

T.C.  
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**PSEUDO-PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN  
FARK METOTLARINDA ENERJİ EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Mehmet Ğıyas SAKAR  
DANIŞMAN : Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

VAN - 2007

T.C.  
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**PSEUDO-PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN  
FARK METOTLARINDA ENERJİ EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet Ğıyas SAKAR

VAN – 2007

## KABUL ve ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Gabil AMİRALİ danışmanlığında Mehmet Ğıyas SAKAR tarafından hazırlanan “*Pseudo-Parabolik Diferansiyel Denklemler için Fark Metotlarında Enerji Eşitsizlikleri*” isimli bu çalışma ....../...../2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gabil AMİRALİ İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Musa ÇAKIR İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU İmza:

Üye : ..... İmza:

Üye : ..... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ....../...../2007 gün ve ..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

## ÖZET

### PSEUDO-PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN FARK METOTLARINDA ENERJİ EŞİTSİZLİKLERİ

SAKAR, Mehmet Ğıyas

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Eylül 2007, 30 sayfa

Bu çalışmanın amacı, Sobolev tipli denklem olarak da bilinen lineer olmayan pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denklemler için fark şemaları geliştirmektir. İteratif işlemler kullanılarak elde edilen Standart ve Crank-Nicolson fark yaklaşım şemalarının kararlılığı ve çözümün teklığı gösterildi. Diskret enerji değerlendirmeleri kullanılarak her bir yaklaşımın düzgün normda belirlenen oranda kesin çözüme yakınsadığı gösterildi.

**Anahtar kelimeler:** Enerji eşitsizlikleri metodu, Pseudo-parabolik denklem, Standart ve Crank-Nicolson yaklaşımı.

## ABSTRACT

### THE ENERGY INEQUALITIES IN DIFFERENCE METHODS FOR PSEUDO-PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

SAKAR, Mehmet Ğıyas

Msc, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

September 2007, 30 pages

The aim of this study is develop difference schemes that for nonlinear pseudo-parabolic partial differential equations as known Sobolev type equations. Standard and Crank-Nicolson's difference-approximations schemes is stable and possesses a unique solution which can be obtained by an iterative procedure. By means of a discrete energy estimate, each approximations is shown to converge in the uniform norm to the exact solution with a determined rate.

**Key words:** Pseudo-parabolic equations, Standart and Crank-Nicolson's approximation, The method of energy inequalities.

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada Sobolev tipli denklem olarak ta bilinen lineer olmayan pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denklemler için diskret enerji değerlendirmeleri kullanılarak fark şemaları geliştirildi. İteratif işlemler kullanılarak geliştirilen Standart ve Crank-Nicolson şemalarının kararlılığı, yakınsaklığı, yakınsama hızı ve çözümün tekliği gösterildi. Diskret enerji değerlendirmeleri kullanılarak her bir yaklaşımın düzgün normda belirlenen oranda kesin çözüme yakınsadığı gösterildi.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, danışmanım sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Mehmet Ğıyas SAKAR

## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. TEMEL TANIMLAR ve ÖNBİLGİLER	4
4. PSEUDO-PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN FARK METOTLARINDA ENERJİ EŞİTSİZLİKLERİ	10
4.1 Diferansiyel Durum İçin Değerlendirmeler	10
5. PSEUDO-PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN FARK METOTLARI	13
5.1 Fark Şemasının Kurulması	13
5.2 Fark Denklemlerinin Çözümü	15
6. DİSKRET ENERJİ DEĞERLENDİRMELERİ	19
7. FARK ŞEMASININ YAKINSAKLIĞI ve KARARLILIĞI	25
7.1 Yakınsaklık ve Kararlılık	25
8. TARTIŞMA ve SONUÇ	27
KAYNAKLAR	28
ÖZ GEÇMİŞ	30

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

$\bar{R}$	$R$ ' nin kapanışı
$\ \cdot\ _0^m$	Ayrık integral $L_2$ normu
$N$	Şebeke elemanlarının sayısı
$h$	Şebeke genişliği
$g_i$	$g(x)$ fonksiyonunun $x_i$ şebeke noktasındaki değeri
$C$	$\varepsilon$ ve $h$ dan bağımsız genel sabit
$\omega_h$	$I$ bölgesinde düzgün şebeke
$\bar{\omega}_h$	$\omega_h \cup \{x = 0, x = \ell\}$
$\ g\ _{\infty, I}$	$I$ 'da sürekli fonksiyon için maksimum norm
$\ g\ _{\infty, \omega_h}$	$\omega_h$ düzgün şebeke normu
$C^n(I)$	$I$ bölgesinde $n$ 'inci sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi
$L$	Diferansiyel operatörü
$O(h^k)$	Yakınsama hızı
$p$	Yakınsaklık mertebesi
$u$	Diferansiyel denklemin kesin çözümü
$y$	Diferansiyel denklemin nümerik çözümü

## 1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı Sobolev tipli denklem olarak da bilinen aşağıdaki biçimde verilen lineer olmayan pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denklemler için diskret enerji değerlendirmelerini kullanarak fark şemalarının kararlılık ve yakınsaklığını göstermektir. İteratif işlemler kullanılarak geliştirilen standart ve Crank-Nicolson şemalarının kararlılığı ve çözümün teklığı gösterildi. Diskret enerji değerlendirmeleri kullanılarak her bir yaklaşımın düzgün normda belirlenen oranda kesin çözüme yakınsadığı gösterildi.

Adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinde sıkça kullanılan tekniklerden biri maksimum prensibinin diferansiyel ve fark düzeylerinde uygulanışıdır. Kısmi diferansiyel denklemlerde ise maksimum prensibinin geçerli olabileceği yer eliptik ve parabolik tip denklemler için başlangıç-sınır değer problemleridir. Hiperbolik denklemler için ise bu tekniğin kullanılması söz konusu değildir. Fakat zamana bağlı diferansiyel denklemlerde özellikle çok boyutlu durumlarda enerji eşitsizlikleri denilen yöntem daha yaygın biçimde kullanılmaktadır.

Ayrıca fizik ve akışkanlar mekaniğinde son zamanlarda yapılan araştırmalar klasik olmayan yeni matematiksel fizik modelleri ortaya çıkmıştır. Korteweg de Vries (Kd V) denklemleri, Boussinesq denklemi, Burger's Kd V denklemi, regülerize olmuş uzun dalga denklemi (RLW) vb.

Pseudo-parabolik denklemler çoğunlukla yarı iletkenlerin yarı yerleşik matematiksel modellemelerinde ortaya çıkar. Bu denklemler için başlangıç ve sınır değer problemlerinin nümerik incelenmesinde klasik yöntemler genelde geçerli olmamaktadır. Özellikle kararlılık ve yakınsaklık durumlarının incelenmesinde bu problemlere özgü enerji eşitsizlikleri yönteminin geliştirilmesi önem arz etmektedir.

Bu çalışmada, aşağıdaki lineer olmayan pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denklem ele alınmıştır.

$$\left( a(x,t)u_{tx} \right)_x + \left( b(x,t)u_x \right)_x = c(x,t)u_{xt} + F(x,t,u,u_x,u_t), \quad (x,t) \in R, \quad (1.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.2)$$

$$u(0,t) = f(t), \quad u(1,t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.3)$$

Burada  $R = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  şeklinde bir dikdörtgensel bölge ve  $\bar{R}$ ,  $R$  nin kapanışıdır.

(1.1)-(1.3) nonlinear problemi için aşağıdaki varsayımlar geçerli olsun.

(i)  $a, b$  ve  $c$  fonksiyonları  $C^3(\bar{R})$  sınıfındadırlar. Ayrıca  $\bar{R}$  de  $\partial c / \partial x \leq 0$  ve  $a(x, t) \geq a_* > 0$  olacak şekilde bir  $a_*$  sabiti vardır.

(ii)  $\bar{R}$  deki tüm  $(x, t)$  ler için  $-\infty < z, p, q < \infty$ ,  $F(x, t, z, p, q)$  sürekli ve  $z, p, q$  ya göre diferansiyellenebilir ve burada

$$|F_z| \leq z^*, \quad |F_p| \leq p^*, \quad 0 < q_* \leq F_q \leq q^*$$

olacak şekilde  $z^*, q_*$  ve  $q^*$  sabitleri vardır.

(iii) (1.1)-(1.3) problemi için  $u \in C^5(\bar{R})$  bir tek çözüm vardır.

Hemen belirtelim ki (i) varsayımı  $\bar{R}$  deki tüm  $(x, t)$  ler için  $a^*, b^*, c^*$  ve  $c_x^*$  sabitlerinin varlığını içerir.

$$0 < a_* \leq a(x, t) \leq a^* \quad |b(x, t)| \leq b^*,$$

$$|c(x, t)| \leq c^*, \quad -c_x^* \leq c_x(x, t) \leq 0$$

Hilbert uzayı yaklaşımında (1.1)-(1.3) probleminin çözümünü bulmak için (i) ve (ii) varsayımlarının her ikisinin de gerekli olduğunu belirtelim.

## 2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Diferansiyel denklemler için enerji eşitsizlikleri metodunu ve parabolik kısmi diferansiyel denklemler için fark yaklaşımlarında çözümün a priori değerlendirmesini Less (1960) ta vermiştir. Showalter ve Ting (1971) pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünün asimptotik davranışını incelemişlerdir. Showalter (1972) banach uzaylarında semilineer Sobolev denklemi için varlık ve temsil teoremlerini vermiştir. Yine Showalter (1975) lineer olmayan parabolik Sobolev denkleminin çözümünün varlığını, tekliğini ve sınır değer probleminin genelleştirilmiş bir çözümünü vermiştir. Ford ve Ting (1973) pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denklemler için fark yaklaşımlarının kararlılığını ve yakınsaklığını ayrık  $L^2$  normunda incelemişlerdir. Korteweg De Vries denklemi için bazı sonlu fark şemalarının kararlılığı üzerine çalışmalar Goda (1975) tarafından yapılmıştır. Nakao (1985) bir boyutlu uzayda lineer olmayan Sobolev denklemi için  $L^p, 2 \leq p \leq \infty$  normunda Galerkin metodunu kullanmıştır. Amiraliyev (1987) quazi lineer Sobolev denklemi için yakınsaklık şartlarını incelemiştir. Lin (1990) iki boyutlu uzayda homojen dirichlet sınır şartlarına sahip lineer olmayan Sobolev denklemi için Galerkin metodunu kullanarak  $L^2$  normunda Crank-Nicolson ve extrapole edilmiş Crank-Nicolson şemalarının kararlılık ve yakınsaklığını incelemiştir. Lin ve Zhang (1992), Gu (1999) lineer olmayan Sobolev denklemi için sonlu elemanlar metodunu uygulayarak Gu (1999) elde ettiği şemanın  $H^1$  ve  $L^2$  normunda yakınsak olduğunu göstermiştir. Amiraliyev ve Mamedov (1995) singüler pertürbe olmuş pseudo-parabolik denklem için düzgün şebekede bir fark şeması kurmuştur. Perova ve ark. (1999) iki boyutlu Sobolev denkleminin başlangıç - sınır değer probleminin uzun zaman asimptotik davranışını incelemiştir. Sung ve Ma (2001) quazi lineer Sobolev denklemi için sonlu fark aerodinamik difüzyon metodunu uygulamıştır. Cao (2005) iki boyutlu lineer Sobolev denklemi için fark şemasının bir genelleştirmesini vermiştir. Guo ve Rui (2006) Sobolev denklemleri için galerkin en küçük kareler yöntemini uygulamıştır.

Bu çalışmalara dayanarak, pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denklemler için diskret enerji değerlendirmeleri kullanılarak Standart ve Crank-Nicolson şemaları geliştirildi. Verilen şemaların kararlılığı, yakınsaklığı ve yakınsama hızı gibi özellikleri incelendi.

### 3. TEMEL TANIMLAR ve ÖN BİLGİLER

Bu bölümde düzgün şebekede fark şemasının kurulmasında ihtiyaç duyulan notasyonlar, sürekli bölgede tanımlanmış fonksiyonlar için tanımlar ve eşitsizlikler verilmektedir.

#### Tanım 3.1.

$g$  herhangi bir fonksiyon olsun. Buna göre;

a)  $g_{x,i} = \frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{h}$  ifadesine *birinci mertebeden ileri fark türevi* denir.

b)  $g_{\bar{x},i} = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{h}$  ifadesine *birinci mertebeden geri fark türevi* denir.

c)  $g_{x,i}^0 = \frac{g(x_{i+1}) - g(x_{i-1})}{2h}$  ifadesine *birinci mertebeden merkezi fark türevi* denir.

d)  $g_{\bar{x},i}^2 = \frac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1}))}{h^2}$  ifadesine *ikinci mertebeden fark türevi* denir.

#### Tanım 3.2.

a)  $\omega_h = \{x_i | x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1 \text{ ve } h = l/N\}$  ifadesine  $[0, l]$  aralığındaki *düzgün şebeke* denir.

b)  $\|g\|_{C(\omega_h)} = \max_{x_i \in \omega_h} |g(x_i)|$  ifadesine *düzgün şebeke normu* denir.

#### Tanım 3.3.

a)  $\|f\|_{C[0,l]} = \max_{x \in [0,l]} |f(x)|$  ifadesine  $[0, l]$  aralığındaki sürekli fonksiyonlar için *maksimum norm* denir.

b)  $C^{(n)}[0, l]$  ifadesine  $[0, l]$  aralığında  $x$ 'e göre  $n$ . dereceden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi olmak üzere,  $g_i = g(x_i)$  ifadesine  $\omega_n$ 'ta tanımlanmış *şebeke fonksiyonu* denir.

### Tanım 3.4.

$\Omega \subset R^n$  sınırlı bir bölge,  $\ell$  negatif olmayan bir tam sayı ve  $1 \leq p \leq \infty$  olsun.

$$W^{\ell, p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq \ell\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya,  $W^{\ell, p}(\Omega)$  Sobolev uzayı denir.

Bu lineer uzay üzerindeki norm,  $1 \leq p \leq \infty$  için,

$$\|u\|_{W^{\ell, p}(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq \ell} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve  $p = \infty$  için,

$$\|u\|_{W^{\ell, \infty}(\Omega)} = \|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq \ell} \sum |D^\alpha u|$$

biçiminde tanımlanır. Sobolev uzayları Banach uzayıdır.

$C_0^\infty(\Omega) \subset W^{\ell, p}(\Omega)$  dır.  $W^{\ell, p}(\Omega)$  uzayının normuna göre  $C_0^\infty(\Omega)$  fonksiyonlar sınıfının kapanışı  $W^{\ell, p}(\Omega)$  uzayının lineer normlu bir alt uzayıdır. Bu uzay da Sobolev uzayı olup,  $W_0^{\ell, p}(\Omega)$  biçiminde gösterilir. Üzerindeki norm,  $W_0^{\ell, p}(\Omega)$  uzayının her elemanı için,

$$\|u\|_{W_0^{\ell, p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=\ell} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır.  $\ell = 0$  için  $W^{0, p}(\Omega) = L_p(\Omega)$  dır.  $p = 2$  ise  $W^{\ell, 2}(\Omega)$  uzayı bir Hilbert uzayıdır ve  $H^\ell(\Omega)$  ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki iç çarpım,

$$\langle u, v \rangle_\ell = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq \ell} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

biçiminde tanımlanır.  $W_0^{\ell, 2}(\Omega) = H_0^\ell(\Omega)$  dır ve üzerindeki norm, aşağıdaki biçimde tanımlıdır,

$$\|u\|_\ell(\Omega) = \left( \int_\Omega \sum_{i=1}^n (D^i u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(Adams, 1975).

### Tanım 3.5.

$\Omega \subset R^n$  bir bölge olsun.  $p \geq 1$  olan bir reel sayı olmak üzere,  $\Omega$  üzerinde reel değerli

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq \infty, \quad x \in \Omega$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir  $u$  fonksiyonlar sınıfına  $L_p(\Omega)$  uzayı denir. Bu uzay lineer bir uzaydır ve  $1 \leq p < \infty$  ise üzerindeki norm,

$$\|u\|_{0,p} = \|u\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır.  $L_p(\Omega)$  uzayı bir banach uzayıdır.

$L_2(\Omega)$  uzayı bir Hilbert uzayıdır. Bu uzay üzerindeki iç çarpım,

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \forall u, v \in L_2(\Omega)$$

biçiminde tanımlanır.

### Tanım 3.6.

$L_2(a, b)$  Uzayı:  $\int_a^b f^2(x) dx$  integralinin mevcut olması halinde  $(a, b)$  aralığı üzerinde

kuadratik olarak integre edilebilir fonksiyonların oluşturduğu sınıftır.  $L_2(a, b)$  veya kısaca  $L_2$  ile göstereceğiz.

$f(x) \in L_2$  ve  $g(x) \in L_2$  olsun. Bu iki fonksiyonun skaler çarpımı

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

ile ve  $f(x)$  in normu

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_a^b f^2(x) dx$$

ile tanımlanır.

**Eşitsizlik 3.1.**

$f(x) \in L_2$  ve  $g(x) \in L_2$  ise Cauchy–Bunyakovski–Schwarz eşitsizliği gerçekleşir.

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

**Eşitsizlik 3.2.**

$a, b \in \mathbb{R}$  ve  $\mu > 0$  olmak üzere  $\mu$  – eşitsizliği

$$|ab| \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2$$

biçiminde gösterilir.

**Lemma 3.1. (Gronwall Eşitsizliği)**

$u$  ve  $v$ ,  $[0, t]$  aralığında sürekli ve negatif olmayan fonksiyonlar ve  $u_0$  negatif olmayan bir sayı olsun. Eğer

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t u(s)v(s)ds, \quad p(t) \geq 0, u_0 \geq 0$$

ise bu durumda

$$u(t) \leq u_0 e^{\int_0^t v(s)ds}$$

olur.

Ayrıca

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t [u(s)v(s) + q(s)]ds, \quad v(t) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyor ise

$$u \leq u_0 e^{\int_0^t v(\zeta)d\zeta} + \int_0^t q(s)e^{\int_0^s v(\zeta)d\zeta} ds$$

eşitsizliği de sağlanır.

**Lemma 3.2. ( Gronwall eşitsizliğinin fark benzeri )**

$y_j \geq 0$  fonksiyonu

$$y_j \leq \alpha + \tau \sum_{k=1}^j \{a_k y_k + b_k y_{k-1} + f_k\},$$

$$y_0 \leq \alpha$$

( $a_j, b_j, f_j \geq 0, 1 - \tau a_j > 0, j = 1, 2, \dots; \tau > 0$  – reel parametre) eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda

$$y_j \leq \alpha P_j + \tau \sum_{k=1}^j \frac{f_k}{1 - \tau a_k} P_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots$$

olur. Burada

$$P_{j-k} = \begin{cases} 1, & k = j \\ \exp \left[ \tau \sum_{\ell=k+1}^j \frac{a_\ell + b_\ell}{1 - \tau a_\ell} \right] & 0 \leq k \leq j-1 \end{cases}$$

Eğer, ayrıca  $a_k = c_0 = \text{sbt}, b_k = c_1 = \text{sbt}$  ise, o zaman

$$y_j \leq \alpha \exp \left[ \frac{(c_0 + c_1)t_j}{1 - \tau c_0} \right] + \frac{\tau}{1 - \tau c_0} \sum_{k=1}^j f_k \exp \left[ \frac{(c_0 + c_1)t_{j-k}}{1 - \tau c_0} \right], \quad j = 1, 2, \dots \quad (t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots).$$

**Lemma 3.3. ( Gronwall eşitsizliğinin fark benzeri )**

Kabul edelim ki  $y_j \geq 0$  fonksiyonu için

$$y_j \leq g_j + \tau \sum_{k=1}^j \{a_k y_k + b_k y_{k-1}\}, \quad y_0 \leq g_0$$

$$(a_j, b_j, g_j \geq 0; 1 - \tau a_j > 0; j = 1, 2, \dots; \tau > 0 \text{ reel parametre})$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu durumda

(i)

$$y_j \leq g_j + \tau \sum_{k=1}^j \frac{a_k g_k + b_k g_{k-1}}{1 - \tau a_k} P_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots$$

olur.

(ii) Ayrıca

$$a_j \equiv 0, b_j = c = sbt$$

ve  $g_j$  azalmayan ise

$$y_j \leq g_j e^{ct_j}$$

olur.

## 4. PSEUDO-PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN FARK METOTLARINDA ENERJİ EŞİTSİZLİKLERİ

Burada (1.1)-(1.3) probleminin  $u(x)$  çözümünün kararlılık ve yakınsaklığını göstermek için diferansiyel durum için değerlendirmeler yapılacaktır. .

### 4.1. Diferansiyel Durum için Değerlendirmeler

#### Teorem 4.1:

(1.1) – (1.3) probleminin çözümü için  $C$  sonlu bir sabit olmak üzere

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \|u\|^2 \leq C \left\{ \|\phi\|^2 + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|^2 + \int_0^t \|f\|^2 d\tau \right\}, \quad t \in [0, T] \quad (4.1)$$

şeklinde bir değerlendirme doğrudur.

**İspat:** (1.1) eşitliği  $\frac{\partial u}{\partial t}$  ile skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right), \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( b \frac{\partial u}{\partial x} \right), \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left( c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left( d \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ & + \left( e \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left( hu, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \left( f, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanıp  $a \geq \alpha > 0$  olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right), \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \left( a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \geq \alpha \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2, \\ & \left( c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left( c \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2, 1 \right) = \frac{1}{2} \left( c \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial c}{\partial x} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial x} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

yazılabilir.

Kısmi integrasyon ve ardından  $\mu$ -eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| -\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( b \frac{\partial u}{\partial x} \right), \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| = \left| \left( b \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \right| \leq \mu_1 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_1} (b^*)^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \quad (4.4)$$

elde edilir. Diğer ifadeler için de  $\mu$ -eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left| \left( d \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| &\leq \mu_2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_2} (d^*)^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2, \\ \left| \left( hu, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| &\leq \mu_2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_2} (h^*)^2 \|u\|^2, \\ \left( f, \frac{\partial u}{\partial t} \right) &\leq \mu_2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_2} \|f\|^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca  $e \geq e_* > 0$  olduğundan

$$\left( e \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \geq e_* \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \quad (4.6)$$

yazılabilir.

(4.3), (4.4), (4.5), (4.6) ifadeleri (4.2) eşitliğinde yerine yazılıp ve  $\frac{\partial c}{\partial x} \leq 0$  şartı göz önünde

bulundurulup 0'dan  $t$ 'ye integral alınır

$$\begin{aligned} (\alpha - \mu_1) \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 d\tau + (e_* - 3\mu_2) \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 d\tau &\leq \int_0^t \left( \frac{1}{4\mu_1} (b^*)^2 - \frac{1}{2} b^* - \frac{1}{4\mu_2} (d^*)^2 \right) \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 d\tau \\ + \frac{(h^*)^2}{4\mu_2} \int_0^t \|u\|^2 d\tau + \frac{1}{4\mu_2} \int_0^t \|f\|^2 d\tau & \end{aligned} \quad (4.7)$$

eşitsizliği elde edilir. Keyfi  $w(t) \in C^1[0, T]$  için

$$w(t) = w(0) + \int_0^t w'(\tau) d\tau$$

olduğu açıktır. Bu eşitliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$w^2(t) \leq 2w^2(0) + 2\left(\int_0^t w'(\tau) d\tau\right)^2 \leq 2w^2(0) + 2\int_0^t 1 \cdot d\tau \int_0^t |w'(\tau)|^2 d\tau$$

ve  $0 < t \leq T$  göz önünde bulundurulursa

$$w^2(t) \leq 2w^2(0) + 2T \int_0^t |w'(\tau)|^2 d\tau$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_0^t |w'(\tau)|^2 d\tau \geq \frac{1}{2T} w^2(t) - \frac{1}{T} w^2(0)$$

olur. Bu eşitsizlik  $w = u(x, t)$  fonksiyonu için kullanılırsa

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 d\tau \geq \frac{1}{2T} \|u\|^2 - \frac{1}{T} \|\varphi\|^2 \text{ olur.} \quad (4.8)$$

$\mu_1 = \frac{\alpha}{2}$  ve  $\mu_2 = \frac{e_*}{6}$  alınıp (4.7) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 d\tau + \frac{e_*}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 d\tau \leq \int_0^t \left( \frac{1}{2\alpha} (b^*)^2 - \frac{1}{2} \bar{b} - \frac{3}{2e_*} (d_*)^2 \right) \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 d\tau \\ + \frac{3(h^*)^2}{2e_*} \int_0^t \|u\|^2 d\tau + \frac{1}{4\mu_2} \int_0^t \|f\|^2 d\tau \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir.

$$c_1 = \left( \frac{1}{2\alpha} (b^*)^2 - \frac{1}{2} \bar{b} - \frac{3}{2e_*} (d_*)^2 \right), \quad c_2 = \frac{3(h^*)^2}{2e_*}$$

ve  $c_0 = \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{e_*}{2}\right)^{-1} \max\left(\max(c_1, c_2), \frac{1}{4\mu_2}\right)$  olarak alınır

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 d\tau + \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 d\tau \leq c_0 \int_0^t \left[ \left( \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \|u\|^2 \right) + \|f\|^2 \right] d\tau \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.8) eşitsizliği (4.9) da dikkate alınır

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \|u\|^2 \leq 2 \left( \|\varphi\|^2 + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2 \right) + 2Tc_0 \int_0^t \left( \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \|u\|^2 + \int_0^t \|f\|^2 \right) d\tau$$

elde edilir.

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \|u\|^2 = \delta(t), \quad 2 \left( \|\varphi\|^2 + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2 \right) = \delta_*, \text{ ve } 2Tc_0 = c \text{ alınır}$$

$$\delta(t) \leq \delta_* + c \int_0^t (\delta(\tau) + \|f\|^2) d\tau$$

şekline gelir. Bu eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$\delta(t) \leq \delta_* e^{ct} + c \int_0^t e^{c(t-\tau)} \|f\|^2 d\tau$$

elde edilir. Buradan (4.1) deki değerlendirmenin doğru olacağı açıktır.

## 5. PSEUDO-PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN FARK METOTLARI

Bu bölümde pseudo-parabolik diferansiyel denklem için uygun fark şemaları kurulacak ve bu şemaların nümerik çözümü yapılacaktır.

### 5.1. Fark Şemasının Kurulması:

$h = 1/N$ ,  $\tau = T/M$  olsun.  $x_i = ih$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) ve  $t_m = m\tau$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ) öyle ki noktalar  $\{(x_i, t_m)\}$  biçiminde  $\bar{R}$  de bir kafes örtüsü ve bu örtü  $\bar{R}_{h\tau}$  ile gösterilsin.  $x_i - h/2 = x_{i-1/2}$ ,  $t_m - \tau/2 = t_{m-1/2}$  ve eğer  $\phi$  fonksiyonu  $\bar{R}_{h\tau}$  üzerinde veya onun  $R_{h\tau}$  iç noktalarında  $\phi(x_i, t_m) = \phi_{im}$ ,  $\phi(x_{i-1/2}, t_m) = \phi_{i-1/2,m}$ , ve  $\phi(x_i, t_{m-1/2}) = \phi_{i,m-1/2}$  ile gösterilsin.  $\|\cdot\|_0^m$  ile gösterilen ayırık integral  $L_2$  normunun yerine  $\|\cdot\|_0^m$  sembolü kullanımı hariç gösterimin daha kolay olması için Lees (1959) notasyonuna bağlı kalındı.

Her bir durumdaki hatayla verilen denklemi sağlayan Standart ve Crank-Nicolson fark yaklaşımları tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} (a_{i+1/2, m-1} w_{\hat{x}\bar{t}}(x_i, t_m))_{\bar{x}} + (b_{i+1/2, m-1} w_x(x_i, t_{m-1}))_{\bar{x}} &= c_{i, m-1} w_{\hat{x}\bar{t}}(x_i, t_m) \\ &+ F(x_i, t_{m-1}, w_{i, m-1}, w_{\hat{x}}(x_i, t_{m-1}), w_{\bar{t}}(x_i, t_m)), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ w_{i0} &= u_0(x_i), w_{0m} = f(t_m), w_{Nm} = g(t_m) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Fark sisteminin çözümü (1.1)-(1.3) ün  $u$  çözümü için *Standart yaklaşım* olarak alınabilir.

$$\begin{aligned} (a_{i+1/2, m-1/2} w_{\hat{x}\bar{t}}(x_i, t_m))_{\bar{x}} + \frac{1}{2} [(b_{i+1/2, m-1/2} w_x(x_i, t_{m-1}))_{\bar{x}} + (b_{i+1/2, m-1/2} w_x(x_i, t_m))_{\bar{x}}] &= c_{i, m-1/2} w_{\hat{x}\bar{t}}(x_i, t_m) + \\ F(x_i, t_{m-1/2}, \frac{1}{2}(w_{i, m-1} + w_{im}), \frac{1}{2}(w_{\hat{x}}(x_i, t_{m-1}) + w_{\hat{x}}(x_i, t_m)), w_{\bar{t}}(x_i, t_m)) &, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ w_{i0} &= u_0(x_i), w_{0m} = f(t_m), w_{Nm} = g(t_m) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ve fark sisteminin çözümü *Crank-Nicolson yaklaşımı* olarak alınabilir.

Eğer  $F(x, t, z, p, q) = F_1(x, t, z, p) + F_2(x, t, q)$  ve  $F$  (ii) yi sağlıyorsa o zaman (5.1) yaklaşımı her adımda denklemlerin lineer üç köşegenli sistemine indirgenir.

Genellikle hem (5.1) hem de (5.2) cebirsel denklemlerin nonlinear sistemleridir ve iteratif süreçlerle çözümlenmelidir. Bu problem ileri ki bölümde ele alınacaktır.

(i)-(iii) varsayımlarına dayanarak Taylor teoremi ve çok değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoreminden yararlanılırsa (1.1) için  $u$  çözümü  $o(h^2 + \tau)$  hata terimiyle (5.1) yaklaşımını ve  $o(h^2 + \tau^2)$  hata terimiyle de (5.2) yaklaşımını sağlar.

Eğer  $z(x_i, t_m) = u(x_i, t_m) - w(x_i, t_m)$  alınır ve buna karşılık gelen ve aynı zamanda  $u$  tarafından sağlanan şemadan her bir fark şeması çıkarılırsa hata denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} (a_{i+1/2, m-1} z_{x\bar{t}}(x_i, t_m))_{\bar{x}} + (b_{i+1/2, m-1} z_x(x_i, t_{m-1}))_{\bar{x}} &= c_{i, m-1} z_{x\bar{t}}(x_i, t_m) + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_{im} z_{i, m-1} \\ &+ \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)_{im} z_{\hat{x}}(x_i, t_{m-1}) + \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)_{im} z_i(x_i, t_m) + o(h^2 + \tau) \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ z_{i0} &= 0, \quad z_{0m} = z_{Nm} = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} (a_{i+1/2, m-1/2} z_{x\bar{t}}(x_i, t_m))_{\bar{x}} + \frac{1}{2} [(b_{i+1/2, m-1/2} z_x(x_i, t_{m-1}))_{\bar{x}} + (b_{i+1/2, m-1/2} z_x(x_i, t_m))_{\bar{x}}] \\ = c_{i, m-1/2} z_{x\bar{t}}(x_i, t_m) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_{im} (z_{i, m-1} + z_{im}) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)_{im} (z_{\hat{x}}(x_i, t_{m-1}) + z_{\hat{x}}(x_i, t_m)) \\ + \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)_{im} (z_{\bar{t}}(x_i, t_m) + o(h^2 + \tau^2)), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ z_{i0} &= 0, \quad z_{0m} = z_{Nm} = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Standart ve Crank-Nicolson semaları sırasıyla ortalama değer teoremi yardımıyla orta noktalarda çizgiyle imlenen kısmi türevler hesaplandı.

(5.3) ve (5.4) hata denklemleri lineer fark denklemleri ki çözümler  $B_{hr}$  veya  $R_{hr}$  sınırı üzerinde sıfırlanıyor. 6. bölümde ilgili fark denklemleri için çözümün  $\|\cdot\|_1^m$  normu için sınırlar geliştirilecek sonra bu sonuçlar 7. bölümde her bir yaklaşımın düzgün yakınsaklığını göstermek için uygulanacaktır.

### 5.1. Fark Denklemlerinin Çözümü:

İnşa edilecek yakınsak iteratif bir yöntemle Standart ve Crank-Nicolson şemaları için tek çözümün varlığı gösterilecektir. Lees (1959) da parabolik problemlerin çözümünün hesaplanmasında düzeltilmiş geri fark yaklaşımı için iteratif süreçler sunar. Bu yöntem (5.2) Crank-Nicolson yaklaşımına uyarlanacaktır. Bu sistem  $w_{i,m-1}$  den  $w_{i,m}$  e kadar hesaplanacaktır.  $1 \leq i \leq N-1$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , aşağıdaki formda yazılmalıdır.

$$\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij} w_{jm} = -h^2 F(x_i, t_{m-1/2}, \frac{1}{2}(w_{i,m} + w_{i,m-1}), \frac{1}{4h}(w_{i+1,m} - w_{i-1,m} - w_{i+1,m-1} + w_{i-1,m-1}), \frac{1}{\tau}(w_{i,m} - w_{i,m-1}))$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \beta_{ij} w_{j,m-1} + b_i, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (5.5)$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -\left(\frac{1}{\tau} a_{i-1/2, m-1/2} + \frac{1}{2} b_{i-1/2, m-1/2} + \frac{1}{2} \lambda c_{i, m-1/2}\right), & j = i-1 \\ \left(\frac{1}{\tau} a_{i+1/2, m-1/2} + a_{i-1/2, m-1/2} + \frac{1}{2}(b_{i+1/2, m-1/2} + b_{i-1/2, m-1/2})\right), & j = i \\ -\left(\frac{1}{\tau} a_{i+1/2, m-1/2} + \frac{1}{2} b_{i+1/2, m-1/2} - \frac{1}{2} \lambda c_{i, m-1/2}\right), & j = i+1 \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} -\left(\frac{1}{\tau} a_{i-1/2, m-1/2} + \frac{1}{2} b_{i-1/2, m-1/2} - \frac{1}{2} \lambda c_{i, m-1/2}\right), & j = i-1, \\ \left(\frac{1}{\tau} a_{i+1/2, m-1/2} + a_{i-1/2, m-1/2} - \frac{1}{2}(b_{i+1/2, m-1/2} + b_{i-1/2, m-1/2})\right), & j = i, \\ -\left(\frac{1}{\tau} a_{i+1/2, m-1/2} + \frac{1}{2} b_{i+1/2, m-1/2} + \frac{1}{2} \lambda c_{i, m-1/2}\right), & j = i+1, \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} \frac{1}{\tau} a_{1/2, m-1/2} [f(t_m) - f(t_{m-1})] + \frac{1}{2} b_{1/2, m-1/2} [f(t_m) + f(t_{m-1})] \\ + \frac{1}{2} \lambda c_{1, m-1/2} [f(t_m) - f(t_{m-1})], & i = 1, \\ o, & 2 \leq i \leq N-2, \\ \frac{1}{\tau} a_{N-1/2, m-1/2} [g(t_m) - g(t_{m-1})] + \frac{1}{2} b_{N-1/2, m-1/2} [g(t_m) + g(t_{m-1})] \\ - \frac{1}{2} \lambda c_{N-1, m-1/2} [g(t_m) - g(t_{m-1})], & i = N-1, \end{cases}$$

Burada  $\lambda = h/\tau$ , ve  $w_{0l} = f(t_l)$ ,  $w_{Nl} = g(t_l)$ ,  $l = m-1, m$ . Her  $m = 1, 2, \dots, M$  için (5.5) in  $(w_{1m}, w_{2m}, \dots, w_{N-1m})$  tek çözümünün varolduğu gösterilmelidir. Notasyon kolaylığı için  $\eta_i = w_{im}$  olsun. (5.5) sistemi (5.6) sistemine eşdeğerdir.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij}^{(\mu, \theta)} \eta_j &= \mu \eta_i + (1 - \delta_{i1}) \theta \eta_{i-1} + (1 - \delta_{i, N-1}) \theta \eta_{i+1} \\ &\quad - h^2 F(x_i, t_{m-1/2}, \frac{1}{2}(\eta_i + w_{i, m-1}), \frac{1}{4h}(\eta_{i+1} - \eta_{i-1} - w_{i+1, m-1} + w_{i-1, m-1}), \frac{1}{\tau}(\eta_i - w_{i, m-1})) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N+1} \beta_{ij} w_{j, m-1} + b_i, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

burada  $\delta_{ij}$  kroneker deltası,  $\mu$  ve  $\theta$  pozitif sabitlerdir ve

$$\delta_{ij}^{(\mu, \theta)} = \begin{cases} \delta_{ij} + \mu, & i = j \\ \delta_{ij} + \theta, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| > 1 \end{cases}$$

(5.6) nın çözümü için iteratif şema tanımlanacaktır.  $l = 0, 1, 2, \dots$  için  $\eta_0^{(l)} = f(t_m)$ ,  $\eta_N^{(l)} = g(t_m)$ , verilsin.  $\eta_i^{(0)}$  keyfi verilsin.  $i = 1, 2, \dots, N-1$  ve  $\eta_i^{(l)}$ ,  $l \geq 1$  verilsin. Üç köşegenli lineer sistemin çözümü olarak

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij}^{(\mu, \theta)} \eta_j^{(l)} &= \mu \eta_i^{(l-1)} + (1 - \delta_{i1}) \theta \eta_{i-1}^{(l-1)} + (1 - \delta_{i, N-1}) \theta \eta_{i+1}^{(l-1)} \\ &\quad - h^2 F(x_i, t_{m-1/2}, \frac{1}{2}(\eta_i^{(l-1)} + w_{i, m-1}), \frac{1}{4h}(\eta_{i+1}^{(l-1)} - \eta_{i-1}^{(l-1)} - w_{i+1, m-1} + w_{i-1, m-1}), \frac{1}{\tau}(\eta_i^{(l-1)} - w_{i, m-1})) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \beta_{ij} w_{j, m-1} + b_i, \quad 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

her bir  $l$  için (5.7) nin bir tek çözüme sahip olduğu gösterilecektir. (5.7) ten izlersek

$$\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij}^{(\mu, \theta)} (\eta_j^{(l+1)} - \eta_j^{(l)}) = d_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (5.8)$$

burada

$$\begin{aligned} d_i &= \left[ \mu - h \left( \frac{1}{2} h \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_i + \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)_i \right) \right] (\eta_i^{(l)} - \eta_{i-1}^{(l-1)}) + \left[ (1 - \delta_{i1}) \theta + \frac{h}{4} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)_i \right] (\eta_{i-1}^{(l)} - \eta_{i-1}^{(l-1)}) \\ &\quad + \left[ (1 - \delta_{i, N-1}) \theta - \frac{h}{4} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)_i \right] (\eta_{i+1}^{(l)} - \eta_{i+1}^{(l-1)}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Çizgiyle imlenen yerlerde  $v_i \eta_{i+j}^{(l)} + (1-v_i) \eta_{i+j}^{(l-1)}$ ,  $j = -1, 0, 1$  olmak üzere ortalama değer teoreminin yardımıyla orta noktalar için türevin hesaplanması gerekmektedir. Şimdi  $\mu$  ve  $\theta$  seçilsin, öyle ki

$$\mu > h \left( \frac{1}{2} h z^* + \lambda q^* \right), \quad \theta \geq p^* \frac{h}{4}, \quad \mu > 2\theta \quad (5.10)$$

$\mu$  ve  $\theta$  için bu seçimle açıktır ki (5.9) da  $(\eta_i^{(l)} - \eta_i^{(l-1)})$  in katsayıları tüm  $1 \leq i \leq N-1$  için kesinlikle pozitiftir.  $(\eta_{i-1}^{(l)} - \eta_{i-1}^{(l-1)})$  in katsayıları  $2 \leq i \leq N-1$  için negatif değildir ve  $(\eta_{i+1}^{(l)} - \eta_{i+1}^{(l-1)})$  in katsayıları da  $1 \leq i \leq N-2$  için negatif değildir. Dolayısıyla (5.9) dan

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} |d_i| \leq \max_{1 \leq i \leq N-1} \left[ \mu - h \left( \frac{1}{2} h \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_i + \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)_i \right) + 2\theta \right] \cdot \max_{1 \leq i \leq N-1} |\eta_i^{(l)} - \eta_i^{(l-1)}| \quad (5.11)$$

Bu noktada bir lemma ile gösterilebilir ki her bir  $1 \leq i \leq N-1$  için  $\{\eta_i^{(l)}\}$  bir Cauchy dizisidir. (lees, 1959) daki Lemma 4 ün kanıtının basit bir uyarlamasıyla bu lemma kanıtlanabilir. Burada  $\mu > 2\theta$  durumu kullanılır.

Lemma 5.1.  $h$  ve  $\tau$  öyle seçilebilir ki

$$\tau \leq a_* \left( \theta + \frac{1}{2} b^* + \frac{1}{2} \lambda c^* \right)^{-1} \quad (5.12)$$

Eğer  $\theta$ ,  $b^*$  ve  $c^*$  hiç biri sıfır değilse diğer yandan  $h$  ve  $\tau$  için herhangi bir sınırlama yapılmazsa o zaman lineer sistem

$$\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij}^{(\mu, \theta)} \xi_j = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

bir tek çözüme sahiptir ve

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} |\xi_j| \leq (\mu + 2\theta)^{-1} \max_{1 \leq i \leq N-1} |f_i|.$$

olur.

Eğer (5.8) sistemi için lemma 5.1 ve (5.11) uygulanırsa

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} |\eta_i^{(l+1)} - \eta_i^{(l)}| \leq (\mu + 2\theta)^{-1} \left[ \mu + 2\theta - h \left( \lambda q_* - \frac{1}{2} h z^* \right) \right] \cdot \max_{1 \leq i \leq N-1} |\eta_i^{(l)} - \eta_i^{(l-1)}|. \quad (5.13)$$

olur.

$$\rho = (\mu + 2\theta)^{-1} \left( \mu + 2\theta - h \left( \lambda q_* - \frac{1}{2} h z^* \right) \right)$$

olarak tanımlanırsa ve (5.12) değerlendirmesinin yapılabilmesi için ayrıca  $\tau$  yı da seçmek gerekir eğer  $z^* \neq 0$  değilse

$$\tau < 2q_*/z^* \quad (5.14)$$

Eğer  $z^* = 0$  ise k için ek bir sınırlama yapılmaz. (5.14) ten ve  $\mu$  ve  $\theta$  seçimi ki  $0 < \rho < 1$  den izlenebilir.  $M_l = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\eta_i^{(l)} - \eta_i^{(l-1)}|$ ,  $l \geq 0$  verilsin. (5.13) ün  $l = 0, 1, \dots$  için  $M_{l+1} \leq \rho M_l$  ifadesini içerdiği açıktır. Her bir  $i$  için  $\eta_i^{(l)}$  nin bir Cauchy dizisi olduğu ve (5.6) nin bir tek çözümüne yakınsadığı (5.5) ten izlenebilir.

### **Teorem 5.1.**

Yeterince küçük tüm  $h$  ve  $\tau$  lar için (5.2) Cranck-Nicolson yaklaşımı bir tek çözüme sahiptir. Bu çözüm (5.7) iteratif işlemiyle bulunabilir.

Bu metod (5.1) Standart yaklaşımı için Teorem 5.1 in nasıl uygulandığını göstermek için kullanıldı. Aslında iteratif işlemler  $\theta$  düzeltmesine ihtiyaç duymaz ve yakınsaklığın ispatını içermezler.

### **Teorem 5.2**

Tüm  $\tau$  lar ve yeterince küçük tüm  $h$  lar için (5.1) Standart yaklaşımı bir tek çözüme sahiptir. Bu çözüm iteratif işlemlerle bulunabilir.

## 6. DİSKRET ENERJİ DEĞERLENDİRMELERİ

Bu bölümde Standart yaklaşım için (5.3) hata denkleminin benzeri bir lineer denklem için bir diskret enerji değerlendirmesi yapılacaktır. Crank-Nicolson yaklaşımı için diskret enerji değerlendirmeleri aşağıda Standart yaklaşım için yapılabilecek benzediğinden ayrıca üzerinde durulmayacaktır.

### Lemma 6.1

$\bar{R}_{hr}$  üzerinde  $\phi$  ve  $C$  fonksiyonları tanımlansın.  $Q$  ve  $G$   $R_{hr}$  üzerinde tanımlansın ve  $A$ ,  $B$   $G_{hr} = \bar{R}_{hr} - B_{hr}^2 - \{(1,0)\}$  üzerinde fonksiyonlar olarak tanımlansın.

$F_{hr} = \bar{R}_{hr} - B_{hr}^1 - \{(0,0)\}$ ,  $A_* = \min_{G_{hr}} A$ ,  $Q_* = \min_{R_{hr}} Q$  olarak verilsin.  $\phi$ , fark denklemi için bir çözüm olarak verilsin.  $m = 1, 2, \dots, M$  için

$$Q_{im}\phi_i(x_i, t_m) + C_{i,m-1}\phi_{xt}^-(x_i, t_m) = \left(A_{i,m-1}\phi_{xt}^-(x_i, t_m)\right)_x + \left(B_{i,m-1}\phi_x(x_i, t_{m-1})\right)_x + G_{im} \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (6.1)$$

Eğer  $B_{hr}^1 \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\} \cup B_{hr}^2$  üzerinde  $\phi$  sıfır olursa  $A_* > 0$ ,  $Q_* > 0$  ve  $\max_{F_{hr}} C_x^- \leq 0$  ise o zaman  $K_1$  ve  $K_2$  sabitleri vardır ve yalnızca  $A_*$ ,  $Q_*$ ,  $\|B\|_{\bar{R}_{hr}}$ ,  $\|C_x^-\|_{F_{hr}}$  ve  $T$  ye bağlıdır öyle ki

$$\left(\|\phi\|_1^m\right)^2 \leq K_1 T \tau \sum_{r=1}^m \left(\|G\|_0^r\right)^2 + K_2 \left(\|\phi\|_1^0\right)^2 \quad (6.2)$$

Tüm  $\tau \leq 1$  ler ve yeterince küçük tüm  $h$  lar için  $1 \leq m \leq M$ .

Enerji metodunun uygulamalarıyla birlikte genel olarak ispat çok güçlü  $A_*, Q_* > 0$  pozitif olma varsayımlarına bağımlıdır ki  $\max_{F_{hr}} C_x^- \leq 0$  dır.

İspat: (6.1) eşitliği  $h\phi_t(x_i, t_m)$  ile çarpılıp  $R_{hr}$  üzerinde toplanırsa

$$\begin{aligned} h\tau \sum_{R_{hr}} Q_{ir} \left(\phi_t(x_i, t_r)\right)^2 + h\tau \sum_{R_{hr}} C_{i,r-1} \phi_{xt}^-(x_i, t_r) \phi_t(x_i, t_r) \\ = h\tau \sum_{R_{hr}} \left(A_{i,r-1} \phi_{xt}^-(x_i, t_r)\right)_x \phi_t(x_i, t_r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h\tau \sum_{R_{hr}} (B_{i,r-1} \phi_x(x_i, t_{r-1}))_{\bar{x}} \phi_t(x_i, t_r) \\
& +h\tau \sum_{R_{hr}} G_{ir} \phi_t(x_i, t_r). \tag{6.3}
\end{aligned}$$

$\bar{R}_{hr}$  nın dışında ve  $x=1$  üzerinde  $A$  ve  $B$  keyfi olarak tanımlansın.  $\phi$ ,  $\bar{R}_{hr}$  nın dışında keyfi olarak tanımlansın.  $D_{hr} = R_{hr} \cup B_{hr}^2$  ve  $\bar{D}_{hr} = D_{hr} \cup B_{hr}^1$  verilsin. O zaman  $\phi$  için ve  $\phi_t$  den itibaren  $B_{hr}^1$  ve  $B_{hr}^2$  üzerinde sıfırlanıyor.(6.3) ün yerine

$$\begin{aligned}
& h\tau \sum_{R_{hr}} Q_{ir} (\phi_t(x_i, t_r))^2 + h\tau \sum_{R_{hr}} C_{i,r-1} \phi_{xt}^-(x_i, t_r) \phi_t(x_i, t_r) \\
& = h\tau \sum_{\bar{D}_{hr}} (A_{i,r-1} \phi_{xt}^-(x_i, t_r))_{\bar{x}} \phi_t(x_i, t_r) \\
& + h\tau \sum_{\bar{D}_{hr}} (B_{i,r-1} \phi_x(x_i, t_{r-1}))_{\bar{x}} \phi_t(x_i, t_r) \\
& + h\tau \sum_{R_{hr}} G_{ir} \phi_t(x_i, t_r) \tag{6.4}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$r = 1, 2, \dots, M$  için  $\phi_t(0, t_r) = \phi_t(1, t_r)$  ve  $A(x_i, t_r)$  nin kesin pozitifliği ve kısımların toplamı göz önünde bulundurarak ilişkiler gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N (A_{i,r-1} \phi_{xt}^-(x_i, t_r))_{\bar{x}} \phi_t(x_i, t_r) & = -\sum_{i=1}^N A_{i-1,r-1} (\phi_{xt}^-(x_i, t_r))^2 \\
& \leq -A_* \sum_{i=1}^N (\phi_{xt}^-(x_i, t_r))^2 \tag{6.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N (B_{i,r-1} \phi_x(x_i, t_{r-1}))_{\bar{x}} \phi_t(x_i, t_r) & = -\sum_{i=1}^N B_{i-1,r-1} \phi_{xt}^-(x_i, t_r) \phi_x(x_i, t_{r-1}) \\
& \leq \|B\|_{\bar{R}_{hr}} \left| \phi_{xt}^-(x_i, t_r) \right| \left| \phi_x(x_i, t_{r-1}) \right| \tag{6.6}
\end{aligned}$$

olduğundan dolayı aşağıdaki özdeşlikler türetilebilir.

$$\begin{aligned}
\phi_{xt}^-(x_i, t_r) \phi_t(x_i, t_r) & = \frac{1}{2} \left[ (\phi_t(x_i, t_r))^2 \right]_{\bar{x}} + \frac{1}{2} h (\phi_{xt}^-(x_i, t_r))^2, \\
\phi_{xt}^-(x_i, t_r) \phi_t(x_i, t_r) & = \frac{1}{2} \left[ (\phi_t(x_i, t_r))^2 \right]_x - \frac{1}{2} h (\phi_{xt}^-(x_i, t_r))^2,
\end{aligned}$$

$\phi_{xt}^-(x_i, t_r)$  nin tanımından izlenebilir ki

$$\sum_{i=1}^{N-1} C_{i,r-1} \phi_{xt}^-(x_i, t_r) \phi_t(x_i, t_r)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} C_{i,r-1} \left( \left[ (\phi_t(x_i, t_r))^2 \right]_x^- + \left[ (\phi_t(x_i, t_r))^2 \right]_x \right) \\
&+ \frac{1}{4h} \sum_{i=1}^{N-1} C_{i,r-1} \left[ (\phi_{xt}^-(x_i, t_r))^2 - (\phi_{xt}^+(x_i, t_r))^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.7}$$

kısımlar toplamı tekrar kullanılırsa ve  $\phi_t$ ,  $B_{hr}^1$  ile  $B_{hr}^2$  üzerinde sıfırlanırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} C_{i,r-1} \left( \left[ (\phi_t(x_i, t_r))^2 \right]_x^- + \left[ (\phi_t(x_i, t_r))^2 \right]_x \right) \\
&= (4h)^{-1} \left[ C_{N-1,r-1} (\phi_t(x_{N-1}, t_r))^2 - C_{1,r-1} (\phi_t(x_1, t_r))^2 \right] \\
&- \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{N-1} C_x^-(x_i, t_{r-1}) \left[ (\phi_t(x_{i-1}, t_r))^2 + (\phi_t(x_i, t_r))^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} h \sum_{i=1}^{N-1} C_{i,r-1} \left[ (\phi_{xt}^-(x_i, t_r))^2 - (\phi_{xt}^+(x_i, t_r))^2 \right] \\
&= (4h)^{-1} \left[ C_{1,r-1} (\phi_t(x_1, t_r))^2 - C_{N-1,r-1} (\phi_t(x_{N-1}, t_r))^2 \right] \\
&+ \frac{1}{4} h \sum_{i=2}^{N-1} C_x^-(x_i, t_{r-1}) (\phi_{xt}^-(x_{i-1}, t_r))^2
\end{aligned} \tag{6.9}$$

(6.7) de (6.8) ve (6.9) yazılırsa ve tüm  $(x_i, t_r)$  ler için  $C_x^-(x_i, t_r) \leq 0$  göz önünde bulundurulursa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$h\tau \sum_{R_{hr}} C_{i,r-1} \phi_{xt}^-(x_i, t_r) \phi_t(x_i, t_r) \geq -\frac{1}{4} h \|C_x^-\|_{F_{hr}} \sum_{D_{hr}} (\phi_{xt}^-(x_i, t_r))^2. \tag{6.10}$$

(6.4) te  $Q$  nun kesin pozitifliği ve (6.5), (6.6), (6.10) değerlendirmeleri uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&Q_* h\tau \sum_{R_{hr}} (\phi_t(x_i, t_r))^2 + \left( A_* - \frac{1}{4} h \|C_x^-\|_{F_{hr}} \right) h\tau \sum_{D_{hr}} (\phi_{xt}^-(x_i, t_r))^2 \\
&\leq \|B\|_{R_{hr}} h\tau \sum_{D_{hr}} |\phi_{xt}^-(x_i, t_r)| |\phi_x^-(x_i, t_{r-1})| + h\tau \sum_{R_{hr}} |G_{ir}| |\phi_t(x_i, t_r)|
\end{aligned} \tag{6.11}$$

değerlendirmesi elde edilir.

Tüm  $a$  ve  $b$  reel sayıları için her  $\varepsilon > 0$  için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$ab \leq \varepsilon a^2 + b^2 (4\varepsilon)^{-1} \tag{6.12}$$

(6.11) in sağ tarafındaki ilk toplamın terimlerine  $\varepsilon = A_*/4$  için ikinci toplamın terimlerine

$\varepsilon = Q_*$  için (6.12) uygulanırsa

$$(A_* - h \|C_x^-\|_{F_{hr}}) h\tau \sum_{D_{hr}} (\phi_{xt}^-(x_i, t_r))^2 \leq 4A_*^{-1} \|B\|_{R_{hr}}^2 h\tau \sum_{D_{hr}} (\phi_x^-(x_i, t_{r-1}))^2$$

$$+Q_*^{-1}h\tau\sum_{R_{hr}}|G_{ir}|^2 \quad (6.13)$$

Kolayca görülebilir ki

$$\phi_x(x_i, t_M) - \phi_x(x_i, 0) = k \sum_{l=1}^M \phi_{xt}(x_i, t_l)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğe Scharwz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\left(\phi_x(x_i, t_M) - \phi_x(x_i, 0)\right)^2 \leq \tau T \sum_{l=1}^M \left(\phi_{xt}(x_i, t_l)\right)^2 \quad (6.14)$$

elde edilir.

$h$  öyle seçilebilir ki

$$A_* = h \left\| C_x^- \right\|_{F_{hr}} > 0$$

$h$  nin bu seçimi ile birlikte (6.13) te (6.14) uygulanırsa

$$h \sum_{i=1}^N \left(\phi_x(x_i, t_M) - \phi_x(x_i, 0)\right)^2 \leq S_1 Th \tau \sum_{R_{hr}} G_{ir}^2 + S_2 Th \tau \sum_{D_{hr}} \left(\phi_x(x_i, t_{r-1})\right)^2$$

elde edilir. Burada

$$S_1 = Q_*^{-1} \left( A_* - h \left\| C_x^- \right\|_{F_{hr}} \right)^{-1} \quad S_2 = 4A_*^{-1} \left( A_* - h \left\| C_x^- \right\|_{F_{hr}} \right)^{-1} \left\| B \right\|_{R_{hr}}^2$$

biçimindedir. O halde

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^N \left(\phi_x(x_i, t_M)\right)^2 &\leq S_1 Th \tau \sum_{R_{hr}} G_{ir}^2 + h \sum_{i=1}^N \left( 2\phi_x(x_i, t_M) \phi_x(x_i, 0) - \left(\phi_x(x_i, 0)\right)^2 \right) \\ &\quad + S_2 Th \tau \sum_{D_{hr}} \left(\phi_x(x_i, t_{r-1})\right)^2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Ayrıca

$$2\phi_x(x_i, t_M) \phi_x(x_i, 0) \leq 2\left(\phi_x(x_i, 0)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\phi_x(x_i, t_M)\right)^2$$

olduğunu belirtelim. (6.15) ten görülebilir ki

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^N \left(\phi_x(x_i, t_M)\right)^2 &\leq 2S_1 Th \tau \sum_{R_{hr}} G_{ir}^2 + 2h \sum_{i=1}^N \left(\phi_x(x_i, 0)\right)^2 \\ &\quad + 2S_2 Th \tau \sum_{D_{hr}} \left(\phi_x(x_i, t_{r-1})\right)^2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Lees (1959) dan

$$h \sum_{i=1}^N \left(\phi(x_i, t_M)\right)^2 \leq h \sum_{i=1}^N \left(\phi_x(x_i, t_M)\right)^2$$

olduğu görülebilir. Poincare eşitsizliğinin (Showalter ve Ting, 1971) bir diskret benzeri olarak ta görülebilir. Bu sonuçlar (6.16) da kullanılırsa

$$\left(\|\phi\|_1^M\right)^2 \leq 4S_1T\tau \sum_{r=1}^M \left(*\|G\|_0^r\right)^2 + 4(1+S_2T\tau)\left(\|\phi\|_0^1\right)^2 + 4S_2T\tau \sum_{l=1}^{M-1} \left(\|\phi\|_1^l\right)^2 \quad (6.17)$$

Önceki analiz  $1 \leq r \leq m$ ,  $1 \leq m \leq M$  için işlemlerle kısıtlanmış olabilir ve (6.17) de her bir  $m \geq 1$  için  $M$  yer değiştirilebilir.

$$\left(\|\phi\|_1^m\right)^2 \leq 4S_1T\tau \sum_{r=1}^m \left(*\|G\|_0^r\right)^2 + 4(1+S_2T\tau)\left(\|\phi\|_0^1\right)^2 + 4S_2T\tau \sum_{l=1}^{m-1} \left(\|\phi\|_1^l\right)^2 \quad (6.18)$$

Burada

$$\sum_{l=1}^0 \left(\|\phi\|_1^l\right)^2 = 0$$

olduğu anlaşılır. Lees (1959) da verilen gronwall lemmasının diskret benzeri (6.18) e uygulanırsa

$$\left(\|\phi\|_1^m\right)^2 \leq L_1T\tau \sum_{r=1}^m \left(*\|G\|_0^r\right)^2 + L_2\left(\|\phi\|_1^0\right)^2$$

elde edilir. Burada

$$L_1 = 4S_1 \exp(4S_2T^2) \quad L_2 = 4(1+S_2T\tau) \exp(4S_2T^2)$$

olduğundan (6.2) eşitsizliğinin doğruluğu gösterildi.

Bir lineer fark denkleminin çözümü üzerinde bir sınır (5.4) Crank-Nicolson hata denklemi için yapılarına benzerdir. İspat süreci Lemma 6.1 gibidir.

### Lemma 6.2.

$\phi$ ,  $\bar{R}_{hr}$  üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.  $Q, G$   $R_{hr}$  üzerinde tanımlı fonksiyonlar olsun.  $C$ ,  $\bar{R}_{hr} - B_{hr}^0$  üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Ve  $A$  ve  $B$   $G_{hr} = \bar{R}_{hr} - B_{hr}^0 - B_{hr}^2$  üzerinde tanımlı fonksiyonlar olsun.  $F_{hr} = \bar{R}_{hr} - B_{hr}^0 - B_{hr}^1$ ,  $A_* = \min_{G_{hr}} A$  ve  $Q_* = \min_{R_{hr}} Q$  olarak tanımlansın.  $\phi$  fark denklemi için bir çözüm olsun.

$$\begin{aligned} Q_{im}\phi_i(x_i, t_m) + C_{im}\phi_{xi}^-(x_i, t_m) &= \left(A_{im}\phi_{xi}^-(x_i, t_m)\right)_x + \frac{1}{2}\left(\left(B_{im}\phi_x(x_i, t_m)\right)_x\right. \\ &\quad \left.+ \left(B_{im}\phi_x(x_i, t_{m-1})\right)_x\right) + G_{im}, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{aligned}$$

$m=1,2,\dots,M$ . olmak üzere. Eğer  $\phi$ ,  $B_{hr}^1 \cup B_{hr}^2 \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\}$  üzerinde sıfırlanırsa  $A_* > 0$ ,  $Q_* > 0$  ve  $\max_{F_{hr}} C_x^- \leq 0$  ise o zaman burada  $K_1, K_2 > 0$  sabitleri vardır ve sadece

$A_s, Q_s, \|B\|_{R_{hr}}, \|C_x\|_{F_{hr}}$  ve  $T$  ye bağımlıdır. Öyle ki  $1 \leq m \leq M$  olmak üzere tüm yeteri kadar küçük  $h$  ve  $\tau$  lar için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\left(\|\phi\|_1^m\right)^2 \leq K_1 T \tau \sum_{r=1}^m \left(\|G\|_0^r\right)^2 + K_2 \left(\|\phi\|_1^0\right)^2$$

## 7. FARK ŞEMASININ YAKINSAKLIĞI ve KARARLILIĞI

Bu bölümde (1.1)-(1.3) problemi için yapılan Standart ve Crank-Nicolson fark Şemalarının yakınsaklığı ve kararlılığı incelenecektir.

### 7.1 Yakınsaklık ve Kararlılık

(1.1)-(1.3) problemi için Standart ve Crank-Nicolson fark Şemaları kurulup diskret enerji değerlendirmeleri yapıldıktan sonra fark Şemasının düzgün yakınsaklığını gösterme aşamasına gelindi. Gerçekten (5.3) hata denklemini için Lemma 6.1 ile (5.3) teki terimler için  $G(x_i, t_m)$  denkleği uygulanırsa ki zaten  $z_{i,m-1}, z_{\hat{x}}(x_i, t_{m-1})$  terimlerini içerir ve yakınsama hızı  $O(h^2 + \tau)$  dir. Birkaç basit değerlendirme ve Gronwall lemmasının diskretize edilmiş versiyonu uygulanırsa  $1 \leq m \leq M$  için  $\|z\|_1^m = o(h^2 + \tau)$  elde edilir.  $\|z\|_{R_{ht}} \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq m \leq M} \|z\|_1^m$  olduğu görülebilir ki Sobolev Lemmasının diskretize edilmiş bir versiyonudur.  $\|z\|_{R_{ht}} = o(h^2 + \tau)$  olduğu aşağıda görülebilir. Crank-Nicolson yaklaşımının  $o(h^2 + \tau^2)$  hata ile düzgün yakınsak olduğu aynı kesinlikle Lemma 6.2 den görülebilir.

#### **Teorem 7.1.**

Giriş kısmının (i), (ii), (iii) varsayımlarında belirtilen  $u, a, b, c$  ve  $F$  üzerindeki belirli kısıtlamalar (sınırlamalar) altında (1.1) in çözümi için yazılan (5.1) Standart yaklaşımının ve (5.2) Crank-Nicolson yaklaşımının her biri  $h \rightarrow 0$  ve  $\tau \rightarrow 0$  olarak düzgün norm da yakınsaktır. Standart yaklaşım  $O(h^2 + \tau)$  kesinliğiyle Crank-Nicolson yaklaşımı ise  $o(h^2 + \tau^2)$  kesinliğiyle yakınsaktır.

Belirtilen her iki Şemanın hiç birinde  $h$  ve  $\tau$  arasında herhangi bir kısıtlama yapılmamıştır. Bununla birlikte Őayet  $\alpha$  pozitif bir sabit olmak üzere  $\lambda = \frac{\tau}{h^\alpha}$  oranı sabit tutulursa sezgisel asimptotik değerlendirmeler Douglas (1961) tarafından verilmiştir ki en az

hesaplama ile istenilen doğrulukta elde edilmesi bakımından standart yaklaşım için  $\alpha = 2$  Crank-Nicolson yaklaşımı için  $\alpha = 1$  en iyi seçimdir.

Şemanın kolay hesaplanabilmesi ve kullanışlı olması için kararlılık gereklidir.  $w(x, t)$  (5.2) veya (5.1) den birinin gerçek çözümü olsun. Varsayalım ki  $w$  nin hesaplanması denemesinde hatalar  $w(x_i, 0)$ ,  $1 \leq i \leq N-1$  başlangıç verisinin içine sokulsun. Verilerin gerçekten  $w^*(x_i, 0)$ ,  $1 \leq i \leq N-1$  şemasının içine sokulduğu ve çözümün  $w^*(x, t)$  olduğu denilebilir. Yaklaşımın  $\|\cdot\|_1^m$  normuna göre kararlı olduğu söylenebilir.  $\|w^* - w\|_1^m \leq L \|w^* - w\|_1^0$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  ise burada  $L$  kafes boyutundan bağımsız bir sabittir. Kolayca görülebilir ki  $w - w^*$  değerlendirmesi Lemma 6.1 veya Lemma 6.2 den biriyle örtülmüş bir fark denklemdir. Benzer bir argüman Teorem 7.1 de kullanıldı.

**Teorem 7.2.**

(5.1) Standart fark yaklaşımı tüm  $\tau \leq 1$  ve yeterince küçük tüm  $h$ 'lar için  $\|\cdot\|_1^m$  normuna göre kararlıdır. (5.2) Crank-Nicolson yaklaşımı ise yeterince küçük tüm  $h$  ve  $\tau$  lar için kararlıdır.

## 8. TARTIŞMA ve SONUÇ

Adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinde sıkça kullanılan tekniklerden biri maksimum prensibinin diferansiyel ve fark düzeylerinde uygulmasıdır. Kısmi diferansiyel denklemlerde ise maksimum prensibinin geçerli olabileceği yer eliptik ve parabolik tip denklemler için başlangıç-sınır değer problemleridir. Hiperbolik denklemler için ise bu tekniğin kullanılması söz konusu değildir. Fakat zamana bağlı diferansiyel denklemlerde özellikle çok boyutlu durumlarda enerji eşitsizlikleri denilen yöntem daha yaygın biçimde kullanılmaktadır

Bu çalışmada ele alınan pseudo-parabolik kısmi diferansiyel denklemler, yarı iletkenlerin yarı yerleşik matematiksel modellemelerinde ortaya çıkar. Bu denklemler için başlangıç ve sınır değer problemlerinin nümerik incelenmesinde klasik yöntemler genelde geçerli olmamaktadır. Özellikle kararlılık ve yakınsaklık durumlarının incelenmesinde bu problemlere özgü enerji eşitsizlikleri yönteminin geliştirilmesi önem arz etmektedir. Pseudo-parabolik denklemlerin incelenmesinde faydalı ve bilinen araçlardan olan enerji eşitsizlikleri metodu kullanılarak elde edilen Standart ve Crank-Nicolson şemalarının kararlılığı, yakınsaklığı, yakınsama oranı ve tek çözüme sahip olduğu gösterildi.

Bu çalışmaya temel teşkil eden lineer olmayan pseudo-parabolik problemler için, giriş bölümünde belirtildiği gibi nümerik çözüm yapılmıştır.

Bu çalışmanın 4. bölümünde (1.1)-(1.3) probleminin diferansiyel durumu için Gronwal integral eşitsizliklerinden yararlanılarak bazı değerlendirmeler yapılmıştır.

Çalışmanın 5. bölümünde (1.1)-(1.3) problemi için düzgün şebekede Standart ve Crank-Nicolson fark şemaları kurulmuştur. Ayrıca (1.1)-(1.3) problemi için kurulan fark şemalarının nümerik çözümü yapılmıştır. Bu probleme uygulanan metot klasik ve standart metotlardan farklıdır.

Çalışmanın 6. bölümünde kurulan fark şemaları için diskret enerji değerlendirmeleri yapılmıştır.

Çalışmanın 7.bölümü olan son bölümde de Standart ve Crank-Nicolson fark şemalarının kararlılığı ve yakınsaklığını garanti eden teorem ve lemmalar verilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Adams, R. A., 1975. *Sobolev Spaces*. First edition. Academic Press, New York, Usa. 278.
- Amiraliyev, G. M., 1987. Investigation of the convergence of difference schemes for the quasilinear Sobolev equation. *Differential Equations*, (23):1453-1455.
- Amiraliyev, G. M., Mamedov, Y. D., 1995. Difference schemes on the uniform mesh for singularly perturbed pseudo-parabolic equations. *Tr. J. of Math.*, (19): 207-222.
- Cao, Y. H., 2005. A generalized difference scheme for a linear Sobolev equation in two dimensions. *Math. Numer. Sin.*, (27): 243–256.
- Douglas, J. Jr., 1961. Chap. 1. *Advances in Computers*. vol. 2. *A survey of numerical methods for parabolic differential equations*. Academic Press, New York, 421.
- Goda, K., 1975. On stability of some finite difference schemes for the Korteweg-de Vries equation. *Journal Phys. Soc. Japan*, (30): 229–236.
- Gu, H., 1999. Characteristic finite element methods for nonlinear Sobolev equations. *Appl. Math. Comput.*, (102): 51–62.
- Guo, H., Rui, H. X., 2006. Least-squares Galerkin procedures for Sobolev equations. *Acta Math. Appl. Sin.*, (29): 609–618.
- Larsson, S., Thomée, V., 2005. *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. Springer, Berlin, Germany. 260.
- Lees, M., 1959. Approximate solutions of parabolic equations. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, (7): 167-183.
- Lees, M., 1960. Energy inequalities for the solution of differential equations. *Trans. Amer. Math.*, (94): 58-73.
- Lin, Y. P., 1990. Galerkin methods for nonlinear Sobolev equations. *Aequationes Math.*, (40): 54–66.
- Lin, Y. P., Zhang, T., 1992. Finite Element Methods for Nonlinear Sobolev Equations with Nonlinear boundary Conditions. *Journal of Math. Analysis and Appl.*, (165): 180-191.
- Nakao, M., 1985. Error Estimates of a Galerkin Method for Some Nonlinear Sobolev Equations in one Space Dimension. *Numer. Math.*, (47):139-157.
- Perova, L. V., Pletner, Yu. D., Sveshnikov, A. G., Korpusov, M. O., 1999. Long-time asymptotics of an initial-boundary value problem for the two-dimensional Sobolev equation. *Differential Equations*, (35): 1443-1447.

- Samarskii, A. A., 2001. *The Theory of Difference Schemes*. Marcel Dekker, New York, USA, 761.
- Showalter, R. E., Ting, T. W., 1971. Asymptotic behavior of solutions of pseudo-parabolic partial differential Equations. *Ann. Mat. Pura Appl.*, (90): 241-258.
- Showalter, R. E., 1972. Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space. *SIAM J. Math. Anal.*, (3): 527-543.
- Showalter, R. E., 1975. A nonlinear parabolic-Sobolev equation. *J. Math. Anal. Appl.*, (50): 183-190.
- Straughan, B., 2004. *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection*. Springer, Berlin, Germany. 447.
- Sung, T. J., Ma, K. Y., 2001. Finite difference-streamline diffusion method for quasi-linear Sobolev equations. *Numer. Math. J. Chinese Univ.*, (23): 340–356.
- Ting, T. W., 1969. Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations. *J. Math. Soc.*, (21): 440-453
- William H. Ford., Ting, T. W., 1973. Stability and Convergence of Difference Approximations to Pseudo-Parabolic Partial Differential Equations. *Mathematics of Computation*, (27): 737-743.
- William H. Ford., Ting, T. W., 1974. Uniform Error Estimates for Difference Approximations to Nonlinear Pseudo- Parabolic Partial Differential Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, (11): 155-169.

## **ÖZ GEÇMİŞ**

1979 yılında Mardin / Midyat'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Midyat'ta tamamladı. 1996 yılında Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2000 yılında bölümünü başarıyla bitirdikten sonra aynı yıl Midyat Kocatepe İlköğretim Okuluna Matematik Öğretmeni olarak atandı. Daha sonra değişik liselerde Matematik ve Geometri Öğretmeni olarak çalıştı. 2004 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.