Penaltı Yöntemi

Penaltı metodu esas sınır koşullarının uygulanmasında uygun bir alternatif çözüm olup, diagonal köşelerdeki katılık matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$K_{ii} = \alpha.K_{ii} \quad (7.48)$$

K matrisi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1(i-1)} & K_{1i} & K_{1(i+1)} & \cdots & K_{1(2N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{(i-1)1} & \cdots & K_{(i-1)(i-1)} & K_{(i-1)i} & K_{(i-1)(i+1)} & \cdots & K_{(i-1)(2N)} \\ K_{(i)1} & \vdots & K_{i(i-1)} & \alpha K_{ii} & K_{i(i+1)} & \vdots & K_{i(2N)} \\ K_{(i+1)1} & \cdots & K_{(i+1)(i-1)} & K_{(i+1)i} & K_{(i+1)(i+1)} & \cdots & K_{(i+1)(2N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{(2N)1} & \cdots & K_{(2N)(i-1)} & K_{(2N)i} & K_{(2N)(i+1)} & \cdots & K_{(2N)(2N)} \end{bmatrix}$$

Global F kuvvetlerinde F_i aşağıdaki hali alır.

$$F_j \Rightarrow \begin{cases} \alpha K_{ii} \bar{u}_i & i = j \\ F_j & i \neq j \end{cases} \quad (7.49)$$

Son olarak denklem (7.31) çözülüp modifiye katılık matrisi uygulayarak yer değiştirme elemanları bulunabilir. Penaltı metodunun avantajlarından biri, matris ve algoritma basittir. Bununla birlikte yaklaşık olarak esas sınır koşulları sağlar. Doğruluk derecesi penaltı katsayılarına bağlı olarak değişir. Ayrıca uygun bir penaltı katsayısının seçilmesi de zordur.

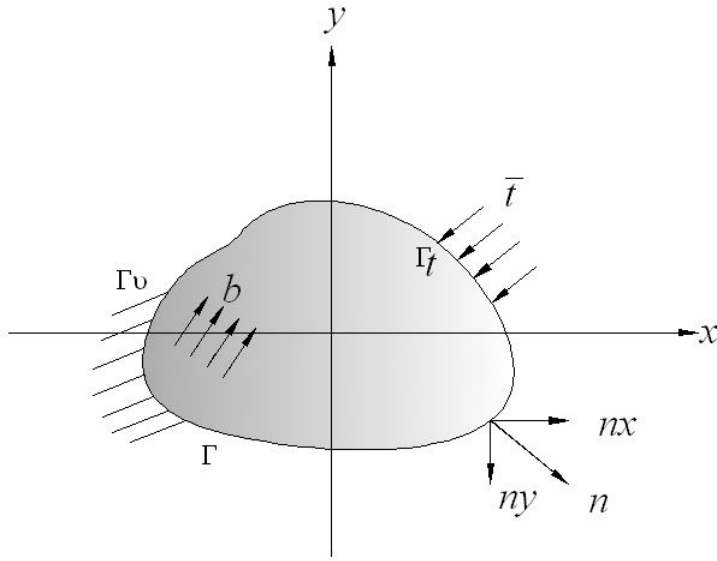
8 KATI CİSİM MEKANİĞİNİN TEMELLERİ

8.1 Düzlem Gerilme ve Düzlem Şekil Değiştirme Bileşenleri

Şekil 8.1’de görülen 2 boyutlu katılar için geometri bölgesi z ekseninden bağımsızdır. Bu tip problemlerde tüm harici yüklemeler ve destekler z koordinat ekseninden bağımsız olur. Sadece x - y koordinat ekseniniyle bağımlıdır. Kısacası geometri basitleştirilerek üç boyutludan, iki boyutluya indirgenir.

İki boyutlu cisimlerde gerilme şekil değişme iki tipik şekle sahipler. Birisi düzlem gerilme diğeri de düzlem uzamadır. Düzlem gerilme durumundaki cisimler z yönündeki kalınlığı x ve y yönündeki uzunluklarla karşılaştırıldığında oranın çok düşük görüldüğü cisimlerdir. x ve y yönündeki harici yüklemeler uygulanmadığı müddetçe, z yönündeki $(\sigma_{zz}, \sigma_{zy}, \sigma_{zx})$ gerilme değerleri 0’dır.

Düzlem uzama cisimleri, z yönündeki kalınlığı x ve y yönündeki uzunluklarla karşılaştırıldığında oranın yüksek görüldüğü durumlardır. Harici kuvvetler z eksenine uniform olarak uygulanır, ve z yönündeki hareket sınırlandırılır. z yönündeki 3 çeşit düzlem uzama değeri $(\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$ 0’dır.



Şekil 8.1 2 Boyutlu cisim Ω :Cisim bölgesi Γ :Cismin bölgesindeki global sınır, Γ_t :Kuvvet sınırı, Γ_u :Yer değiştirme sınırı, $n=\{n_x, n_y\}$ Sınır üzerindeki normal dış vektörlerdir.

Gerilme Bileşenleri;

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Düzlem şekil değişimine maruz iki boyutlu cisimlerdeki birim şekil değişim bileşenleri

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.2)$$

gibi olur.

Uzama yer değiştirme bileşen ilişkisi aşağıdaki denklemlle yazılabilir.

$$\varepsilon = Lu \quad (8.3)$$

İki boyutlu yer değiştirme vektöründe aşağıda gösterilmiştir.

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (8.4)$$

Türev operatör matrisi aşağıdaki ilişkiyle yazılabilir.

$$L = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{Bmatrix} \quad (8.5)$$

İki boyutlu cisimler için Hook kanunu matris formatında;

$$\sigma = D\varepsilon \quad (8.6)$$

olarak ifade edilir.

Düzlem gerilme durumu için D matrisi lineer izotropik malzemeler için;

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Düzlem gerilme}) \quad (8.7)$$

denklemlle yazılabilir

Gerilme-uzama halindeki cisimler için, malzeme sabiti olan D matrisi E ve ν 'yi, $\frac{E}{1-\nu^2}$ " ve $\nu/(1-\nu)$ ile değiştirilerek bulunur.

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/(2(1-\nu)) \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

8.2 Denge Denklemleri

İki boyutlu katılar için z yönündeki terimler ve türevler kaldırılarak diferansiyel denklemler bulunur.

$$L^T \sigma + b = \rho \ddot{u} + c \dot{u} \quad (8.9)$$

Burada B dış yük olup,

$$b = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (8.10)$$

şeklinde yazılabilir.

Statik problemler için denge denklemleri;

$$L^T \sigma + b = 0 \quad (8.11)$$

şeklinde ifade edilebilir

(4.9) denklemi tensör notasyonları şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$L^T \sigma + b = \rho \ddot{u} + c \dot{u} \quad (8.12)$$

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u} + c \dot{u}$$

Burada $i,j=(1,2)$ x ve y yönündeki yönlerini belirtir. ρ , kütle yoğunluğunu, c , sönümlleme katsayısı, ν , yer değiştirme vektörünü, $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$, ivmeyi, $\dot{u} = \frac{\partial u_i}{\partial t}$, hızı, σ_{ij} , gerilmeyi, b_i , cisim kuvvetini temsil etmektedir.

8.3 Sınır Şartları ve Başlangıç Koşulları

Sınır ve başlangıç koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\text{Çekme sınır koşulu} \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad (8.13)$$

$$\text{Yer değiştirme sınır koşulu} \quad u_i = \bar{u}_i \quad (8.14)$$

$$\text{Yer değiştirme başlangıç koşulu} \quad u(x, t_0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \quad (8.15)$$

$$\text{Başlangıç hız koşulu} \quad \dot{u}(x, t_0) = v_0(x) \quad x \in \Omega \quad (8.16)$$

Burada $\bar{u}_i$, yer değiştirme, $\bar{t}_i$, çekme, $\bar{u}_0$, başlangıç yerdeğiştirmeyi ifade etmektedir

8.4 Timoshenko Kiriş İçin Analitik Çözüm Denklemleri

Bölüm 10 da incelenecek ankastre kiriş için analitik denklemler bu kısımda verilmiştir. Analitik denklemler Timoshenko ve Goodier 1970 yılında yayınladıkları elastisite teorisi kitabından yararlanılarak verilmiştir (Timoshenko and Goodier, 1970)

- x yönündeki yerdeğiştirmeler

$$u(x, y) = \frac{-Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu)(y^2 - \frac{D^2}{4}) \right] \quad (8.17)$$

Burada, I , atalet momenti olup dikdörtgensel kesit içindir, ve aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$I = \frac{D^3}{12} \quad (8.18)$$

- y yönündeki yerdeğiştirme

$$v(x, y) = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2 (L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (8.19)$$

- Kirişin kesit bölümündeki normal gerilme

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{-P(L - x)y}{I} \quad (8.20)$$

- y yönündeki normal gerilme

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (8.21)$$

- Kirişin kesit bölümündeki kayma gerilmesi

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{P}{I} \left[\frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (8.22)$$

- Kirişin ($X = L$) noktasında parabolik zorlanma

$$t_{xy}|_{x=L} = \frac{P}{2I} \left[\frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (8.23)$$

- Esas sınır koşulları uygulanıp (8.17) ve (8.19) denklemlerin çözülmesiyle $x = 0$ noktasındaki x ve y yönündeki yerdeğiştirmeler

$$u|_{x=0} = \frac{-P(2+\nu)}{6EI} \left[y^2 - \frac{D^2}{4} \right] \quad (8.24)$$

$$v|_{x=0} = \frac{P\nu L}{2EI} y^2 \quad (8.25)$$

9 BİR BOYUTLU KİRİŞİN AĞSIZ ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜLMESİ

Bu kısımda eleman bağımsız Galerkin metodu, bir boyutlu lineer elastik yapıdaki bir boyutlu kirişe uygulanacaktır. Kirişin boyu $L = 1$ ve x yönünde $f(x) = x$ büyüklüğünde kuvvete maruz bırakılmıştır. Kiriş $X = 0$ noktasında ankastre olarak sabitlenmiştir. Sağ tarafı ise zorlanmaya maruz bırakılmıştır. Alan birimsel olarak kabul edilmiştir, ve elastisite modülü ise 300 Pa olarak seçilmiştir. Temel olarak x yönündeki yer değiştirmeler incelenmiştir.

Problem için denge denklemleri ve sınır koşulları aşağıda tanımlanmıştır.

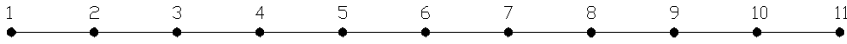
$$E u_{,xx} + x = 0 \quad 0 < x < 1 \text{ m} \quad (9.1)$$

$$u(0) = 0 \quad (9.2)$$

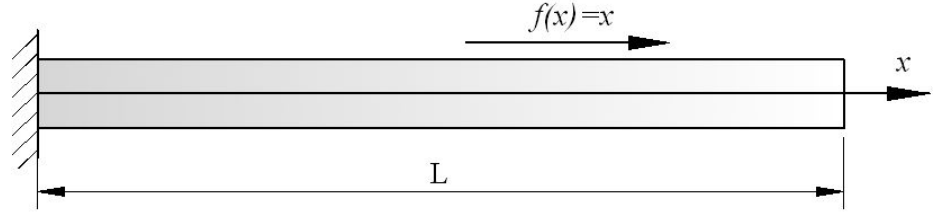
$$u_{,x}(1) = 0 \quad (9.3)$$

Çözüm için analitik denklem aşağıda verilmiştir.

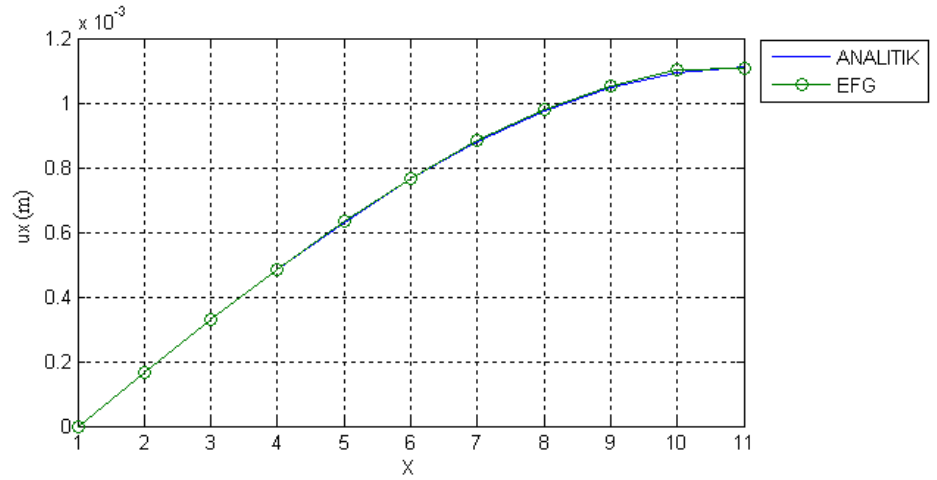
$$u(x) = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} x - \frac{x^3}{6} \right] \quad (9.4)$$



Şekil 9.1 1 boyutlu kirişte düğüm noktaları



Şekil 9.2 $f(x)=x$ kuvvetine maruz bırakılan 1 boyutlu ankastre çubuk



Şekil 9.3 1 boyutlu kirişe $f(x)=x$ yükü uygulanmasıyla elde edilen x yönündeki yer değiştirme değerleri

Şekil 9.2’de $X=0$ noktasında $f(x)=x$ yüküne maruz bırakılan bir boyutlu ankastre kiriş verilmiştir. Denklem 9.1’de bu kirişe ait x yönündeki yer değiştirmeler için analitik denklem verilmiştir. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde destek yarıçapı 2 olarak seçilip ve Şekil 9.1’de gösterildiği gibi 11 adet düğüm noktası kullanılmıştır. Şekil fonksiyonları olarak hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları kullanılmıştır.

Şekil 9.3’te ağırsız metodun 1 boyutlu kirişe uygulanmasıyla x yönü boyunca elde edilen x yönündeki yer değiştirme değerleri

verilmiştir. Ayrıca analitik denklemden elde edilen yerdeğiştirme değerleri de aynı grafikte karşılaştırma amacıyla verilmiştir. Grafik veya Tablo 9.1 incelendiğinde u_x değerleri açısından analitik ve ağsız yöntem sonuçları arasında hassas ve kabul edilebilir sonuçlar olduğu görülmüştür.

Tablo 9.1 EBG ve analitik çözüm sonuce elde edilen u_x değerleri

DÜĞÜM NO	X KOORDINATI	ANALİTİK	EFG
X	X	DEĞER	DEĞER
1	0	0	0,00E+00
2	0	0,00016611	0,000167
3	0	0,00032889	0,000329
4	0	0,000485	4,86E-04
5	0,4	0,00063111	0,000633
6	0,5	0,00076389	0,000766
7	0,6	0,00088	0,000882
8	0,7	0,00097611	0,000979
9	0,8	0,0010489	0,001052
10	0,9	0,001095	0,001101
11	1	0,0011111	0,001108

10 İKİ BOYUTLU TİMOSHENKO KİRİŞİNİN AĞSIZ YÖNTEMLER İLE ANALİZİ

Bu bölümde analitik, RNİM ve EBG ağsız metodların karşılaştırılmalı olarak iki boyutlu bükülebilir ankastre kirişine uygulanacaktır. Bu kiriş gerek mukavemette gerekse uygulamalarda sık olarak kullanıldığından dolayı bu kiriş incelenmiş hem nümerik, hem de analitik olarak detaylarıyla üzerinde durulacaktır. Kirişe ait analitik çözümler Bölüm 8.4’te verilmiştir.

Bu çalışmada bulunmak istenen hedefler aşağıdaki maddeler de sıralanmıştır.

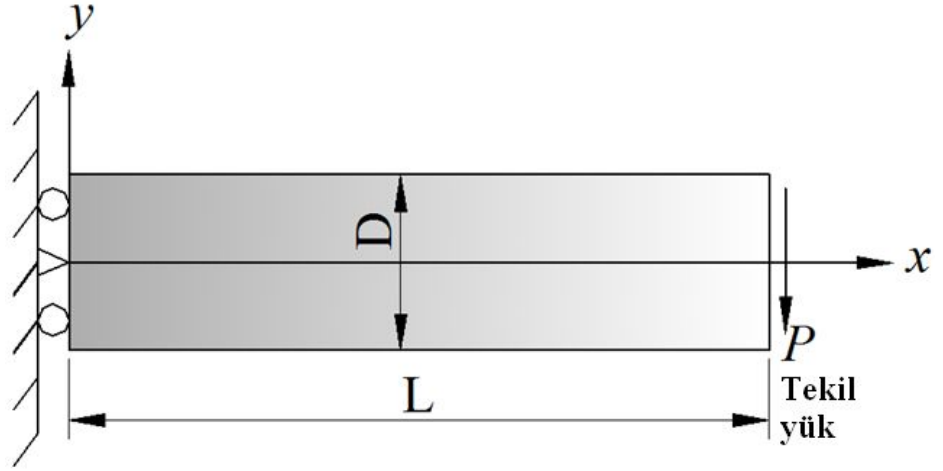
- Ağsız yöntemlerin standart zayıf formları incelenecektir.
- RNİM VE EBG’nin Matlab, Mfree2d ve Fortran programlarındaki kullanışlılığı incelenecektir.
- Destek bölge boyutunun etkileri incelenecektir.
- RNİM ve EBG, nümerik olarak yakınsaması incelenecektir.
- RNİM, EBG ve SEY verimlilik bakımından karşılaştırılacaktır.
- Yöntemlerde kullanılan parametrelerin sonuçlara tesirliği araştırılacaktır.
- Çözüm sonuç değerleri, analitik sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

- Düğüm sayısının sonuç üzerindeki tesiri incelenip hata analizleri incelenecektir.
- Seçilen ağsız yöntemlerle kirişin yük altındaki gerilme ve yerdeğiştirme davranışları incelenecektir.
- Ağırlık fonksiyonları için etkinlik yarıçapının önemi ve etkinlik yarıçapına bağlı hata analizleri incelenmiştir.

Problemin analiz edilmesi sırasında radyal nokta interpolasyonu için Meshfree 2D paket programı, eleman bağımsız Galerkin yöntemi ve sonlu eleman yöntem hesaplamaları için Matlab, analitik çözümlemeler için Matlab ve Excel programları kullanılmıştır. Programa ait çıktılar Matlab, ANSYS, Meshfree 2D ve Excel grafik araçlarından yararlanılmıştır.

Hareketli en küçük kareler ve radyal nokta interpolasyon formüle edilip yöntemlerle ilgili şekil fonksiyonları türetilmiştir.

Ağırlık fonksiyonları olarak Gauss ve spline fonksiyonları seçilmiştir.



Şekil 10.1 $X=L$ noktasında tekil yük'e maruz bırakılan Timoshenko kirişi

Şekil 10.1'de görüldüğü gibi $X = L$ noktasında tekil yük'e maruz bırakılan lineer elastik bir kiriş analizde kullanılmıştır. SI birim sistemi seçilmiştir..

Yük:	$P = 1000 \text{ N}$	($X = L$) noktasında
Young modülü	$E = 3 \times 10^7 \text{ Pa}$	
Poisson oranı	$\nu = 0.3$	
Kiriş boyu	$L = 48 \text{ m}$	
Kiriş yüksekliği	$D = 12 \text{ m}$	
Kiriş kalınlığı	1 m	

10.1 Analiz Algoritması

İki boyutlu Timoshenko kiriş problemi aşağıdaki basamaklara göre analiz edilmiştir.

1. Problem bölge geometrisinin tanımlanması.
2. Problem bölgesinin gösterimi için alan düğümlerinin oluşturulması.
3. Nümerik integrasyon için arkaplandaki hücrelerin tanımlanması.
4. Esas sınır koşullarının tanımlanması.
5. Gauss nokta sayısı, bölgenin etkinlik boyutu, RNİM ve EBG şekil parametrelerinin, penaltı katsayısı gibi parametrelerinin tanımlanması.

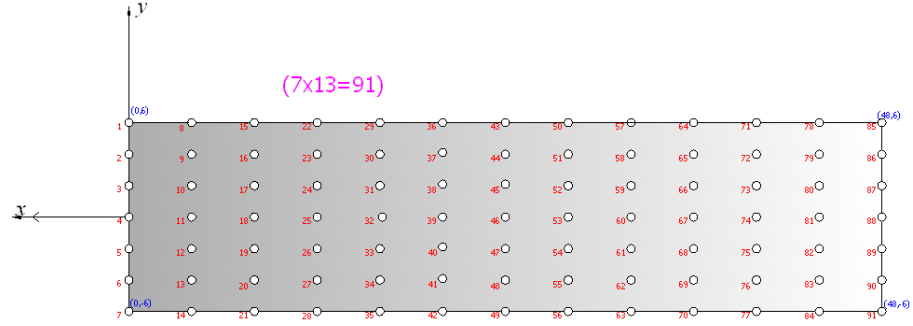
Timoshenko kirişi için problem bölgesinin geometrisini oluşturmak basittir. Karmaşık yapıdaki problemler için, ağsız yöntemler hazır paket programlarının kullanılması önerilir. Problem, eleman bağımsız Galerkin yönteminin matlab da programlanmasıyla $91(7 \times 13)$ adetinde düğüm sayısı kullanılmıştır. Nümerik integrasyon için toplam $40(10 \times 4)$ düzenli diktörtgensel arkaplan hücreleri kullanılmıştır. Arkaplan hücreleri alan düğümlerinden bağımsızdır. Şekil 10.2’de kirişin ANSYS’te modellenmesi, elemanlar ve sınır koşullarını göstermektedir. Şekil 10.5’te EBG metot analizinde kullanılan hücreler, Gauss kuadratik noktaları ve sınır analiz hatları verilmiştir.

Program veri dosyası üç önemli temel bölüme ayrılır.

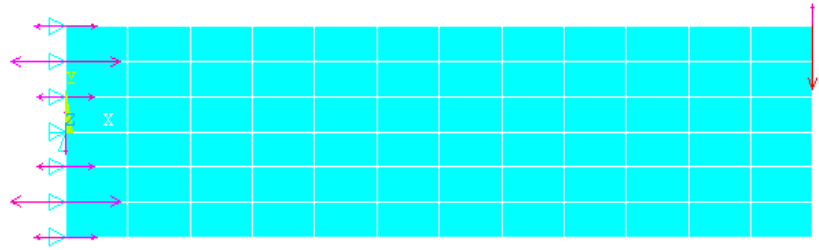
- Problem tanımlama parametreleri.
- Alan düğümleri ve arkaplan hücreleriyle bağlantılı veriler.
- Sınır koşul tanımlamaları.

Bu çalışmada çözülen problem için tam sınır şartları olarak, denklem (8.24) ve (8.25) kullanılarak sol kısım esas sınır koşullarının uygulanmıştır. Sağ kısım için denklem (8.23) kullanılarak doğal sınır

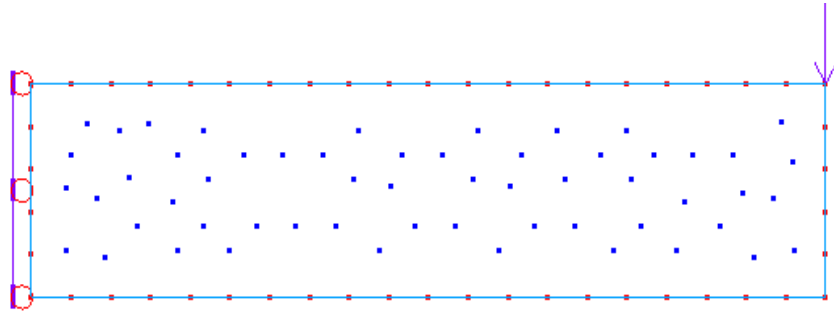
şartları uygulanmıştır. Problemde bir yerde toplanan nodal kuvvet bulunmamaktadır.



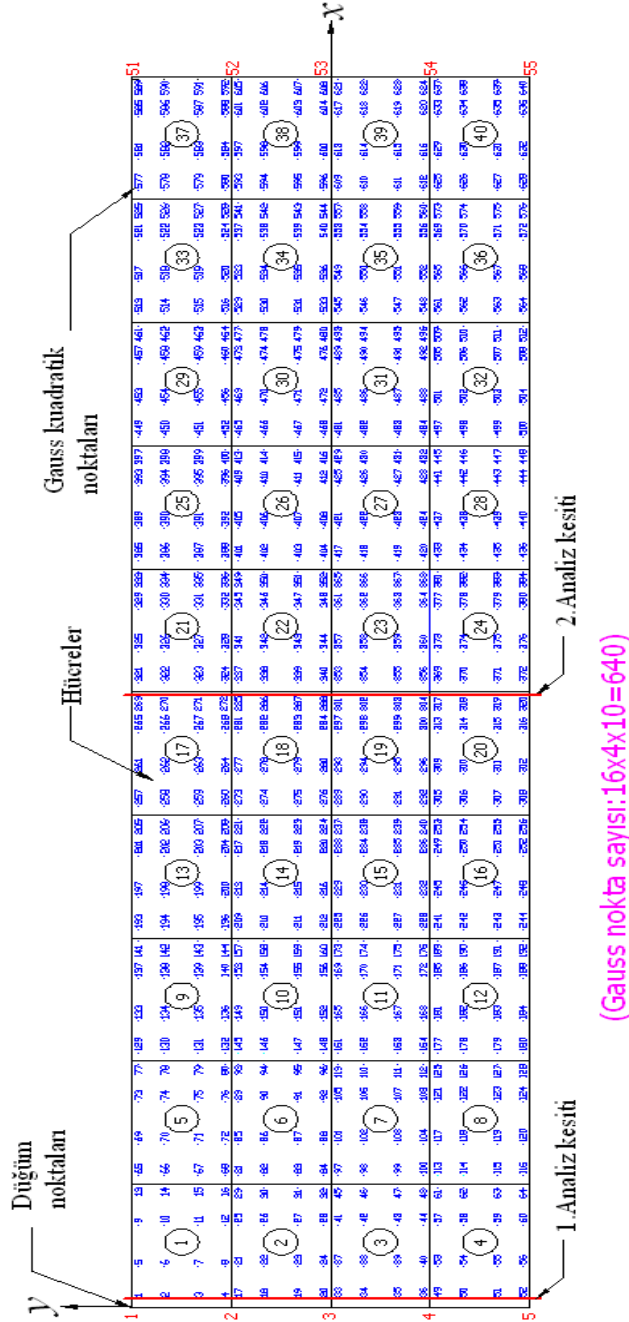
Şekil 10.2 EBG yönteminde modellenilen toplam 7x13 adetinde düzenli olarak dağıtılmış düğümler



Şekil 10.3 Sonlu elemanlar metodunda ANSYS ile modellenmiş eleman ve sınır koşulları



Şekil 10.4 Ağsız metotta Meshfree 2D ile modellenmiş düğüm noktaları ve sınır koşulları



Şekil 10.5 EBG metot analizinde kullanılan hücreler, Gauss kuadratik noktaları ve sınır analiz hatları

10.2 Analiz Sonuçları

Analizde radyal nokta interpolasyon yöntemi kullanılarak $y = 0$ noktasında 202 adetinde düğüm sayısı kullanılıp yer değiştirme değerleri Şekil 10.6'de verilmiştir. (8.17) ve (8.19) denklemlerinin uygulanmasıyla analitik çözümler de aynı grafikte verilmiştir. Radyal nokta interpolasyon yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar ile analitik yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar arasında uyuma olduğu grafikten açıkça anlaşılmaktadır.

σ_{xx} 'e ait gerilmeler ait kayma gerilmeleri sonuçları Şekil 10.14'te gösterilmiştir. Analitik sonuçlarla karşılaştırıldığında yöntemin çok iyi ve hassas sonuçlar verdiği grafikten açıkça anlaşıyor.

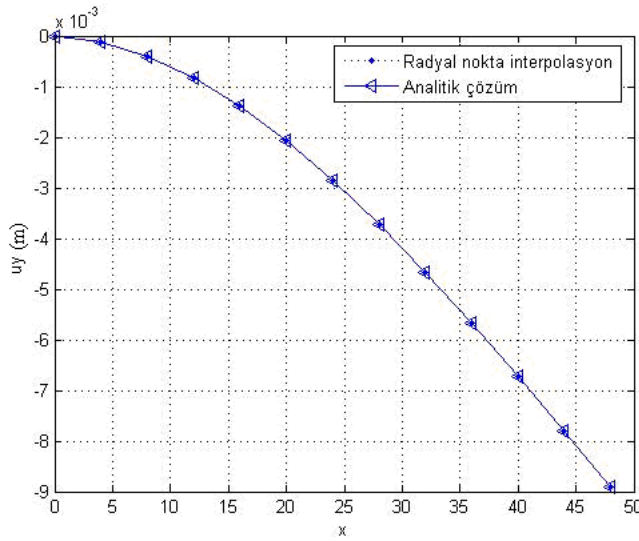
Şekil 10.9 ve Şekil 10.10 eleman bağımsız Galerkin çözümünün iki boyutlu Timoshenko kirişine uygulanması sonucu elde edilen grafikler verilmiştir. Kirişin y yönündeki çökmeler Şekil 10.9'da verilmiştir. Analitik çözümlemelerde (8.17) ve (8.19) denklemleri kullanılmıştır. Eleman bağımsız Galerkin ile analitik çözümler arasında uyuma olduğu tespit edilmiştir. σ_{xy} gerilme sonuçları Şekil 10.7'de verilmiştir. Analitik sonuçlarla karşılaştırıldığında aralarında hassas örtüşme vardır.

Şekil 10.14 ve Şekil 10.16, radyal nokta interpolasyon metodu, eleman bağımsız Galerkin metodu, analitik çözüm ve sonlu elemanlar metodu, kendi aralarında karşılaştırmak amacıyla verilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminde 72 adet eleman kullanılmıştır. Sonlu elemanlar yönteminin doğruluk olarak az fakat analiz açısından kabul edilebilir

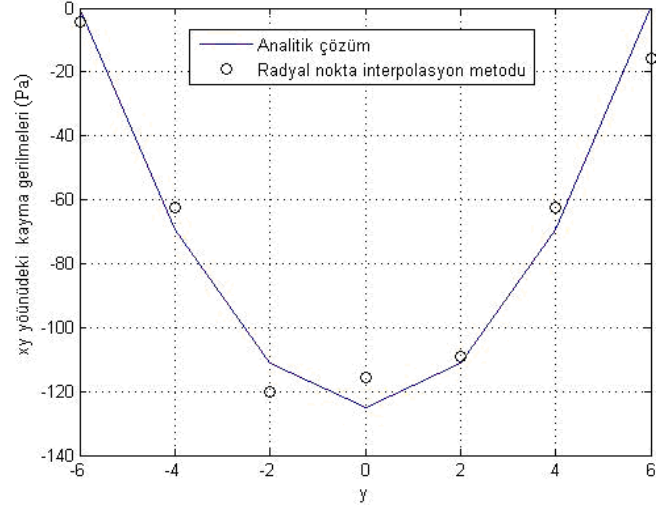
sonuçlar verdiği grafikten görülmektedir. İncelenen problemde açıkça görüldüğü gibi σ_{xx} gerilmeri açısından, ağsız yöntemlerin sonlu elemanlar yönteminden daha avantajlı olduğu anlaşılmaktadır.

Sonlu elemanlar yönteminde alan düğümlerindeki gerilmeler çevrelenmiş elemanlardan basitçe ortalaması olarak eleman bağımsız Galerkin yönteminde ise gerilmeler Gauss kuadratik noktalarda bulunur.

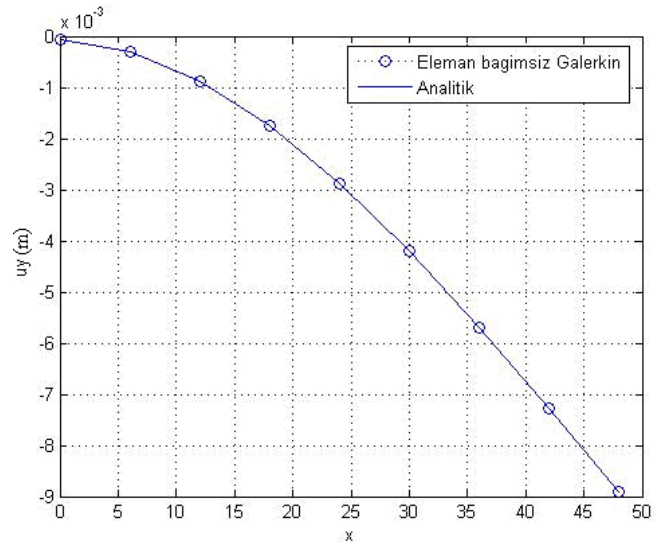
Ağsız yöntemlerin dezavantajlarından birisi analizde seçilen parametre değerlerinin sonucu önemli ölçekte etkilediği görülmüştür. Eleman bağımsız Galerkin ve radyal nokta interpolasyon yönteminde sonuçları önemli ölçekte etkileyen parametreler tezde bir sonraki kısımda incelenmiştir.



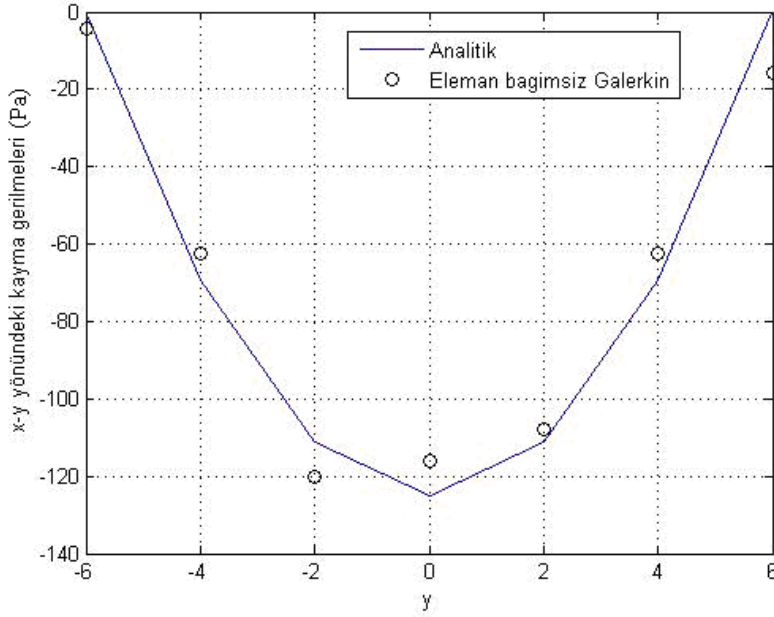
Şekil 10.6 206 adet düğüm sayısı kullanılarak radyal nokta interpolasyon metodunun uygulanmasıyla oluşturulan $y=0$ ekseninde, x eksenini boyunca analitik ve RNİM, yer değiştirme sonuçları



Şekil 10.7 206 adet düğüm sayısı kullanılarak $X=L/2$ noktalarında, y eksenı boyunca elde edilen radyal nokta interpolasyon ve analitik metodlara ait σ_{xy} grafiğı



Şekil 10.8 Analitik ve EBG yöntemlerinin uygulanmasıyla oluşturulan $y=0$ ekseninde x koordinatı boyunca elde edilen u_y yer değıştirme sonuçları



Şekil 10.9 $X=L/2$ noktalarında y eksenini boyunca eleman bağımsız Galerkin ve analitik çözümün uygulanmasıyla elde edilen σ_{xy} 'e ait çözüm sonuçları

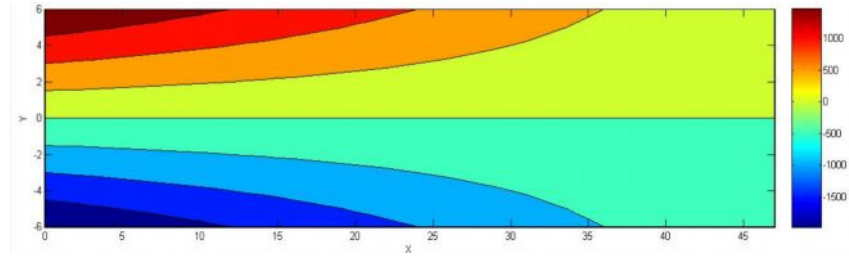
10.2.1 σ_{xx} Sonuçları

Şekil 10.10, 607 nokta kullanılarak analitik mukavemet denklemlerinin Timoshenko kirişine uygulanmasıyla elde edilen σ_{xx} gerilme dağılımları verilmiştir. Gerilme dağılımında kirişin alt ve üst bilgelerinde simetrik olduğu görülmüştür.

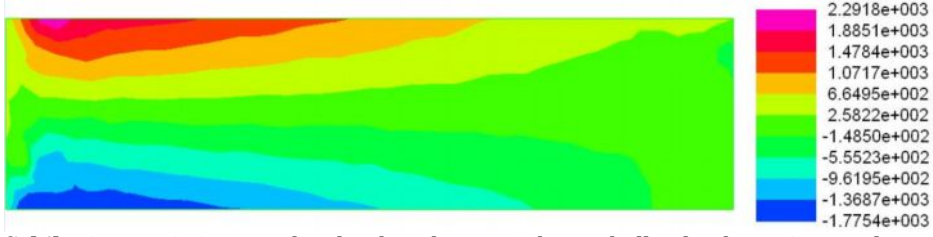
Şekil 10.11 640 Gauss kuadratik noktası, 40 hücre ve 91 adetinde düğüm noktası kullanılarak eleman bağımsız Galerkin yönteminin uygulanmasıyla elde edilen σ_{xx} gerilme dağılımı verilmiştir.

Şekil 10.12, 206 düğüm noktası radyal nokta interpolasyon metodunun uygulanmasıyla elde edilen gerilme dağılımları verilmiştir. Aynı şekilde Şekil 10.13'te 72 adetinde eleman sayısı, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen σ_{xx} gerilme dağılımı verilmiştir. ANSYS paket programında eleman tipi olarak solid 8 node 82 seçilmiştir. Ağ yapısı olarak kuadratik mesh seçildi.

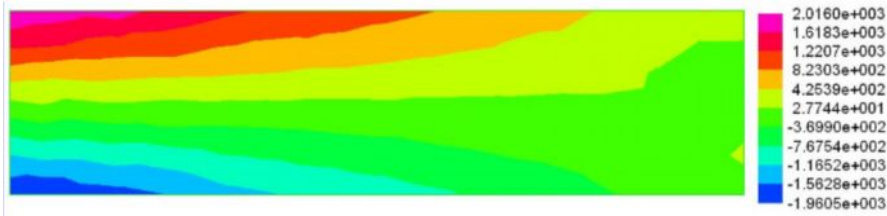
Şekil 10.14'te Timoshenko kirişinde belirlenen birinci kuadratik hat noktalarının analiz hattında y eksenini boyunca elde edilen analitik, EBG, RNİM ve SEY ' e ait gerilme grafiği verilmiştir. Şekil 10.16'da EBG, RNİM ve SEY analitik metodla karşılaştırılarak hata miktarları verilmiştir. Metodlar arasında hata oranının en az EBG'de görülürken, hata miktarı en fazla sonlu elemanlar yönteminde olduğu tespit edilmiştir. Tablo 10.1'de de grafiklerde kullanılan metodların değerleri verilmiştir. Diğer analiz hatlarında elde edilen sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir.



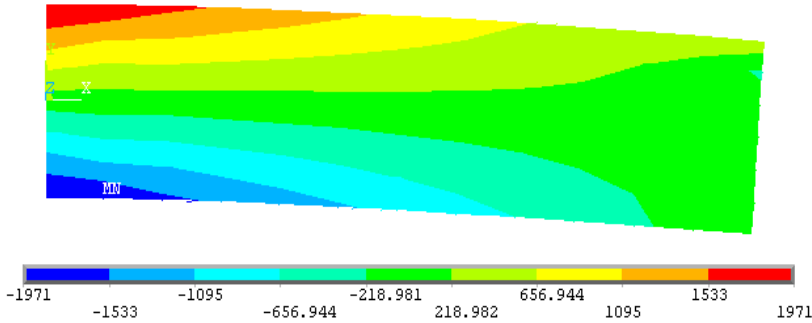
Şekil 10.10 607 nokta kullanılarak analitik çözümün uygulanmasıyla elde edilen σ_{xx} 'e ait gerilme dağılımı



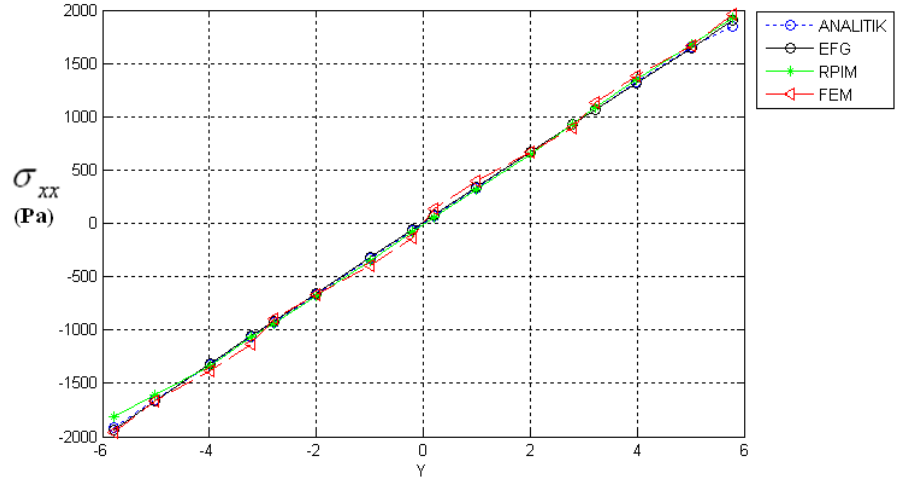
Şekil 10.11 640 gauss kuadratik noktası, 40 hücre kullanılarak EBG metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xx} 'e ait gerilme dağılımı



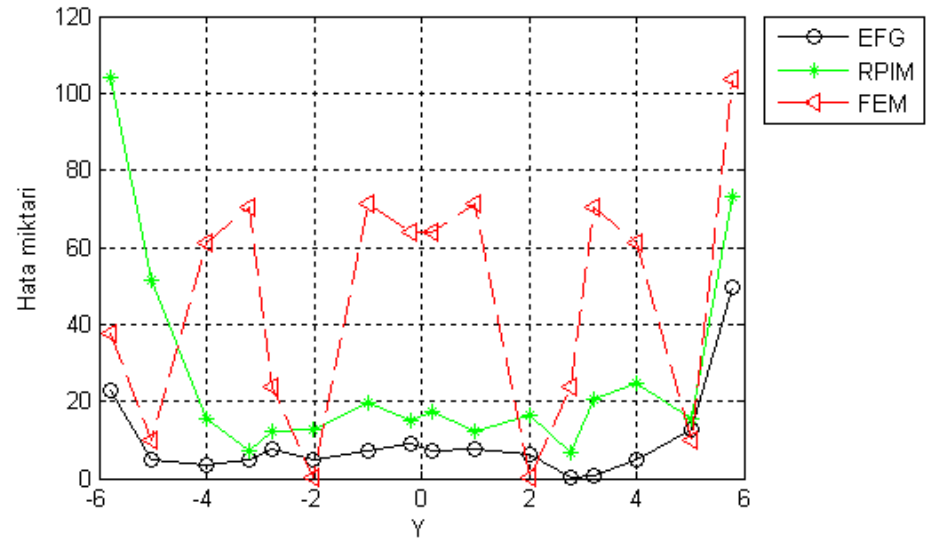
Şekil 10.12 206 düğüm noktası kullanılarak RNİM metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xx} 'e ait gerilme dağılımı



Şekil 10.13 72 adetinde eleman sayısı, SEY metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xx} 'e ait gerilme dağılımı



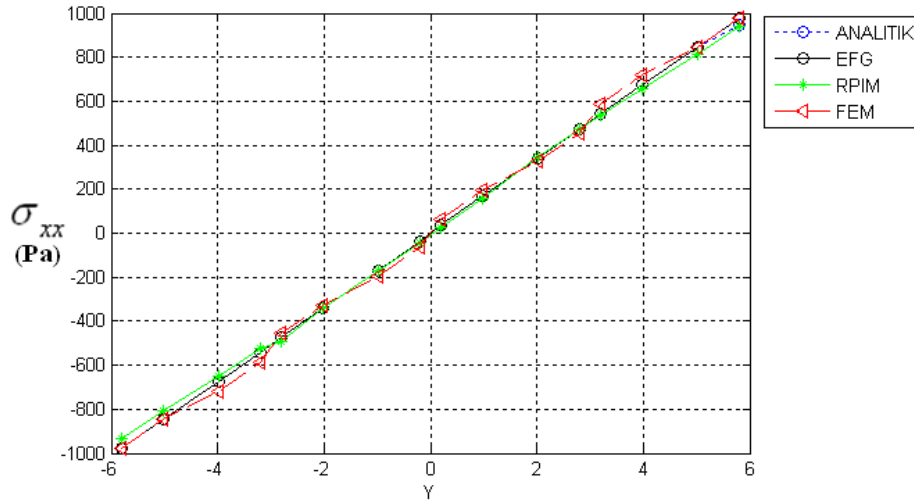
Şekil 10.14 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan birinci analiz kesiti $x=0.3327$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen σ_{xx} gerilmeleri



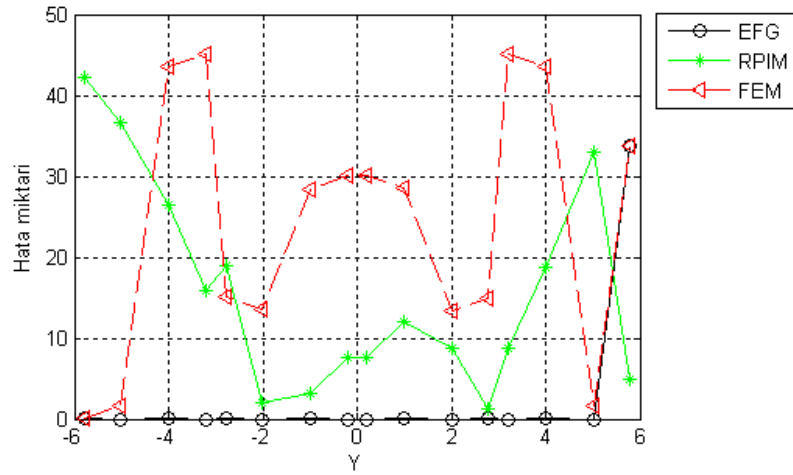
Şekil 10.15 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan birinci analiz kesiti $x=0.3327$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen σ_{xx} gerilmelerine ait hata miktarları

Tablo 10.1 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan birinci analiz kesiti $x=0.3327$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen σ_{xx} gerilme ve hata değerleri

KOORDİNAT		ANALİTİK	RPİM		EFG		FEM	
X	Y	DEĞER	DEĞER	HATA MİKTARI	DEĞER	HATA MİKTARI	DEĞER	HATA MİKTARI
0,33327	-5,792	-1917,2	-1813,3	103,9	-1940,1	22,9	-1954,8	37,6
0,33327	-5,01	-1658,4	-1607,1	51,3	-1663,4	5	-1668,4	10
0,33327	-3,99	-1320,8	-1336,2	15,4	-1317,3	3,5	-1382	61,2
0,33327	-3,208	-1062	-1069,3	7,3	-1057,1	4,9	-1132,4	70,4
0,33327	-2,792	-924,12	-936,44	12,32	-916,5	7,62	-900,24	23,88
0,33327	-2,01	-665,36	-678,26	12,9	-660,39	4,97	-665,02	0,34
0,33327	-0,99	-327,81	-347,5	19,69	-320,7	7,11	-399,01	71,2
0,33327	-0,208	-68,952	-83,931	14,979	-59,817	9,135	-133	64,048
0,33327	0,2083	68,952	51,721	17,231	75,987	7,035	133	64,048
0,33327	0,99	327,72	315,29	12,43	335,51	7,79	399,01	71,29
0,33327	2,01	665,36	648,91	16,45	671,7	6,34	665,02	0,34
0,33327	2,7917	924,12	931,02	6,9	924,4	0,28	900,24	23,88
0,33327	3,2083	1062	1082,6	20,6	1062,5	0,5	1132,4	70,4
0,33327	3,99	1320,8	1345,3	24,5	1316,1	4,7	1382	61,2
0,33327	5,01	1658,4	1673,9	15,5	1645,5	12,9	1668,4	10
0,33327	5,7917	1851	1924,2	73,2	1900,4	49,4	1954,8	103,8



Şekil 10.16 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen σ_{xx} gerilmeleri

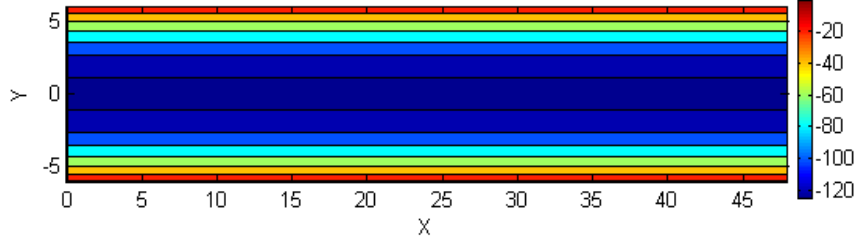


Şekil 10.17 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen σ_{xx} gerilmelerine ait hata grafiği

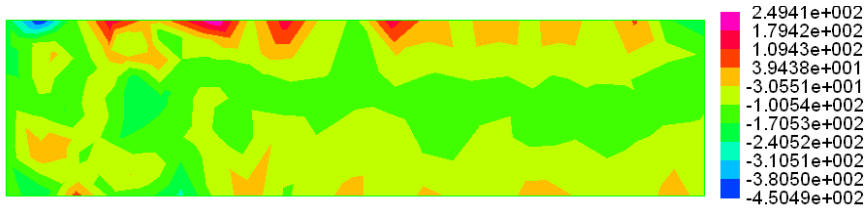
Tablo 10.2 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen σ_{xx} gerilme ve hata değerleri

KOORDİNAT		ANALİTİK	RPİM		EBG		FEM	
X	Y	DEĞER	DEĞER	HATA MİKTARI	DEĞER	HATA MİKTARI	DEĞER	HATA MİKTARI
23,667	-5,792	-978,68	-936,51	42,17	-978,69	0,01	-978,8	0,12
23,667	-5,01	-846,59	-809,91	36,68	-846,59	0	-848,31	1,72
23,667	-3,99	-674,23	-647,77	26,46	-674,24	0,01	-717,82	43,59
23,667	-3,208	-542,14	-526,25	15,89	-542,14	0	-587,27	45,13
23,667	-2,792	-471,74	-490,6	18,86	-471,75	0,01	-456,7	15,04
23,667	-2,01	-339,65	-337,63	2,02	-339,65	0	-326,13	13,52
23,667	-0,99	-167,34	-170,42	3,08	-167,3	0,04	-195,67	28,33
23,667	-0,208	-35,198	-42,849	7,651	-35,198	0	-65,206	30,008
23,667	0,208	35,198	27,628	7,57	35,198	0	65,285	30,087
23,667	0,99	167,29	155,25	12,04	167,3	0,01	195,81	28,52
23,667	2,01	339,65	348,35	8,7	339,65	0	326,33	13,32
23,667	2,792	471,74	470,5	1,24	471,75	0,01	456,79	14,95
23,667	3,208	542,14	533,37	8,77	542,14	0	587,25	45,11
23,667	3,99	674,23	655,53	18,7	674,24	0,01	717,7	43,47
23,667	5,01	846,59	813,6	32,99	846,59	0	848,13	1,54
23,667	5,792	944,88	940,05	4,83	978,69	33,81	978,56	33,68

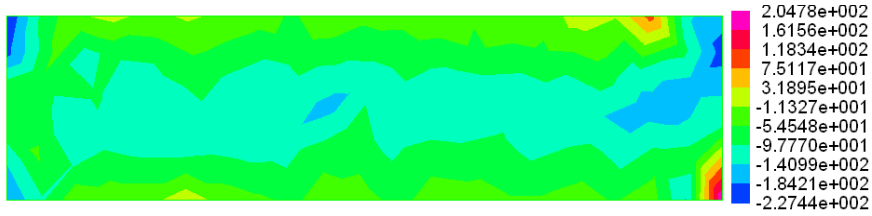
10.2.2 σ_{xy} Sonuçları



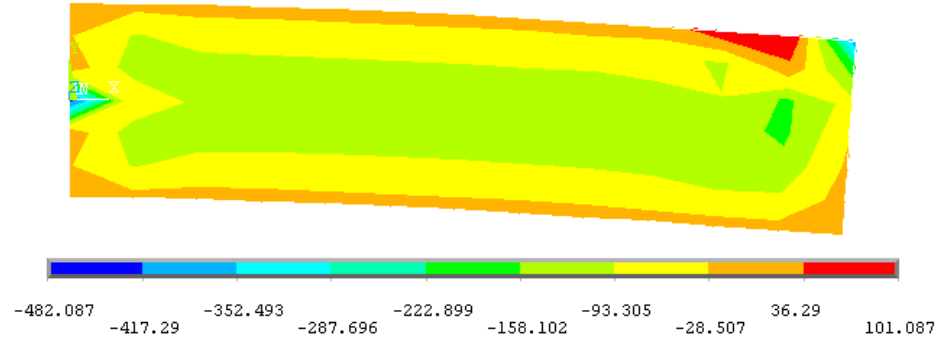
Şekil 10.18 607 nokta kullanılarak analitik çözümün uygulanmasıyla elde edilen σ_{xy} 'e ait gerilme dağılımı



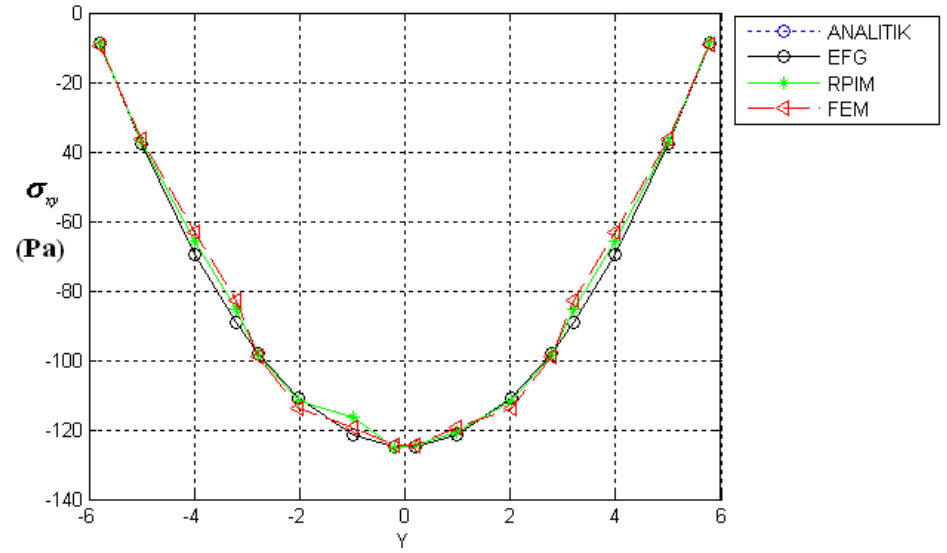
Şekil 10.19 640 Gauss kuadratik noktası, 40 hücre kullanılarak EBG metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xy} 'e ait gerilme dağılımı



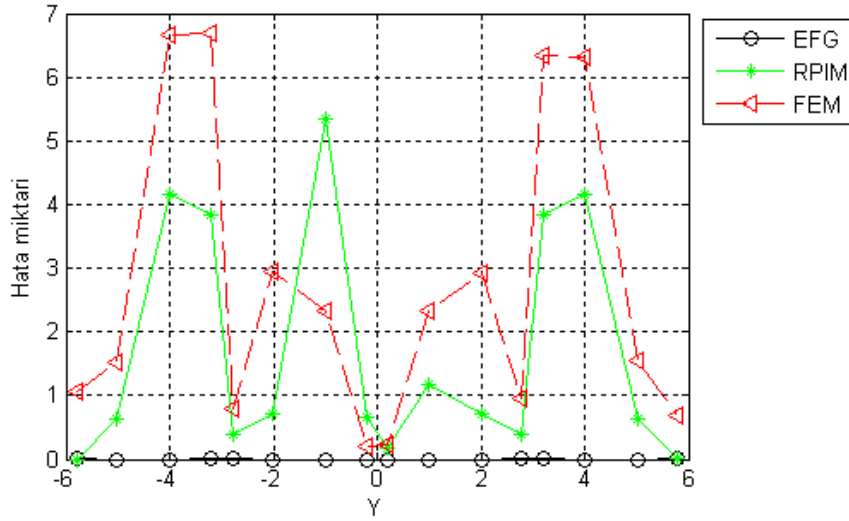
Şekil 10.20 206 düğüm noktası kullanılarak RNİM metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xy} 'e ait gerilme dağılımı



Şekil 10.21 72 adetinde eleman sayısı, 91 adetinde düğüm noktası kullanılarak SEY metodunun uygulanmasıyla elde edilen σ_{xy} 'e ait gerilme dağılımı



Şekil 10.22 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenini boyunca elde edilen σ_{xy} gerilmeleri

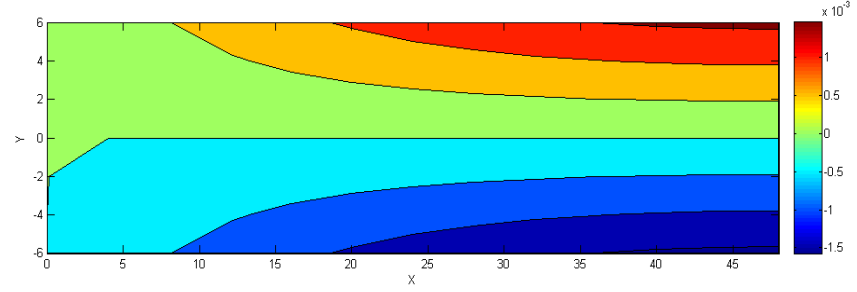


Şekil 10.23 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen σ_{xy} 'ye ait hata miktarları

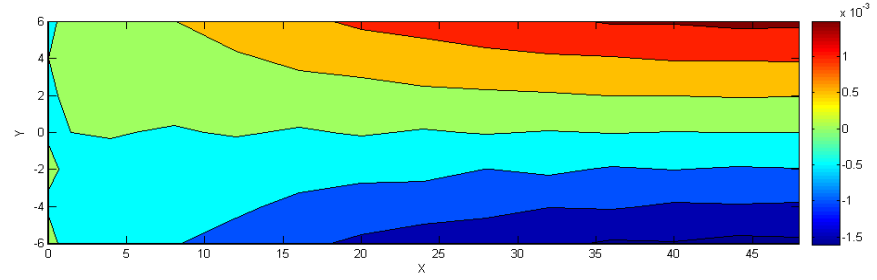
Tablo 10.3 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, oluşturulan ikinci analiz kesiti $x=23.667$, $y=-5.7917$ ile $y=5.7917$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen σ_{xy} gerilme ve hata değerleri

X,Y KOORDİNAT		ANALİTİK	RPİM		EBG		FEM	
X	Y	DEĞER	DEĞER	HATA MİKTARI	DEĞER	HATA MİKTARI	DEĞER	HATA MİKTARI
23,667	-5,7917	-8,52	-8,52	0	-8,5293	0,01	-9,5917	1,0717
23,667	-5,01	-37,85	-37,21	0,64	-37,848	0,00	-36,3200	1,53
23,667	-3,99	-69,72	-65,56	4,16	-69,721	0,00	-63,0470	6,673
23,667	-3,2083	-89,27	-85,44	3,83	-89,26	0,01	-82,5850	6,685
23,667	-2,7917	-97,93	-98,32	0,39	-97,939	0,01	-98,7320	0,802
23,667	-2,01	-110,97	-111,68	0,71	-110,97	0,00	-113,9100	2,94
23,667	-0,99	-121,6	-116,25	5,35	-121,6	0,00	-119,2700	2,33
23,667	-0,2083	-124,85	-125,51	0,66	-124,85	0,00	-124,6400	0,21
23,667	0,2083	-124,85	-124,67	0,18	-124,85	0,00	-124,6300	0,22
23,667	0,99003	-121,6	-120,43	1,17	-121,6	0,00	-119,2600	2,34
23,667	2,01	-110,97	-111,68	0,71	-110,97	0,00	-113,8900	2,92
23,667	2,7917	-97,93	-98,32	0,39	-97,939	0,01	-98,8830	0,953
23,667	3,2083	-89,27	-85,44	3,83	-89,26	0,01	-82,9230	6,347
23,667	3,99	-69,72	-65,56	4,16	-69,721	0,00	-63,3960	6,324
23,667	5,01	-37,85	-37,21	0,64	-37,848	0,00	-36,3050	1,545
23,667	5,7917	-8,52	-8,51	0,01	-8,5283	0,01	-9,2145	0,6945

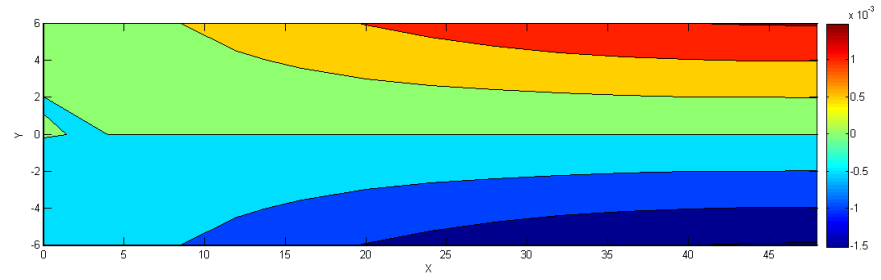
10.2.3 u_x Sonuçları



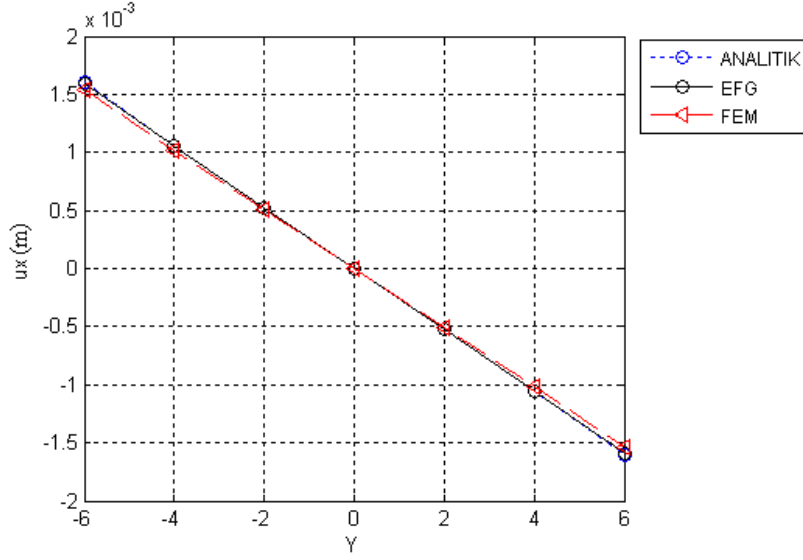
Şekil 10.24 91 nokta kullanılarak analitik çözümün uygulanmasıyla elde edilen u_x 'e ait yer değiştirme dağılımı



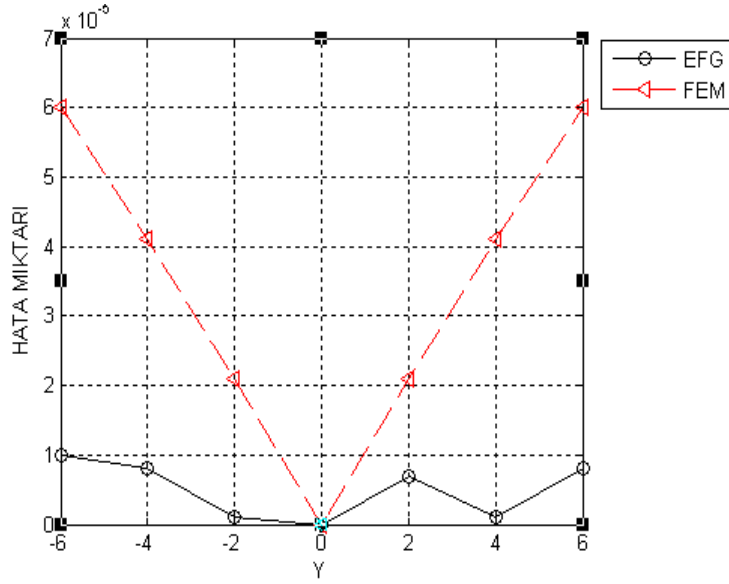
Şekil 10.25 91 düğüm noktası kullanılarak EBG metodunun uygulanmasıyla elde edilen u_x 'e ait yer değiştirme dağılımı



Şekil 10.26 91 adetinde düğüm sayısı, 72 eleman sayısı kullanılarak SEY metodunun uygulanmasıyla elde edilen u_x 'e ait yer değiştirme dağılımı



Şekil 10.27 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen u_x 'e yer değıştirme grafiği

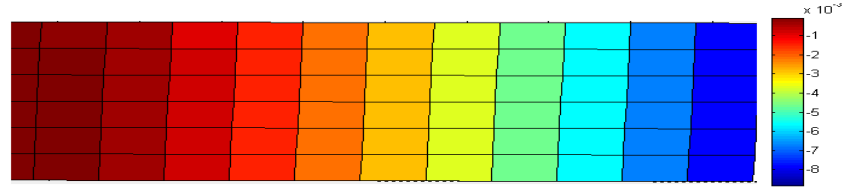


Şekil 10.28 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen u_x 'e ait hata miktarı grafiği

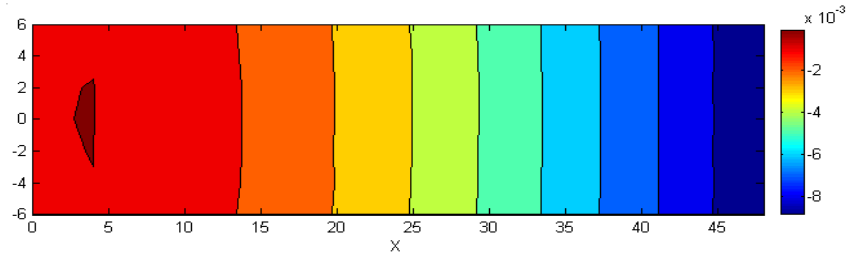
Tablo 10.4 Analitik, EBG, RNİM ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen u_x yer değıştirme ve hata değeri

X,Y KOORDİNAT		ANALİTİK	EBG		FEM	
X	Y	DEĞER	DEĞER	HATA MİKTARI	DEĞER	HATA MİKTARI
48	-6	0,0016	0,00159	0,000010	0,0015404	0,000060
48	-4	0,00106	0,001052	0,000008	0,0010185	0,000041
48	-2	0,000528	0,000527	0,000001	0,0005068	0,000021
48	0	0	0,00E+00	0,000000	-8,49E-13	0,000000
48	2	-0,00053	-0,00052	0,000007	-0,000507	0,000021
48	4	-0,00106	-0,00106	0,000001	-0,001019	0,000041
48	6	-0,0016	-0,00159	0,000008	-0,00154	0,000060

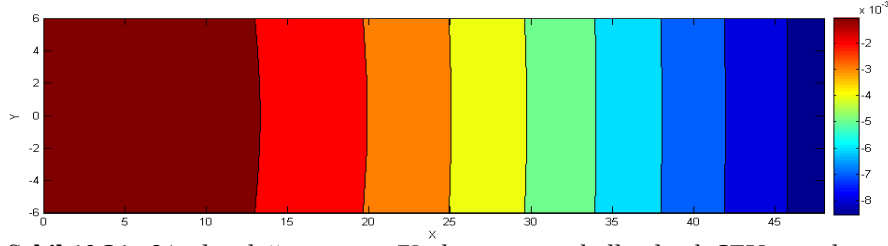
10.2.4 U_y sonuçları



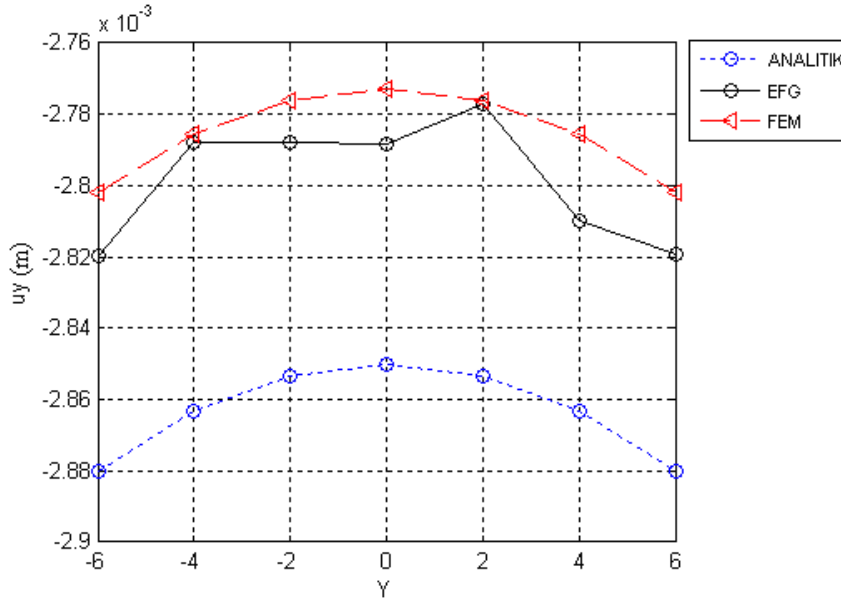
Şekil 10.29 91 nokta kullanılarak analitik metodunun uygulanmasıyla elde edilen u_y 'e ait yer değıştirme dağılımı



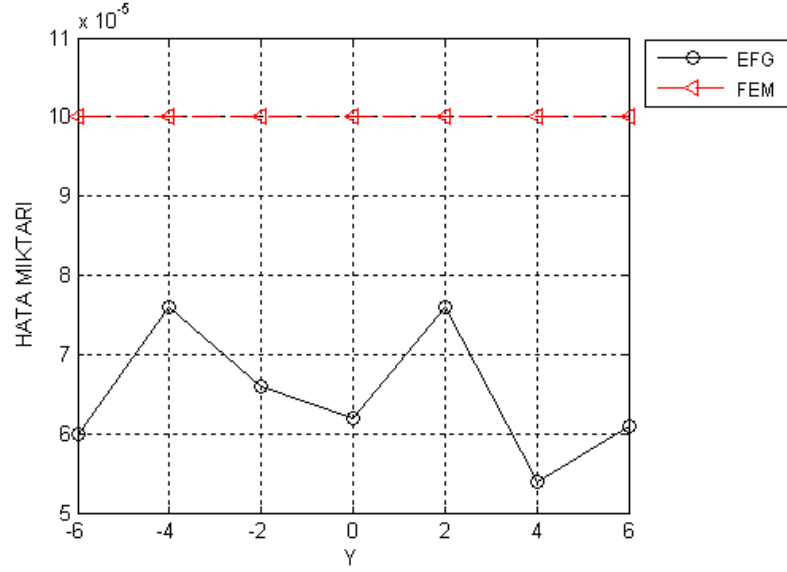
Şekil 10.30 91 düğüm kullanılarak EBG metodunun uygulanmasıyla elde edilen u_y 'e ait yer değıştirme dağılımı



Şekil 10.31 91 adet düğüm sayısı, 72 eleman sayısı kullanılarak SEY metodunun uygulanmasıyla elde edilen u_y 'e ait yer değiştirme dağılımı



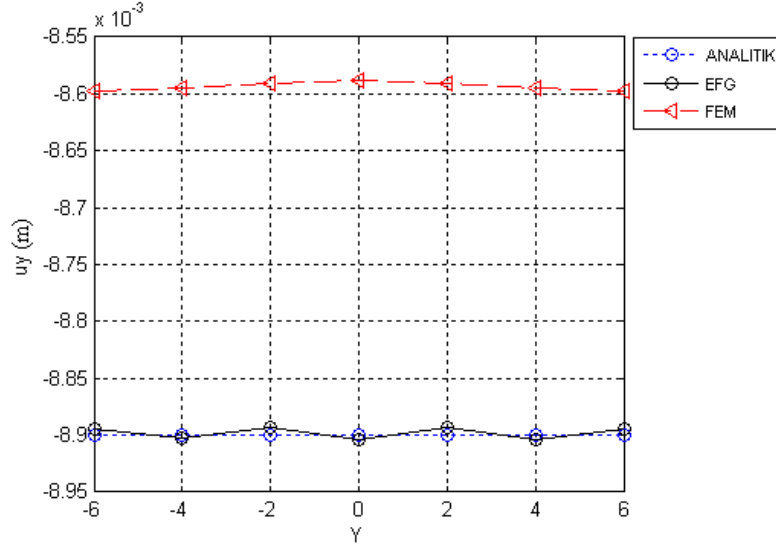
Şekil 10.32 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=24$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen u_y yer değiştirme grafiğı



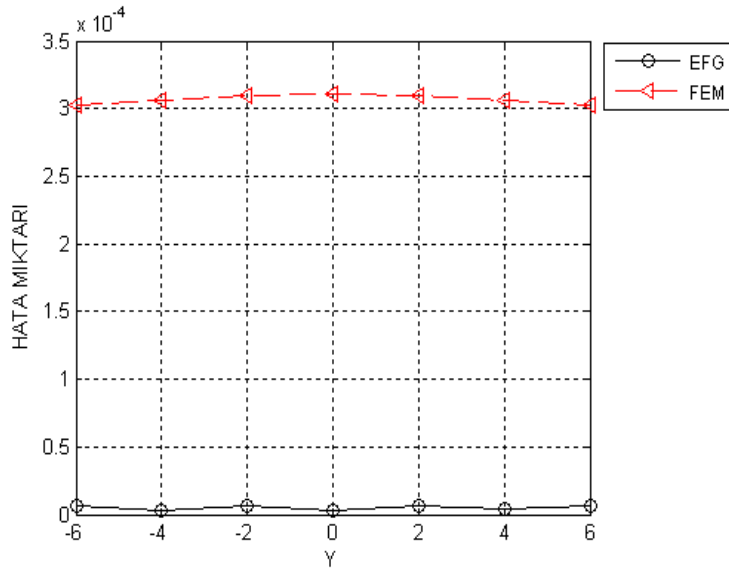
Şekil 10.33 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen u_y 'ye ait hata miktarı grafiğı

Tablo 10.5 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=24$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen u_y yer değıştirme ve hata değeri

X,Y KOORDINAT		ANALITİK		EBG		FEM	
X	Y	DEGER	DEGER	HATA MIKTARI	DEGER	HATA MIKTARI	
24	-6	-0,00288	-0,00282	0,000060	-0,002802	0,0001	
24	-4	-0,00286	-0,00279	0,000076	-0,002786	0,0001	
24	-2	-0,00285	-0,00279	0,000066	-0,002776	0,0001	
24	0	-0,00285	-0,00279	0,000062	-0,002773	0,0001	
24	2	-0,00285	-0,00278	0,000076	-0,002776	0,0001	
24	4	-0,00286	-0,00281	0,000054	-0,002786	0,0001	
24	6	-0,00288	-0,00282	0,000061	-0,002802	0,0001	



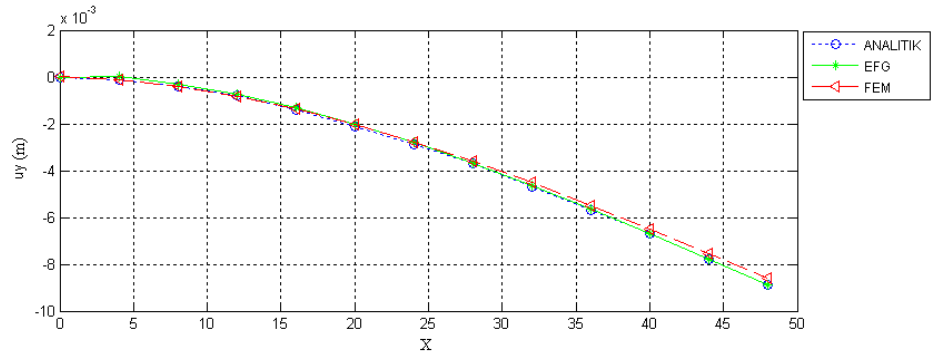
Şekil 10.34 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen u_y yer değıştirme grafiğı



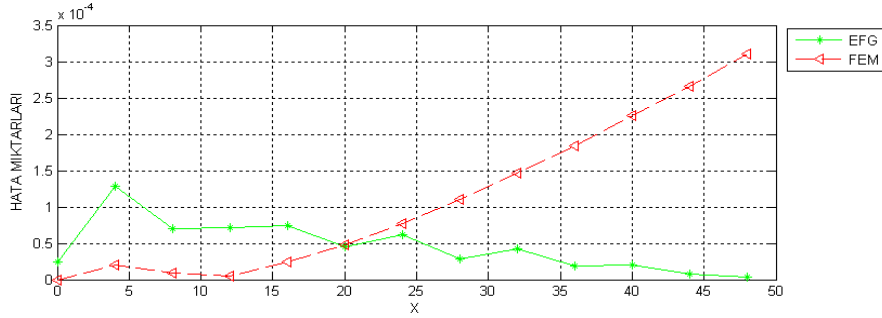
Şekil 10.35 EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen u_y 'ye ait hata miktarı grafiğı

Tablo 10.6 Analitik, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=48$ $y=-6$ ile $y=6$ koordinat değerlerinde y eksenı boyunca elde edilen u_y yer değıştirme ve hata miktarı

X,Y KOORDİNAT		ANALİTİK	EFG		FEM	
X	Y	DEGER	DEGER	HATA MIKTARI	DEGER	HATA MIKTARI
48	-6	-0,0089	-0,00889	0,000006	-0,008597	0,000303
48	-4	-0,0089	-0,0089	0,000003	-0,008594	0,000306
48	-2	-0,0089	-0,00889	0,000006	-0,00859	0,000310
48	0	-0,0089	-0,0089	0,000003	-0,008589	0,000311
48	2	-0,0089	-0,00889	0,000007	-0,00859	0,000310
48	4	-0,0089	-0,0089	0,000004	-0,008594	0,000306
48	6	-0,0089	-0,00889	0,000006	-0,008597	0,000303



Şekil 10.36 Analitik çözüm, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=L$, $y=0$ koordinat değerlerinde x eksenı boyunca elde edilen u_y çökme grafiğı



Şekil 10.37 Analitik çözüm, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=L$, $y=0$ koordinat değerlerinde x eksenı boyunca elde edilen u_y 'ye ait hata miktarları

Tablo 10.7 Analitik çözüm, EBG ve SEY metodlarının uygulanmasıyla, $x=L$, $y=0$ koordinat değerlerinde x eksenı boyunca elde edilen u_y 'ye ait değer ve hata miktarı

X,Y KOORDİNAT		ANALİTİK	EFG		FEM	
X	Y	DEĞER	DEĞER	HATA MİKTARI	DEĞER	HATA MİKTARI
0	0	0,0000	-2,38E-05	0,000024	2,55E-12	0,000000
4	0	-0,0001	1,13E-05	0,000128	-0,000137	0,000020
8	0	-0,0004	-0,00033	0,000070	-0,000405	0,000009
12	0	-0,0008	-0,00075	0,000071	-0,00082	0,000005
16	0	-0,0014	-0,00131	0,000074	-0,001363	0,000024
20	0	-0,0021	-0,00202	0,000045	-0,002018	0,000048
24	0	-0,0029	-0,00279	0,000062	-0,002773	0,000077
28	0	-0,0037	-0,00369	0,000029	-0,003613	0,000110
32	0	-0,0047	-0,00463	0,000042	-0,004524	0,000146
36	0	-0,0057	-0,00566	0,000019	-0,005491	0,000184
40	0	-0,0067	-0,00671	0,000020	-0,006501	0,000225
44	0	-0,0078	-0,0078	0,000008	-0,00754	0,000266
48	0	-0,0089	-0,0089	0,000003	-0,008589	0,000311

10.3 Parametrelerin Etkinliği

Çözümlerde kullanılan parametrelerin etkinliği bulunması açısından tezde incelenen problem incelenecektir. Problem bölgesi $91(13 \times 7)$ düzenli düğümlerden ve $40(10 \times 4)$ hücre sayısı kullanılmıştır. Herbir arkaplandaki hücrede $4 \times 4 = 16$ adetinde Gauss kuadratik noktası kullanıldı. Denklem 7.41'de belirtildiği gibi hücrede

kullanılan Gauss nokta sayısı arttıkça sonuçların verimliliği de artmaktadır. Nicelik ve tam sınır elde edilmesi açısından tam sınır koşulları ve tam doğal sınır koşulları uygulanmıştır. Tam doğal sınır koşulunda kirişin sağ tarafı ($x = L'$ de) parabolik zorlanmaya maruz bırakılmıştır. ve eğri integral sağ sınırında oluşur.

Hata dağılımı

$$e_e = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon^{Num} - \varepsilon^{Exact})^T D (\varepsilon^{Num} - \varepsilon^{Exact}) d\Omega} \quad (10.1)$$

Eleman bağımsız Galerkin metodunda lineer temel ve kubik spline ağırlık fonksiyonları hareketli en küçük kareler yönteminde kullanılmıştır. Hata dağılımı denklem (10.1)'de verilmiştir.

10.3.1 Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminde Sonuçları Etkileyen Parametreler

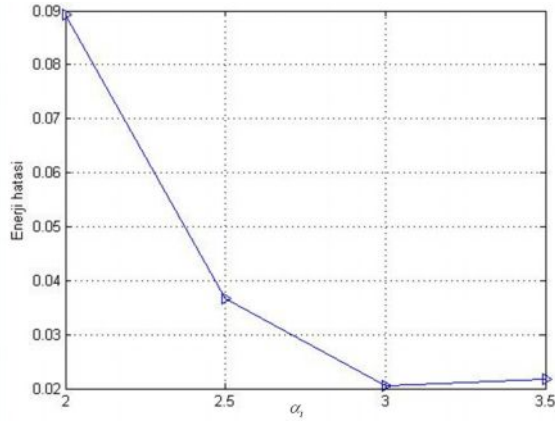
Problem için aşağıdaki denklemde belirtildiği gibi bölgelerin etkinlik boyutu sonucu direk olarak etkilemektedir.

$$\begin{aligned} d_{ix} &= \alpha_{ix} d_{cx} \\ d_{iy} &= \alpha_{iy} d_{cy} \end{aligned}$$

Farklı α_i değerleri için enerji norm hataları şekil 10.38'te verildi. Grafikten görüldüğü gibi hata oranı, α_i 'ye bağlı olarak değişmekte ve en iyi sonucun $2 \leq \alpha_i \leq 4$ arasında olduğu görülüyor. Etkinlik bölge

boyutu küçüldüğünde veya büyüdüğünde $\alpha_i \leq 2$ veya $\alpha_i \geq 4$ eleman bağımsız Galerkin yönteminin hata oranı artmaktadır.

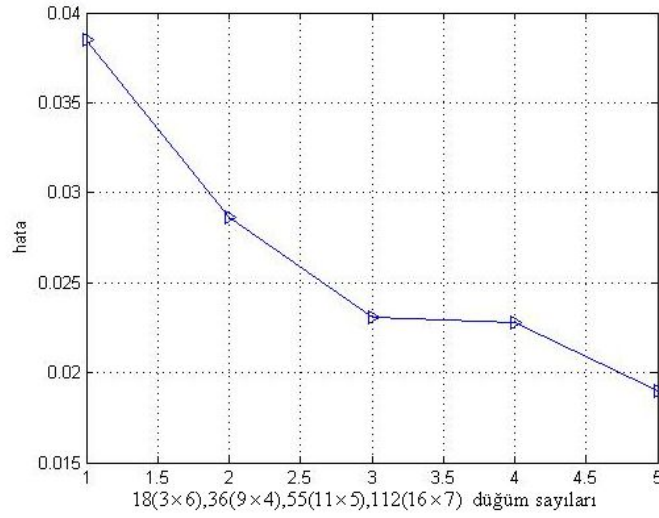
Bölgenin etkinlik boyutu $\alpha_i \leq 2$ olduğu durumlarda alan fonksiyonları için fonksiyon yaklaşımının türetilmesinde yeterli düğüm noktası oluşmuyor. ve hareketli en küçük kareler yönteminin şekil fonksiyonlarının düzgünlüğü azalır. Problem etkinlik bölgesinin $\alpha_i \geq 4$ olduğunda hareketli en küçük kareler yönteminin şekil fonksiyonlarının alan değişkenleri düzleşirler. Ayrıca etkinlik boyutu büyük olan geometriler, hesaplama zamanını da artırır. Dolayısıyla uygun bir etkinlik boyutu eleman bağımsız Galerkin yönteminde seçilmesi gerekir. $\alpha_i = 3$ civarında gerek bu çalışmada gerek araştırmacılar tarafından verimli sonuçlar türettiği görülmüştür.



Şekil 10.38 Destek etkinlik bölge boyutunun eleman bağımsız Galerkin metodu üzerindeki etkisi

10.3.1.1 Düğüm Sayısı

Düzenli olarak yerleştirilmiş $18(3 \times 6)$, $55(5 \times 11)$, $112(7 \times 16)$, düğüm sayıları kullanılarak elden edilen hata oranları şekil 10.39’da gösterilmiştir. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde lineer polinomlu temel fonksiyonları kullanılmıştır.



Şekil 10.39 Eleman bağımsız Galerkin yönteminde düğüm sayısına bağlı hata oranı. α_i parametresi 3.5 seçilmiştir.

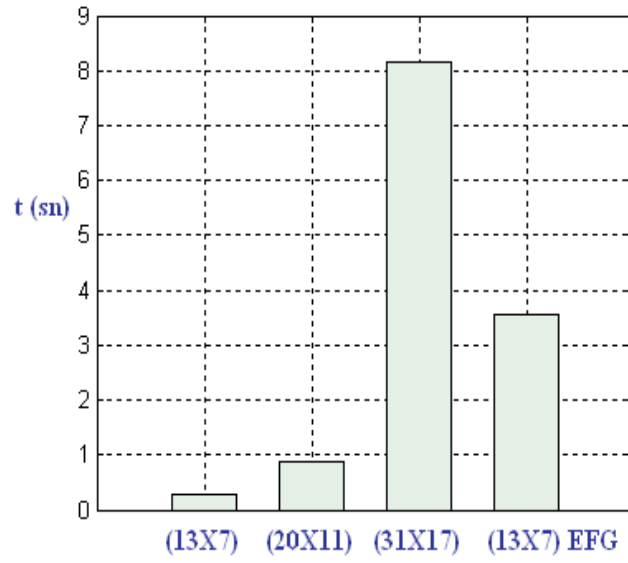
Nümerik yöntemlerde en önemli indikatör olarak ta problem çözme süresidir. Bu yöntemin başarılı sayılabilmesi için problem en kısa zamanda en doğru şekilde çözmesi gerekir.

Ağırsız metodlarda süreyi etkileyen en önemli iki parameter aşağıda verilmiştir.

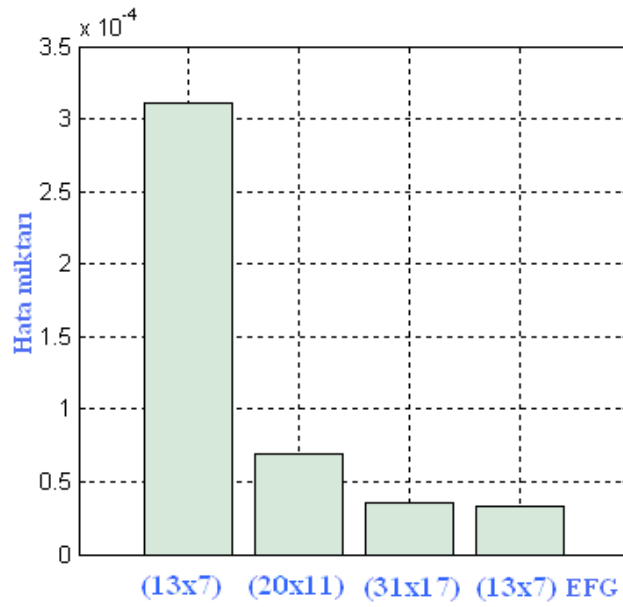
1. İnterpolasyon çözüm aşamasında, moment matrisinin tersi alınacağı zamandır. Bu yüzden interpolasyon çözüm süresi moment matrisinin boyutuyla orantılıdır. Radyal nokta interpolasyon yönteminde moment matris boyutları $n \times n$ (n destek bölgedeki alan düğüm sayısı) $m=3$ lineer polinom fonksiyon için alınır. Genellikle radyal nokta interpolasyon hesaplama süresi eleman bağımsız Galerkin yönteminden fazladır.
2. Problem çözme süresini etkileyen diğer parametre de global katılık matrisinin boyutlarına dayanan sistem denklemlerinin çözülmesinde geçen zamandır. Sistem katılık matrisi numaralandırma sisteminde problem bölgesinde seçilen düğüm sayılarına bağlıdır. Radyal nokta interpolasyon yönteminde destek bölge boyutu genellikle eleman bağımsız Galerkin yöntemine göre daha küçüktür. Bu yüzden radyal nokta interpolasyon yönteminde geçen zaman daha fazladır (Liu, G.R., 2002)

Denklem 6.15'te görüldüğü gibi Langrange çarpanları kullanıldığında global katılık matrisinin boyutu artmaktadır. ve katılık matrisi bitişik olmayacak hale gelir. Bu da açıkça eleman bağımsız Galerkin yönteminin çözüm sürecini artıracaktır. Özellikle de büyük sistemler için bu geçerlidir.

Bu çalışma da sonlu elemanlar yöntemi ile EBG arasında düğüm düğüm sayısına bağlı olarak hata ve zaman parametreleri incelenmiştir.



Şekil 10.40 SEY yönteminde düğüm sayısına bağlı çözüm süresi ve EBG yöntemiyle karşılaştırılması (CPU time)



Şekil 10.41 SEY yönteminde düğüm sayısına bağlı hata miktarları ve EBG yöntemiyle karşılaştırılması

Tablo 10.8 $x=48$ $y=6$ koordinat değerindeki nokta için SEY ve EBG yöntemlerinde düğüm sayısına bağlı çözüm süresi, (u_y değeri ve hata miktarı)

<i>Yöntem</i>	<i>Düğüm sayısı</i>	<i>Çözüm süresi (sn)</i>	<i>Değer</i>	<i>Hata</i>
EBG	13X7	3.5724	-0.0089033	0.000033
SEY	13X7	0.2802	-0.0085885	0.000311
SEY	20X11	0.8892	-0.0088313	0.000069
SEY	31X17	8.1433	-0.0089354	0.000035

$u_y = -0.0089$ (Analitik çözüm)

Nümerik metodlarda kullanılan yöntemin uygunluğunu ve verimliliğini artıran en önemli etkenlerden biri de problem çözüm süresidir. Sonlu elemanlar yöntemindeki çözümün hassasiyetini etkileyen en önemli parametre analizde kullanılan eleman sayısıdır. Eleman sayısı ile sonuç çözüm doğruluğu arasında genel olarak doğru orantı ilişkisi olduğu söylenebilir. Bu anlamda tezde incelenen problem için sonlu elemanlar yönteminde farklı düğümler seçilerek gerek sonuç esnekliği ve gerekse çözüm süresi bakımından eleman bağımsız Galerkin metoduyla karşılaştırılmıştır.

Sonlu elemanlar metodunda (13X7), (20X11) (31X17) düğüm sayısı sayısı kullanılıp çözüm için en iyi hassas sonuç veren izoparametrik kuadratik eleman tip seçilmiştir. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde ise (13X7) düğüm sayısı, 40 hücre, 640 Gauss kuadratik nokta kullanılmıştır.

Çözüm süresini etkileyen parametrelerden bir diğeri analizde kullanılan programlama dili, işletim sistemi özelliği ve en önemlisi de

bilgisayar donanımı ile alakalıdır. Analizde iyi sonuçlar elde edilebilmesi için EBG, SEY açısından Matlab programı kullanılmıştır.

Analiz süresince Core 2 duo intel inside 2.GHZ CPU, 2 GB RAM hafıza, Windows Vista işletim sistemi ve Matlab 7.0 programı kullanılmıştır.

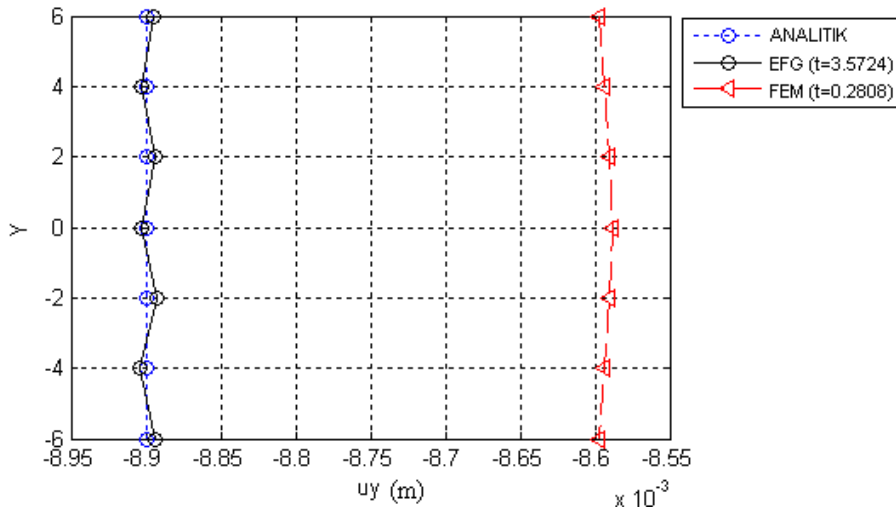
Analizde kirişin $Y=-6$ ile 6 ekseninde sonlu elemanlar yönteminde değişken düğüm sayısı kullanılarak elde edilen u_y değerleri ile aynı kirişe EBG uygulanması sonucu elde edilen değerler analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Uygulanan birinci analizde her iki metottada aynı sayıda düğüm noktası kullanılmıştır. $X=L$ ile $y=-6$ ile $y=6$ koordinatları arasında elde edilen u_y değerleri Şekil 10.42’de ve hata miktarı grafiği Şekil 10.43’te verilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminde çözüm süresi 0.2802 olurken eleman bağımsız Galerkin yöntemi ise aynı problem 3.5724 sn ‘de çözülmüştür. $X=L$, $Y=0$ noktası için u_y değeri açısından EBG’de hata miktarı 0.000033 oluşurken SEY’de hata miktarı ise 0.000311 gibi bir rakama karşılık gelmektedir.

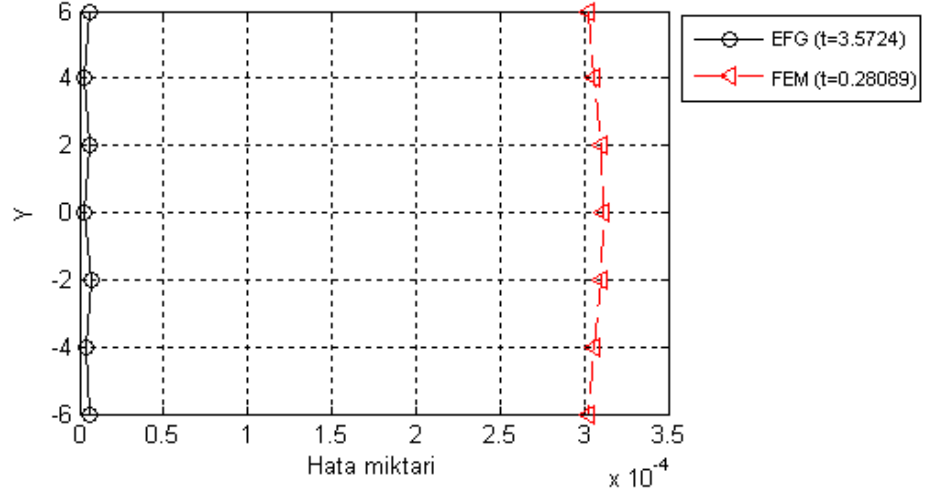
Hassasiyet değeri ve çözüm süresinde EBG’de (13X7) adetinde düğüm sayısı kullanılmıştır. EBG yönteminde $X=L$ noktası y eksenini boyunca 7 noktada değerler bilindiğinden SEY’e eşit hale getirilebilmesi için interpolasyon yapılmıştır. Elde edilen u_y değerleri ve hata miktarları Şekil 10.44 ve 10.46’da verilmiştir. Bunlara ait hata miktarları da 10.45 ve 10.47’de verilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminde eleman sayısı artırıldıkça çözüm hassasiyetin arttığı görülmüştür. ve hassasiyet açısından EBG’ye doğru ilerlemeler kaydetmiştir. Buna

karşılık olarak zaman süreci artmıştır. Aynı zaman sürecinde yani SEY’de 20X11 düğüm sayısı, EBG’de ise 13X7 yaklaşık olarak düğüm sayısı kullanıldığında EBG, çözülen problem için sonlu elemanlar yönteminden daha hassas sonuçlar vermiştir, ve aynı hata miktarında yani SEY’de 31X17 düğüm sayısı, EBG’de ise 13X17 düğüm sayısı kullanıldığında EBG yönteminde çözülen problem için sonlu elemanlar yönteminden daha kısa sürede problem çözülmüştür (Tablo 10.8).

Şekil 10.40, SEY’de düğüm sayısına bağlı problem çözüm aşamasında geçen zamanı göstermektedir. EBG metodu ile SEY’de aynı düğüm sayısı kullanıldığında problem çözme süresi EBG yönteminde SEY’e göre daha uzun olduğu görülmüştür. Bunun en önemli nedenlerinden biri şekil fonksiyonlarının hesaplanmasında geçen zaman ve Gauss kuadratik noktalarını oluşturduktan sonra gerilme hesabında geçen zamandır



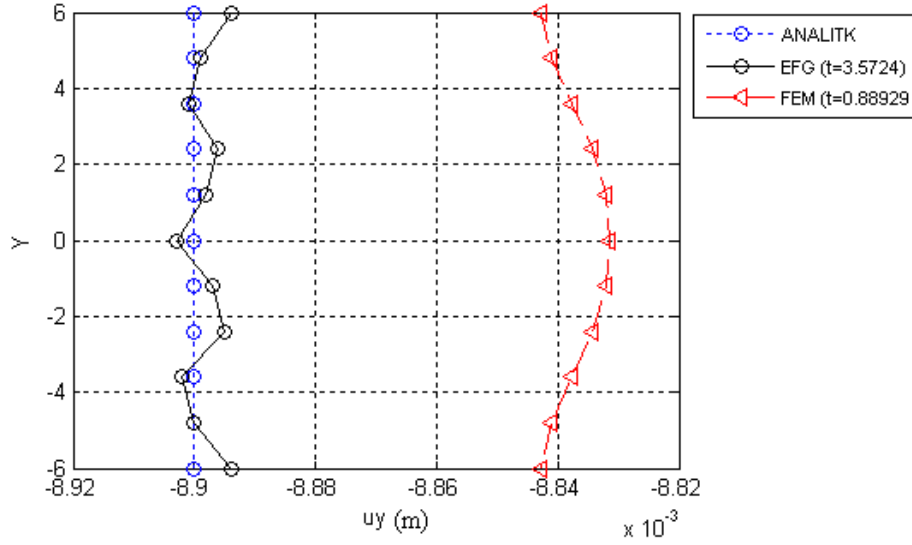
Şekil 10.42 SEY’de (13x7), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak X=48, Y=-6 ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y değerleri



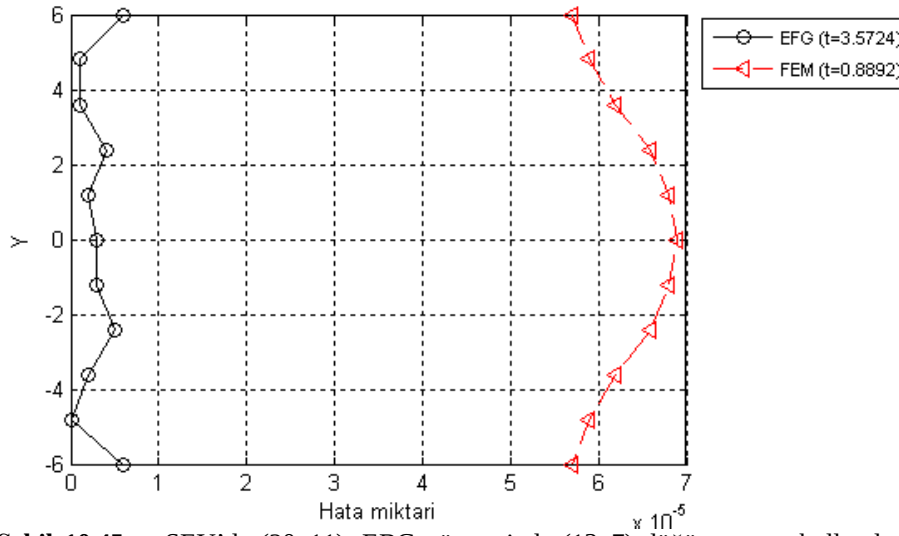
Şekil 10.43 SEY’de (13x7), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak X=48, Y=-6 ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y değerlerine ait hata miktarları

Tablo 10.9 SEY’de (13x7), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak X=48, Y=-6 ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y için değer ve hata miktarları

X,Y KOORDİNAT		ANALİTİK DEĞER	EFG		FEM	
X	Y		DEĞER	HATA MIKTARI	DEĞER	HATA MIKTARI
48	6	-0,0089	-0,0088944	0,000006	-0,0085972	0,000303
48	4	-0,0089	-0,0089027	0,000003	-0,0085942	0,000306
48	2	-0,0089	-0,0088938	0,000006	-0,0085902	0,000310
48	0	-0,0089	-0,0089033	0,000003	-0,0085885	0,000311
48	-2	-0,0089	-0,0088931	0,000007	-0,0085902	0,000310
48	-4	-0,0089	-0,0089037	0,000004	-0,0085942	0,000306
48	-6	-0,0089	-0,0088942	0,000006	-0,0085972	0,000303



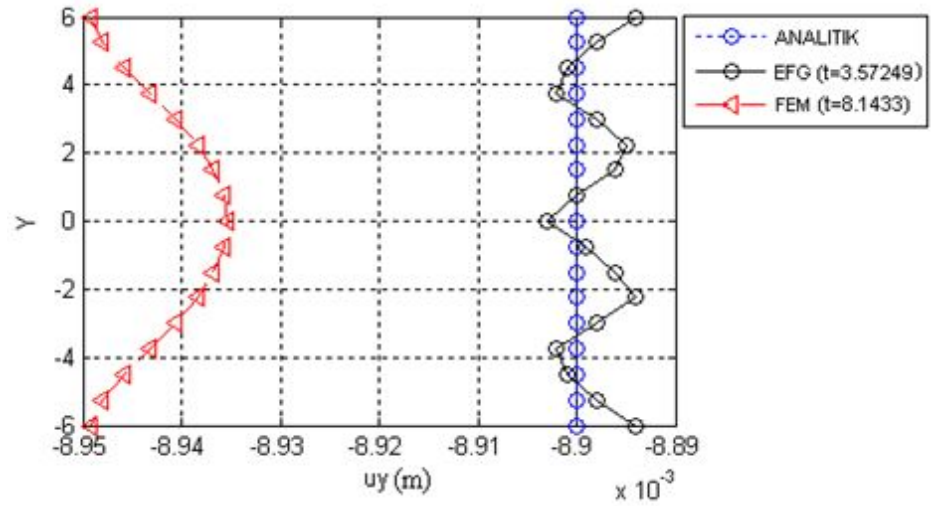
Şekil 10.44 SEY’de (20x11), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y değerleri



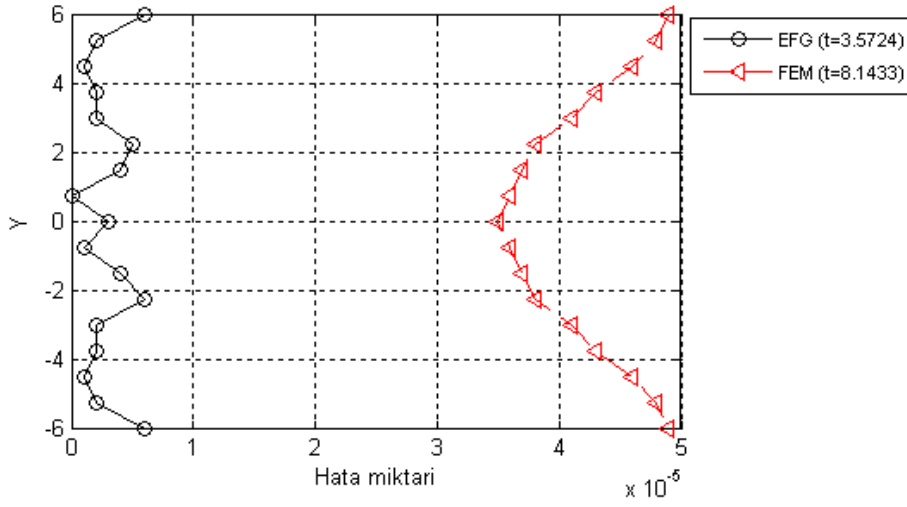
Şekil 10.45 SEY’de (20x11), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak $X=48$, $Y=-6$ ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y değerlerine ait hata miktarları

Tablo 10.10 SEY’de (20x11), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak X=48, Y=-6 ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y için değer ve hata miktarları

X,Y KOORDİNAT		ANALİTİK	EBG		FEM	
X	Y	DEĞER	DEĞER	HATA MİKTARI	DEĞER	HATA MİKTARI
48	6,0	-0,0089	-0,008894	0,000006	-0,0088428	0,000057
48	4,8	-0,0089	-0,008899	0,000001	-0,008841	0,000059
48	3,6	-0,0089	-0,008901	0,000001	-0,0088376	0,000062
48	2,4	-0,0089	-0,008896	0,000004	-0,0088343	0,000066
48	1,2	-0,0089	-0,008898	0,000002	-0,0088321	0,000068
48	0,0	-0,0089	-0,008903	0,000003	-0,0088313	0,000069
48	-1,2	-0,0089	-0,008897	0,000003	-0,0088321	0,000068
48	-2,4	-0,0089	-0,008895	0,000005	-0,0088343	0,000066
48	-3,6	-0,0089	-0,008902	0,000002	-0,0088376	0,000062
48	-4,8	-0,0089	-0,008900	0,000000	-0,008841	0,000059
48	-6,0	-0,0089	-0,008894	0,000006	-0,0088428	0,000057



Şekil 10.46 SEY’de (31x17), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak X=48, Y=-6 ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y değerleri



Şekil 10.47 SEY’de (31x17), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak X=48, Y=-6 ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y ’ait hata miktarları

Tablo 10.11 SEY’de (31x17), EBG yönteminde (13x7) düğüm sayısı kullanılarak X=48, Y=-6 ile 6 koordinatları arasında elde edilen u_y için gerçek değer ve hata miktarları

X,Y KOORDİNAT		ANALİTİK	EFG		FEM	
X	Y	DEĞER	DEĞER	HATA MİKTARI	DEĞER	HATA MİKTARI
48	6,00	-0,0089	-0,00889400	0,000006	-0,0089492	0,000049
48	5,25	-0,0089	-0,00889800	0,000002	-0,0089481	0,000048
48	4,50	-0,0089	-0,00890100	0,000001	-0,0089458	0,000046
48	3,75	-0,0089	-0,00890200	0,000002	-0,0089431	0,000043
48	3,00	-0,0089	-0,00889800	0,000002	-0,0089406	0,000041
48	2,25	-0,0089	-0,00889500	0,000005	-0,0089384	0,000038
48	1,50	-0,0089	-0,00889600	0,000004	-0,0089368	0,000037
48	0,75	-0,0089	-0,00890000	0,000000	-0,0089357	0,000036
48	0,00	-0,0089	-0,008903	0,000003	-0,0089354	0,000035
48	-0,75	-0,0089	-0,00889900	0,000001	-0,0089357	0,000036
48	-1,50	-0,0089	-0,00889600	0,000004	-0,0089368	0,000037
48	-2,25	-0,0089	-0,00889400	0,000006	-0,0089384	0,000038
48	-3,00	-0,0089	-0,00889800	0,000002	-0,0089406	0,000041
48	-3,75	-0,0089	-0,00890200	0,000002	-0,0089431	0,000043
48	-4,50	-0,0089	-0,00890100	0,000001	-0,0089458	0,000046
48	-5,25	-0,0089	-0,00889800	0,000002	-0,0089481	0,000048
48	-6,00	-0,0089	-0,008894	0,000006	-0,0089492	0,000049

11 SONUÇLAR

Tezde ağırlıklı olarak Galerkin zayıf formları üzerinde durulmuştur. Radyal nokta interpolasyon yöntemine dayanan RNİM ve hareketli en küçük kareler yöntemine dayanan EBG üzerinde ayrıntılı olarak durulmuştur. Radyal nokta interpolasyon ve eleman bağımsız Galerkin yönteminin hem uygunluk hem de perfonmans açısından sonlu elemanlar yöntemi ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Yapılan çalışmadan aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

- a. Sonlu elemanların verimliliği radyal nokta interpolasyon ve eleman bağımsız Galerkin yöntemine göre daha azdır.
- b. EBG metodunda sınır koşulları uygulamak için kullanılan Lagrange çarpanlarının verimliliği RNİM'e göre hassas çözümler üretmesini engelliyor.
- c. Genel olarak düşünüldüğünde RNİM ve EBG perfonmanslarının iyi olduğu söylenebilir.
- d. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde destek etkinlik bölge boyutu 3 ve radyal nokta interpolasyon yönteminde ise 2.5 civarlarında hassas çözümler verir.
- e. Şekil fonksiyonlarının uygunluğu tüm bölge geometrisi boyunca ağırsız global zayıf formlar için gereklidir.

- f. Polinomal forma sahip bükülebilir kirişin çözümünde hareketli en küçük kareler yönteminin kullanılması radyal nokta interpolasyon şekil fonksiyonlarının kullanılmasından daha avantajlıdır. Daha karmaşık problemler için özellikle polinomal form özelliğini taşımayanlar için durum değişir.
- g. Gerek eleman bağımsız Galerkin yöntemi sonuçlarının gerekse de radyal nokta interpolasyon yöntemi sonuçlarının analitik değerlerle örtüştüğü söylenebilir.
- h. Eleman bağımsız Galerkin ve radyal nokta interpolasyon yönteminin değişik yapıdaki problemlere de uygulanabilirliği görülmüştür.
- i. Sonlu elemanlar yöntemi ile eleman bağımsız Galerkin yönteminde eşit sayıda düğüm noktası kullanıldığında, EBG metodu incelenen problem için u_y açısından SEY'e göre daha hassas sonuçlar verdiği görülmüştür.
- j. Gerek sonlu elemanlar yönteminde gerekse eleman bağımsız Galerkin yönteminde düğüm sayısının artırılması çözüm hassasiyeti açısından olumlu yönde etkiler. Buna bağlı olarak da çözüm süresi de uzamaktadır.

12 ÖNERİLER

- Bu çalışma da lineer problem ele alınmıştır. Nonlineer problemler de incelenebilir.
- Tez çalışmasında lineer elastostatik yapıdaki problem çözülmüştür. Kompozit yapıdaki problemler de incelenebilir.
- Eleman bağımsız Galerkin ve radyal nokta interpolasyon yöntemi üç boyutlu problemler için formülasyonlar da değişiklik yapılarak üç boyutlu problemler için uygun hale getirilebilir.
- İki boyutlu Timoshenko kirişi çözümünde eleman bağımsız Galerkin çözüm süreçleri oluşturulmuştur. Diğer ağırsız yöntemlerden, ağırsız yerel Petrov Galerkin ve sınır eşitliği gibi yöntemler için çözüm süreçleri oluşturulabilir.
- Tez problemde incelenen bir ve iki boyutlu ankastre kiriş için eleman bağımsız Galerkin ve radyal nokta interpolasyon yöntemlerinin uygulanmasının kolay ve incelenen problem için kabul edilebilir sonuçlar ürettikleri belirlenmiştir.
- Çözülme istenen problem için programlama kodları geliştirilerek sadece belirli değişkenler değiştirilip aynı problemin farklı metodlarla çözümü sağlanabilir, veya hassas çözüm elde etmek için problemin değişik bölgelerinde aynı anda farklı ağırsız yöntemlerin uygulanabilmesi sağlanabilir, SEY, EBG, RNİM veya AYPG gibi.

- Elde edilen hassas sonuçlar incelendiğinde ağırsız yöntemlerin birçok mühendislik probleminin çözümünde başarılı bir şekilde kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

- Ari N., Usonbek J., 2005,** Mesh Free Methods For Periyodic Structures, University of Aplied Science, Zurich, Swetzerland.
- Atluri, S.N. and Zhu., T., 1998,** A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Computational mechanics, 22, 117-127.
- Aykaç S., Çağdaş İ.Z., 2004,** Burulma Problemlerinin Sonlu Nokta Sıralama Yöntemi İle Çözümü, DEU Mühendislik Fak., Fen ve Mühendislik Dergisi , Cilt:6 Sayı:1.
- Babuska, I. and Melenk, J.M., 1995,** The partition of unity finite element method, Technique Report BN-1185, Institute for Physics, Science and Technology, University of Maryland, Maryland.
- Belinha J., Dinis LMSJ., 2005,** Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method, University of Porto, Porto, Portugal.
- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. ve Krysl., 1996,** Meshless Methods: An overview and Recent Devolopment, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.
- Belytschko T., Organ D., 1995,** Coupled Finite Element-Element Free Galerkin Method, Computational Mechanics, 17, 186-295.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y and Gu, L., 1994,** Elements-free Galerkin methods. Int. J. Numerical methods Engrg., 37, 229-256.
- Biezeno C.Band and Koch., J.J., 1923,** Over een Nieuwe Methode ter berekening Van Vlokkte Platen met Toepassing op Enkelo voor de Techniek Belongrijke Belantingsgevallen, Ing. Grav. 38,25-56.

KAYNAKLAR(Devam)

- Chen, J., Pan, C., Wu, C., and Liu W.L., 1996,** Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, 195-227.
- Chen, Y., Lee, J. and Eskandarian, A., 2006,** *Meshless Methods In Solid Mechanics*, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 152p.
- Çağal, B., 1989,** Sayısal Analiz, Erdiz Dizgi Yayın, İstanbul.
- Dolbow, J., Belytschko, T., 1999,** Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods. *Computational Mechanics*, 23, 219-230.
- Duarte, C.A.M. and Oden, J.T., 1995,** Hp clouds-A meshless method to solve boundary value problems, *TICAM Report*.
- Duarte, C.A.M. and Oden, J.T., 1996,** An h-p adaptive method using clouds, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, 237-262.
- Embadi A., Libre N.A, Rahimian M., Shekarahi M.,** Numerical Comparison of Different Approximation Techniques In Meshfree Methods, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
- Fries T-H., Mathies H-G., 2003,** Classification and overview of Meshfree Methods, Institut für Wissenschaft Rechnen, Brunswick, Germany.
- Fujita, H., 1951,** *Mem. Coll. Agr. Kyoto Imp. Univ.*, 59,31.
- Gingold, R.A and Monaghan, J.J., 1977,** Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars, *Mon. Not. R. Soc.* 181, 375-387.
- Girault, V., 1974,** Theory of a GDM on irregular networks. *SIAM, J. Num. Anal.*, 11, 260-282.

KAYNAKLAR(Devam)

- Hildebrand F.B., 1952**, Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall, Second Edition, New Jersey, USA.
- Hutton D.V., 2004**, Fundamentals of Finite Element Analysis, Mc Graw Hill Book company, First Edition, New York, 2004.
- Kansa, E.J., 1990**, Multiquadratics A scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid dynamics, Computers Math, Appl., 19(819), 127-145.
- Kee H.Y., 2004**, Study of Radial Basis Functions LRBFs In Mesh-Free Methods, FYP Report, Natioanl University of Singapore.
- Kothnur, V.S., Mukherjee, S. and Mukherjee, Y.X., 1999**, Two dimensional linear elasticity by the boundary node method. Int. J. of Solid and Structures, 36, 1129-1147.
- Krsyl P., Belytschko T., 1999**, Element Free Galerkin Method: Convergence of Continuous and Discontinuous Shape.
- Kwon W.Y., Bang H., 2000**, The Finite Element Method Using Matlab, CRC Press LLC, Florida, USA
- Lam, K.Y., Liu, G.R., Liu, M.B. amd Zang, Z., 2000**, Numerical simulation of underwater shock using SPH technology.,Computatioanal Mechanics and Simulation of Underwater Explosion Effects-US/Singapore workshop , pp. 1-6, November 2000, Washington D.C.
- Lisza, T. and Orkizs, J., 1980**, The finite difference method for arbitrary meshes, Comput. Struct. 5,45-58.
- Liu G.R., 2003**, Mesh free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, CRC Pres.

KAYNAKLAR(Devam)

- Liu G.R., Gu Y.T., 2001,** A Point Interpolation method For Two Dimensioanal Solids, Int. J.Muner. Meth., Eng.
- Liu G.R., Gu Y.T., 2005,** An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming, Springer, Netherlands.
- Liu G.R., Lan K.Y., 2008,** Smoothed Particle Hydrodynamics, Meshfree Particle Method, World Scientefic, Singapore.
- Liu, G.R., Gu, L.T., Tu., Zh., Huang, X.M, Wang, J.G., 2002,** Meshfree 2D. <http://www.nus.edu.sg/ACES>.
- Liu, G.R., Yang, K.Y., 1999,** A new Meshless Method for Stress Analysis for Solid and Structure, Proceeding of fourth Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics, 15-17, December, Singapore.
- Lucy, L.B., 1977,** A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, Astron. J., 8(12), 10013-1024.
- Marris, J.P., 1996,** Stability properties of SPH. Publ. Astron. Soc. Aust, 13-97.
- Mendez S.N, 2001,** Mesh-Free Methods and Finite Elements: Friend or Foe, Phd. Thesis., Barcelona, Spain.
- Monaghan, J.J., 1982,** Why particle methods work, S, AM J.Sci. Stat. Comput. 3(4), 422.
- Morton, K.W and Mayers ,D.F., 2005,** Numerical Solution of Partial Differential Equations, An Introduction, Cambridge University Press, 2005.
- Mukherjee, Y.X. and Mukherjee, S., 1997,** Boundary node method for potential problems. Int. J. Num. methods in Engrg, 40, 797-815.

KAYNAKLAR(Devam)

- Nayroles, B. Touzot, G. and Villon, P., 1992**, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Computational Mechanics, 10307-318.
- Nayroles, B. Touzot, G. and Villon, P., 1992**, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Computational Mechanics, 10307-318.
- Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., Taylor., R.L., 1996**, Finite point method in computational Mechanics. Applications to convective transport and fluid flow Int. J. Numer. Methods Eng. 39, 3839-3866.
- Picone M., 1928**, Sul Metodo delle Minime Potenze Pandarate e sul Metodo di Ritz per il Calcolo Approssimato nei Problemi della Fisica Matematica, Rend. Circ. Mat. Palermo 52,225-253.
- Powell, M.J.D., 1992**, The Theory of Radial Basis Function Approximation in 1990. Advanced in Numerical Analysis, Eds. FW. Light:308-322.
- Reddy J.N., 2003**, An Introduction To The Finite Element Methods, McGraw-Hill, Inc, Singapore.
- Schaback, R. and Wendland, H., 2000**, Characterization and construction of radial basis functions. In; Multivariate Approximation and Applications, (eds) Dyn. D., Leviatan, D., Levin, D., & Pinkus, A., Cambridge University Press.
- Seidi A., Schmidt T.H.,** Implementation of Meshless FEM for Engineering Applications.
- Sharan, M., Kansa, E.J., and Gupta, S., 1997**, Application of the Multiquadratic Method for Numerical Solution of Elliptic Partial Differential Equations. Applied Mathematics and Computation, 84, 275-302.

KAYNAKLAR(Devam)

- Shurina, E.P, Solonenko, D.P., Voitovich T.V., 2002,** Technologies of finite volume- finite element method for the solution of convection-diffusion problems on unstructured grids, Rusia, 23p
- Slater, J.C., 1934,** Electronic Energy Bands in Metals. Phys. Rev. 45,794-801.
- Sulsky, D., Chen, Z. and Schreyer, H.L., 1992,** The application of a material-spatial numerical method to penetration, New Methods in transient Analysis, eds.P., Smolinsk,, W.K Liu, G, Hulbert and K. Tamma, AMD-Vol. 143/AVP-Vol. ASME, New York, 91-102.
- Timoshenko S.P., Goodier J.N., 1970,** Theory of Elasticity, Third Ed. McGraw-Hill, New York, USA.
- Wang, J.G., Liu, G.R., 2002,** On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods. Computer Method Appl. M., 191(23-24):2611-2630.
- Wendland, H., 1995,** Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. Adv. Comput. Math. 4, 283-292.
- Wu, Z., 1995,** Compactly supported positive definite radial functions., Adv. Comput. Math. 4, 283-292.
- Xu J., Belytschko T., 2005,** Discontinuous Radial Basis Functions Approximations for Meshfree Methods, Northwestern Univ.,Evanston, USA.
- Yagawa G. and Yamada T., 1996,** Free mesh method, a kind of meshless finite element method. Comput. Mech., 18, 383-386.

KAYNAKLAR(Devam)

Yagawa, G. and Furukawa, T., 2000, Recent development of meshfree method, Int. J. Numer methods Eng, 47, 1417-1443.

Yamada, H., 1947, Rep. Res. Inst, Fluid Eng. Kyush Univ., 329.

Zhang, X., Song, K.Z., Lu, M.W., and Liu, X., 2000, Meshless methods based on collocation with radial basis functions. Comput Mechanic, 26(4), 333-343.

Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., 2000, The finite element method., 5th edition, Butterworth Heinemann, Oxford, UK.

ÖZGEÇMİŞ

Mahmut PEKEDİS, 08/06/1984 Midyat doğumludur. Türkiye Cumhuriyeti vatandaşıdır.

2006 yılında Gazi Üniversitesi Makine Mühendisliği bölümünden mezun olup aynı yılda Ege Üniversitesi Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2.5 yıldır özel sektörde mühendis olarak çalışmaktadır.