

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KEMER BARAJLARIN DEPREM ETKİSİ
ALTINDAKİ DAVRANIŞLARI

Kemal ÖZSOY

Ekim, 2007

İZMİR

KEMER BARAJLARIN DEPREM ETKİSİ ALTINDAKİ DAVRANIŞLARI

**Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yapı Anabilim Dalı**

Kemal ÖZSOY

**Ekim, 2007
İZMİR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

KEMAL ÖZSOY, tarafından **Prof. Dr. HİKMET H. ÇATAL** yönetiminde hazırlanan “**KEMER BARAJLARIN DEPREM ETKİSİ ALTINDAKİ DAVRANIŞLARI**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Hikmet H. ÇATAL
.....

Yönetici

.....
.....
Jüri Üyesi

.....
.....
Jüri Üyesi

.....
Prof. Dr. Cahit HELVACI

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi, çalışmaların programlanması, yürütülmesi sırasındaki yönlendirici ve bilgilendirici desteklerinden ötürü Sayın Prof. Dr. Hikmet H. ÇATAL' a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarında yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşlarım Aras. Gör. Yusuf YEŞİLCE' ye ve İns. Y. Müh. H.Cenk ÇETİN' e teşekkürü borç bilirim.

Hayatım boyunca her türlü maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen çok değerli aileme şükranlarımı sunarım.

Kemal ÖZSOY

KEMER BARAJLARIN DEPREM ETKİSİ ALTINDAKİ DAVRANIŞLARI

ÖZ

Bu tez çalışması kapsamında, kemer barajların dinamik yükler etkisindeki davranışı incelenmiş ve bu davranışı hesaplamak için kullanılan sonlu elemanlar yöntemi hakkında bilgi verilmiştir.

Çalışma iki boyutlu analizden oluşmaktadır. Sayısal uygulama olarak Gökçekaya Barajı seçilmiş ve barajın dinamik analizi sonlu elemanlar metodu ve SAP2000 bilgisayar programı yardımı ile barajın dolu ve temelin ankastre olması durumları dikkate alınarak yapılmıştır.

Barajın depreme karşı davranışı, kuzey – güney bileşeninin maksimum yer ivmesi 0,33g olan 1940 El – Centro depremi için Housner tarafından geliştirilen ivme hesap spektrumu kullanılarak incelenmiştir. Suyun hidrodinamik etkisi eklenmiş kütle (Westergaard) yaklaşımı ile dikkate alınmıştır.

Gerilmelerin baraj gövdesindeki değişimi eşgerilme eğrileri şeklinde gösterilmiştir. Ayrıca yapılan çözümlerin sonuçları tablolar ve grafikler halinde karşılaştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Kemer Baraj, Dinamik Analiz, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Gerilme, Deplasman

THE BEHAVIOUR OF ARCH DAMS UNDER EARTHQUAKE EFFECT

ABSTRACT

In this thesis, the behaviour of arch dams under dynamic loadings has been searched and the finite element methods which is used for this problem, has been explained.

The problem has been considered in two dimensional analysis. The Gökçekaya Dam has been chosen for the numerical example. Dynamic analysis of the dam has been conducted both for the case of the dam is full and the foundation is fixed by finite element method and SAP2000 packet program.

The behaviour under earthquake loading has been calculated by using design spectrum which had been developed by Housner for El – Centro earthquake of 1940 which had ground acceleration of 0.33g. The hydrodynamic effect of water has been considered by using added mass (Westergaard) approximation.

The distribution of the stresses on the dam has been shown with izostress curves. The results and the comparisons have been presented in tables and graphs.

Keywords: Arch Dam, Dynamic Analysis, Finite Element Method, stress, displacement

İÇİNDEKİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZ.....	iv
ABSTRACT.....	v
BÖLÜM BİR – GİRİŞ.....	1
BÖLÜM İKİ – KEMER BARAJLAR HAKKINDA GENEL BİLGİLER	3
2.1 Giriş.....	3
2.2 Kemer Barajların Analiz Yöntemleri ve Tarihsel Gelişimi	5
2.2.1 Sadece Kemer Etkisini Dikkate Alan Yöntemler	6
2.2.2 Kemer – Konsol Yöntemleri.....	6
2.2.3 Kabuk Teorileri.....	6
2.2.4 Sonlu Farklar İle Çözülen Elastisite Denklemleri	7
2.2.5 Sonlu Elemanlar Yöntemi	7
2.2.6 Dinamik Rölaksasyon Yöntemi.....	7
2.3 Kemer Barajların Sınıflandırılması	8
2.3.1 Sabit Merkezli, Sabit Açılı Kemer Barajlar	8
2.3.2 Değişken Merkezli, Sabit Açılı Kemer Barajlar	9
2.3.3 Değişken Merkezli, Değişken Açılı Kemer Barajlar	9
2.4 Kemer Barajların Diğer Barajlara Göre Avantaj ve Dezavantajları.....	10
2.5 Kemer Barajlara Etki Eden Kuvvetler.....	10
2.5.1 Barajın Kendi Ağırlığı.....	10
2.5.2 Baraja Etki Eden Su Basınçları.....	11
2.5.2.1 Hidrostatik Basınç	11
2.5.2.2 Hidrodinamik Basınç	12

**BÖLÜM ÜÇ – KEMER BARAJLARIN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ
TEORİK OLARAK İNCELENMESİ..... 14**

3.1 Dinamik Analiz	14
3.1.1 Doğal Frekans ve Modların Hesabı	15
3.1.2 Mod Süperpozisyonu Yöntemi	17
3.1.3 Davranış Spektrumunun Seçimi	20

**BÖLÜM DÖRT – KEMER BARAJLARIN SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİNE GÖRE ANALİZİ 24**

4.1 Giriş	24
4.2 Sonlu Eleman Metodunda Çözüm Adımları.....	26
4.3 Birim Deplasman Teorisine Göre Genel Eleman Karakteristikleri.....	27
4.3.1 Sanal İş Prensibi.....	27
4.3.2 Birim Deplasman Teorisiyle Genel Rijitlik Karakteristiklerinin Hesaplanması	29
4.3.3 Yayılı ve Ağırlık Yüklerinin Eşit Düğüm Kuvvetleri.....	33
4.4 Gerilmiş Plak Eleman Karakteristikleri	35
4.4.1 Gerilmiş Plak Elemanın Rijitlik Karakteristiklerinin Hesaplanması.....	35
4.4.2 Hidrostatik Basınç ve Ağırlık Yükünün Eşit Kuvvet Vektörü	42
4.5 Deplasmanların, Yüklerin ve Rijitlik Matrisinin Lokal – Global Eksen Arasında Dönüşümü	46
4.6 Tümel Rijitlik Matrisinin Kodlama Tekniğiyle Toplanması	49

4.7 Sınır Şartları	49
4.8 Gauss Eliminasyon Metoduyla Rijitlik Matrislerinin Çözümü	51
4.9 Gerilmiş Dörtgen Plak Elemanda Kuvvetler ve Gerilmeler	51
4.9.1 Düzlem – gerilme durumundaki bağıntı.....	53
4.9.2 Düz Plaklar İçin Gerilme – Şekil Değiştirme İlişkisi	54
4.9.3 Gerilmiş Kabuk İçin Gerilme – Şekil Değiştirme İlişkisi	56
BÖLÜM BEŞ – KEMER BARAJLARIN DİNAMİK ANALİZİ.....	57
5.1 Giriş	57
5.2 Sonlu Elemanlar Yöntemine Göre Gökçekaya Barajının Dinamik Analizi	59
5.2.1 Gökçekaya Barajının Depreme Karşı Davranışı.....	60
5.2.1.1 Doğal Frekans ve Modlar	61
5.2.1.2 Yerdeğiştirmeler.....	61
5.2.1.3 Gerilmeler	61
5.3 Dinamik Analiz Sonuçlarının Değişik Durumlar İçin Karşılaştırılması	120
5.3.1 Yerdeğiştirmelerin Karşılaştırılması	120
5.3.2 Gerilmelerin Karşılaştırılması	120
BÖLÜM ALTI – SONUÇLAR.....	121
KAYNAKLAR.....	122

BÖLÜM BİR

GİRİŞ

Su ihtiyaçlarının karşılanması insanların en önemli problemlerini oluşturmaktadır. Suyun tabiattaki normal oluşumu insanların su ihtiyaçlarını sürekli karşılayacak şekilde olmamaktadır. Bunun sonucu olarak suyun tabii oluşumunun, insan ihtiyaçlarını en iyi karşılayacak şekilde düzenlenmesi gerekli olmaktadır. Bu nedenle, baraj inşa etme zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Barajlar sayesinde sular kontrol altına alınarak boşa giden veya zarar meydana getiren su kaynaklarından uygun şekillerde faydalanma yoluna gidilir. Barajlar su kaynakları üzerindeki ana kontrol tesisleridir; öyle ki bunların gerisinde meydana gelen rezervuarlar:

1. Taşkın kontrolü,
2. Suyun seviyesini yükselterek elektrik enerjisinin üretilmesi,
3. Suyun biriktirilmesi sayesinde sulama, içme, kullanma ve sanayi suyunun temin edilmesi,
4. İklimin düzenlenmesi ve erozyonun önlenmesi,
5. Ulaştırma, mesire, avcılık ve balıkçılık

gibi amaçların bir veya bir kaçına birden hizmet etmektedir.

Barajlar yukarıda bahsedilen faydaları sağlamakla birlikte, kendileri için en büyük tehlikeyi oluşturan muhtemel bir deprem sonunda yıkılmaları halinde ise buldukları yer için büyük bir felakete sebebiyet verebilmektedirler. Bu nedenle barajların yapımına gerek proje ve gerek inşa aşamalarında azami özen gösterilmeli ve gerekli önlemler alınmalıdır. Barajın yapılacağı yerin bir deprem bölgesi içinde olup olmadığına, üzerine baraj inşa edilecek zeminin sağlam olmasına dikkat edilmelidir. Ayrıca proje aşamasında deprem yüklerinin çok iyi belirlenmesi ve çözüm yönteminin iyi seçilmesi gerekmektedir.

Bu çalışmada kemer barajlar ele alınmış ve bu barajların dinamik analiz sonucundaki davranışları incelenmiştir. Yapılan çalışma altı bölüm halinde sunulmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümü olup, ikinci bölümde kemer baraj ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Bu bölümde kemer barajların sınıflandırılması, üstünlükleri ele alınmış ve kemer barajlara etki eden kuvvetler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise kemer barajların dinamik davranışlarının teorik incelenmesinden söz edilmektedir. Ayrıca dinamik analizde kullanılacak davranış spektrumun seçimi hakkında bilgi verilmektedir.

Dördüncü bölümde kemer barajların analiz yöntemi olarak kullanılan sonlu elemanlar yöntemi hakkında bilgi verilmiş, izoparametrik formülasyon verilerek üç boyutlu sonlu elemanın rijitlik matrisinin elde edilişi açıklanmıştır.

Beşinci bölümde Gökçekaya Barajı'nın verileri kullanılarak kemer barajın dinamik analizi incelenmiştir.

Altıncı bölümde ise çalışmadan elde edilen sonuçlar sunulmakta ve bu son bölümü kaynaklar listesi izlemektedir.

BÖLÜM İKİ

KEMER BARAJLAR HAKKINDA GENEL BİLGİLER

2.1 Giriş

Kemer barajlar, su basıncını kemer etkisi ile yamaçlara aktararak ağırlık barajlara oranla çok narin bir kesit ve önemli beton tasarrufu sağlamak esasına dayanmaktadır. Bu bakımdan, kemer barajlar kret uzunluğu baraj yüksekliğinin 6, azami 10 katını geçmeyen dar vadilerde uygulanabilmektedir. Ayrıca, yamaçların bu etkiyi taşıyabilecek nitelikte olması zorunludur. Genellikle kemer kalınlığı yüksekliğin % 60'ından daha küçük olmalıdır. Baraj tipinin belirlenmesi aşamasında kalınlığın artması halinde, kemer ağırlık veya ağırlık baraj olarak düşünülür.

Mühendislik tarihinde ilk kemer barajın 1611 yılında Avustralya'da inşa edildiği gözlenmiştir. Kuzey Amerika'da 1822 yılında inşa edilmiş olan 19 m yüksekliğinde 6,5 m kalınlığında 54 m yarıçapındaki kemer barajın memba yüzü taş ve mansap yüzü ise toprak sedde şeklindedir. 1853–1854 yılları arasında Fransa'da inşa edilen Zola Barajı hesap esasına dayanan ilk barajdır. Kemer etkisi ise 1904 yılında analiz edilmeye çalışılmıştır.

Türkiye'de ise ilk baraj 1620 yılında Sultan II. Osman tarafından yaptırılmış olan 10 m yüksekliğindeki Topuz Barajıdır. 1839 yılında Sultan II. Mahmut tarafından taştan inşa edilen Yeni Baraj ise bir kemer ağırlık barajıdır. Cumhuriyet tarihinde ise, ilk kemer baraj Sakarya nehri üzerinde inşa edilen ve 1972 yılında işletmeye açılan 115 m yüksekliğindeki Gökçekaya Barajı'dır.(Öziş, 1993) Bu barajın depolama hacmi 910.10^6 m^3 olup enerji üretmek amacına yöneliktir.

Dünyada çok yüksek inşa edilmiş kemer barajlara örnek olarak İnguri (272 m), Vaiont (262 m), Sayanskaya (242 m), Mauvoisin (237 m) barajları verilebilir. Türkiye'de ise Gökçekaya (115 m), Karakaya (173 m), Oymapınar (185 m) barajları inşa edilmiş en yüksek kemer barajlardır. Deriner barajı tamamlandığında

Türkiye'nin en büyük birinci, dünyanın ise en büyük üçüncü çift eğrilikli kemer barajı olacaktır.

Türkiye'de mevcut, inşa halinde ve projesi hazır kemer barajlar ve özellikleri Tablo 2.1 ve Tablo 2.2'de verilmektedir.

Tablo 2.1: Türkiye'de Bulunan Kemer Barajların Durumları

Kemer Baraj Adı	Akarsu	İli	Amaç	İnşa Süresi
Gökçekaya	Sakarya	Eskişehir	E	1967–1972
Oymapınar	Manavgat	Antalya	E	1977–1984
Karakaya	Fırat	Diyarbakır	E	1976–1987
Gezende	Ermenek	İçel	E	1979–1990
Sır	Ceyhan	Kahramanmaraş	E	1987–1991
Berke ^(*)	Ceyhan	Adana	E	1996–1999
Düzkesme	Ceyhan	Kahramanmaraş	E	Projesi hazır
Deriner	Çoruh	Artvin	E	İnşa haline
Güllübağ	Çoruh	Erzurum	E	Ön proje
Yusufeli	Çoruh	Artvin	E	Ön proje
Laleli	Çoruh	Erzurum	E	Ön proje

(*) İnce Kemer

E: Enerji

Tablo 2.2: Türkiye’de Bulunan Kemer Barajların Başlıca Özellikleri

Kemer Baraj Adı	Yükseklik		Kret Kotu (m)	Gövde Hacmi (10 ³ m ³)
	Temelden	Talvegden		
Gökçekaya	158	113,5	392	650
Oymapınar	185	157	185	676
Karakaya	173	158	698	2000
Gezende	75	71	335	83
Sır	116	106	443	494
Berke ^(*)	201	186	346	7292
Düzkesme	83	68	356	103
Deriner	250	209		2037
Güllübağ	94	72		154
Yusufeli	259	206		2931
Laleli	135	119		701

2.2 Kemer Barajların Analiz Yöntemleri ve Tarihsel Gelişimi

Bir ağırlık barajı, planda eğri bir şekilde yapmak suretiyle stabilitesini iyileştirme işlemi, 16. yüzyılda İspanya’da Almanza ve Rellu kargir barajlarında uygulanmıştır. Fakat yüksek kaliteli betondan yapılmış çift eğrilikli kemer baraj 20. yüzyılın ürünüdür. Aynı zamanda bütün kemer barajların analizi silindir teorisindeki tek ve küçük bir istisna ile Navier ve Lamé tarafından geliştirilen ince ve kalın silindirler teorisine mal edilebilir. Bir kemer barajın analizi için şimdiye kadar kullanılmış olan yöntemler 6 ayrı bölüm halinde incelenebilir.

1. Sadece kemer etkisini dikkate alan yöntemler
2. Kemer – konsol yöntemleri
3. Kabuk teorileri
4. Sonlu farklar ile çözülen üç boyutlu elastisite denklemleri
5. Sonlu eleman yöntemleri
6. Dinamik rölaksasyon yöntemleri

2.2.1 Sadece Kemer Etkisini Dikkate Alan Yöntemler

Bu yöntemlerde bütün yüklerin kenarlara aktarıldığı kabul edilir. İlk tasarımcılar tarafından yapılan kaba bir yaklaşım ile barajın, hayali yatay birleşim yüzeyleri arasında hiçbir kesme kuvvetinin etki etmediği bir dizi halkadan oluştuğu kabul ediliyordu. Daha sonra ince ya da kalın silindir teorileri, gerilmeleri hesaplamak için kullanılıyordu. Bunlardan ilkinde ortalama gerilme $\sigma = P.R/t$ ile verilmektedir. Burada P su basıncını, R ortalama yarıçapı, t ise kalınlığı göstermektedir.

Bu yaklaşım kullanılarak Jorgensen tarafından 1915'de bir kemer baraj için en ekonomik şeklin, kemer açısının her seviyede $133^{\circ}34'$ olduğu zaman elde edilebileceği önerildi. Bu basit formülün tek üstünlüğü derinlik arttıkça ortalama eğrilik yarıçapının azaltılması ihtiyacına dikkati çekmesiydi.

2.2.2 Kemer – Konsol Yöntemleri

Bu yöntemlerde, su yükünün bir kısmının temele aktararak basit kiriş teorisiyle konsol üzerindeki yük hesaplanmaktadır. Bu konudaki ilk yaklaşım Resal tarafından yapılmıştır.

2.2.3 Kabuk Teorileri

Bilinen denge ve uygunluk diferansiyel denklemlerini sağlayan bir kabuk olarak göz önüne alınmış birkaç kemer baraj bulunmaktadır. Pratik olarak sınır koşullarının göz önüne alınması durumunda kesin bir kapalı çözümün elde edilmesi zor olduğu için yeterli derecede yaklaşık olan çözümler elde edilmeye çalışılmıştır. Bu çözümlerdeki diferansiyel denklemler bilgisayar yöntemleri yardımıyla bir lineer cebrik denklem takımına indirgenmektedir.

2.2.4 Sonlu Farklar ile Çözülen Elastisite Denklemleri

Düzlem deformasyon durumundaki gerilme fonksiyonunu tanımlayan biharmonik denklemi çözmek için çalışmalar 1910'da Richardson tarafından başlatılmış, fakat tatminkâr bir çözüm 1947'de Zienkiewicz tarafından elde edilmiştir. Daha sonra Southwell tarafından rölaksasyon yöntemi geliştirildi. Irak'taki Dokan kemer barajını konu alan araştırmada üç tane kısmi diferansiyel denklem takımının çözümü için 1951 yılında, Allen tarafından geliştirilen bu rölaksasyon yöntemleri kullanılmıştır.

Deplasmanların esas değişken olarak alındığı bu yöntemde sınır şartlarının uygun bir şekilde sağlanması güç idi ve elle yapılan hesaplamaların hacmi çok büyüktü.

2.2.5 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Kemer barajlarda sonlu elemanlar yönteminin uygulanmasına 1958 yılında, çeşitli tipteki sonlu elemanların kullanılmasıyla başlandı. 1962 yılında izoparametrik sonlu elemanların ortaya atılmasıyla araştırmalar genişletildi. Bu araştırmalarda iki boyutlu araştırmaların yanı sıra üç boyutlu elemanlarda kullanıldı. Bu yöntem sayesinde kemer barajların şekilleri üzerindeki bütün sınırlamalar kaldırılmış oldu. Bu çalışmalarda temelin bir kısmı hesaba dâhil edilebildi. Bu çalışmaların ilk örneklerinden biri olarak Dungar ve Severn (1968)'in çalışması verilebilir.

2.2.6 Dinamik Rölaksasyon Yöntemi

Dinamik rölaksasyon yönteminde gerilme – deformasyon ve denge denklemleri ayrı ayrı kendi formlarında kullanılmaktadır ve işlem kritik sönümlü bir titreşimin zaman alanında adım adım ileri doğru integrasyonundan oluşmaktadır.

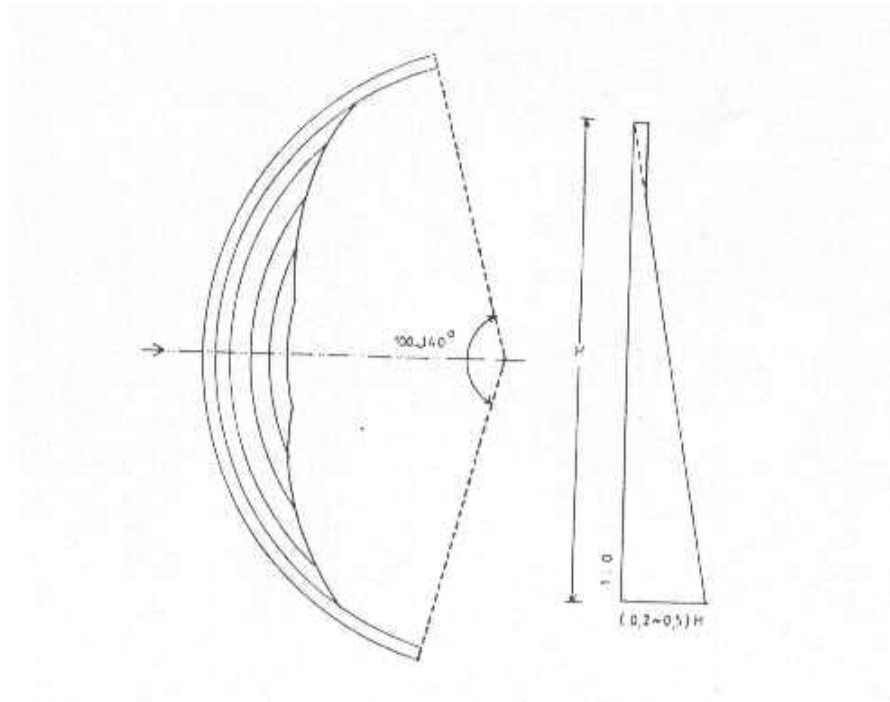
Kompleks problemler için çoğunlukla bir deneme – yanılma yöntemiyle belirlenen zaman aralığı bir sayısal stabilite kriteriyle saptanmaktadır.

2.3 Kemer Barajların Sınıflandırılması

Başlangıçta kemer barajlar sadece, barajın uzunluğunun (L), yüksekliğine (H) oranı $L/H = 1,5$ olan V tipi vadilerde inşa edilirdi. Şimdi ise bu oran daha da büyütülerek $L/H = 4-6$ değerine ulaşması sağlanmıştır. Kemer barajlar genel olarak üç ana sınıfa ayrılırlar.

2.3.1 Sabit Merkezli, Sabit Açılı Kemer Barajlar

Sabit yarıçaplı olarak da anılan bu barajlarda, kemer merkezi sabit bir nokta olup, merkez açısı değişkendir. Merkez açısı $100^\circ - 140^\circ$ civarında olmaktadır. Sabit merkezli kemer barajların özellikle "U" biçiminde ve geniş olmayan vadilerde inşa edilmeleri uygun olmaktadır. (Şekil 2.1)

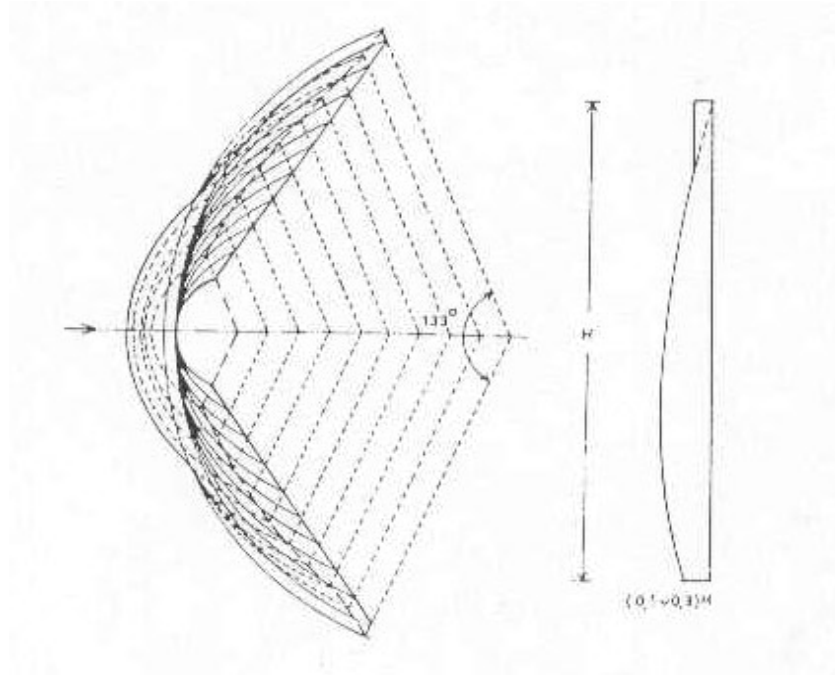


Şekil 2.1 Sabit Merkezli Kemer Baraj

2.3.2 Değişken Merkezli, Sabit Açılı Kemer Barajlar

Değişken yarıçaplı olarak da anılan bu barajlarda merkez açısı sabit, kemer merkezi ise değişkendir. Merkez açısı mümkün olduğu takdirde asgari gövde hacmini veren 133° civarında tutulur.

Değişken merkezli barajlar özellikle "V" biçimindeki dar vadilerde daha uygundur. (Şekil 2.2)



Şekil 2.2 Sabit Açılı Kemer Baraj

2.3.3 Değişken Merkezli, Değişken Açılı Kemer Barajlar

Çift eğrilikli kemer barajlar olarak da adlandırılan bu barajlar, topoğrafik koşullar merkez açısını sabit tutmaya elvermediği zaman, değişken merkezli barajların, değişken açılı olarak inşa edildikleri barajlardır. Bu tür barajlara uygulamada çok rastlanmaktadır.

2.4 Kemer Barajların Diğer Barajlara Göre Avantaj ve Dezavantajları

- a) Diğer barajlarda (ağırlık ve payandalı) emniyet faktörü beton veya temel zeminin kesme kuvvetine bağlıdır. Kemer barajda ise betondaki esas gerilme basınçtır. Bu ise emniyeti arttırır.
- b) Diğer barajlarda önemli bir maliyet unsuru olan dolusavak problemi kemer barajlarda kolaylıkla çözülebilir.
- c) Diğer barajlara nazaran daha ekonomiktir. Ancak yüksek kaliteli beton dökülmesini ve çok iyi bir kalıp teknolojisini gerektirir.
- d) Temel ve mesnet zeminlerinin sağlam kaya olması gereklidir.

2.5 Kemer Barajlara Etki Eden Kuvvetler

Bir kemer barajın projelendirilmesinde ilk olarak baraja etki eden kuvvetlerin belirlenmesi gerekir. Bu kuvvetlerin bir kısmı büyük bir yaklaşıklıkla hesaplanabildiği halde (baraj kendi ağırlığı ve statik su basıncı gibi) diğer bir kısmı ise doğrudan doğruya hesaplanamayıp bir takım kabuller neticesinde elde edilir (deprem kuvveti, silt basıncı, alttan kaldırma kuvveti gibi)

Bu çalışmada barajın kendi ağırlığı, hidrostatik basınç, deprem etkisi, hidrodinamik basınç gibi barajın analizinde birinci dereceden etkili olan tesirler dikkate alınmakta olup, ikinci derecede etkili olan buz, silt, rüzgâr, dalga basıncı gibi etkiler üzerinde durulmayacaktır. Ancak bu etkilerin, ötekiler gibi aynı prensipler doğrultusunda hesaplara katılması mümkündür.

2.5.1 Barajın Kendi Ağırlığı

Kullanılacak baraj betonunun birim hacim ağırlığı genel olarak (24 – 25 kN/m³) tür. Barajın statik analizinde, kendi ağırlığından dolayı oluşan bileşke statik kuvvet, ağırlık merkezine etki ettirilir.

2.5.2 Baraja Etki eden Su Basınçları

2.5.2.1 Hidrostatik Basınç

Kemer barajlara etki eden yatay hidrostatik basınç Şekil 2.3'te gösterilmiştir. Suyun birim hacim ağırlığı 10 kN/m^3 alınarak su itkisi:

$$H_1 = \frac{\gamma_w \cdot H \cdot A}{2} \quad (2.1)$$

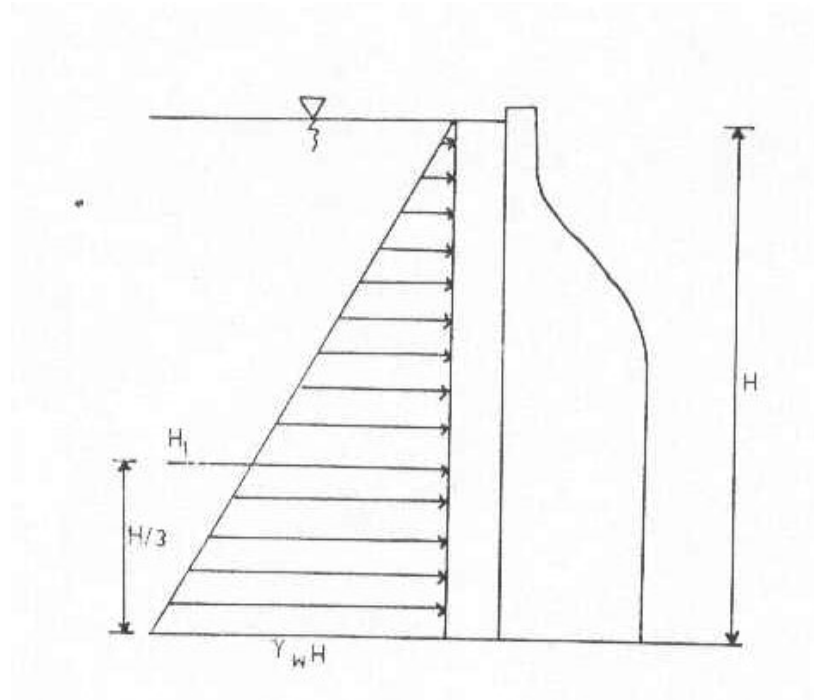
ifadesiyle hesaplanır. Bu ifade de,

H_1 = bileşke kuvvet,

γ_w = suyun birim hacim ağırlığı (10 kN/m^3),

H: su yüksekliği,

A: baraj memba yüzey alanıdır.



Şekil 2.3 Kemer Baraja Etkiyen Statik Su Basıncı Dağılımı

2.5.2.2 Hidrodinamik Basınç

Baraj – rezervuar problemi bir sıvı – katı etkileşim problemidir. Bu etkileşimin çözümü için geliştirilen yaklaşımlar; Euler’ e dayanan yaklaşım, Lagrange’ a dayanan yaklaşım, Westergaard (eklenmiş kütle) yaklaşımı şeklinde üç kısma ayrılabilir.

1. Euler’ e dayanan yaklaşımda, baraj – rezervuar sistemi iki ayrı sistem olarak göz önüne alınmaktadır. Barajın hareketi deplasmanlar cinsinden, rezervuarın hareketi ise basınçlar cinsinden ifade edilmektedir.
2. Lagrange’ a dayanan yaklaşımda, hem baraj hem de rezervuarın hareketi deplasmanlar cinsinden ifade edilmektedir.
3. Eklenmiş kütle yaklaşımı ilk olarak Westergaard tarafından ortaya atılmıştır. Bu yaklaşımda dinamik etki sonucunda oluşan hidrodinamik basınç barajla birlikte titreşen bir kütle olarak göz önüne alınabilmektedir. Westergaard rezervuar derinliğinin sabit olduğunu, suyun barajın bir yönünde sonsuza dek uzandığını ve yüzey dalgaları etkisinin ihmal edilebileceğini varsayarak harmonik yatay yer hareketin oluşturacağı hidrodinamik basınç için analitik bir çözüm elde etmiştir. Westergaard hesaplarında suyun doğrusal olarak sıkıştırılabilir, barajın rijit ve sonsuz uzunlukta ve su ile temas yüzünün dik olduğunu kabul etmiştir. Bu yaklaşımdan elde edilen su kütlesi derinliğe bağlı olarak değişmekte olup (Şekil 2.4), dağılımı aşağıdaki ifade ile verilmektedir.

$$m(y) = \frac{7}{8} \cdot \frac{\gamma_w}{g} \cdot (H \cdot y) \cdot 0,5 \quad (2.2)$$

burada;

$m(y)$: rezervuar derinliğine bağlı kütle dağılımı,

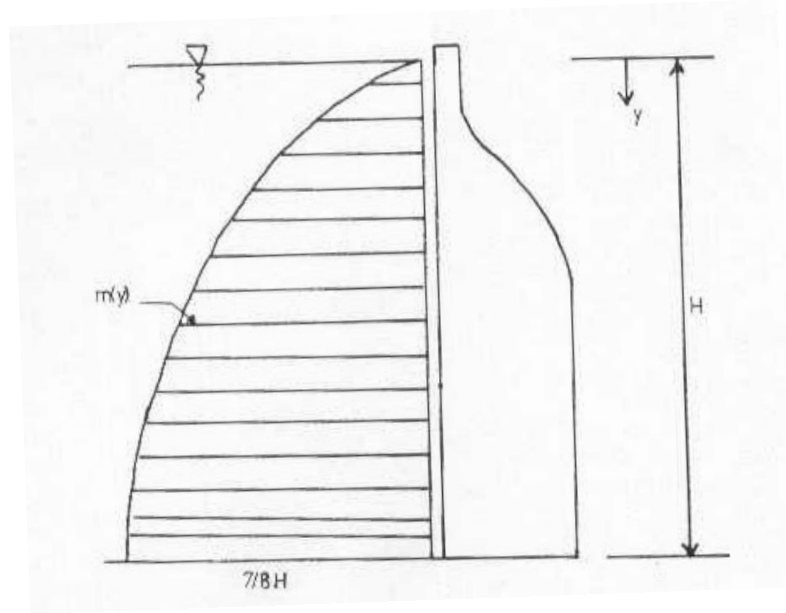
γ_w : suyun birim hacim ağırlığı,

g : yer çekimi ivmesi,

H : toplam rezervuar derinliği,

y : su yüzeyinden itibaren su derinliğini,

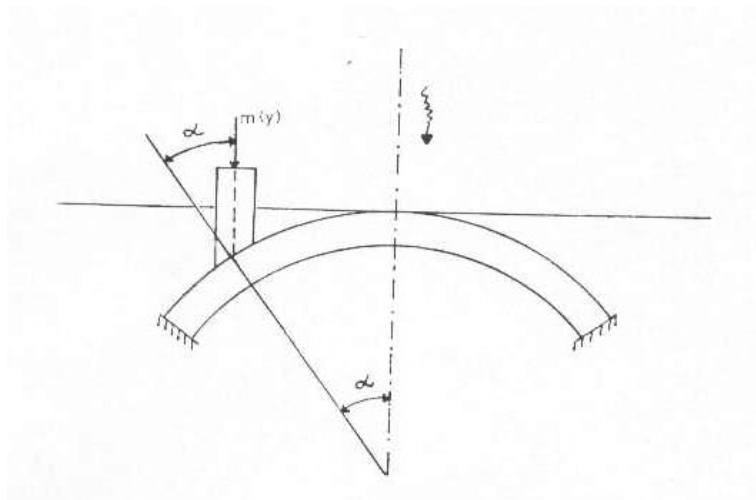
temsil etmektedir.



Şekil 2.4 Kemer Barajda Eklenmiş Kütlenin Dağılımı

Ancak kemer barajların memba yüzeyi gibi eğri yüzeylere etkiyen $m_a(y)$ kütlesinin eşdeğer etkisi (Şekil 2.5), Westergaard bağıntısının yardımıyla hesaplanan $m(y)$ kütle değerinin, deprem doğrultusu ile kemer barajın memba yüzeyi normal arasında kalan açının kosinüsü ile çarpılarak elde edilir.

$$m_a(y) = m(y) \cdot \cos \alpha \quad (2.3)$$



Şekil 2.5 Su kütlesinin Eğri Yüzeğe Uygulanış Şekli

BÖLÜM ÜÇ

KEMER BARAJLARIN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ TEORİK OLARAK İNCELENMESİ

3.1 Dinamik Analiz

Bir depremin bir yapı üzerindeki etkisi, yapı boyutlarının yanı sıra, depremin yayılım hızına da bağlıdır. Baraj gibi yapılarda; yapı – zemin birleşme yüzeyinde deprem dalgaları farklı zamanlarda sonlu bir hızla geçer. Ancak deprem dalgalarının yayılım hızı büyükse temel – zemin etkileşim noktalarında aynı zamanda aynı ivme etkisi alınabilir. (Çatal,H.H, 2005), (Çatal,H.H,2002)

Bu durumda dinamik hareket denklemi,

$$[M] \cdot \{\ddot{U}\} + [C] \cdot \{\dot{U}\} + [K] \cdot \{U\} = -[M] \{ \delta \} \ddot{u}_g(t) \quad (3.1)$$

olarak elde edilebilir. Bu ifade de,

- [M] : sistem kütle matrisi,
- [C] : sistem sönüm matrisi,
- [K] : sistem rijitlik matrisi,
- {U} : rölatif yer değiştirme vektörü,
- { \dot{U} } : hız vektörü,
- { \ddot{U} } : ivme vektörü,
- { δ } : deprem doğrultu vektörü,
- $\ddot{u}_g(t)$: yer ivmesini göstermektedir.

3.1.1 Doğal Frekans ve Modların Hesabı

Sönümsüz serbest titreşim durumu için (3.1) denklemi,

$$[M] \cdot \{\ddot{U}\} + [K] \cdot \{U\} = \{0\} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Harmonik hareket için sistemin U yer değiştirmeleri;

$$U = u \cdot \cos(w_n t - \alpha) \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade de;

- α : faz açısı,
- w_n : doğal açısal frekans,
- t : zaman,
- u : harmonik hareketin genliği,
- U : yer değiştirmeyi göstermektedir.

(3.3) denklemi (3.2) denkleminde yerine konursa,

$$[[K] - w_n^2 [M]] \cdot \{u\} = \{0\} \quad (3.4)$$

karakteristik özdeğer denklemi elde edilir. Sıfırdan farklı çözüm ancak katsayı determinantının sıfıra eşit olmasıyla mümkündür.

$$[[K] - w_n^2 [M]] = \{0\} \quad (3.5)$$

Yapısal sistemin frekans denklemi veya karakteristik denklemi adını taşıyan bu denklemin serbestlik derecesi kadar kökü vardır. Bulunan köklerin karekökleri ($w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$) barajın n adet titreşim modlarının doğal açısal frekanslarını belirler.

Gerçek fiziksel sistemlere karşılık gelen frekans denkleminin bütün kökleri gerçek ve pozitiftir. Sistemin doğal frekanslarının en küçüğüne temel frekans denir. Modal titreşimin frekansları büyüklüklerine göre sıralanarak belirlenir.

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \leq \omega_n \quad (3.6)$$

Her bir doğal açısal frekans için (3.4) denklemindeki katsayı matrisi hesaplanıp i 'inci modal frekansa karşılık gelen harmonik titreşim genlikleri $\{u\}_i$ hesaplanabilir.

$$\{u\}_i = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{ni} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Her bir doğal açısal frekans için hesaplanan genlik vektörleri modal vektör, doğal mod veya kısaca mod olarak adlandırılır. Maxwell – Betti teoremi kullanılarak normalleştirilmiş modlar bulunabilir. Bu teoreme göre i . ve j . doğal titreşim modları arasındaki ortogonallik, (3.8) denklemleri ile gösterilebilir.

$$i \neq j \\ \{u\}_i^T [M] \{u\}_j = 0 \quad (3.8)$$

Serbest titreşimin normalleştirilmiş modu ϕ_{ij} ,

$$\phi_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{\{u\}_j^T [M] \{u\}_j}} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade de,

u_{ij} : i' inci düğüm noktasında j numaralı açısıl frekanstan meydana gelen genlik,

[M] : sistem kütle matrisi,

$\{u\}_j$: j' inci açısıl frekanstan meydana gelen genlik vektörüdür.

Bulunan normalleştirilmiş titreşim modları aşağıdaki matris formunda yazılabilir.

$$|\phi| = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3.10)$$

1.mod 2.mod n.mod

Yapılan hesabın doğruluğu,

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I] \quad (3.11)$$

bağıntısıyla kontrol edilebilir.

3.1.2 Mod Süperpozisyonu Yöntemi

Baraj gibi yekpare özel bir mühendislik yapısı, geleneksel bir mühendislik yapısı gibi kolaylıkla toplanmış kütle ve yaylarla idealize edilemez. Böyle yekpare bir yapı, teorik olarak, sonsuz sayıda serbestlik derecesine sahip olmaktadır.

Mod süperpozisyonu yöntemi, çok serbestlik dereceli dolayısıyla çok modlu bir sistemi bir dizi eşdeğer tek modlu sistemlerin süperpozisyonu şeklinde kabul etmektedir. Çok modlu sistem, sanki her modunda tek dereceli bir sistemmiş gibi kabul edilebilir ve her moddaki davranışlar uygun bir oranda süperpoze edilerek toplam davranış elde edilir. Serbestlik derecesi sayısı kadar mod ve her mod için bir

özel periyot ve bir yer değiştirme vektörü vardır. Her modun hangi oranda davranışa etkidiği katkı oranı ile belirlenir.

Buna göre mod süperpozisyonu yönteminde çok serbestlik dereceli sistemin yer değiştirmeleri;

$$\{U\} = [\phi]\{Y\} \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade de,

$\{U\}$: yer değiştirme vektörü,

$[\Phi]$: sistemin titreşim modlarını içeren matris,

$\{Y\}$: genelleştirilmiş koordinatlardır.

Denklem (3.12), denklem (3.1)'de yerine konur ve elde edilen ifade $[\Phi]^T$ ile önden çarpılırsa,

$$[\phi]^T \cdot [M] \cdot [\phi] \cdot \{\ddot{Y}\} + [\phi]^T \cdot [C] \cdot [\phi] \cdot \{\dot{Y}\} + [\phi]^T \cdot [K] \cdot [\phi] \cdot \{Y\} = -\{\phi\}^T \cdot [M] \cdot \{\delta\} \cdot \ddot{u}_g(t) \quad (3.13)$$

ifadesi elde edilir. Ortogonallik şartına göre, i ve j mod numaralarını belirtmek üzere her $i \neq j$ için,

$$\{\phi\}^T_i \cdot [M] \cdot \{\phi\}_j = 0 \quad (3.14)$$

$$\{\phi\}^T_i \cdot [C] \cdot \{\phi\}_j = 0 \quad (3.15)$$

$$\{\phi\}^T_i \cdot [K] \cdot \{\phi\}_j = 0 \quad (3.16)$$

yazılabilir. Ortogonallik özelliği kullanılarak (3.13) denklemi tekrar yazılırsa,

$$[\phi]^T_i \cdot [M] \cdot [\phi]_i \cdot \ddot{Y}_i + [\phi]^T_i \cdot [C] \cdot [\phi]_i \cdot \dot{Y}_i + [\phi]^T_i \cdot [K] \cdot [\phi]_i \cdot Y_i = -\{\phi\}^T_i [M] \cdot \{\delta\} \cdot \ddot{u}_g(t) \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada,

$$[\phi]^T_i \cdot [M] \cdot [\phi]_i = m_i \quad (3.18)$$

$$[\phi]^T_i \cdot [C] \cdot [\phi]_i = c_i = 2\delta_i w_i m_i \quad (3.19)$$

$$[\phi]^T_i \cdot [K] \cdot [\phi]_i = k_i = w_i^2 m_i \quad (3.20)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu ifadelerde,

$\{\phi\}_i$: ϕ matrisinde i ' inci moda karşılık gelen i ' inci kolon,

m_i : i ' inci genelleştirilmiş kütle,

δ_i : i ' inci mod için sönüm oranı,

w_i : i ' inci doğal açısal frekanstır.

(3.17) denklemi tekrar düzenlenirse ve m_i ' ye bölünürse,

$$\ddot{Y} + 2 \cdot \delta_i w_i \dot{Y}_i + w_i^2 Y_i = -\frac{\{\phi\}^T_i [M] \{\delta\}}{m_i} \ddot{u}_g(t) \quad (3.21)$$

ifadesi bulunur. (3.21) denklemine i ' inci modun katkı faktörü,

$$P_i = \frac{\{\phi\}^T_i [M] \{\phi\}}{m_i} \quad (3.22)$$

ifadesi ile gösterilir. (3.21) denklemi çözülerek $w_i \sqrt{1 - \delta^2}$ yerine w_{di} yazılırsa,

$$Y_i = \frac{1}{w_{di}} \frac{\{\phi\}^T_i [M] \{\delta\}}{m_i} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\delta_i w_i (t-\tau)} \sin w_{di} (t-\tau) d\tau \quad (3.23)$$

bulunur. Buradan modal yer değiştirme vektörü,

$$U_i = \phi_i \cdot Y_i \quad (3.24)$$

elde edilir.

3.1.3. Davranış Spektrumunun Seçimi

Türkiye'deki depremler, genellikle fay hattındaki kırılmalar sonucu doğan enerji boşalması ile oluşan tektonik depremlerdir. Ülkemiz etkin bir deprem bölgesinde bulunduğu için, özellikle baraj gibi önemli yapıların dinamik analizleri uygun davranış spektrumları seçilerek yapılması gerekir.

Davranış spektrumları ilk defa 1951 yılında Housner ve arkadaşları tarafından bilgisayar kullanılarak Kuzey Amerika depremleri için hesaplanmıştır.

$$S_d = \frac{1}{w_n} \left[\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\delta w_n(t-\tau)} \sin w_n(t-\tau) d\tau \right]_{\max} \quad (3.25)$$

$$S_v = \left[\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\delta w_n(t-\tau)} \cos w_n(t-\tau) d\tau \right]_{\max} \quad (3.26)$$

$$S_a = \left[\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\delta w_n(t-\tau)} \sin w_n(t-\tau) d\tau \right]_{\max} \quad (3.27)$$

Bu ifadelerde,

S_d : yer değiştirme davranış spektrumu,

S_v : hız davranış spektrumu,

S_a : ivme davranış spektrumu,

$\ddot{u}_g(\tau)$: yer ivmesi,

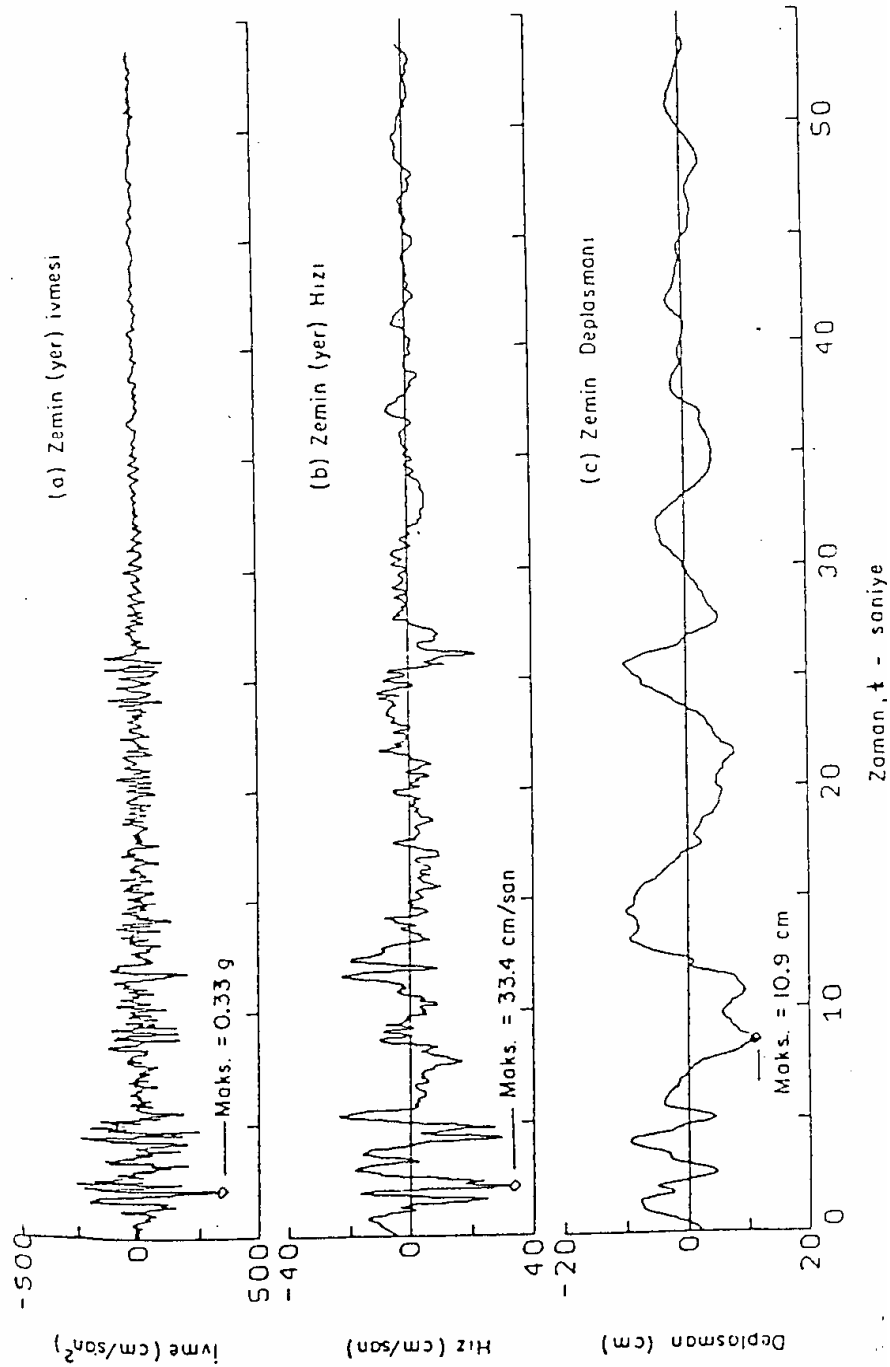
w_n : doğal açılal frekans,

t : zaman,

δ : sönüm oranıdır.

(3.25) – (3.27) ifadeleri ile tanımlanan davranış spektrumu eğrileri deprem yer hareketi kayıtları (Şekil 3.1) kullanılarak çizilebilir. Yatay eksen $T= 2\pi/w$ alınarak δ' in farklı değerleri için farklı eğriler elde edilir.

Önemli depremlerin kayıtları artık yayınlanmakta olduğundan, bilgisayar yardımıyla çeşitli t ve δ değerleri için (3.25) – (3.27) ifadelerinden birisini sayısal olarak hesaplamak ve davranış spektrumunu nokta nokta elde etmek (3.28) – (3.29) formülleri ile diğerlerine geçmek oldukça kolaylaşmıştır.



$$S_d \approx \frac{1}{w_n} S_v = \frac{T_n}{2\pi} S_v \quad (3.28)$$

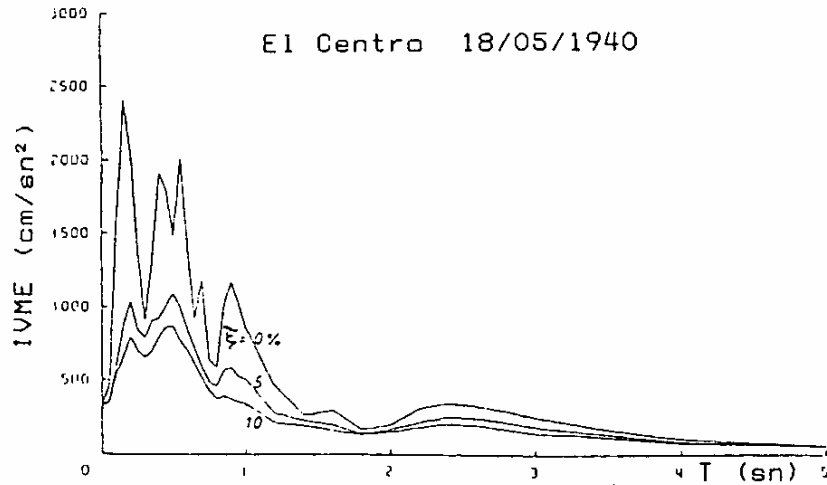
$$S_a \approx w_n S_v = \frac{2\pi}{T_n} S_v \quad (3.29)$$

Bu ifadelerde,

w_n : doğal açısal frekans,

T_n : doğal periyottur.

Bir depremin ivme davranış spektrumu özellikle kısa periyot ve küçük sönüm halinde çok fazla iniş çıkış göstermektedir. (Şekil 3.2)

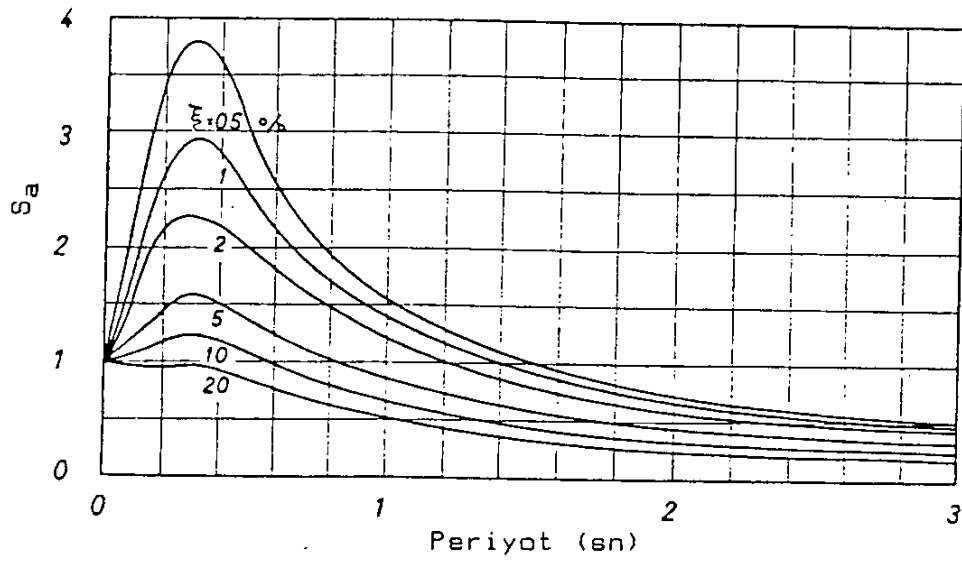


Şekil 3.2 İvme Davranış Spektrumu

Bu özellikteki davranış spektrumları ile periyotları birbirinden az farklı ($T_1 < T_2 < T_3$) olan üç yapıdan birincisi için çok büyük deprem kuvveti, ikincisi için küçük deprem kuvveti, üçüncüsü için tekrar çok büyük deprem kuvveti bulmak mümkündür. Bu sakıncayı gidermek üzere Housner bir deprem yerine birçok depremin tepki spektrumunu kullanmış ve ordinat değerlerini indirgeyerek ortalama bir spektrum hesaplamıştır. Şekil 3.3'te görülen ve sürekli eğrilerden oluşan bu

spektruma ivme hesap spektrumu adı verilir. Bu spektrum, en büyük ivme değeri birim olan bir depreme karşı geldiğinden kullanılırken bütün ordinatların o bölgede beklenen en büyük ivme değeri ile çarpılması gerekir.

Normalize edilmiş (maksimum yer ivmesine bölünmüş) spektrumların en önemli kullanım sahası, projelendirmede kullanılacak tasarım spektrumunun belirlenmesi çalışmalarında olmaktadır. Bir inşaat mahalli için maksimum yer ivmesi belirlendikten sonra normalize edilmiş spektrum bu ivme değeri ile çarpılırsa tasarım spektrumu belirlenmiş olmaktadır.



Şekil 3.3 İvme Hesap Spektrumu

BÖLÜM DÖRT

SONLU ELEMANLAR METODU

4.1 Giriş

Sonlu elemanlar metodunun tercih ve kullanım sebebi daha önceden yaklaşımlar ve kabulle yapılarak çözülmüş birçok mühendislik problemlerinin çözümünde bu yaklaşım ve kabulleri daha aza indirmesidir. Sonlu elemanlar metodu mühendislerin karşılaştığı karmaşık ve zor fiziksel problemleri kabul edilebilir bir yaklaşıklıkla çözebilen sayısal bir çözüm yöntemidir.

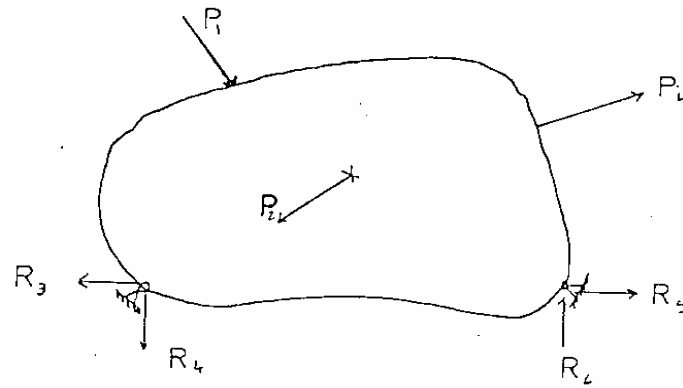
Sonlu elemanlar metodu sürekli bir ortamın sonlu elemanlarla modellenmesi ve sürekliliğin ve dengenin birleşim noktalarında sağlanması prensibine dayanır. Metot sürekli ortamın süreksiz bir çözümdür. Sürekliliğe ise ortamın bölündüğü elemanları artırarak yaklaşmak mümkündür.

Gerilme analizlerinde tercih edilme sebepleri arasında;

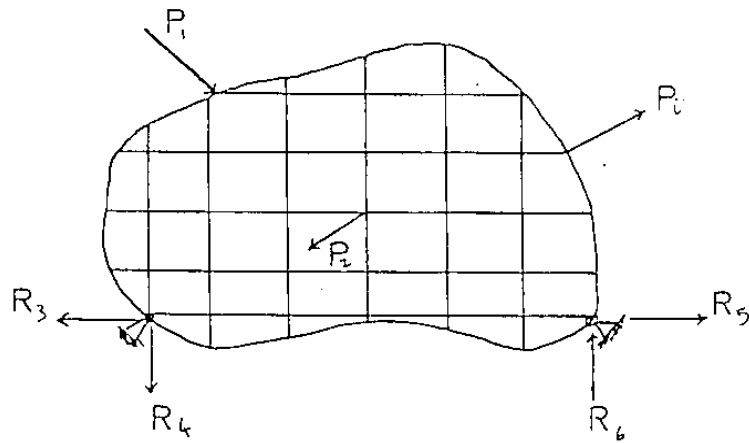
- Gerçek yapının geometrik ve malzeme değişimine oldukça yaklaşabilme şansı verilmesi,
- Yapıdaki süreksizliklerin kolaylıkla hesaba katılması,
- Sınır şartlarının kolaylıkla çözüme konulması gibi sebepler sıralanabilir.

Düzlem gerilme durumu gösteren ağırlık barajların çözümünde kesitin üçgen elemanlara bölünmesi şeklinde detaylı çalışmaların yapıldığı bu metot, düzlem gerilme durumu içermeyen kemer baraj analizinde kabuk elemanlar kullanılarak ya da üç boyutlu elemanlarla kolaylıkla uygulanabilir.

Plak elemanlara düzlem gerilme durumu özellikleri de süperpoze edilerek kabuk eleman elde etmek mümkün olup narinlikleri sebebiyle dörtgen kabuk elemanlar kullanılarak da çift eğriliğe sahip kemer barajları ve benzeri yapıları bu elemanlarla idealize etmek kolaylıkla mümkündür. Şekil 4.1'de düzensiz şekil ve yüklemeye sahip bir cismin yaklaşık bir sonlu eleman modeli gösterilmiştir.



Şekil 4.1a Düzlem gerilme problemi



Şekil 4.1b Sonlu eleman modeli

Uygun bir modelleme için cismin uniform kalınlığa sahip olduğu kabul edilir. Eğer yayılı yük etkiliyse veya cisim uygulanan bir momente maruz ise, bu yüklere statiksel olarak eşit olan tekil yükler sonlu eleman sisteminin düğüm noktalarına uygulanır.

4.2 Sonlu Eleman Metodunda Çözüm Adımları

Yapı mekaniğinde sonlu eleman metodu kullanılarak bir problemin çözümünde genellikle aşağıdaki değişmeyen temel adımlar izlenir.

— Çözüm adımının ilki bir elemanın lokal koordinat sistemlerinde rijitlik özelliklerinin eleman rijitlik matrisiyle belirlenmesidir. Rijitlik özellikleri belirlenmesi enterpolasyon fonksiyonu kabulü ve sanal iş ya da toplam potansiyel enerjinin minimizasyonu prensiplerinin kullanılarak yapılması mümkündür. Hesapların geçerliliği ve güvenilirliği bu adımda yoğunlaşır.

— İkinci adım lokal koordinat sisteminde hesaplanan bu rijitlik özelliklerinin elemanların global koordinat sistemindeki yerleşimine bağlı olarak transformasyonu ve bu rijitliklerin toplanarak yapı rijitliğinin elde edilmesi şeklindedir.

— Elemanlara etkiyen hidrostatik ve ağırlıklı yüklerinin düğüm noktalarına serbestlik dereceleri doğrultusunda yüklerine çevrilip yük vektörünün oluşturulması şeklindedir.

— Noktasal sürekliliği ve dengeyi içinde bulunduran lineer denklem sisteminin sınır şartları konulduktan sonra çözümü ve nokta deplasmanların bulunması ve elemanlara geri dönülerek elemanlardaki gerilmelerin elde edilmesi şeklindedir.

Yapılan Kabuller

- Deforme olmuş yapı içerisindeki yer değişimleri uygulanan kuvvetlerle doğrusal orantılıdır. Hook yasası geçerlidir.
- Deforme olmuş yapıda deplasmanlar küçük ve birim deplasmanlarla doğrusaldır.
- Geometri ve malzeme özellikleri tek bir sonlu eleman için sabit değerlerdir.
- Kabuk eleman için ise, plağın kalınlığı diğer boyutlara göre küçüktür ve yüklenmiş plağın orta kesiti bir düzlem üzerinde yer alır.

4.3 Birim Deplasman Teorisine Göre Genel Eleman Karakteristikleri

4.3.1. Sanal İş Prensibi

Bu prensip lineer veya lineer olmayan bir yapıdaki dengedeki kuvvetler sistemini uygun deplasman sistemine bağlar. Bir prensibin ismi yapıya uygulanan dengedeki sanal kuvvetler veya küçük sanal deplasman sistemler, gerçek deplasmanlara veya gerçek kuvvetlere bağlıdır gerçeğinden gelmektedir. Uygun sanal kuvvetler veya sanal deplasmanların seçimiyle, sanal iş prensibi deplasmanların ve kuvvetlerin hesaplanması için kullanılabilir. (Ghali, Neville, 1978). Uygulanan dışsal kuvvetleri veya ısı değişimi, büzülme gibi çevresel sebeplerin deforme ettiği bir yapı düşünülür. Bu yapıda toplam gerçek şekil değiştirme $\{\epsilon\}$ 'dir. Seçilen n koordinatındaki mukabil deplasmanlar D_1, D_2, \dots, D_n 'dir. Bu gerçek yükler ve deplasmanlar sunulmadan önce, yapıya $\{\sigma\}$ gerilmesine sebep olan 1,2,...,n koordinatlarındaki F_1, F_2, \dots, F_n sanal kuvvetler sistemi uygulanmıştır.

Sanal kuvvetler sistemi dengededir; fakat bunun gerçek deplasmanlara D mukabil gelmesi gerekmez.

Sanal iş prensibi, sanal tamamlayıcı iş olan gerçek deplasmanlar ve mukabil sanal kuvvetler çarpımının, sanal tamamlayıcı enerji olan gerçek içsel deplasmanlar ve mukabil sanal içsel kuvvetler çarpımına eşit olduğuna hükmeder(Ghali, Neville, 1978).

Kısaca;

Sanal tamamlayıcı iş = Sanal tamamlayıcı enerji

Bu genel şekliyle şu şekilde ifade edilir;

$$\sum_{i=1}^n F_i D_i = \int_v \{\sigma\}\{\epsilon\}.dv \quad (4.1)$$

Sanal kuvvetler F mukabil gelen gerilme ve gerçek deplasmanlara $\{D\}$ uygun olan gerçek şekil değiştirir. İntegral yapının hacmi üzerinden hesaplanır ve denklem (4.1)de sanal kuvvetler toplamı, sanal dış kuvvetlerin tamamlayıcı işi, sanal

iç kuvvetlerin tamamlayıcı iş değerine gerçek deplasmanlarla çarpım halinde eşittirler (Ghali, Neville, 1978).

Diğer bir deyişle,

$$\sum_{i=1}^n i \text{'deki san.kuv.} * i \text{'deki ger.dep.} = \int_v \text{ san. iç kuv.} * \text{ger. iç dep.} * dv \quad (4.2)$$

Şu şekliyle sanal iş prensibi, bilinen gerçek iş kuvvetlerden dolayı herhangi bir koordinatta şekil değiştirmeden deplasmanların hesaplanması için kullanılabilir.

Prensip, aynı zamanda herhangi bir koordinattaki dış kuvvetlerin, gerçek iç kuvvetlerden hesaplanması için kullanılabilir. Yapıda herhangi bir noktadaki sanal şekil değiştirmenin $\{\mathcal{E}\}$ sanal deplasmanla uygun olduğu kabul edilir. Gerçek dış kuvvetlerin $\{F\}$, sanal deplasmanlarla $\{D\}$ çarpımı, gerçek içsel kuvvetlerin, $\{D\}$ ile uygun olan sanal içsel deplasmanlarla çarpımına eşittir (Ghali, Neville, 1978). Yani,

$$\text{Sanal iş} = \text{Sanal şekil değiştirme enerjisi}$$

Sanal iş prensibi bir deplasman veya bir kuvvetin hesaplanmasında kullanıldığı zaman, sanal kuvvetler veya sanal deplasmanlar öyle seçilir ki (4.2) denkleminin sağ tarafı istenen değeri verir.

Yukarıdaki sanal iş, sanal şekil değiştirme enerjisi eşitliği denklem (4.1)'deki gibi de ifade edilebilir. Fakat bu durumda $\{\sigma\}$ gerçek kuvvetlere mukabil gelen gerçek gerilme ve $\{\mathcal{E}\}$ sanal deplasmanlarla $\{D\}$ uygun olan sanal şekil değiştirmedir. Bu durumda, (4.1) denklemini gerçek kuvvetlerin sanal deplasmanlarla çarpımının içsel ve dışsal işleri aynıdır.

Aynı denklem yazıyla şöyle ifade edilebilir.

$$\sum_{i=1}^n i \text{'deki ger. kuv.} * i \text{'deki san.dep.} = \int_v \text{ ger. iç kuv.} * \text{san. iç dep.} * dv \quad (4.3)$$

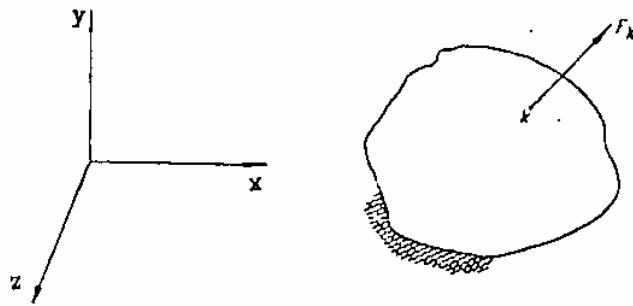
(4.3) denklemi, sonlu eleman metodunda kullanılan yapı elemanlarının rijitlik matrislerinin hesaplanması için birim – deplasman teoremine ulaşmak gayesiyle değiştirilebilir.

Bir sürekli yapı, plak veya üç boyutlu bir cisim, üçgen veya dörtgen elemanlara idealize edildiği zaman birim deplasman teoremi, eleman içindeki gerilme dağılımını veya elemanın rijitlik matrisinin elde edilmesi için kullanılan prosedürlerden bir tanesidir (Ghali, Neville, 1978).

4.3.2. Birim deplasman teorisine genel rijitlik karakteristiklerinin hesaplanması

Bölüm 4.3.1’de ifade edildiği gibi, bir cisimi dengede tutabilmek için gerekli kuvvetler ve içindeki doğru gerilme dağılımı arasında fonksiyonel bir ilişki olan sanal iş yardımıyla birim deplasman teoremi kurulmuştur. Bu teorem belli tip bir sonlu elemanın rijitlik karakteristiklerinin tanımlanması için en basit yoldur. Şekil 4.2’de görülen üç boyutlu elastik bir cismin yüzey noktası k ’ya F_k tekil kuvveti uygulandığında, cisim dengededir.

F_k , gerilmeler $\{\sigma\}$ ve F_k yönündeki k deplasmanı olan u_k deplasmanını ve cismin içinde şekil değiştirmelere $\{\varepsilon\}$ sebep olur.

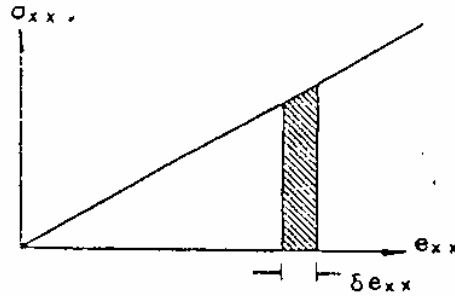


Şekil 4.2 k yüzey noktasına F_k kuvveti etkiyen bir üç boyutlu elastik cisim

Küçük bir sanal deplasman δ_{uk} , k düğümüne F_k yönünde verildiğinde, bu cisimdeki bütün birim şekil değiştirme bileşenlerini değiştirecektir.

Tipik olarak, e_{xx} deki değişim $\delta_{e_{xx}}$ olsun. Şekil değiştirmedeki herhangi bir değişme, cismin toplam Şekil değiştirme (strain) enerji içeriğini değiştirir.

Şekil 4.3'te görüldüğü gibi, $\delta_{e_{xx}}$ 'den dolayı birim hacimdeki Şekil değiştirme enerji değişimi $\sigma_{xx} * \delta_{e_{xx}}$ eşit olacaktır.



Şekil 4.3 Şekil 4.2'deki cisim için $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ diyagramı (taralı alan cismin birim hacimdeki Şekil değiştirme enerjisini gösterir.)

Bu işlem bütün Şekil değiştirme bileşenleri için sırayla tekrarlandığında δ_{u_k} 'dan dolayı, cismin toplam Şekil değiştirme enerjisi değişimi;

$$\Delta H = \int_v (\sigma_{xx} \delta_{e_{xx}} + \sigma_{yy} \delta_{e_{yy}} + \sigma_{zz} \delta_{e_{zz}} + \tau_{xy} \delta_{e_{xy}} + \tau_{yz} \delta_{e_{yz}} + \tau_{zx} \delta_{e_{zx}}) dv \quad (4.4)$$

Bu denklem kısa Şekliyle Şöyle yazılabilir.

$$\Delta H = \{\delta_e\}^T \{\sigma\} dv \quad (4.5)$$

Burada;

$$\begin{aligned} \{\delta_e\}^T &= \{\delta_{e_{xx}}, \delta_{e_{yy}}, \dots, \delta_{e_{zx}}\} \\ \{\sigma\} &= \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \dots, \tau_{zx}\}^T \end{aligned}$$

cisim geometrik olarak lineer tarzda deforme olurken, Şekil değiştirmeler ve deplasmanlar arasında aşağıdaki gibi lineer bir ilişki hükmü çıkar.

$$\{\epsilon\} = \{f\} u_k \quad (4.6)$$

Burada $\{f\}$ şekil değiştirmeler ve u_k arasındaki lineer ilişkiyi gösterir. Her iki tarafın türevi alındığında denklem (4.7) elde edilir.

$$\{\delta\mathcal{E}\} = \{f\}u_k \quad (4.7)$$

(4.7) ve (4.5) kullanılarak şekil değiştirme enerjisi (4.8)'de görüldüğü gibi yazılabilir.

$$\Delta H = \int_v \delta u_k * \{f\}^T \{\sigma\} dv \quad (4.8)$$

Deformasyon esnasında herhangi bir enerji kaybının olmadığını kabul ederek, bu durumda ΔH , F_k 'nin δu_k yönünde yaptığı sanal işe eşit olmalıdır.

$$\delta u_k * F_k = \int_v \delta u_k \{f\}^T \{\sigma\} dv \quad (4.9)$$

δu_k denklemden çıkarılabilir.

$$F_k = \int_v \{f\}^T \{\sigma\} dv \quad (4.10)$$

(4.10), birim deplasman teoremini ifade eder. Bu birim tekil kuvvet düşünüldüğündeki en basit durumdur, çok kuvvetler için genel şekli aşağıdaki gibi kolaylıkla elde edilebilir.

Bir tekil kuvvet yerine, F_1, F_2, \dots, F_N kuvvetleri, cismin 1, 2, ..., N yüzey noktalarına etki eder ve $u_1, u_2, \dots, u_N, F_1, F_2, \dots, F_N$ yönündeki mukabil deplasmanlardır. O zaman (4.10)'a benzer bir denklem her bir kuvvet için elde edilebilir ve bunlar matris gösterimle şöyle gösterilebilir.

$$\{P\} = \int_v [f]^T \{\sigma\} dv \quad (4.11)$$

$[f]$ matrisi şöyle tanımlanır.

$$\{\mathcal{E}\} = [f] \{\bar{\delta}\} \quad (4.12)$$

$$\text{Ve } \{P\} = \{F_1, F_2, \dots, F_N\}^T$$

$$\{\bar{\delta}\} = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}^T$$

(4.11) birim deplasman teoreminin genel şeklidir. Birim deplasman teoremi sadece lineer elastik yapılar için geçerlidir.

(4.11) denklemi sonlu elemanın rijitlik karakteristiklerinin elde edilmesinin teminini sağlar.

Bu denklem bir elemana uygulandığında, $\{P\}$ elemanın bütün düğüm kuvvetlerini veren bir vektör olarak yorumlanacak. Buna ilaveten, eleman izole halde düşünüldüğünde, $\{P\}$ elemanın düğüm noktası kuvvetlerine eşit olmalıdır, düğüm noktası kuvvetlerini $\{\bar{P}\}$ ile belirtirsek (4.13) denklemi elde edilir.

$$\{\bar{P}\} = \int_v [f]^T \{\sigma\} dv \quad (4.13)$$

Bu safhada elemanın boyutunu, düğüm noktası sayısını veya serbestlik derecesini belirtmeye gerek yoktur. $\{\bar{P}\}$ 'in elemanın bütün düğüm noktası deplasmanlarını gösterdiğini ifade edebiliriz.

Hook kanununu hatırlayarak

$$\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\} \quad (4.14)$$

$[d]$ elastisite matrisini gösterir. Denklem (4.12)'i denklem (4.14)'de yazarak denklem (4.15) elde edilir.

$$\sigma = [d][f]\{\bar{\delta}\} \quad (4.15)$$

(4.13) ve (4.14) denklemleri kullanılarak (4.13)'un diğer bir şekli aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\{\bar{P}\} = \int_v [f]^T [d][f]\{\bar{\delta}\} dv \quad (4.16)$$

$\{\bar{\delta}\}$ integralin dışına alınabilir. Çünkü mevcut koordinat fonksiyonlarından değildir. O zaman (4.16) şöyle olur.

$$\{\bar{P}\} = \{\bar{\delta}\} \int_v [f]^T [d][f] dv \quad (4.17)$$

Eğer elemanın [f] değeri biliniyorsa, elemanın rijitlik matrisi [K_i] denklem (4.17) integralinden elde edilebilir. Çünkü eleman rijitlik matrisi kolonları birim deplasman elde etmek için gerekli düğüm kuvvetlerini veya diğerleri sabitken belli bir yöndeki serbestlik derecesindeki rotasyonu ifade eder. Düğüm noktası kuvvet vektörü $\{\bar{P}\}$ kısa ve bilinen şekliyle şöyle ifade edilebilir.

$$\{\bar{P}\} = [K_i] \{\bar{\delta}\} \quad (4.18)$$

denklem (4.17) ve (4.18)'den,

$$[K_i] = \int_v [f]^T [d][f] dv \quad (4.19)$$

yazılabilir.

Denklem (4.18) sadece bir elemanın rijitlik matrisi ve düğüm noktası vektörü için değil bir yapının bütün rijitlik matrisi ve yük vektörü için geçerlidir.

4.3.3 Yayılı ve ağırlık yüklerinin eşit düğüm kuvvetleri

Genellikle sonlu eleman metodunda bir problemin çözümü bir denklemler çözümüdür.

Bu aynı denklemlerde, kompatibilite ve denge şartları düğümlerde otomatik olarak sağlanmıştır ve düğümlerin deplasmanları bilinmeyenler olarak seçilir. Bundan dolayı, yayılı yükler, tekil yükler ve termal etkiler eşit düğüm yükleri olarak yer alır.

Eleman karakteristiklerini tanımlamanın yollarından biri elemanın her yerinde deplasmanı tanımlayan u fonksiyonunu kabul etmektir ve bu elemanın düğüm noktası deplasmanları ile ilgilidir.

$$\{u\} = [b] \{\bar{\delta}\} \quad (4.20)$$

$[b]$ matrisi, düğüm noktası deplasmanları $\{\bar{\delta}\}$ ve deplasman fonksiyonu $\{u\}$ arasında bir bağıntıdır.

Elemana etkiyen yayılı yüzey yükünün P yaptığı toplam sanal iş, sanal deplasman $\{\delta u\}$ esnasında,

$$\int_s \{\delta u\}^T P ds \quad (4.21)$$

İntegral P 'nin aktif olduğu elemanın alanı üzerinden tatbik edilir. Bu iş $\{P_o\}$ 'ın mukabil sanal düğüm noktası deplasmanında $\{\delta \bar{\delta}\}$ yaptığı işe eşit olmalıdır.

$$\{\bar{\delta \delta}\}^T \{P_o\} = \int_s \{\delta u\}^T .P .ds \quad (4.22)$$

(4.20)'nin her iki tarafının türevi alındığında

$$\{\delta u\} = [b] \{\delta \bar{\delta}\} \quad (4.23)$$

elde ederiz.

(4.22) ve (4.23) kullanılarak (4.24) elde edilebilir.

$$\{P_u\} = \int_s [b]^T .P .ds \quad (4.24)$$

Cismin yüklerini eşit düğüm kuvveti vektörü cinsinden yazmak mümkündür. $\{P_b\}$ ile tanımlanır. $\{P_b\}$ 'nin elde edilmesi $\{P_o\}$ 'ın aynıdır. Bu durumda, cisim yüklerinden gelen toplam sanal iş, $\{P_b\}$ 'nin $\{\delta \bar{\delta}\}$ deki işine eşittir.

$$\{P_b\} = \int_v \rho [b]^T \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} dv \quad (4.25)$$

ρ : birim kütle

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; x, y, z lokal koordinat yönündeki ağırlık ivmelidir.

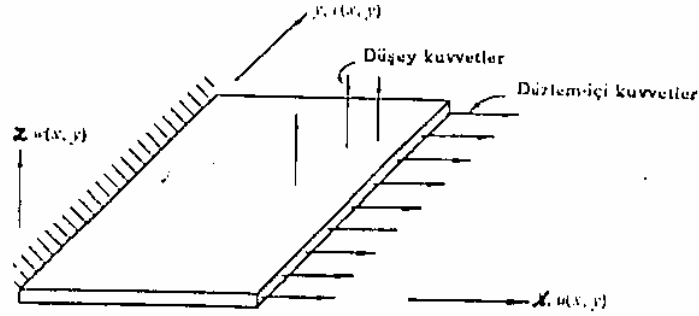
4.4 Gerilmiş Plak Eleman Karakteristikleri

4.4.1. Gerilmiş plak eleman rijitlik karakteristiklerinin hesaplanması

Bir kabuk yapı genellikle düzlem kuvvetleri ve eğilme kuvvetlerine maruz kalmaktadır.

Bu tip yapılar dış kuvvetlere maruz kaldığında “gerilmiş plak elemanlara” bölünerek analiz yapılır.

Şekil 4.4.’de düzlem-İçi ve kesme kuvvetlerine maruz bir düzlem plak verilmiştir.



Şekil 4.4 Düzlem – İçi ve kesme kuvvetlerine maruz bir düzlem plak

Gerilmiş plak eleman karakteristikleri, düzlem-İçi karakteristiklerine plak eleman karakteristikleri eklenerek hesaplanır. Diğer bir ifadeyle, bir gerilmiş plak eleman lokal koordinat sisteminde her bir düğüm noktasında 5 (beş) serbestlik derecesine sahiptir.

$[M]$ matrisi

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & y^3 & x^3y & xy^3 \end{bmatrix}$$

$\Theta_x(x,y)$ ve $\Theta_y(x,y)$ rotasyonları $w(x,y)$ fonksiyonundan elde edilir.

$$\Theta_x(x,y) = \partial w / \partial y \quad (4.30a)$$

$$\Theta_y(x,y) = -\partial w / \partial x \quad (4.30b)$$

Düğüm noktası koordinatlarını $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$, $\theta_x(x,y)$ ve $\theta_y(x,y)$ de koyarak ve bu sırada yazarak,

$\{\delta\}$ ve $\{A\}$ arasındaki bağıntı matrisi olan birincil matris C elde edilir.

$$\{\delta\} = [C]\{A\} \quad (4.31)$$

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} u(x_a, y_a) \\ v(x_a, y_a) \\ w(x_a, y_a) \\ \theta_x(x_a, y_a) \\ \theta_y(x_a, y_a) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ u(x_a, y_a) \\ v(x_a, y_a) \\ w(x_a, y_a) \\ \theta_x(x_a, y_a) \\ \theta_y(x_a, y_a) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Son olarak, birincil matris [N] şekil değiştirme vektörü $\{\varepsilon\}$ ve katsayı vektörü $\{A\}$

$$\{\varepsilon\} = [N]\{A\} \quad (4.34)$$

$\{\varepsilon\}$ aşağıda verildiği gibi tanımlayabiliriz.

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

(4.35) denklemini kullanarak gerilmiş plak eleman için [N] matrisi ele edilebilir.

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2y & -6y & 0 & -6x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4y & -4y & 0 & -6x^2 - 6y^2 \end{bmatrix}$$

Bu tarzda bulunan birincil matrisler, elastisite matrisi [d] ile birlikte denklem (4.19)'da ikame edilerek gerilmiş dörtgen elemanın rijitlik matrisi [Ki] hesaplanır. Denklem (4.29)'daki [f] matrisi birincil matrisler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

Denklem (4.34) ve (4.12) kombine edilerek

$$[N]\{A\} = [f]\{\bar{\delta}\} \quad (4.37)$$

yazılabilir.

(4.31) denkleminde, katsayı vektörü $\{A\}$ birincil matris $[C]$ ve düğüm deplasmanları vektörü $\{\bar{\delta}\}$ yardımıyla ifade edilebilir.

$$\{A\} = [C]^{-1} \{\bar{\delta}\} \quad (4.38)$$

Eğer (4.38) denklemi (4.37) denkleminde yerine konulursa $[f]$ matrisi birincil matris $[N]$ ve birincil matris $[C]$ cinsinden ifade edilir.

$$[f] = [N][C]^{-1} \quad (4.39)$$

(4.39) denklemi (4.19) denkleminde yerine konulursa bir elemanın rijitlik matrisi $[K_i]$ birincil matrisler yardımıyla ifade edilebilir.

$$[K_i] = \int_{\Delta} [C^{-1}]^T [N]^T [d][N][C^{-1}]^T dv \quad (4.40)$$

$$[\bar{K}] = \int_v [N]^T [d][N] dv \quad (4.41)$$

yazılarak (4.40) denklemi

$$[K_i] = [C^{-1}]^T [\bar{K}] [C^{-1}] \quad (4.42)$$

gerilmiş bir plak eleman için, düzlemiçi, ve eğilmenin süperpozisinden dolayı eleman karakteristikleri $[\bar{K}]$ iki alt matristen oluşur.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} K^I & 0 \\ 0 & K^{II} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

K^I gerilmiş plak elemanın düzlem içi (membrane) davranışlarını gösterir.

K^{II} gerilmiş plak elemanın eğilme davranışını gösterir.

K^I deplasman fonksiyonları $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ kullanılarak hesaplanabilir.

$$[K'] = \Delta \varphi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & q & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & q & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Δ : elemanın alanı

$$\varphi = \frac{E_t}{(1-\nu^2)} \quad q = \frac{1-\nu}{2} \quad (4.44)$$

E: elastisite modülü

t: kalınlık

γ : poisson oranı

$[K^{II}]$ deplasman fonksiyonu $w(x,y)$ kullanılarak hesaplanabilir.

Her düğüm noktasında 3 serbestlik derecesi olmasından ve denklem (4.42), $[K^{II}]$ birincil matris $[N]$ ve elastisite matrisi $[d]$

$$[K^{II}]_{2 \times 12} = \int_{\Delta} N^T \dots [d][N] dx dy \quad (4.45)$$

Plak eleman için elastisite matrisi $[d]$

$$[d] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$D = \frac{E.t^3}{12(1-\nu^2)}$$

Denklem (4.34)'de verilen birincil matrisi $[N]$ aşağıdaki denklem (4.47) kullanılarak elde edilir.

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$N = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Denklem (4.46) ve (4.48) denklem (4.45)'de yerine koyularak $[K^{II}]$ matrisi elde edilir.

Böylece K^I ve K^{II} denklem (4.43) yerine konularak ve $[\bar{K}]$ matrisini de denklem (4.42)'de yerleştirilerek eleman rijitlik matrisi bulunur.

$$[K_i]_{20 \times 20} = [C^{-1}]^T_{20 \times 20} [\bar{K}]_{20 \times 20} [C^{-1}]_{20 \times 20} dv \quad (4.49)$$

4.4.2 Hidrostatik basınç ve ağırlık yükünün eşit kuvvet vektörü

Sudan dolayı yüzeye etkiyen hidrostatik basınç kuvveti aşağıdaki genel denklemden bulunabilir.

$$F = \gamma \cdot z \cdot \Delta \quad (4.50)$$

γ : suyun birim ağırlığı

z : su yüzeyinden elemanın merkezine olan uzaklık

Δ : yüzey alanı

Eşit kuvvetin F yüzeye uygulama noktası basınç merkezini gösterir. Basınç merkezi devamlı yüzey merkezinin altındadır.

Denklem (4.50)'den bulunan kuvvet yüzey alanına bölünürse merkeze etkiyen basınç bulunur. Bu çalışmada, basınç değeri yüzeyin bütün noktalarında geçerli kabul edilecektir.

Denklem (4.24) kullanılarak, yayılı basınç kuvvetinden dolayı eşit kuvvet, eşit düğüm noktaları cinsinden ifade edilebilir. Bunlar plak elemanın serbestlik derecesi yönündedir. H , M_x ve M_y olarak belirtilir.

Denklem (4.24)'de $[b]$ matrisi denklem (4.20) ve (4.27) arasında bir eşitlik yazılarak birincil matrisler cinsinden ifade edilebilir. (4.38) denklemi de kullanılırsa $[b]$ matrisi;

$$[b] = [M].[C^{-1}] \quad (4.52)$$

olur.

Eğer (4.52) denklemi (4.24) denkleminde yerine konulursa;

$$\{P_o\} = P[C^{-1}]^T \int_s [M]^T dx dy \quad (4.53)$$

elde edilir.

$\{P_o\}$ 'in bileşenleri

$$\{P_o\} = \begin{bmatrix} H_a \\ M_{xa} \\ M_{ya} \\ H_b \\ M_{xb} \\ M_{yb} \\ H_c \\ M_{xc} \\ M_{yc} \\ H_d \\ M_{xd} \\ M_{yd} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Hidrostatik kuvvet elemanda eğilme deplasmanlarına sebep olduğundan, denklem (4.53)'teki birincil matrisler $[C]$ ve $[M]$ dörtgen elemana ait olmaktadır.

Eğer ağırlık sabiti (g) bölüm 4.5'de verilen $[F]$ matrisi yardımıyla lokal koordinata çevrilirse,

$$\{g\} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = [F^T] \{g\} \quad (4.55a)$$

z global ekseni dikeyse o zaman (4.55a)

$$\{g\} = [F^T] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (4.55b)$$

olur.

$[F]$ matrisi

$$[F] = \begin{bmatrix} x^g y & x^g y & x^g z \\ y^g x & y^g y & y^g z \\ z^g x & z^g y & z^g z \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Burada, mesela $x^g x$, x lokal ve x global eksenleri arasındaki açının kosinüsünü gösterir.

Eleman lokal koordinat sistemi bu şekilde alınır, $x - y$ düzlemi elemanın yüzeyinde bulunmaktadır.

x ve y lokal koordinatları yönündeki ağırlık etkileri gerilmiş plak elemanda düzlem – içi deplasmanlarına sebep olur.

Lokal $x - y$ düzlemindeki ağırlık sabitinin bileşenleri kullanılarak, F ve Q ile gösterilen eşit cisim kuvvetleri denklem (4.57) yardımıyla bulunabilir.

$$\{P_b\} = \begin{bmatrix} F_a \\ Q_a \\ F_b \\ Q_b \\ F_c \\ Q_c \\ F_d \\ Q_d \end{bmatrix} = \rho t [C^{-1}]^T \int_s [M]^T \begin{bmatrix} g \\ g_y \end{bmatrix} d_x d_y \quad (4.57)$$

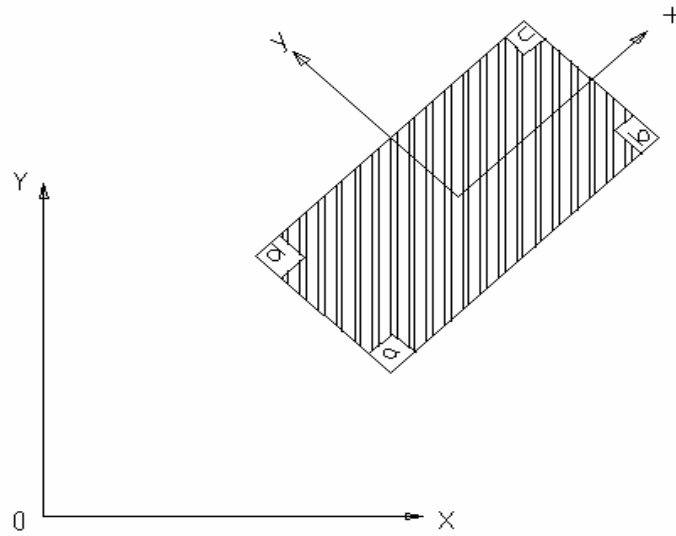
$$M = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$$

Eşit ağırlık sabiti z lokal yönünde birim ağırlık, alan ve elemanın kalınlığı ile çarpılırsa, z lokal eksen yönündeki zati ağırlık bulunur.

Bu zati ağırlık elemanın alanına bölünürse, z lokal yönündeki zati ağırlık etkisi üniform yüke çevrilir. Bu çevirim elemanın, her bir düğümündeki ilave H , M_x , ve M_y kuvvetlerini verir.

Bu düğüm yüklerinin global koordinat sistemine çevrilmesinden sonra, toplam yük vektörünü elde etmek için düğümlerin serbestlik dereceleri kullanılarak toplanmalıdır.

4.5 Deplasmanların, Yüklerin ve Rijitlik Matrisinin Lokal – Global Eksen Arasında Dönüşümü



Şekil 4.6: Tipik bir düzlem elemanın lokal ve global eksenleri

Dörtgen bir eleman için transformasyon matrisi eleman dört noktadan oluştuğu için dört t_i alt matrisinden oluşmaktadır. t_i matrisleri ise Θ_z serbestlik derecesinin ihmalinden dolayı 6x5 matrisleri şeklindedir.

$$[T_i] = \begin{bmatrix} t_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_i \end{bmatrix} \quad [t_i]_{6 \times 5} = \begin{bmatrix} x^g x & x^g y & x^g z & 0 & 0 \\ y^g x & y^g y & y^g z & 0 & 0 \\ z^g x & z^g y & z^g z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^g x & x^g y \\ 0 & 0 & 0 & y^g x & y^g y \\ 0 & 0 & 0 & z^g x & z^g y \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$V_{ab} \text{ vektörü } V_{ab} = \begin{bmatrix} x_b & -x_a \\ y_b & -y_a \\ z_b & -z_a \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

şeklinde ifade edilir.

Doğrultu kosinüsleri ise

$$V_x = \begin{bmatrix} x^g x \\ y^g x \\ z^g x \end{bmatrix} = \frac{1}{L_{ab}} \begin{bmatrix} x_{ba} \\ y_{ba} \\ z_{ba} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

şeklinde bulunabilir.

$$x_{ba} = x_b - x_a \quad (4.60a)$$

$$L_{ab} = \sqrt{x_{ba}^2 + y_{ba}^2 + z_{ba}^2} \quad (4.60b)$$

Eleman düzlemine dik olan z lokal ekseni, lokal eksenleri tanımlamak için diğer bir seçenektir.

Bu vektör \overline{V}_{ab} ve \overline{V}_{ac} vektör çarpımı yardımıyla bulunabilir.

$$\overline{V}_z = \overline{V}_{ab} \times \overline{V}_{ac} = \begin{bmatrix} y_{ba} z_{ca} & -z_{ba} y_{ca} \\ z_{ba} x_{ca} & -x_{ba} z_{ca} \\ x_{ba} y_{ca} & -y_{ba} x_{ca} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

z eksenin doğrultu kosinüsleri aynı şekilde kolaylıkla bulunabilir.

$$\overline{V}_z = \frac{1}{L_z} \overline{V}_z \quad (4.62)$$

Son olarak, y eksenin doğrultu kosinüsleri z ve x eksenin doğrultu kosinüslerinin vektör çarpımına eşittir.

$${}^{-}V^{-}_y = {}^{-}V^{-}_z x {}^{-}V^{-}_x = \begin{bmatrix} x^g y \\ y^g y \\ z^g y \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Alt matrisler 6'ya 5 olduğundan, transformasyon matrisi 24'e 20'dir. Ortogonal transformasyon özelliğinden dolayı bu matrisin tersi onun transpozisine eşittir.

Eleman i'nin lokal rijitlik matrisi $[K_i]$ ve global rijitlik matrisi $[K_i]^g$ arasındaki bağıntı transformasyon matrisi kullanarak

$$[K_i^g]_{24 \times 24} = [T]_{24 \times 20} [K_i]_{20 \times 20} [T]^T_{20 \times 20} \quad (4.64)$$

Lokal kuvvet vektörü $\{P_i\}$ ve global kuvvet vektörü $\{P_i\}^g$ arasındaki bağıntı;

$$\{P_i\}^g_{24 \times 1} = [T]_{24 \times 20} \{P_i\}_{20 \times 1} \quad (4.65)$$

Bir tekil yükün transformasyonu gerekirse, elemanın kuvvet vektörünün transformasyonu yerine, (4.56) denkleminde verilen bütün doğrultu kosinüsleri içeren $[F]$ matrisi yeterlidir.

$$[F] = \begin{bmatrix} x^g x & x^g y & x^g z \\ y^g x & y^g y & y^g z \\ z^g x & z^g y & z^g z \end{bmatrix}$$

Lokal deplasman vektörü $\{\delta_i\}$ ve global deplasman vektörü $\{\delta_i\}^g$ arasındaki bağıntı

$$\{\delta_i\}^g_{24 \times 1} = [T]_{24 \times 20} \{\delta_i\}_{20 \times 1} \quad (4.66)$$

Elemanın lokal rijitlik matrisini elde etmek için düğümlerin lokal koordinatları gereklidir.

Lokal koordinatları doğrultu kosinüsleri ve global koordinatlarla aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = [F]^T \begin{bmatrix} x_a^g & -x_a \\ y_a^g & -y_a \\ z_a^g & -z_a \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

x_0, y_0, z_0 lokal koordinat sisteminin orijinin global koordinatlarıdır.

4.6 Tümel Rijitlik Matrisinin Kodlama Tekniğiyle Toplanması

Yapının toplam rijitlik matrisini elde etmek için programlamada uygulanabilen kodlama tekniği hızlı ve uygun bir tekniktir.

Bu teknik, eleman rijitlik matrisinin tümel rijitlik matrisine birer birer taşınması üzerine kurulmuştur.

Yapının toplam rijitlik matrisinin hesaplanması için direk toplama tekniği de kullanılabilir.

Bu metot da denge ve kompabilite şartlarını sağlamak için bir bağ matrisi kullanmak gereği vardır.

4.7 Sınır Şartları

Sonlu eleman metodunda, problem sınır şartlarının temel rijitlik matrisinde ve tümel yük vektöründe belirlenmesinden sonra çözülebilir.

Şekil 4.7'de verilen basit kiriş probleminin çözümünde sınır şartlarının belirlenmemesi durumunda, kirişte herhangi bir şekil değiştirme olmayacaktır. Bu duruma rijit cisim hareketi denir.



Şekil 4.7 P tekil yükü uygulanmış basit bir kiriş

Denklemin (4.18)'in genelleştirilmesiyle,

$$[K]^g \cdot \{\delta\}^g = \{P\}^g \quad (4.68)$$

$[K]^g$: tümel rijitlik matrisi

$\{\delta\}^g$: global düğüm deplasman vektörü

$\{P\}^g$: özel yükleme durumu içeren global düğüm kuvvet vektörü

Sınır şartlarının girişini göstermek için kiriş örneğini sadece dört sistem denklemiyle düşünülebilir. Denklem (4.68)'i açarsak,

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

bu farazi sistem düğüm değıştirmeleri δ_1 ve δ_3 , $\delta_1 = C_1, \delta_3 = C_3$ olarak tanımlanmış kabul edelim. Bu sınır şartları denkleme konulduğunda denklem (4.70),

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & k_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ P_2 - k_{21}C_1 - k_{23}C_3 \\ C_3 \\ P_4 - k_{41}C_1 - k_{43}C_3 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

olur.

Boyutları değıştirilmemiş bu denklem grubu bütün düğüm deplasmanları için çözülmeye hazırdır.

Çözüm asıl bilinmeyenlerle δ_2 ve δ_4 , $\delta_1 = C_1$ ve $\delta_3 = C_3$ verir.

4.8. Gauss Eliminasyon Metoduyla Rijitlik Matrisinin Çözümü

Gauss – Jordan metodu matris tersi için ve denklem sistemleri çözümü için genel ve kesin bir yoldur. Çünkü matris simetrik olmasa bile çalışır. Yapı analizinde, matris tersi birinci derece analizinde devamlı simetrik olan global rijitlik matrisi üzerinden yapılır.

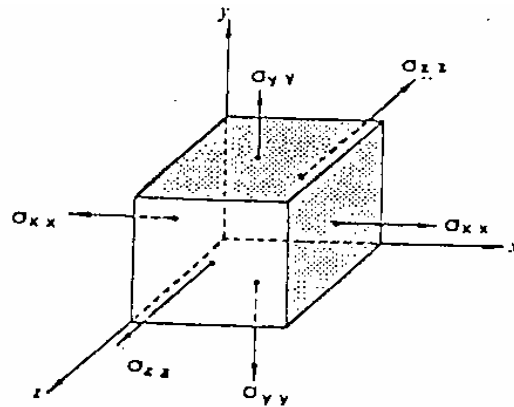
Denklem (4.68)'de verilen denklem sistemleri için, Gauss – Jordan eliminasyon metodu $[K]^g$ matrisini, bilgisayar hafızasında, birim matris veya ters matrise değiştirir.

Buna ilaveten $\{P\}^g$ yi $\{\delta\}^g$ vektörüne değiştirebilir.

Büyük yapılar için, her ne kadar çözülecek denklem sayısı 40, 50 veya daha fazla olabilirde, global rijitlik matrisi genellikle büyük bir miktarda sıfır eleman ihtiva eder.

Dikkatli bir numaralandırma sisteminin dizayn edilmesiyle, analizci bu sınıf elemanları baş diyagonalden ayrı yerleştirebilir ve sıfırdan farklı elemanları baş diyagonale yakın yerleştirebilir.

4.9 Gerilmiş Dörtgen Plak Elemanda Kuvvetler ve Gerilmeler



Şekil 4.8: Eşit kenarlı bir küpteki gerilmeler.

Hook kanununa göre, Şekil 4.8'deki küpün x yönündeki uzaması aynı zamanda normal şekil değiştirmesi e_{xx}

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \quad (4.71a)$$

benzer şekilde;

$$e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx}) \quad (4.71b)$$

ve

$$e_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad (4.71c)$$

Normal şekil değiştirmelere mukabil, kesme şekil değiştirmeleri birbirinden bağımsızdır.

$$e_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad (4.72a)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \quad (4.72b)$$

$$e_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad (4.72c)$$

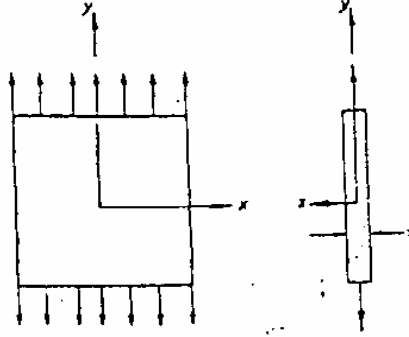
G rijitlik modülü ve

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.73)$$

şeklinde ifade edilir.

4.9.1. Düzlem – gerilme durumundaki bağıntı

Düzlem –gerilme durumunda, cisim düzlem – içi kuvvetlere maruz kalır ve bir boyutu diğer boyutlara oranla çok küçüktür. Şekil 4.9’da görüldüğü gibi.



Şekil 4.9: Tipik bir düzlem gerilme problemi

Böylece;

$$\sigma_{xx} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad (4.74a)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \quad (4.74b)$$

ve

$$e_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad (4.74c)$$

Bu üç denklem matris formda yazılırsa ve ters çevrilirse, düzlem – gerilme probleminin elastisite matrisi elde edilir.

$$[d] = \frac{E}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

4.9.2. Düz Plaklar İçin Gerilme – Şekil Değiştirme İlişkisi

Küçük deplasmanlar için klasik Kırchoff kabuk teorisinden, kabuk içindeki yanal sehimle ilgili gerilmeleri

$$\sigma_{xx} = -\frac{zE}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.77a)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{zE}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4.77b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -2G_z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.77c)$$

Denklem (4.47) ve (4.77b) kullanılarak, denklem (4.77) matris formda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\varepsilon\} \quad (4.78)$$

Bu denklem kabuklar için gerilme – şekil değiştirme ilişkisini belirler.

Denklem (4.78)'in elastisite matrisi düzlem gerilmenin aynıdır. Çünkü düzlem gerilmesinde, Kırchoff teorisi,

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad -t/2 \leq z \leq t/2$$

kabul eder.

Sonuç olarak, e_{zz} şekil değiştirmesi kaybolmaz ve (4.76)'de verilmiştir. Plak içindeki gerilmeler gerilme momentleri ile ilgilidir.

$$M_x = \int \sigma_{xx} \cdot z \cdot dz \quad (4.79a)$$

$$M_y = \int \sigma_{yy} \cdot z \cdot dz \quad (4.79b)$$

$$M_{yx} = M_{xy} = \int \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (4.79c)$$

Denklem (4.77a)'yı denklem (4.79a)'da yerleştirerek ve integrali alınarak denklem (4.80a) yazılabilir.

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.80a)$$

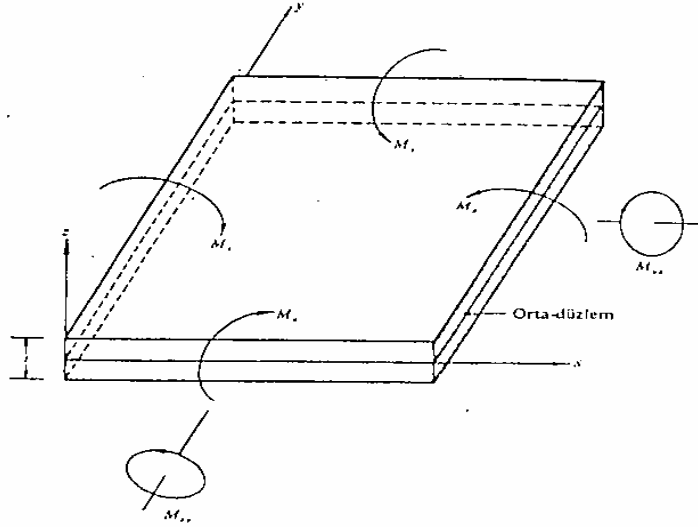
Benzer şekilde

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4.80b)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.80c)$$

$$\text{Burada } D = \frac{Et^2}{12(1-\nu^2)}$$

D ' ye kabuğun eğilme rijitliği denir. M_x ve M_y değerleri momentlerini, M_{xy} burulma momentini gösterir.



Şekil 4.10: Bir plaktaki gerilme momentleri

Kabuğun elastisite matrisi

$$[d] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

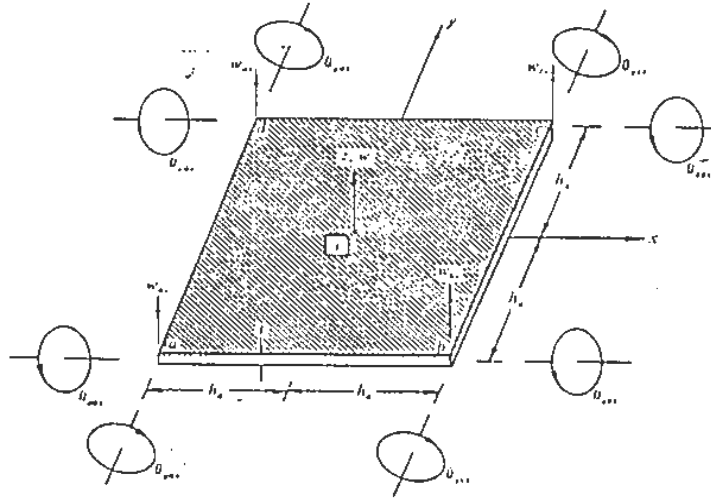
4.9.3 Gerilmiş kabuk için gerilme – şekil değiştirme ilişkisi

Gerilmiş plak eleman karakteristikleri kabuk eleman ve düzlem – gerilme karakteristiklerinin süperpozisyonundan elde edilir. Bundan dolayı elastisite matrisi bu iki farklı eleman tipinin elastisite matrisinden oluşur.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi & \nu\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu\varphi & \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & qD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial x \\ \partial u / \partial x + \partial v / \partial y \\ -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Soldaki vektör kabuktaki genelleşmiş “gerilmeleri”, sağdaki, kabuktaki genelleşmiş “şekil değiştirmeleri” verir.

N_x , N_y , N_{xy} sonuç gerilmeleri, M_x , M_y , M_{xy} gerilme momentleridir.



Şekil 4.11: Gerilmiş bir plaktaki gerilme momentleri ve sonuç gerilmeleri

Birim uzunluktaki kuvvetlerin bulunmasından sonra, gerilmeler aşağıdaki denklemden de bulunabilir.

$$\sigma = \frac{N}{t} + (-)12z \frac{M}{t^3} \quad (4.83)$$

BÖLÜM BEŞ

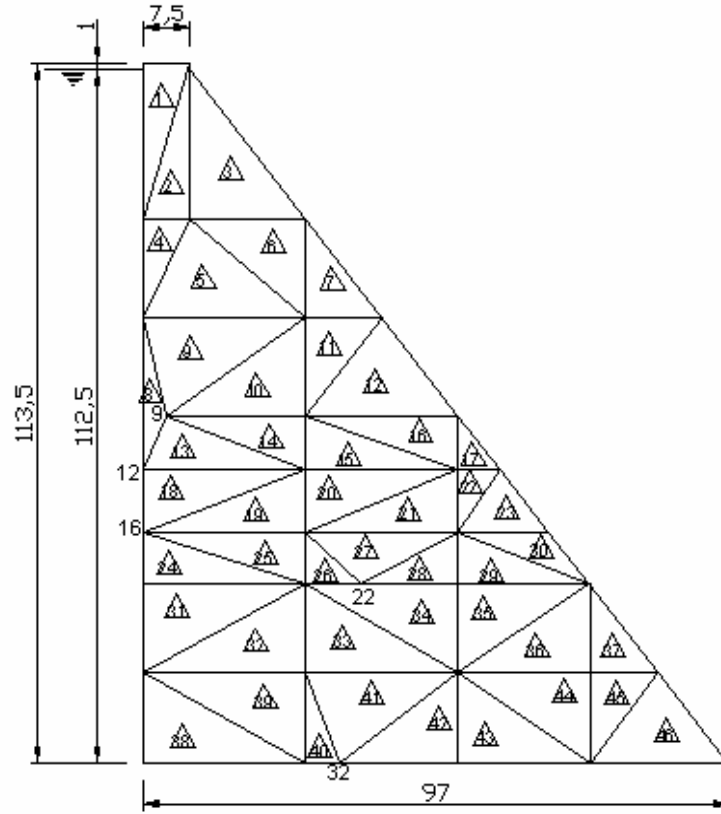
KEMER BARAJLARIN DİNAMİK ANALİZİ

5.1 Giriş

Yurdumuzda en büyük inşaat yatırımlarının yapıldığı alanlardan biri barajlardır. Ülke ekonomisinde çok önemli bir yer tutan barajların depreme dayanıklı olarak projelendirilmeleri hayati bir önem taşımaktadır. Depreme karşı tasarımın temelini de dinamik analizler oluşturmaktadır. Önemli yapılar açısından ülkemizin her tarafı deprem bölgesinde olduğu ve bir barajın yıkılmasının doğuracağı vahim sonuçlar göz önüne alındığında, barajların deprem etkilerine karşı koyacak şekilde projelendirilmeleri deprem mühendisliği açısından büyük bir önem taşımaktadır.

Barajlar fonksiyonları icabı büyük yerel kuvvetlere dayanacak şekilde inşa edilmeleri gerektiğinden deprem tesirlerine dayanıklı olmalıdırlar. Nitekim yapılan araştırmalar sonucunda, iyi inşa edilmiş barajların hiç hasar görmeden en azından 0,2g mertebesinde maksimum yer ivmesine dayanabileceği tespit edilmiştir.

Bu çalışmada SAP2000 yapısal analiz programı ve sonlu elemanlar metodu kullanılıp çözüm yapılarak talvegden yüksekliği 113.5 m, temel genişliği 97 m, vadi genişliği 380 m olan simetrik bir kemer ağırlık baraj olan Gökçekaya Barajının(Şekil 5.1) analizi yapılmıştır.



Şekil 5.1 Analizi yapılan Gökçekaya kemer barajı

Barajın iki boyutlu(konsol kiriş) analizi sonlu eleman metodu ve SAP2000 yapısal analiz programı ile yapılmış ve elde edilen sonuçlar ve karşılaştırmaları bu bölümde anlatılmıştır.

Barajın analizi için kullanılan malzeme özellikleri Tablo 5.1’de verilmiştir.

Tablo 5.1: Barajın analizi için kullanılan malzeme özellikleri

$E(t/m^2)$	2.600.000
ν	0.20
$\gamma_{bet}(t/m^3)$	2.4
$\gamma_{su}(t/m^3)$	1.0

5.2. Sonlu Elemanlar Yöntemine Göre Gökçekaya Barajının Dinamik Analizi

Şekil 5,1’de verilen düzlem problemindeki sistemi üçgen şekilli sonlu elemanlara ayırdık. Bu üçgen elemanların içinde baştanbaşa ve dolayısı ile uç noktalarındaki deformasyon ve gerilmeleri bulmak için gerekli formülleri matris notasyonunda yazılmıştır. 32 numaralı düğüm noktasına (u) su kaldırma kuvveti, 22 numaralı düğüm noktasına (W_2) ağırlığı, 9 numaralı düğüm noktasına (W_1) ağırlığı, 16 numaralı düğüm noktasına (H_s) hidrostatik kuvvet, 12 numaralı düğüm noktasına (E_w) suyun hidrodinamik kuvveti etkimektedir.

Eleman rijitlik matrisi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$[k] = t.A.[B]^T [D][B]$$

Burada “t” elemanın kalınlığı, “A” ise elemanın alanı olup şu şekilde hesaplanır.

$$2A = x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j)$$

B matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} B_i & 0 & B_j & 0 & B_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & B_i & \gamma_j & B_j & \gamma_m & B_m \end{bmatrix} \quad \text{burada;}$$

$$B_i = y_j - y_m \quad \gamma_i = x_m - x_j$$

$$B_j = y_m - y_i \quad \gamma_j = x_i - x_m$$

$$B_m = y_i - y_j \quad \gamma_m = x_j - x_i \quad \text{göstermekte olup}$$

[D] matrisi aşağıdaki gibidir.

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Esas sistemin rijitlik matrisini de üçgen elemanların rijitlik matrislerinin aynı adlı alt matrislerini bir arada toplayarak buluyoruz.

Sonra $\{R\} = [K].\{\delta\}$ formülünde üçgen elemanların hudutlarındaki deplasman bileşenlerini bulmak için $\{\delta\}$ yi $\{\delta\}=[K]^{-1}.\{R\}$ şeklinde yazıp, burada $\{R\}$ sistemin dış yükleri ile bulmuş olduğumuz sistemin esas rijitlik matrisinin tersini yukarıda verilen ifade de yerine koyup, üçgen elemanların aranan yataya ve düşey deplasman bileşenlerini buluyoruz.

Daha sonra bu deplasman değerlerini $\{\varepsilon\} = [B].\{\delta\}$ formülünde yerine koyup, sistemin deformasyon değerlerini, bu deformasyon değerlerini de $\{\sigma\} = [D].\{\varepsilon\}$ formülünde yerine koyarak, sistemin yatay ve düşey doğrultudaki normal gerilmeleri

ile kayma gerilmelerini $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$ şeklinde buluyoruz.

5.2.1. Gökçekaya Barajının Depreme Karşı Davranışı

Gökçekaya barajının depreme karşı davranışını belirlemek için Housner tarafından elde edilmiş ivme hesap spektrumu kullanılmıştır. (Şekil 3.3) .Dinamik analiz için kayalık zeminlerde oluşması mümkün deprem türüne örnek olması açısından 1940 El-Centro depremi seçilmiştir. Bu depremin kuzey –güney bileşeni için 0,33g maksimum yer ivmesi alınmıştır. Hesaplarda %5 lik sönüm oranı kullanılmıştır.

Barajın memba yüzüne etkiyen suyun hidrodinamik etkisini dikkate almak için Westergaard tarafından geliştirilen eklenmiş kütle yaklaşımı kullanılmaktadır. (Şekil 2.4) Baraj gölü suyunun birim hacim ağırlığı 1 t/m^3 alınarak, her bir derinlik için (2.2) bağıntısı yardımıyla düzgün yüzeylere etkiyen kütle değerleri bulunmuştur. Bulunan bu değerler bileşenlerine ayrılarak, (x) ve (y) yönlerinde düğüm noktaları kütlelerine eklenmiştir.

5.2.1.1. Doğal Frekans ve Modlar

Barajın doğal frekans ve modları hidrodinamik etki dikkate alınarak ilk altı mod için hesaplanmıştır. Tablo 5,2’de ise barajın değişik durumlarına ait, ilk altı mod için hesaplanan periyotlar verilmektedir.

Tablo 5.2: Barajın Değişik Durumları İçin Periyotların Karşılaştırılması

Mod No	Periyot(sn)	
	Temel Ankastre	
	Baraj Boş	Baraj Dolu
1	0,3207	0,4685
2	0,2840	0,3788
3	0,2301	0,2932
4	0,1925	0,2482
5	0,1755	0,2391
6	0,1554	0,2246

Tablodan da görüldüğü gibi baraj boşken periyotlar küçük değerler alırken, barajın dolu olması halinde ise periyotların değerlerinde bir artış kaydedilmektedir.

5.2.1.2. Yerdeğiştirmeler

Barajın boş, temelin ankastre olması durumunda, baraj orta kesitinde, memba yüzünde meydana gelen en büyük yatay yer değiştirme 29,65 mm olarak bulunmaktadır. Baraj dolu ve temel ankastre iken yine aynı yerde elde edilen en büyük yatay yerdeğiştirme 66,88 mm olarak elde edilmiştir.

5.2.1.3. Gerilmeler

Çözümü elde edilen her bir durum için yatay ve düşey normal gerilmeler ve sadece en elverişsiz durum için kayma gerilmelerinin baraj gövdesindeki dağılışı eş gerilme eğrileri şeklinde çizilmiştir. Bazı durumlarda, hem düşey hem de yatay gerilmelerde pozitif (+) değerler, yani çekme gerilmeleri meydana gelmektedir.

Kemer barajlarda, belirli sınırlar içinde kalmak şartıyla, çekme gerilmesine izin verilmektedir. Ancak bu değerin 125 t/m²'yi aşmaması gerekir.(Çataklı, 1967)

Yapılan çözümlerde en büyük çekme gerilmesi, baraj dolu temel ankastre ve gövde ağırlıksız durumunda, düşey yönde 119,452 t/m² olarak elde edilmiştir. Bu değer ise yukarıda verilen sınırın altındadır. Zaten, gerçekte barajın ağırlıksız olabileceği de düşünülemez.

Baraj dolu, temel ankastre durumunda, düşey çekme gerilmesine barajın üst yan kısımlarında rastlanmaktadır. Bu değer ise en fazla 20 t/m²'dir. Barajın boş, temelink ankastre olması durumunda ise yine barajın üst tarafında en fazla 40 t/m²'lik yatay çekme gerilmesi oluşmaktadır. Bu duruma ait meydana gelen en büyük düşey basınç gerilmesi 265,4 t/m² olarak elde edilmiştir.

Barajla İlgili Statik Ve Dinamik Kuvvetler:

Barajla ilgili statik ve dinamik kuvvetler 1 m değerindeki birim uzunluk için hesaplanmıştır.

Hidrostatik kuvvet:

Hidrostatik kuvvet aşağıdaki bağıntı ile hesaplanmakta olup bu kuvvet (16) numaralı düğüm noktasına yatay olarak etkimektedir.

$$H_s = \frac{\gamma_{su} H^2}{2} = \frac{1 * (112.5)^2}{2} = 6328t$$

Buz itkisi:

$$H_b = 7.44 * 1 = 7.44t$$

Deprem Kuvveti:

Hidrodinamik basınç kuvveti olarak aşağıdaki ampirik bağıntı ile hesaplanmaktadır.

$$\varepsilon_w = 0.555 * 0.2g / g * H^2 = 0.555 * 0.2 * (112.5)^2 = 1404.8t$$

Tatbik noktası:

Deprem kuvvetinin tatbik noktası (12) numaralı düğüm noktasına karşılık gelmektedir.

$$\frac{4H}{3\pi} = \frac{4 * 112.5}{3\pi} = 47,75m$$

Ağırlık kuvvetleri:

Baraj gövdesinin ağırlığı W_1 ve W_2 kuvvetlerinin toplamından oluşmaktadır. W_1 kuvveti (9) numaralı düğüm noktasına W_2 kuvveti (22) numaralı düğüm noktasına etkimektedir.

$$W_1 = 7.5 * 113.5 * 2.4 = 2043t$$

$$W_2 = \frac{89.5 * 112.5 * 2.4}{2} = 12082.5t$$

$$\Sigma W = 14125.5t$$

Suyun kaldırma kuvveti:

Suyun kaldırma kuvvetinin dağılımı baraj tabanında trapez olarak kabul edilmiştir.

Suyun kaldırma kuvveti aşağıdaki bağıntıyla hesaplanmaktadır.

$$u = \frac{\varepsilon * H * B}{2}, \quad \varepsilon = 0.5(\text{katsayı})$$

$$u = \frac{0.5 * 112.5 * 97}{2} = 2728t$$

Tatbik noktası:

$$\frac{2}{3} * B = \frac{2}{3} * 97 = 64.67m$$

Depremi etkilediği nokta ve oradaki yatay ve düşey deprem kuvvetleri:

(A) noktasından barajın ağırlık merkezine kadar olan yatay ve düşey mesafeler

$$\frac{2043 * 93.25 + 12082.5 * 59.67}{14125.5} = 64.53m$$

$$\frac{2043 * 56.75 + 12082.5 * 75}{14125.5} = 72.36m$$

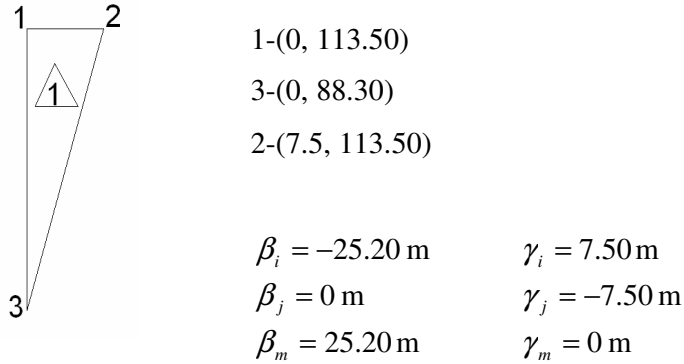
$$W_H = 14125.5 * 0.2 = 2825.1t$$

$$W_V = 14125.5 * 0.2 = 2825.1t$$

SONLU ELEMAN YÖNTEMİNİN SİSTEME UYGULANMASI:

Tüm elemanlarda dikkate alınan numaralandırma sırası saat ibresi tersi yönünde olmak üzere dikkate alınmış noktaların koordinatları nokta numaraları belirtilerek metre cinsinden ifade edilmiştir. Her bir elemanın lokal rijitlik matrisleri [k] aşağıda elde edilmiştir. Lokal eleman rijitlik matrisinin dışındaki u_i ve v_i terimleri serbestlik derecelerini göstermektedir. Eleman köşelerindeki rakamlar düğüm noktalarını göstermektedir.

1 NOLU ELEMAN



$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = 1.04E \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 113.50 \\ 1 & 0 & 88.30 \\ 1 & 7.5 & 113.50 \end{vmatrix} = 189m^2$$

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} = \frac{1}{189} \begin{bmatrix} -25.2 & 0 & 0 & 0 & 25.2 & 0 \\ 0 & 7.5 & 0 & -7.5 & 0 & 0 \\ 7.5 & -25.2 & -7.5 & 0 & 0 & 25.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.13 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & -0.04 & 0 & 0 \\ 0.04 & -0.13 & -0.04 & 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix}$$

$$[K] = [B]^T [D][B].A.t$$

$$[K] = \begin{bmatrix} -0.13 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0.04 & -0.13 \\ 0 & 0 & -0.04 \\ 0 & -0.04 & 0 \\ 0.13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix} \cdot 1.04E \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.13 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & -0.04 & 0 & 0 \\ 0.04 & -0.13 & -0.04 & 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix} 94.5 \cdot 380$$

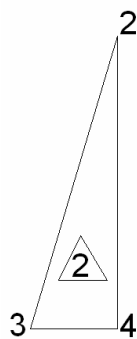
$$\{R\}_i = [K]_i \cdot \{\delta\}_i$$

$$\{\varepsilon\}_i = [B]_i \cdot \{\delta\}_i$$

$$\{\sigma\}_i = [D]_i \cdot \{\varepsilon\}_i$$

$$[K]_i = E \begin{bmatrix} u1 & v1 & u3 & v3 & u2 & v2 \\ 687.46 & -118.56 & -23.52 & 39.52 & -663.94 & 79.04 \\ -118.56 & 324.38 & 79.04 & -58.81 & 39.52 & -265.57 \\ -23.52 & 79.04 & 23.52 & 0 & 0 & -79.04 \\ 39.52 & -58.81 & 0 & 58.81 & -39.52 & 0 \\ -663.94 & 39.52 & 0 & -39.52 & 663.94 & 0 \\ 79.04 & -265.57 & -79.04 & 0 & 0 & 265.57 \end{bmatrix} \begin{matrix} u1 \\ v1 \\ u3 \\ v3 \\ u2 \\ v2 \end{matrix}$$

2 NOLU ELEMEN



$$2-(7.5, 113.50)$$

$$3-(0, 88.30)$$

$$4-(7.5, 88.30)$$

$$\beta_i = 0 \text{ m}$$

$$\gamma_i = 7.50 \text{ m}$$

$$\beta_j = -25.20 \text{ m}$$

$$\gamma_j = 0 \text{ m}$$

$$\beta_m = 25.20 \text{ m}$$

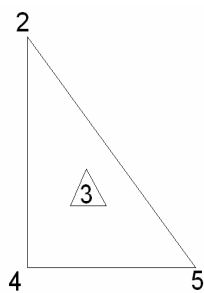
$$\gamma_m = -7.50 \text{ m}$$

$$B = \frac{1}{189} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -25.2 & 0 & 25.2 & 0 \\ 0 & 7.5 & 0 & 0 & 0 & -7.5 \\ 7.5 & 0 & 0 & -25.2 & -7.5 & 25.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.13 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & -0.04 \\ 0.04 & 0 & 0 & -0.13 & -0.04 & 0.13 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ -0.13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.13 \\ 0.13 & 0 & -0.04 \\ 0 & -0.04 & 0.13 \end{bmatrix} \cdot 1.04E \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.13 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & -0.04 \\ 0.04 & 0 & 0 & -0.13 & -0.04 & 0.13 \end{bmatrix} \cdot 94.5 \cdot 380$$

$$[K]_2 = E \begin{bmatrix} 23.52 & 0 & 0 & -79.04 & -23.52 & 79.04 \\ 0 & 58.81 & -39.52 & 0 & 39.52 & -58.81 \\ 0 & -39.52 & 663.94 & 0 & -663.94 & 39.52 \\ -79.04 & 0 & 0 & 265.57 & 79.04 & -265.57 \\ -23.52 & 39.52 & -663.94 & 79.04 & 687.46 & -118.56 \\ 79.04 & -58.81 & 39.52 & -265.57 & -118.56 & 324.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

3 NOLU ELEMEN



2-(7.5, 113.50)

4-(7.5, 88.30)

5-(26.8, 88.30)

$\beta_i = 0 \text{ m}$

$\gamma_i = 19.30 \text{ m}$

$\beta_j = -25.20 \text{ m}$

$\gamma_j = -19.30 \text{ m}$

$\beta_m = 25.20 \text{ m}$

$\gamma_m = 0 \text{ m}$

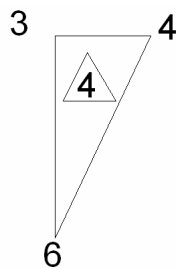
$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 7.5 & 113.50 \\ 1 & 7.5 & 88.30 \\ 1 & 26.8 & 88.30 \end{vmatrix} = 486.36 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{48636} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -25.2 & 0 & 25.2 & 0 \\ 0 & 19.3 & 0 & -19.3 & 0 & 0 \\ 19.3 & 0 & -19.3 & -25.2 & 0 & 25.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.052 & 0 & 0.052 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & -0.04 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0 & -0.04 & -0.052 & -0.04 & 0.052 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ -0.052 & 0 & -0.04 \\ 0 & -0.04 & -0.052 \\ 0.052 & 0 & -0.04 \\ 0 & 0 & 0.052 \end{bmatrix} \cdot 1.04E \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.052 & 0 & 0.052 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & -0.04 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0 & -0.04 & -0.052 & -0.04 & 0.052 \end{bmatrix} \cdot 24318 \cdot 380$$

$$[K]_3 = E \begin{bmatrix} 60.53 & 0 & -60.53 & -79.04 & 0 & 79.04 \\ 0 & 151.34 & -39.52 & -151.34 & 39.52 & -58.81 \\ -60.53 & -39.52 & 318.54 & 118.56 & -258.01 & -79.04 \\ -79.04 & 151.34 & 118.56 & 254.54 & -39.52 & -103.20 \\ 0 & 39.52 & -258.01 & -39.52 & 258.01 & 0 \\ 79.04 & 0 & -79.04 & -103.20 & 0 & 103.20 \end{bmatrix} \begin{matrix} u2 \\ v2 \\ u4 \\ v4 \\ u5 \\ v5 \end{matrix}$$

4 NOLU ELEMAN



3-(0, 88.30)
6-(0, 72.30)
4-(7.5, 88.30)

$\beta_i = -16 \text{ m}$ $\gamma_i = 7.50 \text{ m}$
 $\beta_j = 0 \text{ m}$ $\gamma_j = -7.50 \text{ m}$
 $\beta_m = 16 \text{ m}$ $\gamma_m = 0 \text{ m}$

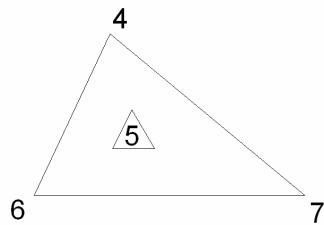
$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 88.30 \\ 1 & 0 & 72.30 \\ 1 & 7.5 & 88.30 \end{vmatrix} = 120 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} -16 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 7.5 & 0 & -7.5 & 0 & 0 \\ 7.5 & -16 & -7.5 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.13 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0.063 & 0 & -0.063 & 0 & 0 \\ 0.063 & -0.13 & -0.063 & 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} -0.13 & 0 & 0.063 \\ 0 & 0.063 & -0.13 \\ 0 & 0 & -0.063 \\ 0 & -0.063 & 0 \\ 0.13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix} \cdot 1.04E \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.13 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0.063 & 0 & -0.063 & 0 & 0 \\ 0.063 & -0.13 & -0.063 & 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix} * 60 * 380$$

$$[K]_4 = E \begin{bmatrix} 458.60 & -118.56 & -37.05 & 39.52 & -421.55 & 79.04 \\ -118.56 & 261.24 & 79.04 & -92.63 & 39.52 & -168.62 \\ -37.05 & 79.04 & 37.05 & 0 & 0 & -79.04 \\ 39.52 & -92.63 & 0 & 92.63 & -39.52 & 0 \\ -421.55 & 39.52 & 0 & -39.52 & 421.55 & 0 \\ 79.04 & -168.62 & -79.04 & 0 & 0 & 168.62 \end{bmatrix} \begin{matrix} u3 \\ v3 \\ u6 \\ v6 \\ u4 \\ v4 \end{matrix}$$

5 NOLU ELEMEN



$$4-(7.5, 88.30)$$

$$6-(0, 72.30)$$

$$7-(26.8, 72.30)$$

$$\beta_i = 0 \text{ m}$$

$$\gamma_i = 26.8 \text{ m}$$

$$\beta_j = -16 \text{ m}$$

$$\gamma_j = -19.3 \text{ m}$$

$$\beta_m = 16 \text{ m}$$

$$\gamma_m = -7.5 \text{ m}$$

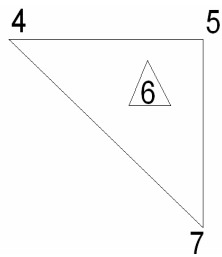
$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 7.5 & 88.30 \\ 1 & 0 & 72.30 \\ 1 & 26.8 & 72.30 \end{vmatrix} = 428.8 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{4288} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -16 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 26.8 & 0 & -19.3 & 0 & -7.5 \\ 26.8 & 0 & -19.3 & -16 & -7.5 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.062 & 0 & -0.045 & 0 & -0.02 \\ 0.062 & 0 & -0.045 & -0.037 & -0.02 & 0.037 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.062 \\ 0 & 0.062 & 0 \\ -0.04 & 0 & -0.045 \\ 0 & -0.045 & -0.037 \\ 0.04 & 0 & -0.02 \\ 0 & -0.02 & 0.037 \end{bmatrix} \cdot 1.04E \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.062 & 0 & -0.045 & 0 & -0.02 \\ 0.062 & 0 & -0.045 & -0.037 & -0.02 & 0.037 \end{bmatrix} \cdot 2144 \cdot 380$$

$$[K]_5 = E \begin{bmatrix} 132.39 & 0 & -95.34 & -79.04 & -37.05 & 79.04 \\ 0 & 330.98 & -39.52 & -238.36 & 39.52 & -92.63 \\ -95.34 & -39.52 & 186.63 & 85.38 & -91.29 & -45.86 \\ -79.04 & -238.36 & 85.38 & 218.84 & -6.34 & 19.52 \\ -37.05 & 39.52 & -91.29 & -6.34 & 128.34 & -33.18 \\ 79.04 & -92.63 & -45.86 & 19.52 & -33.18 & 73.11 \end{bmatrix} \begin{matrix} u4 \\ v4 \\ u6 \\ v6 \\ u7 \\ v7 \end{matrix}$$

6 NOLU ELEMEN



$$4-(7.5, 88.30)$$

$$7-(26.8, 72.30)$$

$$5-(26.8, 88.30)$$

$$\beta_i = -16 \text{ m}$$

$$\gamma_i = 0 \text{ m}$$

$$\beta_j = 0 \text{ m}$$

$$\gamma_j = -19.30 \text{ m}$$

$$\beta_m = 16 \text{ m}$$

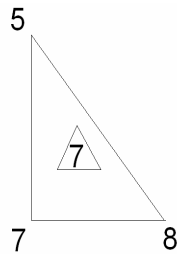
$$\gamma_m = 19.30 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 7.5 & 88.30 \\ 1 & 26.8 & 72.30 \\ 1 & 26.8 & 88.30 \end{vmatrix} = 308.8 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{3088} \begin{bmatrix} -16 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19.3 & 0 & 19.3 \\ 0 & -16 & -19.3 & 0 & 19.3 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.052 & 0 & 0 & 0 & 0.052 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.063 & 0 & 0.063 \\ 0 & -0.052 & -0.063 & 0 & 0.063 & 0.052 \end{bmatrix}$$

$$[K]_6 = E \begin{bmatrix} 163.81 & 0 & 0 & 39.52 & -163.81 & -39.52 \\ 0 & 65.53 & 79.04 & 0 & -79.04 & -65.53 \\ 0 & 79.04 & 95.34 & 0 & -95.34 & -79.04 \\ 39.52 & 0 & 0 & 238.36 & -39.52 & -238.36 \\ -163.81 & -79.04 & -95.34 & -39.52 & 259.16 & 118.56 \\ -39.52 & -65.53 & -79.04 & -238.36 & 118.56 & 303.88 \end{bmatrix} \begin{matrix} u4 \\ v4 \\ u7 \\ v7 \\ u5 \\ v5 \end{matrix}$$

7 NOLU ELEMAN



$$5-(26.8, 88.30)$$

$$7-(26.8, 72.30)$$

$$8-(39.4, 72.30)$$

$$\beta_i = 0 \text{ m}$$

$$\gamma_i = 12.6 \text{ m}$$

$$\beta_j = -16 \text{ m}$$

$$\gamma_j = -12.6 \text{ m}$$

$$\beta_m = 16 \text{ m}$$

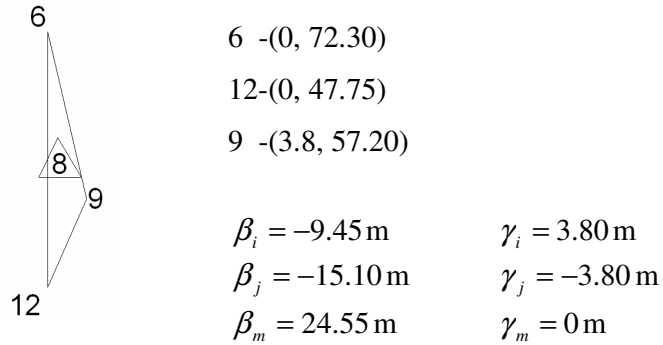
$$\gamma_m = 0 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.8 & 88.30 \\ 1 & 26.8 & 72.30 \\ 1 & 39.4 & 72.30 \end{vmatrix} = 201.60 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{201.6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -16 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 12.6 & 0 & -12.6 & 0 & 0 \\ 12.6 & 0 & -12.6 & -16 & 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.08 & 0 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0.063 & 0 & -0.063 & 0 & 0 \\ 0.063 & 0 & -0.063 & -0.08 & 0 & 0.08 \end{bmatrix}$$

$$[K]_7 = E \begin{bmatrix} 62.24 & 0 & -62.24 & -79.04 & 0 & 79.04 \\ 0 & 155.61 & -39.52 & -155.61 & 39.52 & 0 \\ -62.24 & -39.52 & 313.16 & 118.56 & -250.92 & -79.04 \\ -79.04 & -155.61 & 118.56 & 255.98 & -39.52 & -100.37 \\ 0 & 39.52 & -250.92 & -39.52 & 250.92 & 0 \\ 79.04 & 0 & -79.04 & -100.37 & 0 & 100.37 \end{bmatrix} \begin{matrix} u5 \\ v5 \\ u7 \\ v7 \\ u8 \\ v8 \end{matrix}$$

8 NOLU ELEMEN

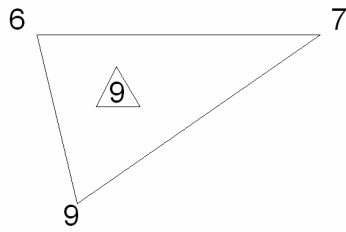


$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 72.30 \\ 1 & 0 & 47.75 \\ 1 & 3.8 & 57.20 \end{vmatrix} = 93.29 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{93.29} \begin{bmatrix} -9.45 & 0 & -15.10 & 0 & 24.55 & 0 \\ 0 & 3.80 & 0 & -3.80 & 0 & 0 \\ 3.80 & -9.45 & -3.80 & -15.10 & 0 & 24.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -0.16 & 0 & 0.26 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & -0.04 & 0 & 0 \\ 0.04 & -0.1 & -0.04 & -0.16 & 0 & 0.26 \end{bmatrix}$$

$$[K]_8 = E \begin{bmatrix} 201.39 & -45.64 & 290.01 & -33.40 & -491.4 & 79.04 \\ -45.64 & 106.25 & 6.12 & 90.31 & 39.52 & -196.56 \\ 290.01 & 6.12 & 495.19 & 72.92 & -785.2 & -79.04 \\ -33.40 & 90.31 & 72.92 & 223.77 & -39.52 & -314.08 \\ -491.4 & 39.52 & -785.2 & -39.52 & 1276.6 & 0 \\ 79.04 & -19.66 & -79.04 & -314.08 & 0 & 510.64 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_6 \\ v_6 \\ u_{12} \\ v_{12} \\ u_9 \\ v_9 \end{matrix}$$

9 NOLU ELEMEN



$$6-(0, 72.30)$$

$$9-(3.80, 57.20)$$

$$7-(26.80, 72.30)$$

$$\beta_i = -15.10 \text{ m}$$

$$\gamma_i = 23.0 \text{ m}$$

$$\beta_j = 0 \text{ m}$$

$$\gamma_j = -26.80 \text{ m}$$

$$\beta_m = 15.10 \text{ m}$$

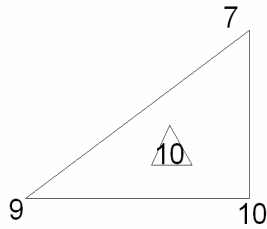
$$\gamma_m = 3.80 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 72.30 \\ 1 & 3.80 & 57.20 \\ 1 & 26.80 & 72.30 \end{vmatrix} = 404.68 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{40468} \begin{bmatrix} -15.1 & 0 & 0 & 0 & 15.1 & 0 \\ 0 & 23.0 & 0 & -26.8 & 0 & 3.8 \\ 23.0 & -15.1 & -26.8 & 0 & 3.8 & 15.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0 & -0.07 & 0 & 0.01 \\ 0.06 & -0.04 & -0.07 & 0 & 0.01 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_9 = E \begin{bmatrix} 214.66 & -101.75 & -120.39 & 39.52 & -94.26 & 62.23 \\ -101.75 & 302.84 & 79.04 & -300.98 & 22.71 & -1.86 \\ -120.39 & 79.04 & 140.28 & 0 & -19.89 & -79.04 \\ 39.52 & -300.98 & 0 & 350.71 & -39.52 & -49.73 \\ -94.26 & 22.71 & -19.89 & -39.52 & 114.15 & 16.81 \\ 62.23 & -1.86 & -79.04 & -49.73 & 16.81 & 51.58 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_6 \\ v_6 \\ u_9 \\ v_9 \\ u_7 \\ v_7 \end{matrix}$$

10 NOLU ELEMEN



$$7-(26.8, 72.30)$$

$$9-(3.8, 57.20)$$

$$10-(26.8, 57.20)$$

$$\beta_i = 0 \text{ m}$$

$$\gamma_i = 23 \text{ m}$$

$$\beta_j = -15.10 \text{ m}$$

$$\gamma_j = 0 \text{ m}$$

$$\beta_m = 15.10 \text{ m}$$

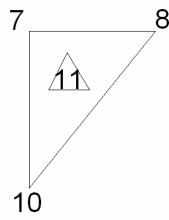
$$\gamma_m = -23 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.80 & 72.30 \\ 1 & 3.80 & 57.20 \\ 1 & 26.80 & 57.20 \end{vmatrix} = 347.30 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{347.3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15.1 & 0 & 15.1 & 0 \\ 0 & 23.0 & 0 & 0 & 0 & -23.0 \\ 23.0 & 0 & 0 & -15.1 & -23.0 & 15.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & 0 & 0 & -0.07 \\ 0.07 & 0 & 0 & -0.04 & -0.07 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{10} = E \begin{bmatrix} 120.39 & 0 & 0 & -79.04 & -120.39 & 79.04 \\ 0 & 300.98 & -39.52 & 0 & 39.52 & -300.98 \\ 0 & -39.52 & 129.73 & 0 & -129.73 & 39.52 \\ -79.04 & 0 & 0 & 51.89 & 79.04 & -51.89 \\ -120.39 & 39.52 & -129.73 & 79.04 & 250.12 & -118.56 \\ 79.04 & -300.98 & 39.52 & -51.89 & -118.56 & 352.87 \end{bmatrix} \begin{matrix} u7 \\ v7 \\ u9 \\ v9 \\ u10 \\ v10 \end{matrix}$$

11 NOLU ELEMEN



$$7-(26.80, 72.30)$$

$$10-(26.80, 57.20)$$

$$8-(39.40, 72.30)$$

$$\beta_i = -15.10 \text{ m}$$

$$\gamma_i = 12.6 \text{ m}$$

$$\beta_j = 0 \text{ m}$$

$$\gamma_j = -12.6 \text{ m}$$

$$\beta_m = 15.10 \text{ m}$$

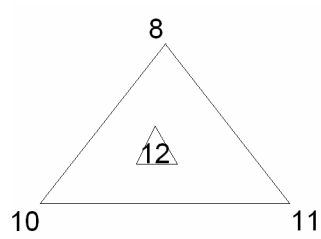
$$\gamma_m = 0 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.80 & 72.30 \\ 1 & 26.80 & 57.20 \\ 1 & 39.40 & 72.30 \end{vmatrix} = 190.26 m^2$$

$$B = \frac{1}{19026} \begin{bmatrix} -15.1 & 0 & 0 & 0 & 15.1 & 0 \\ 0 & 126 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 126 & -15.1 & -126 & 0 & 0 & 15.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.07 & 0 & 0 \\ 0.07 & -0.08 & -0.07 & 0 & 0 & 0.08 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{11} = E \begin{bmatrix} 302.76 & -118.56 & -65.95 & 39.52 & -236.81 & 79.04 \\ -118.56 & 259.61 & 79.04 & -164.88 & 39.52 & -94.72 \\ -65.95 & 79.04 & 65.95 & 0 & 0 & -79.04 \\ 39.52 & -164.88 & 0 & 164.88 & -39.52 & 0 \\ -236.81 & 39.52 & 0 & -39.52 & 236.81 & 0 \\ 79.04 & -94.72 & -79.04 & 0 & 0 & 94.72 \end{bmatrix} \begin{matrix} u7 \\ v7 \\ u10 \\ v10 \\ u8 \\ v8 \end{matrix}$$

12 NOLU ELEMEN



$$8-(39.40, 72.30)$$

$$10-(26.80, 57.20)$$

$$11-(51.80, 57.20)$$

$$\beta_i = 0 \text{ m}$$

$$\gamma_i = 25 \text{ m}$$

$$\beta_j = -15.10 \text{ m}$$

$$\gamma_j = -12.4 \text{ m}$$

$$\beta_m = 15.10 \text{ m}$$

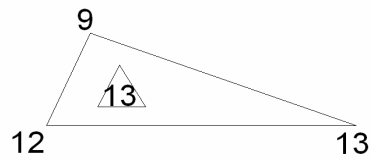
$$\gamma_m = -12.6 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 39.40 & 72.30 \\ 1 & 26.80 & 57.20 \\ 1 & 51.80 & 57.20 \end{vmatrix} = 377.50 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{377.5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -151 & 0 & 151 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & -124 & 0 & -126 \\ 25 & 0 & -124 & -151 & -126 & 151 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.033 & 0 & -0.033 \\ 0.07 & 0 & -0.033 & -0.04 & -0.033 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{12} = E \begin{bmatrix} 130.86 & 0 & -64.91 & -79.04 & -65.95 & 79.04 \\ 0 & 327.15 & -39.52 & -162.27 & 39.52 & -164.88 \\ -64.91 & -39.52 & 151.54 & 58.81 & -86.64 & -19.29 \\ -79.04 & -162.27 & 58.81 & 128.22 & 20.23 & 34.04 \\ -65.95 & 39.52 & -86.64 & 20.23 & 152.59 & -59.75 \\ 79.04 & -164.88 & -19.29 & 34.04 & -59.75 & 130.84 \end{bmatrix} \begin{matrix} u8 \\ v8 \\ u10 \\ v10 \\ u11 \\ v11 \end{matrix}$$

13 NOLU ELEMEN



$$9-(3.80, 57.20)$$

$$12-(0, 47.75)$$

$$13-(26.80, 47.75)$$

$$\beta_i = 0 \text{ m} \quad \gamma_i = 26.80 \text{ m}$$

$$\beta_j = -9.45 \text{ m} \quad \gamma_j = -23.00 \text{ m}$$

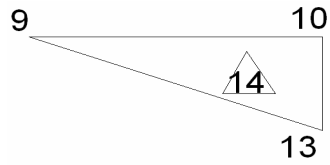
$$\beta_m = 9.45 \text{ m} \quad \gamma_m = -3.80 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 3.80 & 57.20 \\ 1 & 0 & 47.75 \\ 1 & 26.80 & 47.75 \end{vmatrix} = 253.26 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{25326} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9.45 & 0 & 9.45 & 0 \\ 0 & 268 & 0 & -230 & 0 & -3.8 \\ 268 & 0 & -230 & -9.45 & -3.8 & 9.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.09 & 0 & -0.015 \\ 0.1 & 0 & -0.09 & -0.04 & -0.015 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{13} = E \begin{bmatrix} 224.16 & 0 & -192.37 & -79.04 & -31.78 & 79.04 \\ 0 & 560.39 & -39.52 & -480.93 & 39.52 & -79.46 \\ -192.37 & -39.52 & 234.77 & 101.75 & -42.40 & -62.23 \\ -79.04 & -480.93 & 101.75 & 440.61 & -22.71 & 40.32 \\ -31.78 & 39.52 & -42.40 & -22.71 & 74.18 & -16.81 \\ 79.04 & -79.46 & -62.23 & 40.32 & -16.81 & 39.14 \end{bmatrix} \begin{matrix} u9 \\ v9 \\ u12 \\ v12 \\ u13 \\ v13 \end{matrix}$$

14 NOLU ELEMAN



$$9-(3.80, 57.20)$$

$$13-(26.80, 47.75)$$

$$10-(26.80, 57.20)$$

$$\beta_i = -9.45 \text{ m} \quad \gamma_i = 0 \text{ m}$$

$$\beta_j = 0 \text{ m} \quad \gamma_j = -23 \text{ m}$$

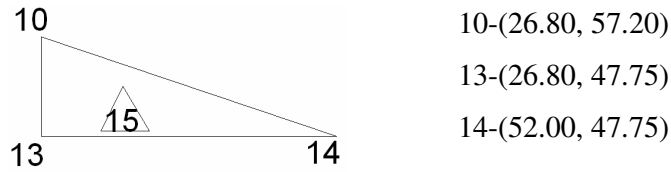
$$\beta_m = 9.45 \text{ m} \quad \gamma_m = 23 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 3.80 & 57.20 \\ 1 & 26.80 & 47.75 \\ 1 & 26.80 & 57.20 \end{vmatrix} = 217.35 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{217.35} \begin{bmatrix} -9.45 & 0 & 0 & 0 & 9.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -230 & 0 & 230 \\ 0 & -9.45 & -230 & 0 & 230 & 9.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.11 & 0 & 0.11 \\ 0 & -0.04 & -0.11 & 0 & 0.11 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{14} = E \begin{bmatrix} 81.19 & 0 & 0 & 39.52 & -81.19 & -39.52 \\ 0 & 32.47 & 79.04 & 0 & -79.04 & -32.48 \\ 0 & 79.04 & 192.37 & 0 & -192.37 & -79.04 \\ 39.52 & 0 & 0 & 480.93 & -39.52 & -480.93 \\ -81.19 & -79.04 & -192.37 & -39.52 & 273.56 & 118.56 \\ -39.52 & -32.48 & -79.04 & -480.93 & 118.56 & 513.41 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_9 \\ v_9 \\ u_{13} \\ v_{13} \\ u_{10} \\ v_{10} \end{matrix}$$

15 NOLU ELEMAN



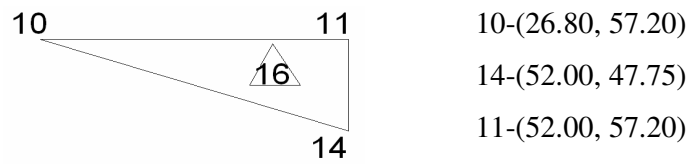
$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 25.2 \text{ m} \\ \beta_j &= -9.45 \text{ m} & \gamma_j &= -25.2 \text{ m} \\ \beta_m &= 9.45 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.80 & 57.20 \\ 1 & 26.80 & 47.75 \\ 1 & 52.00 & 47.75 \end{vmatrix} = 238.10 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{238.10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9.45 & 0 & 9.45 & 0 \\ 0 & 25.2 & 0 & -25.2 & 0 & 0 \\ 25.2 & 0 & -25.2 & -9.45 & 0 & 9.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.11 & 0 & -0.11 & 0 & 0 \\ 0.11 & 0 & -0.11 & -0.04 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{15} = E \begin{bmatrix} 210.81 & 0 & -210.81 & -79.05 & 0 & 79.05 \\ 0 & 527.02 & -39.53 & -527.02 & 39.53 & 0 \\ -210.81 & -39.53 & 284.92 & 118.58 & -74.11 & -79.05 \\ -79.05 & -527.02 & 118.58 & 556.67 & -39.53 & -29.65 \\ 0 & 39.53 & -74.11 & -39.53 & 74.11 & 0 \\ 79.05 & 0 & -79.05 & -29.65 & 0 & 29.65 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{10} \\ v_{10} \\ u_{13} \\ v_{13} \\ u_{14} \\ v_{14} \end{matrix}$$

16 NOLU ELEMEN



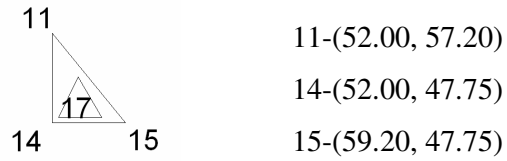
$$\begin{aligned} \beta_i &= -9.45 \text{ m} & \gamma_i &= 0 \text{ m} \\ \beta_j &= 0 \text{ m} & \gamma_j &= -25.2 \text{ m} \\ \beta_m &= 9.45 \text{ m} & \gamma_m &= 25.2 \text{ m} \end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.80 & 57.20 \\ 1 & 52.00 & 47.75 \\ 1 & 52.00 & 57.20 \end{vmatrix} = 238.10 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{23810} \begin{bmatrix} -9.45 & 0 & 0 & 0 & 9.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -25.2 & 0 & 25.2 \\ 0 & -9.45 & -25.2 & 0 & 25.2 & 9.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.11 & 0 & 0.11 \\ 0 & -0.04 & -0.11 & 0 & 0.11 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$\cdot [K]_{16} = E \begin{bmatrix} 74.11 & 0 & 0 & 39.53 & -74.11 & -39.53 \\ 0 & 29.65 & 79.05 & 0 & -79.05 & -29.65 \\ 0 & 79.05 & 210.81 & 0 & -210.81 & -79.05 \\ 39.53 & 0 & 0 & 527.02 & -39.53 & -527.02 \\ -74.11 & -79.05 & -210.81 & -39.53 & 284.92 & 118.58 \\ -39.53 & -29.65 & -79.05 & -527.02 & 118.58 & 556.67 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{10} \\ v_{10} \\ u_{14} \\ v_{14} \\ u_{11} \\ v_{11} \end{matrix}$$

17 NOLU ELEMEN



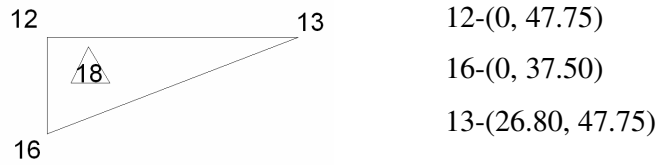
$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 7.20 \text{ m} \\ \beta_j &= -9.45 \text{ m} & \gamma_j &= -7.20 \text{ m} \\ \beta_m &= 9.45 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 52.00 & 57.20 \\ 1 & 52.00 & 47.75 \\ 1 & 59.20 & 47.75 \end{vmatrix} = 68.04 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{68.04} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9.45 & 0 & 9.45 & 0 \\ 0 & 7.2 & 0 & -7.2 & 0 & 0 \\ 7.2 & 0 & -7.2 & -9.45 & 0 & 9.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.14 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0 & 0.11 & 0 & -0.11 & 0 & 0 \\ 0.11 & 0 & -0.11 & -0.14 & 0 & 0.14 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{17} = E \begin{bmatrix} 60.22 & 0 & -60.22 & -79.04 & 0 & 79.04 \\ 0 & 150.55 & -39.52 & -150.55 & 39.52 & 0 \\ -60.22 & -39.52 & 319.57 & 118.56 & -259.35 & -79.04 \\ -79.04 & -150.55 & 118.56 & 254.29 & -39.52 & -103.74 \\ 0 & 39.52 & -259.35 & -39.52 & 259.35 & 0 \\ 79.04 & 0 & -79.04 & -103.74 & 0 & 103.74 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{11} \\ v_{11} \\ u_{14} \\ v_{14} \\ u_{15} \\ v_{15} \end{matrix}$$

18 NOLU ELEMAN



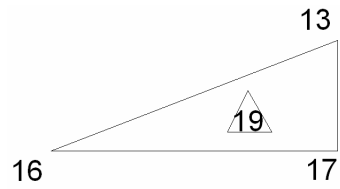
$$\begin{aligned}\beta_i &= -10.25 \text{ m} & \gamma_i &= 26.80 \text{ m} \\ \beta_j &= 0 \text{ m} & \gamma_j &= -26.80 \text{ m} \\ \beta_m &= 10.25 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 47.75 \\ 1 & 0 & 37.50 \\ 1 & 26.8 & 47.75 \end{vmatrix} = 274.7 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{274.7} \begin{bmatrix} -10.25 & 0 & 0 & 0 & 10.25 & 0 \\ 0 & 26.8 & 0 & -26.8 & 0 & 0 \\ 26.8 & -10.25 & -26.8 & 0 & 0 & 10.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.04 & -0.1 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{18} = E \begin{bmatrix} 282.24 & -118.56 & -206.66 & 39.52 & -75.57 & 79.04 \\ -118.56 & 546.88 & 79.04 & -516.65 & 39.52 & -30.23 \\ -206.66 & 79.04 & 206.66 & 0 & 0 & -79.04 \\ 39.52 & -516.65 & 0 & 516.65 & -39.52 & 0 \\ -75.57 & 39.52 & 0 & -39.52 & 75.57 & 0 \\ 79.04 & -30.23 & -79.04 & 0 & 0 & 30.23 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{12} \\ v_{12} \\ u_{16} \\ v_{16} \\ u_{13} \\ v_{13} \end{matrix}$$

19 NOLU ELEMEN



$$13-(26.80, 47.75)$$

$$16-(0, 37.50)$$

$$17-(26.80, 37.50)$$

$$\beta_i = 0 \text{ m} \quad \gamma_i = 26.80 \text{ m}$$

$$\beta_j = -10.25 \text{ m} \quad \gamma_j = 0 \text{ m}$$

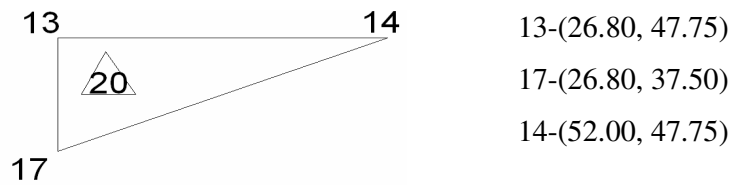
$$\beta_m = 10.25 \text{ m} \quad \gamma_m = -26.80 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.80 & 47.75 \\ 1 & 0 & 37.50 \\ 1 & 26.80 & 37.50 \end{vmatrix} = 274.7 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{274.7} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1025 & 0 & 1025 & 0 \\ 0 & 2680 & 0 & 0 & 0 & -2680 \\ 2680 & 0 & 0 & -1025 & -2680 & 1025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 & -0.04 & -0.1 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{19} = E \begin{bmatrix} 206.66 & 0 & 0 & -79.04 & -206.66 & 79.04 \\ 0 & 516.65 & -39.52 & 0 & 39.52 & -516.65 \\ 0 & -39.52 & 75.57 & 0 & -75.57 & 39.52 \\ -79.04 & 0 & 0 & 30.23 & 79.04 & -30.23 \\ -206.66 & 39.52 & -75.57 & 79.04 & 282.24 & -118.56 \\ 79.04 & -516.65 & 39.52 & -30.23 & -118.56 & 546.88 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{13} \\ v_{13} \\ u_{16} \\ v_{16} \\ u_{17} \\ v_{17} \end{matrix}$$

20 NOLU ELEMEN



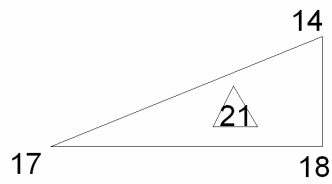
$$\begin{aligned}\beta_i &= -10.25 \text{ m} & \gamma_i &= 25.20 \text{ m} \\ \beta_j &= 0 \text{ m} & \gamma_j &= -25.20 \text{ m} \\ \beta_m &= 10.25 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.80 & 47.75 \\ 1 & 26.80 & 37.50 \\ 1 & 52.00 & 47.75 \end{vmatrix} = 258.3 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{2583} \begin{bmatrix} -1025 & 0 & 0 & 0 & 1025 & 0 \\ 0 & 252 & 0 & -252 & 0 & 0 \\ 252 & -1025 & -252 & 0 & 0 & 1025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.04 & -0.1 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$\cdot [K]_{20} = E \begin{bmatrix} 274.70 & -118.56 & -194.32 & 39.52 & -80.37 & 79.04 \\ -118.56 & 517.96 & 79.04 & -485.81 & 39.52 & -32.15 \\ -194.32 & 79.04 & 194.32 & 0 & 0 & -79.04 \\ 39.52 & -485.81 & 0 & 485.81 & -39.52 & 0 \\ -80.37 & 39.52 & 0 & -39.52 & 80.37 & 0 \\ 79.04 & -32.15 & -79.04 & 0 & 0 & 32.15 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{13} \\ v_{13} \\ u_{17} \\ v_{17} \\ u_{14} \\ v_{14} \end{matrix}$$

21 NOLU ELEMEN



14-(52.00, 47.75)

17-(26.80, 37.50)

18-(52.00, 37.50)

$$\beta_i = 0 \text{ m} \quad \gamma_i = 25.20 \text{ m}$$

$$\beta_j = -10.25 \text{ m} \quad \gamma_j = 0 \text{ m}$$

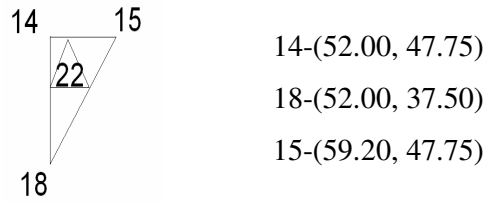
$$\beta_m = 10.25 \text{ m} \quad \gamma_m = -25.20 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 52.00 & 47.75 \\ 1 & 26.80 & 37.50 \\ 1 & 52.00 & 37.50 \end{vmatrix} = 258.3m^2$$

$$B = \frac{1}{2583} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1025 & 0 & 1025 & 0 \\ 0 & 252 & 0 & 0 & 0 & -252 \\ 252 & 0 & 0 & -1025 & -252 & 1025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 & -0.04 & -0.1 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{21} = E \begin{bmatrix} 194.32 & 0 & 0 & -79.04 & -194.32 & 79.04 \\ 0 & 485.81 & -39.52 & 0 & 39.52 & -485.81 \\ 0 & -39.52 & 80.37 & 0 & -80.37 & 39.52 \\ -79.04 & 0 & 0 & 32.15 & 79.04 & -32.15 \\ -194.32 & 39.52 & -80.37 & 79.04 & 274.70 & -118.56 \\ 79.04 & -485.81 & 39.52 & -32.15 & -118.56 & 517.96 \end{bmatrix} \begin{matrix} u14 \\ v14 \\ u17 \\ v17 \\ u18 \\ v18 \end{matrix}$$

22 NOLU ELEMEN



$$\beta_i = -10.25 \text{ m} \quad \gamma_i = 7.20 \text{ m}$$

$$\beta_j = 0 \text{ m} \quad \gamma_j = -7.20 \text{ m}$$

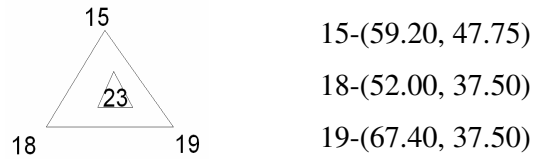
$$\beta_m = 10.25 \text{ m} \quad \gamma_m = 0 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 52.00 & 47.75 \\ 1 & 52.00 & 37.50 \\ 1 & 59.20 & 47.75 \end{vmatrix} = 73.8m^2$$

$$B = \frac{1}{738} \begin{bmatrix} -1025 & 0 & 0 & 0 & 1025 & 0 \\ 0 & 7.2 & 0 & -7.2 & 0 & 0 \\ 7.2 & -1025 & -7.2 & 0 & 0 & 1025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.14 & 0 & 0 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.14 & -0.1 & 0 & 0 & -0.14 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{22} = E \begin{bmatrix} 336.83 & -118.56 & -55.52 & 39.52 & -281.31 & 79.04 \\ -118.56 & 251.32 & 79.04 & -138.80 & 39.52 & -112.52 \\ -55.52 & 79.04 & 55.52 & 0 & 0 & -79.04 \\ 39.52 & -138.80 & 0 & 138.80 & -39.52 & 0 \\ -281.31 & 39.52 & 0 & -39.52 & 281.31 & 0 \\ 79.04 & -112.52 & -79.04 & 0 & 0 & 112.52 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{14} \\ v_{14} \\ u_{18} \\ v_{18} \\ u_{15} \\ v_{15} \end{matrix}$$

23 NOLU ELEMEN



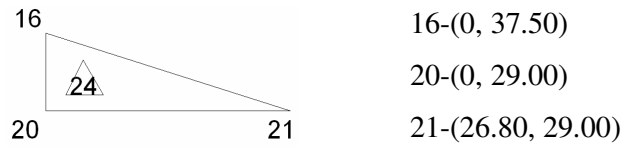
$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 15.40 \text{ m} \\ \beta_j &= -10.25 \text{ m} & \gamma_j &= -8.20 \text{ m} \\ \beta_m &= 10.25 \text{ m} & \gamma_m &= -7.20 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 59.20 & 47.75 \\ 1 & 52.00 & 37.50 \\ 1 & 67.40 & 37.50 \end{vmatrix} = 157.85 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{157.85} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1025 & 0 & 1025 & 0 \\ 0 & 1540 & 0 & -8.20 & 0 & -7.20 \\ 1540 & 0 & -8.20 & -1025 & -7.20 & 1025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.065 & 0 & 0.065 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.05 & 0 & -0.046 \\ 0.1 & 0 & -0.05 & -0.065 & -0.046 & 0.065 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{23} = E \begin{bmatrix} 118.75 & 0 & -63.23 & -79.04 & -55.52 & 79.04 \\ 0 & 296.88 & -39.52 & -158.08 & 39.52 & -138.80 \\ -63.23 & -39.52 & 165.19 & 63.13 & -101.96 & -23.61 \\ -79.04 & -158.08 & 63.13 & 136.78 & 15.91 & 21.30 \\ -55.52 & 39.52 & -101.96 & 15.91 & 157.48 & -55.43 \\ 79.04 & -138.80 & -23.61 & 21.30 & -55.43 & 117.50 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{15} \\ v_{15} \\ u_{18} \\ v_{18} \\ u_{19} \\ v_{19} \end{matrix}$$

24 NOLU ELEMEN



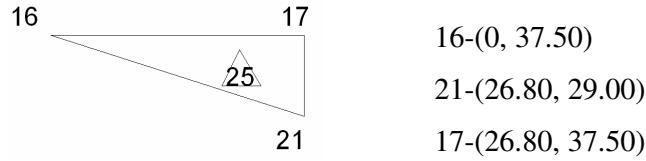
$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 26.8 \text{ m} \\ \beta_j &= -8.5 \text{ m} & \gamma_j &= -26.8 \text{ m} \\ \beta_m &= 8.5 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 37.50 \\ 1 & 0 & 29.00 \\ 1 & 26.80 & 29.00 \end{vmatrix} = 227.80 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{227.8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8.5 & 0 & 8.5 & 0 \\ 0 & 26.8 & 0 & -26.8 & 0 & 0 \\ 26.8 & 0 & -26.8 & -8.5 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 & -0.12 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0 & -0.12 & -0.04 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{24} = E \begin{bmatrix} 249.21 & 0 & -249.21 & -79.04 & 0 & 79.04 \\ 0 & 623.02 & -39.52 & -623.02 & 39.52 & 0 \\ -249.21 & -39.52 & 311.88 & 118.56 & -62.67 & -79.04 \\ -79.04 & -623.02 & 118.56 & 648.09 & -39.52 & -25.07 \\ 0 & 39.52 & -62.67 & -39.52 & 62.67 & 0 \\ 79.04 & 0 & -79.04 & -25.07 & 0 & 25.07 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{16} \\ v_{16} \\ u_{20} \\ v_{20} \\ u_{21} \\ v_{21} \end{matrix}$$

25 NOLU ELEMEN



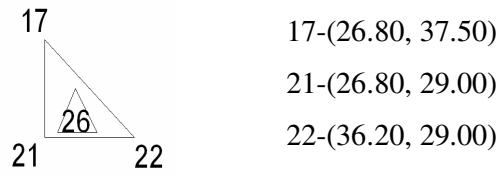
$$\begin{aligned}\beta_i &= -8.5 \text{ m} & \gamma_i &= 0 \text{ m} \\ \beta_j &= 0 \text{ m} & \gamma_j &= -26.8 \text{ m} \\ \beta_m &= 8.5 \text{ m} & \gamma_m &= 26.8 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 37.50 \\ 1 & 0 & 29.00 \\ 1 & 26.80 & 29.00 \end{vmatrix} = 227.80 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{2278} \begin{bmatrix} -8.5 & 0 & 0 & 0 & 8.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -268 & 0 & 268 \\ 0 & -8.5 & -268 & 0 & 268 & 8.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.12 & 0 & 0.12 \\ 0 & -0.04 & -0.12 & 0 & 0.12 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{25} = E \begin{bmatrix} 62.67 & 0 & 0 & 39.52 & -62.67 & -39.52 \\ 0 & 25.07 & 79.04 & 0 & -79.04 & -25.07 \\ 0 & 79.04 & 249.21 & 0 & -249.21 & -79.04 \\ 39.52 & 0 & 0 & 623.02 & -39.52 & -623.02 \\ -62.67 & -79.04 & -249.21 & -39.52 & 311.88 & 118.56 \\ -39.52 & -25.07 & -79.04 & -623.02 & 118.56 & 648.09 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{16} \\ v_{16} \\ u_{21} \\ v_{21} \\ u_{17} \\ v_{17} \end{matrix}$$

26 NOLU ELEMEN



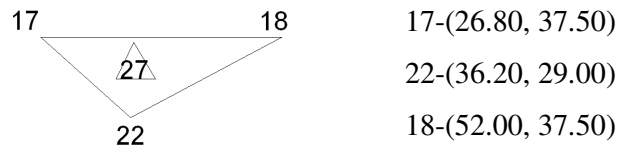
$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 9.4 \text{ m} \\ \beta_j &= -8.5 \text{ m} & \gamma_j &= -9.4 \text{ m} \\ \beta_m &= 8.5 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.80 & 37.50 \\ 1 & 26.80 & 29.00 \\ 1 & 36.20 & 29.00 \end{vmatrix} = 79.90m^2$$

$$B = \frac{1}{79.9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8.5 & 0 & 8.5 & 0 \\ 0 & 9.4 & 0 & -9.4 & 0 & 0 \\ 9.4 & 0 & -9.4 & -8.5 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.11 & 0 & 0.11 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 & -0.12 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0 & -0.12 & -0.11 & 0 & 0.11 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{26} = E \begin{bmatrix} 87.41 & 0 & -87.41 & -79.04 & 0 & 79.04 \\ 0 & 218.52 & -39.52 & -218.52 & 39.52 & 0 \\ -87.41 & -39.52 & 266.09 & 118.56 & -178.68 & -79.04 \\ -79.04 & -218.52 & 118.56 & 289.99 & -39.52 & -71.47 \\ 0 & 39.52 & -178.68 & -39.52 & 178.68 & 0 \\ 79.04 & 0 & -79.04 & -71.47 & 0 & 71.47 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{17} \\ v_{17} \\ u_{21} \\ v_{21} \\ u_{22} \\ v_{22} \end{matrix}$$

27 NOLU ELEMEN



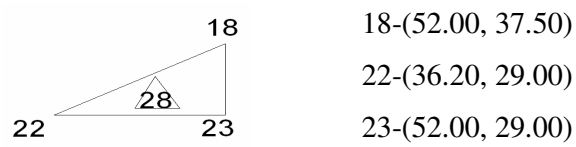
$$\begin{aligned}\beta_i &= -8.50 \text{ m} & \gamma_i &= 15.80 \text{ m} \\ \beta_j &= 0 \text{ m} & \gamma_j &= -25.20 \text{ m} \\ \beta_m &= 8.50 \text{ m} & \gamma_m &= 9.40 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.80 & 37.50 \\ 1 & 36.20 & 29.00 \\ 1 & 52.00 & 37.50 \end{vmatrix} = 214.20 m^2$$

$$B = \frac{1}{214.20} \begin{bmatrix} -8.50 & 0 & 0 & 0 & 8.50 & 0 \\ 0 & 15.80 & 0 & -25.20 & 0 & 9.40 \\ 15.80 & -8.50 & -25.20 & 0 & 9.40 & 8.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.12 & 0 & 0.04 \\ 0.07 & -0.04 & -0.12 & 0 & 0.04 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{27} = E \begin{bmatrix} 158.77 & -74.34 & -146.92 & 39.52 & -11.85 & 34.82 \\ -74.34 & 256.95 & 79.04 & -367.30 & -4.70 & 110.35 \\ -146.92 & 79.04 & 234.33 & 0 & -87.41 & -79.04 \\ 39.52 & -367.30 & 0 & 585.83 & -39.52 & -218.52 \\ -11.85 & -4.70 & -87.41 & -39.52 & 99.26 & 44.22 \\ 34.82 & 110.35 & -79.04 & -218.52 & 44.22 & 108.17 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{17} \\ v_{17} \\ u_{22} \\ v_{22} \\ u_{18} \\ v_{18} \end{matrix}$$

28 NOLU ELEMEN



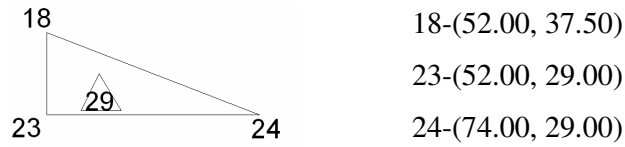
$$\begin{aligned}\beta_i &= -8.5 \text{ m} & \gamma_i &= 15.8 \text{ m} \\ \beta_j &= 0 \text{ m} & \gamma_j &= 0 \text{ m} \\ \beta_m &= 8.5 \text{ m} & \gamma_m &= -15.8 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 52.00 & 37.50 \\ 1 & 36.20 & 29.00 \\ 1 & 52.00 & 29.00 \end{vmatrix} = 134.30 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{134.30} \begin{bmatrix} -8.5 & 0 & 0 & 0 & 8.5 & 0 \\ 0 & 15.8 & 0 & 0 & 0 & -15.8 \\ 15.8 & -8.5 & 0 & 0 & -15.8 & 8.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.06 & 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & -0.12 \\ 0.12 & -0.06 & 0 & 0 & -0.12 & 0.06 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{28} = E \begin{bmatrix} 253.23 & -118.56 & 0 & 0 & -253.23 & 118.56 \\ -118.56 & 409.83 & 0 & 0 & 118.56 & -409.83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -253.23 & 118.56 & 0 & 0 & 253.23 & -118.56 \\ 118.56 & -409.83 & 0 & 0 & -118.56 & 409.83 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{18} \\ v_{18} \\ u_{22} \\ v_{22} \\ u_{23} \\ v_{23} \end{matrix}$$

29 NOLU ELEMEN



$$\beta_i = 0 \text{ m} \quad \gamma_i = -22.0 \text{ m}$$

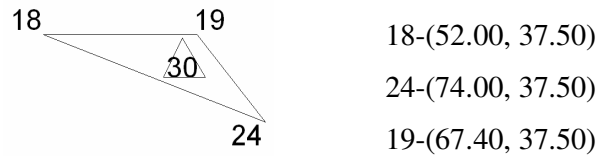
$$\beta_j = -8.5 \text{ m} \quad \gamma_j = 22.0 \text{ m}$$

$$\beta_m = 8.5 \text{ m} \quad \gamma_m = 0 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 52.00 & 37.50 \\ 1 & 52.00 & 29.00 \\ 1 & 74.00 & 29.00 \end{vmatrix} = 187 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{187} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8.5 & 0 & 8.5 & 0 \\ 0 & -220 & 0 & 220 & 0 & 0 \\ -220 & 0 & 220 & -8.5 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.045 & 0 & 0.045 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0 & 0.12 & 0 & 0 \\ -0.12 & 0 & 0.12 & -0.045 & 0 & 0.045 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{29} = E \begin{bmatrix} 204.57 & 0 & -204.57 & 79.04 & 0 & -79.04 \\ 0 & 511.44 & 39.52 & -511.44 & -39.52 & 0 \\ -204.57 & 39.52 & 280.92 & -118.56 & -76.35 & 79.04 \\ 79.04 & -511.44 & -118.56 & 541.97 & 39.52 & -30.54 \\ 0 & -39.52 & -76.35 & 39.52 & 76.35 & 0 \\ -79.04 & 0 & 79.04 & -30.54 & 0 & 30.54 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{18} \\ v_{18} \\ u_{23} \\ v_{23} \\ u_{24} \\ v_{24} \end{matrix}$$

30 NOLU ELEMAN

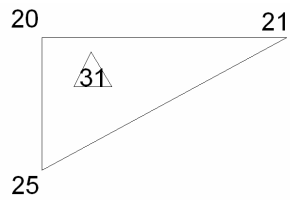
$$\begin{aligned}\beta_i &= -8.5 \text{ m} & \gamma_i &= -6.6 \text{ m} \\ \beta_j &= 0 \text{ m} & \gamma_j &= -15.4 \text{ m} \\ \beta_m &= 8.5 \text{ m} & \gamma_m &= 22.0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 52.00 & 37.50 \\ 1 & 74.00 & 29.00 \\ 1 & 67.40 & 37.50 \end{vmatrix} = 130.9 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{130.9} \begin{bmatrix} -8.5 & 0 & 0 & 0 & 8.5 & 0 \\ 0 & -6.6 & 0 & -15.4 & 0 & 22.0 \\ -6.6 & -8.5 & -15.4 & 0 & 22.0 & 8.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.065 & 0 & 0 & 0 & 0.065 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & -0.12 & 0 & 0.17 \\ -0.05 & -0.065 & -0.12 & 0 & 0.17 & 0.065 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{30} = E \begin{bmatrix} 135.37 & 50.81 & 61.37 & 39.52 & -196.74 & -90.33 \\ 50.81 & 109.38 & 79.04 & 153.43 & -129.85 & -262.81 \\ 61.37 & 79.04 & 143.20 & 0 & -204.57 & -79.04 \\ 39.52 & 153.43 & 0 & 358.00 & -39.52 & -511.44 \\ -196.74 & -129.85 & -204.85 & -39.52 & 401.31 & 169.37 \\ -90.33 & -262.81 & -79.04 & -511.44 & 169.37 & 774.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{18} \\ v_{18} \\ u_{24} \\ v_{24} \\ u_{19} \\ v_{19} \end{matrix}$$

31 NOLU ELEMEN



$$20-(0, 29.00)$$

$$25-(0, 14.60)$$

$$21-(26.80, 29.00)$$

$$\beta_i = -14.40 \text{ m} \quad \gamma_i = 26.80 \text{ m}$$

$$\beta_j = 0 \text{ m} \quad \gamma_j = -26.80 \text{ m}$$

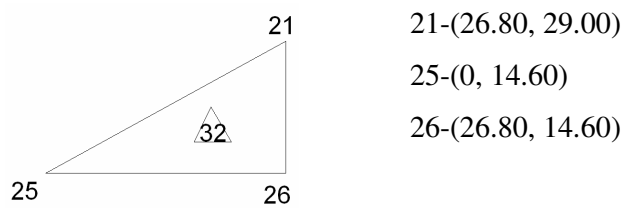
$$\beta_m = 14.40 \text{ m} \quad \gamma_m = 0 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 29.00 \\ 1 & 0 & 14.60 \\ 1 & 26.80 & 29.00 \end{vmatrix} = 385.9 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{385.9} \begin{bmatrix} -144 & 0 & 0 & 0 & 144 & 0 \\ 0 & 268 & 0 & -268 & 0 & 0 \\ 268 & -144 & -268 & 0 & 0 & 144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.07 & 0 & 0 \\ 0.07 & -0.04 & 0.07 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{B1} = E \begin{bmatrix} 253.29 & -118.57 & -147.11 & 39.52 & -106.18 & 79.04 \\ -118.57 & 410.25 & 79.04 & -367.77 & 39.52 & -42.47 \\ -147.11 & 79.04 & 147.11 & 0 & 0 & -79.04 \\ 39.52 & -367.77 & 0 & 367.77 & -39.52 & 0 \\ -106.18 & 39.52 & 0 & -39.52 & 106.18 & 0 \\ 79.04 & -42.47 & -79.04 & 0 & 0 & 42.47 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{20} \\ v_{20} \\ u_{25} \\ v_{25} \\ u_{21} \\ v_{21} \end{matrix}$$

32 NOLU ELEMEN



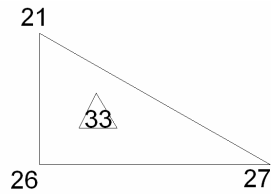
$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 26.8 \text{ m} \\ \beta_j &= -14.4 \text{ m} & \gamma_j &= 0 \text{ m} \\ \beta_m &= 14.4 \text{ m} & \gamma_m &= -26.8 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.80 & 29.00 \\ 1 & 0 & 14.60 \\ 1 & 26.80 & 14.60 \end{vmatrix} = 385.9 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{385.9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -14.4 & 0 & 14.4 & 0 \\ 0 & 26.8 & 0 & 0 & 0 & -26.8 \\ 26.8 & 0 & 0 & -14.4 & -26.8 & 14.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & 0 & 0 & -0.07 \\ 0.07 & 0 & 0 & 0.04 & -0.07 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{32} = E \begin{bmatrix} 147.11 & 0 & 0 & -79.04 & -147.11 & 79.04 \\ 0 & 367.77 & -39.52 & 0 & 39.52 & -367.77 \\ 0 & -39.52 & 106.18 & 0 & -106.18 & 39.52 \\ -79.04 & 0 & 0 & 42.47 & 79.04 & -42.47 \\ -147.11 & 39.52 & -106.18 & 79.04 & 253.29 & -118.57 \\ 79.04 & -367.77 & 39.52 & -42.47 & -118.57 & 410.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{21} \\ v_{21} \\ u_{25} \\ v_{25} \\ u_{26} \\ v_{26} \end{matrix}$$

33 NOLU ELEMEN



$$21-(26.80, 29.00)$$

$$26-(26.80, 14.60)$$

$$27-(52.00, 14.60)$$

$$\beta_i = 0 \text{ m} \quad \gamma_i = -25.2 \text{ m}$$

$$\beta_j = -14.4 \text{ m} \quad \gamma_j = 25.2 \text{ m}$$

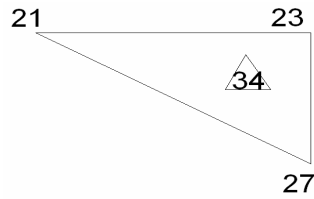
$$\beta_m = 14.4 \text{ m} \quad \gamma_m = 0 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.8 & 29.0 \\ 1 & 26.8 & 14.6 \\ 1 & 52.0 & 14.6 \end{vmatrix} = 362.9 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{362.9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -144 & 0 & 144 & 0 \\ 0 & -252 & 0 & 252 & 0 & 0 \\ -252 & 0 & 252 & -144 & 0 & 144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & -0.07 & 0 & 0.07 & 0 & 0 \\ -0.07 & 0 & 0.07 & -0.04 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{33} = E \begin{bmatrix} 138.31 & 0 & -138.31 & 79.03 & 0 & -79.03 \\ 0 & 345.78 & 39.52 & -345.78 & -39.52 & 0 \\ -138.31 & 39.52 & 251.22 & -118.55 & -112.91 & 79.04 \\ 79.04 & -345.78 & -118.55 & 390.94 & 39.52 & -45.16 \\ 0 & -39.52 & -112.91 & 39.52 & 112.91 & 0 \\ -79.04 & 0 & 79.04 & -45.16 & 0 & 45.16 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{21} \\ v_{21} \\ u_{26} \\ v_{26} \\ u_{27} \\ v_{27} \end{matrix}$$

34 NOLU ELEMEN



$$21-(26.80, 29.00)$$

$$27-(52.00, 14.60)$$

$$23-(52.00, 29.00)$$

$$\beta_i = -14.4 \text{ m} \quad \gamma_i = 0 \text{ m}$$

$$\beta_j = 0 \text{ m} \quad \gamma_j = -25.2 \text{ m}$$

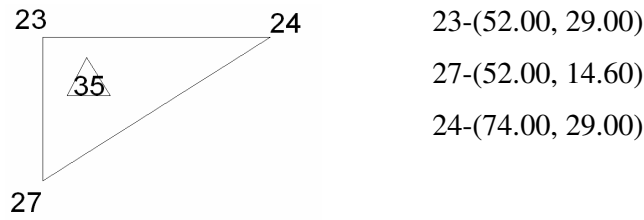
$$\beta_m = 14.4 \text{ m} \quad \gamma_m = 25.2 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.80 & 29.00 \\ 1 & 52.00 & 14.60 \\ 1 & 52.00 & 29.00 \end{vmatrix} = 362.9 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{362.9} \begin{bmatrix} -144 & 0 & 0 & 0 & 144 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -252 & 0 & 252 \\ 0 & -144 & -252 & 0 & 252 & 144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.07 & 0 & 0.07 \\ 0 & -0.04 & -0.07 & 0 & 0.07 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{34} = E \begin{bmatrix} 112.91 & 0 & 0 & 39.52 & -112.91 & -39.52 \\ 0 & 45.16 & 79.04 & 0 & -79.04 & -45.16 \\ 0 & 79.04 & 138.31 & 0 & -138.31 & -79.04 \\ 39.52 & 0 & 0 & 345.78 & -39.52 & -345.78 \\ -112.91 & -79.04 & -138.31 & -39.52 & 251.22 & 118.55 \\ -39.52 & -45.16 & -79.04 & -345.78 & 118.55 & 390.94 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{21} \\ v_{21} \\ u_{27} \\ v_{27} \\ u_{23} \\ v_{23} \end{matrix}$$

35 NOLU ELEMEN



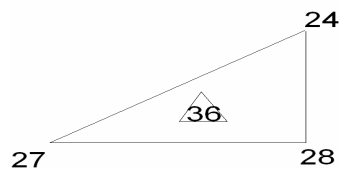
$$\begin{aligned}\beta_i &= -14.4 \text{ m} & \gamma_i &= 22.0 \text{ m} \\ \beta_j &= 0 \text{ m} & \gamma_j &= -22.0 \text{ m} \\ \beta_m &= 14.4 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 52.0 & 29.0 \\ 1 & 52.0 & 14.6 \\ 1 & 74.0 & 29.0 \end{vmatrix} = 316.8 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{3168} \begin{bmatrix} -144 & 0 & 0 & 0 & 144 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & -220 & 0 & 0 \\ 220 & -144 & -220 & 0 & 0 & 144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.045 & 0 & 0 & 0 & 0.045 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.07 & 0 & 0 \\ 0.07 & -0.045 & -0.07 & 0 & 0 & 0.045 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{35} = E \begin{bmatrix} 250.09 & -118.56 & -120.76 & 39.52 & -129.34 & 79.04 \\ -118.56 & 353.62 & 79.04 & -301.89 & 39.52 & -51.74 \\ -120.76 & 79.04 & 120.76 & 0 & 0 & -79.04 \\ 39.52 & -301.89 & 0 & 301.89 & -39.52 & 0 \\ -129.34 & 39.52 & 0 & -39.52 & 129.34 & 0 \\ 79.04 & -51.74 & -79.04 & 0 & 0 & 51.74 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{23} \\ v_{23} \\ u_{27} \\ v_{27} \\ u_{24} \\ v_{24} \end{matrix}$$

36 NOLU ELEMAN



$$24-(74.00, 29.00)$$

$$27-(52.00, 14.60)$$

$$28-(74.00, 14.60)$$

$$\beta_i = 0 \text{ m} \quad \gamma_i = 22.0 \text{ m}$$

$$\beta_j = -14.4 \text{ m} \quad \gamma_j = 0 \text{ m}$$

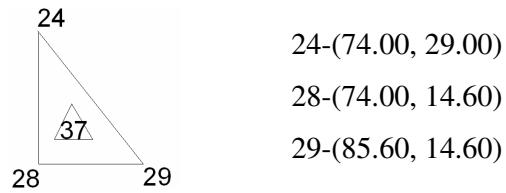
$$\beta_m = 14.4 \text{ m} \quad \gamma_m = -22.0 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 74.0 & 29.0 \\ 1 & 52.0 & 14.6 \\ 1 & 74.0 & 14.6 \end{vmatrix} = 316.8 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{316.8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -144 & 0 & 144 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 & 0 & -220 \\ 220 & 0 & 0 & -144 & -220 & 144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.045 & 0 & 0.045 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & 0 & 0 & -0.07 \\ 0.07 & 0 & 0 & -0.045 & -0.07 & 0.045 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{36} = E \begin{bmatrix} 120.76 & 0 & 0 & -79.04 & -120.76 & 79.04 \\ 0 & 301.89 & -39.52 & 0 & 39.52 & -301.89 \\ 0 & -39.52 & 129.34 & 0 & -129.34 & 39.52 \\ -79.04 & 0 & 0 & 51.74 & 79.04 & -51.74 \\ -120.76 & 39.52 & -129.34 & 79.04 & 250.09 & -118.56 \\ 79.04 & -301.89 & 39.52 & -51.74 & -118.56 & 353.62 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{24} \\ v_{24} \\ u_{27} \\ v_{27} \\ u_{28} \\ v_{28} \end{matrix}$$

37 NOLU ELEMEN

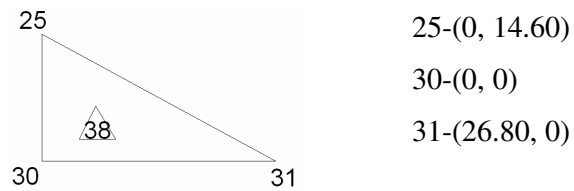


$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 11.6 \text{ m} \\ \beta_j &= -14.4 \text{ m} & \gamma_j &= -11.6 \text{ m} \\ \beta_m &= 14.4 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 74.0 & 29.0 \\ 1 & 74.0 & 14.6 \\ 1 & 85.6 & 14.6 \end{vmatrix} = 167 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{167} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -144 & 0 & 144 & 0 \\ 0 & 11.6 & 0 & -11.6 & 0 & 0 \\ 11.6 & 0 & -11.6 & -144 & 0 & 144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.09 & 0 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.07 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0 & -0.07 & -0.09 & 0 & 0.09 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{37} = E \begin{bmatrix} 63.69 & 0 & -63.69 & -79.06 & 0 & 79.06 \\ 0 & 159.22 & -39.53 & -159.22 & 39.53 & 0 \\ -63.69 & -39.53 & 309.04 & 118.59 & -245.36 & -79.06 \\ -79.06 & -159.22 & 118.59 & 257.36 & -39.53 & -98.14 \\ 0 & 39.53 & -245.36 & -39.53 & 245.36 & 0 \\ 79.06 & 0 & -79.06 & -98.14 & 0 & 98.14 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{24} \\ v_{24} \\ u_{28} \\ v_{28} \\ u_{29} \\ v_{29} \end{matrix}$$

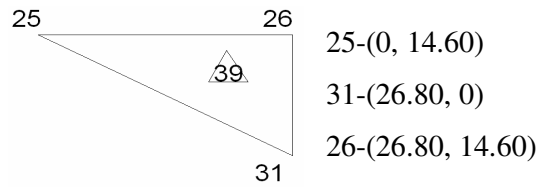
38 NOLU ELEMEN

$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 26.8 \text{ m} \\ \beta_j &= -14.6 \text{ m} & \gamma_j &= -26.8 \text{ m} \\ \beta_m &= 14.6 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 14.60 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 26.80 & 0 \end{vmatrix} = 391.3 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{391.3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -146 & 0 & 146 & 0 \\ 0 & 268 & 0 & -268 & 0 & 0 \\ 268 & 0 & -268 & -146 & 0 & 146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.07 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0 & -0.07 & -0.04 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{38} = E \begin{bmatrix} 217.89 & 0 & -217.89 & -118.70 & 0 & 118.70 \\ 0 & 544.71 & -59.35 & -544.71 & 59.35 & 0 \\ -217.89 & -59.35 & 379.55 & 178.05 & -161.66 & -118.70 \\ -118.70 & -544.71 & 178.05 & 609.38 & -59.35 & -64.66 \\ 0 & 59.35 & -161.66 & -59.35 & 161.66 & 0 \\ 118.70 & 0 & -118.70 & -64.66 & 0 & 64.66 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{25} \\ v_{25} \\ u_{30} \\ v_{30} \\ u_{31} \\ v_{31} \end{matrix}$$

39 NOLU ELEMEN

$$\beta_i = -14.60 \text{ m} \quad \gamma_i = 0 \text{ m}$$

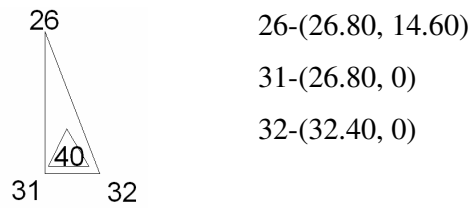
$$\beta_j = 0 \text{ m} \quad \gamma_j = -26.8 \text{ m}$$

$$\beta_m = 14.60 \text{ m} \quad \gamma_m = 26.8 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 14.60 \\ 1 & 26.80 & 0 \\ 1 & 26.80 & 14.60 \end{vmatrix} = 391.3 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{3913} \begin{bmatrix} -146 & 0 & 0 & 0 & 146 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -268 & 0 & 268 \\ 0 & -146 & -268 & 0 & 268 & 146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.07 & 0 & 0.07 \\ 0 & -0.04 & -0.07 & 0 & 0.07 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{39} = E \begin{bmatrix} 107.64 & 0 & 0 & 39.52 & -107.64 & -39.52 \\ 0 & 43.06 & 79.04 & 0 & -79.04 & -43.06 \\ 0 & 79.04 & 145.08 & 0 & -145.08 & -79.04 \\ 39.52 & 0 & 0 & 362.70 & -39.52 & -362.70 \\ -107.64 & -79.04 & -145.08 & -39.52 & 252.72 & 118.55 \\ -39.52 & -43.06 & -79.04 & -362.70 & 118.55 & 405.76 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{25} \\ v_{25} \\ u_{31} \\ v_{31} \\ u_{26} \\ v_{26} \end{matrix}$$

40 NOLU ELEMEN

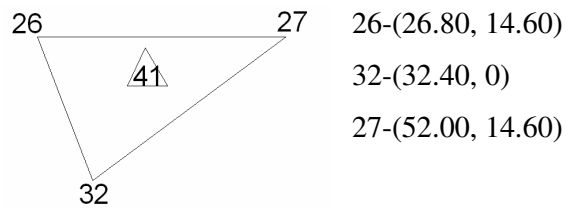
$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 5.60 \text{ m} \\ \beta_j &= -14.6 \text{ m} & \gamma_j &= -5.60 \text{ m} \\ \beta_m &= 14.6 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.8 & 14.6 \\ 1 & 26.8 & 0 \\ 1 & 32.4 & 0 \end{vmatrix} = 81.74 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{81.74} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -14.6 & 0 & 14.6 & 0 \\ 0 & 5.6 & 0 & -5.6 & 0 & 0 \\ 5.6 & 0 & -5.6 & -14.6 & 0 & 14.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.18 & 0 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.07 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0 & -0.07 & -0.18 & 0 & 0.18 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{40} = E \begin{bmatrix} 30.32 & 0 & -30.32 & -79.06 & 0 & 79.06 \\ 0 & 75.81 & -39.53 & -75.81 & 39.53 & 0 \\ -30.32 & -39.53 & 545.62 & 118.59 & -515.30 & -79.06 \\ -79.06 & -75.81 & 118.59 & 281.93 & -39.53 & -206.12 \\ 0 & 39.53 & -515.30 & -39.53 & 515.30 & 0 \\ 79.06 & 0 & -79.06 & -206.12 & 0 & 206.12 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{26} \\ v_{26} \\ u_{31} \\ v_{31} \\ u_{32} \\ v_{32} \end{matrix}$$

41 NOLU ELEMEN



$$\beta_i = -14.60 \text{ m} \quad \gamma_i = 19.6 \text{ m}$$

$$\beta_j = 0 \text{ m} \quad \gamma_j = -25.2 \text{ m}$$

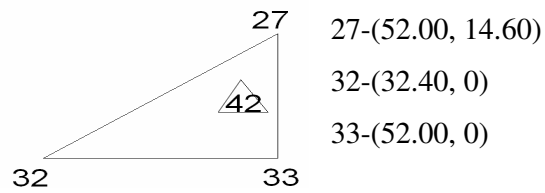
$$\beta_m = 14.60 \text{ m} \quad \gamma_m = 5.6 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 26.8 & 14.6 \\ 1 & 32.4 & 0 \\ 1 & 52.0 & 14.6 \end{vmatrix} = 367.9 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{367.9} \begin{bmatrix} -146 & 0 & 0 & 0 & 146 & 0 \\ 0 & 196 & 0 & -252 & 0 & 5.6 \\ 196 & -146 & -252 & 0 & 5.6 & 146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & -0.07 & 0 & 0.015 \\ 0.05 & -0.04 & -0.07 & 0 & 0.015 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{41} = E \begin{bmatrix} 197.02 & -92.22 & -106.11 & 39.52 & -90.91 & 52.70 \\ -92.22 & 252.13 & 79.04 & -265.29 & 13.17 & 13.16 \\ -106.11 & 79.04 & 136.43 & 0 & -30.32 & -79.04 \\ 39.52 & -265.29 & 0 & 341.08 & -39.52 & -75.80 \\ -90.91 & 13.17 & -30.32 & -39.52 & 121.23 & 26.35 \\ 52.70 & 13.16 & -79.04 & -75.80 & 26.35 & 62.64 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{26} \\ v_{26} \\ u_{32} \\ v_{32} \\ u_{27} \\ v_{27} \end{matrix}$$

42 NOLU ELEMEN



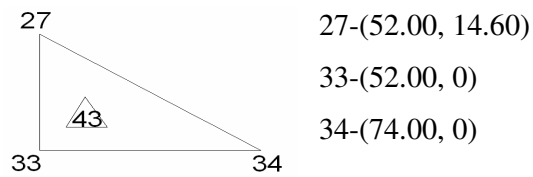
$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 19.6 \text{ m} \\ \beta_j &= -14.6 \text{ m} & \gamma_j &= 0 \text{ m} \\ \beta_m &= 14.6 \text{ m} & \gamma_m &= -19.6 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 52.0 & 14.6 \\ 1 & 32.4 & 0 \\ 1 & 52.0 & 0 \end{vmatrix} = 286.16 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{28616} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -146 & 0 & 146 & 0 \\ 0 & 196 & 0 & 0 & 0 & -196 \\ 196 & 0 & 0 & -146 & -196 & 146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.05 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & 0 & 0 & -0.07 \\ 0.07 & 0 & 0 & -0.05 & -0.07 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{42} = E \begin{bmatrix} 106.11 & 0 & 0 & -79.04 & -106.11 & 79.04 \\ 0 & 265.27 & -39.52 & 0 & 39.52 & -265.27 \\ 0 & -39.52 & 147.19 & 0 & -147.19 & 39.52 \\ -79.04 & 0 & 0 & 58.88 & 79.04 & -58.88 \\ -106.11 & 39.52 & -147.19 & 79.04 & 253.30 & -118.56 \\ 79.04 & -265.27 & 39.52 & -58.88 & -118.56 & 324.15 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{27} \\ v_{27} \\ u_{32} \\ v_{32} \\ u_{33} \\ v_{33} \end{matrix}$$

43 NOLU ELEMEN



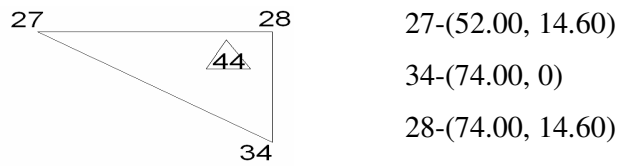
$$\begin{aligned}
 \beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 22.0 \text{ m} \\
 \beta_j &= -14.6 \text{ m} & \gamma_j &= -22.0 \text{ m} \\
 \beta_m &= 14.6 \text{ m} & \gamma_m &= 0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 52.0 & 14.6 \\ 1 & 52.0 & 0 \\ 1 & 74.0 & 0 \end{vmatrix} = 321.2 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{321.2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -146 & 0 & 146 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & -220 & 0 & 0 \\ 220 & 0 & -220 & -146 & 0 & 146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.045 & 0 & 0.045 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.07 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0 & -0.07 & -0.045 & 0 & 0.045 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{43} = E \begin{bmatrix} 119.10 & 0 & -119.10 & -79.04 & 0 & 79.04 \\ 0 & 297.75 & -39.52 & -297.75 & 39.52 & 0 \\ -119.10 & -39.52 & 250.24 & 118.56 & -131.13 & -79.04 \\ -79.04 & -297.75 & 118.56 & 350.21 & -39.52 & -52.45 \\ 0 & 39.52 & -131.13 & -39.52 & 131.13 & 0 \\ 79.04 & 0 & -79.04 & -52.45 & 0 & 52.45 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{27} \\ v_{27} \\ u_{33} \\ v_{33} \\ u_{34} \\ v_{34} \end{matrix}$$

44 NOLU ELEMEN



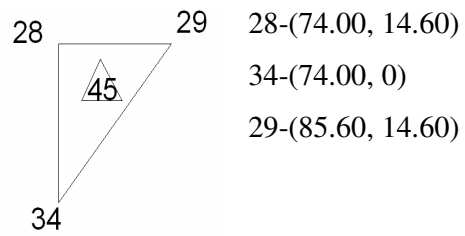
$$\begin{aligned}\beta_i &= -14.6 \text{ m} & \gamma_i &= 0 \text{ m} \\ \beta_j &= 0 \text{ m} & \gamma_j &= -22.0 \text{ m} \\ \beta_m &= 14.6 \text{ m} & \gamma_m &= 22.0 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 52.0 & 14.6 \\ 1 & 74.0 & 0 \\ 1 & 74.0 & 14.6 \end{vmatrix} = 321.2 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{321.2} \begin{bmatrix} -146 & 0 & 0 & 0 & 146 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -220 & 0 & 220 \\ 0 & -146 & -220 & 0 & 220 & 146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.045 & 0 & 0 & 0 & 0.045 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.07 & 0 & 0.07 \\ 0 & -0.045 & -0.07 & 0 & 0.07 & 0.045 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{44} = E \begin{bmatrix} 131.13 & 0 & 0 & 39.52 & -131.13 & -39.52 \\ 0 & 52.45 & 79.04 & 0 & -79.04 & -52.45 \\ 0 & 79.04 & 119.10 & 0 & -119.10 & -79.04 \\ 39.52 & 0 & 0 & 297.75 & -39.52 & -297.75 \\ -131.13 & -79.04 & -119.10 & -39.52 & 250.24 & 118.56 \\ -39.52 & -52.45 & -79.04 & -297.75 & 118.56 & 350.21 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{27} \\ v_{27} \\ u_{34} \\ v_{34} \\ u_{28} \\ v_{28} \end{matrix}$$

45 NOLU ELEMAN



$$\beta_i = -14.6 \text{ m} \quad \gamma_i = 11.6 \text{ m}$$

$$\beta_j = 0 \text{ m} \quad \gamma_j = -11.6 \text{ m}$$

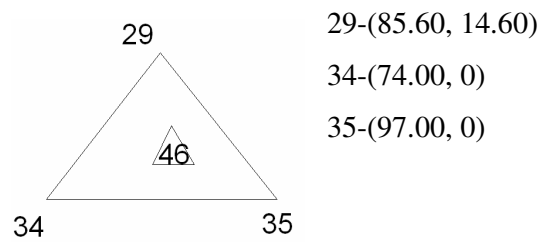
$$\beta_m = 14.6 \text{ m} \quad \gamma_m = 0 \text{ m}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 74.0 & 14.6 \\ 1 & 74.0 & 0 \\ 1 & 85.6 & 14.6 \end{vmatrix} = 169.4 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{169.4} \begin{bmatrix} -146 & 0 & 0 & 0 & 146 & 0 \\ 0 & 116 & 0 & -116 & 0 & 0 \\ 116 & -146 & -116 & 0 & 0 & 146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.09 & 0 & 0 & 0 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.07 & 0 & 0 \\ 0.07 & -0.09 & -0.07 & 0 & 0 & 0.09 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{45} = E \begin{bmatrix} 311.43 & -118.53 & -62.78 & 39.51 & -248.64 & 79.02 \\ -118.53 & 256.42 & 79.02 & -156.96 & 39.51 & -99.46 \\ -62.78 & 79.02 & 62.78 & 0 & 0 & -79.02 \\ 39.51 & -156.96 & 0 & 156.96 & -39.51 & 0 \\ -248.64 & 39.51 & 0 & -39.51 & 248.64 & 0 \\ 79.02 & -99.46 & -79.02 & 0 & 0 & 99.46 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{28} \\ v_{28} \\ u_{34} \\ v_{34} \\ u_{29} \\ v_{29} \end{matrix}$$

46 NOLU ELEMEN



$$\begin{aligned}\beta_i &= 0 \text{ m} & \gamma_i &= 23.0 \text{ m} \\ \beta_j &= -14.6 \text{ m} & \gamma_j &= -11.4 \text{ m} \\ \beta_m &= 14.6 \text{ m} & \gamma_m &= -11.6 \text{ m}\end{aligned}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 85.6 & 14.6 \\ 1 & 74.0 & 0 \\ 1 & 97.0 & 0 \end{vmatrix} = 335.8 \text{ m}^2$$

$$B = \frac{1}{335.8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -146 & 0 & 146 & 0 \\ 0 & 230 & 0 & -114 & 0 & -116 \\ 230 & 0 & -114 & -146 & -116 & 146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.03 & 0 & -0.03 \\ 0.07 & 0 & -0.03 & 0.04 & -0.03 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{46} = E \begin{bmatrix} 124.52 & 0 & -61.72 & -79.04 & -62.80 & 79.04 \\ 0 & 311.29 & -39.52 & -154.29 & 39.52 & -156.99 \\ -61.72 & -39.52 & 156.02 & 58.76 & -94.31 & -19.24 \\ -79.04 & -154.29 & 58.76 & 126.65 & 20.28 & 27.64 \\ -62.80 & 39.52 & -94.31 & 20.28 & 157.11 & -59.80 \\ 79.04 & -156.99 & -19.24 & 27.64 & -59.80 & 129.35 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{29} \\ v_{29} \\ u_{34} \\ v_{34} \\ u_{35} \\ v_{35} \end{matrix}$$

Üçgen elemanların rijitlik matrislerinin toplanması ile elde edilen global doğrultulardaki sistem rijitlik matrisi:

$$R = E \begin{bmatrix} K1 & K8 & K9 & K10 & K11 & K12 & K13 \\ & K2 & K14 & K15 & K16 & K17 & K18 \\ & & K3 & K19 & K20 & K21 & K22 \\ & & & K4 & K23 & K24 & K25 \\ & & & & K5 & K26 & K27 \\ & Sym & & & & K6 & K28 \\ & & & & & & K7 \end{bmatrix}$$

$$K1 = \begin{bmatrix} 687,46 & -118,56 & -663,94 & 79,04 & -23,52 & 39,52 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 324,38 & 39,52 & -265,57 & 79,04 & -58,81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 747,99 & 0 & 0 & -118,56 & -84,05 & 0 & 0 & 79,04 \\ & & & 475,72 & -118,56 & 0 & 0 & -210,15 & 39,52 & -58,81 \\ & & & & 1146,1 & -118,56 & -1085,5 & 118,56 & 0 & 0 \\ & & & & & 585,62 & 118,56 & -434,19 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1723,8 & 0 & -421,82 & -118,56 \\ & Sym & & & & & & 1144,1 & -118,56 & -168,73 \\ & & & & & & & & 62,24 & 0 \\ & & & & & & & & & 155,61 \end{bmatrix}$$

$$K2 = \begin{bmatrix} 639,73 & -62,01 & -185,55 & 16,37 & 0 & 0 & -611,79 & 118,56 & 0 & 0 \\ & 720,56 & 16,37 & 17,66 & 0 & 0 & 118,56 & -497,54 & 0 & 0 \\ & & 1074,14 & -16,37 & -487,73 & 0 & -19,89 & -118,56 & -186,34 & 118,56 \\ & & & 1179,62 & 0 & -195,09 & -118,56 & -49,73 & 118,56 & -465,86 \\ & & & & 618,59 & 0 & 0 & 0 & -64,91 & -118,56 \\ & & & & & 522,24 & 0 & 0 & -118,56 & -162,27 \\ & & & & & & 1851,96 & 0 & -210,92 & 0 \\ & Sym & & & & & & 1506,1 & 0 & -84,37 \\ & & & & & & & & 951,98 & 58,81 \\ & & & & & & & & & 1686,4 \end{bmatrix}$$

$$K3 = \begin{bmatrix} 212,81 & -59,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & -60,22 & -79,04 & 0 & 79,04 \\ & 281,39 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39,52 & -150,55 & 39,52 & 0 \\ & & 1012,2 & 56,11 & -117,97 & 16,81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1211,3 & 16,81 & 10,09 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1108,4 & -16,79 & -154,48 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 2141,6 & 0 & -61,8 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1005,2 & 0 & -540,66 & 0 \\ & & \text{Sym} & & & & & 1053,2 & 0 & -216,26 \\ & & & & & & & & 659,41 & 0 \\ & & & & & & & & & 513,14 \end{bmatrix}$$

$$K4 = \begin{bmatrix} 594,11 & 0 & -138,24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -249,21 & -79,04 \\ & 1194,97 & 0 & -5,16 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39,52 & -623,02 \\ & & 1114,99 & -74,34 & -92,22 & 74,34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2188,4 & 74,34 & 78,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1187,84 & -78,96 & -298,7 & -113,94 & 0 & 0 \\ & & & & & 1932,36 & -113,94 & -241,51 & 0 & 0 \\ & & & & & & 558,79 & 113,94 & 0 & 0 \\ & & \text{Sym} & & & & & 891,75 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 565,17 & 0 \\ & & & & & & & & & 1058,34 \end{bmatrix}$$

$$K5 = \begin{bmatrix} 1082,5 & 118,56 & -178,68 & -79,04 & -112,91 & -39,52 & 0 & 0 & 0 & -118,56 \\ & 1739,3 & -39,52 & -71,47 & -79,04 & -45,16 & 0 & 0 & -118,56 & 0 \\ & & 422,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 657,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1035,5 & -237,12 & -205,69 & 158,08 & 0 & 0 \\ & & & & & 1696,4 & 79,04 & -82,28 & 0 & 0 \\ & & & & & & 533,34 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{Sym} & & & & & 901,39 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 578,82 & 0 \\ & & & & & & & & & 998,31 \end{bmatrix}$$

$$K6 = \begin{bmatrix} 984,57 & -210,79 & -203,82 & 131,74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1534,89 & 52,69 & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 978,89 & 26,35 & -260,47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1422,68 & 0 & -104,19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1120,8 & 0 & -494 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1217,61 & 0 & -197,6 & 0 & 0 \\ & & & & & & 618,52 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{Sym} & & & & & 508,89 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 379,55 & 178,05 \\ & & & & & & & & & 609,38 \end{bmatrix}$$

$$K7 = \begin{bmatrix} 852,36 & 118,59 & -515,3 & -79,06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 709,29 & -39,53 & -206,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 798,92 & 0 & -147,19 & 39,52 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 606,08 & 79,04 & -58,88 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 503,54 & 0 & -131,13 & -79,04 & 0 & 0 \\ & & & & & 674,36 & -39,52 & -52,45 & 0 & 0 \\ & & & & & & 469,03 & 58,76 & -94,31 & -19,24 \\ & & \text{Sym} & & & & & 633,81 & 20,28 & 27,64 \\ & & & & & & & & 157,11 & -59,8 \\ & & & & & & & & & 129,35 \end{bmatrix}$$

$$K8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -37,05 & 39,52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 79,04 & -92,63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -95,34 & -118,56 & -37,05 & 118,56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -118,56 & -238,36 & 118,56 & -92,63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -62,24 & -79,04 & 0 & 79,04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39,52 & -155,61 & 39,52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K9 = K10 = K11 = K12 = K13 = K15 = K16 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K17 = K18 = K20 = K21 = K22 = K24 = K25 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K14 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 290,01 & -33,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,12 & 90,31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -65,95 & 79,04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 39,52 & -164,88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -977,57 & -118,56 & -31,78 & 118,56 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -118,56 & -795,01 & 118,56 & -79,46 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -86,64 & -19,29 & 0 & 0 & -403,18 & -118,57 & 0 & 79,05 & 0 & 0 \\ 20,23 & 34,04 & 0 & 0 & -118,57 & -1007,95 & 39,53 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{27} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 158,22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 138,39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{28} = \begin{bmatrix} -175,4 & -118,58 & -106,11 & 118,58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -118,57 & -438,51 & 118,57 & -265,29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -30,32 & -118,56 & -225,21 & 0 & 0 & 118,56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -118,56 & -75,8 & 0 & -563,02 & 118,56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -181,88 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -454,71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -61,72 & -118,56 & -62,8 & 79,04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -118,56 & -154,29 & 39,52 & -156,99 \\ -161,66 & -118,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -59,35 & -64,66 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem rijitlik matrisinin tersi MATLAB programı ile bulunmuş olup dış yükler ile çarpılarak deplasman matrisleri bulunmuştur. Elde edilen deplasman matrisleri, bulunan [B] matrisi ile çarpılarak deformasyon değerleri bulunmuş, bu değerlerde [D] matrisi ile çarpılarak yatay ve düşey normal gerilmeler ile kayma gerilmeleri aşağıdaki gibi bulunmuştur. Burada G_i eleman numaralarını göstermektedir.

$$[G1] = \begin{bmatrix} -0,095 \\ 1,068 \\ 0,318 \end{bmatrix}, [G2] = \begin{bmatrix} -0,255 \\ -19,815 \\ 0,012 \end{bmatrix}, [G3] = \begin{bmatrix} -0,619 \\ -20,542 \\ -0,230 \end{bmatrix}, [G4] = \begin{bmatrix} 1,432 \\ 21,244 \\ -10,758 \end{bmatrix},$$

$$[G5] = \begin{bmatrix} -0,046 \\ -27,367 \\ -6,357 \end{bmatrix}, [G6] = \begin{bmatrix} 3,675 \\ -19,851 \\ -11,542 \end{bmatrix}, [G7] = \begin{bmatrix} -0,187 \\ -13,146 \\ -0,723 \end{bmatrix}, [G8] = \begin{bmatrix} -49,325 \\ -7,389 \\ -93,442 \end{bmatrix},$$

$$[G9] = \begin{bmatrix} -13,255 \\ 16,771 \\ -29,884 \end{bmatrix}, [G10] = \begin{bmatrix} -59,421 \\ -54,717 \\ -21,475 \end{bmatrix}, [G11] = \begin{bmatrix} 6,480 \\ 66,843 \\ -11,546 \end{bmatrix}, [G12] = \begin{bmatrix} 4,671 \\ -18,742 \\ 3,811 \end{bmatrix},$$

$$[G13] = \begin{bmatrix} -112,450 \\ -164,244 \\ 12,241 \end{bmatrix}, [G14] = \begin{bmatrix} -57,676 \\ -59,811 \\ -28,244 \end{bmatrix}, [G15] = \begin{bmatrix} -116,453 \\ -75,248 \\ -69,711 \end{bmatrix}, [G16] = \begin{bmatrix} -106,889 \\ -47,213 \\ -86,444 \end{bmatrix},$$

$$[G17] = \begin{bmatrix} -0,340 \\ -13,411 \\ -9,617 \end{bmatrix}, [G18] = \begin{bmatrix} -147,618 \\ -76,725 \\ -86,247 \end{bmatrix}, [G19] = \begin{bmatrix} -157,141 \\ -45,424 \\ -4,501 \end{bmatrix}, [G20] = \begin{bmatrix} -102,423 \\ -40,421 \\ -98,342 \end{bmatrix},$$

$$[G21] = \begin{bmatrix} -172,616 \\ -138,714 \\ -155,223 \end{bmatrix}, [G22] = \begin{bmatrix} -31,477 \\ -91,421 \\ -43,755 \end{bmatrix}, [G23] = \begin{bmatrix} 6,313 \\ -22,922 \\ 0,414 \end{bmatrix}, [G24] = \begin{bmatrix} -134,667 \\ -277,129 \\ -238,886 \end{bmatrix},$$

$$[G25] = \begin{bmatrix} -232,751 \\ -388,425 \\ -112,124 \end{bmatrix}, [G26] = \begin{bmatrix} 4,223 \\ -308,257 \\ 107,666 \end{bmatrix}, [G27] = \begin{bmatrix} 4,581 \\ 119,452 \\ -103,640 \end{bmatrix}, [G28] = \begin{bmatrix} -194,176 \\ -399,432 \\ -279,465 \end{bmatrix},$$

,

$$[G29] = \begin{bmatrix} -0,054 \\ -301,442 \\ -1,212 \end{bmatrix}, [G30] = \begin{bmatrix} -126,499 \\ -91,110 \\ -142,746 \end{bmatrix}, [G31] = \begin{bmatrix} -133,257 \\ -193,174 \\ -131,464 \end{bmatrix}, [G32] = \begin{bmatrix} -29,546 \\ -387,421 \\ -59,253 \end{bmatrix},$$

$$[G33] = \begin{bmatrix} -61,142 \\ -375,489 \\ -124,256 \end{bmatrix}, [G34] = \begin{bmatrix} -97,445 \\ -342,852 \\ -98,419 \end{bmatrix}, [G35] = \begin{bmatrix} -127,357 \\ -346,241 \\ -198,461 \end{bmatrix}, [G36] = \begin{bmatrix} -69,421 \\ -165,933 \\ -121,789 \end{bmatrix},$$

$$[G37] = \begin{bmatrix} -0,007 \\ -141,423 \\ -16,378 \end{bmatrix}, [G38] = \begin{bmatrix} -37,247 \\ -248,535 \\ -91,341 \end{bmatrix}, [G39] = \begin{bmatrix} -69,431 \\ -439,134 \\ -39,431 \end{bmatrix}, [G40] = \begin{bmatrix} -21,753 \\ -416,754 \\ -75,431 \end{bmatrix},$$

$$[G41] = \begin{bmatrix} -41,741 \\ -354,711 \\ -92,498 \end{bmatrix}, [G42] = \begin{bmatrix} -121,474 \\ -439,736 \\ -147,245 \end{bmatrix}, [G43] = \begin{bmatrix} -89,748 \\ -425,712 \\ -107,426 \end{bmatrix}, [G44] = \begin{bmatrix} -76,416 \\ -210,351 \\ -121,429 \end{bmatrix}$$

,

$$[G45] = \begin{bmatrix} -111,356 \\ -221,832 \\ -112,560 \end{bmatrix}, [G46] = \begin{bmatrix} -19,241 \\ -111,743 \\ -69,271 \end{bmatrix}$$

Burada ilk satır yatay normal gerilmeyi, ikinci satır düşey normal gerilmeyi, son satır ise kayma gerilmesini belirtmektedir.

Aşağıda Tablo 5.3'de Gökçekaya Barajının sonlu eleman metodu ve SAP2000 ile çözümü sonucu bulunan gerilme değerlerinin karşılaştırılması görülmektedir. Her bir elemanın ilk satırı normal, ikinci satır yatay, üçüncü satırı kayma gerilmelerini t/m² biriminde göstermektedir.

Tablo 5.3. Gölge kaya Barajının Sonlu Eleman Metodu (SEM) ve SAP2000 ile çözümlü sonucu bulunan gerilme değerlerinin karşılaştırılması
(Değerler sırasıyla, normal, yatay ve kayma gerilme-kısmi V/m^2 ; G₁ sonlu eleman numaralarını göstermektedir.)

	SEM	SAP2000	SEM	SAP2000	SEM	SAP2000	SEM	SAP2000	SEM	SAP2000					
G1	-0,095	-0,011	6,480	9,740	-172,616	-180,203	G21	-139,714	-149,750	G31	-193,714	-205,453	G41	-354,711	-361,693
	1,068	1,937	66,843	71,963	-155,223	-161,407		-131,464	-143,637		-121,474	-128,423		-92,498	-89,437
	1,318	1,464	-11,546	-15,603											
G2	3,255	6,000	4,671	5,030	-31,477	-36,337	G22	-86,421	-99,047	G32	-387,421	-401,570	G42	-439,736	-447,070
	-19,615	-17,243	-18,742	-21,137	-43,755	-49,040		-59,253	-72,127		-147,245	-144,643			
	0,012	-1,793	3,611	5,803											
G3	-0,619	0,000	-112,450	-123,340	6,313	14,967	G23	-22,922	-31,050	G33	-375,469	-399,673	G43	-425,712	-443,270
	-20,542	-13,427	-164,244	-179,697	-277,129	-285,693		0,414	0,860		-124,256	-138,677		-107,426	-119,670
	-0,230	0,640	12,241	17,517											
G4	1,432	1,677	-57,676	-63,080	-134,667	-145,947	G24	-239,896	-250,400	G34	-342,852	-390,123	G44	-210,351	-265,630
	26,244	33,327	-59,811	-66,523	-277,129	-285,693		-98,419	-110,270		-76,416	-86,723		-121,429	-134,777
	-10,756	-12,030	-28,244	-31,000											
G5	-0,046	-0,837	-117,453	-121,227	-239,751	-254,213	G25	-369,425	-395,393	G35	-346,241	-384,250	G45	-221,632	-240,250
	-27,967	-34,263	-76,248	-80,667	-369,425	-395,393		-112,124	-126,367		-198,461	-215,733		-112,560	-144,627
	-6,357	-10,843	-69,711	-74,790											
G6	3,675	4,200	-105,869	-112,367	4,223	14,487	G26	-309,257	-325,360	G36	-165,933	-197,277	G46	-111,743	-125,503
	-19,651	-24,070	-47,213	-54,277	-309,257	-325,360		107,666	115,160		-121,788	-141,943		-69,271	-71,283
	-11,542	-12,403	-86,444	-90,833											
G7	-0,167	0,000	-0,340	0,000	4,561	8,573	G27	119,452	106,680	G37	-141,423	-130,420			
	-13,146	-16,853	-13,411	-16,163	-103,640	-114,603		-16,378	-20,530						
	-0,723	-1,223	-9,617	-12,683											
G8	-49,326	-57,777	-147,618	-155,667	-194,176	-203,447	G28	-399,432	-495,080	G38	-248,535	-272,743			
	-7,399	-9,267	-76,725	-81,123	-399,432	-495,080		-279,465	-343,640		-91,341	-94,740			
	-93,442	-100,563	-86,247	-99,263											
G9	-13,255	-18,363	-157,141	-163,967	-0,054	0,000	G29	-301,442	-360,373	G39	-499,134	-461,523			
	16,771	23,747	-45,424	-59,083	-301,442	-360,373		-1,212	-1,380		-39,431	-40,640			
	-29,684	-36,860	-4,501	-8,024											
G10	-59,421	-64,726	-102,423	-116,673	-126,499	-144,013	G30	-91,110	-98,250	G40	-416,754	-420,670			
	-54,717	-61,241	-40,421	-43,063	-91,110	-98,250		-142,746	-153,737		-21,753	-22,497			
	-21,475	-26,536	-98,342	-104,690	-142,746	-153,737					-75,431	-79,427			

5.3 Dinamik Analiz Sonuçlarının Değişik Durumlar İçin Karşılaştırılması

5.3.1 Yerdeğiştirmelerin Karşılaştırılması

Tablo 5.4 İki boyutlu dinamik analizde, çeşitli durumlar için kret noktasında meydana gelen maksimum yatay yerdeğiştirmeler

Kret Noktası Yatay Yerdeğiştirmesi (mm)	
Rijit Temel	
Baraj Dolu	Baraj Boş
209	182

5.3.2 Gerilmelerin Karşılaştırılması

Tablo 5.5 İki boyutlu dinamik analizde, çeşitli durumlar için maksimum asal gerilmelerin karşılaştırılması

Maksimum Asal Gerilmeler (t/m ²)	
Rijit Temel	
Baraj Dolu	Baraj Boş
589,7	688,9

Tablo 5.6 İki boyutlu dinamik analizde, çeşitli durumlar için minimum asal gerilmelerin karşılaştırılması

Minimum Asal Gerilmeler (t/m ²)	
Rijit Temel	
Baraj Dolu	Baraj Boş
353,0	309,2

Dinamik analiz sonuçlarına göre en elverişsiz durum barajın dolu olması halidir. Ayrıca iki boyutlu dinamik analiz sonucu en büyük yerdeğiştirmeler kret noktalarında meydana gelmektedir.

BÖLÜM ALTI

SONUÇLAR

Bilgisayar alanında meydana gelen gelişmeler, sonlu elemanlar yönteminin çok fazla ilgi görmesine sebep olmuştur. Oldukça zaman alan, kemer barajlar gibi çok karmaşık yapıların çözümleri bu gelişmeler sayesinde, rahat bir şekilde ve çok kısa zaman içinde gerçekleştirilebilmektedir.

Bu çalışmada örnek baraj olarak Gökçekaya Barajı seçilmiş ve bu barajın gövdesi sonlu elemanlara ayrılarak sonlu elemanlar metodu ve SAP2000 programı ile iki boyutlu dinamik analizi yapılmıştır. Sonlu elemanlar analizi ile sayısal çözüm işlem hacmi nedeniyle bilgisayar kullanımını zorunlu kılmaktadır. Analitik olarak yapılan çözümler MATLAB programı kullanılarak elde edilmiş sonuçlar SAP2000 yapısal analiz programı ile kıyaslanmıştır. Her iki şekilde elde edilen sayısal sonuçlar birbirine yakındır. Sonlu elemanlar analizinde baraj üçgen elemanlara bölünmüştür. Elemanların düğüm noktalarına suyun kaldırma kuvveti, hidrostatik kuvvet, hidrodinamik basınç kuvvetinin gelmesine dikkat edilerek bölümlenme yapılmıştır.

Yapılan çözümler, dinamik analiz sonuçlarına göre en elverişsiz durum barajın dolu, temel in ankastre olduğu durumda meydana geldiğini göstermektedir. Barajın durumları için elde edilen yerdeğişirmeler karşılaştırıldığında barajın üst kotlarında en büyük yer değışirme değeri oluşmaktadır. Gerilmelerde ise en elverişsiz durum kesitlere göre değışebilmektedir. Özellikle barajın tabanına yakın kesitte barajın dolu temel in ankastre olduğu durumda, düşey gerilmelerde ise ortada en büyük değerler oluşmaktadır.

Yapılan çözümlerden elde edilen en büyük yatay gerilmeler genellikle barajın dolusavak kısmında meydana gelirken, en büyük düşey gerilmeler ise taban kısmında oluşmaktadır. Her iki gerilme değerlerinde barajın kenarlarına doğru bir azalma kaydedilmektedir. Kayma gerilme değerlerinde ise, özellikle barajın üst ve orta kısmında, kenarlara doğru bir artış söz konusudur. Daha sonraki çalışmalarda barajın oturduğu zemin ankastre yerine, gevşek davranışa göre modellenmesi önerilebilir.

KAYNAKLAR

- Öziş, Ü., (1993) *Su Yapıları, Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik – Mimarlık Fakültesi Yayınları*, No: 45, İzmir
- Ural, O.M., Urgan, Ü.,(1967) *Large Dams In Turkey*, DSİ, Ankara
- Bulson, P.S., Caldwell, J.B.,Severn,R.T., (1983) *Engineering Structure Development in The Twentieth Century*, University of Bristol Pres, Bristol
- Bayraktar, A., (1991) *Beton Ağırlık Barajlarda Baraj – Su Zemin Etkileşiminin Statik ve Dinamik Analizde Değerlendirilişi*, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Mühendislik – Mimarlık Fakültesi, Trabzon
- Wilson, E.L., Khalvati, M., (1983) *Finite Elements For The Dynamic Analysis of Fluid – Solid System. International Journal For Numerical Methods in Engineering*. Vol. 19.
- Zienkiewicz, O.C.,Bettes, P., (1978) *Fluid – Structure Dynamic Interaction and Wave Forces. A Introduction To Numerical Treatment. International Journal For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13 1 – 16.
- Calayır.Y., Dumanoğlu, A.A., (1992) *Sıvı – Yapı Sistemlerinin Statik ve Dinamik Davranışlarının Lagrangian Metoduyla İncelenmesi, İnşaat Mühendisliğinde Bilgisayar Kullanımı III.Sempozyumu, İstanbul, Bildiriler Kitabı, Cilt I, 248 – 261*
- Calayır.Y., Bayraktar. A., Dumanoğlu, A.A., (1993) *Baraj – Rezervuar Sistemlerinin Lineer Teoriye Göre Dinamik Analizi, II.Ulusal Deprem Mühendisliği Kongresi, TMMOB İnşaat Mühendisliği Odası İstanbul Şubesi, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 178 – 187*

- Priscu, R., Popovici, A., Stematiu, D., Stere, C., (1985) *Earthquake Engineering For Large Dams*, John Wiley and Sons Inc., New York
- Çatal, H.H., (2005) *Structural Dynamics, Yüksek Lisans Ders Notları* (Yayınlanmamış), DEÜ İnş. Müh. Böl., İzmir
- Çatal, H.H., (2002) *Yapı ve Deprem Mühendisliğinde Matris Yöntemler*, I.Baskı DEÜ. Müh. Fak. Yayınları, No: 294, İzmir
- Ohsaki, Y., (1991) *Deprem Dalgasının Spektral Analizine Giriş*, (Çeviren İPEK, M.), TMMOB İnşaat Mühendisleri Odası İstanbul Şubesi, İstanbul
- Canitez, N., Yaramancı, U., Özdemir, H., (1987) *Spektral Analiz ve Jeofizik Uygulamaları*, TMMOB Jeofizik Mühendisleri Odası Eğitim Yayınları, No,1, Ankara
- Dumanoğlu, A.A., (1980) *The Accuracy of The Finite Element Method For Non – Reflecting Boundaries*, Sakarya D.M.M. Akademisi Dergisi, Sayı MMA – 7 72 – 82
- Zienkiewicz, O.C., (1977) *The Finite Element Method*. Mc Graw Hill Book Co., Third Edition, London
- Yang, T.Y., (1986) *Finite Element Structural Analysis*, Prentice – Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey
- Weaver, W., Johnston, P.R., (1984) *Finite Element For Structural Analysis*, Prentice – Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey
- Bathe, K.J., (1982) *Finite Element Procedures In Engineering Analysis*, Prentice – Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey

Türkiye’de Barajlar ve Hidroelektrik Santraller, Bayındırlık ve İskan Bakanlığı, DSİ Genel Müdürlüğü

Sucuoğlu, H., (1988) *Barajlarda Yapı – Zemin Sistemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Dinamik Analizi*, Su Yapıları Semineri, Samsun, Bildiriler Kitabı. 140 – 158

Wilson, E.L., Habibullah, A., (1984) *SAP80 Structural Analysis Programs*. Computers and Structures Inc., Berkeley, California, USA

Yılmaz, Ç., (1988) *Barajların Deprem Analizi*, Su Yapıları Semineri, Samsun, Bildiriler Kitabı.

Fok, K., Chopra, A.K., (1985) *Earthquake Analysis and Response of Concrete Arch Dams*, Report No., UCB/EERC – 85/07 Earthquake Engineering Research Centre, University of California, Berkeley, California

Bathe, K.J., Wilson, E.L., Peterson F.E., (1974) *SAPIV A Structural Analysis Program For Static and Dynamic Response of Linear Systems*, Report No., EERC 73 – 11 Earthquake Engineering Research Centre, University of California, Berkeley, California

Dumanoğlu, A.A., Severn, R.T., (1984) *Dynamic Response of Dams and Other Structures to Differential Ground Motions*, Proc. Instn Civ. Engrs. Part 2. 77.

Gibb. S.A., Partners, (1980) *Victoria Dam Report on Finite Element Analysis for Static Loading*, Department of Civil Engineering, University of Bristol, Bristol