

**T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**STRES - DAYANIKLILIK MODELLERİNDE BAZI DAGILIMLAR İÇİN
SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİNİN TAHMİNİ**

**Bugra SARAÇOĞLU
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 2007**

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STRES - DAYANIKLILIK MODELLERİNDE BAZI DAĞILIMLAR İÇİN
SİSTEM GÜVENİRLİLİĞİNİN TAHMİNİ

Bugra SARAÇOĞLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 19 / 07 / 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği
ile kabul edilmiştir.

.....

Yrd.Doç.Dr. M. Fedai KAYA (Danisman)	Prof.Dr. Durmus BOZKURT (Üye)	Prof.Dr. IsmihanBAYRAMOĞLU (Üye)
..... Doç.Dr. Asir GENÇ (Üye) Doç.Dr. Galip OTURANÇ (Üye)	

ÖZET

Doktora Tezi

STRES - DAYANIKLILIK MODELLERİNDE BAZI DAĞILIMLAR İÇİN SİSTEM GÜVENİRLİLİĞİNİN TAHMİNİ

Bugra SARAÇOĞLU

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. M. Fedai KAYA

2007, 79 Sayfa

Jüri: Yrd.Doç.Dr. M. Fedai KAYA

Prof.Dr. Durmus BOZKURT

Prof.Dr. Ismihan BAYRAMOĞLU

Doç.Dr. Asir GENÇ

Doç.Dr. Galip OTURANÇ

Stres-dayanıklılık modeli, Y stresine maruz kalan ve X dayanıklılığına sahip bir bileşenin yaşamını tanımlar. Buna göre, stres, dayanıklılığı aşarsa ($Y > X$), bileşenin yaşamı mümkün değildir. Stres ve dayanıklılıktan oluşan tek bileşenli böyle bir sistemin güvenilirliği $R = P(Y < X)$ biçiminde ifade edilir. Bu tez çalışmasının birinci ve ikinci bölümünde konu ile ilgili genel bir giriş ve temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm, geçmiş yıllarda yapılan çalışmalara ayrılmıştır. Tezin ana kısmını oluşturan dördüncü bölümde ise, stres-dayanıklılık modellerinde Gompertz dağılımı için sistem güvenilirliğinin en çok olasılık tahmin edicisi ve düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edicisi elde edilmiştir. Daha sonra bu tahmin edicilerin çeşitli dağılımsal özellikleri incelenmiş, ayrıca sistem güvenilirliği için en çok olasılık tahmin edicisine dayalı tam ve asimptotik güven aralıkları oluşturulmuş ve kapsama olasılıklarına ilişkin bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Ayrıca, bu tahmin edicilerin yanları ve hata kareler ortalamaları karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sistem güvenilirliği, en çok olasılık tahmin edicisi, düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edici, hata kareler ortalaması, güven aralıkları, kapsama olasılığı.

ABSTRACT

PhD Thesis

**ESTIMATION OF SYSTEM RELIABILITY FOR SOME DISTRIBUTIONS IN
STRESS-STRENGTH MODELS**

Bugra SARAÇOĞLU

Selcuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Ass.Prof.Dr. M. Fedai KAYA

2007, 79 Page

Jury: Ass.Prof.Dr. M. Fedai KAYA

Prof.Dr. Durmus BOZKURT

Prof.Dr. Ismihan BAYRAMOĞLU

Assoc.Prof.Dr. Asir GENÇ

Assoc.Prof.Dr. Galip OTURANÇ

A stress-strength model defines life of component having strength X and exposed to stress Y . According to this, if stress exceeds strength ($Y > X$) then living of a component is impossible. Such a single component reliability made up of stress and strength is explained as $R = P(Y < X)$. In the first and second section of this thesis a general introduction to the topic and basic concepts related to it are given. The third section is separated to recent studies. In the main part of this thesis, that is the fourth section, maximum likelihood estimator and uniformly minimum variance unbiased

estimator of system reliability for Gompertz distributon in stress-strength models are obtained. Then various distributional properties of these estimators are investigated also exact and asymptotic confidence intervals based on maximum likelihood estimator for system reliability are constituted and a simulation study related to coverage probabilities is done. On the other hand bias and mean square errors of these estimators are compared.

Key Words: System reliability, maximum likelihood estimator, uniformly minimum variance unbiased estimator, mean square error, confidence intervals, coverage probabilities.

TESEKKÜR

Bu çalışmanın konusunun seiminde ve gereklesmesinde bana yön veren, yapıcı telkin ve tenkitleri ile severek çalışmamı sağlayan çok değerli hocam Sayın Yrd.Doç.Dr. Mehmet Fedai KAYA' ya, çalışmamda bana yardımcı olan Yrd.Doç.Dr. Coskun KUS ve Yrd.Doç.Dr. Ismail KINACI hocalarıma ve meslektaşım Ars.Gör. Ahmet PEKGR 'e, benden hiçbir sekilde desteklerini esirgemeyen esime ve yakınlarıma, tüm mesai arkadaşlarıma ve bana moral kaynağı olan sevgili kızıma en içten duygularımla tesekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TESEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
KISALTMALAR	x
SİMGELER.....	xi
1. GİRİS	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Olasılık Kavramı.....	3
2.2. Örneklem ve İstatistik.....	4
2.3. Tahmin.....	8
2.3.1. Nokta tahmini.....	9
2.3.2. Aralık tahmini.....	10
2.4. Sistem Güvenilirliği.....	11
2.5. Özel Fonksiyonlar	12
2.5.1. Gamma fonksiyonu	12
2.5.2. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu	13
2.5.3. Beta fonksiyonu	13
2.6. Bazı Dağılımlar.....	14
2.6.1. Tek parametrelili üstel dağılım.....	14
2.6.2. Burr XII Dağılımı.....	14
2.6.3. Burr III Dağılımı.....	16
2.6.4. Gamma Dağılımı.....	16
2.6.5. Ki-kare Dağılımı.....	17
2.6.6. F Dağılımı	17
2.6.7. Beta Dağılımı	18
2.7. O , o Gösterimleri	19
2.8. Taylor Serileri	19
2.8.1. Tek değişkenli fonksiyonlar için Taylor serisi	19
2.8.2. İki değişkenli fonksiyonlar için Taylor serisi	20

2.9. Newton-Raphson Yöntemi	20
2.10. Fisher Informasyonu	22
3. STRES-DAYANIKLILIK MODELLERİNDE ÇEŞİTLİ DAGILIMLAR	
İÇİN SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİ VE TAHMİNİ	24
3.1. Tek Parametrelİ Üstel Dagilim İÇin Sistem Güvenilirligi	24
3.1.1. Sistem güvenilirligi için en çok olabilirlık tahmin edicisi (MLE)	25
3.1.2. Sistem güvenilirligi için düzgün en küçük varyansli yansız tahmin edici (UMVUE)	30
3.1.3. Sistem güvenilirligi için güven araliklari	33
3.2. Gamma Dagilimi İÇin Sistem Güvenilirligi	35
3.2.1. Sistem güvenilirligi için en çok olabilirlık tahmin edicisi (MLE)	37
3.2.2. Sistem güvenilirligi için düzgün en küçük varyansli yansız tahmin edici (UMVUE)	39
3.2.3. Sistem güvenilirligi için güven araliklari	42
3.3. Diger Dagilimler İÇin Sistem Güvenilirligi ve Tahmini	43
3.3.1. Burr III dagilimi için sistem güvenilirligi ve tahmini	43
3.3.2. Burr XII dagilimi için sistem güvenilirligi ve tahmini	45
4. STRES-DAYANIKLILIK MODELLERİNDE GOMPertz	
DAGILIMI İÇİN SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİ VE TAHMİNİ	47
4.1. Gompertz Dagilimi İÇin Sistem Güvenilirligi	47
4.2. Gompertz Dagilimi İÇin Sistem Güvenilirliginin Nokta Tahmini	50
4.2.1. En çok olabilirlık tahmin edicisi	50
4.2.2. Düzgün en küçük varyansli yansız tahmin edici (UMVUE).....	56
4.3. Gompertz Dagilimi İÇin Sistem Güvenilirliginin Aralik Tahmini	63
4.3.1. Tam güven araliklari	63
4.3.2. Asimptotik Güven Araliklari	64
4.4. Tahmin Edicilerin Karsilastirilmesi	65
4.5. Simülasyon Çalışması	69
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	74
KAYNAKLAR	75

SEKILLER DIZINI

Sekil 4.1. $I_1 = 0.5, n = 5, m = 3$ için I_2 artırıldığında sistem güvenilirliği için MLE ve UMVUE 'nin MSE 'lerinin grafikleri	67
Sekil 4.2. $I_1 = 0.5, n = 10, m = 10$ için I_2 artırıldığında sistem güvenilirliği için MLE ve UMVUE 'nin MSE 'lerinin grafikleri	67
Sekil 4.3. $I_1 = 4, n = 5, m = 3$ için I_2 artırıldığında sistem güvenilirliği için MLE ve UMVUE 'nin MSE 'lerinin grafikleri	68
Sekil 4.4. $I_1 = 4, n = 10, m = 10$ için I_2 artırıldığında sistem güvenilirliği için MLE ve UMVUE 'nin MSE 'lerinin grafikleri	68
Sekil 4.5. $n = 10$ sabit tulup m artırıldığında R için $(I_1, I_2, c) = (1, 2, 1)$ için tam ve asimptotik güven aralıklarının grafiği	71
Sekil 4.6. $n = 10$ sabit tulup m artırıldığında R için $(I_1, I_2, c) = (1, 5, 1)$ için tam ve asimptotik güven aralıklarının grafiği	71
Sekil 4.7. $n = 10$ sabit tulup m artırıldığında $(I_1, I_2, c) = (5, 5, 1)$ için tam ve ve asimptotik güven aralıklarının grafiği	72
Sekil 4.8. $m = 10$ sabit tulup n artırıldığında R için $(I_1, I_2, c) = (1, 2, 1)$ için tam ve asimptotik güven aralıklarının grafiği	72
Sekil 4.9. $m = 10$ sabit tulup n artırıldığında R için $(I_1, I_2, c) = (1, 5, 1)$ için tam ve asimptotik güven aralıklarının grafiği	73
Sekil 4.10. $m = 10$ sabit tulup n artırıldığında R için $(I_1, I_2, c) = (5, 5, 1)$ için tam ve asimptotik güven aralıklarının grafiği	73

ÇİZELGELER DIZINI

Çizelge 4.1.	MLE ve UMVUE için Yan, Varyans ve MSE degerleri.....	66
Çizelge 4.2.	n sabit tutulup m arttirildiginda $(I_1, I_2, c) = (1,2,1), (1,5,1), (5,5,1)$ için tam ve asimptotik güven araliklarinin kapsama olasiliklari.....	69
Çizelge 4.3.	m sabit tutulup n arttirildiginda $(I_1, I_2, c) = (1,2,1), (1,5,1), (5,5,1)$ için tam ve asimptotik güven araliklarinin kapsama olasiliklari.....	70

KISALTMALAR

MLE: En çok olabilirlik tahmin edicisi

MSE: Hata kareleri ortalamasi

UMVUE: Düzgün en küçük varyansli yansiz tahmin edici

ML: En çok olabilirlik

UMVU: Düzgün en küçük varyansli yansiz

SIMGELER

\mathcal{N} : Dogal Sayilar Kümesi

\mathbb{R} : Reel Sayilar Kümesi

\mathbb{R}^+ : Pozitif Reel Sayilar Kümesi

1. GIRIS

Stres-dayanıklılık modeli, Y stresine maruz kalan ve X dayanıklılığına sahip bir bileşenin yaşamını tanımlar. Buna göre, stres, dayanıklılığı aşarsa ($Y > X$), bileşenin yaşamı mümkün değildir. Stres ve dayanıklılıktan oluşan tek bileşenli böyle bir sistemin güvenilirliği $R = P(Y < X)$ biçiminde ifade edilir. Stres-dayanıklılık modellerinin mühendislik, tıp, askeriye gibi birçok alanda uygulamaları mevcuttur. Örneğin; Y , patlayıcı bir maddenin ateşlenmesi sonucunda denemenin yapıldığı odada oluşan basıncı ve X de bu odanın basınca dayanıklılığını temsil etsin. Bu deneme sonucunda odanın, ortaya çıkan basınca dayanması olasılığı yani sistemin güvenilirliği, $R = P(Y < X)$ şeklinde gösterilir. Problemin, inşaat mühendisliği alanındaki uygulaması olarak da aşağıdaki örnek stres-dayanıklılık modellerine uygun olabilir. Bir köprü'nün ağırlık taşıma kapasitesi belli bir dağılıma sahiptir. Bu köprü üzerinden geçen araçların toplam ağırlığının da bir dağılımı vardır. Y rasgele değişkeni, araçların oluşturduğu maksimum ağırlık, X rasgele değişkeni de köprü'nün minimum dayanma gücü olmak üzere, köprü'nün dayanıklılığında bir sorun çıkmaması için $P(Y < X)$ güvenilirliğinin oldukça yüksek olması (1'e yakın) istenir. Bu model aynı bakış açisi ile askeri ve tıp alanlarının uygulama sahalarında da yer bulmuştur. Bu tür uygulamalardan dolayı çeşitli dağılımlar için $R = P(Y < X)$ güvenilirliğinin hesaplanması ve tahmininin yapılması çok önemlidir.

Bu alanda yapılan çalışmaların çoğunda X ve Y rasgele değişkenlerinin dağılımlarının aynı aileye ait ve bağımsız oldukları kabul edilmiş ve çeşitli dağılımlar ailesi için, stres-dayanıklılık modellerinde sistem güvenilirliğinin en çok olasılık, düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edicileri elde edilmiş ve en çok olasılık tahmin edicilerine ilişkin güven aralıkları oluşturulmuştur. Stres-dayanıklılık modellerinde sistem güvenilirliğinin tahmini problemine, normal dağılımlar ailesi için Church ve Harris (1970), Downton (1973), Reisser ve Guttman (1986), üstel dağılımlar ailesi için Tong (1974, 1975), Beg (1980a), Weibul

dagilimlar ailesi için Johnson (1988), McCool (1991), Burr X dagilimlar ailesi için Ivshin ve Lumelskii (1995), Surles ve Padget (1998, 2001), Burr XII dagilimlar ailesi için Awad ve Gharraf (1986), Gamma dagilimlar ailesi için Ismail ve ark. (1986), Constantine (1986), Beta dagilimlar ailesi için Lenhof ve Pensky (2002), Pareto dagilimlar ailesi için Beg ve Singh (1980b) 'in önemli katkıları vardır.

Bu çalışmada, stres-dayanıklılık modellerinde Gompertz dagilimine sahip dagilimlar ailesi için sistem güvenilirliği ve tahmini konusu incelenecektir.

İkinci bölümde, tez çalışması için gerekli olan kavramlar üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde Üstel, Gamma, Burr III ve Burr XII dagilimlar ailesi için, sistem güvenilirliği ve tahmini ile ilgili geçmiş yıllarda yapılan çalışmalar özetlenmiştir. Tezin ana kısmını oluşturan dördüncü bölümde ise stres-dayanıklılık modellerinde Gompertz dagilimi için sistem güvenilirliğinin en çok olabilirlik tahmin edicisi (MLE), düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edicisi (UMVUE) elde edilmiştir ve bu tahmin edicilerin çeşitli dagilimsal özellikleri incelenmiştir. Ayrıca sistem güvenilirliği için MLE 'ye dayalı güven aralıkları oluşturulmuştur. MLE ve UMVUE 'lerin yanları, hata kareler ortalamaları (MSE) karşılaştırılmış ve sistem güvenilirliği için tam ve asimptotik güven aralıklarının kapsama (coverage) olasılıklarının hesaplanmasına ilişkin bir simülasyon çalışması yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında Minitab 13.1, Excel 97, Maple 9.5, Paint Shop Pro 6 paket programları ile Delphi 5 ve Q-Basic programlama dilleri kullanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, yapılmis olan çalışma için gerekli olan tanımlar ve temel kavramlar verilmistir.

2.1. Olasilik Kavrami

W , örnek uzay, U , W 'da bir \mathcal{S} -cebir olmak üzere (W, U) ikilisine *örnekleme uzayı* denir.

U üzerinde tanımlı bir P fonksiyonu için $\forall A \in U$ için $P(A) \geq 0$, $P(W) = 1$ ve $A_j \cap A_k = \emptyset$, $k \neq j$ olmak üzere $\{A_j\}$, $A_j \in U$, $j = 1, 2, \dots$ dizisi için

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \quad (2.1)$$

kosulu sağlanıyorsa P 'ye U üzerinde bir olasılık ölçüsü denir.

W , örnek uzay, U , W 'da bir \mathcal{S} -cebir ve P de, U üzerinde bir olasılık ölçüsü olmak üzere belli bir rasgelelik olgusunu modelleyen (Ω, U, P) üçlüsüne *olasılık uzayı* denir. $\forall A \in U$ için $P(A) > 0$ olmak üzere,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad B \in U \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanan $P(B|A)$ olasılığına A verildiğinde, B 'nin *kosullu olasılığı* denir.

$A_1, A_2, \dots, A_n \in U$ için $P\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right) > 0$ ise

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P\left(A_n \middle| \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right) \quad (2.3)$$

biçiminde yazılabilir. $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ ayrik olayların bir dizisi yani $A_j \cap A_k = \emptyset, j \neq k$ ve $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = W$ olmak üzere $\forall j$ için $P(A_j) > 0$ ise aşağıdaki biçimde yazılabilen esitlige *toplam olasilik kurali (total probability rule)* denir (Rohatgi 1976).

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)P(B|A_j), B \in U \quad (2.4)$$

2.2. Örneklem ve İstatistik

Ω 'dan \mathbb{R} 'ye tanımlı Borel ölçülebilir bir fonksiyona *rasgele değişken*, Ω 'dan \mathbb{R}^p ($p \in \mathbb{N}$) 'ye tanımlı Borel ölçülebilir bir fonksiyona *rasgele vektör* denir. B reel sayılardaki Borel cebirini göstermek üzere bir $C : W \rightarrow \mathbb{R}$ rasgele değişkeni $\forall ? \in \mathbf{B}$ için,

$$P_X : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R} \\ : B \rightarrow P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

olarak tanımlanan P_X olasılık ölçüsüne X rasgele değişkeninin *olasılık dağılımı* denir. Burada

$$X^{-1}(B) = \{w : w \in \Omega, X(w) \in B\} = (X \in B) \in U$$

dir.

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$: x \rightarrow F(x) = P_x((-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonuna X rasgele değişkeninin *dağılım fonksiyonu* denir.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (2.5)$$

olacak şekilde bir $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu varsa X rasgele değişkenine *mutlak sürekli* veya kısaca *sürekli rasgele değişken* ve f fonksiyonuna da X 'in *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir. $X : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}$ rasgele değişkeni için X 'in değer kümesi $D_X = \{x : X(w) = x\}$ sayılabilir olduğunda X 'e *kesikli rasgele değişken* denir. Kesikli bir X rasgele değişkeni için olasılık fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(x) = P(X = x) \quad , \quad x \in D_X \quad (2.6)$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x, t \in D_X} f(t) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

X , $P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli bir rasgele değişken olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} x_k < \infty$ ise X 'in beklenen değeri mevcuttur denilir ve

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X = x_k) \quad (2.8)$$

biçiminde yazılır. Sayet X , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken ise $\int |x| f(x) dx < \infty$ koşulu sağlanırsa X 'in beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (2.9)$$

olur (Rohatgi 1976).

Bir tek özelliğin ölçümüne karşılık gelen rasgele değişken X olmak üzere her biri X gibi dağılmış ve bağımsız olan X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenlerinin topluluğuna n birimlik örneklem denir ve X rasgele değişkeninin aldığı değerlerin kümesi D_X olmak üzere $C = D_X^n \subset \mathbb{R}^n$ kümesine de *örneklem uzayı* denir.

(X, Y) kesikli bir rasgele vektör ve $P(Y = y) > 0$ ise $Y = y$ verildiğinde X 'in koşullu olasılık fonksiyonu

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \quad (2.10)$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer (X, Y) , $f(x, y)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele vektör ve marjinal yoğunluk fonksiyonları sırasıyla f_1 ve f_2 olmak üzere $f_2(y) > 0$ ise Y verildiğinde X 'in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (2.11)$$

şeklindedir.

X ve Y , bir (Ω, U, P) olasılık uzayında tanımlı iki rasgele değişken ve h , borel ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $E(h(X))$ sonlu ise Y verildiğinde X 'in koşullu beklenen değeri

$$E\{h(X)|y\} = \begin{cases} \sum_x h(x) P(X=x|Y=y) & , (X,Y) \text{ kesikli ise} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_{X|Y}(x|y) & , (X,Y) \text{ sürekli ise} \end{cases} \quad (2.12)$$

biçiminde tanımlanır (Rohatgi 1976).

Örneklemin bilinmeyen parametre içermeyen Borel ölçülebilir bir fonksiyonuna *istatistik* denir. İstatistikler aynı zamanda birer rasgele degiskendir. Bir istatistik bir parametreyi veya parametrenin bir fonksiyonunu tahmin etmek amacıyla kullanıldığında *tahmin edici (estimator)* adını alır. Tahmin edicinin aldığı değere de *tahmin (estimation)* denir. Bir istatistigin dağılımı, bilinmeyen parametreye bağlı değil ise bu istatistik *yardımcı istatistik (ancillary statistic)* adını alır.

X_1, X_2, \dots, X_n olasılık (yogunluk) fonksiyonu $f(\cdot; \mathbf{q}) \in \mathfrak{S} = \{f(\cdot; \mathbf{q}); \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^r\}$ olan dağılımdan bir örneklem, $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_r)$ ve $\underline{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ m -boyutlu ($m \geq 1$) bir istatistik olmak üzere, $\underline{T} = \underline{t} \in \mathbb{R}^m$ bilindiğinde X_1, X_2, \dots, X_n 'in koşullu dağılımı \mathbf{q} 'dan bağımsız ise \underline{T} istatistigine \mathfrak{S} ailesi için veya \mathbf{q} parametresi için m -boyutlu *yeterli istatistik* denir (Roussas 1973).

Teorem 2.1. (Neyman-Fisher Faktörizasyon Teoremi) X_1, X_2, \dots, X_n olasılık (yogunluk) fonksiyonu $f(\cdot; \mathbf{q}) \in \mathfrak{S}$ olan dağılımdan alınan bir örneklem ve T , m -boyutlu bir istatistik olmak üzere \underline{T} 'nin \mathbf{q} için yeterli bir istatistik olması için gerek ve yeter koşul, X_1, X_2, \dots, X_n 'lerin ortak olasılık (yogunluk) fonksiyonunun,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mathbf{q}) = g(\underline{T}(x_1, x_2, \dots, x_n); \mathbf{q})h(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.13)$$

biçiminde yazılabilmesidir (Rohatgi 1976).

\underline{X} , k -boyutlu bir rasgele vektör ve \underline{X} 'in olasılık (yogunluk) fonksiyonu $\mathfrak{S} = \{f(\cdot; \mathbf{q}); \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^r\}$ ailesinin elemanı olsun. $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir herhangi bir fonksiyon ve her $\mathbf{q} \in \Theta$ için $E_{\mathbf{q}}(g(\underline{X})) < \infty$ olmak üzere her $\mathbf{q} \in \Theta$ için

$$E_{\mathbf{q}}(g(\underline{X})) = 0 \Rightarrow P_{\mathbf{q}}(g(\underline{X}) = 0) = 1 \quad (2.14)$$

oluyorsa \mathfrak{S} ailesine veya \underline{X} rasgele vektörüne *tamdir* denir (Roussas 1973).

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerden oluşan bir rasgele vektör ve $\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^r$ olmak üzere \underline{X} 'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanan koşulu sağlıyorsa, *r-parametrelili üstel aileye aittir* denir.

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{q}) = C(\mathbf{q}) \exp\left(\sum_{j=1}^r Q_j(\mathbf{q}) T_j(\mathbf{x})\right) h(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

Bu durumda $(\sum_{i=1}^n T_1(x_i), \sum_{i=1}^n T_2(x_i), \dots, \sum_{i=1}^n T_r(x_i))$ istatistiği $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_r)$ için yeterli ve tam istatistiktir (Roussas 1973).

2.3. Tahmin

Dağılımı biçimsel olarak bilinen fakat parametreleri bilinmeyen bir kitlenin parametrelerinin tahmin edilmesi istatistik biliminin en önemli problemlerindedir. Kitle parametreleri, kitleden alınan bir örneklem yardımıyla oluşturulan istatistiklerle tahmin edilir. Parametre hakkında bütün bilgi örneklemin içindedir. Bu şekilde elde edilen tahminlere nokta tahmini denir. Ancak çoğu zaman nokta tahmini tek başına yeterli olmayabilir. Kitle parametresini belli bir olasılıkla içinde barındıran aralık şeklindeki bir tahmine de ihtiyaç duyulur. Burada aralığın alt ve üst sınırları yine örneklemin birer fonksiyonudur (istatistigidir).

2.3.1. Nokta tahmini

Parametresi tahmin edilmek istenilen kitle $f(x, \mathbf{q}), \mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ dagilimına sahip olsun. Burada \mathbf{q} kitle parametresini, \mathcal{Q} , parametre uzayını temsil etmektedir. Bu kitleden alınan ve her biri aynı $f(x, \mathbf{q}), \mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ dagilimına sahip X_1, X_2, \dots, X_n örnekleminin olasılık (yogunluk) fonksiyonu,

$$L(\underline{x}, \mathbf{q}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mathbf{q}) \quad (2.16)$$

biçimindedir. $L(\underline{x}, \mathbf{q})$, \mathbf{q} 'nin bir fonksiyonu olarak düşünülürken *olabilirlik fonksiyonu* (*likelihood function*) adını alır.

$X_1, X_2, \dots, X_n, f(x, \mathbf{q}), \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^r$ dagilimından alınmış örneklem olmak üzere $L(\hat{\mathbf{q}}/\underline{x}) = \sup_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}} (L(\mathbf{q}/\underline{x}))$ olsun. $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ istatistigine \mathbf{q} 'nin *en çok olabilirlik tahmin edicisi* (*maximum likelihood estimator, MLE*) denir.

Teorem 2.2. $X_1, X_2, \dots, X_n, f(x, \mathbf{q}), \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^r$ dagilimından alınmış örneklem olmak üzere $\mathbf{f}: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}' \subseteq \mathbb{R}^m$ bire-bir fonksiyon olsun. O zaman $\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{q}$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi ise, $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}})$ da $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisidir. (Roussas 1973)

X_1, X_2, \dots, X_n olasılık yogunluk fonksiyonu $f(x, \mathbf{q}), \mathbf{q} \in \Theta$ olan dagilimdan bir örneklem olmak üzere, \mathbf{q} için yansız tahmin edicilerin T sınıfında bir $\mathbf{t}^* \in T$ tahmin edicisi,

$$\text{Var}_{\mathbf{q}}(\mathbf{t}^*) \leq \text{Var}_{\mathbf{q}}(\mathbf{t}), \quad \forall \mathbf{q} \in \Theta, \forall \mathbf{t} \in T \quad (2.17)$$

özelliğine sahipse \mathbf{t}^* tahmin edicisine *düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edici* (*uniformly minimum variance unbiased estimator, UMVUE*) denir (Rohatgi 1976).

Teorem 2.3. (Lehmann-Scheffe Teklik Teoremi) X_1, X_2, \dots, X_n olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, \mathbf{q})$, $\mathbf{q} \in \Theta$ olan dağılımdan bir örneklem ve $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ yeterli ve tam bir istatistik olsun. $U = U(T)$ sonlu varyanslı ve $\mathbf{q} \in \Theta$ için yansız bir tahmin edici ise $\Phi(T) = E(U|T)$ tahmin edicisi yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyanslıdır ve tektir (Lehman ve Scheffe 1950).

2.3.2. Aralık tahmini

X_1, X_2, \dots, X_n , $f(x, \mathbf{q})$, $\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}$ dağılımından alınmış bir örneklem olsun. Rasgele aralık, en az bir sınır noktası rasgele değişken olan sonlu veya sonsuz aralıktır. $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ için $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $L(\underline{x}) \leq U(\underline{x})$ koşulunu sağlayan Borel ölçülebilir iki fonksiyon olmak üzere,

$$[L(X_1, X_2, \dots, X_n), U(X_1, X_2, \dots, X_n)]$$

aralığı aşağıdaki (2.18) eşitsizliğini sağlarsa, \mathbf{q} parametresi için $1 - \mathbf{a}$ ($0 < \mathbf{a} < 1$) anlam seviyeli güven aralığı adını alır.

$$P_{\mathbf{q}}[L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \mathbf{q} \leq U(X_1, X_2, \dots, X_n)] \geq 1 - \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (2.18)$$

Eğer aşağıdaki (2.19) eşitsizliği sağlanırsa $L(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 'e, $1 - \mathbf{a}$ güven seviyeli alt güven limiti denir.

$$P_{\mathbf{q}}[L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \mathbf{q} < \infty] \geq 1 - \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (2.19)$$

Eğer aşağıdaki (2.20) eşitsizliği sağlanırsa $U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 'e, $1 - \mathbf{a}$ güven seviyeli üst güven limiti denir.

$$P_{\mathbf{q}}[-\infty < \mathbf{q} \leq U(X_1, X_2, \dots, X_n)] \geq 1 - \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (2.20)$$

Güven aralığının, q parametresinin çok boyutlu olması durumunda genelleştirilmesi, *güven bölgesi* olarak adlandırılır (Roussas 1973).

2.4. Sistem Güvenilirliği

Sistem, belirli girdileri olan ve bunları işleyerek çıktı veren elemanlar topluluğudur. Bazı durumlarda bir tek eleman bir sistem olarak, bazı durumlarda da birbirleriyle etkileşimli alt sistemlerin oluşturduğu bir bütün bir tek sistem olarak düşünülmektedir. Milli eğitim sistemi, birbirleri ile etkileşimli ve birbirinden farklı yapıda olan birçok alt sistemin bir bütünü olarak ele alınabilir. Belli bir okul tek basına bir sistem olduğu gibi bu okulda belli bir sınıf da tek basına bir sistemdir. Bu okulda bulunan bir kantin de bir sistemdir. Bir sistemi incelemedeki amaç, sistemin davranışını öğrenmek, sistemi denetlemek, sistemi yenilemek olabilir (Öztürk ve Özbek 2004).

Belli bir işlevi olan bir sistemin veya bir bileşenin ömrü sonludur. Ömür, örneğin elektronik parçalarda dayanma süresi, canlılarda yaşam süresi olmak üzere, zaman olarak ölçüldüğünde sürekli bir rasgele değişken olarak ele alınabilir. Dayanma (yaşam) süresi, yani bozuluncaya kadar geçen zaman T olmak üzere,.

$$\bar{F}(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = \exp\left\{-\int_0^t h(t)dt\right\}, \quad t \geq 0 \quad (2.21)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *güvenilirlik fonksiyonu* veya *sistemin güvenilirliği*

ve $h(t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \frac{d\bar{F}(t)}{dt}$ fonksiyonuna ise *bozulma oranı* veya *hazard oranı* denir

(Srinath 2002).

2.5. Özel Fonksiyonlar

2.5.1. Gamma fonksiyonu

Gamma fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{G}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n} = \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt, \quad x > 0 \quad (2.22)$$

Burada

$$(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad n > 0, (x)_0 = 1, x \in \mathbb{R}^+ \quad (2.23)$$

dir. $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için

$$\mathbf{G}(x+1) = x\mathbf{G}(x) \quad (2.24)$$

ve

$$\mathbf{G}(2x) = (2p)^{-1/2} 2^{2x-1/2} \mathbf{G}(x) \mathbf{G}(x+1/2) \quad (2.25)$$

biçimindedir. Stirling formülü ise,

$$\mathbf{G}(x) \sim \exp(-x) x^{x-1/2} (2p)^{1/2}, \quad x \rightarrow \infty \quad (2.26)$$

olarak yazılır (Andrews ve ark. 1999). Tam olmayan Gamma fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir (Gradshteyn ve Ryzhik 2000).

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, x) = \int_0^x t^{\mathbf{a}-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\mathbf{a}+n}}{n!(\mathbf{a}+n)}, \quad \mathbf{a} > 0 \quad (2.27)$$

2.5.2. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon

$$F_{p,q}(\mathbf{n}, \mathbf{d}, r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k \prod_{i=1}^p \Gamma(n_i + k) \Gamma^{-1}(n_i)}{\Gamma(k+1) \prod_{i=1}^q \Gamma(d_i + k) \Gamma^{-1}(d_i)}. \quad (2.28)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_p]$, $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_q]$ dir. Özel olarak $p = 2, q = 1$ için hipergeometrik fonksiyon

$$\begin{aligned} F_{2,1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{h}; z) &= \frac{\Gamma(\mathbf{h})}{\Gamma(\mathbf{b})\Gamma(\mathbf{h}-\mathbf{b})} \int_0^1 \frac{t^{\mathbf{b}-1} (1-t)^{\mathbf{h}-\mathbf{b}-1}}{(1-tz)^{\mathbf{a}}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \Gamma(\mathbf{a}+k) \Gamma(\mathbf{b}+k) \Gamma^{-1}(\mathbf{a}) \Gamma^{-1}(\mathbf{b})}{\Gamma(k+1) \Gamma(\mathbf{h}+k) \Gamma^{-1}(\mathbf{h})} \end{aligned} \quad (2.29)$$

şeklindedir (Gradshteyn ve Ryzhik 2000).

2.5.3. Beta fonksiyonu

Beta fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$B(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_0^1 t^{\mathbf{a}-1} (1-t)^{\mathbf{b}-1} dt = \frac{\mathbf{G}(\mathbf{a})\mathbf{G}(\mathbf{b})}{\mathbf{G}(\mathbf{a}+\mathbf{b})}, \quad \mathbf{a} > 0, \mathbf{b} > 0 \quad (2.30)$$

Tam olmayan Beta fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir (Gradshteyn ve Ryzhik 2000).

$$\begin{aligned} I_x(p, q) &= [B(p, q)]^{-1} \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \\ &= \frac{x^p}{p} F_{2,1}(p, 1-q; p+1; x), \quad p > 0, q > 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.6. Bazi Dagilimler

Bu bölümde, tezde ele alınan dagilimlerin olasilik yogunluk, dagilim ve yasam (güvenilirlik) fonksiyonlari ile hazard orani, beklenen deger ve varyanslari verilmistir.

2.6.1. Tek Parametrelili Üstel Dagilim

X rasgele degiskeni, I parametrelili üstel dagilima sahip ise, sirasiyla, olasilik yogunluk, dagilim ve yasam fonksiyonu,

$$f(x) = I \exp(-Ix), \quad x > 0, I > 0 \quad (2.32)$$

$$F(x) = 1 - \exp(-Ix) \quad (2.33)$$

$$\bar{F}(x) = \exp(-Ix) \quad (2.34)$$

seklindedir. Üstel dagilimin bozulma orani fonksiyonu, $h(x) = I^{-1}$ olup bozulma orani sabit olan tek dagilimdir. Beklenen deger ve varyansi, sirasiyla,

$$EX = 1/I \quad (2.35)$$

$$Var(X) = 1/I^2 \quad (2.36)$$

biçimindedir. I parametrelili üstel dagilim için $\bar{U}_{stel}(I)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.6.2. Burr XII dagilimi

Biyolojik, klinik ve diger deneysel verilere iyi uyum göstermesi bakımından ilk olarak Burr (1942) tarafından önerilen ve $BurrXII(I, \mathbf{b})$ ile gösterilecek olan iki-parametrelili Burr XII dagilimi son 20 yıldır özel bir ilgi görmüştür. Zimmer ve ark.

(1998), Burr XII dagiliminin, güvenilirlik analizinde kullanilmasi hakkında genis bilgi vermis ve bozulma zamani verilerini modellemede çok kullanisli olduguna dikkat çekmişlerdir. Burr XII dagilimi ayni zamanda kalite kontrol, güvenilirlik çalışmalari, sigortacilik alanlarına da uygulanabilir. Bu konularda uygulama içeren yayınlanmış makaleler: Is yeri iflasi (Lomax 1954), klinik denemeler (Wingo 1983), aktüerya bilimi (Klugman 1986) ve elektrik bileşenleri (Zimmer ve ark. 1998) olarak sıralanabilir.

BurrXII(\mathbf{I}, \mathbf{b}) dagilimına sahip bir X rasgele degiskeninin, sirasiyla, olasilik yogunluk, dagilim ve yasam fonksiyonu,

$$f(x) = \mathbf{bI}x^{b-1}(1+x^b)^{-(I+1)}, \quad x > 0, \mathbf{b} > 0, \mathbf{I} > 0 \quad (2.37)$$

$$F(x) = 1 - (1+x^b)^{-I} \quad (2.38)$$

$$\bar{F}(x) = (1+x^b)^{-I} \quad (2.39)$$

seklindedir. Hazard (bozulma) orani

$$h(x) = \mathbf{Ib}x^{b-1}(1+x^b)^{-1} \quad (2.40)$$

dir.

Burr XII dagiliminin beklenen deger ve varyansi, sirasiyla,

$$E(X) = \mathbf{I}B(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}, 1 + \mathbf{b}^{-1}), \quad \mathbf{bI} > 1 \quad (2.41)$$

$$Var(X) = \mathbf{I} \left\{ \mathbf{I}B(\mathbf{I} - 2\mathbf{b}^{-1}, 1 + 2\mathbf{b}^{-1}) - B^2(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}, 1 + \mathbf{b}^{-1}) \right\}, \quad \mathbf{bI} > 2 \quad (2.42)$$

biçimindedir. Burada $B(a, b)$, (2.30) esitliginde tanımlanan beta fonksiyonudur (Tadimakalla 1980).

2.6.3. Burr III dagilimi

X , (c, k) parametrelili Burr III dagilimina sahip rasgele degisken ise olasilik yogunluk fonksiyonu, dagilim fonksiyonu ve yasam fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{ckx^{ck-1}}{(1+x^c)^{k+1}}, \quad x > 0, c > 0, ck > 1, \quad (2.43)$$

$$F(x) = \left(\frac{x^c}{1+x^c} \right)^k \quad (2.44)$$

$$\bar{F}(x) = 1 - \left(\frac{x^c}{1+x^c} \right)^k \quad (2.45)$$

seklindedir. (c, k) parametrelili Burr III dagilimi için $BurrIII(c, k)$ gösterimi kullanılacaktır. Burr III dagiliminin beklenen deger ve varyansi, sirasiyla,

$$E(X) = kB(1-c^{-1}, k+c^{-1}), \quad ck > 1 \quad (2.46)$$

$$Var(X) = k\{B(1-2c^{-1}, k+2c^{-1}) - B^2(1-c^{-1}, k+c^{-1})\}, \quad ck > 1, c > 2 \quad (2.47)$$

biçimindedir.

2.6.4. Gamma dagilimi

X rasgele degiskeni, (I, b) parametrelili Gamma dagilimina sahip ise olasilik yogunluk fonksiyonu asagidaki biçimdedir.

$$f(x) = \mathbf{b}^I \{\Gamma(I)\}^{-1} x^{I-1} \exp(-bx) \quad , \quad x > 0 \quad , \quad I > 0 \quad , \quad b > 0 \quad (2.48)$$

Beklenen deger ve varyansi, sirasiyla,

$$E(X) = 1 / b \quad (2.49)$$

$$Var(X) = 1 / b^2 \quad (2.50)$$

seklindedir. $(1, b)$ parametrelili Gamma dagilimi için $Gamma(1, b)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.6.5. Ki-kare dagilimi

X rasgele degiskeni, r serbestlik dereceli Ki-kare dagilimine sahip ise olasilik yogunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \left\{ \Gamma(r/2) 2^{r/2} \right\}^{-1} x^{r/2} \exp(-x/2) \quad , \quad x > 0 \quad , \quad r > 0 \quad (2.51)$$

seklindedir. Ki-kare dagiliminin beklenen deger ve varyansi, sirasiyla,

$$E(X) = r \quad (2.52)$$

$$Var(X) = 2r \quad (2.53)$$

biçimindedir. Ki-kare dagilimi için $\chi^2(r)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.6.6. F dagilimi

X rasgele degiskeni, (r_1, r_2) serbestlik dereceli F dagilima sahip ise olasilik yogunluk fonksiyonu asagidaki gibidir.

$$f(x) = \frac{\mathbf{G}[(r_1 + r_2)2^{-l}](r_1/r_2)^{r_1/2}}{\mathbf{G}\left(\frac{r_1}{2}\right)\mathbf{G}\left(\frac{r_2}{2}\right)} x^{r_1/2-l} [1 + (r_1 r_2^{-l})x]^{-(r_1+r_2)/2}, x > 0, r_1 > 0, r_2 > 0$$

(2.54)

Beklenen deger ve varyansi, sirasiyla,

$$E(X) = r_2(r_2 - 2)^{-1}, r_2 > 2$$

(2.55)

$$Var(X) = 2r_2^2 [1 + (r_2 - 2)r_1^{-1}](r_2 - 2)^{-2}(r_2 - 4)^{-1}$$

(2.56)

biçimindedir. (r_1, r_2) serbestlik dereceli F dagilimi için F_{r_1, r_2} gösterimi kullanılacaktır.

2.6.7. Beta dagilimi

X rasgele degiskeni, (\mathbf{I}, \mathbf{b}) parametrelili Beta dagilimine sahip ise olasilik yogunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{b})\mathbf{G}^{-l}(\mathbf{I})\mathbf{G}^{-l}(\mathbf{b})x^{\mathbf{I}-l}(1-x)^{\mathbf{b}-l}, 0 < x < 1, \mathbf{I} > 0, \mathbf{b} > 0$$

(2.57)

biçimindedir. Beta dagiliminda $\mathbf{I} = 1$ ve $\mathbf{b} = 1$ alinirsa $Düzgün(0,1)$ dagilimi elde edilir. Beta dagiliminin beklenen deger ve varyansi, sirasiyla,

$$E(X) = \mathbf{I}(\mathbf{I} + \mathbf{b})^{-1}$$

(2.58)

$$Var(X) = \mathbf{I}\mathbf{b}(\mathbf{I} + \mathbf{b})^{-2}(\mathbf{I} + \mathbf{b} + 1)^{-1}$$

(2.59)

seklindedir. (\mathbf{I}, \mathbf{b}) parametrelili Beta dagilimi için $Beta(\mathbf{I}, \mathbf{b})$ gösterimi kullanılacaktır.

2.7. O, o Gösterimleri

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $x \rightarrow l, l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ için $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M$

olacak şekilde en az bir $M \in \mathbb{R}^+$ varsa bu durum $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow l$ biçiminde gösterilir. Eğer $\lim_{x \rightarrow l} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ oluyorsa bu durum $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow l$ biçiminde gösterilir (Serfling 1980).

2.8. Taylor Serileri

2.8.1. Tek değişkenli fonksiyonlar için Taylor serisi

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında n . mertebeden türevi $f^{(n)}$ olmak üzere $[a, b]$ 'nin keyfi x_0 ve $x > x_0$ noktaları için

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \quad (2.60)$$

açılımına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki *Taylor serisi* denir. Burada

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \mathbf{q}(x - x_0)) (1 - \mathbf{q})^n (x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \mathbf{q} < 1 \quad (2.61)$$

veya

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0 \quad (2.62)$$

seklindedir (Shahbazov 2005).

2.8.2. İki degiskenli fonksiyonlar için Taylor serisi

$z = f(x, y)$ kapalı bir bölgede n . mertebeden sürekli ve açık bölgede $(n+1)$. mertebeden türevli ise bölgenin bir (a, b) noktası komsulugunda iki degiskenli fonksiyonlar için Taylor formülü

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} [f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)] \\ &+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2] \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{n!} \left[(x-a) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]_{x=a, y=b}^n + R_n(x, y) \end{aligned} \quad (2.63)$$

seklindedir. Burada R_n ,

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]_{x=a, y=b}^{n+1} f(a + \mathbf{q}(x-a), b + \mathbf{q}(y-b)) \quad (2.64)$$

biçiminde tanımlanır ve Lagrange kalani olarak adlandırılır (Berksoy ve Özkan 2001).

2.9. Newton-Raphson Yöntemi

$f(x)=0$ denkleminin bir kökünün bulunması için kullanılan iteratif yöntemlerden biridir. $f(x)$ sürekli ve türevlenebilen fonksiyonunun bilinen yaklaşık bir kökü x_n olsun. $f(x_n + h)$ fonksiyonu x_n civarında ikinci mertebeye kadar Taylor serisine açılırsa;

$$f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} f''(x_n), \quad \mathbf{x} \in (x_n, x_n + h) \quad (2.65)$$

yazilabilir. $x_n + h = x_{n+1}$ degerinin gercek köke çok yakin oldugu yani $f(x_n + h)$ ' in hemen hemen sifir oldugu düşünülürse,

$$0 = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} f''(x_n), \quad \mathbf{x} \in (x_n, x_n + h) \quad (2.66)$$

yazilir. Sayet h yeterince küçük ise h^2 'yi içeren terim ve sonraki terimler ihmal edilebilir. Böylece

$$f(x_n) + hf'(x_n) = 0 \quad (2.67)$$

veya

$$h = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.68)$$

olarak elde edilir. Eger $h = x_{n+1} - x_n$ oldugu göz önüne alinirsa asagidaki iterasyon denkleminde ulasilir.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.69)$$

Newton – Raphson yöntemi geometrik olarak incelenecek olursa $f(x) = 0$ denkleminin baslangiç yaklasik kökü x_0 olmak üzere fonksiyonun $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki tegetinin denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.70)$$

olarak yazilabilir. Bu tegetin x eksenini kestigi nokta ilk kök yaklasimi olur ve

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.71)$$

elde edilir. Bu şekilde ardışık yaklaşımlar kullanılarak, gerçek köke ulaşılır (Oturanç ve ark).

2.10. Fisher Informasyonu

$\mathfrak{S} = \{f(·; \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in \Theta \subset \mathfrak{R}\}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının bir ailesi olmak üzere düzgünlük şartları adı verilen aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa \mathfrak{S} ailesine *düzgün (regüler)* aile denir.

a) f 'nin $D_f = \{x \in \mathfrak{R} : f(x; \mathbf{q}) > 0, \mathbf{q} \in \mathbf{Q}\}$ destek kümesi \mathbf{q} 'ya bağlı değil,

b) Θ parametre uzayı \mathfrak{R} 'de bir açık aralık,

c) Her $\mathbf{q} \in \Theta$ için f fonksiyonu destek kümesinin hemen hemen her noktasında \mathbf{q} 'ya göre türevlenebilir,

d) $I(\mathbf{q}) = E \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \ln f(X; \mathbf{q}) \right]^2$ değeri, sıfırdan büyük ve sonlu,

e) $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \int_{D_f} f(x; \mathbf{q}) dx = \int_{D_f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} f(x; \mathbf{q}) dx$ (kesikli dağılımlarda \sum kullanılır).

$n \geq 1$ için X_1, X_2, \dots, X_n 'ler regüler bir $\mathfrak{S} = \{f(·; \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in \mathbf{Q} \subset \mathfrak{R}\}$ ailesinin elemanı olan $f_X(·; \mathbf{q})$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna sahip dağılımdan bir örneklem olmak üzere,

$$S_f(X_1, X_2, \dots, X_n; \mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \ln \left(\prod_{i=1}^n f_X(X_i; \mathbf{q}) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \ln f_X(X_i; \mathbf{q}) \quad (2.72)$$

rasgele degiskenine skor fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 I_n(\mathbf{q}) &= \text{Var}(S_f(X_1, X_2, \dots, X_n; \mathbf{q})) = nE \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \ln f(X_i; \mathbf{q}) \right]^2 \\
 &= -nE \left[\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} \ln f(X_i; \mathbf{q}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.73}$$

degerine örneklemdaki Fisher informasyonu denir. Parametrenin vektör, yani $\underline{\theta} \in \mathbf{Q} \subset \mathbb{R}^r$ olması durumunda skor fonksiyonu,

$$S_f(X_1, X_2, \dots, X_n; \mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \ln \left(\prod_{i=1}^n f_X(X_i; \mathbf{q}) \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_1} \ln \left(\prod_{i=1}^n f_X(X_i; \mathbf{q}) \right) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_2} \ln \left(\prod_{i=1}^n f_X(X_i; \mathbf{q}) \right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_r} \ln \left(\prod_{i=1}^n f_X(X_i; \mathbf{q}) \right) \end{bmatrix}
 \tag{2.74}$$

biçimindedir. $f_X(X_i; \mathbf{q}) = f_X$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 I_n(\mathbf{q}) &= \text{Cov}(S_f(X_1, X_2, \dots, X_n; \mathbf{q})) \\
 &= -nE \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_1^2} \ln(f_X) & \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_1 \partial \mathbf{q}_2} \ln(f_X) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_1 \partial \mathbf{q}_r} \ln(f_X) \\ \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_2 \partial \mathbf{q}_1} \ln(f_X) & \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_2^2} \ln(f_X) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_2 \partial \mathbf{q}_r} \ln(f_X) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_r \partial \mathbf{q}_1} \ln(f_X) & \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_r \partial \mathbf{q}_2} \ln(f_X) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_r^2} \ln(f_X) \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.75}$$

matrisine Fisher informasyon matrisi denir. Mevcut olması halinde $I_n(\mathbf{q})$ Fisher informasyon matrisi pozitif tanımlı matristir (Öztürk ve ark. 2006).

3. STRES-DAYANIKLILIK MODELLERİNDE BAZI DAGILIMLAR İÇİN SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİ VE TAHMİNİ

Bu bölümde, bazı dağılımlar için, stres-dayanıklılık modellerinde sistem güvenilirliği ve tahmini konusu, daha önceki yıllarda yapılan çalışmalardan derlenmiştir.

Tek parametrelili üstel dağılım için sistem güvenilirliğini, ML ve UMVU tahmin edicilerini Tong (1974), aynı dağılıma ilişkin bu tahmin edicilerin yan ve MSE 'sini Chao (1982) ve sistem güvenilirliği için tam güven aralıklarını da Enis ve Geisser (1971) 'de çalışmışlardır. Gamma dağılımına ilişkin, sistem güvenilirliği için ML ve UMVU tahmin edicileri, tam güven aralıkları Constantine ve ark. (1986) tarafından bulunmuştur. Burr III dağılımına ilişkin, sistem güvenilirliği için ML ve UMVU tahmin edicileri ve tam güven aralıkları Mokhlis (2005) tarafından bulunmuştur. Burr XII dağılımına ilişkin, sistem güvenilirliği için ML ve UMVU tahmin edicileri ve tam güven aralıkları Awad ve Gharraf (1986) tarafından bulunmuştur.

3.1. Tek Parametrelili Üstel Dağılım İçin Sistem Güvenilirliği

X ve Y sırasıyla $Üstel(\mathbf{a})$ ve $Üstel(\mathbf{b})$ dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere (2.32) ve (2.33) eşitlikleri kullanılarak sistem güvenilirliği

$$R = P(Y < X) = \int_0^{\infty} F_Y(t) f_X(t) dt = \int_0^{\infty} (1 - e^{-bt}) a e^{-at} dt = \frac{b}{a + b} \quad (3.1)$$

biçiminde bulunur.

3.1.1. Sistem güvenilirliği için en çok olabilirlik tahmin edicisi (MLE)

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ ve $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ sırasıyla $\text{Üstel}(\mathbf{a})$ ve $\text{Üstel}(\mathbf{b})$ dağılımından alınan bağımsız rasgele vektörler, $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$ ve $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$ olmak üzere \underline{X} ve \underline{Y} 'nin olabilirlik fonksiyonu ve logaritması,

$$L = \mathbf{a}^{n_1} \mathbf{b}^{n_2} \exp(-\mathbf{a}n_1\bar{x} - \mathbf{b}n_2\bar{y}) \quad (3.2)$$

$$\ln L = n_1 \ln(\mathbf{a}) + n_2 \ln(\mathbf{b}) - \mathbf{a}n_1\bar{x} - \mathbf{b}n_2\bar{y} \quad (3.3)$$

biçimindedir. \mathbf{a} ve \mathbf{b} 'nin MLE 'leri, (3.3) eşitliğindeki $\ln L$ 'yi en büyük yapan \mathbf{a} ve \mathbf{b} değerleridir. Buna göre $\ln L$ 'nin sırasıyla \mathbf{a} ve \mathbf{b} parametrelerine göre türevlerinin alınıp 0 'a eşitlenmesi sonucunda,

$$\frac{n_1}{\mathbf{a}} - n_1\bar{x} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{n_2}{\mathbf{b}} - n_2\bar{y} = 0 \quad (3.5)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözülmesi sonucunda \mathbf{a} ve \mathbf{b} için MLE 'ler, $\hat{\mathbf{a}} = 1/\bar{X}$ ve $\hat{\mathbf{b}} = 1/\bar{Y}$ elde edilir. MLE 'nin invariyantlık özelliği kullanılarak R 'nin MLE 'si,

$$\hat{R}_{MLE} = \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{b}}} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + \bar{Y}} \quad (3.6)$$

olarak bulunur (Tong 1974).

Sistem güvenilirliğinin MLE 'sinin MSE ve yaninin bulunması problemini Chao (1982), asagidaki yöntemi kullanarak çözmüştür.

$n_1 = n_2 = n$ için MLE 'nin yan ve MSE 'sinin yaklasik olarak elde edilmesi için ilk olarak $\mathbf{b} = 1$ ve \mathbf{a} 'nin bilinmediği durum ele alınmıştır. $f(x) = x/(1+x)$ olmak üzere $\hat{R}_{MLE} - R$ 'nin $1/\mathbf{a}$ etrafında Taylor serisine açılımı,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{MLE} - R &= f(\bar{X}) - f(1/\mathbf{a}) = \frac{\bar{X}}{\bar{X}+1} - \frac{1}{1+\mathbf{a}} \\ &= \sum_{i=1}^8 (f^{(i)}(x))_{x=1/\mathbf{a}} \frac{(\bar{X}-1/\mathbf{a})^i}{i!} + r_8 - \frac{1}{1+\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

seklindedir. Burada $f(x)$ 'in i . dereceden türevi ve arta kalan terim, sirasiyla,

$$f^{(i)}(x) = (-1)^{i+1} i! (1+x)^{-(i+1)} \quad (3.8)$$

$$r_8 = (f^{(9)}(x))_{x=1/\mathbf{a}} \frac{(\bar{X}-1/\mathbf{a})^9}{9!} + \dots \quad (3.9)$$

biçimindedir. $\bar{X} - 1/\mathbf{a}$ 'nin momentleri ise Maple 9.5 programından,

$$E(\bar{X} - 1/\mathbf{a}) = 0,$$

$$E(\bar{X} - 1/\mathbf{a})^2 = \frac{1}{\mathbf{a}^2} n^{-1},$$

$$E(\bar{X} - 1/\mathbf{a})^3 = \frac{2}{\mathbf{a}^3} n^{-2},$$

$$E(\bar{X} - 1/\mathbf{a})^4 = \frac{3}{\mathbf{a}^4} n^{-2} + \frac{6}{\mathbf{a}^4} n^{-3} = \frac{3(n+2)}{\mathbf{a}^4 n^3},$$

$$\begin{aligned}
E(\bar{X} - 1/\mathbf{a})^5 &= \frac{20}{\mathbf{a}^5}n^{-3} + \frac{24}{\mathbf{a}^5}n^{-4} = \frac{4(5n+6)}{\mathbf{a}^5n^4}, \\
E(\bar{X} - 1/\mathbf{a})^6 &= \frac{15}{\mathbf{a}^6}n^{-3} + \frac{130}{\mathbf{a}^6}n^{-4} + \frac{120}{\mathbf{a}^6}n^{-5} = \frac{5(3n^2 + 26n + 24)}{\mathbf{a}^6n^5} \\
E(\bar{X} - 1/\mathbf{a})^7 &= \frac{210}{\mathbf{a}^7}n^{-4} + \frac{924}{\mathbf{a}^7}n^{-5} + \frac{720}{\mathbf{a}^7}n^{-6} = \frac{6(120 + 154n + 35n^2)}{\mathbf{a}^7n^6} \\
E(\bar{X} - 1/\mathbf{a})^8 &= \frac{105}{\mathbf{a}^8}n^{-4} + \frac{2380}{\mathbf{a}^8}n^{-5} + \frac{7308}{\mathbf{a}^8}n^{-6} + \frac{5040}{\mathbf{a}^8}n^{-7} \\
&= \frac{7(720 + 1044n + 15n^3 + 340n^2)}{\mathbf{a}^7n^6} \\
E(r_8) &= \frac{362880\mathbf{a}^{10}}{(\mathbf{a}+1)^{10}} \frac{8(5040 + 8028n + 315n^3 + 3304n^2)}{\mathbf{a}^9n^8} = O(n^{-5})
\end{aligned} \tag{3.10}$$

sekinde elde edilir. (3.7) esitliginin her iki tarafinin beklenen degeri alinip (3.10)'daki momentler kullanilirsa,

$$\begin{aligned}
Yan = E(\hat{R}_{MLE}) - R &= \frac{-(1/\mathbf{a})^2}{(1+1/\mathbf{a})^3}n^{-1} + \frac{2(1/\mathbf{a})^3 - (1/\mathbf{a})^4}{(1+1/\mathbf{a})^5}n^{-2} \\
&+ \frac{-6(1/\mathbf{a})^4 + 8(1/\mathbf{a})^5 - (1/\mathbf{a})^6}{(1+1/\mathbf{a})^7}n^{-3} \\
&+ \frac{24(1/\mathbf{a})^5 - 58(1/\mathbf{a})^6 + 22(1/\mathbf{a})^7 - (1/\mathbf{a})^8}{(1+1/\mathbf{a})^9}n^{-4} \\
&+ O(n^{-5})
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.7) esitliginin her iki tarafinin karesinin beklenen degerinin alınmasi sonucunda $f^{(i)} = (f^{(i)}(x))_{x=1/\mathbf{a}}$ olmak üzere R için yaklasik MSE, asagidaki sekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{R}_{MLE}) &= E\left\{\left(\hat{R}_{MLE} - R\right)^2\right\} \\
&= (f^{(1)})^2 E\left\{\left(\bar{X} - 1/\mathbf{a}\right)^2\right\} + (f^{(1)} f^{(2)}) E\left\{\left(\bar{X} - 1/\mathbf{a}\right)^3\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{(f^{(2)})^2}{4} + \frac{f^{(1)} f^{(3)}}{3}\right\} E\left\{\left(\bar{X} - 1/\mathbf{a}\right)^4\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{f^{(1)} f^{(4)}}{12} + \frac{f^{(2)} f^{(3)}}{6}\right\} E\left\{\left(\bar{X} - 1/\mathbf{a}\right)^5\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{(f^{(3)})^2}{36} + \frac{f^{(1)} f^{(5)}}{60} + \frac{f^{(2)} f^{(4)}}{24}\right\} E\left\{\left(\bar{X} - 1/\mathbf{a}\right)^6\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{f^{(3)} f^{(6)}}{360} + \frac{f^{(2)} f^{(5)}}{120} + \frac{f^{(3)} f^{(4)}}{72}\right\} E\left\{\left(\bar{X} - 1/\mathbf{a}\right)^7\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{(f^{(4)})^2}{576} + \frac{f^{(1)} f^{(7)}}{2520} + \frac{f^{(2)} f^{(6)}}{720} + \frac{f^{(3)} f^{(5)}}{360}\right\} E\left\{\left(\bar{X} - 1/\mathbf{a}\right)^8\right\} + O(n^{-5})
\end{aligned} \tag{3.12}$$

(3.10) 'daki momentlerin (3.12) 'de yerine yazilmasi sonucunda,

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{R}_{MLE}) &= \frac{(1/\mathbf{a})^2}{(1+1/\mathbf{a})^4} n^{-1} + \frac{-4(1/\mathbf{a})^3 + 5(1/\mathbf{a})^4}{(1+1/\mathbf{a})^6} n^{-2} \\
&\quad + \frac{18(1/\mathbf{a})^4 - 44(1/\mathbf{a})^5 + 13(1/\mathbf{a})^6}{(1+1/\mathbf{a})^8} n^{-3} \\
&\quad + \frac{-96(1/\mathbf{a})^5 + 362(1/\mathbf{a})^6 - 248(1/\mathbf{a})^7 + 29(1/\mathbf{a})^8}{(1+1/\mathbf{a})^{10}} n^{-4} \\
&\quad + O(n^{-5})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir.

\mathbf{a} ve \mathbf{b} 'nin bilinmediği durumda ise $g(x, y) = x/(x + y)$ olmak üzere $\hat{R}_{MLE} - R$ 'nin $1/\mathbf{a}$ ve $1/\mathbf{b}$ etrafında Taylor serisine açılımı,

$$\begin{aligned}\hat{R}_{MLE} - R &= g(\bar{X}, \bar{Y}) - f(1/\mathbf{a}, 1/\mathbf{b}) \\ &= \frac{\bar{X}}{\bar{X} + \bar{Y}} - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b} + \mathbf{a}} \\ &= \sum_{i=1}^8 \sum_{j=0}^i \left(\frac{\partial^i g(x, y)}{\partial x^j \partial y^{i-j}} \right)_{x=1/\mathbf{a}, y=1/\mathbf{b}} \frac{(\bar{X} - 1/\mathbf{a})^i (\bar{Y} - 1/\mathbf{b})^{i-j}}{i!(i-j)!} + z_8 - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b} + \mathbf{a}}\end{aligned}\quad (3.14)$$

şeklindedir. Burada

$$z_8 = \sum_{j=0}^9 \left(\frac{\partial^9 g(x, y)}{\partial x^j \partial y^{9-j}} \right)_{x=1/\mathbf{a}, y=1/\mathbf{b}} \frac{(\bar{X} - 1/\mathbf{a})^9 (\bar{Y} - 1/\mathbf{b})^{9-j}}{9!(9-j)!} \quad (3.15)$$

arta kalan terimdir. Maple 9.5 programi yardimiyla gerekli türevler alinip (3.10) 'da bulunan momentlerin de kullanilmasi sonucunda \hat{R}_{MLE} 'nin yani,

$$\begin{aligned}Yan &= E(\hat{R}_{MLE}) - R \\ &= \frac{\mathbf{t}(\mathbf{t}-1)}{(1+\mathbf{t})^3} \left(n^{-1} + \frac{\mathbf{t}^2 - 4\mathbf{t} + 1}{(1+\mathbf{t})^2} n^{-2} + \frac{\mathbf{t}^4 - 14\mathbf{t}^3 + 30\mathbf{t}^2 - 14\mathbf{t} + 1}{(1+\mathbf{t})^4} n^{-3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{t}^6 - 36\mathbf{t}^5 + 207\mathbf{t}^4 - 352\mathbf{t}^3 + 207\mathbf{t}^2 - 36\mathbf{t} + 1}{(1+\mathbf{t})^6} n^{-4} \right) + O(n^{-5})\end{aligned}\quad (3.16)$$

olarak elde edilir.

\hat{R}_{MLE} 'nin MSE 'si ise,

$$MSE(\hat{R}_{MLE}) = \frac{2t^2}{(1+t)^4} n^{-1} + \frac{4t^2(2t-1)(t-2)}{(1+t)^6} n^{-2} + \frac{12t^2(2t^4 - 17t^3 + 32t^2 - 17t + 2)}{(1+t)^8} n^{-3} + O(n^{-4}) \quad (3.17)$$

seklinde bulunur. Burada $t = \mathbf{b} / \mathbf{a}$ 'dir (Chao 1982).

3.1.2. Sistem güvenilirliği için düzgün en küçük varyansli yansız tahmin edici (UMVUE)

Bilindiği gibi $V(\underline{X}, \underline{Y}) = I(Y_1 < X_1)$, R 'nin en basit yansız tahmin edicisidir. R 'nin UMVUE 'si ise Lehman-Scheffe teklik teoremine göre

$$\hat{R}_{UMVUE} = E(I(Y_1 < X_1) | T) = \iint I(y_1 < x_1) f(x_1, y_1 | t) dx_1 dy_1 \quad (3.18)$$

seklindedir. Burada $f(x_1, y_1 | t)$; $T = t$ verildiğinde (X_1, Y_1) 'in kosullu olasilik yogunluk fonksiyonudur. Burada T , yeterli ve tam bir istatistiktir (Kotz ve ark. 2003).

$(X_1, \dots, X_k; Y_1, \dots, Y_k)$ 'nin ortak olasilik yogunluk fonksiyonunun UMVUE 'si elde edilerek de R 'nin UMVUE 'si bulunabilir. $k < \min(m, n)$, T yeterli ve tam bir istatistik ve $\mathbf{q}_0 \in \Theta$, \mathbf{q} 'nin keyfi bir degeri olmak üzere $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ iken $X_j = x_j, Y_j = y_j, j = 1, \dots, k$, verildiğinde T 'nin kosullu yogunluk fonksiyonu $g_{\mathbf{q}_0}(T | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k, Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k)$ ve $T(\underline{X}, \underline{Y})$ 'nin olasilik yogunluk fonksiyonu $g(T | \mathbf{q}_0)$ ise $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k)$ ve R^k 'nin UMVUE 'leri, sirasiyla

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \prod_{j=1}^k f(x_j, y_j | \mathbf{q}_0) \quad (3.19)$$

$$\times \frac{g_{\mathbf{q}_0}(T | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k, Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k)}{g(T | \mathbf{q}_0)}$$

$$\hat{R}_{UMVUE}^k = \int \dots \int \hat{f}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) \prod_{j=1}^k I(y_j < x_j) dx_j dy_j \quad (3.20)$$

biçimindedir. Özel olarak, $k = 1$ alınırsa R 'nin UMVUE'si

$$\hat{R}_{UMVUE} = \iint I(y_1 < x_1) \hat{f}(x_1, y_1 | t) dx_1 dy_1 \quad (3.21)$$

olur (Lumelski ve Spoznikov 1969).

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ ve $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ sırasıyla $\dot{U}stel(\mathbf{a})$ ve $\dot{U}stel(\mathbf{b})$ dağılımından alınan bağımsız örneklemeler olmak üzere \underline{X} ve \underline{Y} 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$f(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbf{a}^{n_1} \mathbf{b}^{n_2} \exp(-\mathbf{a}n_1 \bar{x} - \mathbf{b}n_2 \bar{y}) \quad (3.22)$$

Bu aile üstel aile olduğundan $T_X = \sum_{j=1}^{n_1} X_j$ ve $T_Y = \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$ sırasıyla \mathbf{a} ve \mathbf{b} için yeterli ve tam istatistiktir. T_X ve T_Y rasgele değişkenlerinin sırasıyla $\text{Gamma}(n_1, \mathbf{a})$ ve $\text{Gamma}(n_2, \mathbf{b})$ dağılımına sahip oldukları gösterilebilir. Buna göre T_X ve T_Y 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$g(T_x) = \frac{1}{\mathbf{G}(n_1)} T_x^{n_1-1} \exp(-T_x) \quad , \quad T_x > 0 \quad (3.23)$$

$$g(T_y) = \frac{1}{\mathbf{G}(n_2)} T_y^{n_2-1} \exp(-T_y) \quad , \quad T_y > 0 \quad (3.24)$$

\underline{X} ve \underline{Y} bagimsiz oldugundan

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \hat{f}(x_1, \dots, x_k) \hat{f}(y_1, \dots, y_k) \quad (3.25)$$

olur. Yukarida tanimlanan T_X istatistigi, $T_X = \sum_{j=1}^k X_j + \sum_{j=k+1}^{n_1} X_j$ seklinde yazilabilir. Buna göre, $T_X - \sum_{j=1}^k X_j$ istatistigi $Gamma(n_1 - k, \mathbf{a})$ dagilimina sahip olur ve benzer sekilde $T_Y - \sum_{j=1}^k Y_j$ istatistigi de $Gamma(n_2 - k, \mathbf{b})$ dagilimlidir. Buna göre $f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_k)$ ve $f_{\underline{Y}}(y_1, \dots, y_k)$ 'nin UMVUE 'leri sirasiyla,

$$\hat{f}_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\mathbf{G}(n_1) \left(n_1 \bar{x} - \sum_{j=1}^k x_j \right)^{n_1 - k - 1}}{\mathbf{G}(n_1 - k) n_1^{n_1 - 1} \bar{x}^{n_1 - 1}} I \left(\sum_{j=1}^k x_j \leq n_1 \bar{x} \right) \quad (3.26)$$

$$\hat{f}_{\underline{Y}}(y_1, \dots, y_k) = \frac{\mathbf{G}(n_2) \left(n_2 \bar{y} - \sum_{j=1}^k y_j \right)^{n_2 - k - 1}}{\mathbf{G}(n_2 - k) n_2^{n_2 - 1} \bar{y}^{n_2 - 1}} I \left(\sum_{j=1}^k y_j \leq n_2 \bar{y} \right) \quad (3.27)$$

olur. $k=1$ alınmasi sonucunda (3.26) ve (3.27) esitliklerinin (3.19) 'da yerine yazilmasi sonucunda sistem guvenilirliigi olan R için UMVUE,

$$\hat{R}_{UMVUE} = \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{n_1 n_2 \bar{x}^{n_1 - 1} \bar{y}^{n_2 - 1}} \iint_W \left(\bar{x} - \frac{x}{n_1} \right)^{n_1 - 2} \left(\bar{y} - \frac{y}{n_2} \right)^{n_2 - 2} dy dx \quad (3.28)$$

sekinde elde edilir. Burada

$$W = \left\{ (x, y) : 0 < y < n_2 \bar{y}, 0 < x < n_1 \bar{x}, y < x \right\} \quad (3.29)$$

sekindedir. Bu bolge uzerinden (3.28) denkleminin cozumu,

$$\hat{R}_{UMVUE} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n_1-2} (-1)^i \frac{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)}{\Gamma(n_1-i)\Gamma(n_2+i)} \left(\frac{n_2\bar{Y}}{n_1\bar{X}}\right)^i, & n_2\bar{Y} \leq n_1\bar{X} \\ 1 - \sum_{i=0}^{n_1-1} (-1)^i \frac{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)}{\Gamma(n_1+i)\Gamma(n_2-i)} \left(\frac{n_1\bar{X}}{n_2\bar{Y}}\right)^i, & n_2\bar{Y} > n_1\bar{X} \end{cases} \quad (3.30)$$

sekinde elde edilir (Tong 1974).

3.1.3. Sistem güvenilirliği için güven araliklari

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ ve $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ sirasiyla $\ddot{U}stel(\mathbf{a})$ ve $\ddot{U}stel(\mathbf{b})$ dagilimindan alinan bagimsiz rasgele vektörler olmak üzere $R = \mathbf{b}/(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ için MLE, (3.6) denkleminde elde edilmisti. $n_1\bar{X}$ ve $n_2\bar{Y}$ 'nin dagilimleri sirasiyla $Gamma(n_1, \mathbf{a})$ ve $Gamma(n_2, \mathbf{b})$ olduklarindan $\mathbf{x} = \mathbf{a}n_1\bar{X}$ ve $\mathbf{h} = \mathbf{b}n_2\bar{Y}$ 'nin dagilimleri da sirasiyla $Gamma(n_1, 1)$ ve $Gamma(n_2, 1)$ olur. Buna göre R için tam güven araliginin elde edilebilmesi için

$$U = \frac{\mathbf{a}n_1\bar{X}}{\mathbf{a}n_1\bar{X} + \mathbf{b}n_2\bar{Y}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x} + \mathbf{h}} \quad (3.31)$$

sekinde tanimlanan U rasgele deđiskeninin dagiliminin bulunmasi gerekir. $U = \mathbf{x}/(\mathbf{x} + \mathbf{h})$, $T = \mathbf{h}$ dnsmne karsilik gelen ters dnsmler $\mathbf{x} = UT/(1-U)$, $\mathbf{h} = T$ olur. Bu dnsme iliskin Jakobiyen matrisi ve determinanti, sirasiyla,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial U} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial T} \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial U} & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ (1-U)^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\det(J) = \frac{T}{(1-U)^2} \quad (3.33)$$

biçimindedir. Ayrıca, \underline{X} ve \underline{Y} bağımsız olduklarından \mathbf{x} ve \mathbf{h} da bağımsızdır. Buna göre U ve T 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{U,T}(u,t) &= |\det(J)| f_{\mathbf{x}}(ut/(1-u)) f_{\mathbf{h}}(t) \\ &= e^{-t/(1-u)} \frac{t^{n_1+n_2-1} u^{n_1-1}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)(1-u)^{n_1+1}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

şeklinde elde edilir ve U rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_0^{\infty} f_{U,T}(u,t) dt \\ &= [B(n_1, n_2)]^{-1} u^{n_1-1} (1-u)^{n_2-1}, \quad 0 < u < 1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

olur. Yani, U rasgele değişkeni, n_1 ve n_2 parametrelili Beta dağılımına sahiptir. Burada $B(n_1, n_2)$, (2.30) eşitliğinde tanımlanan beta fonksiyonudur. $0 < a < b$ için,

$$I_x(n_1, n_2) = [B(n_1, n_2)]^{-1} \int_0^x z^{n_1-1} (1-z)^{n_2-1} dz \quad (3.36)$$

biçiminde tanımlanan $I_x(n_1, n_2)$, tam olmayan beta fonksiyonu olmak üzere

$$P(a < U < b) = I_b(n_1, n_2) - I_a(n_1, n_2) \quad (3.37)$$

dir. (3.1) ve (3.6) eşitliklerindeki R ve \hat{R}_{MLE} , (3.31) 'de düzenlenirse

$$U = \left[1 + \frac{n_2 R(1-\hat{R})}{n_1 \hat{R}(1-R)} \right]^{-1} \quad (3.38)$$

elde edilir.

U rasgele degiskeni R 'ye bagli ve dagilimi \mathbf{a} ve \mathbf{b} parametrelerinden bagimsiz oldugundan pivot olma özelligine sahiptir. Sonuç olarak (3.37) 'deki a ve b , verilen bir \mathbf{g} için

$$I_b(n_1, n_2) - I_a(n_1, n_2) = 1 - \mathbf{g} \quad (3.39)$$

ise (3.37) esitligi

$$P\left(a < \left[1 + \frac{n_2 R(1 - \hat{R})}{n_1 \hat{R}(1 - R)}\right]^{-1} < b\right) = 1 - \mathbf{g} \quad (3.40)$$

biçiminde yazilabilir. (3.40) 'daki esitlik düzenlenirse,

$$P\left(\frac{(1-b)n_1 \hat{R}_{MLE}}{(1-b)n_1 \hat{R}_{MLE} + bn_2(1 - \hat{R}_{MLE})} < R < \frac{(1-a)n_1 \hat{R}_{MLE}}{(1-a)n_1 \hat{R}_{MLE} + an_2(1 - \hat{R}_{MLE})}\right) = 1 - \mathbf{g} \quad (3.41)$$

olur (Enis ve Geisser 1971). (3.41) 'deki tam güven araligi n_1 ve n_2 'nin küçük veya büyük her deger için geçerlidir. Burada $(b-a)$ 'yi en küçük yapan a ve b degerleri (3.39) esitliginden belirlenir.

3.2. Gamma Dagilimi İçin Sistem Güvenilirliği

X bir bilesenin dayanikliligi ve Y bilesene etki eden stres olmak üzere X ve Y rasgele degiskenleri sirasiyla (r_1, I_1) ve (r_2, I_2) parametrelili Gamma dagilimina sahip bagimsiz rasgele degiskenler olsun. Bu durumda sistem güvenilirliği,

$$\begin{aligned}
R &= P(Y < X) = P[(X/Y) > 1] = P[(XI_1)/(YI_2) > (I_1/I_2)] \\
&= P[1 + (XI_1/YI_2) > 1 + (I_1/I_2)] \\
&= P[(YI_2 + XI_1)/(YI_2) > 1 + (I_1/I_2)] \quad (3.42) \\
&= P[(YI_2)/(YI_2 + XI_1) < [1 + (I_1/I_2)]^{-1}] \\
&= P(U < \mathbf{r})
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $U = (YI_2)/(YI_2 + XI_1)$ ve $\mathbf{r} = [1 + I_1/I_2]^{-1}$ şeklindedir. XI_1 ve YI_2 rasgele değişkenlerinin dağılımlarının sırasıyla $Gamma(r_1,1)$ ve $Gamma(r_2,1)$ olduğu ve bu durumda U rasgele değişkeninin dağılımının da $Beta(r_2, r_1)$ dağılımına sahip olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durumda U rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_U(u) = [B(r_2, r_1)]^{-1} u^{r_2-1} (1-u)^{r_1-1}, \quad 0 < u < 1 \quad (3.43)$$

şeklindedir. Burada $B(r_2, r_1)$, (2.30) eşitliğinde tanımlanan beta fonksiyonudur. Buna göre (3.42) eşitliği,

$$R = P(U < \mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} [B(r_2, r_1)]^{-1} u^{r_2-1} (1-u)^{r_1-1} du \quad (3.44)$$

olarak yazılabilir. (3.44) integralinde

$$(1-u)^{r_1-1} = \sum_{i=0}^{r_1-1} (-1)^i \binom{r_1-1}{i} u^i \quad (3.45)$$

biçimindeki binom açılımı kullanılırsa, güvenilirlik,

$$\begin{aligned}
R &= [B(r_2, r_1)]^{-1} \sum_{i=0}^{r_1-1} (-1)^i \binom{r_1-1}{i} \int_0^r u^{r_2+i-1} du \\
&= [B(r_2, r_1)]^{-1} \sum_{i=0}^{r_1-1} (-1)^i \binom{r_1-1}{i} \frac{r^{r_2+i}}{r_2+i}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

sekinde bulunur (Constantine ve ark. 1986). Alternatif olarak R asagidaki sekilde de bulunabilir.

$$R = P(Y < X) = P\left(\frac{\mathbf{I}_2 Y}{\mathbf{I}_1 X} < \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right) = P(U < \mathbf{h}) \tag{3.47}$$

Burada $U = \mathbf{I}_2 Y / (\mathbf{I}_1 X)$ ve $\mathbf{h} = \mathbf{I}_2 / \mathbf{I}_1$ 'dir. $2\mathbf{I}_2 Y$ ve $2\mathbf{I}_1 X$ rasgele degiskenlerinin dagilimlarinin sirasiyla $2r_2$ ve $2r_1$ serbestlik dereceli ki-kare dagilima sahip olacagindan $\frac{r_1}{r_2} U$ rasgele degiskeni $(2r_2, 2r_1)$ serbestlik dereceli F dagilimina sahip olur. Bu nedenle (3.47) esitligi

$$R = P(U < \mathbf{h}) = P\left(\frac{r_1}{r_2} U < \frac{r_1}{r_2} \mathbf{h}\right) = F_F\left(\frac{r_1}{r_2} \mathbf{h}; 2r_2, 2r_1\right) \tag{3.48}$$

biçiminde yazilabilir. Burada $F_F(\cdot; 2r_2, 2r_1)$, $(2r_2, 2r_1)$ serbestlik dereceli F 'in dagilim fonksiyonudur (Constantine ve ark. 1986).

3.2.1. Sistem güvenilirliği için en çok olabilirlik tahmin edicisi (MLE)

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ ve $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ sirasiyla $Gamma(r_1, \mathbf{I}_1)$ ve $Gamma(r_2, \mathbf{I}_2)$ dagilimindan alinan bagimsiz rasgele örneklemeler (r_1 ve r_2 biliniyor) olmak üzere \underline{X} ve \underline{Y} 'nin olabilirlik fonksiyonu ve logaritmasi,

$$L = \frac{I_1^{mr_1} I_2^{nr_2} \exp\left(-I_1 \sum_{i=1}^m x_i - I_2 \sum_{i=1}^n y_i\right)}{[\Gamma(r_1)]^m [\Gamma(r_2)]^n} \prod_{i=1}^m x_i^{r_1-1} \prod_{i=1}^n y_i^{r_2-1} \quad (3.49)$$

$$\ln L = mr_1 \ln(I_1) + nr_2 \ln(I_2) - I_1 \sum_{i=1}^m x_i - I_2 \sum_{i=1}^n y_i - m \ln \Gamma(r_1) \quad (3.50)$$

$$- n \ln \Gamma(r_2) + \sum_{i=1}^m (r_1 - 1) \ln x_i + \sum_{i=1}^n (r_2 - 1) \ln y_i$$

biçimindedir. $\ln L$ 'nin sirasiyla I_1 ve I_2 parametrelerine göre türevlerinin alinip 0'a esitlenmesi sonucunda I_1 ve I_2 için MLE'ler, $\hat{I}_1 = r_1 / \bar{X}$ ve $\hat{I}_2 = r_2 / \bar{Y}$ elde edilir. Burada $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$ ve $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ biçimindedir. Buna göre MLE'nin invariyantlik özelliginden R 'nin MLE'si,

$$\hat{R}_{MLE} = [B(r_2, r_1)]^{-1} \sum_{i=0}^{r_1-1} (-1)^i \binom{r_1-1}{i} \frac{\hat{\mathbf{r}}^{r_2+i}}{r_2+i} \quad (3.51)$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$\hat{\mathbf{r}} = \left(1 + \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{r_1 \bar{Y}}{r_2 \bar{X}}\right)^{-1} = \frac{r_2 \bar{X}}{r_2 \bar{X} + r_1 \bar{Y}} \quad (3.52)$$

seklindedir. (3.48)'de bulunan R için MLE ise

$$\hat{R}_{MLE} = F_F \left(\frac{r_1}{r_2} \hat{\mathbf{h}}; 2r_2, 2r_1 \right) = F_F \left(\frac{r_1 \hat{I}_2}{r_2 \hat{I}_1}; 2r_2, 2r_1 \right) \quad (3.53)$$

dir. Büyük örneklem durumunda ($n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$), \hat{R}_{MLE} 'nin yani ve MSE'si sirasiyla,

$$E(\hat{R}_{MLE} - R) = \frac{[B(r_2, r_1)]^{-1} (I_1 / I_2)^{r_1}}{2[I + (I_1 / I_2)]^{\eta + r_2 + 1}} \quad (3.54)$$

$$\times \left[\frac{(r_2 - I)(I_1 / I_2) - (r_1 + I)}{mr_1} + \frac{(r_2 + I)(I_1 / I_2) - (r_1 - I)}{nr_2} \right]$$

$$MSE(\hat{R}_{MLE}) = \left\{ [B(r_2, r_1)]^{-1} (I_1 / I_2)^{r_1} [I + (I_1 / I_2)]^{-r_1 - r_2} \right\}^2 \left(\frac{1}{mr_1} + \frac{1}{nr_2} \right) \quad (3.55)$$

biçiminde bulunur (Constantine ve ark. 1986).

3.2.2. Sistem güvenilirliği için düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edici (UMVUE)

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ ve $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ sırasıyla $Gamma(r_1, I_1)$ ve $Gamma(r_2, I_2)$ dağılımından alınan bağımsız rasgele örneklemeler olmak üzere r_1 ve r_2 bilinsin. Gamma dağılımı üstel aileye ait olduğundan $\sum_{i=1}^m X_i$ ve $\sum_{j=1}^n Y_j$, sırasıyla I_1 ve I_2 için yeterli ve tam istatistiktir. $I(Y_1 < X_1)$ indikatör rasgele değişkeni, R için yansızdır. Lehman Scheffe teoremi gereğince

$$\begin{aligned} \hat{R}_{UMVUE} &= E \left[I(Y_1 < X_1) \left| \sum_{i=1}^m X_i = X_T, \sum_{j=1}^n Y_j = Y_T \right. \right] \\ &= P \left[Y_1 < X_1 \left| \sum_{i=1}^m X_i = X_T, \sum_{j=1}^n Y_j = Y_T \right. \right] \\ &= P \left[\frac{Y_1 / \sum_{j=1}^n Y_j < \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sum_{j=1}^n Y_j} \left| \sum_{i=1}^m X_i = X_T, \sum_{j=1}^n Y_j = Y_T \right. \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

olur. $X_1 / \sum_{i=1}^m X_i$ ile $Y_1 / \sum_{j=1}^n Y_j$ bagimsiz ve $\sum_{i=1}^m X_i$ ile $\sum_{j=1}^n Y_j$ bagimsiz oldugundan (3.56) esitligi,

$$\hat{R}_{UMVUE} = P \left[\frac{Y_1 / \sum_{j=1}^n Y_j}{X_1 / \sum_{i=1}^m X_i} < \frac{X_T}{Y_T} \right] = P \left(\frac{U}{V} > \frac{1}{W} \right) \quad (3.57)$$

biçiminde yazilabilir. Burada $W = X_T / Y_T$, $U = X_1 / \sum_{i=1}^m X_i$ ve $V = Y_1 / \sum_{j=1}^n Y_j$ seklindedir. U ve V bagimsiz rasgele degiskenlerinin sirasiyla $Beta(r_1, (m-1)r_1)$ ve $Beta(r_2, (n-1)r_2)$ dagilimina sahip oldugu kolayca gösterilebilir. (3.57) denkleminin çözülebilmesi için gerekli olan $Z = U/V$ rasgele degiskeninin olasilik yogunluk fonksiyonu,

$$f_Z(z) = \begin{cases} A \sum_{i=0}^I (-1)^i \frac{\Gamma(r_1 + r_2 + i)}{\Gamma(nr_2 + r_1 + i)\Gamma(mr_1 - r_1 - i)\Gamma(i+1)} z^{r_1+i-1} & , \quad 0 < z < 1 \\ A \sum_{j=0}^J (-1)^j \frac{\Gamma(r_1 + r_2 + j)}{\Gamma(mr_1 + r_2 + j)\Gamma(nr_2 - r_2 - j)\Gamma(j+1)} z^{-r_2-j-1} & , \quad z > 1 \end{cases} \quad (3.58)$$

olarak bulunur (Constantine ve ark. 1986). Burada,

$$A = \frac{\Gamma(mr_1)\Gamma(nr_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}$$

$$I = (m-1)r_1 - 1 \quad (3.59)$$

$$J = (n-1)r_2 - 1$$

biçimindedir. Sonuç olarak (3.57) denkleminin çözüümü $\frac{I}{w} > I$ olması durumunda,

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{UMVUE} &= P\left(Z > \frac{1}{W}\right) = \int_{1/w}^{\infty} f_Z(z) dz \\
&= \int_{1/w}^{\infty} A \sum_{j=0}^J (-1)^j \frac{\Gamma(r_1 + r_2 + j)}{\Gamma(mr_1 + r_2 + j)\Gamma(nr_2 - r_2 - j)\Gamma(j+1)} z^{-r_2-j-1} dz \\
&= A \sum_{j=0}^J (-1)^j \frac{\Gamma(r_1 + r_2 + j)}{\Gamma(mr_1 + r_2 + j)\Gamma(nr_2 - r_2 - j)\Gamma(j+1)} \frac{w^{r_2+j}}{(r_2 + j)} \quad (3.60)
\end{aligned}$$

olur. $\frac{1}{w} < 1$ olması durumunda ise

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{UMVUE} &= P\left(Z > \frac{1}{W}\right) = \int_{1/w}^1 f_Z(z) dz = 1 - \int_0^{1/w} f_Z(z) dz \\
&= 1 - \int_0^{1/w} A \sum_{i=0}^I (-1)^i \frac{\Gamma(r_1 + r_2 + i)}{\Gamma(nr_2 + r_1 + i)\Gamma(mr_1 - r_1 - i)\Gamma(i+1)} z^{r_1+i-1} dz \\
&= 1 - A \sum_{i=0}^I (-1)^i \frac{\Gamma(r_1 + r_2 + i)}{\Gamma(nr_2 + r_1 + i)\Gamma(mr_1 - r_1 - i)\Gamma(i+1)} \frac{w^{-r_1-i}}{(r_1 + i)} \quad (3.61)
\end{aligned}$$

dir. (3.60) ve (3.61) 'den R için UMVUE

$$\hat{R}_{UMVUE} = \begin{cases} A \sum_{j=0}^J (-1)^j \frac{\Gamma(r_1 + r_2 + j)}{\Gamma(mr_1 + r_2 + j)\Gamma(nr_2 - r_2 - j)\Gamma(j+1)} \frac{W^{r_2+j}}{(r_2 + j)} & , \quad 0 < W \leq 1 \\ 1 - A \sum_{i=0}^I (-1)^i \frac{\Gamma(r_1 + r_2 + i)}{\Gamma(nr_2 + r_1 + i)\Gamma(mr_1 - r_1 - i)\Gamma(i+1)} \frac{W^{-r_1-i}}{(r_1 + i)} & , \quad W > 1 \end{cases} \quad (3.62)$$

şeklinde elde edilir (Constantine ve ark. 1986).

3.1.2. Sistem güvenilirliği için güven aralıkları

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ ve $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ sırasıyla $Gamma(r_1, \mathbf{I}_1)$ ve $Gamma(r_2, \mathbf{I}_2)$ dağılımından alınan bağımsız rasgele örneklemeler olmak üzere R için güven aralığı oluşturmak için (3.53) 'deki \hat{R}_{MLE} dikkate alınmıştır. $\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{I}}_2 / \hat{\mathbf{I}}_1$ ve $\mathbf{h} = \mathbf{I}_2 / \mathbf{I}_1$ olmak üzere,

$$\frac{\hat{\mathbf{h}}}{\mathbf{h}} = \frac{\hat{\mathbf{I}}_2 / \hat{\mathbf{I}}_1}{\mathbf{I}_2 / \mathbf{I}_1} = \frac{(r_2 / \bar{Y}) / (r_1 / \bar{X})}{\mathbf{I}_2 / \mathbf{I}_1} = \frac{nr_2 \mathbf{I}_1 \sum_{i=1}^m X_i}{mr_1 \mathbf{I}_2 \sum_{i=1}^n Y_i} = \frac{2\mathbf{I}_1 \sum_{i=1}^m X_i / 2mr_1}{2\mathbf{I}_2 \sum_{i=1}^n Y_i / 2nr_2} \quad (3.63)$$

şeklinde yazılabilir. $\sum_{i=1}^m X_i$ ve $\sum_{i=1}^n Y_i$ rasgele değişkenlerinin dağılımları sırasıyla $Gamma(mr_1, \mathbf{I}_1)$ ve $Gamma(nr_2, \mathbf{I}_2)$ dağılımlarına sahip olduğundan $\hat{\mathbf{h}} / \mathbf{h}$ pivotunun dağılımının $2mr_1$ ve $2nr_2$ serbestlik dereceli F dağılımına sahip olduğu kolayca gösterilebilir. \hat{R}_{MLE} 'nin dağılımı ise,

$$\begin{aligned} G(s) &= P(\hat{R}_{MLE} \leq s) = P\left[F_F \left(\frac{r_1}{r_2} \hat{\mathbf{h}} ; 2r_2, 2r_1 \right) \leq s \right] \\ &= P\left[\frac{r_1}{r_2} \hat{\mathbf{h}} \leq F_F^{-1}(s ; 2r_2, 2r_1) \right] = P\left[\frac{\hat{\mathbf{h}}}{\mathbf{h}} \leq \frac{r_2}{r_1 \mathbf{h}} F_F^{-1}(s ; 2r_2, 2r_1) \right] \\ G(s) &= F_F \left[\frac{r_2}{r_1 \mathbf{h}} F_F^{-1}(s ; 2r_2, 2r_1) ; 2mr_1, 2nr_2 \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

şeklinde bulunur. O halde $1 - \alpha$ güven katsayısı olmak üzere,

$$\begin{aligned}
1 - \mathbf{a} &= P\left(F_{\mathbf{a}_1, (2m_1, 2nr_2)} \leq \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{h}} \leq F_{\mathbf{a}_2, (2nr_2, 2m_1)}\right) \\
&= P\left[\mathbb{F}\left(\frac{r_1}{r_2} \mathbf{h} F_{\mathbf{a}_1}; 2r_2, 2r_1\right) \leq F_F\left(\frac{r_1}{r_2} \mathbf{h}; 2r_2, 2r_1\right) \leq \mathbb{F}\left(\frac{r_1}{r_2} \mathbf{h} F_{\mathbf{a}_2}; 2r_2, 2r_1\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.65}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ 'dir. O halde R için güven aralığı,

$$\left[\mathbb{F}\left(\frac{r_1}{r_2} \mathbf{h} F_{\mathbf{a}_1}; 2r_2, 2r_1\right), \mathbb{F}\left(\frac{r_1}{r_2} \mathbf{h} F_{\mathbf{a}_2}; 2r_2, 2r_1\right)\right] \tag{3.66}$$

şeklinde elde edilir (Constantine ve ark. 1986).

3.3. Diğer Dağılımlar İçin Sistem Güvenilirliği ve Tahmini

Bu bölümde X stres ve Y dayanıklılık olmak üzere stres-dayanıklılık modellerinde diğer dağılımlar için önceki bölümlerdeki yöntemler kullanılarak $R = P(Y < X)$ güvenilirliği ve tahmini konusunda yapılan çalışmalar yer alacaktır.

3.3.1. Burr III dağılımı için sistem güvenilirliği ve tahmini

X ve Y , sırasıyla (c, k_1) ve (c, k_2) parametrelili Burr III dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olsun. Burr III dağılımına sahip bir rasgele değişkenin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları (2.43) ve (2.44) 'de verilmisti. Bu denklemler kullanılarak sistemin güvenilirliği,

$$R = P(Y < X) = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \tag{3.67}$$

şeklinde bulunur.

$X_i; i=1, \dots, n$ ve $Y_i; i=1, \dots, n$ sirasiyla sirasiyla (c, k_1) ve (c, k_2) parametrelili Burr III dagilimina sahip bagimsiz rasgele degiskenler olmak üzere sistem güvenilirliği için MLE;

$$\hat{R}_{MLE} = \frac{\hat{k}_1}{\hat{k}_1 + \hat{k}_2} \quad (3.68)$$

biçimindedir. Burada

$$\hat{k}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i^{-c})} \quad (3.69)$$

$$\hat{k}_2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 + Y_i^{-c})} \quad (3.70)$$

dir. Sistem güvenilirliği için UMVUE ise (3.18) 'den asagidaki gibi elde edilir.

$$\hat{R}_{UMVUE} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{[(n-1)!]^2}{(n+j-1)!(n-j-1)!} \left(\frac{\hat{k}_2}{\hat{k}_1}\right)^j & , \hat{k}_2 < \hat{k}_1 \\ 1 - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{[(n-1)!]^2}{(n+j-1)!(n-j-1)!} \left(\frac{\hat{k}_1}{\hat{k}_2}\right)^j & , \hat{k}_2 \geq \hat{k}_1 \end{cases} \quad (3.71)$$

Burada \hat{k}_1 ve \hat{k}_2 (3.69) ve (3.70) 'de tanimlanmistir. $T_X = 2k_1 \sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i^{-c})$ ve $T_Y = 2k_2 \sum_{i=1}^n \ln(1 + Y_i^{-c})$ 'nin, $2n$ serbestlik dereceli iki bagimsiz Ki-kare rasgele degiskeni oldugu kolayca gösterilebilir. Ayrica, sistem güvenilirliği için, (3.67), (3.68), (3.69) ve (3.70) esitliklerinin de kullanilmasi sonucunda, $F_1 = k_1 T_X / k_2 T_Y$ pivotu yardimiyla olusturulan güven araligi,

$$\left[F_{(1-a/2)}(2n, 2n) \left(F_{(1-a/2)}(2n, 2n) + \frac{\hat{k}_2}{\hat{k}_1} \right)^{-1}, F_{(a/2)}(2n, 2n) \left(F_{(a/2)}(2n, 2n) + \frac{\hat{k}_2}{\hat{k}_1} \right)^{-1} \right] \quad (3.72)$$

biçiminde bulunur (Mokhlis 2005).

3.3.2. Burr XII dağılımı için sistem güvenilirliği ve tahmini

Burr XII dağılımı için olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları (2.37) ve (2.38) 'de verilmisti. X ve Y , sırasıyla (p, b) ve (a, b) parametrelili Burr XII dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere (2.37) ve (2.38) denklemlerinin kullanılması sonucunda sistem güvenilirliği,

$$R = P(Y < X) = \frac{a}{a + p} \quad (3.73)$$

şeklinde elde edilir.

X_1, \dots, X_n ve Y_1, \dots, Y_m sırasıyla (p, b) ve (a, b) parametrelili Burr XII dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere sistem güvenilirliği için MLE,

$$\hat{R}_{MLE} = \frac{\hat{a}}{\hat{a} + \hat{p}} \quad (3.74)$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\hat{p} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i^b)} \quad (3.75)$$

$$\hat{a} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m \ln(1 + Y_i^b)} \quad (3.76)$$

biçimindedir. Sistem güvenilirliği için UMVUE ise $W_j = \ln(I + X_j^b)$; $j = 1, \dots, n$ ve $V_j = \ln(I + Y_j^b)$; $j = 1, \dots, m$ olmak üzere,

$$\hat{R}_{UMVUE} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m-1+j)!(n-1-j)!} \left(\frac{\sum_{j=1}^m V_j}{\sum_{j=1}^n W_j} \right)^j, & \sum_{j=1}^m V_j \leq \sum_{j=1}^n W_j \\ 1 - \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m-1-j)!(n-1+j)!} \left(\frac{\sum_{j=1}^n W_j}{\sum_{j=1}^m V_j} \right)^j, & \sum_{j=1}^m V_j > \sum_{j=1}^n W_j \end{cases} \quad (3.77)$$

biçiminde bulunur (Awad ve Gharraf 1986).

$W = 2p \sum_{i=1}^n W_i$ ve $V = 2a \sum_{i=1}^m V_i$ rasgele degiskenleri sirasiyla $2n$ ve $2m$ serbestlik dereceli bagimsiz Ki-kare dagilimina sahip rasgele degiskenlerdir. Ayrica (3.73), (3.74), (3.75) ve (3.76) esitliklerinin de kullanilmasi sonucunda sistem güvenilirliği için $F_I = \frac{aV/m}{pW/n}$ pivotu yardimiyla olusturulan $1-a$ güven katsayili güven araligi asagidaki gibi bulunur (Awad and Gharraf 1986).

$$\left[F_{(1-a/2)}(2m, 2n) \left(F_{(1-a/2)}(2m, 2n) + \frac{\hat{p}}{\hat{a}} \right)^{-1}, F_{(a/2)}(2n, 2m) \left(F_{(a/2)}(2m, 2n) + \frac{\hat{p}}{\hat{a}} \right)^{-1} \right] \quad (3.78)$$

4. STRES-DAYANIKLILIK MODELLERİNDE GOMPERTZ DAGILIMI İÇİN SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİ VE TAHMİNİ

Bu bölümde stres-dayanıklılık modellerinde Gompertz dağılımı için tek bileşenli bir sistemin güvenilirliğinin (R) teorik olarak bulunması, R için en çok olasılık (ML) ve düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edicilerinin (UMVUE) elde edilmesi ve ayrıca en çok olasılık tahmin edicisine (MLE) dayalı tam ve asimptotik güven aralıklarının oluşturulması problemleri incelenecektir.

4.1. Gompertz Dağılımı İçin Sistem Güvenilirliği

Gompertz dağılımı ilk defa Benjamin Gompertz (1825) tarafından ortaya atılmıştır. Bu çalışmada, Gompertz, yaşlara göre ölüm oranının geometrik bir şekilde arttığını, eşit yaş aralıklarında uygulayarak bulmuştur. Gompertz dağılımı, farklı kitlelerden ölüm oranlarının karşılaştırılmasında, büyüme modellerinde ve nüfus biliminde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Gompertz dağılımı ile ilgili daha fazla bilgi Read (1983)' te bulunabilir.

X rasgele değişkeni, Gompertz dağılımına sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk, dağılım ve yaşam fonksiyonu,

$$f(x) = I \exp(cx) \exp\{-I c^{-1} [\exp(cx) - 1]\} \quad x > 0, c > 0, I > 0 \quad (4.1)$$

$$F(x) = 1 - \exp\{-I c^{-1} [\exp(cx) - 1]\} \quad (4.2)$$

$$\bar{F}(x) = \exp\{-I c^{-1} [\exp(cx) - 1]\} \quad (4.3)$$

seklindedir. Hazard (bozulma) oranı $h(x) = I \exp(cx)$ olup artandır. Gompertz dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu tek tepelidir (unimodal) ve pozitif çarpıklığa sahiptir. İki-parametrelili Gompertz dağılımı için $Gompertz(c, I)$ gösterimi kullanılacaktır.

X bir bileşenin dayanıklılığı ve Y bileşene etki eden stres olmak üzere X ve Y rasgele değişkenleri sırasıyla (c_1, I_1) ve (c_2, I_2) parametrelili Gompertz dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olsun. Bu durumda sistem güvenilirliği

$$R = P(Y < X) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(t) dF_X(t) \quad (4.4)$$

biçimindedir. (4.1) ve (4.2) denklemlerinin (4.4) 'de yerine yazılmasıyla,

$$R = \int_0^{\infty} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{I_2}{c_2} (e^{c_2 x} - 1) \right\} \right] I_1 e^{c_1 x} \exp \left\{ -\frac{I_1}{c_1} (e^{c_1 x} - 1) \right\} dx. \quad (4.5)$$

olur. Burada $u = e^{c_1 x}$ dönüşümü kullanıldığında (4.5) eşitliği ;

$$R = 1 - \frac{I_1}{c_1} \exp \left\{ \frac{I_1}{c_1} + \frac{I_2}{c_2} \right\} \int_1^{\infty} \exp \left\{ -\left(\frac{I_2}{c_2} u^{c_2/c_1} + \frac{I_1}{c_1} u \right) \right\} du \quad (4.6)$$

seklini alır. (4.6) 'da, $(I_1 / c_1)u = t$ dönüşümü yapılırsa

$$R = 1 - \exp \left\{ \frac{I_1}{c_1} + \frac{I_2}{c_2} \right\} \int_{I_1/c_1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{I_2}{c_2} \left(\frac{c_1 t}{I_1} \right)^{c_2/c_1} \right\} e^{-t} dt \quad (4.7)$$

olur.

(4.7) eşitliğinin sağ tarafında

$$\exp\left\{-\frac{I_2}{c_2}\left(\frac{c_1 t}{I_1}\right)^{c_2/c_1}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (I_2/c_2)^k (c_1/I_1)^{kc_2/c_1}}{k!}. \quad (4.8)$$

biçiminde Taylor açılımı kullanılarak

$$R = 1 - \exp\left\{\frac{I_1}{c_1} + \frac{I_2}{c_2}\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (I_2/c_2)^k (c_1/I_1)^{kc_2/c_1}}{k!} \\ \times \left[\int_0^{\infty} t^{(c_2/c_1)k} e^{-t} dt - \int_0^{I_1/c_1} t^{(c_2/c_1)k} e^{-t} dt \right] \quad (4.9)$$

eşitliği elde edilir. (4.9) eşitliğinde, (2.22) 'de tanımlanan Gamma fonksiyonu ve

$$e^{-t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^i}{i!} \quad (4.10)$$

biçimindeki Taylor açılımının kullanılması sonucunda sistem güvenilirliği,

$$R = 1 - \exp\{I_1/c_1 + I_2/c_2\} \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (I_2/c_2)^k (c_1/I_1)^{kc_2/c_1}}{k!} \\ \times \left[\Gamma((c_2/c_1)k + 1) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (I_1/c_1)^{(c_2/c_1)k+i+1}}{((c_2/c_1)k + i + 1)!} \right] \quad (4.11)$$

şeklinde elde edilir (Saraçoğlu ve Kaya 2005). $c_1 = c_2 = c$ olması durumunda ise sistem güvenilirliği aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
R &= P(Y < X) = \int_0^{\infty} F_2(t) dF_1(t) \\
&= \int_0^{\infty} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{I_2}{c} (e^{ct} - 1) \right\} \right) I_1 e^{ct} \exp \left\{ -\frac{I_1}{c} (e^{ct} - 1) \right\} dt \\
&= \frac{I_2}{I_1 + I_2}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

4.2. Gompertz Dağılımı İçin Sistem Güvenilirliğinin Nokta Tahmini

4.2.1. En çok olabilirlik tahmin edicisi (MLE)

X ve Y , sırasıyla (c, I_1) ve (c, I_2) parametrelili bağımsız Gompertz dağılımına sahip rasgele değişkenler olsun. Gompertz dağılımı için olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları (4.1) ve (4.2) 'de verilmiştir. c 'nin bilindiği durumda (4.12) 'deki R 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi (MLE), invariyantlık özelliğinden,

$$\hat{R}_{MLE} = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_2 + \hat{I}_1} \tag{4.13}$$

şeklinde yazılabilir. Burada \hat{I}_1 ve \hat{I}_2 sırasıyla I_1 ve I_2 'nin en çok olabilirlik tahmin edicileridir. R 'nin MLE 'sini hesaplamak için öncelikle I_1 ve I_2 'nin MLE 'lerinin bulunması gerekir.

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ve $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ sırasıyla Gompertz (c, I_1) ve Gompertz (c, I_2) dağılımından alınan bağımsız rasgele örneklemeler olmak üzere \underline{X} ve \underline{Y} 'nin olabilirlik fonksiyonu,

$$L = I_1^n \exp\left(c \sum_{i=1}^n x_i\right) \exp\left(-\frac{I_1}{c} \sum_{i=1}^n (e^{cx_i} - 1)\right) I_2^m \exp\left(c \sum_{i=1}^m y_i\right) \times \exp\left[-\frac{I_2}{c} \sum_{i=1}^m (e^{cy_i} - 1)\right] \quad (4.14)$$

şeklindedir. Bu olabilirlik fonksiyonun logaritması alındığında

$$\ln L = n \ln I_1 + c \sum_{i=1}^n x_i - \frac{I_1}{c} \sum_{i=1}^n (e^{cx_i} - 1) + m \ln I_2 + c \sum_{i=1}^m y_i - \frac{I_2}{c} \sum_{i=1}^m (e^{cy_i} - 1) \quad (4.15)$$

elde edilir. $\ln L$ 'nin I_1 ve I_2 'ye göre türevleri alınıp 0 'a eşitlenirse I_1 ve I_2 'nin MLE 'leri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{I}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{e^{cx_i} - 1}{c}\right)} \quad (4.16)$$

$$\hat{I}_2 = \frac{m}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{e^{cy_i} - 1}{c}\right)} \quad (4.17)$$

Sayet c parametresi biliniyorsa I_1 ve I_2 'nin MLE 'leri, (4.16) ve (4.17) 'den kolayca elde edilebilir. Parametrelerin hiçbiri bilinmiyorsa, $L(\hat{I}_1(c), \hat{I}_2(c), c)$ olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan \hat{c} , \hat{I}_1 ve \hat{I}_2 'nin bulunması gerekir. (4.16) ve (4.17) 'de \hat{I}_1 ve \hat{I}_2 elde edilmisti. \hat{c} 'yi ise aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial c} = \sum_{i=1}^n x_i + \frac{I_1}{c^2} \sum_{i=1}^n (e^{cx_i} - 1) - \frac{I_1}{c} \sum_{i=1}^n x_i e^{cx_i} + \sum_{i=1}^m y_i + \frac{I_2}{c^2} \sum_{i=1}^m (e^{cy_i} - 1) - \frac{I_2}{c} \sum_{i=1}^m y_i e^{cy_i} = 0 \quad (4.18)$$

(4.18) esitliğinde I_1 ve I_2 yerine (4.16) ve (4.17) 'deki \hat{I}_1 ve \hat{I}_2 tahminleri yazılırsa,

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i + \frac{n+m}{c} - \left(\frac{n \sum_{i=1}^n x_i e^{cx_i}}{\sum_{i=1}^n (e^{cx_i} - 1)} + \frac{m \sum_{i=1}^m y_i e^{cy_i}}{\sum_{i=1}^m (e^{cy_i} - 1)} \right) = 0 \quad (4.19)$$

sekinde lineer olmayan bir denklem elde edilir. (4.19) denkleminin solundaki denklem c 'nin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon g ile gösterilirse,

$$g(c) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i + \frac{n+m}{c} - \left(\frac{n \sum_{i=1}^n x_i e^{cx_i}}{\sum_{i=1}^n (e^{cx_i} - 1)} + \frac{m \sum_{i=1}^m y_i e^{cy_i}}{\sum_{i=1}^m (e^{cy_i} - 1)} \right) \quad (4.20)$$

olur. $g(c) = 0$ seklindeki lineer olmayan denklem, Newton-Raphson metodu kullanılarak basit iterasyonlar sonucunda çözülebilir. Çözüm için gerekli iterasyon denkleminin,

$$c_{(j+1)} = c_{(j)} + \frac{g(c_{(j)})}{g'(c_{(j)})} \quad (4.21)$$

sekinde dir. Burada $c_{(j)}$, c 'nin j 'ninci iterasyonudur. Bu işlem $|c_{(j+1)} - c_{(j)}| < \epsilon$ esitsizliğı sağlanıncaya kadar iterasyonlara devam edilir. Burada ϵ , 10^{-5} gibi keyfi küçük bir sabittir. Bu sekilde c 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi elde edilir. Bulunan değer (4.16) ve (4.17) esitliklerinde yazılarak \hat{I}_1 ve \hat{I}_2 bulunur. Bulunan \hat{I}_1 ve \hat{I}_2 , (4.11) 'de yazılması ve $c_1 = c_2 = c$ alınması ile stres-dayanıklılık modellerinde sistem güvenilirliğı için MLE elde edilmiş olur. Bu tahmin edicinin dağılımını bulmak için asadıdaki dönüşümlerin tanımlanması gerekir.

$$W = \sum_{i=1}^n \left(\frac{e^{cX_i} - 1}{c} \right) \quad (4.22)$$

$$V = \sum_{i=1}^m \left(\frac{e^{cY_i} - 1}{c} \right) \quad (4.23)$$

$T_i = (e^{cX_i} - 1)/c$ ve $W = \sum_{i=1}^n T_i$ rasgele degiskenlerinin sirasiyla, $\text{Üstel}(\mathbf{I}_1)$ ve $\text{Gamma}(n, \mathbf{I}_1)$ dagilimlarina sahip olduklari kolayca gösterilebilir. Benzer sekilde V rasgele degiskeninin de (m, \mathbf{I}_2) parametrelili Gamma dagilimina sahip oldugu açiktir. Bu durumda W ve V rasgele degiskenlerinin olasilik yogunluk fonksiyonlari sirasiyla,

$$f(w) = \mathbf{I}_1^n w^{n-1} e^{-\mathbf{I}_1 w} / \Gamma(n) \quad , \quad w > 0 \quad (4.24)$$

$$f(v) = \mathbf{I}_2^m v^{m-1} e^{-\mathbf{I}_2 v} / \Gamma(m) \quad , \quad v > 0 \quad (4.25)$$

olur. Ayrica R 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi, (4.16) ve (4.17) kullanilarak (4.13)'de yerine yazilmasi ve (4.22) ile (4.23) esitliklerinin kullanilmasi sonucunda

$$\hat{R}_{MLE} = \frac{\hat{\mathbf{I}}_2}{\hat{\mathbf{I}}_2 + \hat{\mathbf{I}}_1} = \frac{m/V}{m/V + n/W} \quad (4.26)$$

elde edilir. $Z = m/V$ dönüşümü tanımlanarak \hat{R}_{MLE} ve Z rasgele degiskenlerinin ortak olasilik yogunluk fonksiyonu asagidaki yöntem takip edilerek bulunur. Ters dönüşümler, Jakobiyen matrisi ve determinanti sirasiyla,

$$v = m/z \quad \text{ve} \quad w = \frac{nr_1}{z(1-r_1)} \quad (4.27)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r_1} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r_1} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{nz(1-r_1) + nr_1z}{z^2(1-r_1)^2} & \frac{nr_1(1-r_1)}{z^2(1-r_1)^2} \\ 0 & -\frac{m}{z^2} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\det(J) = -\frac{nm}{z^3(1-r_1)^2} \quad (4.29)$$

biçimindedir. W ve V bağımsız Gamma rasgele değişkenleri olduklarından, \hat{R}_{MLE} ve Z 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{\hat{R}_{MLE}, Z}(r_1, z) &= |\det(J)| f_w\left(\frac{nr_1}{z(1-r_1)}\right) f_v(m/z) \\ &= \frac{\mathbf{I}_1^n \mathbf{I}_2^m m^m n^n r_1^{n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)(1-r_1)^{n+1}} \frac{1}{z^{n+m+1}} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{nr_1 \mathbf{I}_1}{z(1-r_1)} - \frac{m \mathbf{I}_2}{z}\right\}, \quad 0 < r_1 < 1, z > 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan \hat{R}_{MLE} 'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{\hat{R}_{MLE}}(r_1) &= \int_0^\infty f_{\hat{R}_{MLE}, Z}(r_1, z) dz \\ &= \frac{\mathbf{I}_1^n \mathbf{I}_2^m m^m n^n r_1^{n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)(1-r_1)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{1}{z^{n+m+1}} \exp\left\{-\frac{nr_1 \mathbf{I}_1}{z(1-r_1)} - \frac{m \mathbf{I}_2}{z}\right\} dz \end{aligned} \quad (4.31)$$

dir. $\left(\frac{nr_1 \mathbf{I}_1}{(1-r_1)} + m \mathbf{I}_2\right) \frac{1}{z} = t$ dönüşümünün uygulanması sonucunda,

$$f_{\hat{R}_{MLE}}(r_1) = \frac{\mathbf{I}_1^n \mathbf{I}_2^m m^m n^n r_1^{n-1}}{\mathbf{G}(m) \mathbf{G}(n) (1-r_1)^{n+1}} \left(\frac{nr_1 \mathbf{I}_1}{1-r_1} + m \mathbf{I}_2\right)^{-(n+m)} \int_0^\infty t^{n+m-1} e^{-t} dt$$

$$\begin{aligned}
f_{\hat{R}_{MLE}}(r_1) &= \frac{\mathbf{I}_1^n \mathbf{I}_2^m m^n n^n r_1^{n-1} (1-r_1)^{m-1}}{\mathbf{G}(m) \mathbf{G}(n)} \left(\frac{nr_1 \mathbf{I}_1 + m \mathbf{I}_2 - m \mathbf{I}_2 r_1}{1-r_1} \right)^{-(n+m)} \mathbf{G}(n+m) \\
&= \frac{\mathbf{G}(n+m) \mathbf{I}_1^n \mathbf{I}_2^m m^n n^n r_1^{n-1} (1-r_1)^{m-1}}{\mathbf{G}(m) \mathbf{G}(n)} (m \mathbf{I}_2 + (n \mathbf{I}_1 - m \mathbf{I}_2) r_1)^{-(n+m)} \\
&= \frac{\mathbf{G}(n+m) \mathbf{I}_1^n n^n r_1^{n-1} (1-r_1)^{m-1}}{m^n \mathbf{I}_2^n \mathbf{G}(m) \mathbf{G}(n)} \left(1 + \left(\frac{n \mathbf{I}_1 - m \mathbf{I}_2}{m \mathbf{I}_2} \right) r_1 \right)^{-(n+m)} \\
&= \frac{\mathbf{G}(n+m)}{\mathbf{G}(n) \mathbf{G}(m)} \left(\frac{n \mathbf{I}_1}{m \mathbf{I}_2} \right)^n r_1^{n-1} (1-r_1)^{m-1} \left\{ 1 - r_1 \left(1 - \frac{n \mathbf{I}_1}{m \mathbf{I}_2} \right) \right\}^{-(n+m)}, 0 < r_1 < 1
\end{aligned} \tag{4.32}$$

biçiminde elde edilir. $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere \hat{R}_{MLE} 'nin s 'ninci merkezi momenti (2.29) 'daki hipergeometrik fonksiyon da kullanılarak,

$$\begin{aligned}
E(\hat{R}_{MLE}^s) &= \int_0^1 r_1^s f_{\hat{R}_1}(r_1) dr_1 \\
&= \frac{(n+s-1)!(n+m-1)!}{(n+m+s-1)!(n-1)!} \left(\frac{n \mathbf{I}_1}{m \mathbf{I}_2} \right)^n F_{2,1} \left((n+s, n+m), n+m+s, 1 - \frac{n \mathbf{I}_1}{m \mathbf{I}_2} \right)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

biçiminde elde edilir. Burada $s=1$ ve $s=2$ yazılması ile 1. ve 2. merkezi momentler bulunur. Buradan, \hat{R}_{MLE} 'nin varyansı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
Var(\hat{R}_{MLE}) &= E(\hat{R}_{MLE}^2) - (E(\hat{R}_{MLE}))^2 \\
&= \frac{n(n+1)}{(n+m)(n+m+1)} \left(\frac{n \mathbf{I}_1}{m \mathbf{I}_2} \right)^n F_{2,1} \left((n+2, n+m), n+m+2, 1 - \frac{n \mathbf{I}_1}{m \mathbf{I}_2} \right) \\
&\quad - \left\{ \frac{n}{(n+m)} \left(\frac{n \mathbf{I}_1}{m \mathbf{I}_2} \right)^n F_{2,1} \left((n+1, n+m), n+m+1, 1 - \frac{n \mathbf{I}_1}{m \mathbf{I}_2} \right) \right\}^2
\end{aligned} \tag{4.34}$$

4.2.2 Düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edici (UMVUE)

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ve $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ sırasıyla Gompertz(c, I_1) ve Gompertz(c, I_2) dağılımından alınan bağımsız rasgele vektörler olsun. c biliniyor.

Sistem güvenilirliği(R) 'nin UMVUE 'sini bulmak için ilk olarak $f(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$ 'nin UMVUE 'si olan $\hat{f}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$ 'yi elde etmek gerekir. c 'nin bilindiği durumda Gompertz ailesi üstel ailedir. Bu nedenle (4.22) ve (4.23) 'de tanımlanan W ve V , yeterli ve tam istatistiklerdir. W ve V 'nin sırasıyla (n, I_1) ve (m, I_2) parametrelili Gamma dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olduğu bir önceki alt bölümde belirtilmişti. \underline{X} ve \underline{Y} 'nin bağımsızlığı ve (4.24), (4.25) ve (3.19) eşitliklerinin kullanılması ile $f(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$ 'nin UMVUE 'si,

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \hat{f}(x_1, \dots, x_k) \hat{f}(y_1, \dots, y_k) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) &= \prod_{j=1}^k f(x_j) \times \frac{g(w | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k)}{g(w)} \\ &\times \prod_{j=1}^k f(y_j) \times \frac{g(v | Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k)}{g(v)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned} g(w | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) &= \frac{I_1^{n-k}}{G(n-k)} \times \left(w - \sum_{i=1}^k \left(\frac{e^{cx_i} - 1}{c} \right) \right)^{n-k-1} \times \\ &\times \exp \left\{ -I_1 \left(w - \sum_{i=1}^k \left(\frac{e^{cx_i} - 1}{c} \right) \right) \right\} \times \\ &\times I \left(w - \sum_{i=1}^k \left(\frac{e^{cx_i} - 1}{c} \right) \geq 0 \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
g(v|Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k) &= \frac{I_2^{m-k}}{\mathbf{G}(m-k)} \times \left(v - \sum_{i=1}^k \left(\frac{e^{cy_i} - 1}{c} \right) \right)^{m-k-1} \\
&\times \exp \left\{ -I_2 \left(v - \sum_{i=1}^k \left(\frac{e^{cy_i} - 1}{c} \right) \right) \right\} \times \\
&\times I \left(v - \sum_{i=1}^k \left(\frac{e^{cy_i} - 1}{c} \right) \geq 0 \right)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

biçimindedir. (4.36) 'da, (4.24), (4.25), (4.37) ve (4.38) denklemlerinin yazılması ile

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) &= \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{G}(m)}{\mathbf{G}(n-k)\mathbf{G}(m-k)w^{n-1}v^{m-1}} \exp \left\{ c \left(\sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=1}^k y_i \right) \right\} \\
&\times \left(w - \sum_{i=1}^k \left(\frac{e^{cx_i} - 1}{c} \right) \right)^{n-k-1} \left(v - \sum_{i=1}^k \left(\frac{e^{cy_i} - 1}{c} \right) \right)^{m-k-1} \\
&\times I \left(w - \sum_{i=1}^k \left(\frac{e^{cx_i} - 1}{c} \right) \geq 0 \right) I \left(v - \sum_{i=1}^k \left(\frac{e^{cy_i} - 1}{c} \right) \geq 0 \right)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. Özel olarak $k=1$ alınarak R 'nin UMVUE 'si (3.21) 'den

$$G = \left\{ (x, y) : 0 < x < \frac{\ln(cw+1)}{c}, \quad 0 < y < \frac{\ln(cv+1)}{c}, \quad y < x \right\}$$

bölgesi üzerinde aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{UMVUE} &= \iint_G f(x, y_1/w, v) dx dy_1 \\
&= \frac{(n-1)(m-1)}{w^{n-1}v^{m-1}} \int_G e^{c(x+y)} \left(w - \frac{e^{cx} - 1}{c} \right)^{n-2} \left(v - \frac{e^{cy} - 1}{c} \right)^{m-2} d_y d_x
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$w < v$ için (4.40) esitligi

$$\begin{aligned}\hat{R}_{UMVUE} &= \frac{(n-1)(m-1)}{w^{n-1}v^{m-1}} \int_{x=0}^{\frac{\ln(cw+1)}{c}} \int_{y=0}^x e^{c(x+y)} \left(w - \frac{e^{cx} - 1}{c} \right)^{n-2} \left(v - \frac{e^{cy} - 1}{c} \right)^{m-2} d_y d_x \\ &= 1 - \frac{n-1}{w^{n-1}v^{m-1}} \int_{u=0}^w (v-u)^{m-1} (w-u)^{n-2} du\end{aligned}\quad (4.41)$$

olur. (4.41) esitliginde

$$(v-u)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} u^k v^{m-1-k} \quad (4.42)$$

açılımının kullanılması sonucunda,

$$\hat{R}_{UMVUE} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+k)\Gamma(m-k)} \left(\frac{w}{v} \right)^k, \quad w < v \quad (4.43)$$

biçiminde elde edilir. $v < w$ olması durumunda ise benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\hat{R}_{UMVUE} &= \frac{(n-1)(m-1)}{w^{n-1}v^{m-1}} \int_{y=0}^{\frac{\ln(cv+1)}{c}} \int_{x=y}^{\frac{\ln(cw+1)}{c}} e^{c(x+y)} \left(w - \frac{e^{cx} - 1}{c} \right)^{n-2} \left(v - \frac{e^{cy} - 1}{c} \right)^{m-2} d_x d_y \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{G}(m)}{\mathbf{G}(n-k)\mathbf{G}(m+k)} \left(\frac{v}{w} \right)^k, \quad v < w\end{aligned}\quad (4.44)$$

olarak bulunur. O halde R için UMVUE, (4.43) ve (4.44) 'den

$$\hat{R}_{UMVUE} = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{m-1} d_i \left(\frac{W}{V}\right)^i & , \quad W < V \\ \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(\frac{V}{W}\right)^j & , \quad W \geq V. \end{cases} \quad (4.45)$$

biçiminde elde edilir. Burada

$$c_j = (-1)^j \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n-j)\Gamma(m+j)} \quad (4.46)$$

$$d_i = (-1)^i \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+i)\Gamma(m-i)} \quad (4.47)$$

dir. \hat{R}_{UMVUE} 'nin ikinci merkezi momenti,

$$\begin{aligned} E(\hat{R}_{UMVUE}^2) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} c_j c_{j'} E\left(\left(\frac{V}{W}\right)^{j+j'} / V \leq W\right) P(V \leq W) + P(V > W) \\ &\quad - 2 \sum_{i=0}^{m-1} d_i E\left(\left(\frac{W}{V}\right)^i / V > W\right) P(V > W) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{i'=0}^{m-1} d_i d_{i'} E\left(\left(\frac{W}{V}\right)^{i+i'} / V > W\right) P(V > W) \end{aligned} \quad (4.48)$$

olmak üzere

$$Var(\hat{R}_{UMVUE}) = E(\hat{R}_{UMVUE} - R)^2 = E(\hat{R}_2^2) - R^2 \quad (4.49)$$

dir. (4.48) denkleminin çözülebilmesi için $T = W/V$ rasgele degiskeninin dagiliminin bulunmasi gerekir. $Z = V$ dönüşümünü tanımlayarak T ve Z rasgele

degiskenlerinin ortak olasilik yogunluk fonksiyonu asagidaki gibi bulunur. Ters dönüşümler, Jacobien matrisi ve determinanti sirasiyla,

$$v = z \quad \text{ve} \quad w = zt \quad (4.50)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial t} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\det(J) = z \quad (4.52)$$

biçimindedir. Ayrıca, W ve V bagimsiz olduklarından, T ve Z 'nin ortak olasilik yogunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{T,Z}(t, z) &= |\det(J)| f_W(zt) f_V(z) \\ &= \frac{\mathbf{I}_1^n \mathbf{I}_2^m (zt)^{n-1} z^{m-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} e^{-I_1 zt - I_2 z} z \\ &= \frac{\mathbf{I}_1^n \mathbf{I}_2^m z^{n+m-1} t^{n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} e^{-z(I_1 t + I_2)} \quad , \quad z, t > 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

olarak bulunur. Buradan, $T = W/V$ rasgele degiskeninin olasilik yogunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^{\infty} f_{T,Z}(t, z) dz \\ &= \frac{\mathbf{I}_1^n \mathbf{I}_2^m t^{n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^{\infty} z^{n+m-1} e^{-z(I_1 t + I_2)} dz \end{aligned} \quad (4.54)$$

dir. (4.54) esitliginin sag tarafinda $z(I_1 t + I_2) = k$ dönüşümünün uygulanmasi ile

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \frac{\mathbf{I}_1^n \mathbf{I}_2^m t^{n-1}}{\mathbf{G}(m) \mathbf{G}(n)} (\mathbf{I}_1 t + \mathbf{I}_2)^{-(n+m)} \int_0^\infty k^{n+m-1} e^{-k} dk \\
&= \frac{\mathbf{I}_1^n \mathbf{I}_2^m t^{n-1}}{\mathbf{G}(m) \mathbf{G}(n)} (\mathbf{I}_1 t + \mathbf{I}_2)^{-(n+m)} \mathbf{G}(n+m) \\
&= \frac{\mathbf{G}(n+m) t^{n-1}}{\mathbf{G}(m) \mathbf{G}(n)} \left(\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right)^n \left(1 + \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} t \right)^{-(n+m)}, \quad t > 0
\end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir. Benzer şekilde $S = V/W$ rasgele degiskeninin dagilimi

$$f_S(s) = \frac{\Gamma(n+m) s^{m-1}}{\Gamma(m) \Gamma(n)} \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \right)^m \left(1 + \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} s \right)^{-(n+m)}, \quad s > 0 \tag{4.56}$$

biçiminde bulunur. O halde (4.48) denkleminin içindeki ifadeler, sirasiyla,

$$\begin{aligned}
E \left(\left(\frac{W}{V} \right)^i / V > W \right) P(V > W) &= E \left(\left(\frac{W}{V} \right)^i / \frac{W}{V} < 1 \right) P \left(\frac{W}{V} < 1 \right) \\
&= \int_0^1 t^i f_T(t) dt \\
&= \frac{\mathbf{G}(n+m)}{\mathbf{G}(m) \mathbf{G}(n)} \left(\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right)^n \int_0^1 t^{n+i-1} \left(1 + \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} t \right)^{-(n+m)} dt \\
&= \frac{\mathbf{G}(n+m)}{\mathbf{G}(n) \mathbf{G}(m) (n+i)} \left(\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right)^n \\
&\quad \times F_{2,1} \left((n+m, n+i), n+i+1, -\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right),
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
E\left(\left(\frac{V}{W}\right)^j / V \leq W\right) P(V \leq W) &= E\left(\left(\frac{V}{W}\right)^j / \frac{V}{W} \leq 1\right) P\left(\frac{V}{W} \leq 1\right) \\
&= \int_0^1 s^j f_s(s) ds \\
&= \frac{\mathbf{G}(n+m)}{\mathbf{G}(m)\mathbf{G}(n)} \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right)^m \int_0^1 s^{m+j-1} \left(1 + \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} s\right)^{-(n+m)} ds \\
&= \frac{\mathbf{G}(n+m)}{\mathbf{G}(n)\mathbf{G}(m)(m+j)} \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right)^m \\
&\quad \times F_{2,1}\left((n+m, m+j), m+j+1, -\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
P(V > W) &= P\left(\frac{W}{V} < 1\right) \\
&= \int_0^1 f_T(t) dt \\
&= \frac{\mathbf{G}(n+m)}{\mathbf{G}(m)\mathbf{G}(n)} \left(\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2}\right)^n \int_0^1 t^{n-1} \left(1 + \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} t\right)^{-(n+m)} dt \\
&= \left(\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2}\right)^n \frac{\mathbf{G}(n+m)}{m\mathbf{I}_1\mathbf{G}(n)\mathbf{G}(m)} \\
&\quad \times \left\{ \mathbf{I}_2 F_{2,1}\left((n-1, m+n), n, -\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2}\right) - (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \left(\frac{\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_2}\right)^{-m-n} \right\}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

seklindedir. (4.57), (4.58) ve (4.59) esitlikleri (4.48) 'de yerine yazilir ve (4.48) 'in de (4.49) 'da yerine yazilmasi sonucunda

$$\begin{aligned}
Var(\hat{R}_{UMVUE}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} c_j c_{j'} \frac{\mathbf{G}(n+m)}{\mathbf{G}(n)\mathbf{G}(m)(m+j+j')} \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \right)^m \\
&\quad \times F_{2,1} \left(\left(n+m, m+j+j' \right), m+j+j'+1, -\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right)^n \frac{\mathbf{G}(n+m)}{m\mathbf{I}_1\mathbf{G}(n)\mathbf{G}(m)} \left\{ \mathbf{I}_2 F_{2,1} \left(\left(n-1, m+n' \right), n, -\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right) - (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \left(\frac{\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_2} \right)^{-m-n} \right\} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{i'=0}^{m-1} d_i d_{i'} \frac{\mathbf{G}(n+m)}{\mathbf{G}(n)\mathbf{G}(m)(n+i+i')} \left(\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right)^n F_{2,1} \left(\left(n+m, n+i+i' \right), n+i+i'+1, -\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right) \\
&\quad - 2 \sum_{i=0}^{m-1} d_i \frac{\mathbf{G}(n+m)}{\mathbf{G}(n)\mathbf{G}(m)(n+i)} \left(\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right)^n F_{2,1} \left(\left(n+m, n+i \right), n+i+1, -\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right) - \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.60}$$

elde edilir.

4.3. Gompertz Dagilimi İçin Sistem Güvenilirliğinin Aralık Tahmini

4.3.1. Tam güven aralıkları

X_1, \dots, X_n ve Y_1, \dots, Y_m , sırasıyla (\mathbf{I}_1, c) ve (\mathbf{I}_2, c) parametrelili Gompertz dağılımına sahip iki bağımsız örneklem olsun. $W = \sum_{i=1}^n (e^{cX_i} - 1)/c$ ve $V = \sum_{i=1}^m (e^{cY_i} - 1)/c$ rasgele değişkenlerinin sırasıyla (n, \mathbf{I}_1) ve (m, \mathbf{I}_2) parametrelili Gamma dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olduğu önceki bölümlerde belirtilmişti. $2\mathbf{I}_1 W$ ve $2\mathbf{I}_2 V$ rasgele değişkenlerinin dağılımlarının da sırasıyla $\mathbf{c}_{(2n)}^2$ ve $\mathbf{c}_{(2m)}^2$ olduğundan R için en çok olabilirlik tahmin edicisi (4.13), (4.22) ve (4.23) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{MLE} &= \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_2 + \hat{I}_1} = \frac{m/V}{n/W + m/V} = \left(1 + \frac{nV}{mW}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{n}{m} \frac{2I_2V/2m}{2I_1W/2n} \frac{2I_1}{2I_2} \frac{2m}{2n}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{I_1}{I_2} F_1\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (4.12) ve (4.26) eşitliklerinin kullanılması sonucunda F_1 ,

$$F_1 = \frac{I_2V/m}{I_1W/n} = \frac{R}{1-R} (\hat{R}_{MLE}^{-1} - 1) \tag{4.62}$$

biçiminde yazılabilir ve $2m$ ve $2n$ serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. F_1 pivotu kullanılarak

$$P\left(F_{(a/2)(2m,2n)} < \frac{R}{1-R} (\hat{R}_{MLE}^{-1} - 1) < F_{(1-a/2)(2m,2n)}\right) = 1 - a$$

olacak biçimde R için $(1 - a)100\%$ güven aralığı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left(\frac{F_{(a/2)(2m,2n)}}{F_{(a/2)} + \hat{R}_{MLE}^{-1} - 1}, \frac{F_{(1-a/2)(2m,2n)}}{F_{(1-a/2)} + \hat{R}_{MLE}^{-1} - 1}\right) \tag{4.63}$$

Burada $F_{(a)(r,s)}$, (r, s) serbestlik dereceli F dağılımının $a \times 100\%$ ' ninci kuantilidir.

4.3.2 Asimptotik güven aralıkları

X_1, \dots, X_n ve Y_1, \dots, Y_m , sırasıyla (I_1, c) ve (I_2, c) parametrelili Gompertz dağılımına sahip iki bağımsız örneklem olsun. Fisher bilgi matrisi ve tersi,

$$I = -E \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial I_1^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial I_1 \partial I_2} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial I_2 \partial I_1} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial I_2^2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{n}{I_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{I_2^2} \end{bmatrix} \Rightarrow I^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{I_1^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{I_2^2}{m} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

olmak üzere R 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi (MLE), R ortalamalı ve

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial R}{\partial I_i} \frac{\partial R}{\partial I_j} I_{ij}^{-1} \quad (4.65)$$

varyansli asimptotik normal dagilima sahiptir. Burada I_{ij}^{-1} , (4.64) esitliginde verilen Fisher informasyon matrisinin tersinin (i, j) 'ninci elemanidir $(i, j = 1, 2)$ (Rao 1965). Böylece \hat{R}_{MLE} 'nin asimptotik varyansı

$$\left(\frac{n+m}{nm} \right) \hat{R}_{MLE}^2 (1 - \hat{R}_{MLE})^2. \quad (4.66)$$

sekinde bulunur. O halde R için asimptotik güven araligi

$$\left(\hat{R}_{MLE} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{n+m}{nm} \hat{R}_{MLE} (1 - \hat{R}_{MLE})}, \hat{R}_{MLE} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{n+m}{nm} \hat{R}_{MLE} (1 - \hat{R}_{MLE})} \right) \quad (4.67)$$

biçimindedir. Burada $z_{1-\alpha/2}$ standart normal dagilimin $1-\alpha/2$ 'ninci kuantilidir.

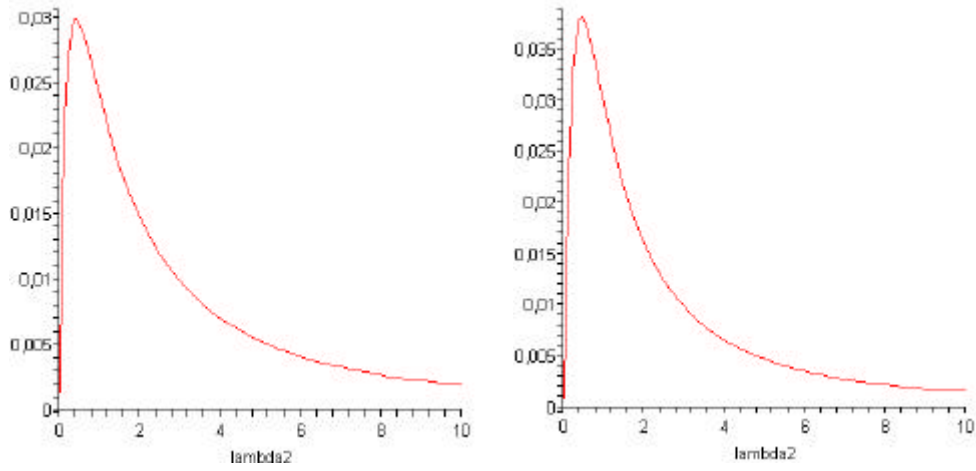
4.4. Tahmin Edicilerin Karsilastirilmesi

Bazi n, m, I_1 ve I_2 degerleri için (4.34) ve (4.60) denklemleri kullanilarak R 'nin ML ve UMVU tahmin edicilerinin yan, varyans ve MSE degerleri bulunmus ve çizelge 4.1. 'de gösterilmistir.

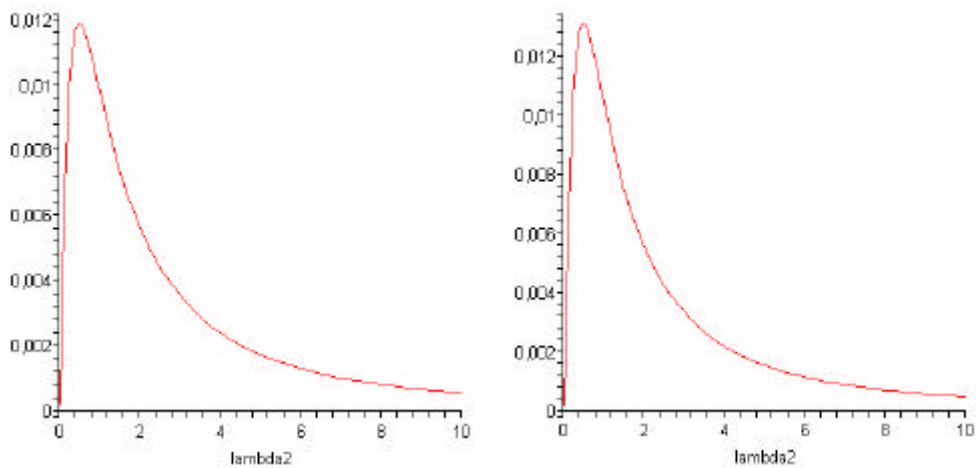
Çizelge 4.1. MLE ve UMVUE için Yan, Varyans ve MSE degerleri

Örnek hacimleri		Parametre degerleri		Sistem Güvenilirliği	MLE			UMVUE
n	m	I_1	I_2	R	Yan	Var	MSE	Var
5	3	4	2	0.3333	0.0319	0.0268	0.0278	0.0324
			4	0.5000	0.0147	0.0294	0.0297	0.0380
			6	0.6000	0.0028	0.0271	0.0271	0.0346
	5	4	2	0.3333	0.0138	0.0192	0.0194	0.0223
			4	0.5000	0.0000	0.0227	0.0227	0.0275
			6	0.6000	-0.0088	0.0215	0.0215	0.0256
	10	4	2	0.3333	0.0000	0.0139	0.0139	0.0158
			4	0.5000	-0.0116	0.0175	0.0176	0.0203
			6	0.6000	-0.0181	0.0169	0.0173	0.0192
8	3	4	2	0.3333	0.0378	0.0241	0.0255	0.0282
			4	0.5000	0.0233	0.0258	0.0264	0.0324
			6	0.6000	0.0125	0.0232	0.0233	0.0290
	5	4	2	0.3333	0.0194	0.0164	0.0167	0.0182
			4	0.5000	0.0087	0.0188	0.0189	0.0220
			6	0.6000	0.0011	0.0173	0.0173	0.0202
	10	4	2	0.3333	0.0053	0.0108	0.0109	0.0118
			4	0.5000	-0.0030	0.0133	0.0133	0.0149
			6	0.6000	-0.0080	0.0126	0.0126	0.0138
20	3	4	2	0.3333	0.0439	0.0214	0.0233	0.0242
			4	0.5000	0.0321	0.0222	0.0232	0.0272
			6	0.6000	0.0223	0.0194	0.0199	0.0240
	5	4	2	0.3333	0.0253	0.0133	0.0140	0.0143
			4	0.5000	0.0176	0.0149	0.0152	0.0169
			6	0.6000	0.0112	0.0133	0.0134	0.0152
	10	4	2	0.3333	0.0109	0.0076	0.0077	0.0079
			4	0.5000	0.0060	0.0090	0.0091	0.0098
			6	0.6000	0.0023	0.0083	0.0083	0.0089
50	50	4	2	0.3333	0.0014	0.0020	0.0020	0.0020
			4	0.5000	0.0000	0.0025	0.0025	0.0025
			6	0.6000	-0.0009	0.0023	0.0023	0.0023

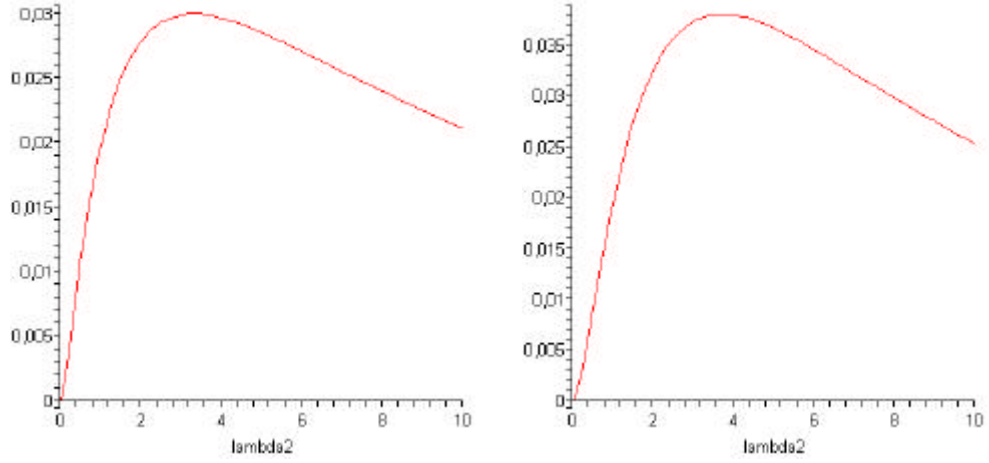
Çizelge 4.1. 'den görüldüğü üzere; sistem güvenilirliğinin ML tahmin edicisinin MSE degerleri UMVUE 'ninkinden daha küçük olarak elde edilmiştir. m degeri ve I_1, I_2 parametreleri sabit tutulup n degeri artırildiginda ML tahmin edicisinin yani fazla degismemektedir. Ancak UMVU ve ML tahmin edicilerinin MSE 'leri azalarak birbirlerine yaklasmaktadir. n ve m degerleri birlikte artırildiginda MLE' nin yani, MLE ve UMVUE 'nin MSE 'leri 0' a dogru gitmektedir. MLE ve UMVUE ' nin MSE degerleri, $I_1 = I_2$ oldugu durumda en büyük degerine ulasmaktadir. Bu durumu asagidaki sekiller de açıklamaktadir.



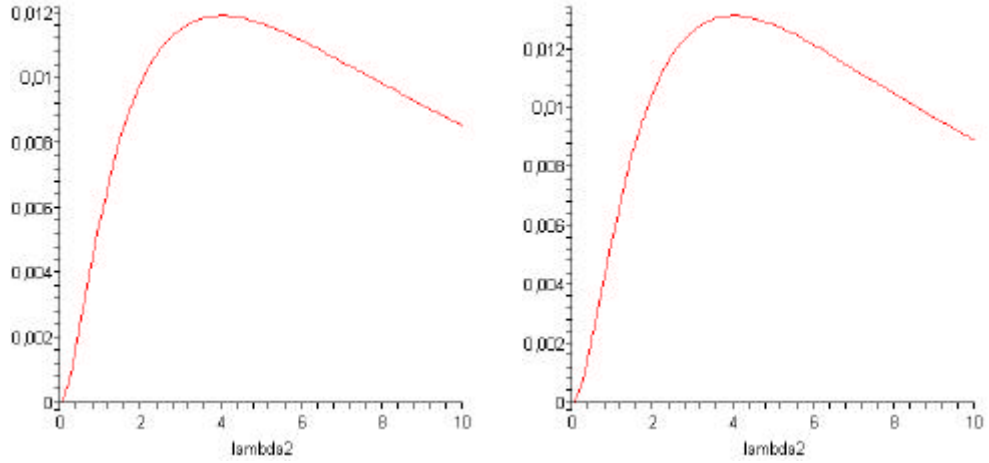
Sekil 4.1. $I_1 = 0.5, n = 5, m = 3$ için I_2 artırildiginda sistem güvenilirliği için MLE ve UMVUE 'nin MSE 'lerinin grafikleri



Sekil 4.2. $I_1 = 0.5, n = 10, m = 10$ için I_2 artırildiginda sistem güvenilirliği için MLE ve UMVUE 'nin MSE 'lerinin grafikleri



Sekil 4.3. $I_1 = 4, n = 5, m = 3$ için I_2 artırıldığında sistem güvenilirliği için MLE ve UMVUE 'nin MSE 'lerinin grafikleri



Sekil 4.4. $I_1 = 4, n = 10, m = 10$ için I_2 artırıldığında sistem güvenilirliği için MLE ve UMVUE 'nin MSE 'lerinin grafikleri

Sekil 4.1., Sekil 4.2., Sekil 4.3. ve Sekil 4.4. 'den görüldüğü üzere; I_1 sabit tutulup n ve m birlikte artırıldığında MLE ve UMVUE 'nin MSE degerleri, $I_1 = I_2$ olduğu durumda en büyük degerine ulasmaktadır. Benzer sekilde I_2 sabit tutulup n ve m birlikte artırıldığında MLE ve UMVUE 'nin MSE degerleri ve grafikler aynı olacaktır ve sonuç değişmeyecektir. Ayrıca, MLE 'nin MSE 'sinin UMVUE 'nin MSE 'sinden küçük olduğu da şekillerin her birinden görülmektedir.

4.5. Simülasyon Çalışması

MLE 'nin asimptotik özelliklerine dayalı asimptotik güven aralıkları kapsama (coverage) olasılıkları bakımından tam güven aralıkları ile karşılaştırıldı. Güven aralıklarının performansını ölçmek için parametrelerinin değerleri $(I_1, I_2, c) = (1,2,1), (1,5,1), (5,5,1)$ olan Gompertz dağılımına sahip parametreleri farklı n ve m boyutlu iki örneklemden 50000 örnek üretildi. Bu değerlere ilişkin güvenilirlik için tam ve asimptotik güven aralıklarının kapsama (covarage) olasılıkları çizelge 4.2 ve 4.3 'de verilmiştir.

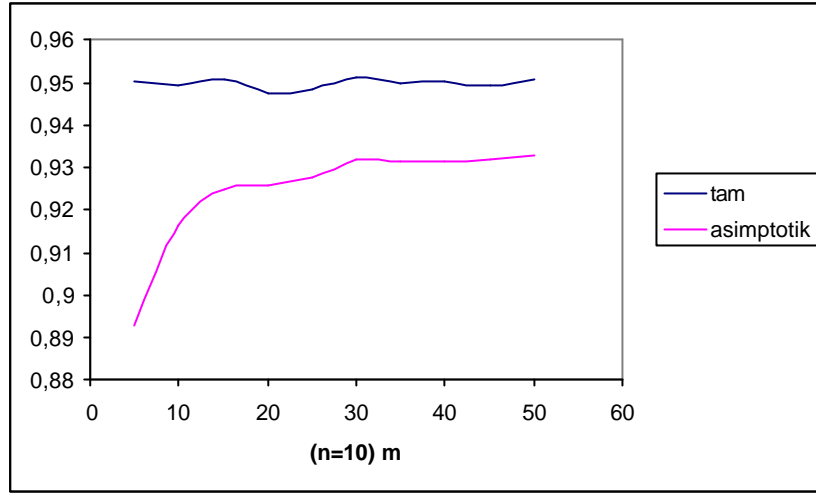
Çizelge 4.2. n sabit tutulup m artırıldığında $(I_1, I_2, c) = (1,2,1), (1,5,1), (5,5,1)$ için tam ve asimptotik güven aralıklarının kapsama olasılıkları

		Durum 1: $(I_1, I_2, c) = (1,2,1)$		Durum 2: $(I_1, I_2, c) = (1,5,1)$		Durum 3: $(I_1, I_2, c) = (5,5,1)$	
n	m	Tam	Asimp.	Tam	Asimp.	Tam	Asimp.
10	5	0.95028	0.89274	0.94972	0.89098	0.95036	0.89884
10	10	0.94942	0.91642	0.95060	0.92038	0.95134	0.91736
10	15	0.95064	0.92488	0.94882	0.92842	0.95030	0.92128
10	20	0.94740	0.92574	0.94984	0.93468	0.95162	0.92472
10	25	0.94812	0.92772	0.95028	0.93570	0.94948	0.92248
10	30	0.95092	0.93180	0.95196	0.93904	0.95076	0.92546
10	35	0.95000	0.93112	0.94974	0.93790	0.94878	0.92294
10	40	0.95030	0.93132	0.94962	0.93916	0.94896	0.92426
10	45	0.94918	0.93160	0.94944	0.94050	0.94912	0.92444
10	50	0.95082	0.93306	0.95150	0.94162	0.94920	0.92512

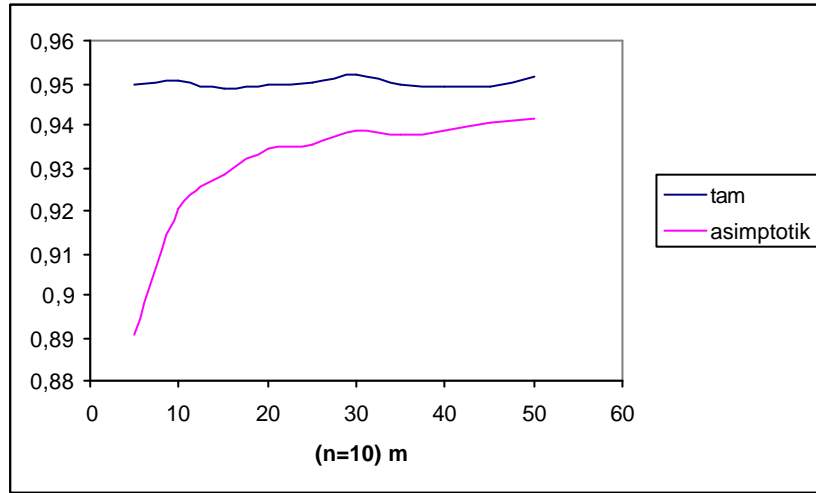
Çizelge 4.3. m sabit tutulup n arttırıldığında $(I_1, I_2, c) = (1,2,1)$, $(1,5,1)$, $(5,5,1)$ için tam ve asimptotik güven aralıklarının kapsama olasılıkları

m	n	Durum 4: $(I_1, I_2, c) = (1,2,1)$		Durum 5: $(I_1, I_2, c) = (1,5,1)$		Durum 6: $(I_1, I_2, c) = (5,5,1)$	
		Tam	Asimp.	Tam	Asimp.	Tam	Asimp.
10	5	0.95014	0.90598	0.94932	0.91628	0.95000	0.89920
10	10	0.95090	0.91964	0.95196	0.92010	0.94916	0.91422
10	15	0.95084	0.91892	0.94974	0.91820	0.94844	0.91862
10	20	0.94880	0.92086	0.95156	0.91812	0.95046	0.92402
10	25	0.95144	0.92292	0.95168	0.91994	0.95092	0.92472
10	30	0.94946	0.92092	0.94974	0.91400	0.95070	0.92488
10	35	0.94926	0.91960	0.94886	0.91590	0.94878	0.92520
10	40	0.95248	0.92338	0.94914	0.91508	0.94964	0.92586
10	45	0.94990	0.92042	0.94926	0.91434	0.95174	0.92594
10	50	0.95146	0.92112	0.94850	0.91374	0.95106	0.92662

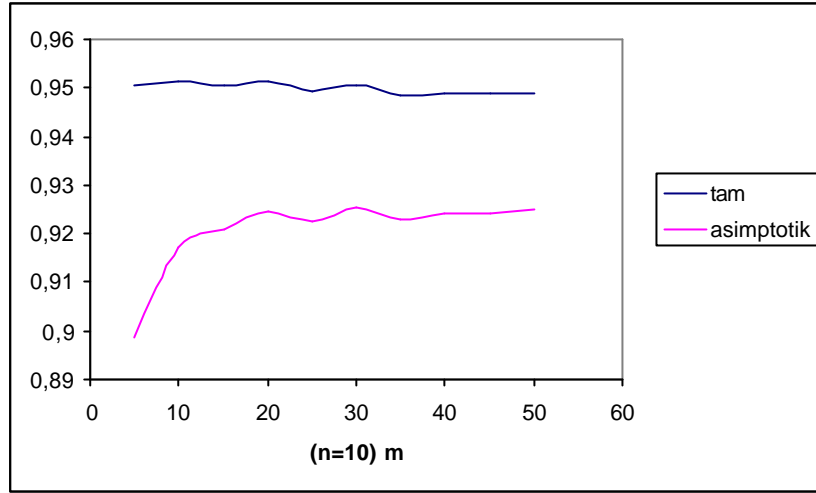
Çizelge 4.2. ve çizelge 4.3. 'den görüldüğü üzere; R için tam güven aralıklarının yakınsama olasılıkları istenilen 0.95 seviyesine daha yakındır. Ancak R için asimptotik güven aralıklarının yakınsama olasılıkları istenilen 0.95 seviyesinden daha uzaktır. n, m ve I_1 sabit tutulup I_2 arttırıldığında, n, m ve I_2 sabit tutulup I_1 arttırıldığında, m sabit tutulup n arttırıldığında ve n sabit tutulup m arttırıldığında tam ve asimptotik güven aralıklarının kapsama olasılıkları fazla değişmemektedir. Ayrıca asimptotik güven aralıklarının yakınsama olasılıkları $n \geq 50$ ve $m \geq 50$ için 0.95 'e yaklaşıyor. Kapsama olasılıklarına ilişkin sonuçlar aşağıdaki şekillerden de görülebilir.



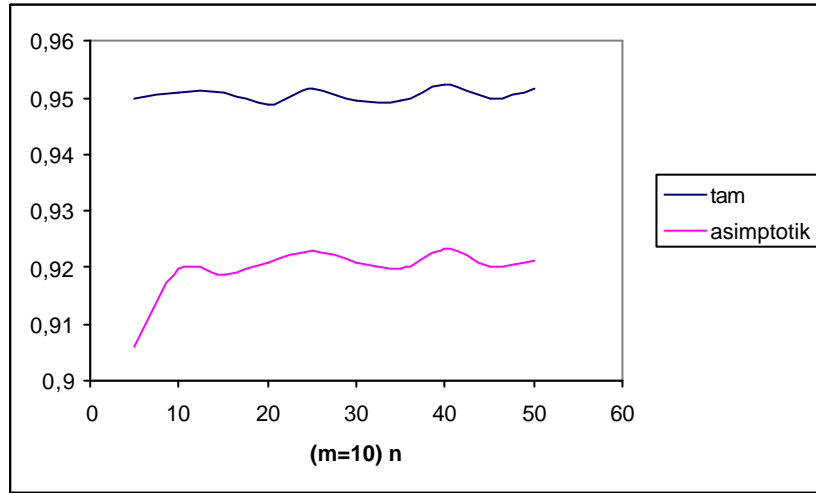
Sekil 4.5. $n = 10$ sabit tulup m artırildiginda R için $(I_1, I_2, c) = (1,2,1)$ için tam ve asimptotik güven araliklarinin grafigi



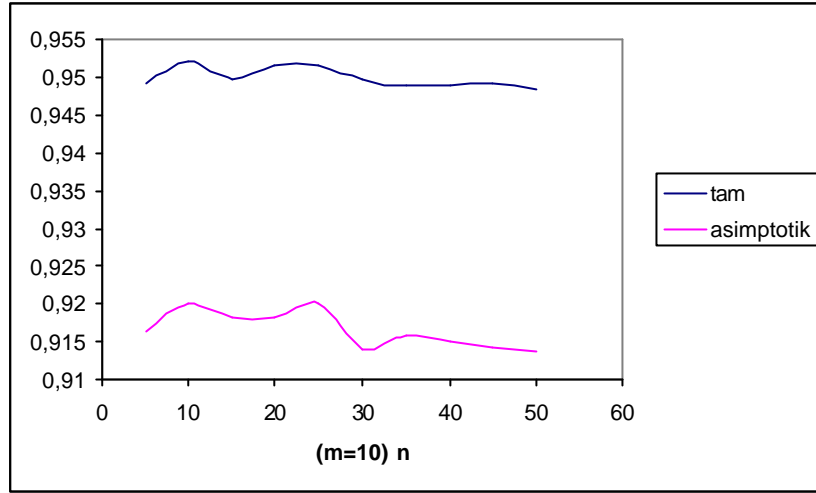
Sekil 4.6. $n = 10$ sabit tulup m artırildiginda R için $(I_1, I_2, c) = (1,5,1)$ için tam ve asimptotik güven araliklarinin grafigi



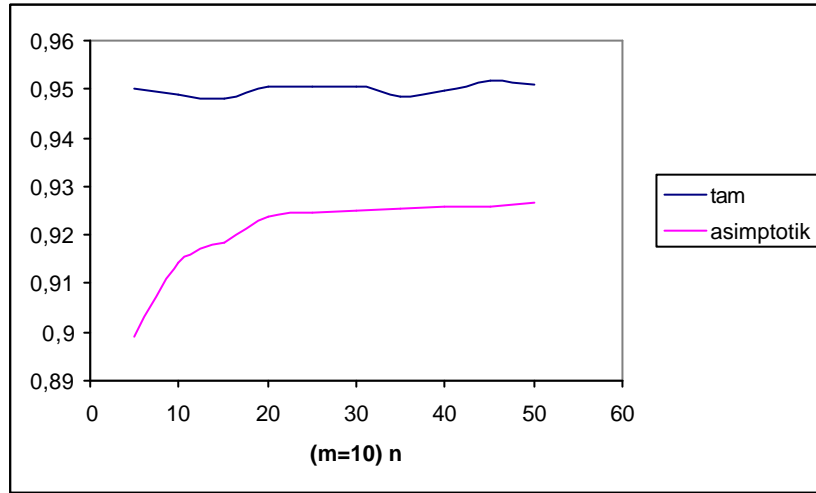
Sekil 4.7. $n = 10$ sabit tutup m artırildiginda R için $(I_1, I_2, c) = (5, 5, 1)$ için tam ve asimptotik güven araliklarinin grafigi



Sekil 4.8. $m = 10$ sabit tutup n artırildiginda R için $(I_1, I_2, c) = (1, 2, 1)$ için tam ve asimptotik güven araliklarinin grafigi



Sekil 4.9. $m = 10$ sabit tutulup n arttirildiginda R için $(I_1, I_2, c) = (1, 5, 1)$ için tam ve asimptotik güven araliklarinin grafigi



Sekil 4.10. $m = 10$ sabit tutulup n arttirildiginda R için $(I_1, I_2, c) = (5, 5, 1)$ için tam ve asimptotik güven araliklarinin grafigi

Yukaridaki sekillerden de görüldüğü üzere n sabit tutulup m arttirildiginda ve m sabit tutulup n arttirildiginda I_1 ve I_2 'nin çeşitli degerleri için tam güven araliklarinin kapsama olasiliklari, 0.95 istenilen seviyede olmasina ragmen asimptotik güven araliklarin kapsama olasiliklarinin 0.95 seviyesinden uzak oldugu görülmüştür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada stres-dayanıklılık modellerinde Gompertz dağılımlar ailesine ilişkin sistem güvenilirliği için ML ve UMVU tahmin edicileri ve dağılımsal özellikleri elde edilmiş olup çeşitli parametre değerleri için bulunan teorik sonuçlar sonucunda ML tahmin edicisinin MSE 'sinin UMVU tahmin edicisinin MSE 'sinden küçük olduğu gözlenmiştir. Ayrıca (I_1, c) ve (I_2, c) parametrelili Gompertz dağılımından alınan iki örneklem için örnek hacimleri arttırıldığında MLE ve UMVUE 'nin MSE değerlerinin, $I_1 = I_2$ olduğu durumda en büyük değerine ulaştığı çizelge 4.1., şekil 4.1., şekil 4.2., şekil 4.3. ve şekil 4.4. 'den görülmüştür. Bunun dışında sistem güvenilirliği için tam ve asimptotik güven aralıkları elde edilmiş olup tam güven aralıklarının yakınsama olasılıklarının istenilen 0.95 seviyesine daha yakın olduğu çizelge 4.2., 4.3. ve 4.5. - 4.10. şekillerinden görülmüştür. Ancak asimptotik güven aralıklarının yakınsama olasılıklarının $n \geq 50$ ve $m \geq 50$ için 0.95 'e yaklaştığı gözlenmiştir.

Bu çalışma sonucunda üstel aileye ait herhangi bir dağılım için stres-dayanıklılık modellerinde sistem güvenilirliğinin MLE ve UMVUE 'leri ile bu tahmin edicilerin dağılımsal özellikleri, bu çalışmadaki yöntem takip edilerek bulunabilir. Sonraki çalışmalarda Gompertz dağılımı için önsel dağılımın bilindiği ve bilinmediği durumlarda sistem güvenilirliğinin Bayes tahmin edicileri konusu incelenecektir.

KAYNAKLAR

- Andrews, G.E., Askey, R., Roy, R. 1999. Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 71, Cambridge University Press, New York, USA.
- Awad, A.M., Gharraf, M.K. 1986. Estimation of $P(Y < X)$ in the Burr case: A Comparative Study, Communications in Statistics: Simulation and Computation, 15 : 389-403.
- Beg, M.A. 1980a. On the Estimation of $P(Y < X)$ for the Two Parameter Exponential Distribution. Metrika, 27 : 29-34.
- Beg, M.A., Singh, N. 1980b. Estimation of $P(Y < X)$ for the Pareto Family. I E E E Transactions On Reliability, 28 : 411-414.
- Berksoy, A.H., Özkan, O. 2001. Çözümlü Analiz Problemleri. S.Ü. Basimevi, Konya, Türkiye.
- Burr, I. W., 1942. Cumulative Frequency Function. Annals Math. Stat. 13 : 215-232.
- Chao, A. 1982. On Comparing Estimators of $P(Y < X)$ in the Exponential Case. I E E E Transactions On Reliability, 31 (4): 389-392.
- Church, J.D., Harris, B. 1970. The Estimation of Reliability from Stres-Strength Relationship. Technometrics, 12: 49-54
- Constantine, K., Karson, M., Tse, S.-K. 1986. Estimators of $P(Y < X)$ in the Gamma Case. Communications in Statistics: Simulation and Computation, 15: 365-388.

- Downton, F. 1973. On the Estimation of $P(Y < X)$ in the Normal case. *Technometrics*, 15: 551-558.
- Enis, P., Geisser, S. 1971. Estimation of the Probability that $Y < X$. *Journal of the American Statist. Assoc.*, 66 (333): 162-168.
- Gompertz, B. 1825. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality and on the New Mode of Determining the Value of Life Contingencies, *Philosophical Transactions of Royal Society A* 115 : 513-580.
- Gradshteyn, I.S. Ryzhik, I.M. 2000. *Tables of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, San Diego, CA.
- Ismail, R., Jeyaratnam, S., Panchapakesan, S. 1986. Estimation of $P(X,Y)$ for Gamma Distributions. *Journal Of Statistical Computation And Simulation*, 26: 253-267.
- Ivshin, V.V., Lumelskii, Y.P. 1995. *Statistical Estimation Problems in Stress-strength models*. Perm University Pres, Perm, Russia.
- Johnson, R.A. 1988. Stress-Strength Models for Reliability. *Handbook of Statistics Volume 7, Quality Control and Reliability*, Eds P.R. Krishnaiah and C.R. Rao. 27-54.
- Klugman, S.A., 1986. Loss Distributions, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Actuarial Mathematics*, Vol. 35, Pp. 31-55.
- Kotz, S., Lumelskii, Y., Pensky, M. 2003. *The Stress-Strength Model and Its Generalizations: Theory and Applications*, World Scientific Publishing, Singapore.

- Lehman, E.L., Scheffe, H. 1950. Completeness, Similar Regions, and Unbiased Estimation, *Sankhya*, Ser. A, 10, 305-340.
- Lenhof, S., Pensky, M. 2002. Estimation of $P(X < Y)$ for Beta Distributed Random Variables. Submitted.
- Lomax, K. S., 1954. Business Failure: Another Example of the Analysis of Failure Data. *J. Amer. Statist. Assoc.* 49, 847-852.
- Lumelski, Ya. P., Sapoznikov, P.N. 1969. Unbiased Estimators of Probability Densities. *Theor. Veroyat. Primen.*, 14:372-380.
- McCool, J.I. 1991 Inference on $P(Y < X)$ in the Weibull Case. *Communications in Statistics: Simulation And Computation*, 20: 129-148.
- Mokhlis, N.A. 2005. Reliability of a Stress-Strength Model with Burr Type III Distributions, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 34: 1643-1657.
- Oturanç G., Kurnaz, A., Kiris, M.E., 2003. *Sayısal Analiz. Dizgi Ofset Matbaacılık*, Konya.
- Öztürk, F., Özbek, L. 2004. *Matematiksel Modelleme ve Simülasyon*, Gazi Kitabevi, Ankara, Türkiye.
- Öztürk, F., Akdi, Y., Aydogdu, H., Karabulut, I. 2006. *Parametre Tahmini ve Hipotez Testi, Bıçaklar Kitabevi*, Ankara, Türkiye.
- Rao, C.R. 1965. *Linear Statistical Inference and Its Applications*, John Wiley & Sons Inc., USA.

- Read, C.B. 1983. Gompertz Distribution, Encyclopedia of Statistical Sciences, Wiley, New York
- Reiser, B., Guttman, I. 1986. Statistical Inference for $P(Y < X)$: The Normal Case. Technometrics, 28: 253-257.
- Rohatgi, V.K. 1976. An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York.
- Roussas, G.G., 1973. A First Course in Mathematical Statistics. Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A.
- Saraçoğlu, B., Kaya, M.F., 2005. Reliability and Its Estimation for Gompertz Distribution, Ordered Statistical Data: Approximations, Bounds and Characterizations, International Conference, Izmir, Turkey.
- Serfling, R.J., 1980. Approximation Theorems of Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, Canada.
- Shahbazov, A. 2005. Olasılık Teorisine Giriş, Birsen Yayınevi, İstanbul, Türkiye
- Srinath, L.S. 2002. Mechanical Reliability, Affiliated East-West Press, New Delhi.
- Surles, J.G., Padgett, W.J. 1998. Inference for $P(Y < X)$ in the Burr Type X Model, J. Appl. Statist. Sci., 7: 225-238.
- Surles, J.G., Padgett, W.J. 2001. Inference for Reliability and Stress-Strength for a Scaled Burr Type X distribution, Lifetime Data Analysis, 7: 187-200.
- Tadimakalla P.R., 1980. A Look At the Burr And Related Distributions. International Statistical Review 48 : 337-344.

- Tong, H. 1974. A Note on the Estimation of $P[Y < X]$ in the Exponential Case. *Technometrics*, 16: 625.
- Tong, H. 1975. Letter to the Editor. *Technometrics* 17: 393.
- Wang, F. K., Keats, J. B., Zimmer, W. J., 1996. Maximum Likelihood Estimation of the Burr XII Parameters with Censored And Uncensored Data. *Microelectron. Reliab.* 36 359-362.
- Wingo, D.R., 1983. Maximum Likelihood Methods For Fitting the Burr Type XII Distribution to Life Test Data. *Biometrical J.* 25 : 77-84.
- Zimmer, W.J., Keats, J.B., Wang, F.K., 1998. The Burr XII Distribution in Reliability Analysis. *J. Qual. Tech.* 30 : 386-394.