

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİZİLERİN ÇEKİRDEĞİNİ DEĞİŞMEZ BIRAKAN DÖNÜŞÜMLER

İlknur SAKAOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2007**

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİZİLERİN ÇEKİRDEĞİNİ DEĞİŞMEZ BIRAKAN DÖNÜŞÜMLER

İlknur SAKAOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bir dizinin Knopp çekirdeği kavramı tanıtılıp buna ilişkin bazı örnekler ve özellikler verilmiş olup daha sonra da Knopp çekirdeğini değişmez bırakan matris dönüşümlerinin sınıfı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, sırasıyla istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel üst limit / alt limit, istatistiksel Cauchy dizisi, istatistiksel çekirdek, μ - istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılıp bunlara ilişkin bazı özellikler ve sonuçlar verilmiştir. Daha sonra da bir dizinin Knopp çekirdeği ve istatistiksel çekirdeği, onun regüler matris altındaki dönüşüm dizisinin Knopp çekirdeği ile istatistiksel çekirdeği arasındaki içerirlik bağıntılarıyla, istatistiksel çekirdeği değişmez bırakan matris dönüşümlerinin sınıfı incelenmiştir.

Son bölümde ise, kompleks terimli diziler için Bonsall çekirdeği kavramı tanıtılıp buna ilişkin bazı özellikler verilmiştir.

2007, 54 sayfa

Anahtar Kelimeler: Knopp çekirdeği, doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsak dizi, istatistiksel üst limit / alt limit, istatistiksel çekirdek, Bonsall çekirdeği.

ABSTRACT

Master Thesis

TRANSFORMATIONS LEAVING THE CORE INVARIANT OF SEQUENCES

İlknur SAKAOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In Chapter two, we study the concept of the Knopp core for a sequence and present some examples and properties related with it. Furthermore the matrix transformations leaving the Knopp core invariant of sequences are also given.

In Chapter three, we examine the concepts of statistical convergence, statistical limit superior / limit inferior, statistical Cauchy sequence, statistical core, μ - statistical convergence respectively. Some properties and results concerning these concepts are also given. Then inclusion theorems related to the Knopp core and statistical core of a sequence are studied. The matrix transformations leaving the statistical core invariant of sequences have been examined.

In the final chapter, we study the concept of Bonsall core for a complex sequence and give some properties.

2007, 54 pages

Key Words: Knopp core, natural density, statistically convergent sequence, statistical limit superior / limit inferior, statistical core, Bonsall core.

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma konusunu bana veren ve araŐtırmalarımın her aŐamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a en içten saygılarımla teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Sayın Yrd. Doç. Dr. Őeyhmus Yardımcı (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya ve her zaman yanımda olup desteklerini esirgemeyen canım aileme teşekkür ederim.

Bu tez alıŐması, 'Türkiye Bilimsel Teknik AraŐtırma Kurumu, Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı' tarafından desteklenmiŐtir.

İlknur SAKAOĞLU

Ankara, AĞustos 2007

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KNOPP ÇEKİRDEĞİNİ DEĞİŞMEZ BIRAKAN DÖNÜŞÜMLER.....	2
2.1 Matris Dönüşümleri.....	2
2.2 Bir Dizinin Knopp Çekirdeği.....	3
3. İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ DEĞİŞMEZ BIRAKAN DÖNÜŞÜMLER.....	17
3.1 İstatistiksel Yakınsaklık.....	17
3.2 İstatistiksel Üst Limit ve İstatistiksel Alt Limit.....	21
3.3 İstatistiksel Cauchy Dizisi.....	24
3.4 İstatistiksel Çekirdek.....	24
3.5 μ - İstatistiksel Yakınsaklık.....	33
4. BONSALL ÇEKİRDEĞİ.....	47
5. SONUÇ.....	51
6. KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ.....	54

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
$ E $	E kümesinin eleman sayısı
E^c	E kümesinin tümleyeni
$\{(Ax)_n\}$	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
c	Yakınsak diziler uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak diziler uzayı
C_1	Birinci mertebeden Cesàro matrisi
$h.h.k$	Hemen her k için
ℓ_∞	Sınırlı diziler uzayı
$\ell(x)$	$\liminf x_n$
$L(x)$	$\limsup x_n$
$L(Ax)$	$\limsup (Ax)_n$
st	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\delta(E)$	E kümesinin doğal yoğunluğu
χ_E	E kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\ \cdot\ _\infty$	ℓ_∞ uzayının alışılmış supremum normu
μ	Sonlu toplamsal küme fonksiyonu
ω	Reel ya da kompleks terimli tüm diziler uzayı

1. GİRİŞ

Matris dönüşümlerinin bir dizinin limit noktaları cümlesi üzerindeki etkisini araştırmak için Knopp tarafından ilk kez Knopp çekirdeği 1930 yılında tanıtılmıştır. Knopp, dönüşüm dizisinin çekirdeği, dizinin çekirdeğinin bir parçası olacak şekildeki dönüşümlerin sınıfını incelemiş ve dizinin çekirdeğinin, negatif olmayan regüler bir matris ile elde edilen dönüşüm dizisinin çekirdeğini içerdiğini ispatlamıştır. Reel terimli sınırlı diziler için 1979 yılında Maddox tarafından aynı içerirlik bağıntısı incelenmiş ve bir karakterizasyon verilmiştir. Ayrıca 1990 yılında Natarajan tarafından α -çekirdek kavramı tanıtılıp dönüşüm dizisinin Knopp çekirdeği ve dizinin α -çekirdeği arasındaki içerirlik bağıntısı verilmiştir. Knopp çekirdeğini istatistiksel çekirdek kavramına genişletmekte temel oluşturan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1949 yılında Steinhaus tarafından Polonya’da yapılan bir konferansta tanıtılmış ve 1951 yılında Fast tarafından geliştirilmiştir. Aslında bu tanım Zygmund (1979) tarafından da ele alınmış ve “hemen hemen yakınsaklık” olarak adlandırılmıştır. Daha sonra 1993 yılında Fridy tarafından istatistiksel limit noktaları kavramı verilmiş ve 1997 yılında Fridy ve Orhan tarafından istatistiksel limit superior ve istatistiksel limit inferior kavramları tanıtılmıştır ve bu kavramlar istatistiksel çekirdek kavramını tanımlamada kullanılmıştır. Kompleks terimli diziler için istatistiksel çekirdek kavramı 1997 yılında Fridy ve Orhan tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmada ilk olarak Knopp çekirdeği tanıtılacak ve Knopp çekirdeğini değişmez (invariant) bırakan matris dönüşümlerinin sınıfı incelenecektir. İstatistiksel yakınsaklık, istatistiksel limit, istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit kavramları ele alınacak ve istatistiksel çekirdek kavramı verilecektir. Daha sonra da bir dizinin Knopp çekirdeği ve istatistiksel çekirdeği, onun regüler matris altındaki dönüşüm dizisinin Knopp çekirdeği ile istatistiksel çekirdeği arasındaki içerirlik bağıntılarıyla, istatistiksel çekirdeği değişmez bırakan matris dönüşümlerinin sınıfı incelenecektir. Son bölümümüzde de bir vektör uzayında Bonsall fonksiyoneli yardımıyla tanımlanan Bonsall çekirdeği tanıtılacak ve özellikleri incelenecektir.

2. KNOPP ÇEKİRDEĞİNİ DEĞİŞMEZ BIRAKAN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde bir dizinin Knopp çekirdeği kavramı tanıtılacak ve bu dizinin Knopp çekirdeği ile onun regüler bir matris altındaki dönüşüm dizisinin Knopp çekirdeği arasındaki ilişki belirlenip daha sonra da dizinin Knopp çekirdeğini değişmez bırakan matris dönüşümlerinin sınıfı incelenecektir.

2.1 Matris Dönüşümleri

Knopp çekirdeğini tanıtmadan önce gerekli olan bazı tanım ve notasyonları verelim.

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $x = (x_n)$ bir dizi olsun. Eğer $(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ serisi her n doğal sayısı için yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi adı verilir (Maddox 1970).

X ve Y reel ya da kompleks terimli dizilerden oluşan iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Eğer her $x \in X$ için $((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X uzayından Y uzayı içine bir matris dönüşümü tanımlar denir ve X den Y içine tanımlı tüm matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir. Eğer A , X den Y içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ şeklinde yazılır.

$(X, Y; p)$ ile toplam ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı gösterilir. Örneğin c bütün $x = (x_n)$ yakınsak diziler uzayını göstermek üzere $A \in (c, c; p)$ olması her $x \in c$ için $\lim_n x_n = \lim_n (Ax)_n$ olması demektir. Bu şekildeki matrislere “*regüler matris*” adı verilir. Yani eğer bir A matrisi yakınsak diziyi yakınsak diziye dönüştürüyor ve dizinin limiti ile dönüşüm dizisinin limiti aynı oluyorsa bu A matrisine regüler matris denir.

$A \in (c, c; p)$ olması için gerek ve yeter şartları Silverman-Toeplitz Teoremi vermektedir. İleride sık sık başvuracağımız bu teoremin ifadesini aşağıda ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 2.1.1. (Silverman-Toeplitz) $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

$$(i) \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad (\text{her } k \text{ için})$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

olmasıdır (Boos 2000).

Tanım 2.1.2. Eğer $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ise, $A = (a_{nk})$ matrisine “*üçgensel*” ve A üçgensel olduğunda her n için $a_{nn} \neq 0$ ise, A matrisine “*normal matris*” veya “*üçgen matris*” denir (Cooke 1950).

Ayrıca negatif olmayan bir A matrisi deyimi tüm terimleri negatif olmayan matris anlamındadır.

2.2 Bir Dizinin Knopp Çekirdeği

Matris dönüşümlerinin bir dizinin limit noktaları cümlesi üzerindeki etkisini araştırmak için Knopp çekirdeği ilk kez Knopp tarafından tanıtılmıştır.

İçindeki tüm nokta çiftlerini birleştiren doğru parçalarını içeren bir cümleye “*konveks cümle*” adı verilir.

Tanım 2.2.1. (x_n) kompleks terimli bir dizi olmak üzere R_n , kompleks düzlemin x_n, x_{n+1}, \dots noktalarını içeren en küçük kapalı konveks bölgesi olsun. Bu durumda $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \dots$ olduğu açıktır.

$R := \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$ şeklinde tanımlanan ve zorunlu olarak konveks ve kapalı olan R cümlesine (x_n) dizisinin “*çekirdeği*” denir (Knopp 1930).

Knopp tarafından tanımlanan bir dizinin çekirdeği kavramından söz ederken, bu dizinin \mathcal{K} -çekirdeği diye söz edecek ve bir $x = (x_n)$ dizisinin \mathcal{K} -çekirdeğini $\mathcal{K}\text{-çek}\{x\}$ ile göstereceğiz.

R bölgesi (x_n) dizisinin tüm limit noktaları cümlesi olan D cümlesini içerir. Gerçekten, $x_0, (x_n)$ dizisinin bir limit noktası olsun. O halde $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = x_0$ olacak şekilde

(x_n) dizisinin bir (x_{n_i}) alt dizisi vardır. Herhangi bir p sayısı alalım ve q tamsayısını $n_q > p$ olacak şekilde belirleyelim. Bu durumda $x_{n_q}, x_{n_{q+1}}, x_{n_{q+2}}, \dots$ elemanları R_p içindedir. R_p kapalı olduğundan R_p deki dizilerin limit noktasını içerir. Böylece x_0, R_p içindedir. x_0 keyfi bir limit noktası olduğundan ispat tamamlanır.

Kolayca görüleceği gibi $\mathcal{K}\text{-çek}\{x\}=\{L\}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \rightarrow L$ olmasıdır. Eğer $\mathcal{K}\text{-çek}\{x\}=\emptyset$ ise (x_n) dizisi belirgin olarak iraksaktır denir (Cooke 1950).

Reel terimli ve sınırlı bir $x = (x_n)$ dizisinin \mathcal{K} -çekirdeği;

$$l(x) = \liminf_n x_n \text{ ve } L(x) = \limsup_n x_n$$

olmak üzere

$$[l(x), L(x)]$$

kapalı aralığı olduğu açıktır.

Şimdi aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 2.2.2.

$$x_n = \begin{cases} n & , \text{ } n \text{ çift ise} \\ ni & , \text{ } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olsun.

Bu durumda R_n cümlesi, orjinde dik açılı üçgensel bir bölgenin çıkarılmasıyla geriye kalan kompleks düzlemin birinci bölgesinden ibarettir.

$$x_1 = i, x_2 = 2, x_3 = 3i, x_4 = 4, \dots$$

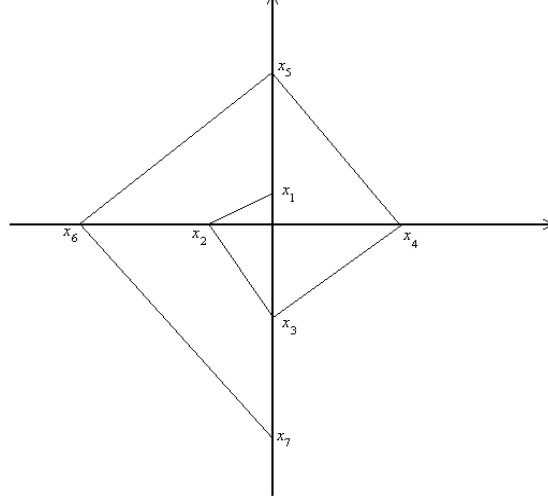
Buna göre (x_n) dizisinin \mathcal{K} -çekirdeğinin boş olduğu kolayca görülebilir. Yani

$$\mathcal{K}\text{-çek}\{x\} = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \dots = \emptyset$$

olup (x_n) dizisi belirgin olarak iraksaktır.

Örnek 2.2.3. $x_n = ni^n$ olmak üzere (x_n) dizisini gözönüne alalım. R_n kompleks düzlemin bütün noktalarını içerir.

$$x_1 = i, x_2 = -2, x_3 = -3i, x_4 = 4, x_5 = 5i, x_6 = -6, x_7 = -7i \dots$$



Bir dizinin çekirdeği ile onun regüler matris ile elde edilen dönüşüm dizisinin çekirdeği arasındaki ilişkiyi belirleyen Knopp Çekirdek Teoremini verelim.

Teorem 2.2.4. (Knopp Çekirdek Teoremi) Eğer $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ise bu durumda Ax dönüşüm dizisi mevcut olacak şekildeki reel terimli her x dizisi için

$$\mathcal{K}\text{-çek}\{Ax\} \subseteq \mathcal{K}\text{-çek}\{x\}$$

gerçeklenir (Knopp 1930).

İspat: Reel terimli (x_n) dizisinin çekirdeği $v = (a, b)$ ve Ax dönüşüm dizisinin çekirdeği $v' = (a', b')$ olsun. $\mathcal{K}\text{-çek}\{Ax\} \subseteq \mathcal{K}\text{-çek}\{x\}$ olduğunu göstermek için $a \leq a'$ ve $b' \leq b$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $b = \infty$ ise ispat açıktır. b sonlu olsun. \limsup tanımından en fazla sonlu sayıda $x_n, b + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) dan büyük olduğundan, $k > m$ olduğunda $x_k < b + \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir m tamsayısı vardır. Ayrıca A matrisi regüler olduğundan her k için $\lim_n a_{nk} = 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$x'_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k = \sum_{k=1}^m a_{nk}x_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

$$x_n'' := \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

olmak üzere (x_n') ve (x_n'') dizileri aynı limit noktaları cümlesine sahiptir. Diğer yandan $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olduğundan

$$x_n'' := \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk}x_k < (b + \varepsilon) \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} < (b + \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \rightarrow b + \varepsilon \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur. Dolayısıyla (x_n'') dizisinin her bir limit noktası $b + \varepsilon$ dan küçük veya eşittir. (x_n') ve (x_n'') dizilerinin limit noktaları aynı olduğundan (x_n') dizisinin de her bir limit noktası $b + \varepsilon$ dan küçük veya eşittir. Böylece $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $b' \leq b$ elde edilmiş olur.

Şimdi de $a \leq a'$ olduğunu gösterelim. $a = -\infty$ ise ispat açıktır. a sonlu olsun. a , (x_n) dizisinin alt limiti olduğundan, $-a$, $(-x_n)$ dizisinin üst limitidir.

$$-x_n' = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(-x_k)$$

olmak üzere $-a'$ de $(-x_n')$ dizisinin üst limitidir. Benzer şekilde ispat devam ettirilirse $-a' \leq -a$ elde edilmiş olur. Yani $a \leq a'$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi ileride yararlanacağımız bir lemmayı ispatsız olarak verelim.

Lemma 2.2.5. Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için $\|A\| < \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_n a_{nk} = 0$ gerçeklensin. Bu durumda

$$\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}y_k = \limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$$

ve $\|y\| \leq 1$ olacak şekilde sınırlı bir $y = (y_n)$ dizisi vardır (Simmons 1969).

Reel terimli sınırlı diziler için Knopp çekirdek teoremini karakterize eden eşitsizliği verelim.

Teorem 2.2.6. Bir $A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ gerçeklensin. Her

$x \in l_\infty$ için $L(Ax) \leq L(x)$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin regüler olması ve

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$$

olmasıdır (Maddox 1979).

İspat: Gereklilik: x reel terimli yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda

$$\liminf_n x_n = \limsup_n x_n = \lim_n x_n$$

olduğu açıktır. Ayrıca x sınırlı bir dizi olduğundan $-x$ de sınırlı bir dizi olup hipotezden her $x \in l_\infty$ için $L(Ax) \leq L(x)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\limsup_n (A(-x))_n \leq \limsup_n (-x_n)$$

yazabiliriz. O halde

$$-\limsup_n (-x_n) \leq -\limsup_n (A(-x))_n$$

olup, buradan

$$\liminf_n x_n \leq \liminf_n (Ax)_n$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_n x_n = \liminf_n x_n \leq \liminf_n (Ax)_n \leq \limsup_n (Ax)_n \leq \limsup_n x_n = \lim_n x_n$$

elde edilmiş olur. Bu durumda

$$\lim_n x_n = \liminf_n (Ax)_n = \limsup_n (Ax)_n = \lim_n (Ax)_n$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\lim_n x_n = \lim_n (Ax)_n$$

olup $Ax \in c$ elde edilir yani A regülerdir.

Şimdi de $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$ olduğunu gösterelim. Lemma 2.2.5'den

$$L(Ay) = \limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}y_k = \limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$$

ve $\|y\| \leq 1$ olacak şekilde sınırlı bir $y = (y_n)$ dizisi vardır. Regülerlikten

$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \liminf_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \liminf_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \\ &= L(Ay) \leq L(y) \leq \|y\| \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\liminf_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$$

ve dolayısıyla

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$$

elde edilmiş olur. Bu sonuç teoremin gerekliliğini ispatlar.

Yeterlilik: $A = (a_{nk})$ matrisi regüler ve $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$ gerçekleşsin. $x \in l_{\infty}$ alalım.

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda^+ = maks(\lambda, 0)$ ve $\lambda^- = maks(-\lambda, 0)$ olarak tanımlarsak

$$\lambda^+ + \lambda^- = \begin{cases} \lambda & , \lambda \geq 0 \\ -\lambda & , \lambda < 0 \end{cases}$$

ve

$$\lambda^+ - \lambda^- = \begin{cases} \lambda & , \lambda \geq 0 \\ \lambda & , \lambda < 0 \end{cases}$$

elde edilir. Yani $\lambda^+ + \lambda^- = |\lambda|$ ve $\lambda^+ - \lambda^- = \lambda$ bulunur. Ayrıca

$\lambda^- = \frac{1}{2} (|\lambda| - \lambda) \leq |\lambda| - \lambda$ gerçekleşir. Diğer yandan $x \in l_{\infty}$ olduğundan her k için

$|x_k| \leq \|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$ gerçektlenir. Bu durumda $m > 1$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k &= \sum_{k<m} a_{nk}x_k + \sum_{k \geq m} a_{nk}x_k \\
&= \sum_{k<m} a_{nk}x_k + \sum_{k \geq m} (a_{nk}^+)x_k - \sum_{k \geq m} (a_{nk}^-)x_k \\
&\leq \sum_{k<m} |a_{nk}| |x_k| + (\sup_{k \geq m} x_k) \sum_{k \geq m} (a_{nk}^+) - \sum_{k \geq m} (a_{nk}^-)x_k \\
&\leq \|x\|_\infty \sum_{k<m} |a_{nk}| + (\sup_{k \geq m} x_k) \sum_{k \geq m} |a_{nk}| + \|x\|_\infty \sum_{k \geq m} (|a_{nk}| - a_{nk})
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k &\leq \|x\|_\infty \sum_{k<m} \limsup_n |a_{nk}| + (\sup_{k \geq m} x_k) \limsup_n \sum_{k \geq m} |a_{nk}| \\
&\quad + \|x\|_\infty \limsup_n \sum_{k \geq m} (|a_{nk}| - a_{nk})
\end{aligned}$$

olup A matrisi regüler olduğundan Teoremin (i), (ii), (iii) koşullarından

$$L(Ax) = \limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \leq \|x\|_\infty \cdot 0 + (\sup_{k \geq m} x_k) \cdot 1 + \|x\|_\infty \cdot 0 = \sup_{k \geq m} x_k$$

Yani $L(Ax) \leq \sup_{k \geq m} x_k$ olur. Bu eşitsizlikte m üzerinden limit alırsak

$$L(Ax) \leq \lim_m (\sup_{k \geq m} x_k) = \limsup_k x_k = L(x)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sınırlı bir dizinin Knopp çekirdeğini değışmez bırakan matrisleri karakterize eden aşğıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2.7. Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ gerçektlensin. A matrisinin her bir sınırlı dizinin çekirdeğini değışmez bırakması için gerek ve yeter

şart

(i) A matrisinin regüler olması

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$

(iii) (p_i) ($i = 1, 2, \dots$) indislerinin her sonsuz dizisi için 1, $u_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n,p_i}$ ile tanımlı (u_n) dizisinin bir limit noktası

olmasıdır (Allen 1944).

ispat: Gereklilik: Kabul edelim ki A matrisi her bir sınırlı dizinin çekirdeğini deşışmez bıraksın. Yani (x_n) sınırlı bir dizi olmak üzere

$$\mathcal{K}\text{-çek}\{x\} = \mathcal{K}\text{-çek}\{Ax\}$$

olsun. Bu durumda Teorem 2.2.6' dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$ elde edilir. Özel olarak $x = (x_n)$ dizisi yakınsak ise $\lim_n x_n = \lim_n (Ax)_n$ olduğu açıktır yani A regülerdir.

Şimdi de (iii)' ün gerçeklendiğini gösterelim.

(p_i) ($i = 1, 2, \dots$) herhangi bir sonsuz indis dizisi olsun. (x_k) dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1 & , k = p_i \\ 0 & , k \neq p_i \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda dizide sonsuz sayıda 1 elemanı olduğu açıktır.

Eğer (x_n) dizisi sonlu sayıda sıfır terimine sahip ise her $\varepsilon > 0$ için (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğerk bütün terimleri 1 sayısının ε komşuluğunda bulunur. O halde $\lim_n x_n = 1$ gerçekenir.

Eğer (x_n) dizisi sonsuz sayıda sıfır terimine sahip ise (x_n) dizisinin çekirdeğı $[0, 1]$ aralığıdır. Böylece

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n,p(i)} =: u_n$$

olup hipotezden (u_n) dizisinin çekirdeği ile (x_n) dizisinin çekirdeği aynı olduğundan 1, (u_n) dizisinin bir limit noktası olmalıdır.

Yeterlilik: (i), (ii) ve (iii) gerçeklensin. $x = (x_n)$ sınırlı bir dizi ve A matrisi regüler olduğundan Ax dönüşüm dizisinin mevcut olduğu açıktır. Teorem 2.2.6' dan $\mathcal{K}\text{-çek}\{Ax\} \subseteq \mathcal{K}\text{-çek}\{x\}$ elde ederiz. İspatı tamamlamak için $\mathcal{K}\text{-çek}\{x\} \subseteq \mathcal{K}\text{-çek}\{Ax\}$ olduğunu göstermeliyiz.

(x_n) sınırlı olduğundan $\mathcal{K}\text{-çek}\{x\}$, (x_n) dizisinin limit noktalarının konveks bir örtüsüdür. Dolayısıyla $\mathcal{K}\text{-çek}\{x\} \subseteq \mathcal{K}\text{-çek}\{Ax\}$ olduğunu göstermek için (x_n) dizisinin limit noktaları cümlesinin, Ax dönüşüm dizisinin limit noktaları cümlesinin alt cümlesi olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki (x_n) sınırlı ve a , (x_n) dizisinin bir limit noktası olsun. Bu durumda

$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{p_i} = a$ olacak şekilde (p_i) ($i = 1, 2, \dots$) dizisi mevcuttur.

$\{q_j\} = \mathbb{N} \setminus \{p_i\}$ olsun. Şimdi

$$y_n = (Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n,p(i)}x_{p(i)} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,q(j)}x_{q(j)}$$

yazılabilir. (iii) den

$$u_{m_r} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{m(r),p(i)} \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow \infty)$$

olacak şekilde (m_r) dizisi vardır.

Ayrıca

$$y_{m(r)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{m(r),p(i)}x_{p(i)} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m(r),q(j)}x_{q(j)}$$

yazılabilir.

$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{p(i)} = a$ olduğundan $x_{p(i)} = a + \varepsilon_{p(i)}$, $\varepsilon_{p(i)} \rightarrow 0$ olacak biçimde $(\varepsilon_{p(i)})$ dizisi vardır. Böylece $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $i > N$ için $|\varepsilon_{p(i)}| \leq \varepsilon$ olacak biçimde bir N

sayısı vardır. O halde

$$\begin{aligned}
y_{m(r)} - a &= \sum_{i=1}^{\infty} a_{m(r),p(i)}x_{p(i)} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m(r),q(j)}x_{q(j)} - a \\
&= \sum_{i=1}^N a_{m(r),p(i)}x_{p(i)} + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m(r),p(i)}x_{p(i)} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m(r),q(j)}x_{q(j)} - a \\
&= \sum_{i=1}^N a_{m(r),p(i)}x_{p(i)} + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m(r),p(i)}x_{p(i)} + a \sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m(r),p(i)} \\
&\quad - a \sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m(r),p(i)} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m(r),q(j)}x_{q(j)} - a \\
&= \sum_{i=1}^N a_{m(r),p(i)}x_{p(i)} + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m(r),p(i)}\varepsilon_{p(i)} + a \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m(r),p(i)} - 1 \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m(r),q(j)}x_{q(j)}
\end{aligned}$$

olup, $x \in l^\infty$ olduğundan her k için $|x_k| \leq \|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$

gerçeklendiğinden,

$$\begin{aligned}
|y_{m(r)} - a| &\leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^N |a_{m(r),p(i)}| + \varepsilon \sum_{i=N+1}^{\infty} |a_{m(r),p(i)}| + |a| \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m(r),p(i)} - 1 \right| \\
&\quad + \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} |a_{m(r),q(j)}|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Her iki tarafta $r \rightarrow \infty$ limit alınırsa

$$\sum_{i=1}^N |a_{m(r),p(i)}| \rightarrow 0$$

ve

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} a_{m(r),p(i)} \rightarrow 1$$

olduğu açıkça görülmektedir.

Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{m(r),k}| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{m(r),p(i)}| + \sum_{j=1}^{\infty} |a_{m(r),q(j)}|$$

olduğunu ve (ii) den

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{m(r),k}| \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow \infty)$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $r > r_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{m(r),k}| \leq 1 + \varepsilon$$

olacak biçimde bir r_0 sayısı vardır. Dolayısıyla, $r > r_0$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{m(r),p(i)}| \leq 1 + \varepsilon$$

elde edilir. (iii) den

$$u_{m_r} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{m(r),p(i)} \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow \infty)$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $r > r_1$ için

$$|u_{m(r)} - 1| \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bir r_1 sayısı vardır. Dolayısıyla

$$||u_{m(r)}| - 1| \leq |u_{m(r)} - 1| \leq \varepsilon$$

elde edilir.

$$1 - \varepsilon \leq |u_{m(r)}| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_{m(r),p(i)} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_{m(r),p(i)}| \leq 1 + \varepsilon$$

gerçeklenip her $r > maks \{r_0, r_1\}$ için

$$1 - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} |a_{m(r),p(i)}| < 1 + \varepsilon$$

olup

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{m(r),p(i)}| \rightarrow 1, (r \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Böylece (ii) den

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{m(r),q(j)}| \rightarrow 0$$

olduğu açıktır.

Bu durumda $|y_{m(r)} - a| \leq \varepsilon$ olduğundan a , y dizisinin bir limit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Örnekler 2.2.8. Teorem 2.2.7 aşağıdaki matrisler tarafından sağlanır.

1. $d_n \rightarrow 1$ olacak şekilde herhangi bir diagonal matris.
2. Permütatörler yani herbir satır ve sütununda bir tane sıfır olmayan eleman bulunup sıfır olmayan elemanların hepsi 1 olan sonsuz matrisler.
3. $k < n$ için $a_{nk} = 0$, $a_{nn} = 1$, $k > n$ için $a_{nk} = \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$.

Şimdi x kompleks terimli dizisi için Shcherbakov tarafından tanımlanan α -çekirdek kavramını tanıtalım ve daha sonra yararlanacağımız faydalı bir teoremi ispatsız olarak verelim.

x kompleks terimli bir dizi olsun.

$$C_r(z) := \{z' \in \mathbb{C} : |z' - z| \leq r\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{K}\text{-çek}\{x\} := \bigcap_{z \in \mathbb{C}} C_{\limsup_n |z - x_n|}(z)$$

olarak da verilebilir (Shcherbakov 1977).

$\alpha \geq 1$ olmak üzere Shcherbakov, bir sınırlı kompleks x dizisinin çekirdeğini;

$$\mathcal{K}^{(\alpha)\text{-çek}}\{x\} := \bigcap_{z \in \mathbb{C}} C_{\alpha \limsup_n |z - x_n|}(z)$$

olan α -çekirdeğe genelleştirmiştir.

Teorem 2.2.9. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya \mathbb{C} , $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris, $a_{nk} \in \mathbb{K}$, $n, k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere herhangi bir sınırlı x dizisi için

$$\mathcal{K}\text{-çek}\{Ax\} \subset \mathcal{K}^{(\alpha)\text{-çek}}\{x\}, \quad \alpha \geq 1$$

olması için gerek ve yeter şart A regüler ve

$$\limsup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \right) \leq \alpha, \quad \alpha \geq 1$$

olmasıdır (Natarajan 1990).

3. İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ DEĞİŞMEZ BIRAKAN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde bir dizi için verilen Knopp çekirdeği kavramını istatistiksel çekirdek kavramına genişletip, Knopp çekirdeği ve istatistiksel çekirdek arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Daha sonra bir dizinin dönüşüm dizisinin Knopp çekirdeği, dizinin istatistiksel çekirdeğinin alt cümlesi olacak şekildeki matrisleri karakterize edip, istatistiksel çekirdeği değişmez bırakan matris dönüşümlerinin sınıfını inceleyeceğiz. Bunun için ilk olarak ihtiyaç duyacağımız tanım ve teoremleri verelim.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

\mathbb{N} doğal sayılar cümlesini göstermek üzere bir $K \subset \mathbb{N}$ alt cümlesi verilsin. K cümlesinin eleman sayısı da $|K|$ ile gösterilsin.

Tanım 3.1.1. $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olmak üzere bir $K \subset \mathbb{N}$ alt cümlesi için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |K_n|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K cümlesinin “yoğunluğu” (veya “doğal yoğunluğu”) denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir (Niven ve Zuckerman 1980).

Ayrıca (a_k) pozitif tamsayıların bir dizisi ve $K = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K)$ mevcut ise bu durumda $\delta(K) := \lim_n \frac{n}{a_n}$ ile verilir (Niven ve Zuckerman 1980).

Örneğin,

$$\delta(\mathbb{N}) = 1$$

$$K_1 = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\} \text{ cümlesi için } \delta(K_1) = 0$$

$$K_2 = \{2k : k \in \mathbb{N}\} \text{ cümlesi için } \delta(K_2) = \frac{1}{2}$$

$$K_3 = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\} \text{ cümlesi için } \delta(K_3) = \frac{1}{2}$$

olduğu yoğunluk tanımından kolayca elde edilebilir. Hatta asal sayılar kümesi sıfır yoğunluklu olduğu gibi doğal sayıların her bir sonlu alt cümlesi de sıfır yoğunlukludur.

Ayrıca $\delta(K)$ veya $\delta(\mathbb{N} \setminus K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise bu durumda $\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus K)$ olacaktır.

Tanım 3.1.2. $x := (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına “*istatistiksel yakınsaktır*” denir ve $st\text{-}\lim x = L$ şeklinde gösterilir (Steinhaus 1951, Fast 1951).

Şimdi istatistiksel yakınsaklık için başka bir karakterizasyon verelim.

Teorem 3.1.3. $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = 1$ ve $\lim_k x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir (n_k) indis dizisinin var olmasıdır (Salat 1980, Fridy 1985, Connor 1989).

O halde Teorem 3.1.3’den $st\text{-}\lim_k x_k = L$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $\delta(K) = 1$ olacak şekilde öyle bir $K \subset \mathbb{N}$ alt cümlesi ve $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in K$ için $|x_n - L| < \varepsilon$ sağlanır. Kısaca sıfır yoğunluklu indis kümesi dışında (ya da eşdeğer olarak bir yoğunluklu indis kümesi üzerinde) x dizisi L değerine ordinary yakınsak olması halinde, x dizisi L değerine istatistiksel yakınsak olacaktır.

Örnek 3.1.4.

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = m^2 \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Bu durumda Teorem 3.1.3’den $st\text{-}\lim_k x_k = 0$ olduğu açıktır.

Örnek 3.1.5.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = m^2 \\ 1 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Bu durumda $st\text{-}\lim_k x_k = 1$ elde edilir.

Burada istatistiksel yakınsaklık ile bilinen yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olduğu sorusu akla gelebilir. İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılacağı gibi eğer x dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum, istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla istatistiksel yakınsak diziler uzayı st ile gösterilmek üzere $c \subset st$ olduğu kolayca görülür. Örnek 3.1.4 ve 3.1.5'den görüleceği gibi sınırlı iraksak ya da sınırsız iraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir.

Bir $x = (x_k)$ dizisi sıfır yoğunluğa sahip bir cümleinin dışındaki her k için bir P özelliğine sahip ise x dizisi hemen her k için P özelliğine sahiptir diyeceğiz ve bunu *h.h.k* ile kısaltacağız.

$\{x_{k(j)}\}$, $x = (x_k)$ dizisinin bir alt dizisi ve $K = \{k(j) : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ ise $\{x_{k(j)}\}$ dizisine x dizisinin bir “*ince alt dizisi*” ve $\delta(K) \neq 0$ ise $\{x_{k(j)}\}$ dizisine x dizisinin bir “*ince olmayan alt dizisi*” adı verilir. $\delta(K) \neq 0$ olması ya $\delta(K) > 0$ ya da K nin doğal yoğunluğa sahip olmaması anlamına gelir.

Tanım 3.1.6. $x = (x_k)$ dizisinin bir λ sayısına yakınsayan ince olmayan alt dizisi varsa, bu durumda λ sayısına x dizisinin bir “*istatistiksel limit noktası*” denir. İstatistiksel limit noktaları cümlesi Λ_x ile gösterilir (Fridy 1993).

Örnek 3.1.7.

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2 \\ 0 & , \quad k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. x dizisinin alışılmış limit noktaları kümesi L_x ile gösterilmek üzere

$L_x = \{0, 1\}$ ve $\Lambda_x = \{0\}$ dir.

Örnek 3.1.8. $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, değer cümlesi tüm rasyonel sayılar cümlesi olan bir dizi ve

$x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} r_n & , k = n^2 \\ k & , k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$K := \{k = n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ olduğundan $\Lambda_x = \emptyset$ dir. $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ cümlesi \mathbb{R} reel sayılar kümesinde yoğun olduğundan $L_x = \mathbb{R}$ dir.

Tanım 3.1.9. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta \{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\} \neq 0$ ise γ sayısına x dizisinin “*istatistiksel değme noktası*” denir. İstatistiksel değme noktaları cümlesi Γ_x ile gösterilir (Fridy 1993).

Önerme 3.1.10. Ayrıca herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x \subseteq L_x$ içerirlik bağıntısı vardır (Fridy 1993).

Teorem 3.1.11. Eğer x ve y dizileri verildiğinde hemen her k için $x_k = y_k$ gerçekleşirse $\Lambda_x = \Lambda_y$, $\Gamma_x = \Gamma_y$ olmalıdır (Fridy 1993).

Teorem 3.1.12. Bir $p > 0$ pozitif reel sayısı için

$$w_p = \left\{ x : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

dizi uzayını tanımlayalım. Eğer $x \in w_p$ ise x dizisi L kompleks sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir denir.

p -Cesàro toplanabilirlik ve istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 3.1.13. $p \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

- i. Bir dizi bir L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise L sayısına istatistiksel yakınsaktır.
- ii. Sınırlı bir dizi L sayısına istatistiksel yakınsak ise L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir (Connor 1988).

Bu durumda $w_p \cap l_\infty = st \cap l_\infty$ olduğu açıktır.

Ayrıca Maddox 1974 yılında sınırlı ve p -Cesàro toplanabilir diziler için matris karakterizasyonu vermiştir.

Teorem 3.1.14. $p > 0$ olmak üzere $A \in (w_p \cap l_\infty, c; p)$ olması için gerek ve yeter şart

(i) A regüler

(ii) $\delta(E) = 0$ olan her $E \subset \mathbb{N}$ cümlesi için $\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$

olmasıdır (Maddox 1974, Kolk 1993).

3.2 İstatistiksel Üst Limit ve İstatistiksel Alt Limit

Fridy ve Orhan tarafından tanımlanan istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit kavramlarını verelim.

Bir x reel sayı dizisi için

$$B_x := \{b \in \mathbb{R} : \delta\{k : x_k > b\} \neq 0\}$$

$$A_x := \{a \in \mathbb{R} : \delta\{k : x_k < a\} \neq 0\}$$

olsun. Bu durumda “*istatistiksel üst limit*” ve “*istatistiksel alt limit*” kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.2.1. Eğer x reel sayı dizisi ise bu dizinin istatistiksel üst limiti

$$st\text{-}\lim \sup x := \begin{cases} \sup B_x & , B_x \neq \emptyset \\ -\infty & , B_x = \emptyset \end{cases}$$

ve istatistiksel alt limiti

$$st\text{-}\lim \inf x := \begin{cases} \inf A_x & , A_x \neq \emptyset \\ +\infty & , A_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Fridy ve Orhan 1997).

Tanım 3.2.2. Bir $x = (x_k)$ dizisi için $\delta\{k : |x_k| > B\} = 0$ olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı varsa, x dizisine “*istatistiksel sınırlıdır*” denir (Fridy ve Orhan 1997).

Örnek 3.2.3.

$$x_k = \begin{cases} k & , \quad k \text{ tek tamkare ise} \\ 2 & , \quad k \text{ çift tamkare ise} \\ 1 & , \quad k \text{ tek ve tamkare değilse} \\ 0 & , \quad k \text{ çift ve tamkare değilse} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. x dizisi üstten sınırlı değildir. $\delta\{k \in \mathbb{N} : |x_k| > 1\} = 0$ olduğundan x dizisi istatistiksel sınırlıdır. Böylece $B_x = (-\infty, 1)$ ve $A_x = (0, +\infty)$ olup $st\text{-lim sup } x = 1$ ve $st\text{-lim inf } x = 0$ dir. x dizisi 0'a ve 1'e yakınsayan pozitif yoğunluğa sahip iki alt diziyeye sahip olduğundan istatistiksel yakınsak değildir. $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel değme noktalarının cümlesi $\Gamma_x = \{0, 1\}$ dir.

Teorem 3.2.4. Reel terimli bir x dizisi için $\beta := st\text{-lim sup } x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k : x_k > \beta - \varepsilon\} \neq 0 \text{ ve } \delta\{k : x_k > \beta + \varepsilon\} = 0 \quad (1)$$

olur. Karşıt olarak (1) gerçekleşirse $\beta = st\text{-lim sup } x$ olmalıdır (Fridy ve Orhan 1997).

Ayrıca benzer özellik $st\text{-lim inf } x$ için de aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2.5. Reel terimli bir x dizisi için $\alpha := st\text{-lim inf } x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k : x_k < \alpha + \varepsilon\} \neq 0 \text{ ve } \delta\{k : x_k < \alpha - \varepsilon\} = 0 \quad (2)$$

olur. Karşıt olarak (2) gerçekleşirse $\alpha = st\text{-lim inf } x$ olmalıdır (Fridy ve Orhan 1997).

İstatistiksel değme noktası tanımından ve Teorem 3.2.4, Teorem 3.2.5'den $st\text{-lim sup } x$, x dizisinin en büyük istatistiksel değme noktası; $st\text{-lim inf } x$, x dizisinin en küçük istatistiksel değme noktasıdır diyebiliriz.

Teorem 3.2.6. Herhangi bir x dizisi için

$$st\text{-}\lim \inf x \leq st\text{-}\lim \sup x$$

gerçeklenir (Fridy ve Orhan 1997).

Ayrıca Teorem 3.2.6'dan

$$\lim \inf x \leq st\text{-}\lim \inf x \leq st\text{-}\lim \sup x \leq \lim \sup x$$

olduğu açıktır.

Aşağıdaki sonuç yakınsak dizilerin temel bir özelliğinin istatistiksel benzeridir.

Teorem 3.2.7. İstatistiksel sınırlı bir x dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$st\text{-}\lim \inf x = st\text{-}\lim \sup x$$

olmasıdır (Fridy ve Orhan 1997).

3.3 İstatistiksel Cauchy dizisi

Klasik analizden bildiğimiz “Cauchy dizisi” kavramının istatistiksel benzeri 1985 yılında Fridy tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.3.1. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise, bu durumda x dizisine “*istatistiksel Cauchy dizisi*” denir (Fridy 1985).

Bu durumda x bir istatistiksel Cauchy dizisi ise keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde hemen her k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ gerçekleşecek biçimde $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcuttur.

Teorem 3.3.2. Bir $x = (x_k)$ dizisi için aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır.
- (ii) x istatistiksel Cauchy dizisidir.
- (iii) *h.h.k* için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Fridy 1985).

3.4 İstatistiksel Çekirdek

Bu kısımda istatistiksel çekirdek kavramını tanıtacağız.

Tanım 3.4.1. Eğer x istatistiksel sınırlı reel sayı dizisi ise x dizisinin istatistiksel çekirdeği;

$$[st\text{-}\lim \inf x , st\text{-}\lim \sup x]$$

kapalı aralığı olarak tanımlanır. x istatistiksel sınırlı olmadığında x dizisinin istatistiksel çekirdeği;

$$[st\text{-}\lim \inf x , \infty) , (-\infty , st\text{-}\lim \sup x] , (-\infty , \infty)$$

aralıklarından biri olarak tanımlanır (Fridy ve Orhan 1997).

Ayrıca $\liminf x \leq st\text{-}\liminf x \leq st\text{-}\limsup x \leq \limsup x$ bağıntısından reel terimli bir x dizisi için $\mathcal{K}\text{-}\check{c}ek\{x\} \subseteq st\text{-}\check{c}ek\{x\}$ olduğu açıktır.

Lemma 3.4.2. Reel terimli bir $A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ gerçeklensin. Her $x \in l_{\infty}$ reel terimli dizisi için

$$\limsup Ax \leq st\text{-}\limsup x$$

olması için gerek ve yeter şart

(i) A regüler

(ii) $\delta(E) = 0$ özellikli her $E \subseteq \mathbb{N}$ için $\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$

(iii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$

olmasıdır (Fridy ve Orhan 1997).

İspat: Gereklilik: $A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ gerçeklensin ve her $x \in l_{\infty}$ reel terimli dizisi için $\limsup Ax \leq st\text{-}\limsup x$ olsun. x sınırlı dizi olduğundan $-x$ de sınırlıdır, dolayısıyla $-x$ için de hipotez gerçekenir. Yani

$$\limsup(-Ax) \leq st\text{-}\limsup(-x)$$

olup

$$-st\text{-}\limsup(-x) \leq -\limsup(-Ax)$$

dır. Bu durumda

$$st\text{-}\liminf x \leq \liminf Ax \leq \limsup Ax \leq st\text{-}\limsup x$$

elde edilir. Eğer x istatistiksel yakınsak ve sınırlı bir dizi ise

$st\text{-lim } x = st\text{-lim sup } x = st\text{-lim inf } x$ olacağından $\lim Ax = st\text{-lim } x$ elde edilir. Yani $A \in (st \cap l_\infty, c; p)$ olmalıdır. Bu durumda Teorem 3.1.14'den (i) ve (ii) şartları gerçekleşmiş olur. Şimdi de $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$ olduğunu gösterelim.

Her $x \in l_\infty$ için

$$\limsup Ax \leq \limsup x$$

olup Teorem 2.2.6'dan $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$ elde edilir. Yani (iii) de gerçekleşmiş olur.

Yeterlilik: (i), (ii), (iii) gerçekleşsin ve $x \in l_\infty$ reel terimli bir dizi olsun. Bu durumda $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olduğundan $Ax \in l_\infty$ ve $\beta(x) = st\text{-lim sup } x$ olmak üzere $\beta(x)$ sonludur. $\varepsilon > 0$ için $E := \{k : x_k > \beta(x) + \varepsilon\}$ olmak üzere Teorem 3.2.4'den $\delta(E) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $k \notin E$ ise $x_k \leq \beta(x) + \varepsilon$ olacaktır.

Teorem 2.2.6'nın yeterlilik kısmındaki benzer düşünceyi kullanırsak sabit bir pozitif m sayısı için

$$\begin{aligned} (Ax)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k < m} a_{nk}x_k + \sum_{k \geq m} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k < m} a_{nk}x_k + \sum_{k \geq m} (a_{nk}^+)x_k - \sum_{k \geq m} (a_{nk}^-)x_k \\ &= \sum_{k < m} a_{nk}x_k + \sum_{\substack{k \geq m \\ k \notin E}} (a_{nk}^+)x_k + \sum_{\substack{k \geq m \\ k \in E}} (a_{nk}^+)x_k - \sum_{k \geq m} (a_{nk}^-)x_k \\ &\leq \|x\|_\infty \sum_{k < m} |a_{nk}| + \sum_{\substack{k \geq m \\ k \notin E}} (a_{nk}^+)x_k + \sum_{\substack{k \geq m \\ k \in E}} (a_{nk}^+)x_k + \|x\|_\infty \sum_{k \geq m} (|a_{nk}| - a_{nk}) \\ &\leq \|x\|_\infty \sum_{k < m} |a_{nk}| + (\beta(x) + \varepsilon) \sum_{\substack{k \geq m \\ k \notin E}} |a_{nk}| + \|x\|_\infty \sum_{\substack{k \geq m \\ k \in E}} |a_{nk}| \\ &\quad + \|x\|_\infty \sum_{k \geq m} (|a_{nk}| - a_{nk}) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Her iki tarafa \limsup operatörünü uygulayıp (i), (ii), (iii) koşullarını gözönünde bulundurursak

$$\limsup_n (Ax)_n \leq \beta(x) + \varepsilon$$

elde ederiz. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\limsup Ax \leq st\text{-}\limsup x$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

$st\text{-}\liminf x \leq \liminf Ax$ için de benzer bir sonucun elde edileceği açıktır. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.4.3. (İstatistiksel Çekirdek Teoremi) Reel terimli bir $A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ gerçeklensin. Her $x \in l_{\infty}$ reel terimli dizisi için

$$\mathcal{K}\text{-çek}\{Ax\} \subseteq st\text{-çek}\{x\}$$

olması için gerek ve yeter şart

(i) A regüler

(ii) $\delta(E) = 0$ özellikli her $E \subseteq \mathbb{N}$ için $\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$

(iii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$

olmasıdır (Fridy ve Orhan 1997).

Kompleks terimli bir x dizisinin Knopp çekirdeğini, $\{x_k\}_{k \geq n}$ terimlerinin kapalı konveks hull'u $R_n(x)$ olmak üzere

$$\mathcal{K}\text{-çek}\{x\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(x)$$

olarak tanımlamıştık. Ayrıca Shcherbakov tarafından her bir sınırlı x dizisi için

$$B_x^*(z) := \left\{ w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq \limsup_k |x_k - z| \right\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{K}\text{-çek}\{x\} := \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x^*(z)$$

olduğu gösterilmiştir (Shcherbakov 1977).

Tanım 3.4.4. Herhangi $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisi için $\mathcal{H}(x)$, *h.h.k* için x_k terimlerini içeren bütün kapalı yarı düzlemlerin sınıfı yani

$$\mathcal{H}(x) := \{H : H \text{ kapalı yarı düzlem ve } \delta\{k : x_k \in H\} = 1\}$$

olsun. x dizisinin istatistiksel çekirdeği,

$$st\text{-çek}\{x\} := \bigcap_{H \in \mathcal{H}(x)} H$$

ile verilir (Fridy ve Orhan 1997).

$\mathcal{K}\text{-çek}\{x\}$ için verilen tanımda $R_n(x)$ kapalı konveks hull'u $\{x_k\}_{k \geq n}$ 'yi içeren tüm kapalı yarı düzlemlerin arakesitidir. $st\text{-çek}\{x\}$ için verilen tanımda $\{x_k\}_{k \geq n}$ 'in yerine 1 yoğunluğa sahip keyfi bir alt dizi alındığından x dizisi için $st\text{-çek}\{x\} \subseteq \mathcal{K}\text{-çek}\{x\}$ olduğu açıktır.

Önerme 3.4.5. Eğer x kompleks terimli istatistiksel sınırlı bir dizi ise

$$\Gamma_x \subseteq st\text{-çek}\{x\}$$

olur (Li ve Fridy 2000).

Önerme 3.4.6. Eğer x kompleks terimli istatistiksel sınırlı bir dizi ise $st\text{-lim } x = \gamma$ olması için gerek ve yeter şart γ nın x dizisinin tek istatistiksel değme noktası olmasıdır (Li ve Fridy 2000).

Çekirdek kavramına ilişkin olarak bazı teoremleri verebilmek için ihtiyacımız olan aşağıdaki lemmayı ispatsız olarak verelim

Lemma 3.4.7. x istatistiksel sınırlı bir dizi ve her bir $z \in \mathbb{C}$ için

$$B_x(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq \underset{k}{st\text{-lim sup}} |x_k - z|\}$$

olsun. Bu durumda

$$st\text{-çek}\{x\} := \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$$

gerçeklenir (Fridy ve Orhan 1997).

Eğer x istatistiksel sınırlı bir dizi değil ise Lemma 3.4.7 doğru değildir. Bunu görmek için $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k := k$ şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Bu dizi bir istatistiksel değme noktasma sahip değildir ve $st\text{-çek}\{x\} = \emptyset$ dir. Herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ verildiğinde, *h.h.k* için x_k terimlerini içeren sonlu yarıçaplı bir disk yoktur. Böylece $\underset{k}{st\text{-lim sup}} |x_k - z| = \infty$ ve $B_x(z)$ kompleks düzlemin tamamı olup $\bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z) = \mathbb{C}$ elde edilir.

x kompleks terimli dizi olduğunda İstatistiksel Çekirdek Teoremini aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Teorem 3.4.8. Kompleks terimli bir $A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ gerçeklensin. Her $x \in l_{\infty}$ kompleks terimli dizisi için

$$\mathcal{K}\text{-çek}\{Ax\} \subseteq st\text{-çek}\{x\}$$

olması için gerek ve yeter şart

(i) A regüler

(ii) $\delta(E) = 0$ özellikli her $E \subseteq \mathbb{N}$ için $\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$

(iii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$

olmasıdır (Fridy ve Orhan 1997).

İspat: Gereklik: $A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ gerçeklensin. Her $x \in l_{\infty}$ için $\mathcal{K}\text{-çek}\{Ax\} \subseteq st\text{-çek}\{x\}$ olsun. Eğer $st\text{-lim } x = L$ ise

$\{L\} = st\text{-}\check{\text{cek}}\{x\} \supseteq \mathcal{K}\text{-}\check{\text{cek}}\{Ax\}$ olur. $x \in l_\infty$ için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ gerçektendiğinden $Ax \in l_\infty$ olacağından $\mathcal{K}\text{-}\check{\text{cek}}\{Ax\} \neq \emptyset$, dolayısıyla $\mathcal{K}\text{-}\check{\text{cek}}\{Ax\} = \{L\}$ olmalıdır. Bu durumda $A \in (st \cap l_\infty, c; p)$ gerçekenmektedir. Teorem 3.1.14'den (i), (ii) elde edilir. Ayrıca $\mathcal{K}\text{-}\check{\text{cek}}\{Ax\} \subseteq st\text{-}\check{\text{cek}}\{x\} \subseteq \mathcal{K}\text{-}\check{\text{cek}}\{x\}$ gerçektendir. Bunun yanı sıra $\alpha = 1$ ve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ için Teorem 2.2.9'dan $\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq 1$ elde edilir.

Diğer yandan A regüler olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= \limsup_k \sum_k a_{nk} \leq \limsup_k \sum_k |a_{nk}| \leq 1 \\ 1 &= \liminf_k \sum_k a_{nk} \leq \liminf_k \sum_k |a_{nk}| \leq \limsup_k \sum_k |a_{nk}| \leq 1 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$ yani (iii) elde edilmiş olur.

Yeterlilik: (i), (ii), (iii) koşulları sağlansın. Her $x \in l_\infty$ kompleks terimli dizisi için $\mathcal{K}\text{-}\check{\text{cek}}\{Ax\} \subseteq st\text{-}\check{\text{cek}}\{x\}$ olduğunu göstermeliyiz.

$w \in \mathcal{K}\text{-}\check{\text{cek}}\{Ax\}$ olsun. Herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} |w - z| &\leq \limsup_n |z - (Ax)_n| \\ &= \limsup_n \left| z - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right| \\ &= \limsup_n \left| z - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z \right| \\ &\leq \limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (z - x_k) \right| + \limsup_n |z| \left| 1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right| \end{aligned}$$

A matrisi regüler olduğundan $\limsup_n \left| 1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right| = 0$ olur. Dolayısıyla

$$|w - z| \leq \limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (z - x_k) \right|$$

elde edilir. $r := st\text{-}\limsup |x_k - z|$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $E := \{k : |z - x_k| > r + \varepsilon\}$ olsun. Teorem 3.2.4'den $\delta(E) = 0$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(z - x_k) \right| &= \left| \sum_{k \in E} a_{nk}(z - x_k) + \sum_{k \notin E} a_{nk}(z - x_k) \right| \\ &\leq \sup_k |z - x_k| \sum_{k \in E} |a_{nk}| + (r + \varepsilon) \sum_{k \notin E} |a_{nk}| \end{aligned}$$

olup (ii) ve (iii) koşullarından

$$\limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(z - x_k) \right| \leq r + \varepsilon$$

bulunur. Dolayısıyla $|w - z| \leq r + \varepsilon$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $|w - z| \leq r$ elde edilir. Böylece $w \in B_x(z)$ olup Lemma 3.4.7'den $w \in st\text{-}\check{c}ek\{x\}$ olur bu da ispatı tamamlar.

Herhangi bir dizinin istatistiksel çekirdeği \mathcal{K} -çekirdeğinin bir alt cümlesi olduğundan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4.9. $A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ ve Teorem 3.4.8'in (i), (ii) ve (iii) şartları gerçekleşirse her bir $x \in l_{\infty}$ için

$$st\text{-}\check{c}ek\{Ax\} \subseteq st\text{-}\check{c}ek\{x\}$$

olur (Fridy ve Orhan 1997).

Ancak bu sonucun karşıtı doğru değildir. Şimdi buna bir örnek verelim.

Örnek 3.4.10. A matrisini $h.h.n$ için $(Ax)_n = x_n$ olacak biçimde tanımlayalım. Teorem 3.1.11'den Ax ve x dizilerinin istatistiksel değme noktalarının cümlesi aynı

olup $st\text{-}\check{c}ek\{Ax\} = st\text{-}\check{c}ek\{x\}$ gerçeklenir. Şimdi

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n \text{ ve } n \text{ tamkare değilse} \\ 1 & , \quad k \leq n \text{ ve } n \text{ tamkare ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisinin gözönüne alalım. Bu durumda

$$(Ax)_n = \begin{cases} x_n & , \quad n \text{ tamkare değilse} \\ \sum_{k=1}^n x_k & , \quad n \text{ tamkare ise} \end{cases}$$

olup $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \infty$ elde edilir. A matrisi (iii) Őartımı gereklemediği gibi (ii) Őartımı da gerçeklemez.

Şimdi de Li ve Fridy' nin x sınırlı kompleks sayı dizisi olmak üzere $st\text{-}\check{c}ek\{Ax\} \subseteq st\text{-}\check{c}ek\{x\}$ içerirlik bağıntısına ilişkin verdikleri gerek ve yeter Şartları ispatsız olarak inceleyelim.

nce st asimptotik yoğunluk ve istatistiksel parçalanma kavramlarımı verelim.

Herhangi bir $E \subseteq \mathbb{N}$ için doğal yoğunluk $\delta(E)$ her zaman mevcut olmaz.

$(\delta(E) = \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in E\}| = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \chi_E)$ olup bu ise Cesàro matrisidir, Cesàro matrisi regüler olup, regüler matrisin limitleyemeyeceği en az bir sınırlı dizi vardır. Dolayısıyla bu limit mevcut olmak zorunda değildir. Yani doğal yoğunluk her zaman mevcut olmaz). Bu durumda “*st asimptotik yoğunluk*”

$$\limsup_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

olup $\delta^*(E)$ ile gösterilir. st asimptotik yoğunluk aşağıdaki özelliklere sahiptir.

\mathbb{N} doğal sayılar cümlesinin iki keyfi alt cümlesi E ve F olmak üzere

i. $\delta(E)$ mevcut ise $\delta(E) = \delta^*(E)$ olmalıdır.

ii. $\delta^*(E) > 0$ ise E ince olmayan cümledir.

iii. $E \subseteq F$ ise $\delta^*(E) \leq \delta^*(F)$ gerçektendir.

Tanım 3.4.11. Eğer \mathbb{N} nin ikişer ikişer ayrık alt kümelerinin $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ bir sonlu sınıfı

$$(i) \delta \left(\bigcup_{j=1}^r K_j \right) = 1$$

$$(ii) \delta^*(K_j) > 0, j = 1, 2, \dots, r$$

koşullarını gerçektense bu sonlu sınıfa \mathbb{N} nin bir “*istatistiksel parçalanması*” denir (Li ve Fridy 2000).

Teorem 3.4.12. Bir A toplanabilme matrisi için $\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| \right\}_{n \geq 1}$ dizisi istatistiksel sınırlı olsun. O halde her $x \in l_{\infty}$ için

$$st\text{-çek}\{Ax\} \subseteq st\text{-çek}\{x\}$$

olması için gerek ve yeter şart

$$i. \delta(K) = 1 \text{ olan her } K \subseteq \mathbb{N} \text{ için } st\text{-lim}_n \left\{ \sum_{j \in K} a_{nj} \right\} = 1$$

ii. $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$, \mathbb{N} nin bir istatistiksel parçalanması için $st\text{-lim sup}_n \left\{ \sum_{i=1}^r \left| \sum_{j \in K_i} a_{nj} \right| \right\} \leq 1$ olmasıdır (Li ve Fridy 2000).

3.5 μ -İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda μ ve ν nün keyfi yoğunluk olduğu, negatif olmayan T matrisi üzerinde her sınırlı reel değerli x dizisi için, x dizisinin μ -istatistiksel çekirdeği, Tx dizisinin ν -istatistiksel çekirdeğine eşit olacak biçimde gerek ve yeter şartları inceleyeceğiz.

Önce keyfi μ yoğunluğunu tanıtarak başlayalım. μ yoğunluğu $[0, 1]$ aralığında değerler alan, \mathbb{N} uzayının altkümelerinin bir Γ cebiri üzerinde tanımlı, sonlu toplamsal bir küme fonksiyonudur. Yani

$$\mu : \Gamma \subset P(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$$

i. $\mu(\mathbb{N}) = 1$

ii. $E, F \in \Gamma$ olmak üzere $E \subset F$ ve $\mu(F) = 0$ ise $\mu(E) = 0$

iii. $E \in \Gamma$ olmak üzere $|E| < \infty$ ise $\mu(E) = 0$

iv. $n = 1, 2, \dots, k$ için E_n ler ikişer ikişer ayrık olmak üzere $\mu\left(\bigcup_{n=1}^k E_n\right) = \sum_{n=1}^k \mu(E_n)$

özelliklerini gerçekler. Burada (iv) şartı yerine $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ alınmayacağına dikkat etmeliyiz. Çünkü $E_n = \{n\}$ olarak alındığında $|E_n| = 1 < \infty$ olup (iii)den $\mu(E_n) = 0$ dir. Ancak $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1 \neq 0$ dir.

δ -istatistiksel yakınsaklık (istatistiksel yakınsaklık) Steinhaus tarafından tanıtılmış olup, μ yoğunluk için de tanımlar benzer şekildedir. Bunları kısaca verelim.

Tanım 3.5.1. Her $\varepsilon > 0$ için $\mu(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ gerçekleşiyor ise x dizisi L sayısına “ μ -istatistiksel yakınsaktır” denir ve st_{μ} -lim $x = L$ ile gösterilir (Connor 1997).

Çalışmamız boyunca μ -istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini st_{μ} ile göstereceğiz.

Tanım 3.5.2. Her $\varepsilon > 0$ için $\mu(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}) \neq 0$ ise γ sayısına x dizisinin “ μ -istatistiksel değme noktası” denir (Connor 1997).

Şimdi μ - istatistiksel üst limit ve μ - istatistiksel alt limit kavramlarını verelim.

Bir x dizisi için

$$B_x := \{b \in \mathbb{R} : \mu(\{k : x_k > b\}) \neq 0\}$$

$$A_x := \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{k : x_k < a\}) \neq 0\}$$

olsun. Bu durumda “ μ -istatistiksel üst limit” ve “ μ -istatistiksel alt limit” aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.5.3. x dizinin μ -istatistiksel üst limiti

$$st_{\mu}\text{-lim sup } x := \begin{cases} \sup B_x & , B_x \neq \emptyset \\ -\infty & , B_x = \emptyset \end{cases}$$

ve μ -istatistiksel alt limiti

$$st_{\mu}\text{-lim inf } x := \begin{cases} \inf A_x & , A_x \neq \emptyset \\ +\infty & , A_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir.

Teorem 3.5.4. $\beta := st_{\mu}\text{-lim sup } x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\mu(\{k : x_k > \beta - \varepsilon\}) \neq 0 \text{ ve } \mu(\{k : x_k > \beta + \varepsilon\}) = 0 \quad (3)$$

olur. Karşıt olarak (3) gerçekleşirse $\beta = st_{\mu}\text{-lim sup } x$ olmalıdır (Connor 1997).

Teorem 3.5.5. $\alpha := st\text{-lim inf } x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\mu(\{k : x_k < \alpha + \varepsilon\}) \neq 0 \text{ ve } \mu(\{k : x_k < \alpha - \varepsilon\}) = 0 \quad (4)$$

olur. Karşıt olarak (4) gerçekleşirse $\alpha = st\text{-lim inf } x$ olmalıdır (Connor 1997).

Tanım 3.5.6. Bir $x = (x_k)$ dizisi için $\mu(\{k : |x_k| > B\}) = 0$ olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı varsa, x dizisine “ μ -istatistiksel sınırlıdır” denir.

Teorem 3.5.7. Herhangi bir x dizisi için

$$st_{\mu}\text{-lim inf } x \leq st_{\mu}\text{-lim sup } x$$

gerçeklenir.

Ayrıca Teorem 3.5.7’den

$$\lim inf x \leq st_{\mu}\text{-lim inf } x \leq st_{\mu}\text{-lim sup } x \leq \lim sup x$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.5.8. μ -istatistiksel sınırlı bir x dizisinin μ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$st_{\mu}\text{-lim inf } x = st_{\mu}\text{-lim sup } x$$

olmasıdır.

Aşağıdaki teorem istatistiksel çekirdeklerin korunmasını karakterize eder.

Teorem 3.5.9. $T = (t_{nk})$, $T : l_{\infty} \rightarrow l_{\infty}$ negatif olmayan bir matris olsun. μ ve ν yoğunluklar olmak üzere, her $x \in l_{\infty}$ için

$$st_{\mu}\text{-lim sup } x = st_{\nu}\text{-lim sup } Tx$$

olması için gerek ve yeter şart

(i) $T : st_{\mu} \rightarrow st_{\nu}$, her $x \in st_{\mu} \cap l_{\infty}$ için $st_{\mu}\text{-lim } x = st_{\nu}\text{-lim } Tx$

(ii) $\mu(E) \neq 0$ iken $st_{\nu}\text{-lim sup}(T\chi_E) = 1$

olmasıdır (Connor, Fridy, Orhan 2006).

İspat: Gereklik: $T = (t_{nk})$ negatif olmayan bir matris ve $T : l_{\infty} \rightarrow l_{\infty}$ olsun. μ ve ν yoğunluklar olmak üzere, her $x \in l_{\infty}$ için $st_{\mu}\text{-lim sup } x = st_{\nu}\text{-lim sup } Tx$ olsun. Önce (i) şartının gerçekleştiğini gösterelim. $T : st_{\mu} \rightarrow st_{\nu}$, $x \in st_{\mu} \cap l_{\infty}$ alalım.

$x \in st_{\mu} \cap l_{\infty}$ olduğundan

$$st_{\mu}\text{-lim sup } x = st_{\mu}\text{-lim inf } x \tag{5}$$

olur. $x \in l_{\infty}$ olup hipotezden

$$st_{\mu}\text{-lim sup } x = st_{\nu}\text{-lim sup } Tx \tag{6}$$

bulunur. $x \in l_{\infty}$ ve $T : l_{\infty} \rightarrow l_{\infty}$ olduğundan $Tx \in l_{\infty}$ olur. Ayrıca $x \in st_{\mu} \cap l_{\infty}$ ve

$T : st_\mu \rightarrow st_\nu$ olduğundan $Tx \in st_\nu$ elde edilir. Dolayısıyla $Tx \in st_\nu \cap l_\infty$ olur. Bu durumda

$$st_\nu\text{-lim sup } Tx = st_\nu\text{-lim inf } Tx \quad (7)$$

olup (5), (6), (7) gözönüne alınırsa

$$st_\mu\text{-lim } x = st_\nu\text{-lim } Tx$$

elde edilmiş olur. Şimdi de (ii) şartının gerçekleştiğini gösterelim.

χ_E , E 'nin karakteristik fonksiyonu olup,

$$\chi_E(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k \in E \\ 0 & , \quad k \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve sınırlı olduğu açıktır. Dolayısıyla hipotezden

$$st_\mu\text{-lim sup } \chi_E = st_\nu\text{-lim sup}(T\chi_E)$$

yazabiliriz. Diğer yandan $\mu(E) \neq 0$ olduğundan E sonsuz elemanlıdır. (E sonlu sayıda elemana sahip olsaydı sıfır yoğunluklu olurdu). Bu durumda karakteristik fonksiyonun tanımından $\{\chi_E(k)\}$ dizisi sonsuz sayıda 1 elemanına sahiptir. Bu durumda

$$1 = st_\mu\text{-lim sup } \chi_E = st_\nu\text{-lim sup}(T\chi_E)$$

elde edilir. Bu da ispatın gereklilik kısmını tamamlar.

Yeterlilik: (i) ve (ii) şartları sağlansın. Her $x \in l_\infty$ için

$st_\mu\text{-lim sup } x = st_\nu\text{-lim sup } Tx$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in l_\infty$ alalım.

$st_\mu\text{-lim sup } x = l$ ve $\delta > 0$ verilsin. İspat için $st_\nu\text{-lim sup } Tx = l$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için ν -istatistiksel üst limit özelliğinden yani Teorem 3.5.4'den

$$\nu(\{n \in \mathbb{N} : (Tx)_n > l - \delta\}) \neq 0 \text{ ve } \nu(\{n \in \mathbb{N} : (Tx)_n > l + \delta\}) = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun yerine bu ifadelere denk olan

$$\nu \left(\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k > l - \delta \right\} \right) \neq 0 \quad (8)$$

ve

$$\nu \left(\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k \leq l + \delta \right\} \right) = 1 \quad (9)$$

olduğunu gösterelim. Önce (8) ifadesinin gerçekleştiğini gösterelim.

$\varepsilon_1 > 0$ ve $\delta_1 > 0$ sayılarını $\delta_1(1 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1(l + \|x\|_{\infty}) < \delta$ olacak şekilde seçelim.

$\chi_{\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots) \in st_{\mu}$ olup $\mu(\{k \in \mathbb{N} : |\chi_{\mathbb{N}}(k) - 1| \geq \varepsilon\}) = 0$ olduğundan st_{μ} - $\lim \chi_{\mathbb{N}} = 1$ olur. Dolayısıyla $\chi_{\mathbb{N}} \in st_{\mu} \cap l_{\infty}$ olup (i) den st_{ν} - $\lim(T\chi_{\mathbb{N}}) = 1$ elde ederiz.

Yani

$$st_{\nu}\text{-}\lim(T\chi_{\mathbb{N}}) = st_{\nu}\text{-}\lim \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \chi_{\mathbb{N}}(k) = st_{\nu}\text{-}\lim \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = 1$$

buluruz. Bu durumda ν -istatistiksel yakınsaklık tanımından yani Tanım 3.5.1'den

$$R_1 := \left\{ n : \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} - 1 \right| < \frac{\varepsilon_1}{2} \right\}$$

olmak üzere $\nu(R_1) = 1$ elde edilir.

$E(\delta_1) = \{k : x_k > l - \delta_1\}$ olmak üzere st_{μ} - $\lim \sup x = l$ olduğundan

$$\mu(\{k : x_k > l - \delta_1\}) = \mu(E(\delta_1)) \neq 0$$

olur. Dolayısıyla (ii) den st_{ν} - $\lim \sup(T\chi_{E(\delta_1)}) = 1$ elde ederiz. Bu durumda ν -istatistiksel üst limit özelliğinden yani Teorem 3.5.4'den

$$\nu \left(\left\{ n \in \mathbb{N} : (T\chi_{E(\delta_1)})_n > 1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right\} \right) \neq 0 \text{ gerçeklenir. Böylece}$$

$$\nu \left(\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k \in E(\delta_1)} t_{nk} > 1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right\} \right) \neq 0 \text{ elde ederiz. Bu durumda}$$

$$R_2 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k \in E(\delta_1)} t_{nk} > 1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right\}$$

olmak üzere $\nu(R_2) \neq 0$ olur.

$R := R_1 \cap R_2$ diyelim. $\nu(R_1) = 1$ ve $\nu(R_2) \neq 0$ olduğunu biliyoruz.

$\nu(R) = \nu(R_1 \cap R_2) = 0$ olduğunu kabul edelim. $R_2 = (R_1 \cap R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$ ve $R_2 \setminus R_1 = R_2 \cap R_1^c \subset R_1^c$ olup $\nu(R_2 \setminus R_1) \leq \nu(R_1^c) = 0$ olduğundan $\nu(R_2 \setminus R_1) = 0$ olur. Bu durumda $\nu(R_2) = 0$ elde ederiz bu ise $\nu(R_2) \neq 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\nu(R) \neq 0$ olmalıdır.

$\nu\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k > l - \delta\right\}\right) \neq 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Dolayısıyla $R \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k > l - \delta\right\}$ olduğunu gösterirsek $\nu(R) \neq 0$ olduğundan $\nu\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k > l - \delta\right\}\right) \neq 0$ olduğunu göstermiş oluruz. Bu durumda $n \in R$ alalım. $R = R_1 \cap R_2$ olduğundan $n \in R_1$ ve $n \in R_2$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$1 - \frac{\varepsilon_1}{2} < \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} < 1 + \frac{\varepsilon_1}{2} \text{ ve } 1 - \frac{\varepsilon_1}{2} < \sum_{k \in E(\delta_1)} t_{nk}$$

olur. Bu durumda $n \in R$ için

$$\sum_{k \in E(\delta_1)} t_{nk} \leq \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} < 1 + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

olup

$$1 - \frac{\varepsilon_1}{2} < \sum_{k \in E(\delta_1)} t_{nk} + \sum_{k \in E(\delta_1)^c} t_{nk} < 1 + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\left| \sum_{k \in E(\delta_1)^c} t_{nk} \right| < \varepsilon_1$$

elde ederiz.

$n \in R$ için,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k &= \sum_{k \in E(\delta_1)} t_{nk}x_k + \sum_{k \in E(\delta_1)^c} t_{nk}x_k \\
&> (l - \delta_1)(1 - \varepsilon_1) - \|x\|_{\infty} \varepsilon_1 \\
&= l - [(1 - \varepsilon_1)\delta_1 + (l + \|x\|_{\infty})\varepsilon_1] \\
&> l - \delta
\end{aligned}$$

olduğundan

$$R \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k > l - \delta \right\}$$

elde ederiz. Böylece $\nu(R) \neq 0$ olduğundan (8) ifadesi gerçekleşmiş olur. Şimdi de (9) ifadesinin gerçekleştiğini gösterelim.

$\varepsilon_1 > 0$ ve $\delta_1 > 0$ sayılarını $\varepsilon_1(l + \|x\|_{\infty}) + \delta_1(1 + \varepsilon_1) < \delta$ olacak şekilde seçelim. (8) ifadesinde aldığımız gibi R_1 cümlesini

$$R_1 := \left\{ n : \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} - 1 \right| < \frac{\varepsilon_1}{2} \right\} \text{ olarak alalım.}$$

$G(\delta_1) = \{k : x_k \leq l + \delta_1\}$ olmak üzere st_{μ} -lim sup $x = l$ olduğundan

$\mu(\{k : x_k \leq l + \delta_1\}) = \mu(G(\delta_1)) = 1$ olup $\mu(G(\delta_1)^c) = 0$ dir. $\chi_{G(\delta_1)} \in st_{\mu} \cap l_{\infty}$ ve st_{μ} -lim $\chi_{G(\delta_1)} = 1$ olduğundan (i) den st_{ν} -lim($T\chi_{G(\delta_1)}$) = 1 elde ederiz.

ν -istatistiksel yakınsaklık tanımından yani Tanım 3.5.1'den

$$\nu \left(\left\{ n : \left| \sum_{k \in G(\delta_1)} t_{nk} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0 \text{ yani } \nu \left(\left\{ n : \left| \sum_{k \in G(\delta_1)} t_{nk} - 1 \right| < \varepsilon \right\} \right) = 1$$

elde edilir. Bu durumda

$$R_3 := \left\{ n : \sum_{k \in G(\delta_1)} t_{nk} > 1 - \varepsilon_1 \right\}$$

olmak üzere $\nu(R_3) = 1$ olmalıdır.

$R_4 := R_1 \cap R_3$ diyelim. $\nu(R_1) = 1$ ve $\nu(R_3) = 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$\nu(R_4) = 1$ elde edilir. (8) ifadesindeki benzer düşünceyle

$\nu\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k \leq l + \delta\right\}\right) = 1$ olduğunu göstermek istiyoruz. Dolayısıyla

$R_4 \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k \leq l + \delta\right\}$ olduğunu gösterirsek $\nu(R_4) = 1$ olduğundan

$\nu\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k \leq l + \delta\right\}\right) = 1$ olduğunu göstermiş oluruz. Bu durumda

$n \in R_4$ alalım. $R_4 = R_1 \cap R_3$ olduğundan $n \in R_1$ ve $n \in R_3$ olur. Dolayısıyla

$n \in R_4$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k &= \sum_{k \in G(\delta_1)} t_{nk}x_k + \sum_{k \in G(\delta_1)^c} t_{nk}x_k \\ &\leq (l + \delta_1)(1 + \varepsilon_1) + \|x\|_{\infty} \varepsilon_1 \\ &= l + (1 + \varepsilon_1)\delta_1 + (l + \|x\|_{\infty})\varepsilon_1 \\ &< l + \delta \end{aligned}$$

olduğundan

$$R_4 \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k \leq l + \delta\right\}$$

elde ederiz. Böylece $\nu(R_4) = 1$ olduğundan (9) ifadesi gerçekleşmiş olur. Bu durumda st_{ν} -lim sup $Tx = l$ olup teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.5.10. $T = (t_{nk})$ negatif olmayan bir matris ve $T : l_{\infty} \rightarrow l_{\infty}$ olsun. μ yoğunluk olmak üzere, her $x \in l_{\infty}$ için

$$st_{\mu}\text{-lim sup } x = \lim \sup Tx$$

olması için gerek ve yeter şart

(i) T regüler

(ii) $\mu(F) = 0$ için $\lim_n \sum_{k \in F} t_{nk} = 0$

(iii) $\mu(E) \neq 0$ için $\limsup_n \sum_{k \in E} t_{nk} = 1$

olmasıdır (Connor, Fridy, Orhan 2006).

$T = (t_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $E \subseteq \mathbb{N}$ alt cümlesi için $\mu_n(E) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \chi_E(k)$ olmak üzere;

$\Gamma := \left\{ E \subset \mathbb{N} : \lim_n \mu_n(E) = 0 \text{ veya } \lim_n \mu_n(E) = 1 \right\}$ şeklinde alınsın. Ayrıca $\mu_T : \Gamma \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu

$$\mu_T(E) = \lim_n \mu_n(E) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \chi_E(k)$$

olacak şekilde tanımlayalım. T yerine C_1 Cesàro matrisi alınırsa doğal yoğunluk elde edileceği açıktır.

ν yoğunluğunu I özdeşlik matrisiyle oluşturulan yoğunluk olarak aldığımızda Teorem 3.5.9 daki (ii) şartı Sonuç 3.5.10 daki (iii) şartına denk olur. Şimdi bunu gösterelim. $T = I$ olarak aldığımızda

$$\nu_T(E) = \lim_n \nu_n(E) = \lim_n \chi_E(n)$$

elde edilir. st_ν -lim sup $x = L$ olsun Bu durumda Teorem 3.5.4'den

$$\nu(\{k : x_k > L + \varepsilon\}) = 0 \text{ ve } \nu(\{k : x_k < L - \varepsilon\}) \neq 0$$

olur.

$E := \{k : x_k > L + \varepsilon\}$ olarak alırsak $\nu_T(E) = 0$ yani $\lim_n \chi_E(n) = 0$ elde ederiz. Bu ise dizinin sonsuz sayıda sıfır ve sonlu sayıda 1 elemanına sahip olduğunu gösterir. Dolayısıyla E kümesine ait olan elemanların sayısı sonludur yani $x_k > L + \varepsilon$ eşitsizliğini gerçekleyen k elemanları sonlu sayıdadır bu ise bilinen anlamda $\limsup x$

tanımıdır.

$E := \{k : x_k < L - \varepsilon\}$ olarak alırsak $\nu_T(E) \neq 0$ yani $\lim_n \chi_E(n) \neq 0$ elde ederiz. Bu ise dizinin sonsuz sayıda 1 ve sonlu sayıda sıfır elemanına sahip olduğunu gösterir. Dolayısıyla E ye ait olan elemanlar sonsuz sayıdadır yani $x_k > L - \varepsilon$ eşitsizliğini gerçekleyen k elemanları sonsuz sayıdadır bu ise bilinen anlamda $\limsup x$ tanımıdır. ν -yoğunluğunu I özdeşlik matrisiyle elde ettiğimizde bilinen anlamda $\limsup x$ elde edilir. Şimdi de Teorem 3.5.9 daki (i) şartının Sonuç 3.5.10 daki (i)-(ii) şartlarına denk olduğunu gösterelim. Bu ise Connor'ın 1997 yılında vermiş olduğu teoremden açıkça görülmektedir. Bu teoremi hatırlatalım.

$T = (t_{nk})$, $T : l_\infty \rightarrow l_\infty$ bir matris, μ yoğunluk olmak üzere, her $x \in l_\infty$ için

$$\mathcal{K}\text{-çek}\{Tx\} \subseteq st_\mu\text{-çek}\{x\}$$

olması için gerek ve yeter şart

(i) T regüler

(ii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| = 1$

(iii) $\mu(E) = 0$ özellikli her $E \subseteq \mathbb{N}$ için $\lim_n \sum_{k \in E} |t_{nk}| = 0$

olmasıdır (Connor 1997).

Bu teorem $\mu = \delta$ için İstatistiksel Çekirdek Teoremidir. Böylece Teorem 3.5.9 da ν yoğunluğunu özdeşlik matrisiyle oluşturduğumuzda

$$st_\mu\text{-lim sup } x = \limsup Tx$$

elde etmiş olduk.

Ancak şunu da belirtelim ki Sonuç 3.5.10 da μ yoğunluğunu δ doğal yoğunluğu olarak alırsak (ii)-(iii) şartlarını sağlayan matris yoktur. Bunu göstermek için ileride yararlanacağımız aşağıdaki lemmayı ispatsız olarak verelim.

Lemma 3.5.11. $L \in \mathbb{N}$, $\bar{\delta}(E) > d > 0$ olacak şekilde $E \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $k \in F$ için $k \geq L$, $\bar{\delta}(F) \geq \frac{d}{4}$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \chi_F(k) < \frac{d}{2}$ olacak şekilde $F \subseteq E$ vardır (Connor, Fridy, Orhan 2006).

Teorem 3.5.12. T regüler matris ve $\bar{\delta}(E) > 0$, $\limsup(T\chi_E) = 1$ olsun. Bu durumda $\delta(F) = 0$ ve $\limsup(T\chi_F) = 1$ olacak şekilde $F \subseteq \mathbb{N}$ vardır (Connor, Fridy, Orhan 2006).

İspat: Artan (ρ_n) , (P_n) , (Q_n) doğal sayı dizilerini ve azalan (E_n) küme dizisini

$$P_1 < Q_1 < P_2 < Q_2 < \dots$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_{\rho(n),k} \chi_{E_n}(k) > 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

olacak şekilde seçelim.

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{k : k \in E_n, P_n \leq k \leq Q_n\}$$

olmak üzere $\delta(F) = 0$ ve $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} t_{\rho(n),k} \chi_{E_n}(k) = 1$ olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için

$P_1 = 1$, $E_1 = \mathbb{N}$ alalım. Böylece $\bar{\delta}(E_1) = 1$ dir. $\rho(1) \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} t_{\rho(1),k} \chi_{E_1}(k) > 1 - \frac{1}{4}$ olacak şekilde ; Q_1 'i $\sum_{k=P_1}^{Q_1} t_{\rho(1),k} \chi_{E_1}(k) > 1 - \frac{1}{4}$ olacak şekilde ; P_2 'i de $\frac{Q_1}{P_2} < \frac{1}{8}$ ve $\sum_{k>P_2} |t_{\rho(1),k}| < \frac{1}{8}$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda Lemma 3.5.11'den $\bar{\delta}(E_2) > 2^{-3}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $n^{-1} \sum_{k=1}^n \chi_{E_2}(k) \leq 2^{-2}$ olacak şekilde $E_2 \subseteq E_1$ vardır ve $k \in E_2$ için $k \geq P_2$ dir. Böylece P_n , Q_{n-1} , $\rho(n-1)$ ve E_n seçilmiş olur. $\rho(n)$ 'i $\rho(n) > \rho(n-1)$, $j \geq \rho(n)$ için $\sum_{k=1}^{P_n} |t_{jk}| < 2^{-(n+2)}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_{\rho(n),k} \chi_{E_n}(k) > 1 - 2^{-(n+1)}$ olacak şekilde seçelim. Q_n 'i $\sum_{k=P_n}^{Q_n} t_{\rho(n),k} \chi_{E_n}(k) > 1 - 2^{-(n+1)}$ olacak şekilde ; P_{n+1} 'i $\frac{Q_n}{P_{n+1}} < 2^{-(n+2)}$ ve $\sum_{k \geq P_2} |t_{\rho(n),k}| < 2^{-(n+2)}$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda Lemma 3.5.11'den

$\bar{\delta}(E_{n+1}) > 2^{-(n+2)}$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \chi_{E_{n+1}}(k) \leq 2^{-(n+1)}$ olacak şekilde $E_{n+1} \subseteq E_n$ vardır ve $k \in E_{n+1}$ için $k \geq P_{n+1}$ olur. $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{k : k \in E_n, P_n \leq k \leq Q_n\}$ olmak üzere;

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_{\rho(n),k} \chi_F(k) = \sum_{k < P_n} t_{\rho(n),k} \chi_F(k) + \sum_{k=P_n}^{Q_n} t_{\rho(n),k} \chi_F(k) + \sum_{k > Q_n} t_{\rho(n),k} \chi_F(k)$$

olup

$$\left| \sum_{k < P_n} t_{\rho(n),k} \chi_F(k) \right| \leq \sum_{k < P_n} |t_{\rho(n),k}| = \sum_{k \leq Q_{n-1}} |t_{\rho(n),k}| < 2^{-(n+2)}$$

$$\sum_{k=P_n}^{Q_n} t_{\rho(n),k} \chi_F(k) = \sum_{k=P_n}^{Q_n} t_{\rho(n),k} \chi_{E_n}(k) > 1 - 2^{-(n+1)}$$

ve

$$\left| \sum_{k > Q_n} t_{\rho(n),k} \chi_F(k) \right| \leq \sum_{k > Q_n} |t_{\rho(n),k}| = \sum_{k \geq P_{n+1}} |t_{\rho(n),k}| < 2^{-(n+2)}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} t_{\rho(n),k} \chi_F(k) &> -2^{-(n+2)} + 1 - 2^{-(n+1)} - 2^{-(n+2)} \\ &= 1 - 2^{-n} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\limsup(T\chi_F) = 1$ elde ederiz. Şimdi de $\delta(F) = 0$ olduğunu gösterelim. $m \in \mathbb{N}$ ve $P_n \leq m \leq P_{n+1}$ olmak üzere m sayısını P_{n+1} 'e yeterince yakın

alabiliriz.

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \chi_F(k) &= \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^{Q_{n-1}} \chi_F(k) + \sum_{k=P_n}^m \chi_F(k) \right) \\ &\leq \frac{1}{m} Q_{n-1} + \frac{1}{m} \sum_{k=P_n}^m \chi_{E_n}(k) \\ &\leq \frac{Q_{n-1}}{P_n} + \frac{1}{m} \sum_{k=P_n}^m \chi_{E_n}(k) \\ &= 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} \\ &= 2^{-n}\end{aligned}$$

olup $n \rightarrow \infty$ limit alırsa $\delta(F) = 0$ elde edilir. Böylece $\delta(F) = 0$ ve $\limsup(T\chi_F) = 1$ olacak şekilde $F \subseteq \mathbb{N}$ bulmuş olduk bu da ispatı bitirir. Bu gösterir ki; Sonuç 3.5.10 da $\mu = \delta$ alırsak (ii) ve (iii) şartlarını sağlayan bir matris yoktur.

4. BONSALL ÇEKİRDEĞİ

Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizinin Knopp çekirdeği, Bölüm 2’de incelenmişti. Ayrıca Knopp tarafından verilen bu tanıma eşdeğer olarak, $x = (x_k)$ dizisinin Knopp çekirdeği $\mathcal{K}(x)$; her $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\operatorname{Re}(\alpha t) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\alpha x_n)$$

eşitsizliğini sağlayan t kompleks sayılarının cümlesi olduğu Bonsall (1953) tarafından gösterilmiştir. Burada $\operatorname{Re}(t)$, t kompleks sayısının reel kısmını göstermektedir.

1953 yılında Bonsall, \mathbb{K} cismi ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ya da \mathbb{C}) üzerinde X vektör uzayının bir x elemanının çekirdeğini

$$\mathcal{K}(x) = \{t \in \mathbb{K} : \operatorname{Re}(\alpha t) \leq \pi(\alpha x), \forall \alpha \in \mathbb{K}\} \quad (10)$$

olarak tanımladı. Bu tanımda π ;

$$\pi : X \rightarrow [-\infty, \infty]$$

i. $\pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y)$

ii. $\pi(\alpha x) = \alpha \pi(x), \forall \alpha > 0$

özelliklerini gerçekleyen keyfi sabit bir fonksiyoneldir. Bu fonksiyonele “*Bonsall fonksiyoneli*” adı verilir. Ayrıca (10)’dan $\operatorname{Re}(-\alpha t) \leq \pi(-\alpha x)$ ve dolayısıyla

$$-\pi(-\alpha x) \leq -\operatorname{Re}(-\alpha t) = \operatorname{Re}(\alpha t) \leq \pi(\alpha x) \text{ olup,}$$

$$\mathcal{K}(x) = \{t \in \mathbb{K} : -\pi(-\alpha x) \leq \operatorname{Re}(\alpha t) \leq \pi(\alpha x), \forall \alpha \in \mathbb{K}\}$$

yazabiliriz. Bonsall fonksiyoneli ile elde edilen bu çekirdeğe “*Bonsall çekirdeği*” adı verilir (Bonsall 1953).

Çekirdek teorisinde asıl problemimiz; farklı çekirdekler arasındaki içerirlik bağınımlarını belirlemektir.

Bu kısımda kısaca Bonsall çekirdeğini inceleyeceğiz. $\mathcal{K}_1(x)$ ve $\mathcal{K}_2(y)$ sırasıyla π_1 ve π_2 Bonsall fonksiyonelleri yardımıyla belirlenen iki çekirdek olsun. Her $\alpha \in \mathbb{K}$ için $\pi_1(\alpha x) \leq \pi_2(\alpha y)$ ise bu durumda $\mathcal{K}_1(x) \subset \mathcal{K}_2(y)$ olduğu açıktır. Şimdi

$$c_\pi := \{x \in X : \mathcal{K}(x) \text{ tek elemanlı}, \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ için } \pi(\alpha x) \in \mathbb{R}\}$$

(π -yakınsak elemanların cümlesi) ve

$$c_{\pi_0} := \{x \in c_\pi : \pi(x) = 0\}$$

(sıfıra π -yakınsak elemanların cümlesi) olarak alalım. c_π ve c_{π_0} , X lineer uzayının lineer alt uzaylarıdır.

Önerme 4.1. Her $x \in c_{\pi_0}$ ve $y \in X$ için

$$\pi(x + y) = \pi(x) \tag{11}$$

ve

$$\mathcal{K}(x + y) = \mathcal{K}(y) \tag{12}$$

gerçeklenir (Loone ve Tali 2001).

İspat: $y \in X$, $x \in c_{\pi_0}$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ alalım. c_{π_0} vektör uzay olduğundan $\pi(\alpha x) = 0$ dir.

$$\pi(\alpha y) \leq \pi(\alpha x + \alpha y) + \pi(-\alpha x) = \pi(\alpha x + \alpha y) \leq \pi(\alpha x) + \pi(\alpha y) = \pi(\alpha y)$$

olduğundan her $\alpha \in \mathbb{K}$ için $\pi(\alpha(x + y)) = \pi(\alpha y)$ dir. Dolayısıyla (11) gerçekleşmiş olur. Bonsall çekirdeği tanımından da (12) nin gerçekleştiği açıktır.

Sonuç 4.2. Eğer $x - y \in c_{\pi_0}$ ise bu durumda $\pi(x) = \pi(y)$ ve $\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}(y)$ gerçekleşir (Loone ve Tali 2001).

İspat: $x - y \in c_{\pi_0}$ alalım. Bu durumda $\pi(x - y) = 0$ dır. Böylece

$$\pi(x) = \pi(x - y + y) \leq \pi(x - y) + \pi(y) = \pi(y)$$

$$\pi(y) = \pi(y - x + x) \leq \pi(y - x) + \pi(x) = \pi(x)$$

$\pi(x) = \pi(y)$ elde edilir. Bonsall çekirdeği tanımından da $\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}(y)$ olduğu açıktır.

w , reel ya da kompleks terimli tüm x dizilerinin cümlesi olsun. O halde w bir vektör uzay olup her bir lineer alt uzayı bir dizi uzayı olarak adlandırılır. Şimdi aşağıdaki uzayları gözönüne alalım.

$$l_\infty := \left\{ x \in w : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

(sınırlı dizilerin cümlesi),

$$c_0 := \{ x \in w : \lim_k x_k = 0 \}$$

(sıfıra yakınsak dizilerin cümlesi) ve

$$f_0 := \left\{ x \in w : \lim_m \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} x_k = 0, \text{ } n \text{'e göre düzgün} \right\}$$

(sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin cümlesi) olsun.

1) Bonsall fonksiyoneli

$$\pi_1(x) := \limsup_k \operatorname{Re} x_k$$

olarak alındığında w içinde $\mathcal{K}_1(x)$ Knopp çekirdeği tanımlanmış olur.

2) Bonsall fonksiyoneli

$$\pi_2(x) := \limsup_m \left(\sup_n \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \operatorname{Re} x_k \right)$$

olarak alındığında w içinde $\mathcal{K}_2(x)$ hemen hemen yakınsak çekirdek (ya da Lorentz çekirdeği) tanımlanmış olur.

3) Bonsall fonksiyoneli

$$\pi_3(x) := st\text{-lim sup } x$$

olarak alındığında w içinde x dizisinin istatistiksel çekirdeği elde edilmiş olur (Loone ve Tali 2001).

SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak Knopp çekirdeği tanımlanmış ve Knopp çekirdeğini değişmez (invariant) bırakan matris dönüşümlerinin sınıfı incelenmiştir. İstatistiksel yakınsaklık, istatistiksel limit, istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit kavramları ele alınarak istatistiksel çekirdek kavramı verilmiştir. Daha sonra da bir dizinin Knopp çekirdeği ve istatistiksel çekirdeği, onun regüler matris altındaki dönüşüm dizisinin Knopp çekirdeği ile istatistiksel çekirdeği arasındaki içerirlik bağıntılarıyla, istatistiksel çekirdeği değişmez bırakan matris dönüşümlerinin sınıfı incelenmiştir. Son bölümümüzde de bir vektör uzayında Bonsall fonksiyoneli yardımıyla tanımlanan Bonsall çekirdeği tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Allen, H.S. 1944. T -transformations which leave the core of every bounded sequence invariant. *J. London Math. Soc.* 19, 42-46.
- Bonsall, F.F. 1953. Core-preserving transformations of a vector space. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 29, 15-25.
- Boos, J. 2000. *Classical and Modern Methods in Summability*. Oxford Univ. Press, UK.
- Connor J.S. 1988. The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences. *Analysis*. 8, 47-63.
- Connor J.S. 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canad. Math. Bull.* 32, 194-198.
- Connor J.S. A topological and functional analytic approach to statistical convergence, in: *Analysis of Divergence*, Orono, ME, 1997, in: *Appl. Numer. Anal.*, Birkhäuser, Boston, MA, 1999. 403-413.
- Connor, J.S. Fridy, J.A. and Orhan, C. 2006. Core equality results for sequences. *J. Math. Anal. Appl.* 321, 515-523.
- Cooke, R.G. 1950. *Infinite Matrices and Sequence Spaces*. Macmillan.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.* 2, 241-244.
- Fridy, J.A. 1985. On statistical convergence. *Analysis*. 5, 301-313.
- Fridy, J.A. 1993. Statistical limit points. *Proc. Amer. Math. Soc.* 118, 1187-1192.
- Fridy, J.A. and Orhan, C. 1997. Statistical limit superior and limit inferior. *Proc. Amer. Math. Soc.* 125, 3625-3631.
- Fridy, J.A. and Orhan, C. 1997. Statistical core theorems. *J. Math. Anal. Appl.* 208, 520-527.
- Fridy, J.A. Li, J. 2000. Matrix transformations of statistical cores of complex sequences. *Analysis* 20, 15-34.
- Knopp, K. 1929-30. Zur Theorie der Limitierungsverfahren (Erste Mitteilung). *Math. Z.* 31, 115-117.
- Kolk, E. 1993. Matrix Summability of statistically convergent sequences. *Analysis* 13, 77-83.
- Loone, L. and Tali, A. 2001. Tauberian theorems for Bonsall core in sequence

- spaces. Acta et Comm. Univ. Tartuensis de Math. 5, 75-87.
- Maddox, I.J. 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press.
- Maddox, I.J. 1974. Steinhaus type theorems for summability matrices. Proc. Amer. Math. Soc. 45, 209-213.
- Maddox, I.J. 1979. Some analogues of Knopp's core theorem. Internat. J. Math. & Math. Sci. 2, 605-614.
- Natarajan, P.N. 1990. On the core of a sequence over valued fields. J. Indian Math Soc. 55, 189-198.
- Niven, I. and Zuckerman, H.S. 1980. An Introduction to the Theory of Numbers. John Walley & Sons, 4th ed. New York.
- Orhan, C. 1990. Sublinear functionals and Knopp's core theorem. Internat. J. Math. & Math. Sci. 3, 461-468.
- Salat, T. On statistically convergent sequences of real numbers. Math. Slovaca, 30 (no:2), 139-150.
- Shcherbakov, A.A. 1977. Kernels of sequences complex numbers and their regular transformations. Math. Notes. 22, 948-953.
- Simons, S. 1969. Banach limits, infinite matrices and sublinear functionals. J. Math. Anal. Appl. 26, 640-655.
- Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinaire etta convergence asymptotique Colloq. Math. 2, 73-7

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İlknur SAKAOĞLU
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Tarihi : 16.01.1985
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Çankaya Lisesi (2002)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü (2006)