

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**GRASSMAN MANİFOLDLARINDA METRİK
DEĞERLENDİRMELERİN GEOMETRİK FORMLARIN
KONTROLÜNDEKİ UYGULAMALARI ÜZERİNE**

Ahmet EROĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2007**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

GRASSMAN MANİFOLDLARINDA METRİK DEĞERLENDİRMELERİN GEOMETRİK FORMLARIN KONTROLÜNDEKİ UYGULAMALARI ÜZERİNE

Ahmet EROĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. M. Kemal SAĞEL

Eş Danışman: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin önemi ve ele alınan problemler gösterilmiştir.

İkinci bölümde, tezin konusu ile ilgili temel kavramlar ve bazı açıklamalar verilmiştir. Aynı zamanda, bu bölümde Grassman manifoldlarında metriğin hesaplanmasının bir formülü ve değerlendirmesi de verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yüzeylerin optimal kontrolü problemi ele alınarak, bu problemin çözümünün yüzeyin diferensiyel denkleminin sınır-değer probleminin Green fonksiyonu ile ilişkili olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde ise, yüzeylerde kontrol etkenlerinin optimal dağılım problemi ele alınmıştır. Burada esas sonuçlardan biri olarak kontrol etkenlerinin optimal dağılım probleminin bir yaklaşık çözüm metodu verilmiştir. Örnek olarak da dikdörtgen levha ve telde kontrol etkenlerinin optimal dağılım problemleri incelenmiştir.

2007, 117 sayfa

Anahtar Kelimeler : Kontrol edilen sistem, optimal kontrol, lineer operatörler, Grassman manifoldlarında metrik, yüzeylerin kontrolü problemi, levha, tel.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ON THE APPLICATION OF CONTROLLING GEOMETRIC FORMS OF METRIC EVALUATIONS IN GRASSMAN MANIFOLDS

Ahmet EROĞLU

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. M. Kemal SAĞEL

Co-Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, importance of the thesis and handled problems are introduced.

In the second chapter, basic concepts about subject of the thesis and some instructions are given. At the same time, in this chapter, a formula and assessment for computation of metric in grassman manifolds are also given.

In the third section, the optimal control problem of surfaces are given and then it is showed that the solution of this problem is related with green function for differential equation boundary value problem of surface.

In the last section, optimal-distribution problem of control effects on surfaces is given. Here, as a main result, an approximate solution method for optimal-distribution problem of control effects is given. As an example, optimal-distribution problems of control effects are investigated on rectangular panel and string.

2007, 117 pages

Key Words : Controlable system, optimal control, linear operators, metric in Grassman manifolds, control problem of surface, panel, string.

TEŞEKKÜR

Doktora ve tez çalıŐma sűrecinde, çok yakın ilgi, öneri ve yardımlarımı esirgemeyen, her aŐamada nder, değerli bilgi ve tecrűbelerini çalıŐmalarımıza yansıtan fakűltemiz Geometri Anabilim Dalı BaŐkanı Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOğLU hocama, yine yakın çalıŐma ortamı içinde olduğum danıŐman hocam Sn. Doç. Dr. Mustafa Kemal SAęEL'e, özellikle çalıŐma ve eğitimimin her noktasında bilgi ve tecrűbelerini olduğu gibi aktaran ve bu konuda hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, aynı zamanda eŐ danıŐmanım olan değerli hocam Sn. Prof. Dr. İ. Mammad MUSTAFAYEV'e minnet ve űkranlarımı arz ediyorum.

Bu çalıŐmalarım esnasında dostluk ve yardımlarımı esirgemeyen Göksal BİLGİCİ, Murat ŐAHİN, Zafer ŪNAL ve Serhan VARMA'ya da teŐekkűrlerimi sunuyorum.

Ahmet EROğLU

Ankara, Temmuz 2007

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE AÇIKLAMALAR	6
2.1 Lineer Uzay ve Boyut	6
2.1.1 Lineer uzaylar	6
2.1.2 Lineer uzaylara örnekler	7
2.1.3 Elemanların lineer bağımlılığı ve lineer bağımsızlığı	8
2.1.4 Sonlu ve sonsuz boyutlu lineer uzaylar	9
2.1.5 Lineer manifoldlar (altuzaylar)	11
2.1.6 Lineer uzayların izomorflığı	12
2.2 Normlu Uzaylar	14
2.2.1 Normlu uzayların tanımı	14
2.2.2 Dizilerin limiti	16
2.2.3 Banach uzayının tanımı	18
2.2.4 Açık ve kapalı kümeler	19
2.2.5 Normlu uzaylarda altuzay ve nokta ile altuzay arasındaki uzaklık	20
2.2.6 Normlu uzaylarda her yerde yoğun lineer manifoldlar	21
2.2.7 Operatörler	21
2.3 Skaler (İç) Çarpımlı Uzaylar	23
2.3.1 Öklid uzayı	23
2.3.2 Üniter uzaylar	24
2.3.3 Elemanların ortogonallığı, ortogonal ve ortonormal sistemler	26
2.3.4 Hilbert uzayı	26
2.3.5 Ortogonal tümleyen	28

2.4	Linear Operatörler	29
2.4.1	Normlu uzaylarda operatörler, limit ve süreklilik.....	29
2.4.2	Linear operatörler	30
2.4.3	Sınırlı linear operatörler	31
2.4.4	Sınırlı linear operatörlere örnekler	32
2.4.5	Linear operatörün normu, $\mathcal{L}(X, Y)$ normlu uzayı	34
2.5	Eşlenik Uzaylar ve Eşlenik Operatörler	35
2.5.1	Linear fonksiyonelin tanımı	35
2.5.2	Eşlenik uzayın tanımı	36
2.5.3	Eşlenik (Adjoint) operatörler	37
2.5.4	Özeşlenik (Selfadjoint) operatörler	41
2.6	Ortogonal Projeksiyon Operatörler	42
2.6.1	Ortogonal projeksiyon operatörlerin tanımı	42
2.6.2	Ortogonal projeksiyon operatörlerin esas özellikleri	43
2.6.3	Altuzaylarla ortogonal projeksiyon operatörler arasında bağlantılar	46
2.6.4	Negatif olmayan operatörler, eşitsizlikler	52
2.7	Kompakt Kümeler	54
2.7.1	Normlu uzaylarda kompakt kümeler	54
2.7.2	Hausdorff teoreminden alınan sonuçlar, lokal kompaktlık	57
2.8	Linear Tamamen Sürekli (Kompakt) Operatörler	58
2.8.1	Linear tamamen sürekli operatörlerin tanımı	58
2.8.2	Tamamen sürekli operatörlerin özellikleri	59
2.8.3	Tamamen sürekli operatörlere örnekler	62
2.9	Linear Tamamen Sürekli Özeşlenik Operatörlerin Karakteristik Değerleri ve Karakteristik Vektörleri	69
2.9.1	Linear operatörlerin karakteristik değerlerinin ve karakteristik vektörlerinin tanımı	69
2.9.2	Linear tamamen sürekli özeşlenik operatörlerin karakteristik değerleri ve karakteristik vektörleri	70

2.9.3	Linear tamamen sürekli özeşlenik operatörlerin approximasyonu hakkında teorem	71
2.10	Hilbert Uzayında İki Altuzay Arasındaki Uzaklık	74
2.10.1	Hilbert uzayında altuzaylar arasındaki uzaklığın tanımı	74
2.10.2	Hilbert uzayında altuzaylar arasındaki uzaklığın eşdeğer tanımı	75
2.11	Grassman Manifoldları ve Bu Manifoldlarda Metrik	80
2.11.1	Grassman manifoldlarının tanımı	80
2.11.2	Grassman manifoldlarında metriği veren formül	82
2.11.3	Grassman manifoldlarında metriğin üstten değerlendirilmesi	83
3.	YÜZEYLERİN OPTİMAL KONTROLÜ PROBLEMİ	85
3.1	Büyük Çaplı Antenlerin Yansıtıcı Yüzeylerinin Şeklinin (Formunun) Optimal Kontrolü Problemi	85
3.2	Adi Türevli Linear Diferensiyel Denklemler için Green Fonksiyonu	88
3.2.1	Green fonksiyonunun tanımı	88
3.2.2	Green fonksiyonunun bulunmasının bir yöntemi	90
3.2.3	Green fonksiyonuna ait sade örnekler	91
3.2.4	Green fonksiyonunun seri ile verilme yöntemi	93
3.2.5	Sonlu yarıçaplı sınırlardan serbest sabitleştirilmiş kontrol edilen daire şeklindeki levhanın simetrik yer değişmelerinin Green fonksiyonu ile ifadesi formülü	96
4.	KONTROL EDİLEN YÜZEYLERDE KONTROL ETKENLERİNİN OPTİMAL DAĞILIMI PROBLEMİ	98
4.1	Levhanın Formunun Bir Optimal Kontrolü Problemi	98
4.2	Kontrol Etkenlerinin Optimal Dağılımı Problemi	103
4.3	Levhada Kontrol Etkenlerinin Optimal Dağılımı Probleminin Bir Linear Operatörün Sonlu Boyutlu Linear Operatörlerle Approximasyonu Problemi	103
4.4	Linear Tamamen Sürekli Özeşlenik Operatörlerin Sonlu Boyut- lu Linear Operatörlerle Approximasyonu Hakkında Teorem ..	105

4.5 Kontrol Etkenlerinin Optimal Dağılımı Probleminin Sonlu Boyutlu Lineer Operatörlerin Sonlu Boyutlu Lineer Operatörlerle Yaklaşım Problemine Getirilmesi	106
4.6 Kontrol Etkenlerinin Optimal Dağılımı Probleminin Bir Yaklaşık Çözüm Metodu	107
4.7 Kontrol Etkenlerinin Dikdörtgen Şeklindeki Levhada Optimal Dağılımının Yaklaşık Çözüm Metodu	108
4.8 Telde Kontrol Etkenlerinin Optimal Dağılımının Yaklaşık Çözüm Metodu	110
4.9 Kontrol Etkenlerinin Minimum Sayıda Seçimi İçin Bir Metod	113
KAYNAKLAR	116
ÖZGEÇMİŞ	118

SİMGELER DİZİNİ

$C_{[a,b]}$	$[a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonların kümesi
\mathbb{R}^m	m sayıda reel sayıların sıralanmış sütun vektörlerinden oluşan cümle
$E_{[a,b]}$	$[a, b]$ aralığında tanımlanmış tüm fonksiyonların cümlesi
$\rho(x, y)$	x ve y elemanları arasındaki uzaklık
$S_r(x_0)$	x_0 noktasının r -komşuluğu
$\ x\ $	x elemanının normu
$\ x\ _S$	$x \in \mathbb{R}^m$ elemanının Öklid normu
$\ x\ _K$	$x \in \mathbb{R}^m$ elemanının Kübik normu
$D(A)$	A operatörünün tanım bölgesi
$R(A)$	A operatörünün değerler bölgesi
$N(A)$	A operatörünün sıfırları (veya çekirdeği) cümlesi
I	Birim operatör
A^{-1}	A operatörünün tersi
(x, y)	x ve y elemanlarının skalar (iç) çarpımı
$\overline{(x, y)}$	(x, y) skalar sayısının kompleks eşleniği
$\rho(x, L)$	x elemanından L cümlesine olan uzaklık
$z \perp L$	Her bir $h \in L$ için $(z, h) = 0$
L^\perp	L cümlesinin ortogonal tümleyeni
$L = L_1 \oplus L_2$	L_1 ve L_2 cümlelerinin ortogonal (direkt) toplamı
$\ A\ $	A operatörünün normu
$L(X, Y)$	X den Y ye tanımlanan sürekli lineer operatörlerin uzayı
$L(X)$	$L(X) = L(X, X)$
$\langle x, f \rangle$	Lineer f fonksiyonelinin $x \in X$ elemanındaki değeri
$\ f\ $	f fonksiyonelinin normu
X^*	X uzayının eşlenik uzayı
A^*	A operatörünün eşlenik operatörü
AB	A ve B operatörlerinin çarpımı

$A \geq 0$	$A = A^*$ ve her x için $(Ax, x) \geq 0$
\sqrt{A}	$B^2 = A$ olmak üzere $B = \sqrt{A}$
$\sigma(X, Y)$	Normlu X ve Y uzayları arasında tanımlanan lineer sürekli ve kompakt operatörlerin cümlesi
\overline{M}	M cümlesinin kapanışı
$L_2(a, b)$	$[a, b]$ aralığında tanımlanmış karesi Lebesgue anlamında integrallenen fonksiyonların cümlesi
$\rho(M_1, M_2)$	M_1 ve M_2 cümleleri arasındaki uzaklık
P_τ	τ lineer manifoldu üzerine ortogonal projeksiyon operatörü
$\varphi_k(E^n)$	E^n Öklid uzayının k boyutlu π, τ vs. altuzaylarının $\rho(\pi, \tau) = \ P_\pi - P_\tau\ $ metriği ile elde edilen metrik uzayı (k -mertebeli Grassman manifoldu)
Δf	Laplace operatörü
$\Delta \Delta f$	Biharmonik Laplace operatörü
$C(0, T; \mathbb{R}^m)$	$[0, T]$ aralığında tanımlanmış sürekli ve değerleri m boyutlu \mathbb{R}^m uzayında olan vektör fonksiyonlarının uzayı
$C^1(0, T; \mathbb{R}^m)$	$[0, T]$ aralığında tanımlanmış sürekli diferensiyellenebilen ve değerleri m boyutlu \mathbb{R}^m uzayında olan vektör fonksiyonların uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Açık kontrol sistemi	1
Şekil 1.2 Kapalı kontrol sistemi	3
Şekil 2.1 M_1 alt uzayından M_2 alt uzayına P_2 ortogonal projeksiyon operatörünün şematik gösterimi	76
Şekil 2.2 d_1 ve d_2 uzaklıklarının şematik gösterimi	77
Şekil 2.3 Öklid uzayında elemanların Riesz Teoremine göre açılımı.....	81
Şekil 4.1 İki aynalı radioteleskop	98
Şekil 4.2 Enine kuvvetlerin etkisi altında olan dikdörtgen levha.....	99
Şekil 4.3 Kontrol etkenlerinin etkisi altında telin aldığı şekil.....	110

1. GİRİŞ

Pek çok kontrol olunan sistemlerin, mesela, teknik, fizik, geometrik ve ekonomik anlamlı kontrol olunan sistemlerin denklemleri cebirsel, diferensiyel, integral ve integro-diferensiyel, operatör ve operatör-diferensiyel denklemlerle yazılır (Gochberg and Krein 1965, Rasulov 1967, Naymark 1969, Mustafayev 1981, Butkovskiy 1983, Zeidler 1991).

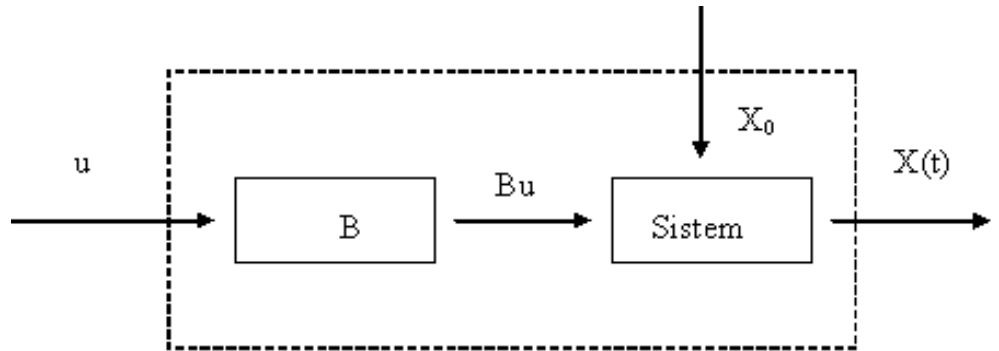
Mesela, sonlu boyutlu lineer kontrol olunan sistemin diferensiyel denkleminin aşağıdaki şekilde yazıldığı var sayalım: $x = x(t)$, t bir reel parametre ve $0 < t \leq T$ olmak üzere,

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.1)$$

$$x(0) = x_0. \quad (1.2)$$

Burada $x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$; A ve B uygun olarak $n \times n$ ve $n \times m$ tipinde reel elemanlı matrislerdir. $u(t)$ vektör fonksiyonu kontrol etkenidir (controlling action). A matrisi kontrol olunan sistemin matrisi, B matrisi kontrol blokunun matrisi olarak adlandırılır.

(1.1)–(1.2) kontrol olunan sistem sembolik olarak (yapısal metotla) aşağıdaki şekilde gösterilir:



Şekil 1.1 Açık kontrol sistemi

(1.1) – (1.2) şeklinde yazılmış kontrol olunan sisteme açık kontrol sistemi denir.

(1.1) – (1.2) Cauchy probleminin $[0, T]$ aralığında tanımlanmış sürekli m -boyutlu $u(t)$ vektör fonksiyonu için yani her $u \in C(0, T; \mathbb{R}^m)$ için $[0, T]$ aralığında tanımlanmış sürekli diferensiyellenen $x(t) \in C^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ çözümü var ve bu çözüm aşağıdaki Cauchy formülü ile ifade edilir (Trenogin 1980).

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds. \quad (1.3)$$

Burada e^{At} matris-fonksiyonu aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^nt^n}{n!} + \dots . \quad (1.4)$$

Bu seri her bir A matrisi için düzgün yakınsaktır. Dikkate alalım ki, (4) formülünde A matrisi sınırlı lineer operatör olduğunda da (4) serisi düzgün yakınsak olur (Trenogin 1980).

(1.1) – (1.2) sisteminin A matrisi için öyle pozitif $\omega > 0$ ve $M > 0$ sayıları vardır ki,

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\omega t}, t \geq 0 \quad (1.5)$$

eşitsizliği sağlanır, o zaman A matrisi veya

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 \quad (1.6)$$

sistemi üstel kararlıdır.

(1.6) sisteminin çözümü (1.3) formülünde $u(t) \equiv 0$ olmakla

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (1.7)$$

şeklinde yazılır. Eğer (1.6) sistemi üstel kararlı olursa (1.7) çözümü $t \rightarrow \infty$ için

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

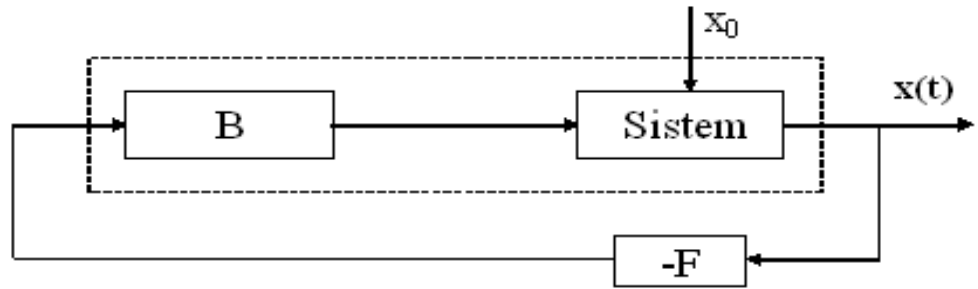
şartını sağlar. Bu sonuç aşağıdaki eşitsizlikten elde edilir:

$$\|x(t)\| = \|e^{At}x_0\| \leq \|e^{At}\| \cdot \|x_0\| \leq \|x_0\| \cdot M \cdot e^{-\omega t}. \quad (1.9)$$

Şimdi (1.1) – (1.2) kontrol olunan sistemde $u(t)$ kontrol etkenini

$$u = -Fx \quad (1.10)$$

olarak (formülü ile) seçelim. Bu formülde F $m \times n$ tipinde sabit elemanlı bir reel matristir. $u(t)$ kontrol etkeni (1.10) formülü ile seçildiğinde bu kontrol etkenine geri bağlantılı veya aksi alakalı kontrol (feedback control) ve uygun kontrol sistemine aksi alakalı (geri bağlantılı) kontrol sistemi denir. Aksi alakalı kontrol sistemi yapısal olarak aşağıdaki gibi gösterilir:



Şekil 1.2 Kapalı kontrol sistemi

(1.10) ifadesini (1.1) – (1.2) de dikkate alırsak, aşağıdaki kapalı kontrol sistemini elde ederiz:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (A - BF)x, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Elde ettiğimiz kapalı sistemin matrisinin $A - BF$ olduğu açıktır. Burada F matrisi $m \times n$ tipinde sabit ve keyfi bir reel matristir.

Ele aldığımız (1.1) – (1.2) kontrol sisteminin matrisi A üstel kararlı olmadığında, yani A matrisi üstel kararlılık şartı olan (1.5) şartını sağlamadığında, (1.11) kapalı sisteminin $A - BF$ matrisinde F matrisi öyle seçilebilir ki, sonuçta $A - BF$ matrisi üstel kararlı olur, yani $A - BF$ matrisi (1.5) şartını sağlar.

Böylece, kapalı sistemi üstel kararlı yapmamız için F aksi alaka matrisi öyle seçilmeli ki, $A - BF$ matrisi kararlı olsun.

Hatırlatalım ki, A matrisinin üstel kararlı olması için gerek ve yeter şart bu matrisin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ eigen değerlerinin kompleks düzlemin kesin sol yarı düzleminde yer almalarıdır.

Eğer öyle bir $m \times n$ tipinde reel F matrisi bulunursa ki, bu matrisin alınmasıyla $A - BF$ matrisi üstel kararlı olsun. O zaman (1.1) – (1.2) sistemi veya (A, B) çifti kararlılaştırılabilir (stabilleştirilebilir) denir.

Eğer kontrol olunan (1.1) – (1.2) sistemi $x(0) = x_0$ keyfi başlangıç durumundan $[0, T]$ sonlu zaman aralığında $u(t)$ kontrol etkenini seçmekle keyfi son $x(T) = x_T$ durumuna getirilebilirse, o zaman (1.1) – (1.2) sistemi veya (A, B) çifti kontrol olunabilir denir.

(A, B) çiftinin kontrol olunabilen olması için gerek ve yeter şart $n \times n.m$ tipindeki

$$H = [B:AB:\dots:A^{n-1}B] \quad (1.12)$$

Kalman matrisinin rankının n sayısına eşit olduğu kontrol teorisinde ispatlanır (Butkovskiy 1983). (A, B) çiftinin kontrol olunabilen olmasından onun kararlaştırıla-

bilen olduğu da elde edilir (ispatlanır).

(1.12) Kalman matrisinin ifadesinden görülür ki, sistemin kontrol olunabilen olması (uygun olarak stabilize edilebilir olması da) B matrisinin de seçimine bağlıdır. Bu çalışmada esasen yüzeylerin optimal kontrolü problemini ele almakla (sonlu veya sonsuz boyutlu) kontrol sistemlerinde kontrol blokunun matrisi olan B matrisinin seçiminin bir yöntemi verilmiştir. Tezin Temel Kavramlar ve Açıklamalar kısmında bu çalışmada kullanılan temel kavramlar ve bazı teorem ve tanımlar ele alınmıştır. Özellikle Grassman manifoldları ve bu manifoldlardaki metriğin hesaplanmasına ve lineer özdeşlik kompakt operatörlerin sonlu boyutlu lineer operatörlerle yaklaşımı hakkındaki teoremlere ve formüllere daha çok yer verilmiştir.

Yüzeylerin optimal kontrolü problemi ele alınmış ve bu problemin çözümünün bu yüzeye bağlı olan sınır değer probleminin Green fonksiyonuna çok bağlı olduğu gösterilmiştir. Bu yüzden de bu çalışmada lineer diferensiyel denklemlerle bağlı sınır değer probleminin Green fonksiyonunun tanımı ve hesaplama metotları da burada verilmiş ve Green fonksiyonuna ait bazı örnekler de gösterilmiştir.

Nihayet bu tezin esas amacını oluşturan kontrol olunan yüzeylerde kontrol etkenlerinin optimal dağılımı problemi ele alınmıştır. Önce bu problem sonsuz boyutlu lineer özdeşlik kompakt operatörün sonlu boyutlu lineer operatörlerle yaklaşımı problemine getirilmiştir. Sonra ele alınmış problemin yaklaşık olarak sonlu tipten lineer operatörünün sonlu tipten lineer operatörle yaklaşımı problemine getirilmesiyle bir yaklaşık çözüm metodu verilmiştir. Burada, Grassman manifoldlarında, manifoldlar arasındaki uzaklığın hesaplanması formülünden ve sonlu boyutlu ortogonal projeksiyon operatörlerinin özelliklerinden istifade olunmuştur. Örnek olarak levhada ve telde kontrol etkenlerinin optimal dağılımı problemleri ele alınmıştır. Son olarak çalışmada burada verilen yöntemin bir uygulaması olarak kontrol etkenlerinin minimum sayıda seçimi için bir metot verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE AÇIKLAMALAR

2.1 Lineer Uzay ve Boyut

2.1.1 Lineer uzaylar

Tanım 2.1.1. x, y, z, \dots elemanlarının E cümlesinde aşağıda gösterilen yöntemle iki işlem, elemanların toplamı ve elemanların skalar ile çarpımı işlemi tanımlandığında ve bu işlemler aşağıdaki şartları sağladığında bu cümleye lineer uzay denir:

I. Her bir $x, y \in E$ elemanlarına, bu elemanların toplamı olarak adlandırılan, tamamen belli bir $x + y = z \in E$ elemanı karşılık getirilir.

II. Her bir $x \in E$ ve her bir skalar λ sayısına, tamamen belli bir $\lambda x = y \in E$ elemanı karşılık getirilir ki, bu eleman x elemanının λ skaları ile çarpımı olarak adlandırılır.

Bu işlemlerin keyfi $x, y, z \in E$ ve keyfi λ, μ skalar sayıları için aşağıdaki özelliklerin sağlandığı kabul edilir:

1. $x + y = y + x$, (Toplamanın iç işlem özeliği)
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$, (Toplamanın birleşme özeliği)
3. Öyle bir $0 \in E$ elemanı vardır ki, $\forall x \in E$ için $x + 0 = x$ (sıfır elemanının varlığı aksiyomu),(birim eleman özeliği)
4. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, (Skalar ile çarpmanın birleşme özeliği)
5. $1.x = x$, $0.x = 0$ (soldaki sıfır skalar , sağdaki ise, E kümesinin sıfır elemanı),
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

$$7. (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

Burada bir $x \in E$ elemanının skalar ile çarpımında kullanılan skalar λ, μ, \dots çarpanları lineer uzayda reel veya kompleks sayılar alınır. O zaman uzay, birinci halde E reel lineer uzay, ikinci halde ise kompleks lineer uzay adını alır.

$(-1).x = -x$ şeklinde tanımlanır. Buradan da (5) ve (7) aksiyomlarına göre

$$x - x = x + (-1).x = (1 + (-1)).x = 0.x = 0.$$

Böylece, lineer E uzayında her bir x elemanının toplamaya göre tersi $-x$ elemanı tanımlanmış olur. Uygun olarak $x - y$ farkı $x - y = x + (-1).y$ şeklindedir

2.1.2 Lineer uzaylara örnekler

Örnek 2.1.1. m sayıda reel sayıların sıralanmış takımından oluşan (sütun) vektörlerinin \mathbb{R}^m cümlesini ele alalım. Bu cümlede $x, y, z, \dots \in \mathbb{R}^m$ elemanları

$$x = (\xi_i)_{i=1}^m, y = (\eta_i)_{i=1}^m, z = (\zeta_i)_{i=1}^m, \dots$$

şeklinde yazılırlar.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ sayılarına x elemanının (sütun vektörünün) koordinatları denir.

\mathbb{R}^m cümlesinde $x + y$ toplamını $x + y = (\xi_i + \eta_i)_{i=1}^m$ eşitliği ile $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere λx çarpımını ise $\lambda x = (\lambda \xi_i)_{i=1}^m$ eşitliği ile tanımlayalım. \mathbb{R}^m de sıfır elemanı $0 = (0)_{i=1}^m$ eşitliği ile tanımlanır. Bu tanımlardan \mathbb{R}^m cümlesinin reel lineer uzay oluşturduğu görülür.

Örnek 2.1.2 $[a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli $x(t), y(t), z(t), \dots$ fonksiyonlarının $C_{[a,b]}$ cümlesini ele alalım. Bu cümlede x ve y elemanlarının $x + y$ toplamını ve x elemanının λ sayısı ile λx çarpımını uygun olarak aşağıdaki eşitliklerle tanımlayalım:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\lambda x)(t) = \lambda x(t).$$

$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların toplamı ve $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların skalar ile çarpımı da bu aralıkta sürekli fonksiyonlar olduklarından $C_{[a,b]}$ cümlesinin lineer uzay oluşturduğu görülür. Burada reel ve kompleks uzay halleri mümkündür.

2.1.3 Elemanların lineer bağımlılığı ve lineer bağımsızlığı

Tanım 2.1.2. E lineer uzay ve x_1, x_2, \dots, x_n de bu uzaydan alınmış elemanlar olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sayılar olmak üzere, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ şeklindeki her bir toplama x_1, x_2, \dots, x_n elemanlarının lineer kombinasyonu (birleşimi) denir.

Tümü aynı zamanda sıfır olmayan öyle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $(\sum_{k=1}^n |\alpha_k| > 0)$ sayıları var ve $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ eşitliği sağlanırsa, o zaman x_1, x_2, \dots, x_n elemanları lineer bağımlıdır denir. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ eşitliği yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ şartında sağlanırsa, o zaman x_1, x_2, \dots, x_n elemanları lineer bağımsızdır denir.

Lineer uzayda bir tane elemanın lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart bu elemanın sıfır elemanı olmasıdır.

$n \geq 2$ olmak üzere n sayıda x_1, x_2, \dots, x_n elemanlarının lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart bu elemanlardan herhangi birinin diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilesidir.

x_1, x_2, \dots, x_n elemanları lineer E uzayında lineer bağımsız elemanlar olduklarında $1 \leq k \leq m$ olmak üzere bu elemanların keyfi k sayıdakileri de lineer bağımsız olur.

2.1.4 Sonlu ve sonsuz boyutlu lineer uzaylar

Tanım 2.1.3. Lineer E uzayında m sayıda lineer bağımsız eleman (vektör) varsa, ama bu uzayda $m + 1$ sayıda tüm vektörler lineer bağımlı ise, o zaman lineer E uzayı m -boyutludur denir ve

$$\dim E = m$$

şeklinde gösterilir. m sayısına lineer E uzayının boyutu denir (Bayraktar 1980).

Örnek 2.1.3. \mathbb{R}^m lineer uzayında e_1, \dots, e_m elemanlarını ele alalım. Bu elemanların

$$e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^m$$

eşitlikleriyle tanımlandığını var sayalım. Burada δ_{ij} kronecker sabiti olup,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanır.

\mathbb{R}^m uzayında e_1, \dots, e_m sütun vektörleri lineer bağımsızdır. Ama bu uzayda $m + 1$ sayıda vektör lineer bağımlıdır. Bunu göstermek için $m + 1$ sayıda keyfi alınmış vektörlerin koordinatlarından $m \times (m + 1)$ boyutlu matris yapıp, elde ettiğimiz bu matrisin rankının m sayısını aşmadığını göstermek yeterlidir. Böylece, \mathbb{R}^m uzayında m sayıda e_1, \dots, e_m vektörleri lineer bağımsız, ama $m + 1$ sayıda keyfi alınmış vektörler ise, lineer bağımlıdır, yani \mathbb{R}^m uzayı m -boyutludur.

Tanım 2.1.4. m -boyutlu lineer E uzayında lineer bağımsız elemanların sistemine (takımına) lineer E uzayında baz denir.

Lineer E uzayının m -boyutlu olduğunu varsayalım. $\{e_1, \dots, e_m\}$ vektörler sistemi E uzayının herhangi bir bazı olsun. E uzayından keyfi bir $x \in E$ elemanı alalım. E uzayı m -boyutlu olduğundan $\{e_1, \dots, e_m, x\}$ vektörler sistemi bu uzayda lineer bağımsızdır, yani öyle $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ sayıları var ki, bu skalarlardan en az biri sıfırdan farklıdır ve

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} x = 0$$

eşitliği sağlanır.

Burada $\alpha_{m+1} = 0$ olamaz. Aksi halde $\{e_1, \dots, e_m\}$ sistemi lineer bağımlı olurdu. Böylece, $\alpha_{m+1} \neq 0$. Buradan

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_m e_m \quad (2.1)$$

açılımını elde ederiz. Burada

$$\xi_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_{m+1}}, k = 1, 2, \dots, m.$$

x vektörünün (2.1) eşitliği ile gösterilişine x vektörünün $\{e_1, \dots, e_m\}$ bazı cinsinden yazılımı, bu yazılımdaki ξ_1, \dots, ξ_m sayılarına x vektörünün $\{e_k\}_{k=1}^m$ bazındaki koordinatları denir.

Her bir $x \in E$ vektörünün e_1, \dots, e_m baz vektörleri cinsinden (2.1) ifadesinin tekliği kolaylıkla gösterilir. Böylece, her bir $x \in E$ vektörünün e_1, \dots, e_m bazındaki ξ_1, \dots, ξ_m koordinatları da tektir.

Tanım 2.1.5. Her bir doğal n sayısı için lineer E uzayında n sayıda lineer bağımsız eleman bulunursa, o zaman lineer E uzayı sonsuz boyutludur denir.

Örnek 2.1.4. $C_{[a,b]}$ uzayı sonsuz boyutlu bir lineer uzaydır. Bu uzaydan $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ fonksiyonlar dizisini alırsak, her bir n sayısı için $1, t, t^2, \dots, t^n$ sistemi lineer bağımsız sistem oluşturur. Gerçekten de, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ keyfi reel sayılar olsun. O zaman

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n = 0$$

eşitliğinin her bir $t \in [a, b]$ için sağlanması gerekir. Ama n -dereceli $P_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ polinomu $[a, b]$ aralığında en fazla n sayıda noktada sıfıra dönüşebilir. Bu yüzden $\forall t \in [a, b]$ için $P_n(t) \equiv 0$ olması için $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ olması gerekir.

Böylece, $C_{[a,b]}$ uzayı sonsuz boyutludur.

2.1.5 Lineer manifoldlar (altuzaylar)

Tanım 2.1.6. E lineer uzay \tilde{E} ise bu uzaydan alınmış herhangi bir cümle olsun. Eğer her $x, y \in \tilde{E}$ elemanları ve her λ, μ skalarları için $\lambda x + \mu y \in \tilde{E}$ şartı sağlanıyorsa, o zaman $\tilde{E} \subset E$ cümlesine lineer E uzayında bir lineer manifold (lineer cümle) denir.

\tilde{E} lineer manifoldu lineer E uzayının altcümlesi olduğundan lineer manifoldun tanımından \tilde{E} nin kendisinin de lineer altuzay olduğu görülür. Bu yüzden E lineer manifolduna lineer E uzayının altuzayı da denir.

Örnek 2.1.5. $[a, b]$ aralığında tanımlanmış tüm reel fonksiyonların cümlesini $E_{[a,b]}$ ile gösterelim. O zaman $C_{[a,b]} \subset E_{[a,b]}$ olduğu ve $C_{[a,b]}$ nin $E_{[a,b]}$ lineer uzayında lineer manifold oluşturduğu görülür.

Örnek 2.1.6. Derecesi m sayısını aşmayan polinomların \mathcal{P}_m cümlesinin $C_{[a,b]}$ lineer uzayında $m + 1$ boyutlu lineer manifold oluşturduğu açıktır.

Örnek 2.1.7. n -yinci mertebeli lineer homojen

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)x = 0$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Bu diferensiyel denklemin katsayıları olan $a_1(t), \dots, a_n(t)$ fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduklarını varsayalım. O zaman bu diferensiyel denklemin çözümlerinin cümlesi $C_{[a,b]}$ uzayında n -boyutlu bir lineer manifold oluşturur.

2.1.6. Lineer uzayların izomorfluğu

X ve \tilde{X} lineer uzaylarını ele alalım. Tüm X uzayında tanımlanmış değerleri \tilde{X} uzayında olan

$$\begin{aligned} J: X &\rightarrow \tilde{X} \\ x &\rightarrow \tilde{x} = J(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunun verildiğinde, J fonksiyonunun aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

1. Her bir $x, y \in X$ ve her bir λ ve μ skaler sayıları için

$$J(\lambda x + \mu y) = \lambda J(x) + \mu J(y)$$

eşitliği sağlanır, (J nin lineer özeliği).

2. $J(x_1) = J(x_2)$ olduğunda $x_1 = x_2$ olur, (birebirlik şartı)

3. Her bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için öyle $x \in X$ elemanı bulunur ki, $\tilde{x} = J(x)$ eşitliği sağlanır. (Örtme özeliği)

Tanım 2.1.7. (1) – (3) şartlarını sağlayan bir $J : X \rightarrow \tilde{X}$, $\tilde{x} = J(x)$ fonksiyonu bulunduğunda X ve \tilde{X} lineer uzayları izomorftur denir.

Örnek 2.1.8. Derecesi m sayısını aşmayan reel katsayılı polinomların uzayı \mathbb{R}^{m+1} uzayına izomorftur. Gerçekten de, $x = x_0 + x_1t + \dots + x_mt^m$ olsun. $J(x)$ fonksiyonunu

$$J(x) = J\left(\sum_{k=0}^m x_k t^k\right) = (x_k)_{k=0}^m$$

eşitliği ile tanımlayalım. Bu eşitlikle tanımlanmış

$$\begin{aligned} J : \mathfrak{P}_x &\rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \\ x &\rightarrow J(x) \end{aligned}$$

fonksiyonu (1) – (3) şartlarını sağlar.

Örnek 2.1.9 Her bir m -boyutlu reel lineer E uzayı \mathbb{R}^m uzayına izomorftur. Bunu göstermek için E uzayında baz oluşturan $\{e_1, \dots, e_m\}$ vektörler sistemini alalım. O zaman her bir $x \in E$ elemanı tek değerli olarak $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_m e_m$ şeklinde gösterilir. Burada $J : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonunu aşağıdaki eşitlikle tanımlayalım:

$$J(x) = J\left(\sum_{k=0}^m \xi_k e_k\right) = (\xi_k)_{k=0}^m.$$

Burada tanımlanmış J fonksiyonunun da (1) – (3) şartlarını sağladığı açıktır. Böylece her bir m -boyutlu E reel lineer uzayı \mathbb{R}^m uzayına izomorftur.

2.2 Normlu Uzaylar

2.2.1 Normlu uzayların tanımı

Tanım 2.2.1. E lineer uzayının her bir x elemanına negatif olmayan bir $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sayısı karşılık getirilirse ve bu sayı aşağıdaki şartları sağlarsa, o zaman E lineer uzayına normlu uzay denir:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ yalnız ve yalnız $x = 0$ olduğunda ($\| \cdot \|$ nin yozlaşmama özeliği),
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ($\| \cdot \|$ nin homogenlik özeliği),
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

Böylece, norm tüm lineer E uzayında tanımlanmış 1–3 şartlarını sağlayan negatif olmayan değerli bir fonksiyondur. 1 aksiyomu normun yozlaşmamak şartı, 2 aksiyomu normun homojenlik şartı ve 3 aksiyomu ise normun üçgen eşitsizliği şeklinde adlandırılır.

Normun üçgen eşitsizliğinin yardımıyla ters üçgen eşitsizliği olarak adlandırılan aşağıdaki eşitsizlik de elde edilir:

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|. \quad (2.2)$$

Bu eşitsizliğin ispatı x ve $y \in E$ vektörleri için doğru olan aşağıdaki eşitsizlik yardımıyla elde edilir:

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|.$$

Normlu uzayda onun keyfi iki x ve y elemanları arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned}\rho : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\rightarrow \rho(x, y) = \|x - y\|\end{aligned}$$

formülü ile tanımlanır. Bu formülle tanımlanan ρ fonksiyonunun aşağıdaki üç özeliği sağladığı kolaylıkla gösterilir:

1) $\forall x, y \in E$ için $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ yalnız ve yalnız $x = y$ olduğunda,

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simetri özeliği),

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (üçgen eşitsizliği).

Tanım 2.2.2. X cümlesinin keyfi $x, y \in X$ çiftine yukarıdaki 1 – 3 aksiyomlarını sağlayan $\rho(x, y)$ sayısı karşılık getirilebildiğinde X cümlesine metrik uzay denir.

Böylece, metrik uzay normlu uzayın genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Normlu E uzayında x_0 verilmiş bir nokta $r > 0$ ise verilmiş bir sayı olsun. O zaman

$$S_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$$

cümlesine normlu E uzayında merkezi x_0 olan açık yuvar denir. $S_r(x_0)$ cümlesine x_0 noktasının r -komşuluğu da denir.

Aşağıdaki

$$\overline{S}_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\}$$

cümlesine ise merkezi x_0 noktasında yarıçapı r olan kapalı yuvar denir. Uygun olarak

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$$

cümlesine x_0 noktasında yarıçapı r olan küre denir. $\overline{S}_r(x_0) = S_r(x_0) \cup \sigma_r(x_0)$ olduğu açıktır.

Örnek 2.2.1. m -boyutlu sütun vektörlerinin reel lineer uzayı \mathbb{R}^m de $x = (\xi_i)_{i=1}^m$ elemanın normunu

$$\|x\|_S = \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü ile tanımladığımızda elde edilen normlu uzay Euclid uzayı olarak adlandırılır ve E^m ile gösterilir. Ama \mathbb{R}^m uzayında normu

$$\|x\|_K = \max_{1 \leq i \leq m} |\xi_i|$$

formülü ile tanımladığımızda elde edilen normlu uzay c^m ile gösterilir.

$S_r(x_0) = \{x \in c^m : \|x - x_0\|_K < r\}$ cümlesi \mathbb{R}^m uzayında m -boyutlu küp olarak adlandırılır. Ama $S_r(x_0) = \{x \in E^m : \|x - x_0\|_S < r\}$ cümlesi \mathbb{R}^m uzayında m -boyutlu yuvar olarak adlandırılır. Bu yüzden de $\|x\|_K$ normuna kübik norm, $\|x\|_S$ normuna ise, küresel norm denir.

2.2.2 Dizilerin limiti

Normlu E uzayında elemanların $\{x_n\}$ dizisini ele alalım.

Tanım 2.2.3. Eğer $x_0 \in E$ elemanı için $n \rightarrow \infty$ şartında $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ oluyorsa, o zaman x_0 elemanına $\{x_n\}$ dizisinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ veya $x_n \rightarrow x_0$ ile gösterilir.

Normlu uzaylarda yakınsak dizilerin aşağıdaki özellikleri kolaylıkla ispatlanır:

1. x_0 noktası $\{x_n\}$ dizisinin limiti olduğunda, o zaman x_0 noktasının keyfi komşuluğunda, bu dizinin ilk sonlu sayıda elemanları hariç, tüm terimleri bu komşulukta kalırlar,
2. $\{x_n\}$ dizisinin limiti varsa tektir,
3. $\{x_n\}$ dizisi x_0 elemanına yakınsadığında, bu dizinin tüm alt dizileri de x_0 elemanına yakınsar,
4. $x_n \rightarrow x_0$ ve $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ olduğunda $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda_0 x_0$ olur,
5. $y_n, y_0 \in E$ olmak üzere, $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ olduğunda $x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0$ olur,
6. $x_n \rightarrow x_0$ olduğunda $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$ olur,
7. Normlu uzayda her bir yakınsak dizi sınırlıdır.

Dikkate alalım ki; $M \subset E$ için öyle bir $c > 0$ sabit sayısı varsa ki, her bir $x \in M$ için $\|x\| \leq c$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman M cümlesine normlu E uzayında sınırlı cümle denir.

Tanım 2.2.4. E normlu uzay, $\{x_n\}$ ise bu uzaydan alınmış bir dizi olsun. Eğer keyfi alınmış $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $N > 0$ sayısı var ve her bir $n, m > N$ için

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $\{x_n\}$ dizisine normlu E uzayında fundamental veya Cauchy dizisi denir.

Normlu uzaylarda Cauchy dizilerinin aşağıdaki özellikleri vardır:

1. Her bir Cauchy dizisi sınırlıdır.
2. $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisi olduğunda her bir λ sayısı için $\{\lambda x_n\}$ dizisi de Cauchy dizisidir.
3. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri E uzayında Cauchy dizileri olduğunda $\{x_n + y_n\}$ dizisi de Cauchy dizisidir.
4. $\{x_n\}$ Cauchy dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi bir x_0 elemanına yakınsadığında, o zaman $\{x_n\}$ dizisinin kendisi de x_0 elemanına yakınsar.
5. E uzayında her bir yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

2.2.3 Banach uzayının tanımı

Tanım 2.2.5. Normlu uzayda her bir Cauchy dizisi yakınsak olursa, bu uzaya Banach uzayı denir. Her bir Cauchy dizisi yakınsak ise, normlu uzaya tam uzay denir.

Örnek 2.2.2. Reel sayılar cümlesi Banach uzayıdır. Gerçekten de, reel sayılar cümlesinde dizilerin yakınsaklığı için Cauchy kriteri doğrudur. Yani $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ sayısal dizisinin yakınsak olması için gerek yeter şart bu dizinin Cauchy dizisi olmasıdır.

Örnek 2.2.3. $m \geq 2$ olmak üzere, her bir E^m Euclid uzayı bir Banach uzayıdır. Bu sonuç, Cauchy kriterinin E^m uzayında da sağlanmasından elde edilir.

Örnek 2.2.4. $C_{[a,b]}$ uzayı bir Banach uzayıdır. $\{x_n(t)\} \subset C_{[a,b]}$ dizisini alalım. Bu uzayda $\{x_n(t)\}$ dizisinin düzgün yakınsak olması için aşağıdaki Cauchy kriteri doğrudur:

$\{x_n(t)\}$ dizisinin $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart, keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $N > 0$ sayısı varsa ki, her bir $n > N$ sayısı

ve tüm doğal $p = 1, 2, \dots$ sayıları için ve tüm $t \in [a, b]$ ler için $|x_{n+p}(t) - x_n(t)| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$C_{[a,b]}$ uzayında yakınsaklık fonksiyonlar dizisinin düzgün yakınsaklığıdır. Bu yüzden de $\{x_n(t)\} \subset C_{[a,b]}$ dizisi için Cauchy kriterinin sağlandığını görüyoruz.

$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların $\{x_n(t)\}$ dizisi $x(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunda $x(t)$ fonksiyonu da $[a, b]$ aralığında sürekli olur. Böylece, $C_{[a,b]}$ uzayı bir Banach uzayıdır.

2.2.4 Açık ve kapalı cümleler

E normlu uzay olsun.

Tanım 2.2.6. E normlu uzayının M cümlesinin her bir $x_0 \in M$ noktasının öyle açık bir $S_r(x_0)$ komşuluğu varsa ki, $S_r(x_0) \subset M$, o zaman M cümlesine normlu E uzayında açık cümle denir (Trenogin 1980).

Tanım 2.2.7. $M \subset E$ olsun; $E \setminus M = \{x \in E : x \notin M\}$ cümlesine M cümlesinin E ye göre tümleyeni denir (Trenogin 1980).

Tanım 2.2.8 $M \subset E$ cümlesinin tümleyeni $E \setminus M$ açık cümle olduğunda M cümlesine kapalı cümle denir (Trenogin 1980).

Tanım 2.2.9. $M \subset E$ olsun. $a \in E$ noktasının keyfi $S_r(a)$ komşuluğunda öyle bir $x \in M$, $x \neq a$ noktası bulunuyorsa, yani $x \in S_r(a)$ oluyorsa, o zaman a noktasına M cümlesinin limit noktası denir (Trenogin 1980).

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2.2.1. a noktasının $M \subset E$ cümlesinin limit noktası olması için gerek ve yeter şart a elemanına yakınsak olan ve $x_n \neq a$ şartını sağlayan bir $\{x_n\} \subset M$ dizisinin olmasıdır (Trenogin 1980).

2.2.5 Normlu uzaylarda altuzay ve nokta ile altuzay arasındaki uzaklık

Tanım 2.2.10. Normlu E uzayında kapalı lineer bir L manifolduna E uzayında altuzay denir.

Örnek 2.2.5. Derecesi n sayısını aşmayan polinomlar cümlesi $\mathcal{P}_n \subset C_{[a,b]}, C_{[a,b]}$ uzayında bir altuzaydır. Ama tüm polinomların cümlesi $C_{[a,b]}$ uzayında altuzay oluşturmaz. Çünkü tüm polinomların cümlesi $C_{[0,1]}$ uzayında kapalı değildir, mesela $P_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$ polinomlar dizisini aldığımızda bu dizinin limiti olan e^t fonksiyonu bir polinom değildir. Yani $C_{[0,1]}$ uzayında tüm polinomlar cümlesi kapalı bir lineer manifold oluşturmaz.

x noktasından L altuzayına olan uzaklık

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\| \quad (2.3)$$

formülü ile tanımlanır.

Aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 2.2.1. $x \in L$ olduğunda $\rho(x, L) = 0$; ama $x \notin L$ olduğunda $\rho(x, L) > 0$ dır.

2.2.6 Normlu uzaylarda her yerde yoğun lineer manifoldlar

Tanım 2.2.11. E normlu uzay, L ise bu uzaydan alınmış bir lineer manifold olsun. Eğer keyfi bir $x \in E$ ve keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\|x - u\| < \varepsilon$ olacak şekilde öyle bir $u \in L$ elemanı varsa, L lineer manifolduna E uzayında her yerde yoğun lineer manifold denir.

L lineer manifoldunun E de her yerde yoğun olduğunu var sayalım. O zaman $\varepsilon = 1, \varepsilon = 1/2, \dots, \varepsilon = 1/n, \dots$ seçerek öyle $u_1 \in L, u_2 \in L, \dots, u_n \in L, \dots$ elemanları buluruz ki, $\|x - u_n\| < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ olur. Böylece, L lineer manifoldu E uzayında her yerde yoğun olduğunda her bir $x \in E$ için öyle bir $\{u_n\} \subset L$ dizisi bulunur ki, $u_n \rightarrow x$ olur. Böylece, L lineer manifoldunun kapanışı yani L ye onun limit noktalarını da eklemekle elde edilen \bar{L} cümlesi E uzayı ile çakışır, yani $\bar{L} = E$ olur.

Örnek 2.2.6. Weierstrass teoremine göre tüm $P_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ polinomlarının lineer manifoldu $C_{[a,b]}$ uzayında her yerde yoğun lineer manifold oluşturur.

2.2.7 Operatörler

X ve Y cümlelerini ele alalım. X cümlesinin bir D alt cümlesini alalım. Her bir $x \in D$ elemanına, belli bir F kuralı ile, tamamen belli bir $y \in Y$ elemanı karşılık getirildiğinde D cümlesinde bir $y = F(x)$ operatörü tanımlanmıştır denir. Bu halde D cümlesine F operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(F)$ ile gösterilir.

Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$R = R(F) = \{y \in Y : y = F(x), x \in D\}$$

cümlesine F operatörünün değerler bölgesi denir. F operatörü şematik olarak aşağı-

daki gibi de gösterilir:

$$X \supseteq D(F) \xrightarrow{F} R(F) \subset Y$$

veya

$$F : D \subseteq X \rightarrow Y$$

veya

$$F : X \rightarrow Y.$$

Sonuncu gösterilişte $D(F) = X$ ve $R(F) = Y$ kastedilmiyor, $D(F) \subset X$ ve $R(F) \subset Y$ dir.

Özel olarak, $F(D) = R(F) = Y$ şartı sağlandığında $F : D \rightarrow Y$ operatörüne surjektif (örten) operatör denir.

$\forall x, y \in D$ için $F(x) = F(y)$ eşitliğinden $x = y$ elde edildiğinde $F : D \rightarrow Y$ operatörüne injektif (1:1) operatör denir.

$F : D \rightarrow Y$ operatörü hem surjektif hem de injektif olduğunda bu operatöre bijektif operatör denir.

$F : D \rightarrow Y$ operatörü bijektif operatör olduğunda, bu operatörün ters operatörü olarak adlandırılan bir $A^{-1} : Y \rightarrow D$ operatörü vardır ve $Ax = y$ olduğunda $A^{-1}y = x$ dir. Burada her bir $y \in Y$ için öyle tek bir tane $x \in D$ var ki, $F(x) = y$ dir.

Operatörler de birer fonksiyon olarak adlandırılırlar.

Özel olarak Y cümlesi reel veya kompleks sayılar cümlesinin bir alt cümlesi olduğunda $F : X \rightarrow Y$ operatörüne bir fonksiyonel denir.

Örnek 2.2.7. $-\infty < a < b < \infty$ olsun. $f(t, s, x)$ fonksiyonu $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ cümlesinde tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$(F(x))(t) \equiv \int_a^t f(t, s, x(s))ds, \forall t \in [a, b]$$

ve

$$(A(x))(t) \equiv \int_a^b f(t, s, x(s))ds, \forall t \in [a, b]$$

eşitlikleri ile

$$F : C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]},$$

$$A : C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$$

operatörleri tanımlanmış olur. Bu F ve A operatörlerine birer integral operatörü denir.

2.3 Skalar (İç) Çarpımlı Uzaylar

2.3.1 Öklid uzayı

Tanım 2.3.1. E bir reel lineer uzay olsun. Bu uzayın her bir $x, y \in E$ elemanları çiftine, (x, y) ile gösterilen bir reel sayı karşılık getirildiğinde ve x ve y elemanlarının skalar çarpımı olarak adlandırılan (x, y) sayısı aşağıdaki şartları sağladığında lineer E uzayına Öklid uzayı denir:

- 1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ yalnız ve yalnız $x = 0$ olduğunda (pozitif tanımlılık özeliği),
- 2) $(x, y) = (y, x)$ (simetri özeliği),

3) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (bilineerlik özeliği)

Her bir Öklid uzayını, bu uzaydaki her $x \in E$ elemanın normunu

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (2.4)$$

formülü ile tanımlayarak, normlu uzaya dönüştürmek mümkündür.

Öklid uzayında kolaylıkla ispatlanan aşağıdaki Cauchy-Schwarz eşitsizliği vardır:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (2.5)$$

Bu eşitsizlik yardımıyla da (2.4) eşitliği ile tanımlanan normun üçgen eşitsizliğinin sağlandığı gösterilir:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Burada karekök alınarak üçgen eşitsizliği elde edilir.

2.3.2 Üniter uzaylar

Tanım 2.3.2. U lineer uzayının bir kompleks lineer uzay olduğunu varsayalım. Bu uzayın her bir $x, y \in U$ elemanlarına, bu elemanların skalar çarpımı olarak adlandırılan bir (x, y) kompleks sayısı karşılık getirilirse ve bu sayı aşağıdaki aksiyomları sağlarsa, o zaman U uzayına üniter uzay denir:

1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ yalnız ve yalnız $x = 0$ olduğunda (pozitif tanımlılık),

2) Konjüge (eşlenik) simetri özeliği: $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (burada $\overline{(y, x)}$ ile kompleks sayının eşleniği ifade ediliyor),

3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$, $(x, \lambda y + \mu z) = \bar{\lambda}(x, y) + \bar{\mu}(x, z)$ (bilineerlik özeliği).

Üniter uzayda da $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ formülü ile norm tanımlanabilir. Bu uzayda da $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ Cauchy-Schwarz eşitsizliği sağlanır. Burada da Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normunun üçgen eşitsizliğini sağladığı gösterilebilir.

Örnek 2.3.1. Reel $E^m = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) : \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in \mathbb{R}\}$ uzayında skalar çarpımı

$$(x, y) = \sum_{k=1}^m \xi_k \eta_k$$

formülü ile tanımlarız. Buna uygun norm ise, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ için

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m \xi_k^2}$$

formülü ile tanımlanır. Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$\left| \sum_{k=1}^m \xi_k \eta_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m \xi_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m \eta_k^2}$$

şeklinde yazılır.

2.3.3 Elemanların ortogonalitesi, ortogonal ve ortonormal sistemler

E uzayı skalar çarpımlı uzay olsun. $(x, y) = 0$ olduğunda, x ve y elemanlarına ortogondur (dikdir) denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir. Buradan E uzayının sıfır elemanının tüm elemanlara dik olduğu açıkça görülür.

E uzayından sıfır olmayan x_1, x_2, \dots, x_m elemanlarını ele alalım. Bu elemanlar için $i \neq j$ olduğunda $(x_i, x_j) = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ şartları sağlanıyorsa, o zaman $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ elemanlarının takımına bir ortogonal sistem denir. Aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.3.1. $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ bir ortogonal sistem olduğunda bu sistem lineer bağımsızdır (Trenogin 1980).

x_1, x_2, \dots, x_m elemanları sistemi için

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

şartı sağlandığında $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ sistemine bir ortonormal sistem denir.

2.3.4 Hilbert uzayı

Skalar çarpımlı uzay, skalar çarpımla tanımlanan norma göre Cauchy dizileri yakınsak olan (yani tam uzay olan) uzaya Hilbert uzayı denir ve H ile gösterilir.

H bir Hilbert uzayı ve L de H uzayında bir altuzay olsun, yani L kapalı lineer manifold olsun. $x \in H$ ama $x \notin L$ olsun. Normlu uzaylarda olduğu gibi x noktasın-

dan L altuzayına olan mesafe

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$$

formülü ile tanımlanır. Aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.3.2. x noktasından L altuzayına karşılık gelen bir tek $y \in L$ elemanı vardır:

$$\rho(x, L) = \|x - y\|.$$

Bu y elemanına x i reelletiren eleman denir (Trenogin 1980).

Bu teoremle birlikte aşağıdaki teorem de vardır.

Teorem 2.3.3. $\|x - y\| = \rho(x, L)$ eşitliği sağlandığında $x - y \perp L$ olur (Trenogin 1980).

Burada $x - y \perp L$ ile her bir $h \in L$ için $(x - y, h) = 0$ anlatılmak isteniyor.

Bu teoremlerden ise aşağıdaki Riesz teoremi elde edilir.

Teorem 2.3.4. (Riesz). L cümlesi H Hilbert uzayında bir altuzay olsun. O zaman her bir $x \in H$ elemanı için aşağıdaki açılım vardır:

$$x = y + z, \tag{2.6}$$

burada $y \in L, z \perp L$. (2.6) açılımı burada tektir (Trenogin 1980).

Dikkate alalım ki, $x \in H$ elemanı için (2.6) açılımı doğru olduğunda aşağıdaki Pisagor

formülü sağlanır:

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2. \quad (2.7)$$

(2.6) açılımındaki $y \in L$ elemanına $x \in H$ elemanının L altuzayı üzerine ortogonal projeksiyonu denir.

2.3.5 Ortogonal tümleyen

Tanım 2.3.3. L cümlesi H Hilbert uzayında bir lineer manifold olsun. L cümlesine ortogonal olan tüm $x \in H$ elemanlarının cümlesine L lineer manifoldunun ortogonal tümleyeni denir ve L^\perp ile gösterilir.

Teorem 2.3.5. L cümlesi H Hilbert uzayında bir lineer manifold olsun. O zaman L lineer manifoldunun H uzayında her yerde yoğun olması için gerek ve yeter şart $L^\perp = \{0\}$ olmasıdır (Trenogin 1980).

Şimdi Hilbert uzayında altuzayların ortogonal toplamını tanımlayalım. H Hilbert uzayında L_1, \dots, L_m altuzaylarının verildiğini var sayalım. Burada $L_i \neq 0$ ve $L_i \neq H$, $i = 1, \dots, m$ şartlarının sağlandığını var sayalım.

$i \neq j$ olmak üzere her bir $x_i \in L_i$ ve $x_j \in L_j$ elemanları için $(x_i, x_j) = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, ise L_1, \dots, L_m altuzayları ikişer ikişer ortogonaldir denir.

Tanım 2.3.4. H Hilbert uzayında bir L altuzayı verilmiş olsun. Eğer

1) Her bir $x \in L$ elemanı, $x_i \in L_i$, $i = 1, \dots, m$ olmak üzere $x = \sum_{i=1}^m x_i$ şeklinde yazılabiliyorsa,

2) L_1, \dots, L_m altuzayları ikişer ikişer ortogonal ise, L altuzayı L_1, \dots, L_m uzaylarının ortogonal toplamına açılır denir ve $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_m$ biçiminde gösterilir.

Kolaylıkla $x = \sum_{i=1}^m x_i$ açılımının tek olduğu ve aşağıdaki Pisagor formülünün sağlandığı gösterilebilir (Trenogin 1980):

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2.$$

L cümlesi H Hilbert uzayında altuzay olduğunda $H = L \oplus L^\perp$ olduğu açıktır. Buradan da $L = H \ominus L^\perp$ ve uygun olarak $L^\perp = H \ominus L$ olur.

2.4 Lineer Operatörler

2.2.7 de operatörlerin genel tanımı verildi. Burada biz genellikle lineer operatörlerle ilgili bazı tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.4.1 Normlu uzaylarda operatörler, limit ve süreklilik

X ve Y normlu uzaylar olsun. $F : X \rightarrow Y$ operatörlerinin verildiğini var sayalım. F operatörünün tanım cümlesi $D(F)$, x_0 noktasının bir $S_r(x_0)$ komşuluğunu sağladığını var sayalım. Burada x_0 noktası $D(F)$ cümlesine dahil olmayabilir.

Tanım 2.4.1. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı varsa ve $\|x - x_0\| < \delta$ şartını sağlayan her bir $x \in S_r(x_0)$ ile $\|F(x) - y_0\| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $y_0 \in Y$ elemanı varsa bu y_0 elemanına $F(x)$ operatörünün $x \rightarrow x_0$ için limiti denir ve $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = y_0$ veya $x \rightarrow x_0$ için $F(x) \rightarrow y_0$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.4.2. x_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlanmış $F : X \rightarrow Y$ operatörünün verildiğini var sayalım. Eğer $x \rightarrow x_0$ için $F(x) \rightarrow F(x_0)$ ise F operatörüne x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.4.3. $F(x)$ operatörünün tanım cümlesi $D(F) \subset X$ ve değerler cümlesi $R(F) \subset Y$ olsun. Burada $D(F)$ cümlesinden alınmış her bir sınırlı cümleyi Y uzayında sınırlı cümleye dönüştüren operatöre sınırlı operatör denir.

2.4.2 Lineer operatörler

X ve Y uzaylarının lineer olduklarını (her ikisi de reel veya her ikisi de kompleks olmak üzere) var sayalım.

Tanım 2.4.4. $A : X \rightarrow Y$ operatörünün tanım cümlesi $D(A)$ olsun Eğer

1. $D(A)$ lineer manifold,
2. Keyfi alınmış $x_1, x_2 \in D(A)$ ve her bir λ_1, λ_2 skalarları için $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$ sağlanıyorsa, o zaman A operatörüne lineer operatör denir

Kolaylıkla lineer operatörün değerler bölgesi $R(A)$ nın da lineer manifold olduğu gösterilir.

Tüm X Banach uzayında tanımlanmış lineer A operatörü $0 \in X$ noktasında sürekli olduğundan bu operatörün sürekli olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

2.4.3 Sınırlı lineer operatörler

Tanım 2.4.5. Her bir $x \in X$ için $Ax = 0$ olduğunda bu operatöre sıfır operatörü denir ve 0 ile gösterilir.

Bir A lineer operatörünün X Banach uzayının tümünde tanımlandığını değerlerinin ise Y Banach uzayında olduğunu var sayalım. $A \neq 0$ olduğunda $R(A)$ bölgesi Y Banach uzayında sınırlı olmayan bir bölge olur.

Tanım 2.4.6. $D(A) = X$ ve $R(A) \subset Y$ şartlarını sağlayan A lineer operatörü için

$$\{\|Ax\|, \|x\| \leq 1\}$$

cümlesi sınırlı olduğunda A operatörüne sınırlı operatör denir.

Lineer sınırlı operatörler için aşağıdaki teoremler vardır:

Teorem 2.4.1. A lineer operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart $c > 0$ bir skalar olmak üzere, her bir $x \in X$ için

$$\|Ax\| \leq c \|x\| \tag{2.8}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Trenogin 1980).

Teorem 2.4.2. $M \subseteq X$ olsun. M cümlesi sınırlı bir cümle ise, $\{\|Ax\|, x \in M\}$ cümlesi de sınırlıdır (Trenogin 1980).

Sonuç 2.4.1. A operatörü bir lineer sınırlı operatör ise, $x_0 \in X$ ve $R > 0$ keyfi bir sayı olmak üzere, her bir $S_R(x_0)$ yuvarında da sınırlıdır.

Teorem 2.4.3. X ve Y uzayları birer Banach uzayı, $A : X \rightarrow Y$ operatörü bir lineer operatör ve $D(A) = X$ olsun. A operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart, sınırlı olmasıdır (Trenogin 1980).

2.4.4 Sınırlı lineer operatörlere örnekler

Örnek 2.4.1. m -boyutlu $x = (\xi_i)_1^m$, $y = (\eta_i)_1^m$ sütun vektörlerinin \mathbb{R}^m uzayında $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, m$; $m \times m$ tipindeki bir kare matris olmak üzere, A matrisi

$$y = Ax \quad (2.9)$$

eşitliği bir $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineer operatörü tanımlar. (2.9) eşitliği koordinatlar cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \xi_j, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.10)$$

C^m lineer uzayında $x \in C^m$ elemanının normunu $\|x\|_K = \max_{1 \leq i \leq m} |\xi_i|$ formülü ile tanımlayalım. O zaman $A : C^m \rightarrow C^m$ olduğu açıktır. Bu A operatörü sınırlı operatördür. Gerçekten de

$$|\eta_i| \leq \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |\xi_j| \leq \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \cdot \max_{1 \leq j \leq m} |\xi_j| \leq c \cdot \|x\|_K$$

dır. Buradan da,

$$\|Ax\|_K \leq c \cdot \|x\|_K, \quad c = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan Teorem 2.4.1 e göre $A : C^m \rightarrow C^m$ operatörünün sınırlı olduğunu elde ederiz.

Örnek 2.4.2.

$$v(t) = \int_a^b K(t, s)u(s)ds \quad (2.11)$$

eşitliğini ele alalım. Burada $K(t, s)$ fonksiyonunun $[a, b] \times [a, b]$ karesinde sürekli bir fonksiyon olduğunu var sayalım. O zaman (2.11) eşitliği $C_{[a,b]}$ uzayında bir sınırlı lineer A operatörünü

$$(Au)(t) \equiv \int_a^b K(t, s)u(s)ds$$

biçiminde tanımlar. Bu operatör bir integral operatörüdür. Bu integral operatörü için aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$\|Au\|_{C_{[a,b]}} \leq \left(\max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t, s)|ds \right) \|u\|_{C_{[a,b]}}$$

veya

$$\|Au\| \leq c \|u\|, \quad c = \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t, s)|ds.$$

Örnek 2.4.3. Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan A diferensiyel operatörünü ele alalım:

$$Au = a_0(t)u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)u(t). \quad (2.12)$$

Buradan $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ katsayıları $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Burada aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$\begin{aligned} \|Au\|_{C_{[a,b]}} &\leq \max_{t \in [a,b]} \sum_{i=0}^n |a_i(t)| |u^{(n-i)}(t)| \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n} \|a_i(t)\|_{C_{[a,b]}} \cdot \max_{t \in [a,b]} \sum_{i=0}^n |u^{(n-i)}| \\ &\leq c \|u\|_{C_{[a,b]}^n}, \end{aligned}$$

burada $c = \max_{0 \leq i \leq n} \|a_i(t)\|_{C_{[a,b]}}$ dir.

$$\|u\|_{C_{[a,b]}^n} = \sum_{i=0}^n \max_{t \in [a,b]} |u^{(n-i)}(t)|. \quad (2.13)$$

$C_{[a,b]}^n$ n -kez sürekli diferensiyellenebilen $u(t)$ fonksiyonlarının normu (2.13) eşitliği ile tanımlanan normlu uzaydır, $u^{(i)}(t)$ ise $u(t)$ fonksiyonunun i -yinci mertebeden türevidir.

Böylece, (2.12) eşitliği ile tanımlanmış A diferensiyel operatörü: $A : C_{[a,b]}^n \rightarrow C_{[a,b]}$ lineer ve sınırlı bir operatördür.

2.4.5 Lineer operatörün normu, $\mathcal{L}(X, Y)$ normlu uzayı

Normlu X uzayının tümünde tanımlanmış değerleri normlu Y uzayında olan lineer ve sürekli A, B, C, \dots operatörlerinin cümlesini ele alalım. Bu cümlede operatörlerin toplamı ve skalar ile çarpımı işlemlerini aşağıdaki eşitliklerle tanımlayalım:

$$\begin{aligned} (A + B)x &= Ax + Bx, \\ (\lambda A)x &= \lambda Ax. \end{aligned}$$

Burada X ve Y uzayları her ikisi de ya reel ya da kompleks alınır. X ve Y nin her ikisinin de reel olması halinde operatörlerin reel sayıyla çarpımı, X ve Y nin her ikisinin de kompleks olması halinde ise, kompleks sayıyla çarpımı tanımlanır.

Uygun cebirsel işlemler tanımlandıktan sonra operatörlerin lineer uzayı elde edilir. Operatörlerin bu lineer uzayında norm aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|. \quad (2.14)$$

Bu tanıma göre

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad (2.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Tüm X uzayında tanımlanmış ve değerleri Y uzayında olan lineer sürekli operatörlerin elde ettiğimiz bu normlu uzayı sembolik olarak $\mathcal{L}(X, Y)$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem vardır:

Teorem 2.4.4. X normlu uzay, Y ise Banach uzayı olduğunda $\mathcal{L}(X, Y)$ uzayı Banach uzayı olur (Trenogin 1980).

$\mathcal{L}(X, X) \equiv \mathcal{L}(X)$ şeklinde gösterildiğine de dikkat edelim.

2.5 Eşlenik Uzaylar ve Eşlenik Operatörler

2.5.1 Lineer fonksiyonelin tanımı

X reel ve normlu uzay, \mathbb{R} ise reel sayılar cümlesi olsun. Her bir $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ operatörüne bir fonksiyonel denir. Burada lineer fonksiyonelleri ele alalım. Lineer f fonksiyonellerinin $x \in X$ elemanındaki değerini $\langle x, f \rangle$ şeklinde gösterelim.

Lineer fonksiyonel $D(f)$ tanım bölgesi lineer manifold olan ve her bir $x, y \in D(f)$ ve her bir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\langle \alpha x + \beta y, f \rangle = \alpha \langle x, f \rangle + \beta \langle y, f \rangle$$

şartını sağlayan fonksiyonele denir.

Sınırlı lineer fonksiyonel

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\| \leq 1}} | \langle x, f \rangle | < +\infty$$

şartını sağlayan fonksiyonele denir.

Şimdi X kompleks normlu uzay, \mathbb{C} kompleks sayılar cümlesi olduğunda, her bir

$$f : X \rightarrow \mathbb{C}$$

lineer operatörüne lineer fonksiyonel denir.

2.5.2 Eşlenik uzayın tanımı

X Banach uzayı, E^1 ise X reel uzay olduğunda \mathbb{R} reel sayılar cümlesini, X kompleks uzay olduğunda ise E^1 cümlesi \mathbb{C} kompleks sayılar cümlesini gösterebilir.

Tüm X uzayında tanımlanmış lineer sınırlı fonksiyonellerin $\mathcal{L}(X, E^1)$ Banach uzayını ele alalım. $\mathcal{L}(X, E^1)$ uzayına X uzayının eşlenik uzayı (dual uzay) denir ve X^* şeklinde gösterilir. Böylece, $X^* = \mathcal{L}(X, E^1)$.

X ve X^* uzayları lineer uzaylar olduklarından her $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ skalarları, her x_1, x_2, x elemanları ve her f, f_1, f_2 fonksiyonelleri için aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, f \rangle &= \alpha_1 \langle x_1, f \rangle + \alpha_2 \langle x_2, f \rangle, \\ \langle x, \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 \rangle &= \overline{\beta_1} \langle x, f_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle x, f_2 \rangle. \end{aligned}$$

(Üstte yazılmış çizgi sayının kompleks eşleniğini göstermektedir.)

Lineer f fonksiyonelinin normu

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} | \langle x, f \rangle |$$

formülü ile tanımlanır.

Hilbert uzaylarında tanımlanmış lineer fonksiyonellerin genel şekli hakkında aşağıdaki Riesz teoremi vardır:

Teorem 2.5.1. (Riesz). H bir kompleks veya reel Hilbert uzayı olsun. Tüm H uzayında tanımlanmış her bir lineer sınırlı f fonksiyoneli için öyle tek $y \in H$ elemanı var ki, tüm $x \in H$ için $\langle x, f \rangle = \langle x, y \rangle$ eşitliği sağlanır ve $\|f\| = \|y\|$ olur (Trenogin 1980).

Bu Riesz teoreminden görülür ki, H ve H^* uzayları arasında elemanların normlarına karşılık gelen bir tek değerli bir dönüşüm verilebilir. Hilbert uzayının reel olması halinde bu dönüşüm lineer olur. Ama kompleks Hilbert uzayı olması halinde bu dönüşüm "yarı-lineer" olur:

$$f_1 \leftrightarrow y_1, f_2 \leftrightarrow y_2 \text{ olduğunda } \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 \leftrightarrow \overline{\beta_1} y_1 + \overline{\beta_2} y_2 \text{ olur.}$$

Buna göre de H nin bir Hilbert uzayı olması halinde $H^* = H$ alınır. Bu anlamda Hilbert uzayları özeşlenik olur.

2.5.3 Eşlenik (Adjoint) operatörler

$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatörünü alalım. $x \in X$ ve $f \in Y^*$ olmak üzere aşağıdaki ifadeyi ele alalım:

$$\langle Ax, f \rangle .$$

Bu ifade ile bir $\varphi(x)$ fonksiyoneli tanımlanmış olur:

$$\varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle = \langle Ax, f \rangle \quad (2.16)$$

φ fonksiyonelinin aşağıdaki özelliklerini dikkate alalım:

1. $D(\varphi) = X$,
2. φ lineer fonksiyoneldir, gerçekten de

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \langle A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), f \rangle \\ &= \alpha_1 \langle Ax_1, f \rangle + \alpha_2 \langle Ax_2, f \rangle \\ &= \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2), \end{aligned}$$

3. φ sınırlı fonksiyoneldir, öyle ki,

$$|\varphi(x)| = | \langle Ax, f \rangle | \leq \|Ax\| \cdot \|f\| \leq (\|A\| \cdot \|f\|) \|x\|$$

dir.

Böylece, $\varphi \in X^*$. Buradan görüyoruz ki, (2.16) formülü ile her bir $f \in Y^*$ elemanına X^* uzayında bir tek φ elemanı karşılık gelir.

Böylelikle, bir lineer ve sürekli $\varphi = A^*f$ operatörü tanımlanmış olur. Bu A^* operatörü, $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ olmak üzere, A operatörünün eşlenik (adjoint) operatörü olarak adlandırılır.

Aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 2.5.1. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ olduğunda $\|A^*\| = \|A\|$ olur (Trenogin 1980).

Örnek 2.5.1. $X = Y = E^n$ olsun. E^n ile biz n -boyutlu Euclid uzayını gösterdik. Burada aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan lineer A operatörünü ele alalım:

$$y = Ax, (x = (\xi_j)_1^n, y = (\eta_i)_1^n, \eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

(2.17) eşitlikleri ile tanımlanmış A operatörünün A^* eşleniğini bulalım. Bunun için tanıma esas olan $z = (\zeta_k)_1^n \in (E^n)^* = E^n$ vektörünü alalım. Hilbert uzayında z fonksiyonelinin Ax elemanındaki değerini bu vektörlerin skalar çarpımının değeri olarak yani, bu vektörlerin skalar çarpımları ile ifade edildiğinden buluruz:

$$\begin{aligned} \langle Ax, z \rangle &= (Ax, z) = \sum_{i=1}^n \eta_i \zeta_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right) \zeta_i \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \zeta_i \right) \xi_j = (x, A^* z) = \langle x, A^* z \rangle, \end{aligned}$$

burada $\omega = A^* z$ operatörü sağdaki eşitliklerle tanımlanır.

$$\omega_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \eta_i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Böylece, A^* operatörü A matrisinin transpozunu olan A^T matrisi ile tanımlanır.

Örnek 2.5.2. $X = Y = U^n$ olsun. Burada U^n uzayı n -boyutlu üniter uzaydır. Yani n -boyutlu kompleks koordinatlı sütun vektörlerin skalar çarpımlı uzaydır. A lineer operatörü (2.17) formülleri ile tanımlanmış operatör olsun. Bu halde a_{ij} sayıları kompleks sayılardır.

$$\begin{aligned}
\langle Ax, z \rangle &= \sum_{i=1}^n \eta_i \bar{\zeta}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right) \bar{\zeta}_i = \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{i=1}^n \overline{a_{ij} \zeta_i} \\
&= (x, A^* z) = \langle x, A^* z \rangle .
\end{aligned}$$

Burada ise $\omega = A^* z$ lineer operatörü için

$$\omega_j = \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ij} \zeta_i, \quad j = 1, 2, \dots,$$

dır. Böylece, bu halde A^* eşlenik operatörü A matrisinin Hermite eşleniği ile tanımlanır. Dikkate alalım ki, A matrisinin Hermite eşleniğini bulmak için önce bu matrisin elemanlarının kompleks eşleniklerini bulup, sonra da elde edilen matrisi transpoze etmemiz gerekir.

Örnek 2.5.3. $X = Y = \mathcal{L}_2[a, b]$ olsun. Burada $\mathcal{L}_2[a, b]$ uzayı $[a, b]$ aralığında tanımlanmış karesi Lebesgue anlamda integrallenebilen fonksiyonların Hilbert uzayıdır. Bu uzayda

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

eşitliği ile tanımlanan lineer A operatörünün eşlenik operatörünü bulalım. $K(t, s)$ fonksiyonunun $[a, b] \times [a, b]$ karesinde sürekli fonksiyon olduğunu var sayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
\langle Ax, z \rangle &= (Ax, z) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)x(s)ds \right\} z(t)dt \\
&= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)z(t)dt \right\} x(s)ds = (x, A^* z) = \langle x, A^* z \rangle .
\end{aligned}$$

buluruz. Böylece, eşlenik $\omega = A^*z$ operatörü de integral operatördür:

$$\omega(t) = \int_a^b K(s, t)z(s)ds,$$

ve bu integral operatörün çekirdeği $K(s, t)$ fonksiyonu $K(t, s)$ çekirdeğinin transpoze edilmişidir.

2.5.4 Özeşlenik (Self adjoint) operatörler

H kompleks Hilbert uzayı olsun.

Tanım 2.5.1. $A \in \mathcal{L}(H)$ olsun. $A^* = A$ eşitliği sağlandığında A operatörüne özeşlenik (veya Hermite) operatör denir.

Bu tanımdan görülür ki, A özeşlenik operatör olduğunda veya A nın özeşlenik olması için gerek ve yeter şart keyfi alınmış $x, y \in H$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (2.18)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 2.5.4. (2.17) eşitlikleri ile tanımlanan A operatörünü ele alalım. (2.18) eşitliğinin sağlanması için yani A operatörünün özeşlenik olması için gerek ve yeter şart $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ matrisinin simetrik matris olmasıdır, yani her bir $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $a_{ij} = a_{ji}$ eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Örnek 2.5.5. Üniter U^n uzayında (2.17) eşitlikleriyle tanımlanan A operatörünün özeşlenik olması için gerek ve yeter şart $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Örnek 2.5.6. Örnek 2.5.3 te tanımlanan integral A operatörünün $\mathcal{L}_2[a, b]$ uzayında özeşlenik olması için ise onun çekirdeğinin simetrik olmasıdır, yani $K(t, s) = K(s, t)$ şartının her bir $t, s \in [a, b]$ için sağlanmasıdır.

Özeşlenik operatörler için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.5.2. A, B operatörlerinin H uzayında özeşlenik operatörler olduklarını ve α, β sayılarının ise reel sayılar olduklarını var sayalım. O zaman $\alpha A + \beta B$ operatörü H uzayında özeşlenik operatör olur (Trenogin 1980).

Teorem 2.5.3. A ve B özeşlenik operatörler olsun. AB operatörünün özeşlenik olması için gerek ve yeter şart A ve B operatörlerinin komütatif olmasıdır, yani $AB = BA$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Trenogin 1980).

$A, B \in \mathcal{L}(H)$ operatörleri için AB çarpımının her $x \in H$ için $(AB)x \equiv A(Bx)$ eşitliği tanımladığına dikkat edelim.

Teorem 2.5.4. A operatörü özeşlenik operatör olduğunda $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|$ olur.

2.6 Ortogonal Projeksiyon Operatörleri

2.6.1 Ortogonal projeksiyon operatörlerinin tanımı

H Hilbert uzayı M de bu uzayda bir altuzay olsun. O zaman Teorem 2.3.4 te verilmiş Riesz teoremine göre her bir $x \in H$ elemanı $x = y + z$, $y \in M$, $z \in M^\perp$ şeklinde tek olarak açılır. Burada y elemanı x elemanının M üzerine ortogonal projeksiyonudur. Şimdi biz burada her bir $x \in H$ elemanına karşı onun M deki tek bir ortogonal projeksiyonu olan $y \in M$ elemanını karşılık

getirelim. Bununla biz H uzayında bir $y = Px$ ile tanımlı bir $P : H \rightarrow M$ operatörü tanımlanmış oluruz.

Bu tanımdan $x \in M$ olması için yalnız ve yalnız $Px = x$ olması gerektiği görülür. $M^\perp = \{z \in H : z \perp M\}$ olduğundan $x = y + z$ açılımında $z \in M^\perp$ elemanı x elemanın M^\perp üzerine ortogonal projeksiyonudur ve $z = x - y$ olduğundan $I - P$ projeksiyon operatörü tanımlanmış olur. Böylece, her bir $x \in H$ için $z = (I - P)x$ olur.

Bu tanımdan da $x \in M^\perp$ olması için gerek ve yeter şartın $Px = 0$ olduğu görülür.

2.6.2 Ortogonal projeksiyon operatörlerinin esas özellikleri

Ortogonal projeksiyon operatörlerinin aşağıdaki özelliklerini gösterelim (Naymark 1970).

1. Her bir ortogonal projeksiyon operatörü tüm H uzayında tanımlanmış değerleri H uzayında olan lineer operatördür. Gerçekten de, λ_1, λ_2 skalar sayılar olmak üzere $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ olsun. Ayrıca,

$$x = y + z, y \in M, z \in M^\perp$$

$$x_1 = y_1 + z_1, y_1 \in M, z_1 \in M^\perp$$

$$x_2 = y_2 + z_2, y_2 \in M, z_2 \in M^\perp$$

olsun. O zaman

$$y + z = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2),$$

burada $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in M, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in M^\perp$. Böylece, buradan

$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ olduğu bulunur. Buna göre de

$$P(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 P x_1 + \lambda_2 P x_2.$$

Bununla P projeksiyon operatörünün lineer olduğu gösterilmiş olur.

2. $P \in \mathcal{L}(H)$ ve $M \neq \{0\}$ olduğunda $\|P\| = 1$ olur. Bunu göstermek için Pisagor formülünü kullanalım:

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2.$$

Bu eşitlikten $\|Px\|^2 \leq \|x\|^2$, yani $\|Px\| \leq \|x\|$. Buradan da $\|P\| \leq 1$. Şimdi $M \neq \{0\}$. O zaman $x_0 \in M$ ve $\|x_0\| = 1$ olsun. O zaman

$$1 = \|x_0\| = \|Px_0\| \leq \|P\| \cdot \|x_0\| = \|P\|.$$

Böylece, $\|P\| \leq 1$ ve $\|P\| \geq 1$ eşitliklerinden $\|P\| = 1$ alırız.

3. $P^2 = P$. Gerçekten de, keyfi $x \in H$ alalım. O zaman $Px \in M$ buradan ise $P(Px) = P^2x = Px$ olur.

4. P özeşleniktir. Gerçekten de, $x_1, x_2 \in H$ keyfi elemanlar olsun. $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$; $y_1, y_2 \in M$, $z_1, z_2 \in M^\perp$. O zaman

$$\begin{aligned} (Px_1, x_2) &= (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) + (y_1, z_2) = (y_1, y_2) \\ &= (y_1, y_2) + (z_1, y_2) = (y_1 + z_1, y_2) = (x_1, Px_2). \end{aligned}$$

Burada $(y_1, z_2) = 0$, $y_1 \in M$, $z_2 \in M^\perp$, benzer şekilde $(z_1, y_2) = 0$.

5. Her bir $x \in H$ için $(Px, x) = \|Px\|^2$ olur. Buradan da her bir $x \in H$ için $(Px, x) \geq 0$ elde edilir. Bu eşitsizliği sağlayan P operatörüne negatif olmayan operatör denir. 3 ve 4 ten

$$(Px, x) = (P^2x, x) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \geq 0.$$

buluruz.

6. $x \in M$ olması için gerek ve yeter şart $\|Px\| = \|x\|$ olmasıdır. Bu özellik Pisagor eşitliğinden elde edilir (Özelik 2).

7. Her bir $x \in H$ için $(Px, x) \leq \|x\|^2$. Burada eşitlik yalnız ve yalnız $Px = x$, yani $x \in M$ olduğunda sağlanır.

İspat. $(Px, x) \leq \|Px\| \cdot \|x\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^2 \leq \|x\|^2$. Ama $(Px, x) = (x, x)$ olursa, 5 özeliğinden esasen $\|Px\|^2 = \|x\|^2$, yani $\|Px\| = \|x\|$ olur. Buradan (bak Özelik 6) $x \in M$ olur.

Aşağıdaki teoremi de ispatlayabiliriz:

Teorem 2.6.1. A operatörü H Hilbert uzayında özeşlenik ve $A^2 = A$ şartını sağladığında bir $M \subset H$ altuzayına ortogonal projeksiyon operatördür.

İspat. Aşağıdaki

$$M = \{x : Ax = x\}$$

cümlesini ele alalım. A operatörü sınırlı olduğundan M cümlesi kapalıdır. Şimdi A nın M üzerine ortogonal projeksiyon operatör olduğunu gösterelim. Keyfi bir $x \in H$ alalım. $x = Ax + (x - Ax)$ dir. Burada $Ax \in M$ ve $x - Ax \in M^\perp$ olduğunu ispatlayalım. $Ax \in M$ olduğu açıktır. Gerçekten de, $A(Ax) = A^2x = Ax$. Keyfi bir $u \in M$ alalım. O zaman

$$(x - Ax, u) = (x, u) - (Ax, u) = (x, u) - (x, Au) = (x, u) - (x, u) = 0,$$

buluruz, yani $x - Ax \in M^\perp$ dir. Böylece, teorem ispatlanmış olur.

2.6.3 Altuzaylarla ortogonal projeksiyon operatörleri arasındaki bağlantılar

Teorem 2.6.2. $P_1 : H \rightarrow M_1$ ve $P_2 : H \rightarrow M_2$ operatörleri uygun olarak M_1 ve M_2 altuzayları üzerine ortogonal projeksiyon operatörleri olsunlar. Aşağıdaki önermelerden biridir:

(1) $M_2 \subset M_1$,

(2) $P_1 P_2 = P_2$,

(3) $P_2 P_1 = P_2$,

(4) $\|P_2 x\| \leq \|P_1 x\|$ keyfi bir $x \in H$ için,

(5) $(P_2 x, x) \leq (P_1 x, x)$ keyfi bir $x \in H$ için.

İspat. $(P_1 x, x) = \|P_1 x\|^2$ olduğundan (bak 2.6.2 de 5. özellik) (4) ve (5) şartları denktir. Bu yüzden teoremin ispatı aşağıdaki şema üzere yapılabilir: (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (1).

(1) \Rightarrow (2): (1) şartının doğru yani, $M_2 \subset M_1$ olduğunu varsayalım. O zaman keyfi bir $x \in H$ için $P_2 x \in M_2$ ve böylece, $P_2 x \in M_1$, ama $P_1 P_2 x = P_2 x$, yani $P_1 P_2 = P_2$.

(2) \Rightarrow (3): (2) doğru yani, $P_1 P_2 = P_2$ olsun. O zaman $P_2 = P_2 x$ ve $P_1 = P_1 x$ olduğundan $P_2 P_1 = P_2^* P_1^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* = P_2$.

(3) \Rightarrow (4): (3) şartı doğru yani, $P_2P_1 = P_2$ olsun. O zaman keyfi bir $x \in H$ için

$$\|P_2x\| = \|P_2P_1x\| \leq \|P_2\| \cdot \|P_1x\| = \|P_1x\|.$$

(4) \Rightarrow (5): (4) şartı doğru yani, her $x \in H$ için $\|P_2x\| \leq \|P_1x\|$ olsun. $x \in M_2$ olduğunda $P_2x = x$ ise, $\|x\| = \|P_2x\| \leq \|P_1x\| \leq \|x\|$ olur. Buradan da $\|P_1x\| = \|x\|$. 2.6.2 de 6. özeliğe göre $x \in M_1$ olduğu bulunur. Yani (1) şartının sağlandığı ispatlanmış olur.

Tanım 2.6.1. P_1 ve P_2 ortogonal projeksiyon operatörleri için $P_1P_2 = 0$ şartı sağlandığında bu operatörler ortogonaldır denir ve $P_1 \perp P_2$ şeklinde gösterilir.

Sonuç 2.6.1. $P_1 \perp P_2$ olduğunda $P_2 \perp P_1$ olur.

Gerçekten de, $0 = P_1P_2$ olduğunda $0 = (P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1$ alınır. Böylece, $P_2 \perp P_1$.

Teorem 2.6.3. $P_1 : H \rightarrow M_1$ ve $P_2 : H \rightarrow M_2$ operatörlerinin M_1 ve M_2 altuzayları üzerine ortogonal projeksiyon operatörleri olduklarını var sayalım. O zaman $M_1 \perp M_2$ olması için gerek ve yeter şart $P_1 \perp P_2$ olmasıdır.

İspat. (\Leftarrow): $P_1P_2 = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman her bir $x_1 \in M_1$ ve her bir $x_2 \in M_2$ için $(x_1, x_2) = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$$(x_1, x_2) = (P_1x_1, P_2x_2) = (x_1, P_1P_2x_2) = 0 \text{ (} P_1P_2 = 0 \text{ olduğundan)}$$

dır. Bu da $M_1 \perp M_2$ demektir.

(\Rightarrow): $M_1 \perp M_2$ olsun. O zaman her bir $x \in H$ için $P_2x \in M_2$ dir. Buradan da

$P_1(P_2x) = 0$ yani, $P_1P_2x = 0$, böylece $P_1P_2 = 0$. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.6.1. İki ortogonal projeksiyon operatörünün çarpımının da ortogonal projeksiyon operatör olması için gerek ve yeter şart bu operatörlerin komütatif olmalarıdır.

İspat.

Gerekliliğin ispatı. Göstereceğiz ki $P_1P_2 = P_2P_1$ dir. P_1 ve P_2 operatörlerinin ortogonal projeksiyonlar olduklarını var sayalım ki P_1P_2 nin de ortogonal projeksiyon operatör olduğunu gösterelim. O zaman P_1 ve P_2 özeşlenik operatörlerdir, yani $P_1^* = P_1$ ve $P_2^* = P_2$ dir. P_1P_2 çarpımı da ortogonal projeksiyon operatör olduğundan bu operatör de özeşleniktir. $(P_1P_2)^* = P_1P_2$ ve $(P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1$ yani, $P_1P_2 = P_2P_1$ dir.

Yeterliliğin ispatı. $P_1P_2 = P_2P_1$. Göstereceğiz ki, P_1P_2 bir ortogonal projeksiyon operatördür. P_1P_2 özeşleniktir, $(P_1P_2)^* = P_1P_2$ dir. Bundan da

$$(P_1P_2)^2 = (P_1P_2)(P_1P_2) = P_1(P_2P_1)P_2 = P_1(P_1P_2)P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2.$$

Teorem 2.6.1 e göre P_1P_2 ortogonal projeksiyon operatördür. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.6.4. $P_1 : H \rightarrow M_1$ ve $P_2 : H \rightarrow M_2$ operatörleri M_1 ve M_2 altuzaylarına ortogonal projeksiyon operatörler olsun. P_1 ve P_2 operatörlerinin komütatif olduklarını var sayalım. Yani, $P_1P_2 = P_2P_1$ olsun. O zaman P_1P_2 çarpımı $M_1 \cap M_2$ altuzayına ortogonal projeksiyon operatör olur.

İspat. P_1P_2 çarpımı bir M altuzayına bir ortogonal projeksiyon operatörü olsun. Yani $P_1P_2 : H \rightarrow M$. $x \in M$ alalım. O zaman $x = P_1P_2x = P_1(P_2x) \in M_1$, yani $x \in M_1$ olur. Sonra $x = P_2P_1x = P_2(P_1x) \in M_2$, yani $x \in M_2$. Böylece, $x \in M_1 \cap M_2$

olur. Burada $M \subset M_1 \cap M_2$ olduğunu gösterdik.

Şimdi de ters kapsamayı gösterelim. $x \in M_1 \cap M_2$ olsun. $P_1 P_2 x$ elemanını ele alalım. $x \in M_2$ olduğundan $P_2 x = x$ ve buna göre de $P_1 P_2 x = P_1 x$ olur. Ama $x \in M_1$ olduğu için $P_1 x = x$ dir. Böylece, $P_1 P_2 x = x$, yani $x \in M$ dir. Bu yüzden $M_1 \cap M_2 \subset M$. İspatladığımız bu iki kapsamadan $M = M_1 \cap M_2$ olduğu bulunur.

Lemma 2.6.2. Sonlu sayıda ortogonal projeksiyon operatörlerinin $P_1 + P_2 + \dots + P_n$ toplamının da bir ortogonal projeksiyon operatörü olması için gerek ve yeter şart bu operatörlerin ikişer ikişer ortogonal olmalarıdır, yani $i \neq j$ için $P_i P_j = 0$ olmasıdır.

Gerekliğin ispatı. $P_1 + P_2 + \dots + P_n = P$ operatörünün H uzayından M altuzayı üzerine ortogonal projeksiyon operatör olduğunu var sayalım. Ortogonal projeksiyon operatörlerinin özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \|Px\|^2 &= (Px, Px) = (P^2x, x) = (Px, x) = \sum_{k=1}^n (P_k x, x) \\ &= \sum_{k=1}^n (P_k^2 x, x) = \sum_{k=1}^n (P_k x, P_k x) = \sum_{k=1}^n \|P_k x\|^2. \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, keyfi bir $x \in H$ için

$$\sum_{k=1}^n \|P_k x\|^2 = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Burada $x = P_i y$, $y \in H$ alalım. O zaman

$$\sum_{k=1}^n \|P_k P_i y\|^2 \leq \|P_i y\|^2$$

veya

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \|P_k P_i y\|^2 + \|P_i^2 y\|^2 \leq \|P_i y\|^2.$$

Burada $\|P_i^2 y\|^2 = \|P_i y\|^2$ olduğundan $k \neq i$ için $\|P_k P_i y\| = 0$ olur.

$y \in H$ keyfi alındığından buradan $k \neq i$ için $P_k P_i = 0$. Bununla gereklilik şartı ispatlanmış olur.

Yeterliliğin ispatı. P_1, P_2, \dots, P_n operatörlerinin ikişer ikişer ortogonal olduklarını var sayalım. Buradan

$$P^2 = (P_1 + P_2 + \dots + P_n)^2 = P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_n^2 = P_1 + P_2 + \dots + P_n = P.$$

Özeşlenik operatörlerin toplamı da özeşlenik olduğundan Teorem 2.6.1 e göre P operatörü ortogonal projeksiyon operatör olur. Lemma ispatlanmış oldu.

Teorem 2.6.5. P_1, P_2, \dots, P_n ikişer ikişer ortogonal olan ortogonal projeksiyon operatörler olsun. P_i ortogonal projeksiyon operatörünün H uzayını M_i altuzayı üzerine dönüştürdüğünü var sayalım. O zaman $P_1 + P_2 + \dots + P_n$ ortogonal projeksiyon operatörü H uzayını M_1, M_2, \dots, M_n altuzaylarının ortogonal $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ toplamının üzerine dönüştürür.

İspat. $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ ortogonal projeksiyon operatörü H uzayını bir M altuzayı üzerine dönüştürdüğünü var sayalım. $x \in M$ alalım, o zaman $x = Px = P_1x + P_2x + \dots + P_nx$, burada $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $P_kx \in M_k$ olur. Ama Teorem 2.6.3 e göre $k \neq i$ olduğunda $M_k \perp M_i$. Altuzayların ortogonal toplamının tanımından üstteki sonuncu eşitlikten $x \in M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ olduğu bulunur. Böylece, $M \subset M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ olduğu ispatlandı.

Şimdi bunun tersini ispatlamak için $x \in M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ alalım. O zaman öyle bir $x_k \in M_k$ bulunur ki, $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ olur. Gösterelim ki, $Px = x$ buradan biz $x \in M$ olduğunu elde etmiş oluruz. Gerçekten de,

$$Px = (P_1 + P_2 + \dots + P_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = x,$$

burada $x_k \in M_k$ olduğundan $P_k x_k = x_k$, $k \neq i$ için $x_i \perp M_k$ olduğundan $k \neq i$ için

$P_k x_i = 0$ olur. Böylece, teorem ispatlanmış olur.

Lemma 2.6.3. P_1 ve P_2 ortogonal projeksiyon operatörlerinin $P_1 - P_2$ farkının ortogonal projeksiyon operatör olması için gerek ve yeter şart $P_1 \geq P_2$ olmasıdır, yani keyfi $x \in H$ için $(P_2 x, x) \leq (P_1 x, x)$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat.

Gerekliğin ispatı. $P = P_1 - P_2$ ortogonal projeksiyon operatör olduğunu var sayalım, o zaman Lemma 2.6.2 e göre $PP_2 = 0$ olur, yani

$$0 = (P_1 - P_2)P_2 = P_1P_2 - P_2^2 = P_1P_2 - P_2$$

veya

$$P_1P_2 = P_2.$$

Bu ise Teorem 2.6.2 ye göre $P_1 \geq P_2$ şartına eşdeğerdir.

Yeterliliğin ispatı. $P_1 \geq P_2$ olduğunu var sayalım. O zaman Teorem 2.6.2 ye göre $P_1P_2 = P_2$, $P_2P_1 = P_2$. $P = P_1 - P_2$ farkı iki özeşlenik operatörün farkı gibi özeşleniktir (bak Teorem 2.6.2). Buna göre

$$P^2 = (P_1 - P_2)^2 = P_1^2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2^2 = P_1 - P_2 - P_2 + P_2 = P.$$

dir. Bu yüzden de Teorem 2.6.3 e göre P operatörünün ortogonal projeksiyon operatör olduğu bulunmuş olur.

Teorem 2.6.6. P_1 ve P_2 operatörlerinin H uzayından sırasıyla, M_1 ve M_2 altuzaylarına ortogonal projeksiyon operatörler olduğunu var sayalım. $P_1 \geq P_2$ olsun. O zaman $P_1 - P_2$ operatörü H uzayının $M_1 \ominus M_2$ ortogonal farkına ortogonal projeksiyon operatörüdür.

İspat. $P_1 - P_2$ operatörünün H uzayının M altuzayına ortoprojeksiyon operatör olsun. $P_2(P_1 - P_2) = P_2P_1 - P_2^2 = P_2P_1 - P_2 = P_2 - P_2 = 0$. O zaman $P_2 \perp P_1 - P_2$. Ama Teorem 2.6.5 e göre $P_1 = P_2 + (P_1 - P_2)$ operatörü H uzayını $M_1 = M_2 \oplus M$ üzerine ortoprojeksiyon operatördür. Buradan ortogonal farkın tanımına göre $M = M_1 \ominus M_2$ olur.

Not 1. $P_1 = I$ alındığında $I \geq P_2$ olduğundan her bir ortoprojeksiyon P_2 operatörü için $I - P_2$ operatörünün H uzayını $M_2^\perp = H \ominus M_2$ üzerine dönüştüren bir ortogonal projeksiyon operatör olduğunu görürüz.

Not 2. Eğer iki P_1 ve P_2 ortogonal projeksiyon operatörleri için $\|P_2 - P_1\| < 1$ şartı sağlanıyorsa, o zaman bu ortogonal projeksiyon operatörlerin değerler bölgesi lineer izometrik olur (Trenogin 1980).

Tanım 2.6.2. İki normlu E ve \tilde{E} uzayının verildiğini ve öyle bir $\tilde{x} = J(x)$ fonksiyonu vardır ki, E ve \tilde{E} lineer uzayları arasında izomorfizm oluşturur ve

$$\|J(x)\| = \|x\|$$

eşitliğini de her bir $x \in E$ için sağlar. Bu halde normlu E ve \tilde{E} uzayları lineer izometriktir denir.

2.6.4 Negatif olmayan operatörler, eşitsizlikler

Tanım 2.6.3. $A : H \rightarrow H$ özeşlenik operatörü için her bir $x \in H$ elemanında $(Ax, x) \geq 0$ şartı sağlandığında, özeşlenik A operatörüne negatif olmayan operatör denir ve $A \geq 0$ şeklinde gösterilir.

$A_1 \geq 0, A_2 \geq 0$ olduğunda, her bir $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ skaler sayıları için $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \geq 0$ olduğu açıktır.

Lemma 2.6.4. $A \geq 0$ olduğunda aşağıdaki genelleştirilmiş Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliği doğru olur:

$$|(Ax, y)| \leq \sqrt{(Ax, x)}\sqrt{(Ay, y)}, \quad x, y \in H.$$

Tanım 2.6.4. $A, B \in \mathcal{L}(H)$ operatörleri özeşlenik operatörler olsun. $A - B \geq 0$ olduğunda, yani her bir $x \in H$ için $(Ax, x) \geq (Bx, x)$ eşitsizliği sağlandığında $A \geq B$ veya $B \leq A$ yazılır (Trenogin 1980).

Örnek 2.6.1. Her bir $A \in \mathcal{L}(H)$ için A^*A operatörü özeşlenik operatör olur. Özel halde $A^*A = AA^*$ eşitliği sağlandığında A operatörü negatif olmayan özeşlenik operatör olur (Trenogin 1980).

Şimdi ise, negatif olmayan operatörün karekökünü tanımlayalım.

B operatörünün özeşlenik operatör olduğunu var sayalım. O zaman $B^2 \geq 0$ olduğu kolaylıkla gösterilir. Gerçekten de

$$(B^2x, x) = (B(Bx), x) = (Bx, Bx) \geq 0.$$

Tanım 2.6.5. $A \in \mathcal{L}(H)$ ve $B \in \mathcal{L}(H)$ olmakla özeşlenik operatör olsun. Bu operatörler için $B^2 = A$ eşitliği sağlanırsa, o zaman özeşlenik B operatörüne negatif olmayan A operatörünün karekökü denir ve $B = \sqrt{A}$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.6.7. Her bir negatif olmayan $A \in \mathcal{L}(H)$ operatörünün tek bir tane \sqrt{A} karekökü vardır (Naymark 1969).

Aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 2.6.5. \sqrt{A} operatörünün bir $C \in \mathcal{L}(H)$ operatörü ile komütatif (yer değışmeli) olması için gerek ve yeter şart C operatörünün A operatörü ile komütatif olmasıdır (Trenogin 1980).

2.7 Kompakt Cümleler

2.7.1 Normlu uzaylarda kompakt cümleler

Tanım 2.7.1. X Banach uzayı ve M de X uzayında alınmış bir cümle olsun. M cümlesinden alınmış her bir $\{x_n\} \subset M$ dizisinden limiti M cümlesinde olan yakınsak bir alt dizi seçilebilirse, o zaman M cümlesine bikompakt cümle denir.

Bu tanımdan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.7.1. Her bir bikompakt cümle sınırlıdır.

İspat. Olmayana ergi ispat metodunu uygulayalım. O zaman her bir doğal $n = 1, 2, \dots$ sayıları için öyle $\{x_n\} \subset M$ dizisi bulunur ki, $\|x_n\| > n$ eşitsizliği sağlar. Bu elde ettiğimiz $\{x_n\}$ dizisinden M de yakınsak olan bir alt dizi seçilemez. Bu ise M cümlesinin bikompakt olması ile çelişir. Böylece bikompakt cümle sınırlıdır.

Sonuç 2.7.2. Her bir bikompakt cümle kapalıdır.

Gerçekten de, eğer $\{x_n\} \subset M$ ve $x_n \rightarrow x_0$ ise, o zaman $\{x_n\}$ dizisinin her bir alt dizisi de x_0 elemanına yakınsar. Bu yüzden ve M cümlesinin de bikompakt olmasından dolayı $x_0 \in M$ olur. Böylece, M cümlesinin kapalı olduğu elde edilir.

Dikkat etmek gerekir ki, her bir sonlu boyutlu Banach uzayındaki her bir sınırlı kapalı sonsuz (elemanlı) cümle bikompakttır. Bu özellik matematik analizden belli olan ve sonlu boyutlu Euclid uzaylarında doğru olan Bolzano-Weierstrass teoreminden elde edilir. Bolzano-Weierstrass teoremine göre, her bir sınırlı reel sayılar dizisinden yakınsak olan bir alt dizi seçilebilir. Bu özellik sonsuz boyutlu uzaylarda sağlanmıyor. Mesela, sonsuz boyutlu Hilbert uzayında birim küre $\sigma_1(0) = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ sınırlı bir cümledir, kapalıdır ama bikompakt cümle değildir. Gerçekten de, H Hilbert uzayından alınmış her bir ortonormal $\{e_k\}_1^\infty$ dizisi birim kapalı $\sigma_1(0)$ küresine dahildir. Ama $\{e_k\}_1^\infty$ dizisi için $\|e_n - e_m\|^2 = 2, n \neq m$. Böylece, $\{e_k\}$ dizisi ve bu dizinin hiç bir alt dizisi Cauchy dizisi olmadığından bu dizinin her bir alt dizisi iraksaktır.

Reel $C_{[0,1]}$ Banach uzayında sınırlı kapalı

$$S = \{x(t) \in C_{[0,1]} : x(0) = 0, x(1) = 1, |x(t)| \leq 1\}$$

cümlesinin de bikompakt olmadığı kolaylıkla gösterilir (Trenogin 1980).

Tanım 2.7.2. X normlu uzay ve M de bu uzaydan alınmış bir cümle olsun. Eğer her bir $\{x_n\} \subset M$ dizisinden fundamental olan (Cauchy dizisi oluşturan) bir alt dizi seçilebilirse, o zaman M cümlesine kompakt cümle denir.

Dikkat etmek gerekir ki, X Banach uzayı olduğundan M cümlesinden alınmış $\{x_n\}$ dizisinden seçtiğimiz bir $\{x_{n_k}\}_1^\infty$ fundamental alt dizisinin X uzayının tam olmasından dolayı bu uzayda bir $x_0 \in X$ limiti olur. Ama bu x_0 elemanı genelde M cümlesine dahil olmaya da bilir. Aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.7.1. Normlu uzayda kompakt cümlelerin bikompakt olması için gerek ve yeter şart onun kapalı olmasıdır.

İspat.

Yeterliliğin ispatı. Kompakt M cümlesinin kapalı olduğunu var sayalım. Keyfi $\{x_n\} \subset M$ alalım. $\{x_{n_k}\}$ bu $\{x_n\}$ dizisinin fundamental olan bir alt dizisi olsun. $\{x_{n_k}\}$ dizisinin limiti $x_0 \in X$ elemanı M cümlesi kapalı olduğundan $x_0 \in M$ olur. Böylece, M bikompakttır.

Gerekliliğin ispatı. Bikompakt cümlelerin kapalı olmasından elde edilir.

Tanım 2.7.3. X normlu uzay ve $M \subset X$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. $M_\varepsilon \subset X$ cümlesi de verilmiş olsun. Eğer her bir $x \in M$ için öyle bir $\hat{x} \in M_\varepsilon$ noktası bulunursa ki, $\|x - \hat{x}\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır, o zaman M_ε cümlesine M cümlesinin ε -şebekesi denir.

M cümlesinin ε -şebekesinin aşağıdaki geometrik anlamı vardır. M_ε cümlesi M cümlesinin ε -şebekesi olsun. $\hat{x} \in M_\varepsilon$ alalım. $S_\varepsilon(\hat{x})$ cümlesi merkezi \hat{x} noktasında ve yarıçapı ε olan yuvar olsun. O zaman $M \subset \bigcup_{\hat{x} \in M_\varepsilon} S_\varepsilon(\hat{x})$ olur. Başka bir deyişle, merkezleri M_ε cümlesinin noktalarında ve yarıçapları ε olan yuvarların birleşimi M cümlesini örter.

M_ε şebekesindeki elemanların sayısı sonlu olduğunda M cümlesinin bu ε -şebekesine sonlu ε -şebekesi denir.

Teorem 2.7.2 (Hausdorff). Normlu X uzayında M cümlesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart her bir $\varepsilon > 0$ için M cümlesinin X uzayında sonlu ε -şebekesinin olmasıdır (Trenogin 1980).

Dikkat etmek gerekir ki, X Banach uzayı ve $M \subset X$ cümlesi kapalı bir cümle olduğunda, her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için M cümlesinin sonlu ε -şebekesi varsa, M cümlesi bikompakt cümledir.

2.7.2 Hausdorf teoreminden alınan sonuçlar, lokal kompaktlık

Hausdorf teoreminden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.7.3. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için M cümlesinin X uzayında kompakt olan ε -şebekesi bulunursa, o zaman M cümlesi kompakt cümle olur.

Sonuç 2.7.4. Kompakt cümle sınırlıdır.

X Banach uzayının bir M cümlesinde sayılabilir ve M de her yerde yoğun bir cümle bulunursa, M cümlesine ayrılabilir cümle denir.

Sonuç 2.7.5. Her bir kompakt cümle ayrılabiliridir.

Tanım 2.7.4. M cümlesi normlu X uzayının sınırlı olmayan cümlesi olsun. M cümlesinin her bir kapalı yuvarla kesişimi X uzayında kompakt (veya bikompakt) oluyorsa, o zaman M cümlesine lokal kompakt (lokal bikompakt) denir.

Uygulamada M cümlesinin lineer manifold veya altuzay olduğu haller çok önemli olan hallerdir. Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2.7.3. (Riesz). Normlu X uzayında lineer L manifoldunun lokal kompakt olması için gerek ve yeter şart L lineer manifoldunun sonlu boyutlu olmasıdır (Trenogin 1980).

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.7.6. Normlu X uzayının lokal kompakt olması için gerek ve yeter şart X uzayının sonlu boyutlu olmasıdır.

Bu sonucu ispatlamak için Riesz teoreminde $L \equiv X$ almak yeterlidir.

Tanım 2.7.5. Normlu X uzayının bir $M \subset X$ cümlesinin verildiğini var sayalım. Her bir $S \subset X$ yuvarında öyle bir S_1 yuvarı bulunursa ki, S_1 yuvarında M cümlesinde hiç bir nokta yoktur, yani $M \cap S_1 = \emptyset$, o zaman M cümlesine X uzayında hiç bir yerde yoğun olmayan cümle denir.

Sonuç 2.7.7. Sonsuz boyutlu normlu uzayda keyfi bir kompakt cümle bu uzayda hiç bir yerde yoğun olmayan bir cümledir.

2.8 Lineer Tamamen Sürekli (Kompakt) Operatörler

2.8.1 Lineer tamamen sürekli operatörlerin tanımı

X ve Y her ikisi de reel veya her ikisi de kompleks olan normlu uzaylar olsun. Burada ön kısımlarda olduğu gibi $\mathcal{L}(X, Y)$ ile tüm X uzayında tanımlanmış değerleri Y uzayında olan lineer sınırlı operatörlerin normlu uzayı gösterilir.

Tanım 2.8.1. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatörü X uzayındaki kapalı birim $\overline{S}_1(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq 1\}$ yuvarını Y uzayındaki bir kompakt cümleye dönüştürdüğünde, bu operatöre tamamen sürekli operatör denir.

Dikkat etmek gerekir ki, $\mathcal{L}(X, Y)$ uzayında tamamen sürekli olmayan operatörler de vardır. Örneğin, $I \in \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ birim operatörü X sonlu boyutlu olmadığında, tamamen sürekli operatör değildir. X uzayında birim $\overline{S}_1(x_0)$ yuvarı, yalnız X uzayı sonlu boyutlu uzay olduğunda, X uzayında kompakt cümle olur.

Tamamen sürekli operatörün tanımından aşağıdaki özellikler elde edilir.

2.8.2 Tamamen sürekli operatörlerin özellikleri

Teorem 2.8.1. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatörü tamamen sürekli operatör olduğunda her bir sınırlı cümleyi Y uzayında kompakt cümleye dönüştürür.

$\mathcal{L}(X, Y)$ uzayındaki tüm tamamen sürekli olan operatörlerin cümlesi $\sigma(X, Y)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.8.2. $\sigma(X, Y)$ cümlesi $\mathcal{L}(X, Y)$ uzayında bir altuzay oluşturur.

Aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.8.3. X veya Y uzaylarından herhangi biri sonlu boyutlu olduğunda $\sigma(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$ olur.

Gerçekten de, X sonlu boyutlu olduğunda X uzayındaki birim S yuvarı Bolzano-Weierstrass teoremine göre X uzayında kompakttır. A operatörü ise sürekli olduğundan her bir $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ için AS cümlesi Y uzayında kompakt cümle olur. Y uzayı sonlu boyutlu olduğunda, AS cümlesi de Y uzayında sınırlı bir cümle olduğundan bu cümle Bolzano-Weierstrass teoremine göre kompakt cümle olur.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.8.1. Her bir lineer $f \in X^*$ fonksiyoneli tamamen süreklidir.

Gerçekten de, f fonksiyoneli X uzayını bir boyutlu E^1 uzayına dönüştürdüğünden

Teorem 2.8.3 e göre her bir $f \in X^* \equiv \mathcal{L}(X, E^1)$ lineer sınırlı fonksiyoneli tamamen sürekli operatör olduğunu buluruz. Böylece, $X^* \equiv \sigma(X, E^1)$ olur.

Tanım 2.8.2. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in Y$ ve $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ olsun. Her bir $x \in X$ için

$$P_n x = \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle \varphi_k$$

şeklindeki bir lineer operatöre sonlu boyutlu bir lineer operatör denir (Trenogin 1980).

Her bir sonlu boyutlu lineer operatörün sınırlı operatör olduğu aşağıdaki eşitlikten elde edilir:

$$\|P_n x\| \leq \sum_{k=1}^n |\langle x, f_k \rangle| \|\varphi_k\| \leq c \|x\|$$

burada

$$c = \sum_{k=1}^n \|f_k\| \|\varphi_k\|.$$

Sonuç 2.8.2. Her bir sonlu boyutlu operatör tamamen süreklidir.

Gerçekten de, sonlu boyutlu lineer P_n operatörünün değerler bölgesi $R(P_n) = R_n$ sonlu boyutlu olduğundan $P_n \in \mathcal{L}(X, R_n)$ operatörü için Teorem 2.8.3 e göre $P_n \in \sigma(X, R_n)$ olur. Ama $\sigma(X, R_n) \subset \sigma(X, Y)$ olduğu da açıktır.

Böylece, Teorem 2.8.2 ye ve sonlu boyutlu operatörlerin Sonuç 2.8.2 de gösterilen özeliğine göre aşağıdaki sonuç da elde edilir.

Sonuç 2.8.3. $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ operatörler dizisi tamamen sürekli operatörler dizisi olduğunda ve $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatörü için $\mathcal{L}(X, Y)$ uzayında $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ olduğunda yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$ şartı sağlandığında, A operatörü de tamamen sürekli operatör olur.

Uygulamada aşağıdaki teorem de çok faydalıdır.

Teorem 2.8.4. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ve $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ olsun. Bu operatörlerden herhangi biri tamamen süreklı olduğunda, BA arpımı da tamamen süreklı operatör olur.

İspat. S cümlesi X uzayında bir birim yuvar olsun. A tamamen süreklı bir operatör olduğunda $A(S)$ cümlesi Y uzayında kompakttır. O zaman $B(A(S))$ cümlesi Z uzayında kompakt cümle olur. B tamamen süreklı olduğu halde $A(S)$ cümlesi sınırlı cümle olduğundan $B(A(S))$ cümlesi Z uzayında bir kompakt cümle olur. Böylece, bu halde de BA arpımı tamamen süreklı operatör olur. Bu da teoremi ispatlar.

Tamamen süreklı operatörlerin diğer özelliklerini vermek için burada normlu uzaylarda dizilerin zayıf yakınsaklığının tanımını verelim.

Tanım 2.8.3. X normlu uzay ve $\{x_n\}$ dizisi de bu uzaydan alınmış bir dizi olsun. Eğer her bir $f \in X^*$ için $\langle x_n, f \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle$ olursa, o zaman $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ elemanına zayıf yakınsaktır denir.

Burada farkı belirtmek için X uzayında norma göre yakınsak olan dizilere güçlü diziler denir.

Dikkat etmek gerekir ki, $\mathcal{L}(X, Y)$ uzayından alınmış her A operatörü X deki bir diziyi Y uzayında güçlü yakınsak olan bir diziye dönüştürür. Ama $\sigma(X, Y)$ uzayının operatörleri X uzayında zayıf yakınsak olan dizileri Y uzayında güçlü yakınsak dizilere dönüştürdüğu gösterilebilir. Bunun ispatı aşağıdaki lemmaya dayanır.

Lemma 2.8.1. Eğer bir dizi zayıf yakınsak ve kompakt ise, o zaman bu dizi yakınsaktır (yani norma göre yakınsaktır) (Trenogin 1980).

Teorem 2.8.5. $A \in \sigma(X, Y)$ olsun. $x_n \rightarrow x_0$ zayıf yakınsak olduğunda, $Ax_n \rightarrow Ax_0$ güçlü yakınsaktır.

İspat. $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x_0$ zayıf yakınsak olsun. Zayıf yakınsak diziler sınırlı olduğundan $\{Ax_n\}$ dizisi kompakttır. Aynı zamanda $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ olduğundan limiti x_0 olan zayıf yakınsak $\{x_n\}$ dizisini limit Ax_0 olan zayıf yakınsak $\{Ax_n\}$ dizisine dönüştürüyor. Yukarıdaki lemmaya göre $\{Ax_n\}$ dizisinin Ax_0 elemanına güçlü yakınsadığı görülür.

Aşağıdaki teorem de verilebilir:

Teorem 2.8.6. (Schauder) $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ve burada Y tam uzay olsun. A operatörünün tamamen sürekli olması için gerek ve yeter şart $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ operatörünün tamamen sürekli olmasıdır.

2.8.3 Tamamen sürekli operatörlere örnekler

Örnek 2.8.1. $H = l^2$ Hilbert uzayı $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 < +\infty$ şartını sağlayan dizilerin lineer uzayıdır. Bu uzayda $x \in l^2$ elemanın normu $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2}$ formülü ile tanımlanır. $H = X = Y = l^2$ alalım. l^2 uzayında $Ax = y$, $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\}$ operatörünü

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j, \quad k = 1, 2, \dots$$

eşitlikleri ile tanımlayalım. Burada $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ matrisinin elemanlarının $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < +\infty$ şartını sağladığını var sayalım. Bu şartlarla tanımlanan lineer sınırlı A operatörüne Hilbert -Schmidt matris operatörü denir. Hilbert-Schmidt matris operatörünün sınırlı olması Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin yardımıyla elde edilen

aşağıdaki eşitsizlikten bellidir:

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j \right|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 \sum_{s=1}^{\infty} |\xi_s|^2 \right), \quad x = (\xi_s)_{s=1}^{\infty} \text{ olduğundan } \|x\|^2 = \sum_{s=1}^{\infty} |\xi_s|^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 \right) \cdot \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Bu ise, $\|Ax\| \leq c \|x\|$ eşitsizliğidir, burada $c = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 \right)^{1/2}$. Böylece, $\|A\| \leq c$. Yani A sınırlıdır ve $A \in \mathcal{L}(l^2)$.

Şimdi A operatörünün tamamen sürekli operatör olduğunu gösterelim. Bunun için her bir $x = \{\xi_k\} \in l^2$ vektörünü

$$y_n = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, 0, \dots)$$

vektörüne $A_n x = y_n$ olarak dönüştüren A_n operatörünü tanımlayalım. Her bir A_n operatörünün değerler bölgesi $R(A_n) = R_n$ sonlu boyutludur. Bu yüzden Teorem 2.8.3 e göre A_n operatörü tamamen sürekli operatördür. Diğer yandan $n \rightarrow \infty$ şartında yakınsak serinin kalan teriminin sifıra yakınsak olmasından dolayı

$$\|A - A_n\|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 \rightarrow 0$$

olduğundan Teorem 2.8.2 ve Teorem 2.8.3 den A operatörünün tamamen sürekli operatör olduğu elde edilir.

Örnek 2.8.2. $X = Y = C_{[a,b]}$ olsun. Aşağıdaki formülle tanımlanan $y = Ax$

integral operatörünü ele alalım:

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds. \quad (2.19)$$

A integral operatörünün çekirdeği olan $K(t, s)$ fonksiyonunun $Q = [a, b] \times [a, b]$ karesinde iki değişkenli fonksiyon gibi sürekli fonksiyon olduğunu var sayalım. $M = \max_Q |K(t, s)|$ olsun ve $C_{[a,b]}$ uzayında birim $\overline{S}_1(0)$ yuvarını alalım: $\overline{S}_1(0) = \{x \in C_{[a,b]} : \|x\| \leq 1\}$. O zaman aşağıdaki değerlendirme yapılabilir:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \max_{t \in [a,b]} \left| \int_a^b K(t, s)x(s)ds \right| \\ &\leq \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t, s)| \cdot |x(s)| ds \\ &\leq (b-a) \cdot M \cdot \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \\ &= (b-a) \cdot M \cdot \|x\| \\ &\leq (b-a)M. \end{aligned}$$

Böylece, $A(S)$ cümlesinin fonksiyonlarının düzgün sınırlı olduklarını elde ederiz.

Bir $L \subset C_{[a,b]}$ cümlesinin fonksiyonları için öyle bir $c > 0$ sabiti bulunursa ki her bir $y(t) \in L$ için $|y(t)| \leq c$ eşitsizliği tüm $t \in [a, b]$ için sağlandığında L cümlesinin fonksiyonları düzgün sınırlıdır denir. Yukarıda elde ettiğimiz $\|Ax\| \leq c$, ($c = (b-a)M$) eşitsizliğinden $Ax = y(t) \in A(S)$ fonksiyonlarının her birinin $[a, b]$ aralığında $|y(t)| \leq c$ şartını sağladığı elde edilir.

Şimdi $A(S)$ cümlesinin fonksiyonlarının aynı mertebeden sürekli olduklarını göstereyim. Bununla biz $A(S)$ cümlesinin $C_{[a,b]}$ de kompakt cümle olduğunu Arzela teoremine göre belirlemiş olacağız.

Arzela Teoremi. $L \subset C_{[a,b]}$ cümlesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart L cümlesinin fonksiyonlarının

1. Düzgün sınırlı,
2. Aynı mertebeden sürekli olmalarıdır (Trenogin 1980).

Hatırlatalım ki, keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı var ve $|t' - t''| < \delta$ şartını sağlayan her bir $t', t'' \in [a, b]$ için ve tüm $x(t) \in L$ için $|x(t') - x(t'')| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlandığında L cümlesinin fonksiyonları $[a, b]$ aralığında aynı mertebeden sürekli dir.

$A(S)$ cümlesinin fonksiyonlarının aynı mertebeden sürekli fonksiyonlar olduklarını göstermek için keyfi $y(t) \in A(S)$ alalım ve aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım.

$$|y(t') - y(t'')| \leq \int_a^b |K(t', s) - K(t'', s)| \cdot |x(s)| ds.$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} |y(t') - y(t'')|^2 &\leq \int_a^b |K(t', s) - K(t'', s)|^2 |x(s)|^2 ds \\ &\leq \int_a^b |K(t', s) - K(t'', s)|^2 ds \int_a^b |x(s)|^2 ds \\ &\leq (b - a) \int_a^b |K(t', s) - K(t'', s)|^2 ds \end{aligned}$$

buluruz. $K(t, s)$ fonksiyonu Q karesinde düzgün sürekli olduğundan keyfi alınmış $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı var ki, $|t' - t''| < \delta$ şartını sağlayan her bir $t', t'' \in [a, b]$ için ve keyfi bir $s \in [a, b]$ için $|K(t', s) - K(t'', s)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle yukarıdaki eşitsizlikten $|t' - t''| < \delta$ şartını sağlayan her bir $t', t'' \in [a, b]$ ve keyfi alınmış $y(t) \in A(S)$ için $|y(t') - y(t'')| < (b - a)^2 \varepsilon^2$ eşitsizliği elde edilir. Bu

eşitsizlikte $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan $A(S)$ cümlesinin fonksiyonlarının aynı mer-
tebeden sürekli fonksiyonlar olduğu elde edilir. Böylece, Arzela teoremine göre $A(S)$
cümlesinin $C_{[a,b]}$ uzayında kompakt cümle olduğu ispatlanmış olur. A operatörü
 $C_{[a,b]}$ uzayındaki birim kapalı $S = \overline{S}_1(0)$ yuvarını kompakt $A(S) \subset C_{[a,b]}$ cümle-
sine dönüştürmesinden dolayı tamamen sürekli operatörün tanımına göre tamamen
sürekli operatör olduğu bulunur.

Örnek 2.8.3. $X = Y = \mathcal{L}_2[a, b]$ olsun. (1) formülü ile tanımlanan $y = Ax$
integral operatörünü ele alalım. Bu integral operatörünün çekirdeği $K(t, s)$ fonksiy-
onu $Q = [a, b] \times [a, b]$ karesinde sürekli fonksiyon olsun. Burada $A : \mathcal{L}_2[a, b] \rightarrow \mathcal{L}_2[a, b]$
operatörünün tamamen sürekli operatör olduğunu gösterelim. Bunun için $\mathcal{L}_2[a, b]$
uzayında birim kapalı $S = \overline{S}_1(0)$ yuvarını ele alalım. Burada

$$\overline{S}_1(0) = \{x(t) \in \mathcal{L}_2[a, b] : \|x\|^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt \leq 1\}.$$

$\{x_n(t)\} \subset S$ alalım ve aşağıdaki eşitlikle tanımlanan $\{y_n\}$ dizisine bakalım:

$$y_n(t) = (Ax_n)(t) = \int_a^b K(t, s)x_n(s)ds.$$

$\{y_n(t)\}$ cümlesinin fonksiyonları $[a, b]$ de süreklidirler:

$$\begin{aligned} |y_n(t_1) - y_n(t_2)| &\leq \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| \cdot |x_n(s)| ds \\ &\leq \left\{ \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b |x_n(s)|^2 ds \right\}^{1/2} \\ &< \varepsilon \sqrt{b-a}. \end{aligned}$$

Böylece, $|t_1 - t_2| < \delta$ olduğunda Örnek 2.8.2 de olduğu gibi bu eşitsizlik her bir
 n sayısı için sağlandığından $y_n(t)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında süreklidirler, aynı
zamanda aynı dereceden süreklidirler.

$\{y_n(t)\}$ fonksiyonları $C_{[a,b]}$ uzayında düzgün sınırlıdırlar. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} |y_n(t)| &\leq \int_a^b |K(t,s)| \cdot |x_n(s)| ds \\ &\leq \left\{ \int_a^b |K(t,s)|^2 ds \right\}^{1/2} \\ &\leq M\sqrt{b-a}. \end{aligned}$$

Burada, önce Cauchy-Schwarz eşitsizliği sonra $x_n \in S$ olması sonra ise, $M = \max_Q |K(t,s)|$ eşitliği kullanıldı. Böylece, Arzela teoremine göre $\{y_n(t)\}$ dizisi $C_{[a,b]}$ uzayında kompakttır. $\{y_{n'}(t)\}$ alt dizisi $[a,b]$ aralığında düzgün olarak $y_0(t) \in C_{[a,b]}$ fonksiyonuna yakınsayan bir dizi olsun. O zaman

$$\|y_{n'} - y_0\|_{\mathcal{L}_2[a,b]} \leq \sqrt{b-a} \|y_{n'} - y_0\|_{C_{[a,b]}}$$

eşitsizliği sağlandığından $\{y_{n'}(t)\}$ dizisinin $C_{[a,b]}$ uzayında $y_0(t) \in C_{[a,b]}$ fonksiyonuna yakınsaklığından bu dizinin $\mathcal{L}_2[a,b]$ uzayında $y_0(t) \in \mathcal{L}_2[a,b]$ elemanına yakınsadığı elde edilir. Bu ise, $\{y_n(t)\}$ dizisinin $\mathcal{L}_2[a,b]$ uzayında kompakt olduğunu gösterir. Böylece, A operatörünün $\mathcal{L}_2[a,b]$ uzayında kompakt olduğu ispatlanmış oldu.

Örnek 2.8.4. $X = Y = \mathcal{L}_2[a,b]$ olsun. Yine (2.19) formülü ile tanımlanan A integral operatörünü ele alalım. Ama bu kez $K(t,s) \in \mathcal{L}^2(Q)$ olduğunu farz edelim, yani aşağıdaki iki katlı Lebesgue integralinin yakınsak olduğunu var sayalım:

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dt \cdot ds < +\infty.$$

Bu şart sağlandığında (2.19) formülü ile tanımlanan A integral operatörüne Hilbert-Schmidt integral operatörü denir. Bu Hilbert-Schmidt integral operatörünün tamamen sürekli operatör olduğunu ispatlayalım: $K(t,s) \in \mathcal{L}^2(Q)$ olduğundan $\mathcal{L}^2(Q)$ uzayının tanımından öyle $\{K_n(t,s)\}$ fonksiyonlar dizisi bulunur ki, Q cümlesinde bu fonksiyonlar süreklidirler. $\mathcal{L}^2(Q)$ uzayının metriğinde $K(t,s)$ fonksiyonuna yakınsak-

tırlar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b |K_n(t, s) - K(t, s)|^2 dt ds = 0.$$

Çekirdekleri $K_n(t, s)$ olan ve $\mathcal{L}_2[a, b]$ uzayında uygun olarak (2.19) formülleri ile tanımlanmış $A_n : \mathcal{L}_2[a, b] \rightarrow \mathcal{L}_2[a, b]$ integral operatörlerini ele alalım. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned} |Ax - A_n x|^2 &\leq \left| \int_a^b [K(t, s) - K_n(t, s)]x(s) ds \right|^2 \\ &\leq \int_a^b |K(t, s) - K_n(t, s)|^2 ds \int_a^b |x(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

buluruz. Buradan da

$$\begin{aligned} \|Ax - A_n x\|^2 &= \int_a^b |Ax - A_n x|^2 dt \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |K(t, s) - K_n(t, s)|^2 ds dt \|x\|^2. \end{aligned}$$

ve buradan da $n \rightarrow \infty$ için

$$\|A - A_n\| \leq \int_a^b \int_a^b |K(t, s) - K_n(t, s)|^2 ds dt \rightarrow 0$$

olur.

A_n operatörünün, sürekli çekirdekli integral operatörü $\mathcal{L}_2[a, b]$ uzayında tamamen sürekli operatör olduğu Örnek 2.8.3 de gösterilmişti. Burada ise $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}_2[a, b])$ operatörler dizisinin A operatörüne yakınsadığı gösterildi, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$.

Böylece, A operatörü tamamen sürekli A_n operatörlerinin limiti olduğundan Sonuç

2.8.3 e göre A operatörü de tamamen sürekli bir operatör olur.

2.9 Lineer Tamamen Sürekli Özeşlenik Operatörlerinin Karakteristik Değerleri ve Karakteristik Vektörleri

2.9.1 Lineer operatörlerin karakteristik değerleri ve karakteristik vektörlerinin tanımı

X bir lineer uzay, A ise $A : X \rightarrow X$ biçiminde bir lineer operatör olsun. A operatörünün tanım bölgesi $D(A) \subset X$ olsun.

Tanım 2.9.1. $x \neq 0, x \in D(A)$ vektörü için

$$Ax = \lambda x$$

eşitliği bir λ sayısı için sağlandığında bu λ sayısına A operatörünün bir karakteristik değeri veya karakteristik sayısı denir. Bu durumda x vektörüne A operatörünün λ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektörü denir.

Aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.9.1. Lineer operatörün farklı karakteristik değerlerine karşılık gelen karakteristik vektörleri lineer bağımsızdır (Hacısalihoglu 1982).

Şimdi X Banach uzayı olduğunu ve $A \in \sigma(X)$ olduğunu, yani A operatörünün X Banach uzayında tanımlanmış değerleri X Banach uzayında olan tamamen sürekli operatör olduğunu var sayalım. Aşağıdaki teorem kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem 2.9.2. A operatörü X de tamamen sürekli operatör olduğunda her bir $\varepsilon > 0$ için kompleks düzlemde $|\lambda| \leq \varepsilon$ dairesinin dışında A operatörünün yalnız sonlu sayıda karakteristik değerleri olabilir (Trenogin 1980).

2.9.2 Lineer tamamen sürekli özdeşlik operatörlerin karakteristik değerleri ve karakteristik vektörleri

H bir Hilbert uzayı ve $A : H \rightarrow H$ tamamen sürekli bir özdeşlik operatör olsun. Böyle operatörlerin karakteristik değerleri ve karakteristik vektörleri hakkında bir çok teorem vardır.

Aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 2.9.3. $A \neq 0$ olduğunda, A operatörünün en azından bir tane sıfırdan farklı karakteristik değeri vardır.

Teorem 2.9.4. Lineer tamamen sürekli özdeşlik A operatörünün tüm karakteristik değerleri reeldir ve $[m, M]$ aralığında yer alırlar. Burada

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Özel halde $M \neq 0$ olduğunda M sayısı A operatörünün en büyük karakteristik değeri, $m \neq 0$ olduğunda ise m sayısı A operatörünün en küçük karakteristik değeri olur.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.9.1. A operatörü lineer tamamen sürekli özdeşlik operatör olduğunda $\|A\| = |\lambda_1|$ olur. Burada λ_1 sayısı A operatörünün modülce en büyük karakteristik değeridir. Özel halde bu sonlu boyutlu Hilbert uzaylarında tanımlanmış özdeşlik

operatörler için de doğrudur.

2.9.3 Lineer tamamen sürekli özeşlenik operatörlerin yaklaşımı hakkında teorem

Aşağıdaki teorem de verilebilir:

Teorem 2.9.5. (Hilbert-Schmidt) A operatörü H Hilbert uzayında tamamen sürekli özeşlenik operatör olsun. O zaman her bir $x \in H$ elemanı için Ax elemanı, A operatörünün ortonormal karakteristik vektörleri sisteminin yakınsak Fourier serisine açılır (Trenogin 1980).

İspat. φ_1 vektörü A operatörünün, modülce en büyük olan λ_1 karakteristik değerine uygun olan ve $\|\varphi_1\| = 1$ şartını sağlayan karakteristik vektörü olsun. $H_1 = \{x \in H : (x, \varphi_1) = 0\}$ lineer manifoldunu alalım. Her bir $x \in H_1$ için $(Ax, \varphi_1) = (x, A\varphi_1) = \lambda_1(x, \varphi_1) = 0$ olduğundan A operatörü H_1 lineer manifoldunun elemanlarını H_1 lineer manifoldunun elemanlarına dönüştürüyor. Bu yüzden A operatörünü H_1 de tanımlanmış operatör gibi ele alabiliriz. Sonra A operatörü H_1 de önceki gibi tamamen sürekli özeşlenik lineer operatör olur. Teorem 2.9.3 e göre A operatörünün H_1 -de λ_2 karakteristik değeri ve ona uygun φ_2 karakteristik vektörü vardır (Burada biz H_1 -de $A \neq 0$ olduğunu varsaydık). Ayrıca $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ eşitsizliği de sağlanır.

Şimdi $H_2 = \{x \in H_1 : (x, \varphi_2) = 0\}$ lineer manifoldunu ele alalım ve yine Teorem 2.9.3 ü uygulayalım. Bu işlemleri bu şekilde devam ettirelim. Burada iki hal olabilir. Birinci halde öyle bir n sayısı bulunur ki, $(x, \varphi_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ şartları ile tanımlanan H_n lineer manifoldunda $A = 0$ olur. Bu halde keyfi $x \in H$ elemanı için

$$y = x - \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k$$

elemanını ele alalım. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ortonormal olduğundan $y \in H_n$ olduğu açıktır. Bu yüzden de $Ay = 0$ olur. Buna göre de

$$Ax = \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \lambda_k \varphi_k$$

eşitliği elde edilir.

İkinci hal işlemlerin sonsuz devam ettiği haldir. Sonuçta biz A operatörünün $\{\lambda_k\}$ karakteristik değerleri ve uygun $\{\varphi_k\}$ karakteristik vektörleri dizisini alırız. Sonuç 2.9.1 e göre

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H_n)}^2 = \lambda_{n+1}^2$$

olur. Bu nedenle de

$$\begin{aligned} \left\| A \left(x - \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k \right) \right\|^2 &\leq \|A\|_{\mathcal{L}(H_n)}^2 \cdot \left\| x - \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 \\ &= \lambda_{n+1}^2 \left\| x - \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 \\ &= \lambda_{n+1}^2 \left\{ \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, \varphi_k)|^2 \right\} \\ &\leq \lambda_{n+1}^2 \|x\|^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

olur. Burada $n \rightarrow \infty$ şartında $\lambda_n \rightarrow 0$ olduğu için

$$A \left[x - \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k \right] \rightarrow 0$$

veya

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) \lambda_k \varphi_k \quad (2.21)$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. Böylece, teorem ispatlanmış oldu.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.9.2. Özeşlenik tamamen sürekli A operatörünün tersi varsa, o zaman bu operatörün karakteristik vektörlerinden oluşan H uzayında bir ortonormal baz seçilebilir.

Gerçekten de, (2.21) eşitliğinin her iki yanını A^{-1} operatörü ile çarparsak keyfi $x \in H$ için aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) \varphi_k$$

Bu sonuncu eşitlik her bir $x \in H$ vektörünün A operatörünün ortonormal karakteristik vektörleri sistemi üzerinde yakınsak bir Fourier serisine açıldığını gösterir. Başka bir deyişle $\{\varphi_k\}_1^{\infty}$ sistemi H Hilbert uzayında baz olur.

Sonuç olarak biz çok önemli olan aşağıdaki teoremi elde etmiş oluruz.

Teorem 2.9.6. A operatörü H uzayında lineer tamamen sürekli özeşlenik bir operatör olsun. $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ sayıları A operatörünün $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots$ şartını sağlayan karakteristik değerleri $\{\varphi_k\}_1^{\infty}$ vektörler sistemi de A operatörünün bu karakteristik değerlerine uygun ortonormal karakteristik baz vektörleri sistemi olsun. O zaman boyutu n sayısını aşmayan sonlu boyutlu lineer operatör P olmak üzere $S = \|A - P\|_{\mathcal{L}(H)}^2$ fonksiyoneli minimum $S_0 = \inf_P \|A - P\|$ değerini

$$P_0 h = \sum_{i=1}^n (h, \varphi_i) \lambda_i \varphi_i$$

eşitliği ile tanımlanan n -boyutlu P_0 operatöründe alır. $S = \|A - P\|_{\mathcal{L}(H)}^2$ fonksiyonelinde $P = P_0$ aldığımızda S fonksiyonelinin minimal S_0 değeri için

$$S_0 = \|A - P_0\|^2 = \lambda_{n+1}^2(A)$$

eşitliğini buluruz. Burada $\lambda_{n+1}(A)$ sembolü A operatörünün $(n + 1)$ -ci karakteristik

değerini gösterir (Mustafayev, Sağel and Eroğlu 2006).

2.10 Hilbert Uzayındaki İki Alt Uzay Arasındaki Uzaklık

2.10.1 Hilbert uzayında alt uzaylar arasındaki uzaklığın tanımı

H Hilbert uzayı, M_1 ve M_2 bu uzayda iki alt uzay, P_1 ve P_2 ise H uzayının M_1 ve M_2 alt uzayları üzerine ortogonal projeksiyon operatörleri olsun: $P_1 : H \rightarrow M_1$ ve $P_2 : H \rightarrow M_2$

Tanım 2.10.1. H Hilbert uzayında M_1 ve M_2 alt uzayları arasındaki uzaklık

$$\rho(M_1, M_2) = \|P_1 - P_2\| \quad (2.22)$$

formülü ile tanımlanır (Naymark 1969).

Bu tanımdan $M_1^\perp = H \ominus M_1$ ve $M_2^\perp = H \ominus M_2$ olduğundan

$$\rho(H \ominus M_1, H \ominus M_2) = \rho(M_1, M_2) \quad (2.23)$$

yani

$$\rho(M_1^\perp, M_2^\perp) = \rho(M_1, M_2)$$

formülü elde edilir.

Gerçekten de, tanıma göre $P_1 : H \rightarrow M_1$ için $I - P_1 : H \rightarrow M_1^\perp$ ve $P_2 : H \rightarrow M_2$

için $I - P_2 : H \rightarrow M_2^\perp$ olduğundan

$$\begin{aligned}\rho(H \ominus M_1, H \ominus M_2) &= \|(I - P_1) - (I - P_2)\| = \|P_1 - P_2\| \\ &= \rho(M_1, M_2)\end{aligned}$$

bulunur. Aşağıdaki eşitsizlik verilebilir:

$$\rho(M_1, M_2) \leq 1. \quad (2.24)$$

Gerçekten de, her bir $x \in H$ vektörü için $P_2(I - P_1)x$ ve $(I - P_2)P_1x$ vektörleri ortogonal vektörlerdir ve bu vektörlerin farkı $(P_2 - P_1)x$ vektörüne eşittir. Buradan

$$\begin{aligned}\|(P_2 - P_1)x\|^2 &= \|P_2(I - P_1)x\|^2 + \|(I - P_2)P_1x\|^2 \\ &\leq \|(I - P_1)x\|^2 + \|P_1x\|^2 = \|x\|^2 \\ &\leq \|x\|^2\end{aligned} \quad (2.25)$$

bulunur. $\|x\| = 1$ olduğundan $\|P_2 - P_1\| \leq 1$ elde edilir.

Dikkat edelim ki, (2.24) eşitsizliğindeki eşitlik, alt uzaylardan birinde diğer alt uzaya dik olan sıfırdan farklı bir vektör olduğu halde alınabilir. Gerçekten de, eğer $x \neq 0$, $x \in M_1$ ve $x \perp M_2$ olursa, o zaman $P_1x = x$ ve $P_2x = 0$ olur. Buna göre de $\|(P_1 - P_2)x\| = \|x\|$ ve buradan da $\|P_1 - P_2\| = 1$ elde edilir.

2.10.2 Hilbert uzayında alt uzaylar arasındaki uzaklığın eşdeğer tanımı

Aşağıdaki teorem doğrudur.

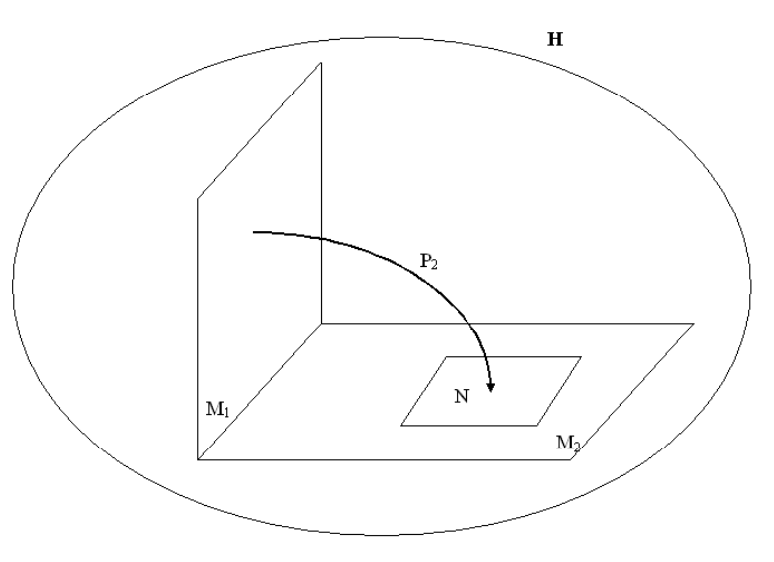
Teorem 2.10.1. Eğer $\rho(M_1, M_2) < 1$ ise, o zaman

$$\dim M_1 = \dim M_2$$

dir.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için $\dim M_2 > \dim M_1$ olduğunda M_2 alt uzayında sıfırdan farklı M_1 alt uzayına dik olan bir vektörün olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $N = \overline{P_2 M_1}$ alt uzayını alalım. $N \subset M_2$ olduğu açıktır ve aşağıdaki eşitsizlik verilebilir.

$$\dim N \leq \dim M_1 < \dim M_2$$



Şekil 2.1 M_1 alt uzayından M_2 alt uzayına P_2 ortogonal projeksiyon operatörünün şematik gösterimi

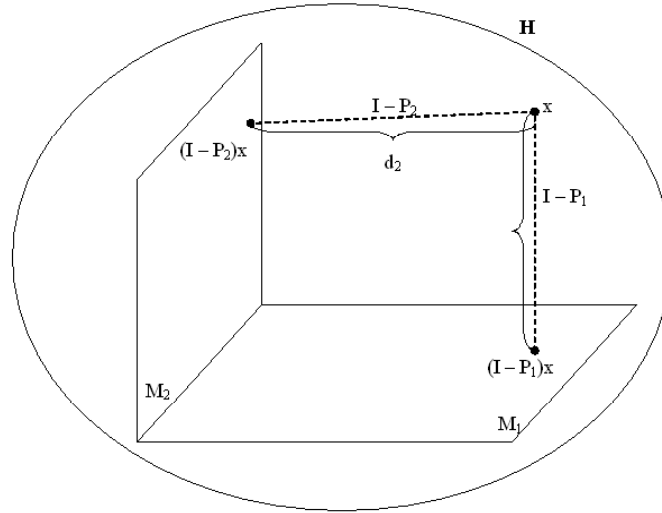
$N \neq M_1$ olduğundan dolayı M_2 alt uzayında $x \neq 0$ şartını sağlayan öyle bir x vektörü vardır ki, bu vektör $N = \overline{P_2 M_1}$ alt uzayına da diktir. Çünkü, $M_1 \ominus N \perp M_2$ dir. Teorem ispatlandı.

Hilbert uzayında iki alt uzay arasındaki uzaklığı aşağıdaki formüllerle de tanımlamak mümkündür.

Tanım 2.10.2. Aşağıdaki

$$d_1 = \sup_{\substack{x \in M_2 \\ x \neq 0}} \frac{\|(I - P_1)x\|}{\|x\|} , \quad d_2 = \sup_{\substack{x \in M_1 \\ x \neq 0}} \frac{\|(I - P_2)x\|}{\|x\|} \quad (2.26)$$

sayılarını ele alalım.



Şekil 2.2 d_1 ve d_2 uzaklıklarının şematik gösterimi

O zaman

$$\rho(M_1, M_2) = \max \{d_1, d_2\} \quad (2.27)$$

dır. (2.27) formülünü ispatlamak için

$$\rho(M_1, M_2) = \max \{d_1, d_2\}$$

$$\begin{aligned}
&= \max \left\{ \sup_{\substack{x \in M_2 \\ x \neq 0}} \frac{\|(I - P_1)x\|}{\|x\|}, \sup_{\substack{x \in M_1 \\ x \neq 0}} \frac{\|(I - P_2)x\|}{\|x\|} \right\} \\
&= \max \left\{ \sup_{\substack{x \in N \\ x \neq 0}} \frac{\|(I - P_1)x\|}{\|x\|}, \sup_{\substack{x \in N \\ x \neq 0}} \frac{\|(I - P_2)x\|}{\|x\|} \right\} \\
&= \sup_{\substack{x \in N \\ x \neq 0}} \frac{1}{\|x\|} \{ \|(I - P_1)x\|, \|(I - P_2)x\| \} \\
&= \sup_{\substack{x \in N \\ x \neq 0}} \{ \|(I - P_1)x\|, \|(I - P_2)x\| \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(M_1, M_2) &= \|P_1 - P_2\| \\
&= \|(P_1 - P_2)x\| \\
&= \sup_{\substack{x \in N \\ x \neq 0}} \{ \|(I - P_1)x\|, \|(I - P_2)x\| \}
\end{aligned}$$

Burada iki hal düşünelim.

(1) $x \in M_1$ olması hali:

$$(I - P_1)x = 0, P_1x = x$$

$$(I - P_2)P_1x = (I - P_2)x$$

$$\rho(M_1, M_2) = \|(P_2 - P_1)x\|$$

(2.25) ten

$$\begin{aligned}
\rho(M_1, M_2) &= \|(P_2 - P_1)x\| \\
&= \|(I - P_2)x\|^2 \\
&= d_2^2
\end{aligned}$$

(2) $x \in M_2$ olması hali:

$$(I - P_2)x = 0, P_2x = x$$

$$P_2(I - P_1)x = (I - P_1)x$$

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_2) &= \|(P_2 - P_1)x\| \\ &= \|(I - P_1)x\|^2 \\ &= d_1^2 \end{aligned}$$

Böylece

$$\rho(M_1, M_2) \geq \max\{d_1, d_2\}$$

dir. Bu sonucu eşitsizliğin tersinin de sağlandığını göstermek için d_2 sayısının tanımından

$$d_2^2 = \|(I - P_2)P_1x\|^2$$

olduğundan

$$\|(I - P_2)P_1x\|^2 \leq d_2^2 \|P_1x\|^2 \quad (2.28)$$

olur. Buna ilave olarak aşağıdaki bağlantıların da dikkate alalım:

$$P_1 + P_2 = I \Rightarrow P_2 = I - P_1$$

$$x \in H, P_1x \in M_1, (I - P_1)x \in M_2$$

$$P_2(I - P_1)x = (I - P_1)x$$

$$\begin{aligned} \|P_2(I - P_1)x\|^2 &= (P_2(I - P_1)x, P_2(I - P_1)x) \\ &= \|(I - P_1)x\|^2 \\ &= \|(I - P_1)x\| \|(I - P_1)x\| \end{aligned}$$

$$\leq d_1 \|(I - P_1)x\|$$

Buradan da d_1 sayısının tanımına göre

$$\|P_2(I - P_1)x\|^2 \leq d_1 \|(I - P_1)x\| \quad (2.29)$$

olur. (2.25), (2.28) ve (2.29) dan

$$\begin{aligned} \|P_2(I - P_1)x\|^2 &= \|(I - P_2)P_1x\|^2 + \|P_2(I - P_1)x\|^2 \\ &\leq d_2^2\|P_1x\|^2 + d_1^2\|(I - P_1)x\|^2 \\ &\leq \max\{d_1^2, d_2^2\} (\|P_1x\|^2 + \|(I - P_1)x\|^2) \\ &= \max\{d_1^2, d_2^2\} \|x\|^2, \|x\|^2 = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\rho(M_1, M_2) \leq \max\{d_1, d_2\}$$

dir. O halde

$$\rho(M_1, M_2) = \max\{d_1, d_2\}$$

olur.

2.11 Grassman Manifolds ve Bu Manifolarda Metrik

2.11.1 Grassman manifoldlarının tanımı

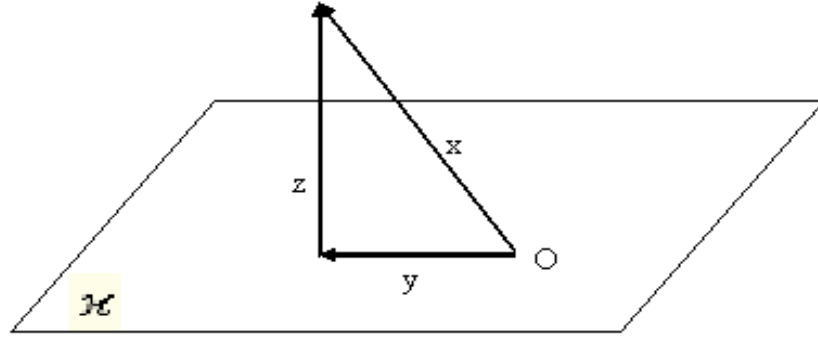
E^n Öklid uzayı ve $\pi, \tau, \varkappa, \dots$ bu uzaydan alınmış alt uzaylar olsun. Burada alt uzay sözcüğü lineer uzayın alt uzayı anlamında kullanılır. P_π ve P_τ ile E^n Öklid uzayının π ve τ alt uzaylarına ortogonal projeksiyon operatörlerini gösterelim.

Dikkat edelim ki, E^n Öklid uzayında herhangi bir \varkappa alt uzayı verildiğinde bu E^n Öklid uzayının her bir $x \in E^n$ elemanı için aşağıdaki açılım doğrudur (Şekil 2.3)

(Trenogin 1980).

$$x = y + z \quad (2.30)$$

Burada $y \in \mathcal{K}$, $z \perp \mathcal{K}$ dir. Buradaki (2.30) eşitliği tekdir.



Şekil 2.3 Öklid uzayında elemanların Riesz Teoremine göre açılımı

(2.30) eşitliğindeki y elemanına x elemanının \mathcal{K} alt uzayına ortogonal projeksiyonu denir.

Aşağıdaki

$$P_{\mathcal{K}}x = y \quad (2.31)$$

formülü ile tanımlanan $P_{\mathcal{K}}$ operatörüne E^n Öklid uzayının \mathcal{K} alt uzayı üzerine ortogonal projeksiyon operatörü denir.

Tanım 2.11.1. E^n Öklid uzayının k - boyutlu $\pi, \tau, \mathcal{K}, \dots$ alt uzaylarının cümlesinde aşağıdaki

$$\rho(\pi, \tau) = \|P_{\pi} - P_{\tau}\| \quad (2.32)$$

formülü ile ρ metriğini tanımlayalım. ρ metriği ile elde edilmiş bu metrik uzaya k

mertebeli Grassman Manifoldu denir ve $\varphi_k^n = \varphi_k(E^n)$ sembolü ile gösterilir (İvanov 1975).

Hatırlatalım ki, (2.32) formülünün sağ yanındaki $\|P_\pi - P_\tau\|$ sembolü $P_\pi - P_\tau$ operatörünün normu olup aşağıdaki formülle tanımlanır (Trenogin 1980).

$$\|P_\pi - P_\tau\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(P_\pi - P_\tau)x\| \quad (2.33)$$

2.11.2 Grassman manifoldlarında metriği veren formül

π ve τ alt uzaylarının baz vektörleri verildiğinde bu alt uzaylar arasındaki uzaklık

$$\rho(\pi, \tau) = \|P_\pi - P_\tau\|$$

dır. Bu sayının hesaplanması için aşağıdaki teorem verilebilir (İvanov 1975).

Teorem 2.11.1. y_1, y_2, \dots, y_k vektörlerinin k - boyutlu π alt uzayında baz olduğunu ve z_1, z_2, \dots, z_k vektörlerinin de τ alt uzayında baz olduğunu varsayalım. O zaman

$$\|P_\pi - P_\tau\|^2 = 1 - \lambda_1 \left(\Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}} \Delta_{yz} \Delta_{zz}^{-1} \Delta_{zy} \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.34)$$

formülü vardır. Bu formülde $\lambda_1(K)$ sembolü özdeşlik $K = \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}} \Delta_{yz} \Delta_{zz}^{-1} \Delta_{zy} \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}}$ operatörünün en küçük karakteristik değerini gösterir. $\Delta_{yy}, \Delta_{yz}, \Delta_{zy}, \Delta_{zz}$ sembolleri k -boyutlu Öklid uzayında tanımlanmış operatörler olup, bu operatörlerin matrisleri ortonormal e_1, e_2, \dots, e_k bazında elemanları

$$(y_i, y_j), (y_i, z_j), (z_i, y_j), (z_i, z_j) \quad (2.35)$$

skalar çarpımları ile tanımlanan matrislerdir. Δ_{yy} ve Δ_{zz} operatörleri pozitif operatörler olduklarından Δ_{yy} ve Δ_{zz} operatörlerine bağlı $\Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}}$ ve Δ_{zz}^{-1} operatör

fonksiyonları tanımlanmıştır. Δ nın karakteristik değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ve karakteristik vektörleri e_1, e_2, \dots, e_n olmak üzere

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n \lambda_k(e_k, u) e_k$$

$$\Delta^{\frac{1}{2}} u = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{\frac{1}{2}}(e_k, u) e_k$$

ve

$$\Delta^{-\frac{1}{2}} u = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-\frac{1}{2}}(e_k, u) e_k$$

dır.

2.11.3 Grassman manifoldlarında metriğin üstten değerlendirilmesi

$\varphi_k(E^n)$ Grassman manifoldunda $\rho(\pi, \tau)$ metriğinin üstten bir değerlendirilmesini verelim. Bunun için E^n Öklid uzayında özeşlenik bir A operatörünün tanımlandığını ve $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A)$ sayılarının bu operatörün azalma yönünde sıralanmış (numaralanmış) karakteristik sayıları olduklarını varsayalım. O zaman özeşlenik A ve B operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur (Glazman 1969).

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| \leq \|A - B\| \quad (2.36)$$

Şimdi biz bu (2.36) eşitsizliğinde A operatörü olarak E^k uzayında I birim (özdeşlik) operatörünü ve B operatörü olarak da

$$K = \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}} \Delta_{yz} \Delta_{zz}^{-1} \Delta_{zy} \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

özeşlenik operatörünü alalım. O zaman (2.34) formülüne ve (2.36) eşitsizliğine dayanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\|P_\pi - P_\tau\|^2 = 1 - \lambda_k(K) \leq \|I - K\| \quad (2.38)$$

Elde ettiğimiz bu eşitsizlikte $\lambda_k(K)$ sembolü K operatörünün en küçük karakteristik sayısını gösterir.

Böylece, $\varphi_k(E^n)$ Grassman manifoldunda $\rho(\pi, \tau)$ metriğinin üstten değerlendirilmesi için aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 2.11.2. Burada Teorem 2.11.1 in tüm şartlarının sağlandığını varsayalım. O zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\rho(\pi, \tau) = \|P_\pi - P_\tau\| \leq \sqrt{\|I - K\|} \quad (2.39)$$

Bu eşitsizlikte I operatörü E^k Öklid uzayında birim (özdeşlik) operatör, K ise bu E^k uzayında tanımlanmış (2.37) formülü ile verilen özdeşlik operatördür.

3. YÜZEYLERİN OPTİMAL KONTROLÜ PROBLEMİ

3.1 Büyük Çaplı Antenlerin Yansıtıcı Yüzeylerinin Şeklinin Optimal Kontrolü Problemi

\mathbb{E}^n Öklid uzayında açık ve sınırlı bir bölge Ω olsun. Ω bölgesinde tanımlanmış ve f dış kuvvetinin etkisi altında olan dağılmış parametrelili antenin statik denge durumunun lineer diferensiyel L operatörünün vasıtasıyla aşağıdaki denklemlerle verildiğini varsayalım (Mustafayev, Sağel and Eroğlu 2006).

$$Ly = f \quad , \quad x \in \Omega \quad (3.1)$$

Burada Ω bölgesi \mathbb{E}^n Öklid uzayında bir açık bölge, $y(x)$ fonksiyonu antenin yansıtıcı yüzeyinin $x \in \Omega$ noktasındaki yer değişmesini (sapmasını) gösterir. L diferensiyel operatörü olarak, örneğin

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (3.2)$$

formülü ile tanımlanan Laplace operatörü veya bir başka diferensiyel operatör olabilir. $n = 2$ olduğunda Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır.

Ω bölgesinin $\Gamma = \partial\Omega$ sınırında antenin yüzeyinin aşağıdaki sınır şartını sağladığını varsayalım.

$$\mathcal{R}y|_{\Gamma} = 0 \quad (3.4)$$

Antenin yansıtıcı yüzeyinin şeklinin optimal kontrolü probleminde $f(x)$ dış etki

kuvvetinin öyle seçilmesi istenir ki (başka deyişle, $f(x)$ kontrol etkeninin öyle seçilmesi istenir ki), seçilmiş bu $f(x)$ etkeninde (3.1) denklemi ve (3.4) sınır şartı sağlanmak üzere

$$J(f) = \int_{\Omega} q(x) [y(x) - y^*(x)]^2 dx \quad (3.5)$$

fonksiyoneli en küçük değerini alsın (Yıldırım and Mustafayev 2004). (3.5) fonksiyoneli $y^*(x)$ fonksiyonu antenin yansıtıcı yüzeyinin arzu edilen formunu karakterize eden fonksiyondur. Üç boyutlu uzay halinde ($n = 3$ olduğunda) $y^* = y^*(x)$ denklemi antenin arzu edilen yüzeyinin denklemi olur. $y(x)$ fonksiyonu ise seçilmiş $f(x)$ kontrol etkeninde (3.1) diferensiyel denkleminin (3.4) sınır şartını sağlayan çözümü olmak üzere antenin yüzeyinin $f(x)$ dış kuvvetinin etkisiyle aldığı şeklini karakterize eden fonksiyondur. (3.5) fonksiyoneli $q(x)$ fonksiyonu $q(x) \geq 0$ şartını sağlamak üzere Ω bölgesinde $[y(x) - y^*(x)]^2$ hatasının değişken ağırlığını karakterize eden önceden verilmiş, negatif olmayan fonksiyondur.

Böylece, $J(f)$ fonksiyoneli antenin yansıtıcı $y(x)$ yüzeyinin arzu edilen $y^*(x)$ yüzey formundan $q(x)$ ağırlıklı orta kuadratik sapmasını göstermektedir.

Dikkat edelim ki, (3.1)-(3.4) sınır değer probleminin $y(x)$ çözümü için

$$y(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

formülü yazılabilir. Bu formülde $G(x, \xi)$ fonksiyonu (3.1) diferensiyel denkleminin (3.4) şartındaki sınır-değer probleminin Green fonksiyonudur.

Burada antenin yüzeyine $x_1, x_2, \dots, x_m \in \Omega$ noktalarında uygun olarak $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)$ kuvvetleri etki ettiğinde (3.6) formülü aşağıdaki şekilde yazılır:

$$y(x) = \sum_{i=1}^m G(x, x_i) f(x_i) \quad (3.7)$$

Buradaki $f_i = f(x_i)$ dış kuvvetlerine kontrol etkenleri de denir.

$y(x)$ fonksiyonunun (3.7) formülü ile verilen ifadesini (3.5) fonksiyonelinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} J(f) &= \int_{\Omega} q(x) \left[\sum_{i=1}^m G(x, x_i) f(x_i) - y^*(x) \right]^2 dx \\ &= F^T A F - 2 B F + C \end{aligned} \quad (3.8)$$

bulunur. Burada

$$F = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m))^T \in \mathbb{R}^m \quad (3.9)$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{R}_m^m \quad (3.10)$$

$$a_{ij} = \int_{\Omega} G(x, x_i) G(x, x_j) q(x) dx \quad (3.11)$$

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_m)^T \in \mathbb{R}^m \quad (3.12)$$

$$B_i = \int_{\Omega} G(x, x_i) y^*(x) q(x) dx \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.13)$$

$$C = \int_{\Omega} y^*(x) q(x) dx \quad (3.14)$$

dır. Bu eşitliklerden görüldüğü gibi A matrisi $m \times m$ boyutlu matris, F ve B vektörleri m -boyutlu vektör ve C ise (3.14) eşitliği ile tanımlanan skalar sayıdır.

$J(f)$ fonksiyonelinin minimumu için gerek şart

$$A F - B = 0 \quad (3.15)$$

şeklinde yazılır.

Böylece, optimal F^* kontrolü için $AF - B = 0$ dan

$$F^* = A^{-1}B \quad (3.16)$$

formülü bulunur.

(3.16) formülünden görüyoruz ki, F^* optimal kontrolünün pratikte gerçekleştirmek için (3.1), (3.4) sınır-değer probleminin $G(x, \xi)$ Green fonksiyonunu bulmamız ve hesaplamamız gerekmektedir. Aşağıdaki kısımlarda biz sınır-değer problemlerinin Green fonksiyonunun tanımını ve hesaplanması formüllerini vereceğiz.

3.2 Adi Türevli Lineer Diferensiyel Denklemler İçin Green Fonksiyonu

3.2.1 Green fonksiyonunun tanımı

k mertebeli

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^k P_{\nu}(x)y^{(\nu)}(x) \quad (3.17)$$

lineer diferensiyel denklemini ele alalım. Bu ifadede k sayısı tek veya çift doğal sayı olmak üzere diferensiyel denklemin mertebesini gösterir. $P_{\nu}(x)$ fonksiyonları diferensiyel denklemin katsayılarıdır. Bu fonksiyonların herbirinin $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlar olduklarını ve $P_k(x)$ katsayısının her bir $x \in [a, b]$ noktasında sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. $r(x)$ fonksiyonunda $[a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyon olsun.

Homojen olmayan

$$L(y) = r(x) \quad (3.18)$$

diferensiyel denkleminin homojen

$$U_{\mu}(y) = \sum_{\nu=0}^{k-1} [\alpha_{\mu\nu}y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu}y^{(\nu)}(b)] = 0 \quad , \quad \mu = 1, 2, \dots, k \quad (3.19)$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün her bir $r(x) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ sürekli fonksiyonu için bulunması problemini ele alalım.

Herbir sürekli $r(x)$ fonksiyonu için (3.18)-(3.19) probleminin çözümünün

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)r(\xi)d\xi \quad (3.20)$$

şeklinde gösterilebileceğini varsayalım. O halde (3.20) eşitliği bu şekilde yazılabildiğinde $G(x, \xi)$, $a \leq x, \xi \leq b$ fonksiyonuna (3.18)-(3.19) sınır-değer probleminin Green fonksiyonu denir (Collatz 1963, Rasulov 1967, Naymark 1969, Butkovskiy 1983).

(3.20) eşitliğinde bulunan $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu aşağıdaki şartlarla tanımlanır (Collatz 1963, Naymark 1969).

1°. $G(x, \xi)$ fonksiyonu ve onun x değişkenine göre $(k - 2)$ nci mertebeye kadar tüm türevleri, ($(k - 2)$ nci mertebeli türevde dahil olmak üzere) x ve ξ değişkenlerine göre $a \leq x, \xi \leq b$ aralığında süreklidir.

2°. Herbir değişmez sağlanan $\xi \in [a, b]$ için $G(x, \xi)$ fonksiyonunun $[a, \xi)$, $(\xi, b]$ aralığında x değişkenine göre sürekli $(k - 1)$ ve k mertebeli türevi vardır ve $(k - 1)$ mertebeli türevi $x = \xi$ noktasında $\frac{1}{P_k(\xi)}$ sıçrayışına sahiptir.

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}G(\xi + 0, \xi) - \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}G(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{P_k(\xi)}$$

3°. Herbir $[a, \xi]$ ve $(\xi, b]$ aralığında $G(x, \xi)$ fonksiyonu x değişkenine göre $L(G) = 0$ diferensiyel denklemini ve $U_\mu(G) = 0, \mu = 1, 2, \dots, k$ sınır şartını sağlar.

Aşağıdaki teorem doğrudur (Collatz 1963).

Teorem 3.2.1. $L(y) = 0$ homojen diferensiyel denkleminin $U_\mu(y) = 0, \mu = 1, 2, \dots, k$ sınır şartlarını sağlayan sınır-değer probleminin yalnız $y \equiv 0$ trivial çözümlü olduğunda, o zaman

i) (3.18) , (3.19) sınır-değer probleminin yalnız ve yalnız bir tane $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu vardır.

ii) Herbir sürekli $r(x)$ fonksiyonu için (3.18) , (3.19) probleminin tek bir çözümlü vardır ve bu çözüm (3.20) formülü ile gösterilir.

3.2.2 Green fonksiyonunun bulunmasının bir yöntemi

$L(y) = 0$ diferensiyel denkleminin

$$y_j^{(\nu-1)}(a) = \begin{cases} 0, & j \neq \nu \\ 1, & j = \nu \end{cases} \quad (3.21)$$

şartlarını sağlayan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ çözümleri belli olduğunda (3.18) – (3.19) sınır-değer probleminin $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu aşağıdaki formüllerle belirlenir (Collatz 1963, Naymark 1969).

$$W = \begin{vmatrix} y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \dots & y_k^{(k-1)} \\ y_1^{(k-2)} & y_2^{(k-2)} & \dots & y_k^{(k-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_k \end{vmatrix}, \quad (3.22)$$

$$g(x, \xi) = \pm \frac{1}{2W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_k(x) \\ y_1^{(k-2)}(\xi) & y_2^{(k-2)}(\xi) & \cdots & y_k^{(k-2)}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \cdots & y_k(\xi) \end{vmatrix}, \quad (3.23)$$

(3.23) eşitliğinin sağ yanında $x > \xi$ olduğunda „+“ işareti, $x < \xi$ olduğunda „-“ işareti alınır. Burada

$$G(x, \xi) = \frac{(-1)^k}{\Delta} H(x, \xi), \quad (3.24)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_k) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_k(y_1) & U_k(y_2) & \cdots & U_k(y_k) \end{vmatrix}, \quad (3.25)$$

$$H(x, \xi) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_k(x) & g(x, \xi) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_k) & U_1(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_k(y_1) & U_k(y_2) & \cdots & U_k(y_k) & U_k(g) \end{vmatrix}. \quad (3.26)$$

Böylece, (3.18) – (3.19) sınır-değer probleminin Green fonksiyonu $G(x, \xi)$, (3.21) – (3.26) formülleri ile verilir.

3.2.3 Green fonksiyonuna ait sade örnekler

Green fonksiyonunun belirlenmesine ait aşağıdaki örnekleri verelim (Collatz 1963, Butkovskiy 1983).

Örnek 3.2.1. $L(y) = -y''$ diferensiyel ifadesinin $y(0) = 0$ ve $y(1) = 0$ sınır şartlarının doğurduğu sınır-değer probleminin Green fonksiyonu (3.21) – (3.26) formül-

lerinin uygulanmasıyla aşağıdaki şekilde bulunur:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi), & x \leq \xi \\ \xi(1 - x), & x \geq \xi \end{cases} .$$

Örnek 3.2.2.

$$-y'' = r(x) , y(0) = y'(1) = 0$$

probleminin Green fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x, & x \leq \xi \\ \xi, & x \geq \xi \end{cases} .$$

Örnek 3.2.3.

$$\alpha y^{(4)} = r(x) , y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0,$$

burada α sabit sayıdır. Bu problemin Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde bulunur:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(\xi - l)}{6l\alpha}(x^2 + \xi^2 - 2l\xi), & x \leq \xi \\ \frac{\xi(x - l)}{6l\alpha}(\xi^2 + x^2 - 2lx), & x \geq \xi \end{cases} .$$

Örnek 3.2.4. $-y'' - \omega^2 y = r(x)$, $y(0) = 0$, $y'(1) = \omega^2 y(1)$ sınır değer probleminin $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde bulunur:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin \omega x}{\omega} \left[\frac{\sin \omega \xi (\omega \cos \omega + \sin \omega)}{\cos \omega - \omega \sin \omega} + \cos \omega \xi \right], & x \leq \xi \\ \frac{\sin \omega \xi}{\omega} \left[\frac{\sin \omega x (\omega \cos \omega + \sin \omega)}{\cos \omega - \omega \sin \omega} + \cos \omega x \right], & x \geq \xi \end{cases} .$$

Örnek 3.2.5. $y^{(4)} = r(x)$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$ sınır değer probleminin Green fonksiyonu için aşağıdaki formül bulunur:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^3(\xi - 1)^3}{120} [10\xi^2 - 5x\xi(3\xi + 1) + x^2(6\xi^2 + 3\xi + 1)], & x \leq \xi \\ \frac{\xi^3(x - 1)^3}{120} [10x^2 - 5x\xi(3x + 1) + \xi^2(6x^2 + 3x + 1)], & x \geq \xi \end{cases}.$$

Not. Kısmi türevli lineer diferensiyel denklemler için de Green fonksiyonu benzer şekilde tanımlanır. Aşağıdaki

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\varphi(x, y)$$

Poisson denkleminin merkezi koordinat başlangıcında yarıçapı $r = 1$ olan dairenin sınırında $z = 0$ şartını sağlayan sınır değer probleminin Green fonksiyonu aşağıdaki formülle ifade edilir (Collatz 1963).

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \ln r + \frac{1}{4\pi} \ln[(1 - x\xi - y\eta)^2 + (x\eta - y\xi)^2],$$

Burada $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. Dikkate edelim ki, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ diferensiyel operatörü Laplace operatörüdür.

3.2.4 Green fonksiyonunun seri ile verilme yöntemi

Aşağıdaki teorem doğrudur (Naymark 1969).

Teorem 3.2.2. Diferensiyel A operatörünün tüm karakteristik $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ değerleri tekrarlanmayan olduğunda ($i \neq j$ olduğunda $\lambda_i \neq \lambda_j$ ise) bu operatörün Green fonksiyonu düzgün yakınsak

$$G(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\nu}(x)\overline{\psi_{\nu}(\xi)}}{\lambda_{\nu}} \quad (3.27)$$

serisine açılabilir. Burada $\varphi_\nu(x)$ ve $\psi_\nu(\xi)$ uygun olarak A ve A^* operatörlerinin λ_ν ve $\overline{\lambda_\nu}$ karakteristik sayılarına uygun karakteristik fonksiyonlardır. Özel halde $A \equiv A^*$ olduğunda (3.27) açılımında her bir $\nu = 1, 2, \dots$ için $\lambda_\nu = \overline{\lambda_\nu}$ ve $\varphi_\nu(x) \equiv \psi_\nu(x)$ eşitliği sağlanır.

Örnek 3.2.6. $x = 0$ ve $x = 1$ uçlarından serbest sabitleştirilmiş tel için aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım (Butkovskiy 1983).

$$-\frac{d^2\omega}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.28)$$

$$\omega(0) = \omega(1) = 0, \quad (3.29)$$

Burada $f(x)$ fonksiyonu önceden verilmiş belli bir fonksiyondur.

(3.28) – (3.29) sınır değer probleminin doğurduğu diferensiyel A operatörünün λ_n karakteristik değerleri ve uygun $\varphi_n(x)$ karakteristik fonksiyonları, tanıma göre aşağıdaki diferensiyel denklemler sisteminin uygun (3.29) sınır şartlarındaki çözümleridir:

$$-\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} = \lambda_n\varphi_n, \quad (3.30)$$

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0. \quad (3.31)$$

Buradan da uygun olarak

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

bulunur. Bu yüzden de (3.28) – (3.29) sınır değer probleminin doğurduğu diferensiyel A operatörünün Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$G(x, \xi) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \cdot \sin n\pi \xi}{n^2}. \quad (3.34)$$

Örnek 3.2.7. $[0, a] \times [0, b]$ ölçülü dikdörtgen şekilli levha için aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım (Rasulov 1967).

$$\mathcal{D}\Delta\Delta\omega = f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (3.35)$$

$$\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, \quad x = a \text{ olduğunda}, \quad (3.36)$$

$$\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0, \quad y = b \text{ olduğunda}, \quad (3.37)$$

Burada

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (3.38)$$

olmakla beraber, biharmonik Laplace operatörüdür.

$$\mathcal{D} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

levhanın silindirik sertliğini gösteren parametre, h levhanın kalınlığını, E Yunk modülünü, ν ise Poisson katsayısını gösterir. $\omega = \omega(x, y)$ levhanın (x, y) noktasındaki yer değiştirmesini (deformasyonu) ifade eder.

Ele aldığımız (3.35) – (3.37) sınır değer probleminin doğurduğu diferensiyel A operatörü özdeşlenik olmak üzere, aşağıdaki şekilde gösterilen $G(x, y; \xi, \eta)$ Green fonksiyonu vardır:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x, y)\varphi_i(\xi, \eta)}{\rho h \omega_i^2}, \quad (3.39)$$

Burada

$$\varphi_i(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{k\pi}{a}x \cdot \sin \frac{m\pi}{b}y, \quad k, m = 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

fonksiyonları A operatörünün ortonormal karakteristik fonksiyonları ve

$$\omega_i = \left(\frac{\mathcal{D}}{\rho h} \right)^{1/2} \left[\frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \right], \quad (3.41)$$

levhanın titreşimlerinin frekanslarıdır, ρ ise levhanın materyalinin yoğunluğudur. Burada $\varphi_i(x, y)$ fonksiyonları ve ω_i sayıları levhanın frekanslarının artması yönünde tekrarlanmaları da dikkate alınarak sıralanmışlardır.

3.2.5 Sonlu yarıçaplı sınırlardan serbest sabitleştirilmiş kontrol edilen dairesel levhanın simetrik yer değıştirmelerinin Green fonksiyonu ile ifadesi

Sonlu $r = R$ yarıçaplı serbest sabitleştirilmiş kontrol edilen dairesel levhanın simetrik yer değıştirmelerinin denklemi

$$\mathcal{D} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = \sum_{i=1}^k b_i(r) u_i \quad (3.42)$$

olmakla aşağıdaki sınır şartlarını sağlar:

$$\omega(r)|_{r=R} = 0; \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 0. \quad (3.43)$$

Burada \mathcal{D} levhanın sertlik katsayısıdır. u_1, \dots, u_k kontrol etkenleri ve $b_1(r), \dots, b_k(r)$ uygun olarak kontrol etkenlerinin verilmiş katsayılarıdır.

(3.42) – (3.43) probleminin çözümlü aşağıdaki formülle yazılır:

$$\omega(r) = \sum_{i=1}^k \int_0^R G(r, \xi) b_i(\xi) d\xi, \quad (3.44)$$

burada

$$G(r, \xi) = \frac{4}{R^2 \mathcal{D}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r) J_0(\alpha_n \xi)}{[J_1(\alpha_n R)]^2 \alpha_n^2}. \quad (3.45)$$

Bu formüldeki $J_0(\alpha_n r)$ ve $J_1(\alpha_n r)$ uygun Bessel fonksiyonlarıdır ve α_n sayıları (3.42)–(3.43) probleminin

$$J_0(\alpha_n R) = 0, n = 1, 2, \dots \quad (3.46)$$

karakteristik denkleminin kökleridir.

(3.44) formülündeki $G(r, \xi)$ Green fonksiyonunu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) = \omega^{iv} + \frac{2}{r} \omega''' - \frac{1}{r^2} \omega'' + \frac{1}{r^3} \omega' = 0 \quad (3.47)$$

lineer diferensiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerini $\omega_1(r)$; $\omega_2(r) = r^2$; $\omega_3(r) = \ln r$, $\omega_4(r) = r^2 \ln r$ yazarak Lagrange ın sabiti varyasyon metodunu uygulayarak ve uygun olarak (3.22) – (3.26) formüllerini kullanarak aşağıdaki şekilde elde edebiliriz:

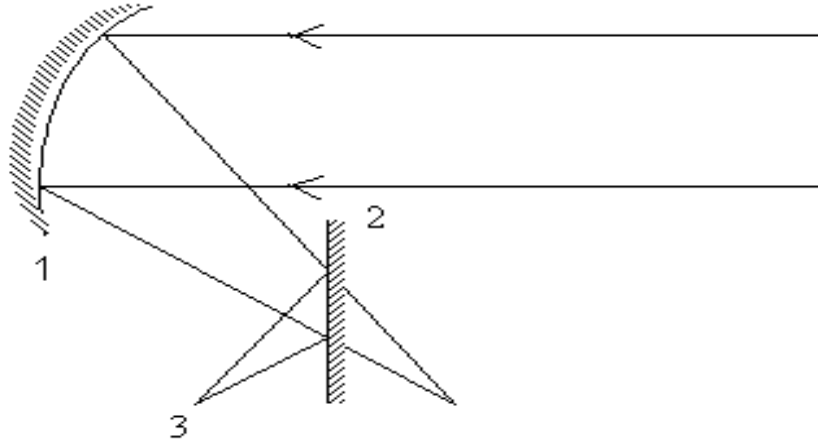
$$G(r, \xi) = \frac{(1 + \ln R)(R^2 - r^2) - (\xi^2 + R^2) \ln R}{4} + g(r, \xi), \quad (3.48)$$

$$g(r, \xi) = \frac{1}{4} \begin{cases} \xi^2 (\ln \xi - 1) + (\ln \xi + 1) r^2 & , 0 \leq r \leq \xi \leq R, \\ \xi^2 \ln r + r^2 \ln r & , 0 \leq \xi \leq r \leq R. \end{cases} \quad (3.49)$$

4. KONTROL EDİLEN YÜZEYLERDE KONTROL ETKENLERİNİN OPTİMAL DAĞILIMI PROBLEMİ

4.1 Levhanın Formunun (Şeklinin) Bir Optimal Kontrolü Problemi

Bu çalışmada geometrik formların optimal kontrolünde kontrol etkenlerinin optimal dağılımı problemi ele alınmıştır. Pek çok teknik problemin çözümü, geometrik yüzeylerin formlarının seçimi ve bu formların optimal kontrolü problemi ile yakından ilgilidir. Örneğin, iki aynalı radioteleskopun normal olarak çalışması atmosferdeki türbülansın ve teleskobun esas aynasında oluşan deformasyonların etkileri ile bozulabilir (Şekil 4.1) (Balas 1985, Bilyanskiy 1988, Vorontsov et al. 1988).

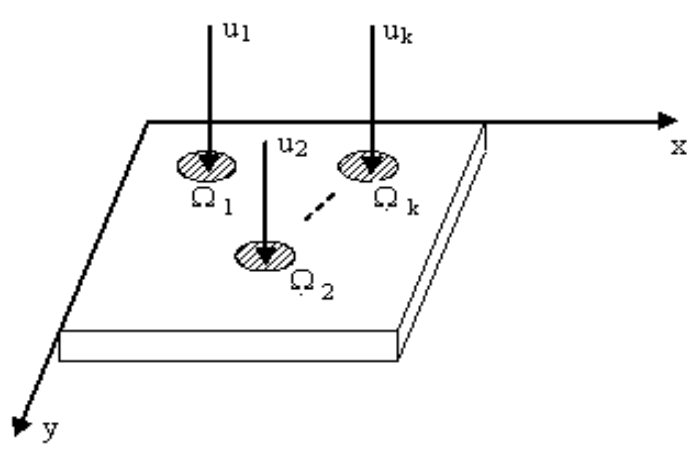


Şekil 4.1 İki aynalı radioteleskop

1-esas ayna, 2-yardımcı ayna, 3-ışınlandırıcı.

Çalışma sürecinde radioteleskopda oluşan bu tipli hataların ve yan etkilerin azaltılması ve genelde aradan kaldırılması için radioteleskopların yüzeyi kontrol edilir. Bununla da radiodalgalarda oluşan hataların ve yan etkilerin seviyesi kabullenilebilecek derecede azaltılır. Biz burada iki aynalı radioteleskopun ikinci aynasının kontrolü problemini ele aldık. Bu problemi matematiksel olarak ifade etmek için radioteleskobun ikinci aynasının yanlardan serbest sabitleştirilmiş kalınlığı h olan

bir dikdörtgen şeklinde levha olduğunu varsayalım (Şekil 4.2).



Şekil 4.2 Enine kuvvetlerin etkisi altında olan dikdörtgen levha

Böylece, radioteleskobun ikinci aynasının arka tarafında $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerine uygun olarak u_1, u_2, \dots, u_k kuvvetlerinin etki ettiğini varsayalım (Şekil 4.2). O zaman bu aynanın deforme olmuş (eğilmiş) yüzeyinin durumu aşağıdaki kısmi türevli diferensiyel denklemini sağlar (Rasulov 1967, Mustafayev 1981).

$$\Delta\Delta Q = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^k u_i \sigma_i(x, y) \quad , \quad (x, y) \in \Omega \quad (4.1)$$

$x = 0$ ve $x = a$ ise

$$Q = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (4.2)$$

$y = 0$ ve $y = b$ alındığında ise

$$Q = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3)$$

sınır şartlarını sağlar.

Buradaki (4.2) ve (4.3) sınır şartları, levhanın yanlardan serbest olarak sabitleştirildiği şartlarıdır. $Q(x, y)$ fonksiyonu, u_1, u_2, \dots, u_k kontrol etkenlerinin etkisi altında levhanın aldığı şekildir. Ω , levhanın xoy düzlemine dik projeksiyonu, $\sigma_i(x, y)$ fonksiyonları ise Ω_i bölgesinin karakteristik fonksiyonları olup aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$\sigma_i(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega_i \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_i \end{cases} \quad (4.4)$$

ve

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} \quad (4.5)$$

Burada a ve b sayıları levhanın ölçüleridir. $\Delta\Delta$ biharmonik operatör olup

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (4.6)$$

eşitliği ile tanımlanır. D sayısı levhanın sertliğini karakterize eden parametre olup aşağıdaki eşitlikle belirlenir (Collatz 1963, Butkovskiy 1983).

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.7)$$

Bu (4.7) formülündeki E sayısı levhanın esneklik modülü, ν Poisson katsayısı, h ise levhanın kalınlığıdır.

Burada radioteleskopun birinci aynasındaki yan etkilerin seviyesinin azalmasını garanti eden, yüzey formunun denkleminin belli olduğunu ve bu yüzeyin denkleminin

$$Q^* = Q^*(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (4.8)$$

şeklinde verildiğini varsayalım (Kinber 1955).

u_1, u_2, \dots, u_k kontrol etkenlerinin öyle değerlerinin bulunması gerekir ki, bu değerlerde levhanın yüzeyinin eğilmiş formasını gösteren $Q(x, y)$ fonksiyonu (4.1) denklemini ve (4.2), (4.3) şartlarını sağlamakla arzu edilen $Q^*(x, y)$ yüzey formasından

orta quadratik sapması minimum olsun. Yani, u_1, u_2, \dots, u_k kontrol etkenleri öyle seçilmeli ki, $Q(x, y)$ fonksiyonu (4.1) – (4.2) – (4.3) sınır değer probleminin çözümü olmak üzere

$$I = \iint_{\Omega} (Q(x, y) - Q^*(x, y))^2 dx dy \quad (4.9)$$

fonksiyoneline minimum değer versin.

(4.1) denkleminin (4.2) ve (4.3) şartlarını sağlayan çözümü aşağıdaki formülle verilir (Collatz 1963, Naymark 1969).

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^k R_i(x, y) u_i \quad (4.10)$$

$$R_i(x, y) = \iint_{\Omega_i} G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.11)$$

Burada $G(x, y; \xi, \eta)$ fonksiyonu (4.1) – (4.2) – (4.3) sınır değer probleminin Green fonksiyonu olup aşağıdaki formülle ifade edilir:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (4.12)$$

(4.9) fonksiyoneline $Q(x, y)$ fonksiyonunun yerine (4.10) ifadesini yazarsak

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^k R_i(x, y) u_i - Q^*(x, y) \right]^2 dx dy \\ &= (u, Au) - 2(B, u) + C \end{aligned} \quad (4.13)$$

olur. Burada,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

dir.

$$B_i = (Q^*, R_i) = \iint_{\Omega} Q^*(x, y) R_i(x, y) dx dy \quad (4.15)$$

$$A = (R_i, R_j)_{i,j=1}^k \quad (4.16)$$

$$(R_i, R_j) = \iint_{\Omega} R_i(x, y) R_j(x, y) dx dy \quad (4.17)$$

$$C = \|Q^*\|_{L_2(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} [Q^*(x, y)]^2 dx dy \quad (4.18)$$

Bu formüllerde kullanılmış (B, u) sembolü k -boyutlu sütun vektörlerin Öklid uzayındaki skalar çarpımı gösterir. Böylece, I fonksiyonelinin u vektörüne göre minimumunu bulmak için

$$I = (u, Au) - 2(B, u) + C \quad (4.19)$$

ifadesinden u vektörüne göre türev alalım. O zaman A matrisinin simetrik matris olduğunu dikkate alırsak

$$\frac{\partial I}{\partial u} = 2Au - 2B \quad (4.20)$$

olur. Bu nedenle de

$$\frac{\partial I}{\partial u} = 0 \quad (4.21)$$

gerek şartı

$$Au = B \quad (4.22)$$

şeklinde yazılır. Buradan ise $\det A \neq 0$ şartının sağlandığını varsayarak u vektörünün optimal değeri için

$$u_0 = A^{-1}B \quad (4.23)$$

formülünü buluruz (Mustafayev 1994).

(4.23) formülü ile ifade edilen optimal u_0 değerini I fonksiyonelinin (4.13) ifadesinde yerine yazarsak bu fonksiyonelin minimum değeri için aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$I_0 = \left\| Q^* - \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij} (Q^*, R_j) R_i \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (4.24)$$

$$= \iint_{\Omega} \left[Q^*(x, y) - \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij} (Q^*, R_j) R_i(x, y) \right]^2 dx dy$$

Burada α_{ij} sayıları A^{-1} matrisinin elemanlarıdır.

4.2 Kontrol Etkenlerinin Optimal Dağılımı Problemi

Önceki kısımda u_1, u_2, \dots, u_k etkenlerinin etki ettikleri, $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin Ω bölgesinde ortak noktaları olmayan keyfi bölgeler olduklarını ve kontrol sürecinde değişmez varsaydık. $Q^*(x, y)$ fonksiyonu önceden belli olan bir fonksiyon olarak alındı. Şimdi burada, radioteleskobun çalışma sürecinde levhanın arzu edilen $Q^*(x, y)$ yüzeyi bir M arzu edilebilecek yüzeyler sınıfından alınır. Bu durumda levhada $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin dağılımının seçimi tüm M sınıfı için geçerli olmak üzere aşağıdaki şekilde değerlendirilebilir (Mustafayev 1981).

$$S = \sup_{Q^* \in M} I_0 \quad (4.25)$$

O halde $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin Ω bölgesinde dağılımı öyle seçilmeli ki, bu dağılımda (4.25) eşitliği ile tanımlanan S fonksiyoneli en küçük değerini alsın.

$$S \rightarrow \underset{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k}{\text{minimum}} \quad (4.26)$$

4.3 Levhada Kontrol Etkenlerinin Optimal Dağılımı Probleminin Bir Lineer Operatörün Sonlu Boyutlu Lineer Operatörlerle Approximasyonu Problemine Getirilmesi

Yukarıda alınan M sınıfının doğru belirlenmesi radioteleskobun normal çalışmasını sağlar. Burada M sınıfı olarak, (4.5) bölgesinde tanımlanmış 4.üncü mertebeye kadar (4.üncü mertebeye dahil olmak üzere) tüm kısmi türevleri var ve sürekli olan (4.2)

ve (4.3) sınır şartlarını ve

$$\|\Delta\Delta Q\|_{L_2(\Omega)} \leq 1 \quad (4.27)$$

şartını sağlayan fonksiyonların M sınıfını alalım. Bu sınıf radioteleskobun ikinci aynasının alabileceği tüm mümkün formlarının sınıfıdır. Bu M sınıftan alınmış her bir $Q^*(x, y) \in M$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir (Collatz 1963).

$$Q^*(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.28)$$

Burada $h(\xi, \eta) = \Delta\Delta Q^*$ ve $G(x, y; \xi, \eta)$ fonksiyonu (4.12) formülü ile verilmiş Green fonksiyonudur.

(4.28) eşitliği ile $H = L_2(\Omega)$ Hilbert uzayını bu uzayın kendisine dönüştüren tamamen sürekli (kompakt) özeşlenik lineer $B : H \rightarrow H$ operatörü tanımlanır:

$$Bh = Q^* \quad (4.29)$$

Şimdi (4.25) eşitliği ile tanımlanmış S fonksiyonelinde (4.24) eşitliğini dikkate alarak bu fonksiyoneli aşağıdaki şekle dönüştürelim:

$$\begin{aligned} S &= \sup_{Q^* \in M} I_0 \\ &= \sup_{\|h\| \leq 1} \iint_{\Omega} \left[Bh - \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij}(h, BR_j) R_i \right]^2 dx dy \\ &= \|B - P\|_{L(H)}^2 \end{aligned}$$

Böylece,

$$S = \|B - P\|_{L(H)}^2 \quad (4.30)$$

olur. Burada P operatörü

$$Ph = \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij} (h, BR_j) R_i \quad (4.31)$$

dir. Sonuç olarak, (4.26) ve (4.30) dan aşağıdaki ekstremum problemi elde edilir.

$$\|B - P\|_{L(H)}^2 \rightarrow \underset{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k}{\text{minimum}} \quad (4.32)$$

Burada $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin Ω bölgesinde optimal dağılımı problemi tamamen sürekli $B \in \sigma(H)$ operatörünün sonlu k -boyutlu lineer $P \in L(H, H_k)$ operatörü ile en iyi aproksimasyonu problemine getirildi. Burada $L(H, H_k)$ ile tüm H uzayında tanımlanmış değerleri H_k Hilbert uzayında olan lineer sınırlı operatörlerin Banach uzayı gösterilmiştir.

4.4 Lineer Tamamen Sürekli Özeşlenik Operatörlerin Sonlu Boyutlu Lineer Operatörlerle Aproksimasyonu Hakkında Teorem

Lineer tamamen sürekli özeşlenik operatörlerin sonlu boyutlu lineer operatörlerle aproksimasyonu probleminin çözümü, Teorem 2.9.6 da verilmiştir. Bu teorem aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

Teorem 4.4.1 : B operatörü lineer tamamen sürekli özeşlenik operatör,

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (4.33)$$

sayıları bu operatörün

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \quad (4.34)$$

şartlarını sağlayan karakteristik sayıları ve

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \quad (4.35)$$

elemanları bu sayılara uygun B operatörünün karakteristik vektörlerinden yapılmış ortonormal baz vektörleri sistemi olsun. O zaman P operatörü boyutu k sayısını aşmayan sonlu boyutlu lineer operatör olduğunda $S = \|B - P\|^2$ fonksiyoneli minimum $S_0 = \inf_P \|B - P\|^2$ değerini aşağıdaki eşitlikle tanımlanan k -boyutlu P_0 operatöründe alır:

$$P_0 h = \sum_{i=1}^k (h, e_i) \lambda_i e_i \quad (4.36)$$

Burada $P = P_0$ alındığında S fonksiyonelinin minimal S_0 değeri için

$$S_0 = \|B - P_0\|^2 = \lambda_{k+1}^2(B) \quad (4.37)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\lambda_{k+1}(B)$ sembolü ile B operatörünün $(k+1)$ -nci karakteristik sayısı gösterilmiştir (Gochberg and Krein 1965, Trenogin 1980).

4.5 Kontrol Etkenlerinin Optimal Dağılımı Probleminin Sonlu Boyutlu Lineer Operatörlerin Sonlu Boyutlu Lineer Operatörlerle Yaklaşımı Problemine Getirilmesi

Yukarıda önceki kısımda verilen Teorem 4.4.1 e dayanarak, uygun olarak (4.31) ve (4.36) eşitlikleri ile tanımlanan P ve P_0 operatörlerini karşılaştırdığımızda görüyoruz ki, $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin dağılımının optimal olması için bu bölgeler öyle seçilmeli ki,

$$P = P_0 \quad (4.38)$$

eşitliği sağlansın. Ama bölgelerin (4.38) eşitliğini sağlayan seçimini gerçekleştirmek her zaman kolay değildir. Bu nedenle de burada

$$0 \leq \|B - P\| - \|B - P_0\| \leq \|P_0 - P\| \quad (4.39)$$

eşitsizliğine dayanarak $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin dağılımını öyle seçelim ki,

$$\|P_0 - P\| \rightarrow \underset{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k}{\text{minimum}} \quad (4.40)$$

olsun.

4.6 Kontrol Etkenlerinin Optimal Dağılımı Probleminin Yaklaşık Çözüm Metodu

Bölüm 2.11 de verilen bilgilere ve Teorem 2.11.1 ve Teorem 2.11.2 ye dayanarak önceki kısımda (4.40) problemini gözönünde tutarak $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin optimal dağılımı problemini ele alalım. Dikkat edelim ki,

$$Pg = \sum_{i=1}^k u_i(g) R_i \quad (4.41)$$

operatörünün değerler bölgesi $R(P)$, uygun olarak R_1, R_2, \dots, R_k fonksiyonlarının doğurduğu $\varkappa = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ alt uzayı ile çakışır. Yani, $R(P) = S_p \{R_1, R_2, \dots, R_k\} \subset L_2(\Omega)$ dir. $u_1(g), u_2(g), \dots, u_k(g)$ katsayılarını keyfi olarak seçmekle değerler bölgesi $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ alt uzayında olan farklı farklı $P : H \rightarrow H_k = S_p \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ operatörleri elde edilebilir.

Şimdi, τ alt uzayı olarak (4.28) ve (4.29) eşitlikleri ile tanımlanan B operatörünün birinci k sayıda karakteristik vektörlerin doğurduğu alt uzayını alalım.

Teorem 4.4.1 e dayanarak $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin optimal dağılımını öyle seçelim ki, $\varkappa = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ alt uzayı τ alt uzayı ile çakışsın. Bu durumda $P_\varkappa = P_\tau = P_0$ eşitliği sağlanır. Ama genelde böyle bir seçimi gerçekleştirmek mümkün değildir. Bu nedenle de, \varkappa ve τ alt uzaylarının yakınlığını $\rho(\varkappa, \tau) = \|P_\varkappa - P_\tau\|$ fonksiyonu ile karakterize ederek $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin dağılımını öyle seçelim ki,

$$\|P_\varkappa - P_\tau\| \rightarrow \text{minimum}. \quad (4.42)$$

şartı sağlansın.

Burada (4.37) ve (4.39) ile (2.38) ve (2.39) u kullanarak aşağıdaki değerlendirmeleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|P - P_0\| = \|P_\varkappa - P_\tau\| = \sqrt{1 - \lambda_1(K)} \\ &\leq \sqrt{\|I - K\|} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Bu değerlendirmeden grtyoruz ki, $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin optimal dağılımını, örneğin,

$$\lambda_1(K) \rightarrow \text{maximum} \quad (4.44)$$

veya

$$\|I - K\| \rightarrow \text{minimum} \quad (4.45)$$

şartından seğebiliriz.

Böylece, $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin optimal dağılımını elde etmek için K operatörüne uygun pozitif belirli simetrik matrisinin minimal karakteristik $\lambda_1(K)$ sayısının $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ parametrelerine göre maksimalleştirmemiz yeterlidir.

4.7 Kontrol Etkenlerinin Dikdörtgen şeklindeki Levhada Optimal Dağılımının Yaklaşık Czm Metodu

Sadelik için $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ bölgelerinin koordinatları $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_k, \eta_k)$ olan noktalar olduğunu varsayalım. O zaman

$$R_i(x, y) = G(x, y, \xi_i, \eta_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.46)$$

olur.

Bu durumda B operatörünün karakteristik fonksiyonları ve uygun karakteristik sayıları

aşağıdaki formüllerle ifade edilirler (Collatz 1963, Butkovskiy 1983).

$$e_i(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad , \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (4.47)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad , \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (4.48)$$

Burada λ_i sayıları tekrarlanmalarında dikkate alınarak azalma yönünde sıralanır.

(2.38) ve (2.39) formülünden ve (4.43) değerlendirmesinden ve uygun olarak (4.44) den görüyoruz ki, $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_k, \eta_k)$ noktalarının koordinatları optimal olarak öyle seçilmeli ki,

$$K = \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}} \Delta_{yz} \Delta_{zz}^{-1} \Delta_{zy} \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.49)$$

eşitliği ile tanımlanan özdeşlik K operatörünün minimal karakteristik $\lambda_1(K)$ sayısı maksimum değer alsın. Burada

$$z_i = R_i = G(x, y, \xi_i, \eta_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.50)$$

$$y_i = e_i(x, y) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.51)$$

alınır. B operatörünün karakteristik vektörleri olan $\{e_i\}_{i=1}^k$ vektörleri sistemi ortonormal sistem olduğundan

$$\Delta_{yy} = \Delta_{yy}^{-1} = \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}} = I \quad (4.52)$$

olur.

$G(x, y, \xi, \eta)$ fonksiyonunun (4.12) ifadesinden aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$(z_i, y_j) = \lambda_j e_j(\xi_i, \eta_i) \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad (4.53)$$

$$(y_i, z_j) = \lambda_i e_i(\xi_j, \eta_j) \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad (4.54)$$

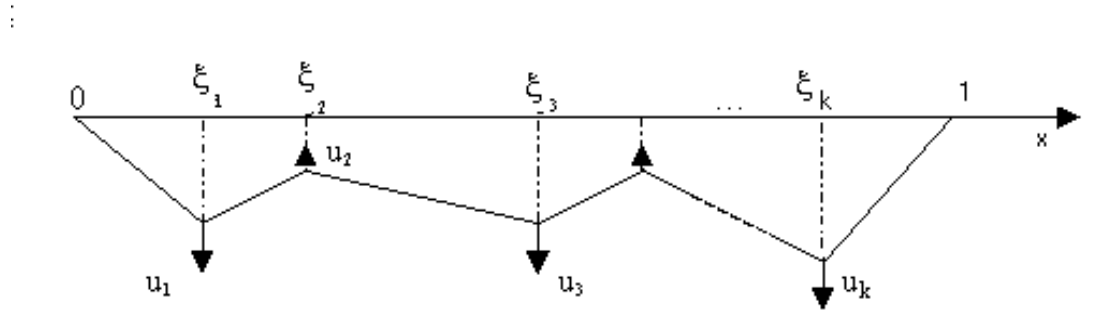
$$(z_i, z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e_n(\xi_i, \eta_i) e_n(\xi_j, \eta_j) \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad (4.55)$$

K operatörünün matrisinin elemanlarının ifadelerinden görüyoruz ki, D ve h parametreleri sabit olduklarında levhada noktaların optimal dağılımı levhanın kalınlığını gösteren h sayısına ve levhanın sertliğini gösteren D sayısına bağlı değildir. Ama noktaların optimal dağılımı levhanın şekline (dikdörtgen, daire veya halka şeklinde olmasına) ve levhanın sınırlardan bağlanma çeşidine (sınır şartlarına) bağlıdır.

$a = 1$, $b = 1$ halinde sayısal hesaplamalardan, örneğin; $k = 4$ aldığımızda $\Omega_1(0, 25; 0, 25)$, $\Omega_2(0, 25; 0, 75)$, $\Omega_3(0, 75; 0, 75)$ ve $\Omega_4(0, 75; 0, 25)$ şeklinde noktaların optimal dağılımı elde edilir. Bu dağılımda $\|P_z - P_\tau\|^2 = 0,01$ olur.

4.8 Telde Kontrol Etkenlerinin Optimal Dağılımının Yaklaşık Çözüm Metodu

$x = 0$ ve $x = 1$ uç noktalarında sabitleştirilmiş teli ele alalım. Bu telin denge durumu Ox koordinat ekseninin $0 \leq x \leq 1$ aralığı ile çakışık ve $\Omega = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ olur. Ele aldığımız bu telin uygun olarak $\xi_1, \dots, \xi_k \in [0, 1]$ noktalarında tele dik olmak üzere u_1, \dots, u_k kontrol etkenlerinin etki ettiğini var sayalım. Bu etkenlerin etkisi altında tel, bir kesik (kırık) çizgi şeklini alacaktır (Şekil 4.3).



Şekil 4.3 Kontrol etkenlerinin etkisi altında telin aldığı şekil

Matematiksel olarak telin denge durumundan yer değişme fonksiyonu $Q(x)$ aşağıdaki formülle ifade edilir (Collatz 1963).

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{\kappa} u_i G(x, \xi_i). \quad (4.56)$$

Bu formüldeki $G(x, \xi)$ fonksiyonu aşağıdaki sınır-değer probleminin Green fonksiyonudur (Butkovskiy 1983).

$$-\frac{d^2 Q}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4.57)$$

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 0, \quad (4.58)$$

(burada $f(x)$ fonksiyonu verilmiş belli bir fonksiyondur).

(4.57) – (4.58) probleminin Green fonksiyonu aşağıdaki

$$G(x; \xi) = \begin{cases} (1 - \xi)x & , x \leq \xi \\ (1 - x)\xi & , x \geq \xi \end{cases}, \quad (4.59)$$

veya

$$G(x; \xi) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi \xi}{n^2}. \quad (4.60)$$

Burada telin arzu ettiğimiz Őekillerinin sınıfı M , $[0, 1]$ aralığında tanımlanmış iki kez sũrekli difrensiyellenen ve $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında (4.58) sınır Şartlarını sağlayan ve bunlara ilave

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 Q(x)}{dx^2} \right) dx \leq 1. \quad (4.61)$$

Şartını da sağlayan $Q^*(x)$ formlarından oluşan kũme olduğunu varsayalım. Bu halde B integral operatũrũ

$$Bh \equiv \int_0^1 G(x; \xi) h(\xi) d\xi. \quad (4.62)$$

formülü ile tanımlanır. (4.62) formülündeki $h(x)$ fonksiyonu $h(x) = \frac{d^2}{dx^2} Q^*(x)$ eşitliği ile tanımlanan fonksiyondur.

Böylece, (4.62) ve (4.59) (veya (4.60)) formülleri ile tanımlanan B integral operatörü $L_{[0,1]}^2$ uzayını $L_{[0,1]}^2$ uzayına dönüştüren tamamen sürekli (kompakt) ve özdeşlik

operatördür. Bu operatörün $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ karakteristik sayıları ve bu sayılara uygun $e_1(x), \dots, e_n(x), \dots$ karakteristik fonksiyonları aşağıdaki formüllerle verilir:

$$\lambda_n = \frac{1}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.63)$$

$$e_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.64)$$

Bu örnek halinde $\varkappa = \{R_1, \dots, R_\kappa\}$ altuzayı $R_i = G(x; \xi_i)$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$ fonksiyonları ile tanımlanır. τ altuzayı ise $e_i(x) = \sqrt{2} \sin i\pi x$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$ fonksiyonları ile verilir.

Böylece, u_1, \dots, u_k kontrol etkenlerinin telde optimal dağılımını elde etmek için ξ_1, \dots, ξ_k koordinatlarını

$$F(\xi_1, \dots, \xi_k) = 1 - \lambda_1(K).$$

fonksiyonu minimum değer alması şartından bulunur. Burada $\lambda_1(K)$ sayısı $K = \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}} \Delta_{yz} \Delta_{zz}^{-1} \Delta_{zy} \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}}$ operatörünün minimal karakteristik sayısıdır. Bu örnek halinde

$$z_i = R_i = G(x; \xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, \kappa, \quad (4.65)$$

$$y_i = e_i(x) = \sqrt{2} \sin i\pi x, \quad i = 1, 2, \dots, \kappa. \quad (4.66)$$

Burada $\{e_i\}$ sistemi ortonormal sistem olduğundan $\Delta_{yy} = \Delta_{yy}^{-1} = \Delta_{yy}^{-\frac{1}{2}} = I$ olur.

Uygun olarak Δ_{yz} ve Δ_{zz} matrisleri aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$\{\Delta_{yz}\}_{i,j} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 j^2} \sin \pi j \xi_i, \quad (4.67)$$

$$\{\Delta_{zz}\}_{i,j} = (z_i, z_j) = \begin{cases} \frac{1}{3} \xi_i^3 (1 - \xi_i)(1 - \xi_j) + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j (1 - \xi_j)^3 \\ + (1 - \xi_j) \xi_i \left[\frac{1}{2} (\xi_j^2 - \xi_i^2) - \frac{1}{3} (\xi_j^3 - \xi_i^3) \right], & \xi_i < \xi_j \\ \frac{1}{3} \xi_i^2 (1 - \xi_i)^2, & \xi_i < \xi_j \\ \frac{1}{3} \xi_j^3 (1 - \xi_i)(1 - \xi_j) + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j (1 - \xi_i)^3 \\ + (1 - \xi_i) \xi_j \left[\frac{1}{2} (\xi_i^2 - \xi_j^2) - \frac{1}{3} (\xi_i^3 - \xi_j^3) \right], & \xi_j < \xi_i \end{cases} .$$

$k = 10$ için üstte gösterilmiş şema esasında sayısal hesaplamalardan aşağıdaki sonuçlar elde edildi:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0,5924; \xi_2 = 0,1728; \xi_3 = 0,2811; \xi_4 = 0,3770; \xi_5 = 0,4736; \\ \xi_6 &= 0,5771; \xi_7 = 0,6837; \xi_8 = 0,7825; \xi_9 = 0,8819; \xi_{10} = 0,8900. \end{aligned}$$

Kontrol etkenlerinin bu dağılımında

$$\|P_\varepsilon - P_\tau\|^2 = 1 - \lambda_1(K) = 0,028$$

olur.

4.9 Kontrol Etkenlerinin Minimum Sayıda Seçimi İçin Bir Metod

Kontrol etkenlerinin sayısının minimum sayıda seçilmesi de kontrol teorisinde önemli problemlerdendir. Bu problemin çözümü de, kontrol etkenlerinin optimal dağılımı problemi gibi lineer operatörün sonlu boyutlu operatörlerle approxsimasyonu problemine dayanarak çözülebilir.

Gerçekten de örneğin, levhada kontrol etkenlerinin optimal dağılımı bölümünde kontrol etkenlerinin optimal dağılımı problemi

$$S = \sup_{Q^* \in M} I_0 \rightarrow \min_{\Omega_1, \dots, \Omega_k}$$

problemine getirildi. Burada

$$\begin{aligned} I_0 &= \left\| Q^* - \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij}(Q^*, R_j) R_i \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left[Q^*(x, y) - \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij}(Q^*, R_j) R_i(x, y) \right]^2 dx dy \end{aligned}$$

ile verilir. I_0 'ın bu ifadesinden görüldüğü ki I_0 fonksiyoneli ve aynı zamanda $S = \sup_{Q^* \in M} I_0$ fonksiyoneli de kontrol etkenlerinin sayısı olan k sayısına bağlıdır. Yani

$$S = S(k)$$

dır. Diğer yandan, bölüm 4.3 de $S = \|B - P\|_{L(H)}^2$ formülü ile $S(k) = S = \|B - P\|_{L(H)}^2$ olduğunu da göstermiştik.

Bu bölümde levhada kontrol etkenlerinin optimal dağılımı probleminin

$$S(k) = S = \|B - P\|_{L(H)}^2 \rightarrow \min_{\Omega_1, \dots, \Omega_k}$$

problemine getirildiği de gösterildi.

Bölüm 4.4 de ise $S = \sup_{Q^* \in M} I_0$ fonksiyonelinin minimum değerinin

$$S_0(k) = S_0 = \|B - P_0\|^2 = \lambda_{k+1}^2(B)$$

olduğu da (4.37) de gösterildi.

Bu sonuncu eşitlikten görüyoruz ki lineer operatörün sonlu boyutlu operatörlerle approxsimasyonundaki en küçük hata $|\lambda_{k+1}(B)|$ sayısına eşit olur (veya bu sayıyı aşmaz). Eğer bu hata yüzeylerin kontrolü bakımından kabul edilebilir ise (yani çok büyük bir sayı değilse örneğin, $\varepsilon = 0.01$ veya $\varepsilon = 0.001$ ise) o zaman $\lambda_{k+1}(B)$ sayısına uygun olan k sayısı kontrol etkenlerinin minimum sayısı olarak alınabilir.

KAYNAKLAR

- Balas, M.J. 1985. Optimal quasi-static shape control for large aerospace antenn. Journal of Optimization and Applications, vol.46, No.2.
- Bayraktar, M. 1980. Fonksiyonel Analiz, Erzurum.
- Bilyanskiy, P.V. and Mustafayev, M.I. 1985. Shape control of phase front correctors in large telescops. Avt. and Telemechanica, No.8, pp.5-14.
- Bilyanskiy, P.V. and Mustafayev, M.I. 1988. Modal control of shape of structures distributed in space. Avt. and. Telemechanica, No.8, pp.37-46.
- Butkovskiy, A.G. 1969. Distributed control systems, Newyork.
- Butkovskiy, A.G. 1983. Structural Theory of Distributed Systems, New York.
- Collatz, L. 1963. Eigen wertaufgaben mit technischen anwendungen, Leipzig.
- İvanov, L.D. 1975. Variations of Sets and Functions, Nauka Publishing House, Moscow.
- Glazman, I.M. and Lyubich, I.Y. 1969. Finite-Dimensional Analysis, Nauka Publishing House, Moscow.
- Gochberg, I.T.S. and Krein, M.G. 1965. Introduction into theory of linear-selfconjugate operators. Nauka Publishing House, Moscow (In Russian).
- Hacısalihoglu, H.H. 1982. Lineer Cebir.
- Kinber, B.E. 1955. Invers task solution of geometrical acoustics, Journal of Acoustics, vol.1, No.3, pp. 221-225, Moscow (In Russian).
- Mustafayev, M.I. 1981. Optimal control of the surface shape by using separately continuous signals. Automatics and Telemechanics, No. 9, pp 13-20, Moscow.
- Mustafayev, M.I. 1981. On optimal choice of areas for application of control actions which are located separately, Automatics and Telemechanics, No. 1, pp 27-34, Moscow.
- Mustafayev, M.I. 1987. Upravlenie formay otrajayuşey poverxnosti bolşix kosmiçeskix anten. Zarubejnaya Radioelektronika No.5, pp.61-71.
- Mustafayev, M.I. 1984. Stochastic surface shape control of distributed parameter systems and optimal estimation of control efforta and states, Infor. Acad. Sci. Azarb. Fift-Tech. and Mathematics Ski Vol.5-6, pp.30-39.

- Mustafayev, M.I., Sağel, M.K. and Eroğlu, A. 2006. On the solution of optimal control problems of surface forms, Trans. of Azerb. Nati. Acad. of Sci., "Elm" Pub.House, No:2, pp. 90-96, Baku.
- Naymark, M.A. and Martinov, V.V. 1970. Funktsionalny Analiz, Dolgoprudny, MFTI.
- Naymark, M.A. 1969. Lineyniye Differentsialniye Operatorı, Moskova, Nauka.
- Rasulov, M.L. 1967. Methods of Contour Integration, Amsterdam.
- Trenogin, V.A. 1980. Funktsionalny Analiz, Moskova, Nauka.
- Vorontsov, M.A., Koryabin, A.B., Smalgaufen, V.I. 1988. Upravlyayemye Optičeskiye Sistemi, Nauka.
- Yıldırım, H. and Mustafayev, M.I. 2004. On the control problem of the vibrating systems with distributed parameters, Sci, And Art. Fac. Journal of Sci. Vol.23, pp.1-6, Selçuk Üni.
- Zeidler, E. 1991. Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics (Springer-Verlag New York Inc.) Vol. 108.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ahmet EROĞLU

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 26.07.1977

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Ankara Kurtuluş Lisesi, 1994

Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 1998

Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D.,
2001

Çalıştığı Kurumlar

Araştırma Görevlisi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001-