

27735

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GÖMÜLÜ SİLİNDİRİK CİSİMLERE İLİŞKİN TERS SAÇILMA  
PROBLEMLERİ İÇİN BİR HİBRİD SAYISAL YÖNTEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Ali ALKUMRU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 22 Haziran 1992

Tezin Savunulduğu Tarih : 9 Temmuz 1992

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mithat İDEMEN

Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr. Alınur BÜYÜKAKSOY

Doç.Dr. Melih PAZARCI

TEMMUZ 1992

## ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında kıymetli yardımlarını benden esirgemeyen değerli Hocam Sayın Prof. Dr. Mithat İdemen'e ve Sayın Yard. Doç. Dr. İbrahim Akduman'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ali Alkumru  
Haziran 1992



## İÇİNDEKİLER

NOTASYON LİSTESİ . . . . .	IV
ÖZET . . . . .	V
SUMMARY . . . . .	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ . . . . .	1
1.1. Konu ve Önemi . . . . .	1
1.2. Tezin Amacı ve İçeriği . . . . .	3
BÖLÜM 2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ. . . . .	4
2.1. Problemin Formülasyonu . . . . .	4
2.2. Problemin Bir İntegral Denkleme İndirgenmesi . . . . .	8
2.3. Green Fonksiyonunun Bir Açık İfadesi. . . . .	10
2.4. Alanın Fourier Dönüşümü. . . . .	14
2.5. Problemin Çözümü . . . . .	15
2.5.1. Born Yaklaşıklığına Dayalı Kesin Spektral Yöntemler. . . . .	15
2.5.2. Basit Moment Metodu. . . . .	17
2.5.3. Bir Hibrid Yöntem. . . . .	19
2.5.4. Baz Fonksiyonlarının Seçimi . . . . .	22
BÖLÜM 3. ÖRNEK UYGULAMALAR. . . . .	29
BÖLÜM 4. SONUÇLAR. . . . .	43
KAYNAKLAR . . . . .	44
EKLER . . . . .	46
ÖZGEÇMİŞ. . . . .	48

## NOTASYON LİSTESİ

Tezde, genel olarak, uluslararası yayınlarda yaygın bir şekilde kullanılmakta olan notasyon kullanılmıştır. Bu nedenle, değişik harflerin ve sembollerin anlamlarının burada ayrıca belirtilmesine gerek yoktur. Bununla beraber tezde kullanılan ve çok yaygın olmayan bazı notasyon şekilleri aşağıda açıklanmıştır.

- $a = (a_1, a_2, a_3)$  bileşenleri  $a_1, a_2, a_3$  olan herhangi bir  $a$  vektörüdür.
- $x = (x_1, x_2, x_3)$  bileşenleri  $x_1, x_2, x_3$  olan yer vektörüdür.
- $y = (y_1, y_2, y_3)$  bileşenleri  $y_1, y_2, y_3$  olan yer vektörüdür.
- $x' = (x_1, x_2)$   $x$  yer vektörünün  $x_3 = 0$  düzlemindeki izdüşümüdür.
- $y' = (y_1, y_2)$   $y$  yer vektörünün  $y_3 = 0$  düzlemindeki izdüşümüdür.
- $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ ,  $dy = dy_1 dy_2 dy_3$ ,  $dx' = dx_1 dx_2$  ve  $dy' = dy_1 dy_2$  çok katlı bölgesel integrallere ait olan integrasyon elemanlarını belirten differansiyellerdir.

## ÖZET

Bu çalışmada, elektromagnetik özellikleri belirli bir yarı uzaya gömülü bulunan, doğrultusu bilinen sonsuz uzun bir silindirik cismin yerinin, iletkenliğinin ve dielektrik katsayısının ortaya çıkarılması için geliştirilen bir hibrid yöntem ayrıntılı olarak incelenmiştir. Burada problem önce söz konusu gömülü cisim belirlemeye yarayan cisim fonksiyonunun sağladığı bir integral denkleme indirgenmiş, daha sonra da bu integral denklem, değişkenlerden biri bakımından spektral diğeri bakımından da moment yöntemine dayanan bir hibrid gösterilim kullanılarak çözülmüştür. Yöntemin uygulanabilirliğini ve elde edilen sonucun doğruluk derecesini göstermek amacıyla bazı örnek uygulamalar yapılmıştır.

## SUMMARY

### A HYBRID METHOD FOR NUMERICAL SOLUTIONS OF INVERSE SCATTERING PROBLEMS RELATED TO CYLINDRICAL BODIES BURIED IN A HALF-SPACE

The main objective in an inverse scattering problem is to recover the geometrical (location and shape) and physical (constitutive parameters) properties of an inaccessible body by considering its effect on the propagation of certain waves. During last two decades enormous efforts have been devoted to the investigation of these problems. Most of the available publications concern the bodies located in an infinite homogeneous space whereas the bodies buried in a known host medium is much more important from both pur scientific and application points of view. The available investigations related to buried bodies are, in general, exact investigations dwelling on spectral representations of the field. These investigations are based on certain approximate equations (for example the well-known Born approximation) and, hence, concern only certain particular cases. In order to be able to treat more general cases one has to develop suitable numerical techniques. But as far as we know, purely numerical investigations devoted to inverse scattering problems connected with "buried bodies" have not been published till now. One of the main difficulties in direct numerical techniques is that they are more susceptible to the ill-posedness, inherent to inverse problems, as compared to the exact methods dwelling on spectral representation. In the case of buried objects an other difficulty is added to the ill-posedness; namely: an explicit expression of the related Green function, suitable to numerical computations, is not known. The aim of this work is to develop a "hybrid" method suitable to the case of cylindrical bodies buried in a half-space. This method which dwell on a spectral representation with respect to one of the space coordinates while the representation in the other coordinate is given through finite elements reduces also the effect of the ill-posedness on the result. The essential points of the method will be explained below. We remark that our concern is only the electromagnetic properties of the body.

Let the half-spaces  $x_2 > 0$  and  $x_2 < 0$  be filled with the simple non-conducting and non-magnetic materials having different permittivities  $\epsilon_0$  and  $\epsilon_1$ , respectively. We assume that the region  $x_2 < 0$  involves a non-magnetic cylindrical body  $\mathcal{D}$  whose permittivity  $\epsilon(x')$  and conductivity  $\sigma(x')$  are unknown continuous functions of  $x' = (x_1, x_2)$  (see Figure-1). Our main aim consists of the determination of these functions. To this end we want to illuminate this body by a plane wave excited in the half-space  $x_2 > 0$  such that the electric field is parallel to the  $x_3$ -axis, i.e.:  $E^i = (0, 0, u^i(x'))$ . Then the contribution of the body to the total field to be observed on a line  $\{x_2 = \text{constant}, x_3 = 0, x_1 \in (-\infty, \infty)\}$  lying in the upper half-space  $x_2 > 0$ , say  $u_D(x')$ , will permit us to determine the sought functions  $\epsilon(x')$  and  $\sigma(x')$ .

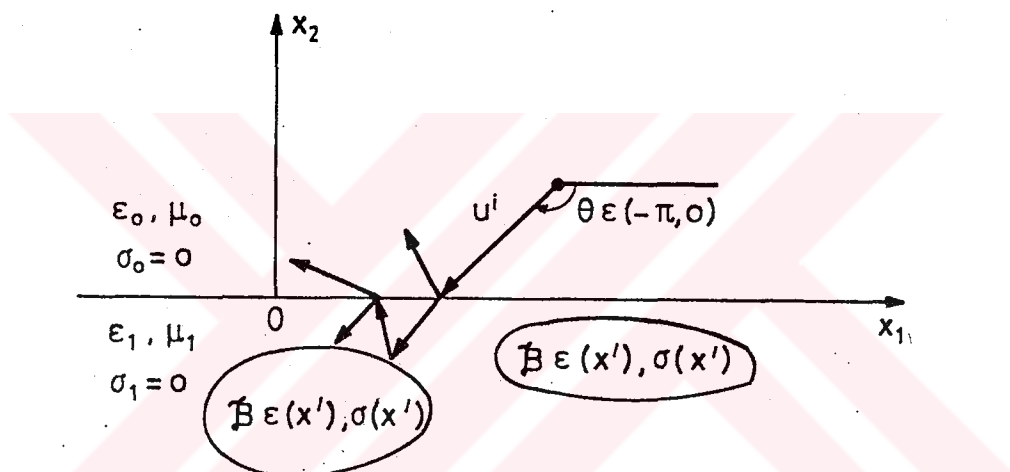


Figure-1 Geometry Of The Problem.

The above-mentioned contribution of the body to the field is defined as

$$u_D(x') = u(x') - u_0(x'),$$

where  $u(x')$  denotes the total field while  $u_0(x')$  stands for the total field which would be observed if the body  $\mathcal{D}$  were not exist. An explicit expression of  $u_0(x')$  can be found very easily through some simple computations and are given in every text books. As to the contribution of  $\mathcal{D}$ , one can easily show that it satisfies the Helmholtz equation

$$\Delta u_D + k^2(x_2)u_D = -k^2(x_2)v(x')u(x') \quad (1)$$

in the sense of distribution under the radiation condition. Here  $k^2(x_2)$  and  $v(x')$  have the following significances:

$$k^2(x_2) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon(x_2)$$

$$v(x') = \varepsilon'(x')/\varepsilon(x_2) - 1$$

with

$$\varepsilon(x_2) = \begin{cases} \varepsilon_0 & , \quad x_2 > 0 \\ \varepsilon_1 & , \quad x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon'(x') = \varepsilon(x') + i\sigma(x')/\omega ,$$

The determination of the function  $v(x')$  is sufficient to solve the inverse problem completely because its support determines the location and the shape of  $\mathcal{D}$  while the real and imaginary parts of it gives the functions  $\varepsilon(x')$  and  $\sigma(x')$ . For this reason the function  $v(x')$  is named as "object function".

The problem put by the differential equation (1) is equivalent to the following integral equation:

$$u_D(x') = k_1^2 \int_{\mathcal{B}} G(x', y') v(y') u(y') dy' \quad (2)$$

Here  $G(x', y')$  shows the Green function connected with the two-part space not involving  $\mathcal{D}$  while  $\mathcal{B}$  is the cross-section of  $\mathcal{D}$ . An explicit expression of the Fourier transform of  $G(x', y')$  with respect to  $x_1$ , say  $\hat{G}(\nu, x_2, y')$ , can be found very easily through the differential equation satisfied by  $G(x', y')$ . Therefore our method will dwell on the Fourier transform of (2) namely:

$$\hat{u}_D(\nu, x_2) = k_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\nu, x_2, 0, y_2) \hat{p}(\nu, y_2) dy_2 \quad (3)$$

Here  $\hat{p}(\nu, x_2)$  stands for the Fourier transform of  $p(x') = v(x')u(x')$ . The equation (3) constitutes the base of our method.

From (3) we will find first an explicit expression of  $\hat{p}$  as a function of  $y_2$ . This will be achieved through classical moment method. The essential steps of the method are as follows:

- i) In the half space  $x_2 < 0$  fixe first  $N$  horizontal layers of thickness  $2h$  such that the region  $\mathcal{B}$  is covered by these layers and in each layer the function  $p(x')$  can be approximated as follows (see Figure-2):

$$p(x') \approx \sum_{m=-M}^M A_{nm} \phi_m(x_1) , \quad x' \in n\text{-th layer} \quad (4)$$

Here  $\{\phi_m(x_1)\}$  stands for a basis set which along with the number  $M$  will be determined later.

- ii) Measure the field  $u_D(x')$  on a line  $x_2 = \text{const.} > 0$  and compute  $\hat{u}_D(\nu, x_2)$  for some fixed  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{N(2M+1)}$ .
- iii) By putting (4) and  $\hat{u}_D(\nu, x_2)$  mentioned above in (3) write a linear system of algebraic equations for  $A_{nm}$  and, by inverting it, solve the constants  $A_{nm}$ .
- iv) By using the constants  $A_{nm}$  in (4) compute  $p(x')$ .
- v) Use the value of  $p(x')$  in (3) and compute the field  $u(x')$  inside the region  $\mathcal{B}$ .
- vi) By dividing the results obtained in (iv) and (v) compute  $v(x')$  inside the  $n$ -th layer.

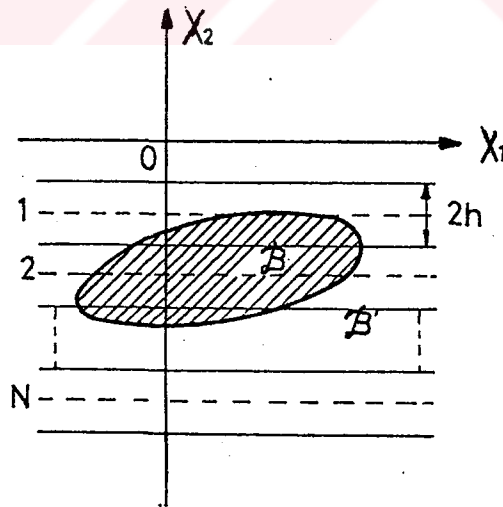


Figure-2 Horizontal Layers In The Region  $x_2 < 0$ .

The function  $\hat{G}(\nu, x_2, y')$  involves a factor  $\exp\{-\sqrt{\nu^2 - k_0^2}x_2\}$  which decays exponentially when  $|\nu| > k_0$ . The ill-posedness of the inverse problem is closely related to this factor. In order to reduce the effect of this factor in the result we can choose the points  $\nu_i$  mentioned above such that  $|\nu_i| < k_0$ . Such a choice can be admissible if the band "duration" of the basis functions, say  $D$ , is less than  $k_0$ . This is a basic criteria to be considered in the choice of the basis functions. We choose these functions as follows:

- i)  $\phi_0(x_1)$  is a function of bounded support namely:  $\phi_0(x_1) \equiv 0$  for  $|x_1| > 2d$ . The support of  $\phi_0(x_1)$  is such that the band "duration" of  $\phi_0$  has its minimum value (The condition  $D < k_0$  permits us to determine the value of  $d$ ).
- ii) The other elements of the basis set are given by the relation  $\phi_m(x_1) = \phi_0(x_1 - md)$  (see Figure-3). From the solution of the Euler equation connected with the function  $\phi_0(x_1)$  we find that

$$\phi_0(x_1) = \cos \frac{\pi x_1}{2d} \quad , \quad |x_1| \leq d$$

and

$$D = \frac{\pi}{2d}$$

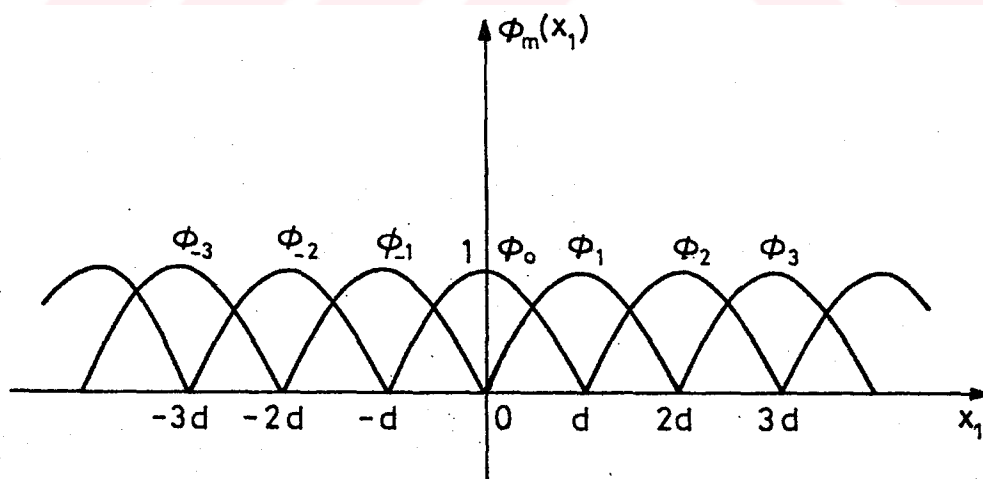


Figure-3 Basis Functions.

In order to see the accuracy to be obtained by the method established above some illustrative examples were considered for both noiseless and noisy data.



## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

#### 1.1. Konu ve Önemi

Bir Ters saçılma probleminin amacı, genellikle, yanına yaklaşlamayan cisimlerin geometrik ve fiziksel özelliklerini, bu cismin dalga yayılımına yapmış olduğu etkileri uzaktan gözleyerek belirlemekten ibarettir. Burada sözü edilen geometrik özellikler cismin şekli ve konumu, fiziksel özellikler ise "bünye parametreleri" dir. Bu inceleme kapsamında göz önüne alınacak fiziksel özellikler, sadece , elektromagnetik özellikler olarak bilinen dielektrik permitivite, magnetik geçirgenlik ve elektrik iletkenlik olacaktır. Bu nedenle, kullanılacak dalga da elektromagnetik dalgadır. Özellikleri belirlenmeye çalışılan cisim ya sonsuz geniş bir ortamda bulunur ya da özellikleri bilinen, sınırlı, bir başka ortamın içine gömülü olur.

Yukarıda belirtilen şekliyle ortaya konmuş bulunan ters saçılma problemleri son yirmi yıl içinde çok yoğun araştırmalara konu olmuş bulunmaktadır. Altmışlı yılların sonunda başlayan [1] ve çok büyük bir hızla artan yayınların bir listesini vermek artık mümkün değildir. Bu konudaki yayınlar matematikten mühendisliğe kadar öylesine değişik ve bol sayıda dergide yer almaktadır ki; konuya yakından ilgi duyanların bile her şeyi sağlıklı bir biçimde izlemeleri olanak dışıdır. Konuya duyulan bu geniş ilgi, yer bilimleri, haberleşme, uzaktan algılama, tahribatsız muayene, tıp v.b. dallardaki mevcut ve olası pratik uygulamaların yanı sıra, kuantum mekaniği, atmosfer fiziği, matamatik v.b. dallardaki salt bilimsel ilgiden de kaynaklanmaktadır.

Ters saçılma konusunda bugüne kadar yapılmış bulunan yayınların çok büyük bir kısmı sonsuz geniş bir homojen ortamda bulunan cisimlere yönelik olmuştur. Bu problemleri incelemek amacıyla geliştirilmiş bulunan kesin yöntemlerin bir kısmı, büyük bir güçlük göstermeden, sınırlı bir ortam içine gömülü bulunan cisimlere de genişletilebilirler. Yöntemlerin ancak bir kısmı için geçerli olabilen bu genişletme, ne yazık ki her yöntem için söz konusu değildir. Örneğin, kesin yöntemler oluşturmakta büyük kolaylıklar sağlayan Born yaklaşımı, homojen uzayda bulunan cisimlerin söz konusu olduğu hallerde sadece aranan cisimle dış ortam arasındaki özellik farkının (kontrast'ın) yeter derecede küçük olmasına dayanır. Gömülü cisimler halinde bu yaklaşım her zaman kullanılamaz, çünkü, gereksinim duyulan basitleştirmelerin yapılabilmesi için cisim içinde bulunduran ortam ile dış ortam arasındaki kontrastın da (eğer elektrik alan arakesit yüzeyine her noktada paralel değil ise) küçük olması gerekir. Öte yandan, cisim içinde barındıran bölgenin sınırlarında ardışık yansımalar da oluşuyorsa, cisimle etkileşimde bulunan dalganın yapısı da çok karmaşık olur (örneğin bk. [2]). Bu kısa açıklamalardan açıkça görülüyor ki; gömülü cisimler halinde ters saçılma problemlerinin kendine özgü güçlükleri vardır ve ayrıntılı bir şekilde ele alınmaları gerekir.

Gömülü cisimlere ilişkin ters saçılma problemleri arasında, bir homojen yarı-uzaya gömülü silindirik cisimleri ilgilendirenlerin ayrıcalıklı bir konumu vardır. Özellikle yer bilimleri, maden arama v.b. konular bakımından bir "ideal model" niteliğinde bulunan bu yapı ayrıntılı bir biçimde olmasa da, bir kaç araştırmacı tarafından ele alınmış bulunmaktadır (örneğin bk.[3-5]). Kesin çözüm bulmayı amaçlayan bu incelemeler ancak bir takım varsayımlar altında geçerlidirler. Sözü edilen varsayımlar, şüphesiz, sonuçların kullanım alanını büyük ölçüde daraltmaktadır. Oldukça genel sayılabilecek koşullar altında uygulanabilir olan yöntemler, şüphesiz, "sayısal" yöntemlerdir. Gömülü cisimlere ilişkin ters saçılma problemleri, bildiğimiz kadarıyla, doğrudan doğruya sayısal denebilecek yöntemlerle şimdiye kadar hiç ele alınmış değildir.

## 1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

Bu tezin amacı, bir homojen yarı-uzaya gömülü bulunan silindirik cisimlere ilişkin ters saçılma problemlerini çözmeye elverişli bir sayısal yöntem geliştirmektir. Yöntemin esası, anahatlarıyla, Ra ve arkadaşları (bk.[6-7]) tarafından geliştirilen ve "moment" metoduna dayanan sayısal yöntemin "optimum" biçimde gömülü cisimler haline genişletilmesinden ibarettir. Özellikleri belirlenecek olan cismin doğrultusunun önceden bilindiği ve magnetik olmayan bir malzemedен yapılmış olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca, Bu cismi içinde bulunduran yarı-uzayın da, uzayın diğer yarısı gibi, magnetik olmadığı varsayılacaktır. Silindirin kesiti üzerine herhangi bir kısıtlama koymaya gerek duyulmamaktadır. Bu kesit bir kaç ayrı parçadan da oluşmuş olabilir. Silindirin doğrultusunun önceden biliniyor olması, kullanılan elektrik alanın polarizasyonunun uygun seçilmesiyle, problemin bir skaler probleme dönüşmesine neden olmakta ve, böylece, büyük kolaylık sağlamaktadır. Buna karşın, bu türden en ilginç problemlerin doğrultusu bilinmeyen silindirik cisimlere ilişkin problemler oldukları da apaçiktır.

Aşağıda, ikinci bölümde problemin tanımı (formülasyonu) yapılacak ve çözüm için önerilen yöntem açıklanacaktır. Bu bölümde, kısaca, doğrudan doğruya kullanılan moment yöntemi ile spektral temele dayalı yöntemlerin sayısal çözüm yönünden iyi ve kötü olan yanları da açıklanmaya çalışılacaktır. Böylece, önerilen yöntemin konumu daha fazla açıklık kazanmış olacaktır. Yöntemin uygulanabilirliğini ve elde edilen sonuçların kalitesini görebilmek amacıyla, sonuçlar bir takım örnek problemlere uygulanmıştır. Üçüncü Bölüm bu türden örnek uygulamalara ayrılmıştır. Uygulamalar için gerekli olan ve gerçek uygulamalarda ölçme ile sağlanması gereken değerler (datalar) burada yapay yolla (düz saçılma probleminin sayısal çözümü ile) sağlanmıştır. Bu amaçla kullanılan ifadeler Ek A bölümünde verilmiştir. Son olarak, Dördüncü Bölümde problemin ve önerilen yöntemin toplu bir şekilde değerlendirilmesi yapılmış ve ileri aşamada yapılması gereken araştırmalara dikkat çekilmiştir.

## BÖLÜM 2

### PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

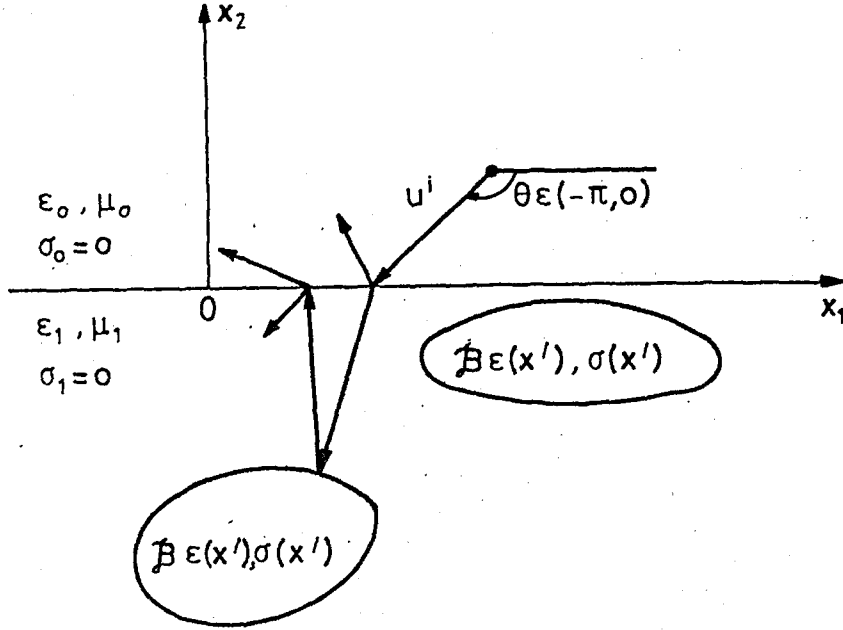
#### 2.1. Problemin Formülasyonu

Sonsuz geniş uzayın  $x_2 > 0$  ve  $x_2 < 0$  ile belirlenen yarıları, bünye parametreleri, sırasıyla,  $(\varepsilon_0, \mu_0, \sigma_0)$  ve  $(\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$  olan basit maddelerle dolu bulunsun ve  $x_2 < 0$  alt yarı-uzayı silindirik ve sonsuz uzun bir  $\mathcal{D}$  cismini içersin.\*  $\mathcal{D}$  nin  $\mathcal{B}$  ile gösterilen dik kesiti biribirinden ayrık bir çok parçadan oluşmuş olabilir (bk.şek.2.1.). Burada göz önüne alınmak istenilen problem,  $x_2 > 0$  bölgesinde yapılabilecek ölçmelerle  $\mathcal{D}$  cisminin konumunun, şeklinin ve bünye parametrelerinin belirlenmesinden ibarettir. Aşağıda bu problem şu varsayımlar altında çözülmeye çalışılacaktır :

1. Uzayı dolduran maddeler ve  $\mathcal{D}$  cismi antimagnetiktir. Başka bir deyişle;  $\mu_0, \mu_1$  ve  $\mathcal{D}$  nin magnetik geçirgenliği boşluğa ait geçirgenliğe eşittir.
2. Uzayı dolduran maddeler iletken değildir. Yani,  $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$  dır.
3.  $\mathcal{D}$  nin doğrultusu önceden bilinmektedir ( $Ox_3$  eksenini  $\mathcal{D}$  ye paralel seçilecektir).
4.  $\mathcal{D}$  yi oluşturan malzeme izotrop, lineer, lokal ve zamanla değişmeyen bir bünyeye sahiptir. Bir başka deyişle,  $\mathcal{D}$  nin  $\varepsilon(\mathbf{x}')$  per-mitivitesi ile  $\sigma(\mathbf{x}')$  iletkenliği  $\mathbf{x}' = (x_1, x_2)$  nin skaler fonksiyonlarıdır.

---

\*  $\mathcal{D}$  nin anadoğruları zorunlu olarak  $x_2 = 0$  düzlemine paraleldir.



Şekil 2-1. Problemin geometrisi

Şimdi, yukarıda sözü edilen  $\mathcal{D}$  cisminin,  $x_2 > 0$  yarı-uzayında uyarılmış bulunan ve  $e = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$  doğrultusunda yayılan lineer polarize bir düzlemsel dalga ile aydınlatılmış bulunduğunu varsayalım. Bu dalganın elektrik alanı  $Ox_3$ 'e paralel olsun ve  $Ox_3$  eksenine paralel bileşeni  $u^i$  ile gösterilsin. Zamana bağlılık çarpanının  $e^{-i\omega t}$  şeklinde olduğu kabul edilerek

$$E = (0, 0, u^i(x')) \quad (2.1a)$$

$$u^i(x') = \exp\{ik_0(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)\}, \quad \theta \in (-\pi, 0) \quad (2.1b)$$

yazılır. Eğer  $\mathcal{D}$  cismi var olmasaydı, başka bir deyişle,  $\varepsilon(x') \equiv \varepsilon_1$ ,  $\sigma(x') \equiv 0$  olsaydı,  $u^i$  nin etkisiyle uzayda gözlenecek olan alan şöyle olurdu :

$$u_0(x') = \begin{cases} u^i + R e^{ik_0(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)} & , x_2 > 0. \\ T e^{ik_1(x_1 \cos \chi + x_2 \sin \chi)} & , x_2 < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Buradaki  $R$  ve  $T$ , sırasıyla,  $x_2 = 0$  düzlemindeki yansıma ve iletim katsayılarını,  $\chi \in (-\pi, 0)$  ise alt yarı-uzay içindeki yayılma yönünü

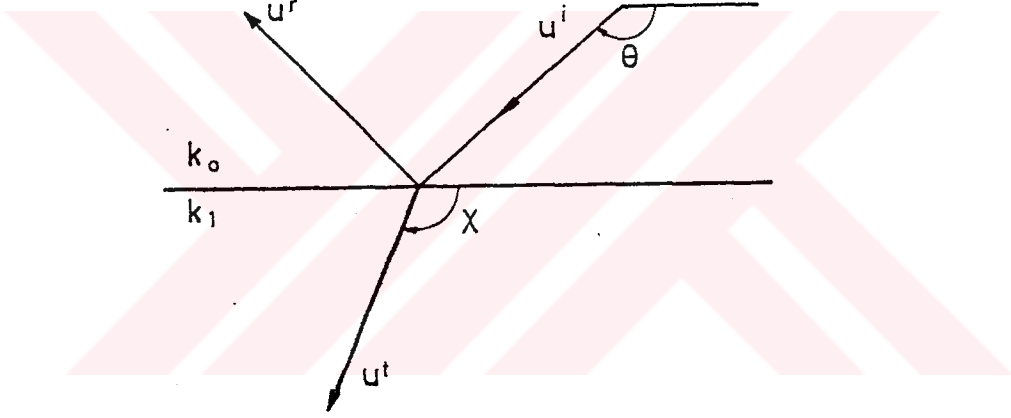
göstermektedir (Bk. Şekil 2-2).  $R, T$  ve  $\chi$  nın  $k_0, k_1$  ve  $\theta$  ya bağlı açık ifadeleri konuya ilişkin bütün ders kitaplarında verilir ve aşağıdaki gibidir :

$$R = \frac{k_0 \sin \theta - k_1 \sin \chi}{k_0 \sin \theta + k_1 \sin \chi} \quad (2.3a)$$

$$T = \frac{2k_0 \sin \theta}{k_0 \sin \theta + k_1 \sin \chi} \quad (2.3b)$$

$$\cos \chi = \frac{k_0}{k_1} \cos \theta \quad , \quad \chi \in (-\pi, 0). \quad (2.3c)$$

$\mathcal{D}$  cisminin ölçülen toplam alana katkısı  $u_0$  alanı ile  $\mathcal{D}$  yi oluşturan malzemenin girişimi olarak yorumlanabilir. Bu nedenle, aşağıdaki incelemede  $u_0$  nın rolü büyük olacaktır.



Şekil 2-2. Yansıyan ve iletilen dalgalar.

Şimdi  $\mathcal{D}$  cisminin toplam  $u(x')$  alanına katkısı göz önüne alınsın.  $u_D(x')$  ile ifade edilecek olan bu alan

$$u_D(x') = u(x') - u_0(x') \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır ve,  $u_0(x')$  fonksiyonu

$$\Delta u_0 + k^2(x_2)u_0 = 0 \quad (2.5)$$

denklemini sağladığından,

$$\Delta u_D + k^2(x_2)u_D = -k^2(x_2)v(x')u(x') \quad (2.6)$$

denklemini sağlar. Burada,

$$\varepsilon(x_2) = \begin{cases} \varepsilon_0 & , x_2 > 0 \\ \varepsilon_1 & , x_2 < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

ve

$$\varepsilon'(x') = \varepsilon(x') + i \frac{\sigma(x')}{\omega} \quad (2.8)$$

olmak üzere \*,

$$k^2(x_2) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon(x_2) \quad (2.9)$$

ve

$$v(x') = \frac{\varepsilon'(x')}{\varepsilon(x_2)} - 1 \quad (2.10)$$

konmuştur. (2.6) denklemini yazılırken, toplam alanın, bu özel halde,

$$\Delta u + k^2(x')u = 0 \quad (2.11)$$

denklemini distribüsyon anlamında sağlamakta olduğu göz önünde bulundurulmuştur. (2.11) de gözüken  $k^2(x')$  ifadesi,  $\mathcal{D}$  nin dışında (2.9) ile,  $\mathcal{D}$  nin içinde ise  $k^2(x') = \omega^2 \mu_0 \varepsilon'(x')$  ile ifade edilir. (2.10) ve yukarıdaki bağıntılar  $\mathcal{D}$  nin dışında  $v \equiv 0$  olduğunu açıkça göstermektedir. Bu nedenle,  $v$  nin belirlenmesi  $\mathcal{D}$  nin hem geometrik hem de fiziksel özelliklerini belirtmeye tamamen yetecektir. Çünkü,  $v$  nin sıfırdan farklı olduğu noktalar ( $v$  nin süpporu)  $\mathcal{B}$  bölgesini;  $v$  nin reel ve sanal kısımları da  $\varepsilon(x')$  ile  $\sigma(x')$  fonksiyonlarını belirlemeye olanak verecektir. Bu nedenle  $v(x')$  ye "cisim fonksiyonu" adı verilir. Burada incelenmekte olan problem,  $x_2 > 0$  bölgesindeki bazı noktalarda ölçülen  $u_D(x')$  değerlerinden hareketle (2.6) da yer alan  $v(x')$  fonksiyonunu bulmaktan ibarettir. Bu, distribüsyon anlamında yazılmış (2.6) ile ortaya konmuş olan problemi bir integral denkleme çevirerek yapılmaya çalışılır.

---

\* (2.8) ifadesi bütün uzayda anlamlıdır.  $\mathcal{D}$  nin dışında  $\varepsilon'(x') \equiv \varepsilon(x_2)$  dir.

## 2.2. Problemin Bir İntegral Denkleme İndirgenmesi

Şek. 2.2. de görülen iki parçalı uzaya ilişkin skaler Green fonksiyonu  $G(x', y')$  olsun. Bu fonksiyon, tanım uyarınca,

$$\Delta G + k^2(x_2)G = -\delta(x' - y') \quad (2.12)$$

denklemini distribüsyon anlamında ve radyasyon koşulu altında sağlar. (2.12) de gözüken  $y' = (y_1, y_2) \in R^2$  herhangi bir sabit noktadır ve  $\Delta G$  deki türetme işlemleri ise sadece  $x' = (x_1, x_2)$  ye göre yapılmaktadır.  $G(x', y')$  nin problemin amacına uygun bir açık ifadesi ileride, §2.3 de, çıkarılacaktır. Şimdi bunun bilindiği varsayılarak (2.6) nın  $G(x', y')$  ile çarpımı (2.12) nin  $u_D(x')$  ile çarpımından çıkarılsın. Böylece, önce

$$G(x', y')\Delta u_D(x') - u_D(x')\Delta G(x', y') = u_D(x')\delta(x' - y') - k^2(x_2)G(x', y')v(x')u(x')$$

sonra da, bu ifadenin iki yanı çok geniş bir  $|x'| \leq R$  dairesinde entegre edilerek,

$$\int_{|x'| \leq R} \{G\Delta u_D - u_D\Delta G\} dx' = u_D(y') - k_1^2 \int_{\mathcal{B}} G(x', y')v(x')u(x') dx' \quad (2.13)$$

yazılır. Bu ifade yazılırken  $R$  nin yeterince büyük olduğu düşünölmüştür\*. (2.6) ve (2.12) denklemlerinin distribüsyon anlamında geçerli olmaları,  $y_2 \neq 0$  oldukça hem  $u_D$  hem de  $G$  fonksiyonlarının ve türevlerinin  $x_2 = 0$  arakesit düzlemi üzerinde sürekli olmalarını gerektirir. Bu halde, klasik analizin çok iyi bilinen Stokes teoremi (2.13) ün sol yanında yer alan integral için de geçerli olur ve

$$\int_{|x'|=R} \left\{ G \frac{\partial u_D}{\partial n} - u_D \frac{\partial G}{\partial n} \right\} dl = u_D(y') - k_1^2 \int_{\mathcal{B}} G(x', y')v(x')u(x') dx' \quad (2.14)$$

yazılmasına olanak verir.

---

\*  $R, |x'| \leq R$  dairesi  $y'$  noktasını ve  $\mathcal{B}$  bölgesinin tümünü kapsıyacak şekilde seçilmelidir.

(2.14) ün sağ yanında gözüken terimler  $R$  yarıçapının büyüklüğünden bağımsızdır. O halde sol yan da  $R$  den bağımsız bir değere sahiptir. Sol yanda  $R \rightarrow \infty$  yapılarak bu değer in sıfırdan başka bir şey olmadığını göstermek mümkündür. Gerçekten, hem  $u_D$  nin hem de  $G$  nin kaynağı sonlu bölgeler içinde kaldığından\*, bunların sağlamamak zorunda oldukları radyasyon koşulu nedeniyle,  $x_2 > 0$  bölgesinde

$$u_D(x') \sim \frac{e^{ik_0 r}}{\sqrt{r}} \left\{ f_0(\phi) + \frac{f_1(\phi)}{r} + \dots \right\}$$

$$G(x', y') \sim \frac{e^{ik_0 r}}{\sqrt{r}} \left\{ g_0(\phi) + \frac{g_1(\phi)}{r} + \dots \right\}$$

ve

$$G \frac{\partial u_D}{\partial r} - u_D \frac{\partial G}{\partial r} \sim \frac{e^{2ik_0 r}}{r^3} \{ [f_0(\phi)g_1(\phi) - f_1(\phi)g_0(\phi)] + O(1/r) \} \quad (2.15)$$

yazılır. Burada  $r = |x'|$  konmuştur. Bir benzer bağıntı da  $x_2 < 0$  bölgesi için yazılabilir.  $|x'| = R$  dairesi üzerinde  $dl = R d\phi$  olduğundan, (2.15) bağıntısı  $R \rightarrow \infty$  için (2.14) ün sol yanının en azından  $1/R^2$  gibi sıfıra gideceğini gösterir. Bu ise, yukarıda yapılmış bulunan açıklama nedeniyle, (2.14) ün sol yanının özdeşleymen sıfır olduğunu ve, dolayısıyla,

$$u_D(y') = k_1^2 \int_{\mathcal{B}} G(x', y') v(x') u(x') dx'$$

yazılabileceğini gösterir. Bu formülü daha kullanışlı bir biçime sokmuş olmak için  $x'$  yerine  $y'$ ,  $y'$  yerine de  $x'$  konsun ve Green fonksiyonunun

$$G(x', y') \equiv G(y', x')$$

simetri koşulunu her zaman sağlamakta olduğu göz önünde bulundursun. Böylece,

$$u_D(x') = k_1^2 \int_{\mathcal{B}} G(x', y') v(y') u(y') dy' \quad (2.16)$$

yazılır. Bundan sonraki inceleme bu integral denkleme dayanacaktır. Yalnız, incelemeyi daha fazla ilerletmeden evvel, Green fonksiyonunun işlemeye elverişli bir açık ifadesi bulunmaya çalışılacaktır.

---

\*  $G$  nin kaynağı sadece  $y'$  noktasında (sonsuz uzun doğru !),  $u_D$  nin kaynağı da  $\mathcal{B}$  bölgesindedir.

### 2.3. Green Fonksiyonunun Bir Açık İfadesi

(2.16) da gözüken  $G(x', y')$  fonksiyonu, (2.12) denkleminin radyasyon koşuluna uyan biricik çözümdür. Bunun bir açık ifadesini kolayca elde edebilmek için (2.12) nin  $x_1 \in (-\infty, \infty)$  koordinatı bakımından Fourier dönüşümü göz önüne alınsın. Eğer  $G(x', y')$  nin dönüşüğü

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x_1, x_2, y') e^{-i\nu x_1} dx_1 = \hat{G}(\nu, x_2, y') \quad (2.17)$$

olarak tanımlanırsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G(x_1, x_2, y') e^{-i\nu x_1} dx_1 = -\nu^2 \hat{G}(\nu, x_2, y')$$

olur ve (2.12) denklemini

$$\frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial x_2^2} - [\nu^2 - k^2(x_2)] \hat{G} = -e^{-i\nu y_1} \delta(x_2 - y_2) \quad (2.18)$$

ye dönüşür. (2.17) yi anlamlı yapan  $\nu$  değerlerinin oluşturduğu bölgeyi, daha başka bir deyişle,  $\hat{G}$  nin regülerlik şeridini, kolayca belirleyebilmek ve buna bağlı olarak da (2.18) den  $\hat{G}$  nin bir açık ifadesini çıkarabilmek için önce  $x_2 > 0$  bölgesinin küçük bir iletkenliğinin bulunduğu kabul edilir ve sonra da bu iletkenliği sıfıra götürerek regülerlik bölgesinin nasıl yozlaştığı incelenir.  $G(x', y')$  nin kaynağı  $\{x|x' = y', x_3 \in (-\infty, \infty)\}$  çizgisi üzerinde bulunduğundan,  $x_2 > 0$  bölgesinde  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  olurken

$$G(x', y') \sim A e^{ik_0|x_1|} / \sqrt{x_1}$$

olur ve (2.17) deki integralin yakınsaması için, aynı anda,

$$\Re\{i(k_0 - \nu)\} < 0 \quad , \quad \Re\{i(k_0 + \nu)\} < 0$$

olması gerekir. Bunlar  $x_2 > 0$  bölgesinde geçerli ifadelerde  $\nu$  nün

$$-\Im k_0 < \Im \nu < \Im k_0 \quad (2.19a)$$

şeridi içinde bulunması gerektiğini gösterir. Aynı şekilde,  $x_2 < 0$  bölgesindeki ifadeler de

$$-\Im m k_1 < \Im m \nu < \Im m k_1 \quad (2.19b)$$

in gerçekleşmesini gerektirir.

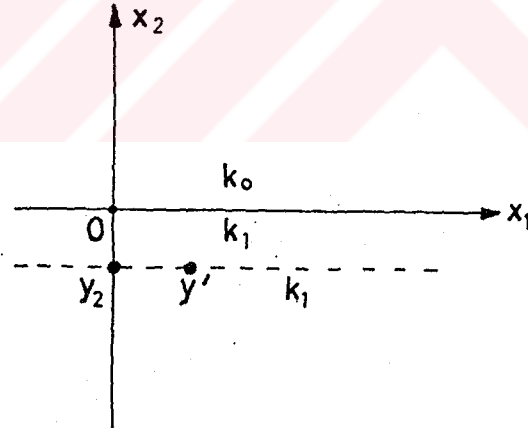
Şimdi (2.18) denklemi yeniden ele alınsın. Bu denklemde yer alan  $k^2(x_2)$  fonksiyonunun  $x_2 = 0$  düzleminin üstünde ve altında farklı ifadelerle sahibolması, çözümün de bu bölgelerde farklı biçimlere sahibolmasına neden olacaktır. Öte yandan  $G$  nin yer aldığı (2.16) denklemi de  $G$  nin sadece  $y_2 < 0$  bölgesi için geçerli ifadelerine gereksinim göstermektedir (bk.şekil 2-3). Bunlar göz önüne alınarak

$$\hat{G}(\nu, x_2, y') = \begin{cases} Ae^{\sqrt{\nu^2 - k_0^2} x_2} + Be^{-\sqrt{\nu^2 - k_0^2} x_2}, & x_2 > 0 \\ Ce^{\sqrt{\nu^2 - k_1^2} x_2} + De^{-\sqrt{\nu^2 - k_1^2} x_2}, & x_2 \in (y_2, 0) \\ Ee^{\sqrt{\nu^2 - k_1^2} x_2} + Fe^{-\sqrt{\nu^2 - k_1^2} x_2}, & x_2 < y_2 \end{cases} \quad (2.20a)$$

$$(2.20b)$$

$$(2.20c)$$

yazılır.



Şekil 2-3. Green fonksiyonuna ilişkin bölgeler.

(2.18) denklemine uygun olarak yazılan bu ifadelerin belirli anlamları olabilmesi için, bu ifadelerde gözükten kare-kök fonksiyonlarının açık bir biçimde tanımlanması gerekir. Bu fonksiyonların şek. 2.4 deki gibi kesilmiş  $\nu$  - düzleminde  $\nu \rightarrow 0$  olurken

$$\sqrt{\nu^2 - k_0^2} \rightarrow -ik_0 \quad (2.21a)$$

ve

$$\sqrt{\nu^2 - k_1^2} \rightarrow -ik_1 \quad (2.21b)$$

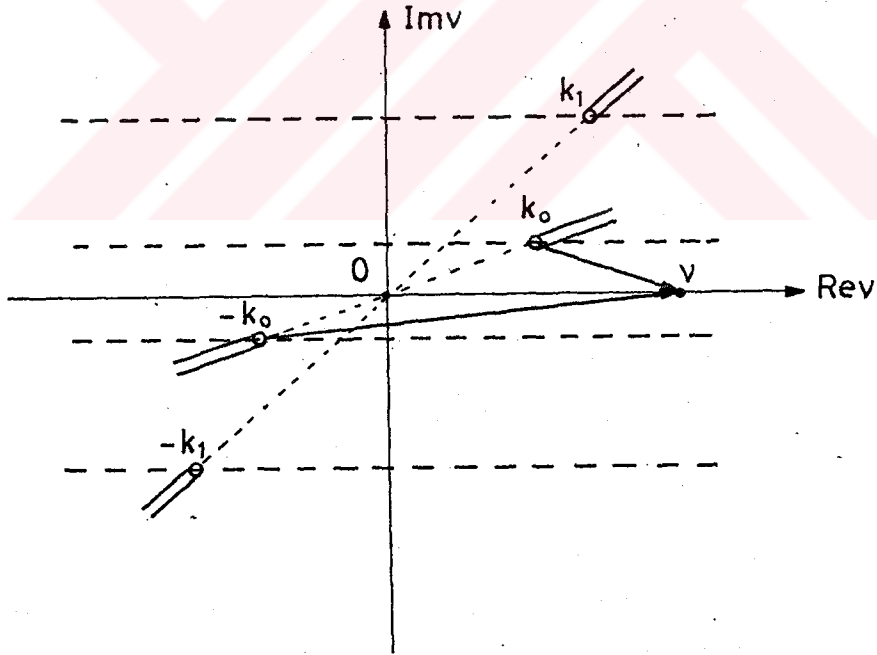
olacak şekilde tanımlı oldukları göz önüne alınacaktır. Bu halde, (2.19 a,b) ile tanımlı bulunan regüerlik şeritleri içinde  $\nu \rightarrow \infty$  olurken

$$\Re \left\{ \sqrt{\nu^2 - k_0^2} \right\} \rightarrow +\infty \quad (2.22a)$$

ve

$$\Re \left\{ \sqrt{\nu^2 - k_1^2} \right\} \rightarrow +\infty \quad (2.22b)$$

olur.



Şekil 2-4.  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$  halinde kesilmiş  $\nu$  - düzlemi

(2.20a,b,c) de yer alan A,B,...,F sabitleri, hem  $x_2 \rightarrow \pm\infty$  olurken (2.20a) ve (2.20c) nin sınırlı kalması hem de  $x_2 = 0$  ve  $x_2 = y_2$  düzlemleri

üzerinde sağlanması gereken sınır koşulları göz önüne alınarak belirlenecektir.  $x_2 \rightarrow \pm\infty$  daki koşullar, her şeyden önce,

$$A = F = 0 \quad (2.23a)$$

olmasını gerektirir. Çünkü, yukarıda sözü edilen regülerlik şartları içinde  $\Re e \left\{ \sqrt{\nu^2 - k_0^2} \right\}$  ve  $\Re e \left\{ \sqrt{\nu^2 - k_1^2} \right\}$  pozitiftir. Öte yandan,  $x_2 = 0$  ve  $x_2 = y_2$  deki sınır koşulları da açık olarak

$$\hat{G}(\nu, +0, y') = \hat{G}(\nu, -0, y')$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \hat{G}(\nu, +0, y') = \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{G}(\nu, -0, y')$$

$$\hat{G}(\nu, y_2 + 0, y') = \hat{G}(\nu, y_2 - 0, y')$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \hat{G}(\nu, y_2 + 0, y') - \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{G}(\nu, y_2 - 0, y') = -e^{-i\nu y_1}$$

şeklinde yazılır ve

$$B = \frac{1}{a(\nu) + b(\nu)} e^{-i\nu y_1 + b(\nu) y_2} \quad (2.23b)$$

$$C = \frac{b(\nu) - a(\nu)}{2b(\nu) [a(\nu) + b(\nu)]} e^{-i\nu y_1 + b(\nu) y_2} \quad (2.23c)$$

$$D = \frac{1}{2b(\nu)} e^{-i\nu y_1 + b(\nu) y_2} \quad (2.23d)$$

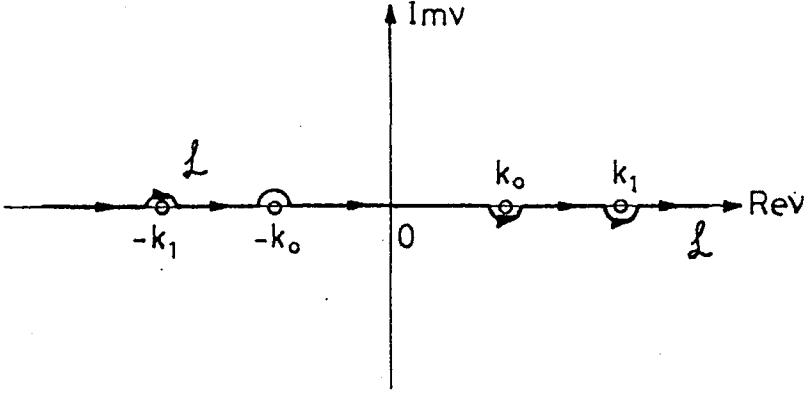
$$E = \frac{b(\nu) - a(\nu)}{2b(\nu) [a(\nu) + b(\nu)]} e^{-i\nu y_1 + b(\nu) y_2} + \frac{1}{2b(\nu)} e^{-i\nu y_1 - b(\nu) y_2} \quad (2.23e)$$

olmasını gerektirirler. Bu ifadelerde

$$\sqrt{\nu^2 - k_0^2} = a(\nu) \quad , \quad \sqrt{\nu^2 - k_1^2} = b(\nu) \quad (2.24)$$

konmuştur.

Şimdi, yukarıdaki bütün ifadelerde  $\Im m k_0 \rightarrow 0$  ve  $\Im m k_1 \rightarrow 0$  yapılsın. Bu durumda şekil 2-4 deki regülerlik şartları şekil 2-5 deki  $\mathcal{L}$  çizgisine (reel eksen!) yozlaşır (Şekil 2-5  $k_0 < k_1$  hali için çizilmiştir.  $k_0 > k_1$  halinde ne türden değişikliklerin olacağı açıktır!).



Şekil 2-5  $\Im m k_0 = 0$  ve  $\Im m k_1 = 0$  halinde  $\hat{G}$  nin regülerlik bölgesi

$G(x', y')$  nin bir açık ifadesi (2.20a-c) ve (2.30a-e) ile belirlenmiş olan  $\hat{G}$  nin ters dönüşümü hesaplanarak bulunur. Bu, şek.2.5 de gözüken  $\mathcal{L}$  çizgisi üzerinde yazılmış

$$G(x', y') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \hat{G}(\nu, x_2, y') e^{i\nu x_1} d\nu \quad (2.25)$$

integralinin hesaplanmasını gerektirir. Aşağıda belirtilecek nedenlerden ötürü, doğrudan doğruya (2.16) integral denkleminin ters çevrilmesine dayanan sayısal çözüm yöntemleri uygulama bakımından bir takım sakıncalara sahiptir. Bu nedenle biz, bunun yerine, (2.16) nın  $x_1$  bakımından Fourier dönüşüğü olan cebirsel denklemin ters çevrilmesine dayanan yeni bir yöntem geliştirmeye çalışacağız.

#### 2.4. Alanın Fourier Dönüşümü

(2.23b-e) ve (2.25) den de açıkça görüldüğü gibi  $G(x', y')$  fonksiyonunun  $x_1$  ve  $y_1$  e bağlılığı sadece  $(x_1 - y_1)$  farkı aracılığıyla olmaktadır. Başka bir deyişle,  $G$  fonksiyonu  $(x_1 - y_1)$  in bir fonksiyonudur. Bu temel özellik (2.16) nın sağ yanında yer alan  $y_1$  üzerindeki integralin  $G(x_1, x_2, 0, y_2)$  fonksiyonu ile  $[v(x_1, y_2)u(x_1, y_2)]$  fonksiyonunun konvolüsyonundan ibaret olduğunu gösterir; çünkü (2.16) daki integralin sonucunu etkilemeden  $\mathcal{B}$

yerine  $R^2$  konabilir. Bu durumda,

$$p(y') \equiv v(y')u(y') \quad (2.26)$$

alınarak ve (2.16) nın  $x_1$  için Fourier dönüşümü hesaplanarak

$$\hat{u}_D(\nu, x_2) = k_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\nu, x_2, 0, y_2) \hat{p}(\nu, y_2) dy_2 \quad (2.27)$$

yazılır.  $\hat{G}(\nu, x_2, 0, y_2)$  nin açık ifadesi önceki bölümde, (2.20a-c) ve (2.23a-e) de, oldukça basit sayılabilecek ifadeler şeklinde verilmiş olduğundan,  $\hat{p}(\nu, y_2)$  fonksiyonu (2.27) denkleminde "ayrıklaştırma" yöntemi ile sayısal olarak kolayca çözülebilir. Bu çözüm yöntemi aşağıda ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

## 2.5. Problemin Çözümü

Bu çalışmanın konusunu oluşturan problem, kısa bir deyişle, (2.16) denkleminin sol yanında yer alan fonsiyonun  $x_2 > 0$  bölgesinde bulunan belirli bir bölgede (çizgi, ayrık noktalar v.b.) bilindiğini varsayarak, bu denklemi  $v(x')$  için çözmekten ibarettir. Bu amaçla, değişik özel durumlarda başarı ile uygulanabilecek pek çok yöntem geliştirilmiştir. Burada bunların üzerinde, kısa da olsa durulmayacaktır. Bununla beraber, kullanılacak yöntemin konumunu açıklığa kavuşturabilmek için, oldukça geniş ilgi çekmiş bulunan iki grup yöntemin temel niteliklerinden kısaca söz etmek yararlı olacaktır. Bunlardan biri Born yaklaşıklığına dayanan kesin (exact) spektral yöntemler, diğeri de ayrıklaştırmaya dayanan sayısal "basit moment metodu"\* dur.

### 2.5.1. Born Yaklaşıklığına Dayalı Kesin Spektral Yöntemler

(2.16) denklemini ilk bakışta lineer gibi görünüyor ise de burada çözülmek istenen problem bakımından lineer değildir. Çünkü  $v(x')$  fonksiyonu

---

\*  $B$  içinde  $v(x')$  ve  $u(x')$  nin aynı anda belirlenmesini hedefleyen "iteratif teknikler" geliştirilmiştir. Örneğin bk.[8].

ile birlikte  $B$  bölgesi de belli değildir. Bu nedenle, kesin çözüm bulmaya elverişli yöntemler geliştirmek imkansız gibidir. Bu güçlükten ötürü değişik özel hallerde iyi bir yaklaşıklıkla uygulanabilecek olan "yaklaşık kesin yöntemler" geliştirilmiştir. Bunlar arasında da en çok ilgi çekmiş olanı Born yaklaşıklığına dayalı olan yöntemdir. Bu yaklaşıklık (2.16) nın sağ yanında yer alan toplam  $u(x')$  alanının yerine  $u_0(x')$  alanının konulmasını gerektirir ve, sonuç olarak,  $v(x')$  nin iki katlı Fourier dönüşümü olan  $\hat{v}(\nu_1, \nu_2)$  nın  $(\nu_1, \nu_2)$  - düzleminin belirli bir  $\mathcal{M}a$  bölgesi içindeki ifadesini açık olarak verir (bk.[9]). Bu yöntemlerin iyi ve kötü yanları şu şekilde sıralanabilir :

**A. Spektral Yöntemlerin İyi Yanları :**

- Bulunan kesin çözüm, problemin bir temel özelliğini oluşturan "ill-posed" luktan etkilenmez.
- $\hat{v}(\nu_1, \nu_2)$  fonksiyonu hem  $\nu_1$  hem de  $\nu_2$  bakımından, ayrı ayrı, tam fonksiyon olduğundan  $\mathcal{M}a$  nın sonlu bir bölge olması, kuramsal olarak,  $\hat{v}(\nu_1, \nu_2)$  nın bütün  $(\nu_1, \nu_2)$  - düzleminde biliniyor olması için yeterlidir (Analitik devam ilkesi).
- Sonuçların bilgisayara yüklenmesi kolaydır.

**B. Spektral Yöntemlerin Kötü Yanları :**

- Yöntemlerin temelini oluşturan Born yaklaşıklığı  $\mathcal{D}$  cismi içinde madde ile dalganın girişiminin zayıf olduğu hallerde (zayıf kontrast hali) geçerlidir. Bu, belirlenmesi istenen malzemeden daha çok kullanılan frekans üzerine bir kısıtlama getirir.
- Analitik devam ilkesinin bilgisayar desteğindeki sayısal uygulamaları, hiç olmazsa şimdilik, olanak dışı olduğundan, uygulamalarda  $\hat{v}(\nu_1, \nu_2)$  den  $v(x')$  ye geçişte ters Fourier integralinin sadece  $\mathcal{M}a$  üzerindeki kısmı ile yetinilmektedir. Bu, Born yaklaşıklığına eklenen yeni bir hatadır.
- Yöntemlerin çoğu farklı yönlerden (teorik olarak sonsuz sayıda) "gelen dalga" ile farklı noktalarda (teorik olarak sonsuz sayıda) yapılan ölçmelere gereksinim gösterir. Özellikle gelen dalganın değiştirilmesi pratik bakımdan güçlükler çıkarır.

### 2.5.2. Basit Moment Metodu

(2.16) denklemini ayrıklaştırma (discretization) ile, iki aşamada, oldukça basit bir şekilde çözülebilir. Gerçekten,  $\mathcal{B}$  bölgesini içine alan, dikdörtgen şeklinde bir  $\mathcal{B}'$  bölgesinin önceden tahmin edildiği ve bunun sek.2.6 da görülen biçimde  $N$  tane küçük hücreye ayrılmış olduğu düşünülün. Hücrelerin  $2d$  ve  $2h$  ile gösterilen kenar uzunlukları dalga boyuna göre öylesine küçük olsun ki; bu hücreler içinde  $u(\mathbf{x}')$  ve  $v(\mathbf{x}')$  nin değişimi ihmal edilebilecek kadar küçük olsun. Bu durumda, (2.16) denkleminin yerine, iyi bir yaklaşıklıkla,

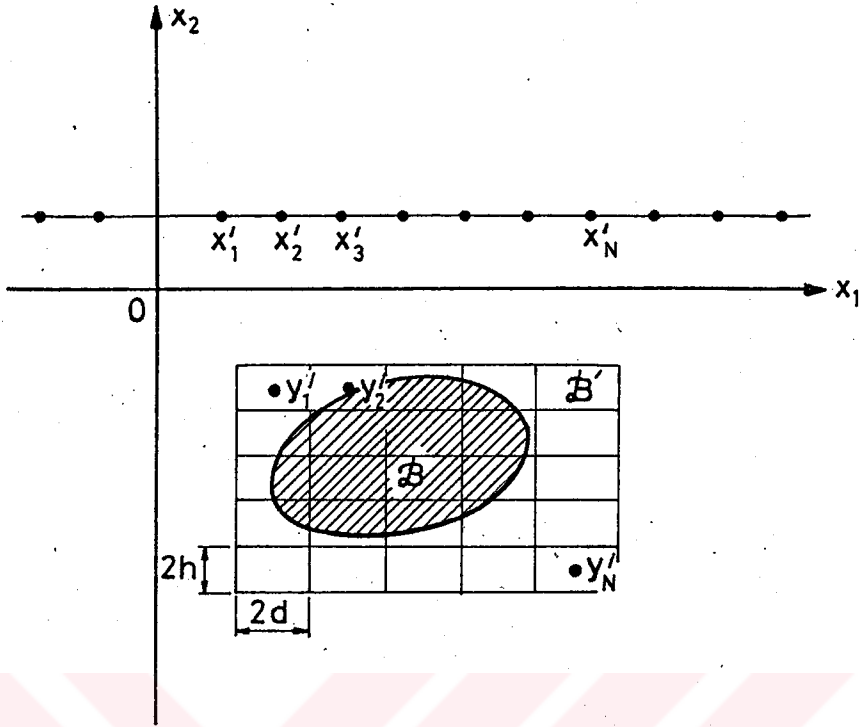
$$u_D(\mathbf{x}'_m) = k_1^2 \sum_{n=1}^N \int_{\mathcal{B}'_n} G(\mathbf{x}'_m, \mathbf{y}') p(\mathbf{y}'_n) d\mathbf{y}' , \quad m = 1, \dots, N \quad (2.28)$$

yazılabilir. Buradaki  $p(\mathbf{y}'_n)$  fonksiyonu (2.26) ifadesinden elde edilmiş

$$p(\mathbf{y}'_n) = v(\mathbf{y}'_n) u(\mathbf{y}'_n)$$

fonksiyonu,  $\mathbf{x}'_m$  noktaları  $x_2 > 0$  üst yarı - uzayında seçilmiş bulunan ve ölçmelerin yapıldığı noktalar,  $\mathbf{y}'_n$  ler ise  $\mathcal{B}'$  içindeki  $\mathcal{B}'_n$  hücrelerinin orta noktalarıdır. (2.28) denklemini ters çevrilerek, kolayca,  $p(\mathbf{y}'_n)$  değerleri çözülür. Bu, yöntemin yukarıda sözü edilen birinci aşamasıdır. İkinci aşamada bu  $p(\mathbf{y}'_n)$  değerleri (2.28) denkleminde  $u_D(\mathbf{y}'_m)$  yi bulmak için yerleştirilir. Bu, (2.28) de gözükten  $\mathbf{x}'_m$  noktalarının yerine  $\mathbf{y}'_m$  noktalarının konmasını ve  $m = n$  için  $G(\mathbf{y}'_m, \mathbf{y}') \equiv 0$  varsayılmasını gerektirir. Birinci aşamada bulunan  $p(\mathbf{y}'_n)$  değerleri ile ikinci aşamada bulunan  $u_D(\mathbf{y}'_n)$  değerleri hücrelerin orta noktalarında  $v(\mathbf{y}'_n)$  yi belirlemeye olanak verir :

$$v(\mathbf{y}'_n) = \frac{p(\mathbf{y}'_n)}{u(\mathbf{y}'_n)} = \frac{p(\mathbf{y}'_n)}{u_D(\mathbf{y}'_n) + u_0(\mathbf{y}'_n)} , \quad n = 1, \dots, N \quad (2.29)$$



Şekil 2-6.  $B'$  bölgesinin hücelere ayrılması .

Esasları çok kısa bir biçimde yukarıda açıklanmış bulunan ve, özellikle düz saçılma problemlerinin çözümünde büyük bir başarı ile çok sık kullanılan basit moment metodunun ters problemler yönünden bazı kötü yanları da vardır. Aşağıda bunlar, spektral yöntemlere olan üstünlükleriyle birlikte, kısaca belirtilmiştir.

A. Basit Moment Metodunun İyi Yanları :

- Genellikle her durumda, örneğin kontrast'ın zayıf olmadığı hallerde de uygulanabilir; frekans üzerine her hangi bir kısıtlama getirmez.
- Bir tek "gelen dalga" ile ölçme yapılması yeterlidir.

B. Basit Moment Metodunun Kötü Yanları :

- Şekil 2-6 da görülen hücrelemenin yapılabilmesi ve  $x'_1, \dots, x'_N$  ölçüm noktalarının seçilebilmesi için cismin konumu hakkında iyi bir ön tahmin gerekir.
- (2.28) denkleminin sağ yanı ile (2.16) nın sağ yanı arasındaki farkın küçük olması şek.2.6 da görülen hücrelerin boyutunun

dalga boyuna oranla çok küçük olmasını gerektirir. Düz problem söz konusu olduğunda sonuç üzerinde iyi etkiler yapan bu küçülme ters problem halinde kötü etkiler yapar. Çünkü, boyutların küçülmesi  $[\tilde{G}(x'_m, y'_n)]$  matrisinin sütunlarının birbirine çok yakın olmasına ve, bunun doğal bir sonucu olarak da, determinantının değerinin sıfıra yaklaşmasına neden olur. Aslında problemin "ill-posed" oluşunun bir neticesi olan bu özellik ölçülen değerlere karışan küçük hataların çok büyümüş olarak sonuçta belirmesine neden olur. Bunu önlemek amacıyla boyutların büyütülmesi ise "rezolüsyon" u azaltır.

- (2.28) de yer alan  $G(x', y')$  fonksiyonunun (2.25) ve (2.20a-c) ile verilen açık ifadesi sayısal hesaba elverişli değildir.

### 2.5.3. Bir Hibrid Yöntem

Yukarıdaki kısa açıklamalar hem  $v(x')$  fonksiyonunun Fourier dönüşüne dayanan spektral yöntemlerin hem de böyle bir dönüşüme başvurma-yan basit moment metodunun iyi ve kötü yanlarının olduğunu göstermektedir. Şimdi biz bu yöntemlerin ikisini, kötü yanlarını azaltacak şekilde birbirleriyle kaynaştırarak bir "hibrid" yöntem geliştirmeye çalışacağız. Bu yöntemin temel özellikleri şunlar olacaktır :

- $G(x', y')$  fonksiyonuna değil  $\hat{G}(\nu, x_2, y')$  fonksiyonuna dayalı olacaktır.
- $B'$  bölgesi yeter derecede ince şeritlere ayrılacak ve bu şeritler içinde  $p(y')$  fonksiyonunun ifadesi, ayrı ayrı, elde edilmeye çalışılacaktır (Bk.şekil 2-7). Şeritlerin  $2h$  kalınlığı dalga boyuna göre öylesine küçük seçilecektir ki; şeritler içinde  $p(y')$  nin  $y_2$  ile değişimi ihmal edilebilecek durumda olacaktır ( $h$  nin seçiminde şüphesiz,  $B$  yi oluşturan malzemenin özelliklerinin  $y_2$  ile değişiminin biçimi de etkilidir.). Bu halde,  $n$  yinci şeritte

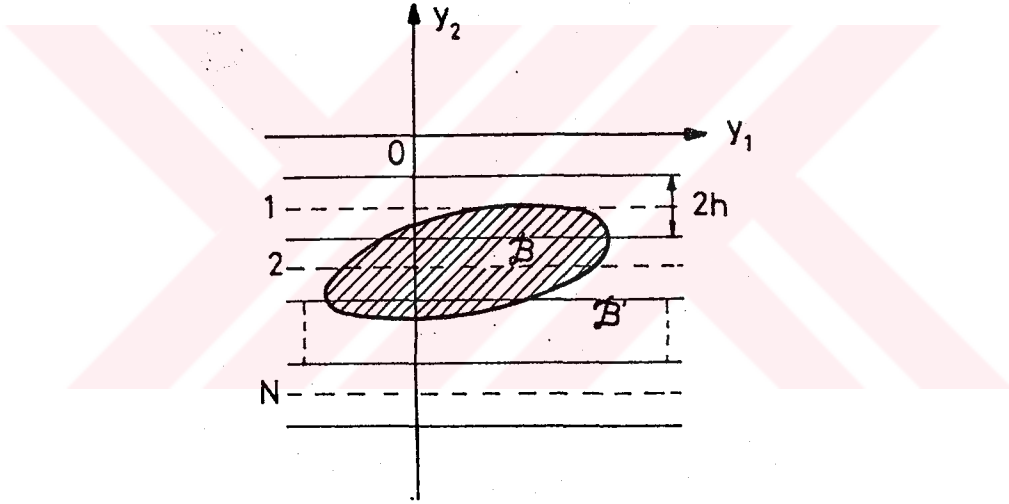
$$p(y') \simeq p(y_1, y_{n2}) , \quad n = 1, \dots, N \quad (2.30)$$

yazılabilecektir.

- (2.30) un sağında yer alan fonksiyonun, uygun bir şekilde seçilmiş bir  $\{\phi_m(y_1)\}$  baz sistemindeki

$$p(y_1, y_{n2}) = \sum_{m=-M}^M A_{nm} \phi_m(y_1) , \quad n = 1, \dots, N \quad (2.31)$$

ifadesinin bulunulmasına çalışılacaktır. Buradaki  $\phi_m(y_1)$  ile gösterilen fonksiyonlar öyle seçilecektir ki; bunlara ilişkin  $\hat{\phi}_m(\nu)$  Fourier dönüşümleri sonlu band genişliğinde olacak ve  $D$  ile gösterilecek olan bu band genişliği  $k_0$  dan daha büyük olmayacaktır. Bu husus biraz daha sonra, §2.5.4 de, oldukça ayrıntılı bir şekilde ele alınacaktır.



Şekil 2-7.  $B'$  bölgesinin şeritlere ayrılması

Şimdi, yukarıda açıklanan biçimde şeritlere ayırma işleminin yapıldığı ve  $\phi_m(y_1)$  fonksiyonlarının da seçildiği varsayalım. Bu durumda, (2.31) ifadesi (2.27) ye taşınırsa,

$$\hat{u}_D(\nu, x_2) = k_1^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-M}^M A_{nm} \hat{\phi}_m(\nu) \int_{y_{n2}-h}^{y_{n2}+h} \hat{G}(\nu, x_2, 0, y_2) dy_2 \quad (2.32)$$

yazılır. Bu denklemin sağ yanında  $(2M + 1) \times N$  sayıda, bilinmeyen  $A_{nm}$  katsayısı vardır. Bunları belirlemeye yarıyacak sayıda denklem elde

edebilmek için  $\nu$  parametresine aynı sayıda, farklı,  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{(2M+1) \times N}$  değerleri verilerek bir lineer denklem takımı oluşturulmalıdır. Eğer bu,  $\hat{G}$ 'nin (2.20a) daki ifadesi de göz önünde bulundurularak yapılacak olursa, sonuç, toplu bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} Q_{1(-M)}^1 & \cdots & Q_{1M}^1 & \cdots & Q_{N(-M)}^1 & \cdots & Q_{NM}^1 \\ Q_{1(-M)}^2 & \cdots & Q_{1M}^2 & \cdots & Q_{N(-M)}^2 & \cdots & Q_{NM}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{1(-M)}^i & \cdots & Q_{1M}^i & \cdots & Q_{N(-M)}^i & \cdots & Q_{NM}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{1(-M)}^{N(2M+1)} & \cdots & Q_{1M}^{N(2M+1)} & \cdots & Q_{N(-M)}^{N(2M+1)} & \cdots & Q_{NM}^{N(2M+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1(-M)} \\ \vdots \\ A_{1(M)} \\ \vdots \\ A_{N(-M)} \\ \vdots \\ A_{N(M)} \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} P^1 \\ P^2 \\ \vdots \\ P^i \\ \vdots \\ P^{N(2M+1)} \end{bmatrix}. \tag{2.33a}
 \end{aligned}$$

Burada,  $i = 1, 2, \dots, (2M + 1) \times N$ ,  $n = 1, \dots, N$  ve  $m = -M, \dots, M$  olmak üzere,

$$Q_{nm}^i = k_1 \int_{y_{n2}-h}^{y_{n2}+h} e^{b(\nu_i)y_2} dy_2 \cdot \hat{\phi}_m(\nu_i) = \frac{2k_1}{b(\nu_i)} e^{b(\nu_i)y_{n2}} \sinh(b(\nu_i)h) \cdot \hat{\phi}_m(\nu_i) \tag{2.33b}$$

ve

$$P^i = \frac{1}{k_1} [a(\nu_i) + b(\nu_i)] e^{a(\nu_i)x_2} \hat{u}_D(\nu_i, x_2) \tag{2.33c}$$

konmuştur.

(2.33a-c) sistemi çözülerek  $A_{nm}$  sabitleri belirlenecek olursa, önce (2.31) yardımıyla her şerit içinde  $p(y_1, y_{n2})$  fonksiyonu belirlenir, sonra da,  $x' \in \mathcal{B}'$  için hesaplanacak (2.27) yardımıyla  $\hat{u}_D(\nu, x_{n2})$  ve  $u_D(x_1, x_{n2})$  bulunur :

$$\hat{u}_D(\nu, \mathbf{x}_{n2}) = k_1^2 \sum_{j=1}^N \sum_{m=-M}^M A_{jm} \hat{\phi}_m(\nu) \int_{y_{j2-h}}^{y_{j2+h}} \hat{G}(\nu, \mathbf{x}_{n2}, 0, y_2) dy_2$$

$$n = 1, \dots, N \quad (2.34a)$$

$$u_D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_D(\nu, \mathbf{x}_{n2}) e^{i\nu x_1} d\nu \quad , \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.34b)$$

Son olarak bunlar (2.26) ya taşınmakla, aranan  $v(\mathbf{x}')$  fonksiyonunun  $n$  yinci şerit içindeki değeri bulunmuş olur :

$$v(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n2}) = \frac{p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n2})}{u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n2})}$$

$$= \frac{p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n2})}{u_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n2}) + u_D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n2})} \quad (2.35)$$

#### 2.5.4. Baz Fonksiyonlarının Seçimi

(2.33a) denkleminin sağında yer alan  $P^i$  büyüklüğü, (2.33c) den açıkça görüldüğü gibi,  $\exp\{a(\nu_i)x_2\}$  şeklinde bir çarpan içerir ve  $|\nu_i| > k_0$  olduğunda üstel olarak sınırsız büyür. Bu büyüme, ölçü ile elde edilecek olan  $\hat{u}_D(\nu_i, \mathbf{x}_2)$  ye karışmış bulunan küçük hataların, yüksek frekanslarda, sonuç üzerindeki etkilerinin büyük olmasına neden olur. Burada incelenmekte olan ters problemin "ill-posed" oluşunun nedeni de temelde budur. Düz problem halinde sağ yanda yer alan bu çarpan üstel olarak sönen bir davranış gösterir ve, böylece, düz problemin "well-posed" olmasına neden olur.

Yukarıda belirtilen "ill-posed" luk etkisini azaltmak için (2.33a) daki  $\nu_i$  değerlerini,

$$|\nu_i| \leq k_0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, (2M + 1) \times N \quad (2.36)$$

koşulunu sağlayacak şekilde seçmek iyi bir davranış olabilir. Yalnız, bu iş yapılırken şuna da dikkat etmek gerekir ki; (2.33a) nın iki yanında yer alan

fonksiyonlar geniş spektrumlu fonksiyonlar iken bunu yapmak, sonuçta büyük hatalarla karşılaşmaya neden olur. Çünkü; (2.32) denkleminde ki  $A_{nm}$  sabitleri, bu denklemin orijinali olan (2.16) yı her  $x_1 \in R$  için özdeşleyin sağlayacak şekilde belirtilmelidirler. Bu ise, (2.27) nin (veya, (2.32) nin) her  $\nu \in \mathcal{L}$  için sağlanmasını gerektirir. Eğer, denklemlerde yer alan fonksiyonların Fourier dönüşümleri sonlu "duration" a sahip iseler,  $\mathcal{L}$  nin sadece sonlu bir parçasını göz önüne alarak hesapları yürütmek oldukça iyi sonuçlar verir. Bu yüzden, (2.31) de gözüken  $\phi_m(y_1)$  baz fonksiyonları sonlu "süppor" lu ve sonlu "duration" lı fonksiyonlar olacak biçimde belirlenecektir; öyle ki, bunların  $D$  ile gösterilecek olan durationları, (2.36) nın gerektirdiği

$$D \leq k_0 \quad (2.37)$$

koşulunu sağlasın. Buradaki  $D$ , bilindiği gibi,

$$D^2 = \frac{1}{2\pi \|\phi_m\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |\hat{\phi}_m(\nu)|^2 d\nu \quad (2.38a)$$

ile tanımlıdır [10]. (2.38a) daki  $\|\phi_m\|^2$ ,  $\phi_m$  nin enerjisi olarak adlandırılır ve

$$\|\phi_m\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^2(y_1) dy_1 \quad (2.38b)$$

ile verilir.

$\phi_m(y_1)$  fonksiyonlarının yukarıda sözü edilen süpporlarının  $(2d)$  genişliğinde olduğu varsayalım ve bunlardan biri, örneğin  $\phi_0(y_1)$  için bu süppor  $(-d,d)$  den ibaret olsun. Bu halde,  $\phi_0(y_1)$  i, (2.38a) ile tanımlı bulunan  $D$  yi minimum yapacak şekilde belirlemek mümkündür. Şimdi bu  $\phi_0(y_1)$  fonksiyonu bulunmaya çalışalım.

(2.38a) yı minimum yapan fonksiyon  $\phi_0(y_1)$ , bunun (2.38b) ile hesaplanan enerjisi de  $E$  olsun. Bu halde, (2.38a,b) ile ortaya konmuş bulunan varyasyon problemi,

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |\hat{\phi}_0(\nu)|^2 d\nu \equiv \int_{-d}^d [\phi_0'(\xi)]^2 d\xi \quad (2.39a)$$

nın

$$\int_{-d}^d \phi_0^2(\xi) d\xi - E = 0 \quad (2.39b)$$

koşulu altında minimumunun aranması problemine denk olur. Burada, bu problemin

$$\phi_0(d) = \phi_0(-d) = 0 \quad (2.39c)$$

sınır koşullarına uyan çözümü aranacaktır. Bu türden problemlerde, iyice bilindiği gibi [11], (2.39b) gibi yan koşullar, değeri önceden belli olmayan (sınır koşulları aracılığıyla sonradan belirlenecek olan) bir  $\lambda$  sabiti ile (2.39a) ya katılır ve problem her zaman,

$$J(\phi_0) = \int_{-d}^d [\phi_0'^2 - \lambda \phi_0^2] d\xi$$

fonksiyonelinin  $\{\phi_0(\xi) \mid \phi_0 \in C^2(-d, d), \phi_0(d) = \phi_0(-d) = 0\}$  uzayındaki serbest minimumunun aranmasına indirgenir. Bu probleme ilişkin Euler denklemi

$$\phi_0'' + \lambda \phi_0 = 0 \quad (2.40a)$$

dan ibaret olduğundan,  $\phi_0(\xi)$  fonksiyonu

$$\phi_0(\xi) = A \cos \sqrt{\lambda} \xi + B \sin \sqrt{\lambda} \xi \quad (2.40b)$$

şeklindedir. Buradaki  $A$  ve  $B$ ,  $E$  enerjisi belli olunca (2.39b) ile belirlenecek olan integrasyon sabitleridirler. Bunların sayısal değeri önemli değildir.

Yukarıdaki ifadelerde gözüken  $\lambda$  sabitini belirleyebilmek için (2.40b) ile verilen  $\phi_0$  fonksiyonunun (2.39c) sınır koşullarını da sağlamakta olduğu yazılırsa, farklı iki sonuç elde edilebilir :

$A = 0$ ,  $\sin \sqrt{\lambda}d = 0$  hali.

Böyle bir durumda,

$$\phi_0(\xi) = B \sin \frac{n\pi}{d} \xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.41a)$$

ve

$$\frac{I}{E} = \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 \quad (2.41b)$$

dir.  $(I/E)$  nin minimum değerinin  $n = 1$  için sağlandığı ve  $(\pi/d)^2$  ye eşit olduğu açıkça görülmektedir.

$B = 0$ ,  $\cos \sqrt{\lambda}d = 0$  hali.

Bu halde de

$$\phi_0(\xi) = A \cos(2n + 1) \frac{\pi}{2d} \xi, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.42a)$$

ve

$$\frac{I}{E} = (2n + 1)^2 \left( \frac{\pi}{2d} \right)^2 \quad (2.42b)$$

dir. Bunun da  $n = 0$  için  $(\pi/2d)^2$  ye eşit bir minimuma sahip olduğu açıkça görülmektedir.

Yukarıdaki sonuçlardan açıkça görülüyor ki; ikinci halde ortaya çıkan minimum değer birinci haldekinin dörtte biri kadardır. Bu, aranan  $\phi_0(y_1)$  fonksiyonunun

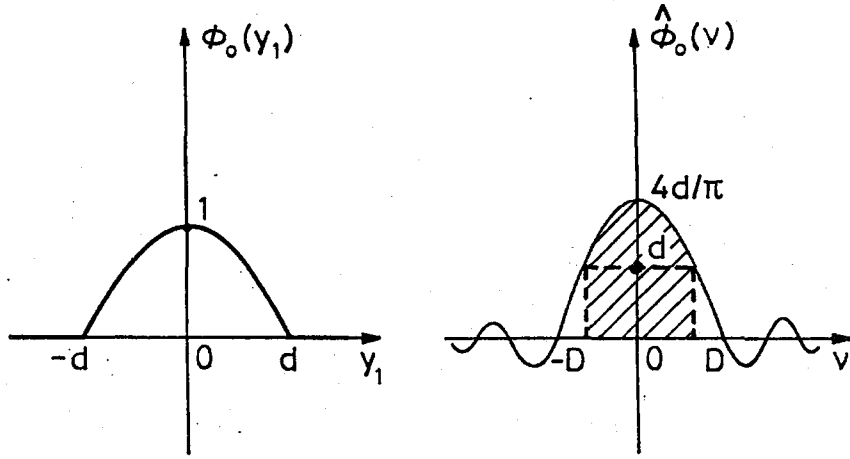
$$\phi_0(y_1) = \begin{cases} \cos \frac{\pi y_1}{2d} & , \quad |y_1| \leq d \\ 0 & , \quad |y_1| > d \end{cases} \quad (2.43a)$$

den ibaret olduğunu ve buna ilişkin  $\hat{\phi}_0(\nu)$  dönüşümü ile  $D$  "duration" ının

$$\hat{\phi}_0(\nu) = \frac{\pi}{d} \frac{\cos d\nu}{(\pi/2d)^2 - \nu^2} \quad (2.43b)$$

$$D = \frac{\pi}{2d} \quad (2.43c)$$

ile verildiğini gösterir (Bak.şekil 2-8).



Şekil 2-8.  $\phi_0(y_1)$  ve  $\hat{\phi}_0(v)$  nün değişimi.

Şimdi (2.37) koşuluna geri dönelim. Bu koşulun sağlanabilmesi için, (2.43c) uyarınca,

$$d = \frac{\pi}{2D} \geq \frac{\pi}{2k_0} = \frac{\pi}{2(2\pi/\lambda_0)} = \frac{\lambda_0}{4} \quad (2.44)$$

olması gerekir.

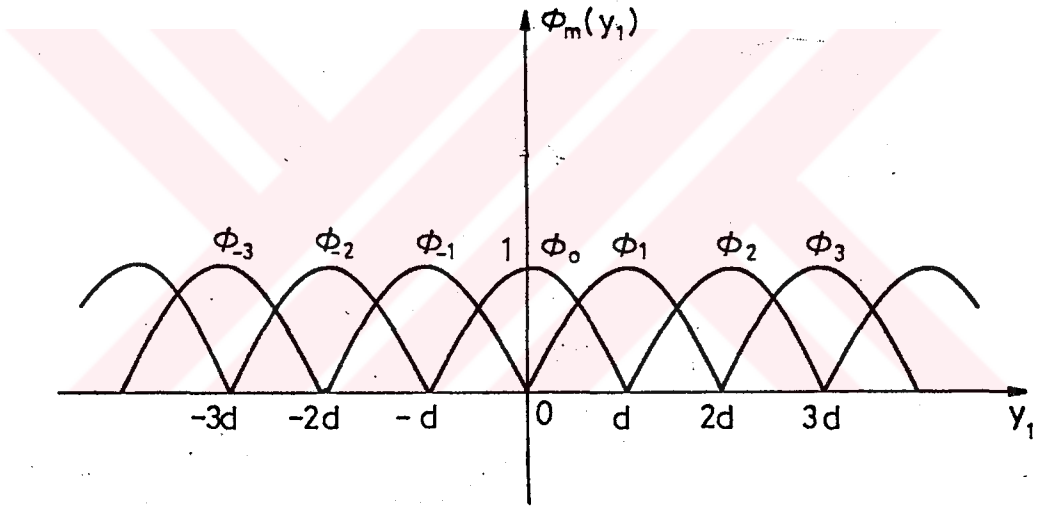
$\{\phi_m\}$  dizisinin diğer elemanları yukarıdaki  $\phi_0(y_1)$  fonksiyonunun sağa ve sola  $d$  kadar ötelenmişleri olarak tanımlanabilirler (Bak.şekil 2-9). Bu halde,

$$\begin{aligned} \phi_m(y_1) &= \phi_0(y_1 - md) \\ \hat{\phi}_m(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(y_1) e^{-i\nu y_1} dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(y_1 - md) e^{-i\nu y_1} dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\xi) e^{-i\nu(\xi + md)} d\xi \\ &= e^{-imdv} \hat{\phi}_0(v) \end{aligned} \quad (2.45a)$$

ve

$$\begin{aligned}
 \|\phi_m\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^2(y_1) dy_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(y_1 - md) dy_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(\xi) d\xi \\
 &= \|\phi_0\|^2
 \end{aligned} \tag{2.45b}$$

olduğundan, bütün  $\phi_m(y_1)$  fonksiyonlarının "duration"ları  $D$  ye eşit olur.



Şekil 2-9. Baz fonksiyonları.

Uyarılar :

- 1)  $y_1 = md$  noktasında  $\phi_m(md) = 1$  olduğundan, (2.31) açılımındaki  $A_{nm}$  katsayıları ( $y_1 = md, y_2 = y_{n2}$ ) noktasında  $p(y')$  fonksiyonunun aldığı değere eşittir:

$$p(md, x_{n2}) = A_{nm}$$

- 2)  $\phi_m(y_1)$  fonksiyonlarının özel durumu, bir bakıma,  $B'$  bölgesini  $2h$  genişliğinde ve  $2d$  uzunluğunda hücrelere bölmek gibi bir sonuç

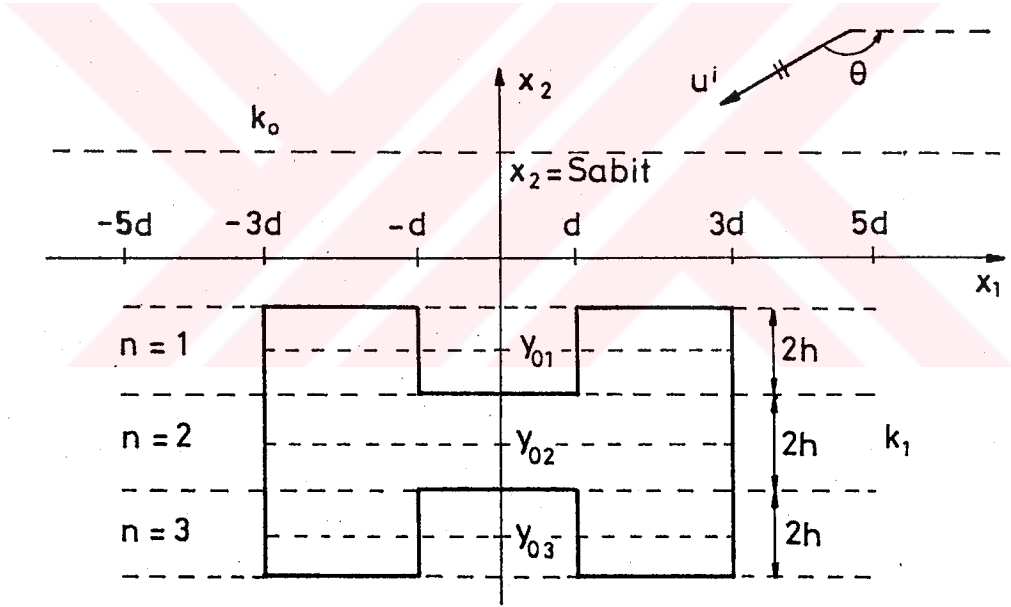
ortaya koymaktadır. (2.31) açılımı bu hücrelerin içinde  $p(y')$  fonksiyonunun ardışık üç  $\{\phi_m\}$  fonksiyonu ile ifade edilmesinden başka bir şey değildir.



## BÖLÜM 3

### ÖRNEK UYGULAMALAR

Esasları önceki bölümde oldukça ayrıntılı bir biçimde açıklanmış bulunan hibrid yöntemin uygulanabilirliği ve etkinliği hakkında bir fikir edinebilmek için bu yöntemi, kesiti şekil 3.1. de görülen özel hale uygulayalım. Bu özel şekil, şeritler içinde  $v$  fonksiyonunun süpporunun çok parçalı



şekil 3.1. Örnek bir durum

olması halini de içerdiğinden, oldukça ilginç ve önemlidir.

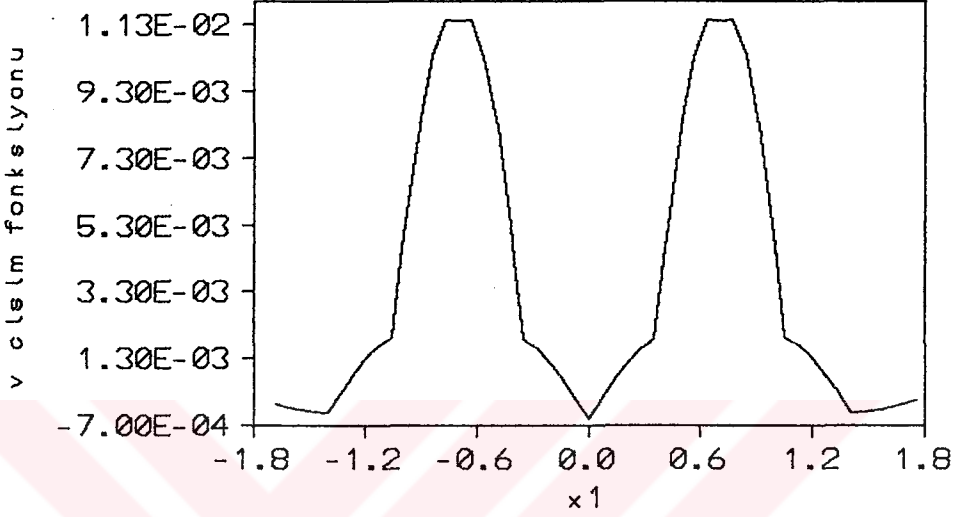
Çözümün bulunması, her şeyden önce, (2.31) ve (2.34a) da yer alan  $A_{nm}$  katsayılarının belirlenmesini gerektirir. Bunlar da (2.33a) denkleminde bulunacaktır. Bu denklemin sağında yer alan  $P^i$  değerleri gerçek uygulamalarda  $x_2 = sabit > 0$  çizgisi üzerinde yapılan ölçmelerle elde edilen  $u(x_1, x_2)$  değerlerinden hareketle (2.33c) aracılığıyla hesap edilirler. Biz, burada, sözü edilen değerleri yapay yolla, düz saçılma probleminin

iyi bir yaklaşıklık çözümünü kullanarak, bulmaya çalışacağız. Buna ilişkin ayrıntılar tezin sonundaki EK A bölümünde verilmiştir.

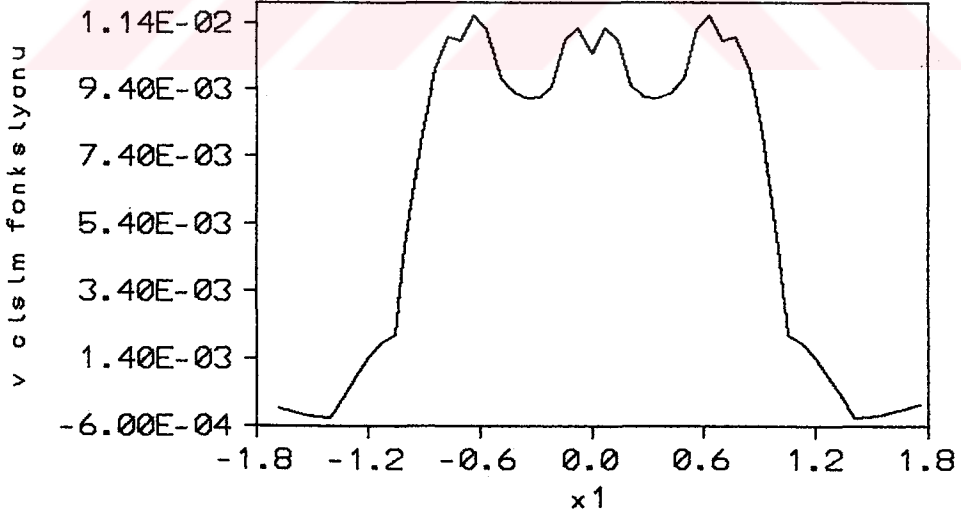
Şekil 3.1. deki örnekte gözüken parametrelerin değişik değerlerine karşı gelen bazı sonuçlar şekil 3.2.-3.25. de gösterilmiştir. Bu sonuçlardan şekil 3.2.-3.17. de gözükenler gürültüsüz data haline, şekil 3.18.-3.25. de görünenler ise gürültülü data haline ilişkin sonuçlardır. Aşağıda elde edilen tüm sonuçlarda şekil 3.1. de gözüken  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $x_2$  ve  $y_{02}$  parametreleri,  $k_0 = 6.283 \text{ rad/m}$ ,  $k_1 = 7.354 \text{ rad/m}$ ,  $x_2 = 0.25 \text{ m}$  ve  $|y_{02}| = 0.65 \text{ m}$  gibi sabit değerlerde tutularak  $\theta$ ,  $d$  ve  $h$  parametreleri değiştirilmiştir. Ayrıca örnekteki gömülü cisme ilişkin cisim fonksiyonu için de  $v = 0.01$  değeri göz önüne alınmıştır.



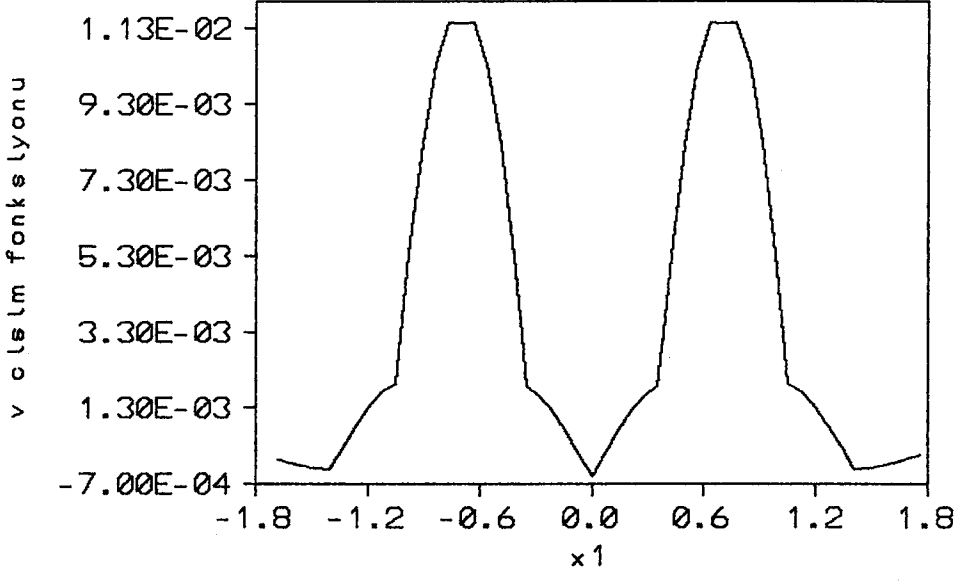
A) Şekil 3.2-3.5. de  $h = 0.05 \text{ m}$ ,  $d = 0.35 \text{ m}$ ,  $\theta = -90^\circ$  haline ilişkin elde edilen sonuçlar gözükmetedir. Bulunan değerlerden de anlaşılacağı gibi tezde ortaya konmuş olan hibrid yöntem çok iyi bir yaklaşıklıkla gömülü örnek cisimi tanımlamaktadır.



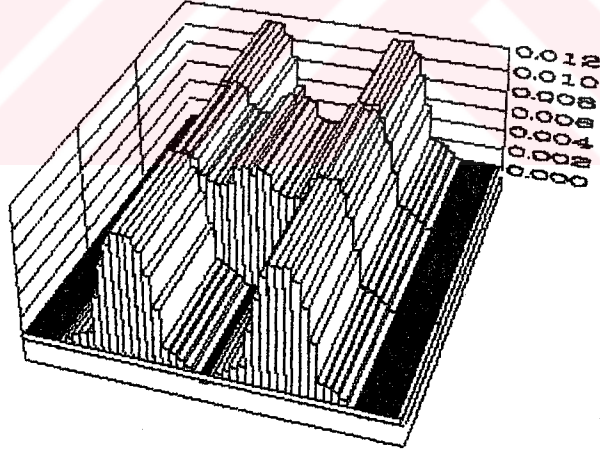
Şekil 3.2. Birinci seride ilişkin ( $n=1$ ) cisim fonksiyonu



Şekil 3.3. İkinci seride ilişkin ( $n=2$ ) cisim fonksiyonu

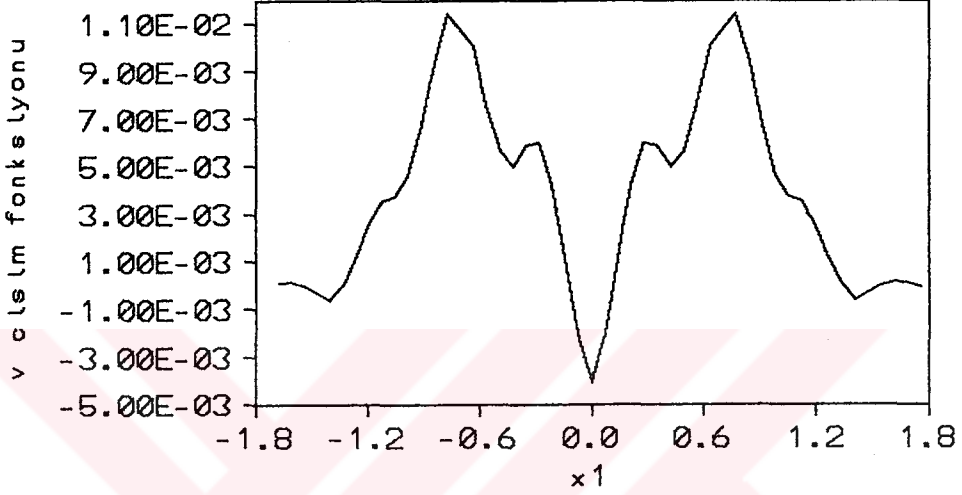


Şekil 3.4. Üçüncü şeride ilişkin ( $n=3$ ) cisim fonksiyonu

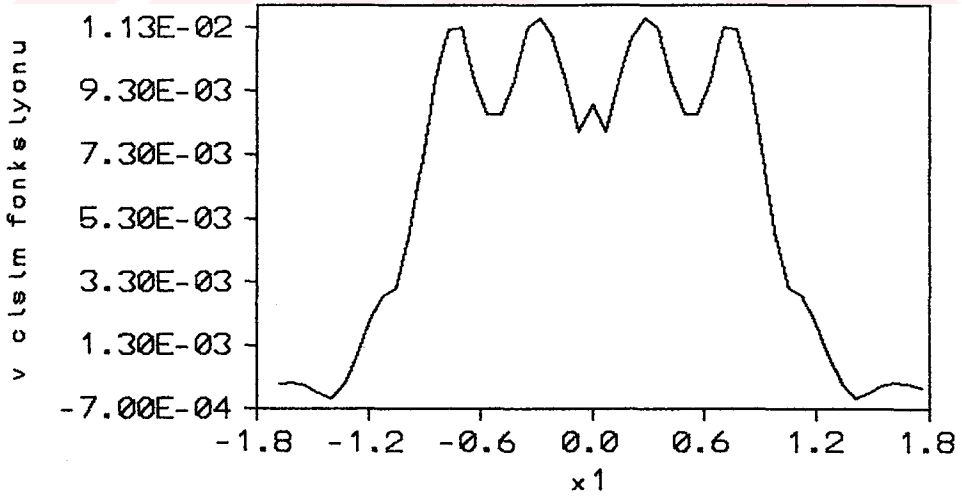


Şekil 3.5. Örnek cisim için üç boyutlu şekil

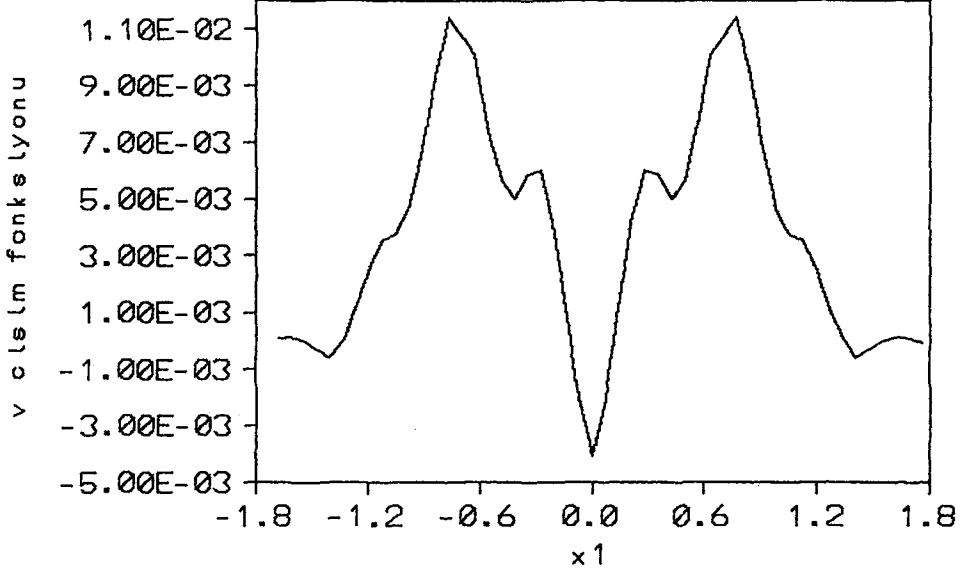
B) Şekil 3.6.-3.9. da  $h = 0.05 \text{ m}$ ,  $d = 0.35 \text{ m}$ ,  $\theta = -45^\circ$  değerleri için bulunan sonuçlar görülmektedir. Bu sonuçlar A) haline ilişkin olanlara oldukça yakın değerlerdir. Buradan çıkacak olan sonuç ele alınan yöntemin, gelen dalganın yayılma yönü olan  $\theta$  açısından bağımsız olduğu şeklindedir.



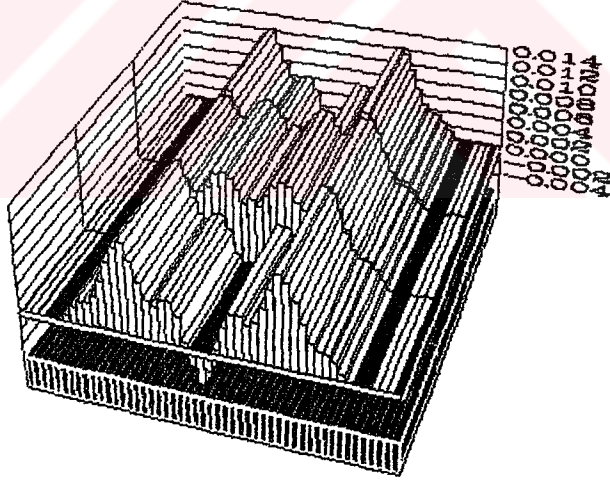
Şekil 3.6. Birinci şeride ilişkin ( $n=1$ ) cisim fonksiyonu



Şekil 3.7. İkinci şeride ilişkin ( $n=2$ ) cisim fonksiyonu

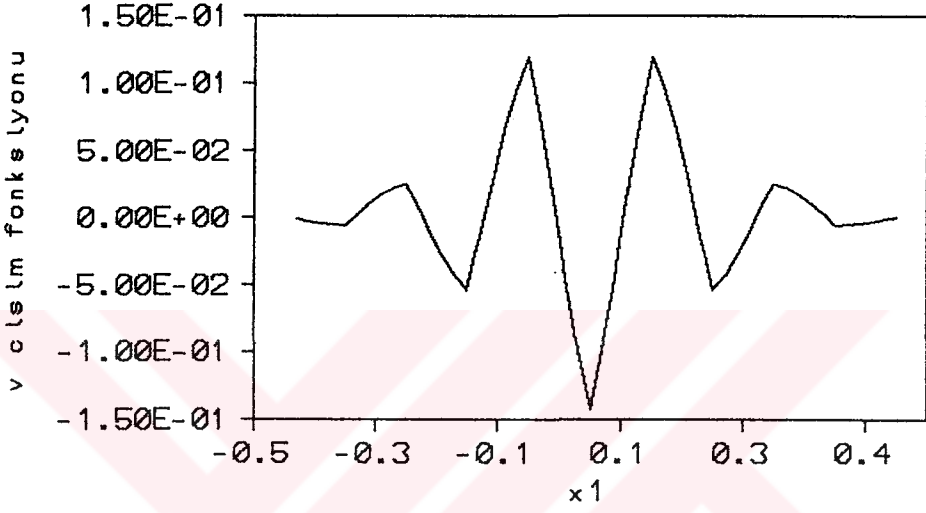


Şekil 3.8. Üçüncü şeride ilişkin ( $n=3$ ) cisim fonksiyonu

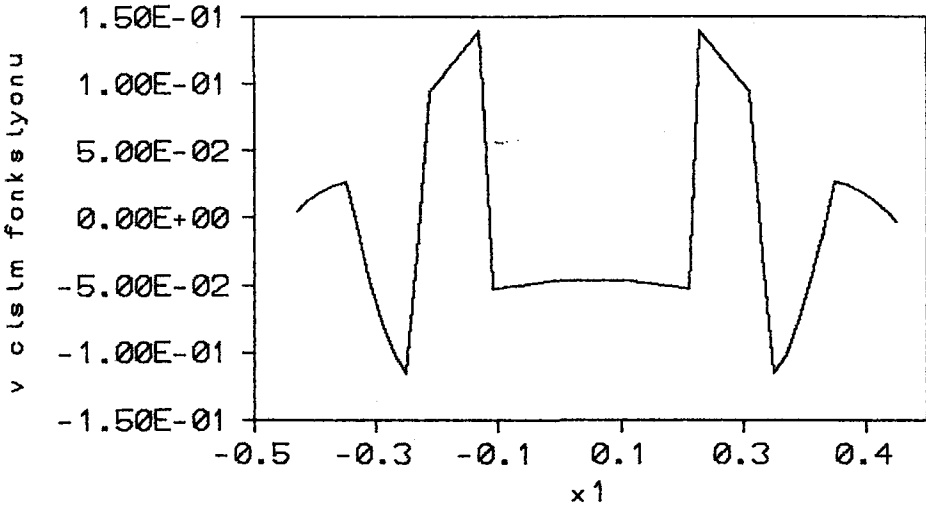


Şekil 3.9. Örnek cisim için üç boyutlu şekil

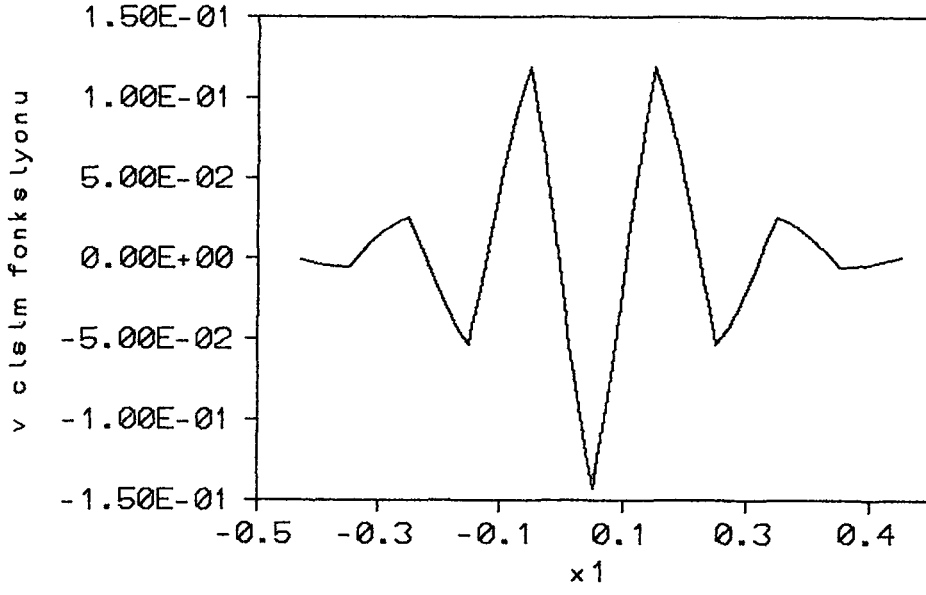
- C) Şekil 3.10.-3.13. de  $h = 0.05 \text{ m}$ ,  $d = 0.1 \text{ m}$ ,  $\theta = -90^\circ$  değerlerine karşı gelen sonuçlar gözükmektedir. Burada elde edilen değerler örnek cisim hakkında bir fikir verememektedir. Bunun ana nedeni ise seçilen  $d$  değerinin, inceleme sırasında ortaya çıkan  $d > \lambda/4 = 0.25 \text{ m}$  ( $k_0 = 2\pi/\lambda = 6.283 \text{ rad/m}$ ) eşitsizliğine uygun olarak seçilmiş olmamasından kaynaklanmaktadır.



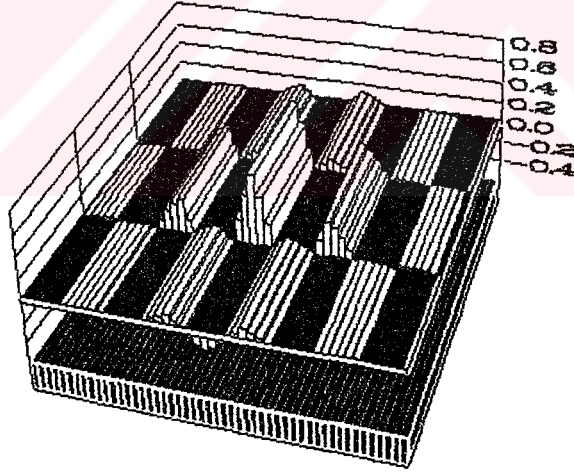
Şekil 3.10. Birinci şeride ilişkin ( $n=1$ ) cisim fonksiyonu



Şekil 3.11. İkinci şeride ilişkin ( $n=2$ ) cisim fonksiyonu

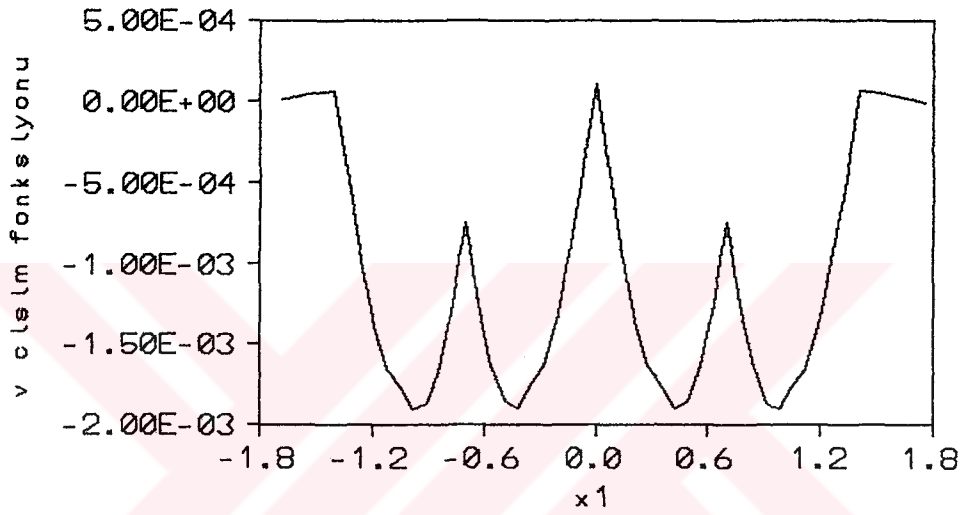


Şekil 3.12. Üçüncü şeride ilişkin ( $n=3$ ) cisim fonksiyonu

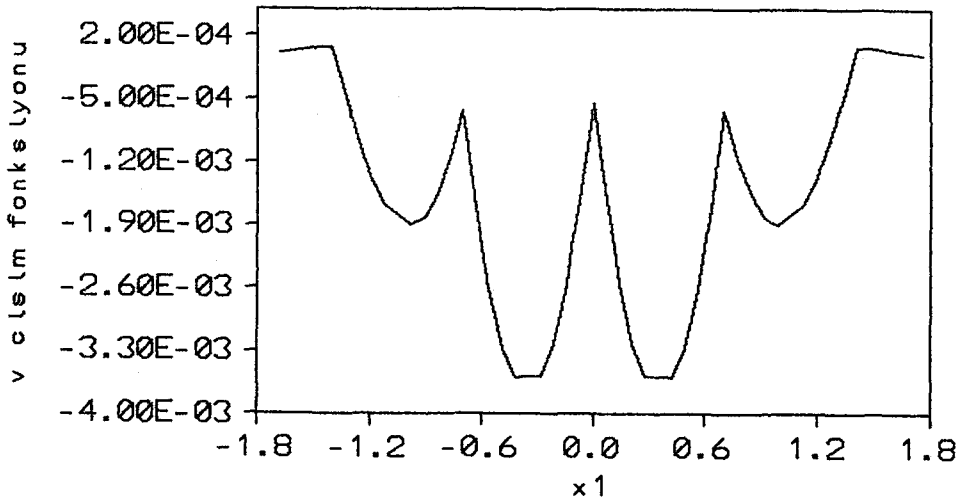


Şekil 3.13. Örnek cisim için üç boyutlu şekil

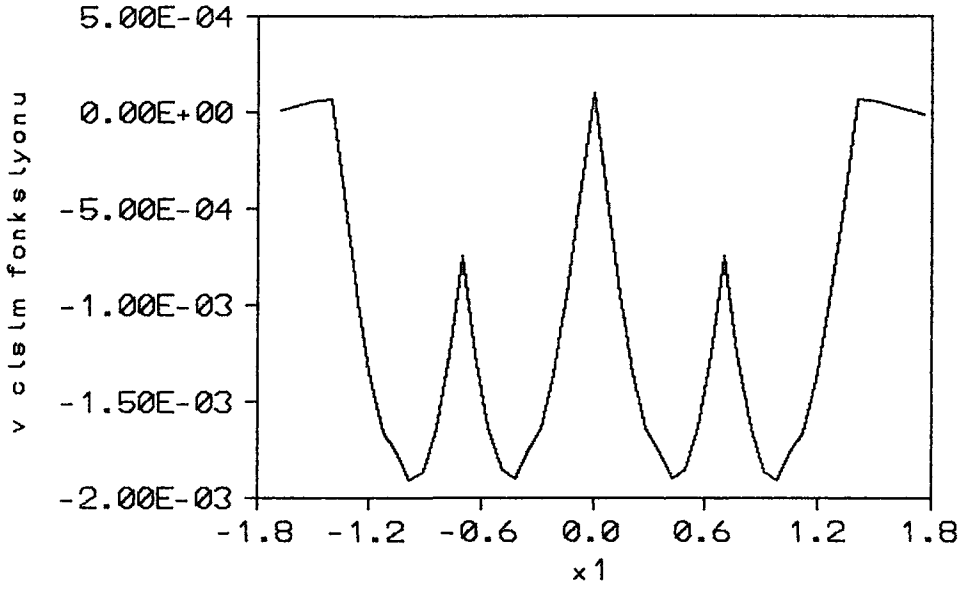
D) Şekil 3.14.-3.17. de  $h = 0.25 \text{ m}$ ,  $d = 0.35 \text{ m}$ ,  $\theta = -90^\circ$  değerleri için birtakım neticeler elde edilmiştir. Bu neticelerden de açıkça görüleceği gibi örnek gömülü cisme ilişkin değerler sağlıklı bir şekilde elde edilememektedir. Bunun nedeni seçilen  $h$  değerinin çok büyük olmasındandır. Yapılan çeşitli hesaplar göstermiştir ki  $10 < \lambda/h < 25$  ifadesini sağlayacak şekilde belirlenen  $h$  değerleri iyi sonuçlar vermektedir.



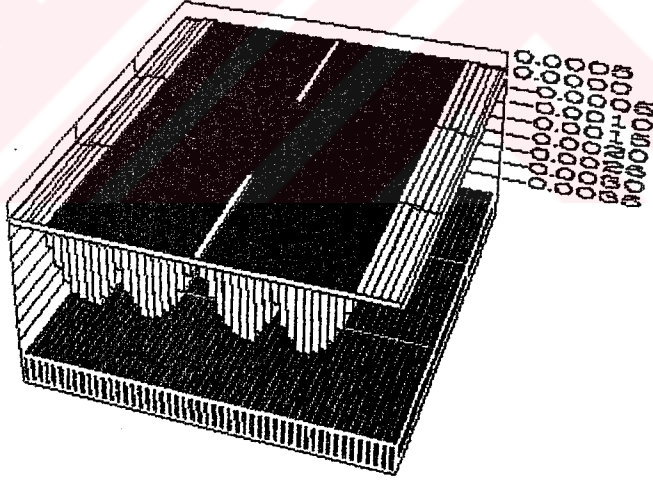
Şekil 3.14. Birinci şeride ilişkin ( $n=1$ ) cisim fonksiyonu



Şekil 3.15. İkinci şeride ilişkin ( $n=2$ ) cisim fonksiyonu

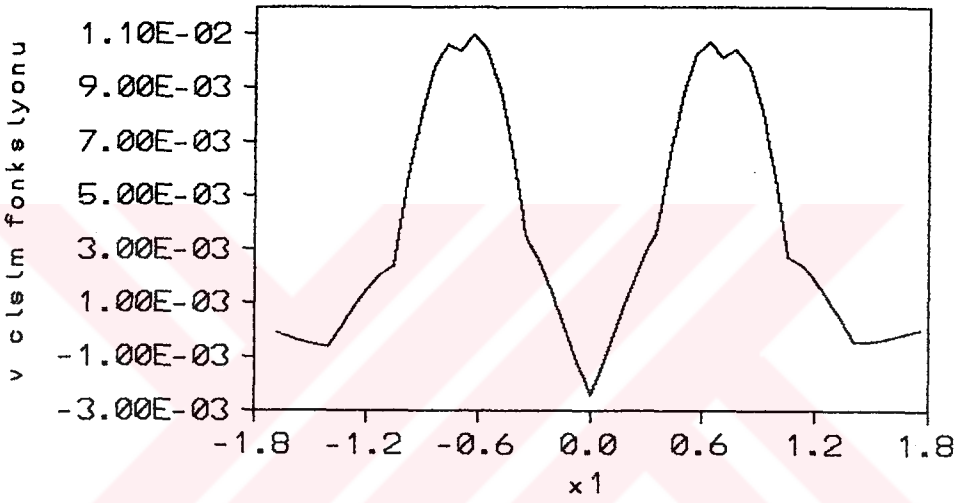


Şekil 3.16. Üçüncü şeride ilişkin ( $n=3$ ) cisim fonksiyonu

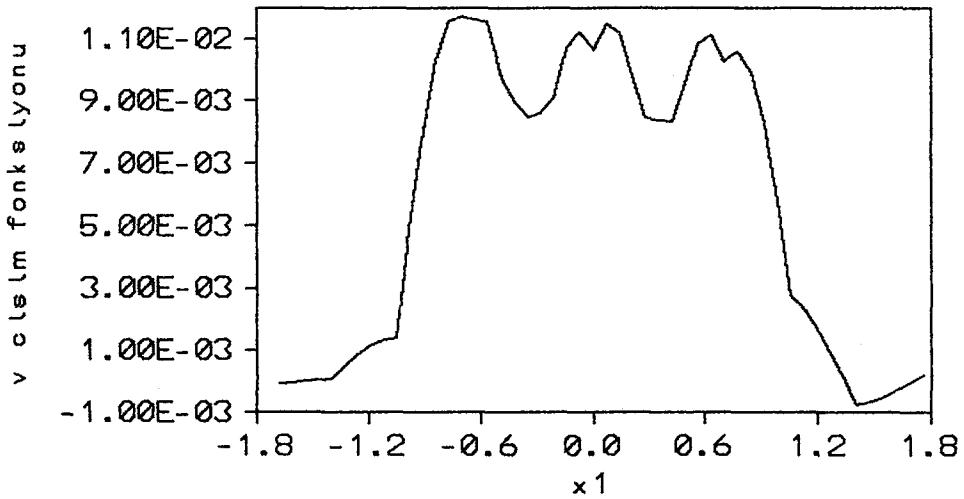


Şekil 3.17. Örnek cisim için üç boyutlu şekil

E) Şekil 3.18.-3.21. de A) da ele alınmış olan  $h = 0.05 \text{ m}$ ,  $d = 0.35 \text{ m}$ ,  $\theta = -90^\circ$  değerlerine gürültü katılması halinde bulunan sonuçlar gözükmemektedir. Burada gözönüne alınan gürültü SNR'i (işaret/gürültü oranı)  $30 \text{ db}$  olan bir beyaz gürültüdür. Aşağıdaki şekillerden de anlaşılacağı gibi elde edilen sonuçlar A) dakilere oldukça yakın olan ve örnek olarak seçilmiş gömülü cisim tanımlamaya elverişli değerlerdir. Bunun nedeni SNR değerinin yüksek dolayısıyla gürültünün az olmasıdır.



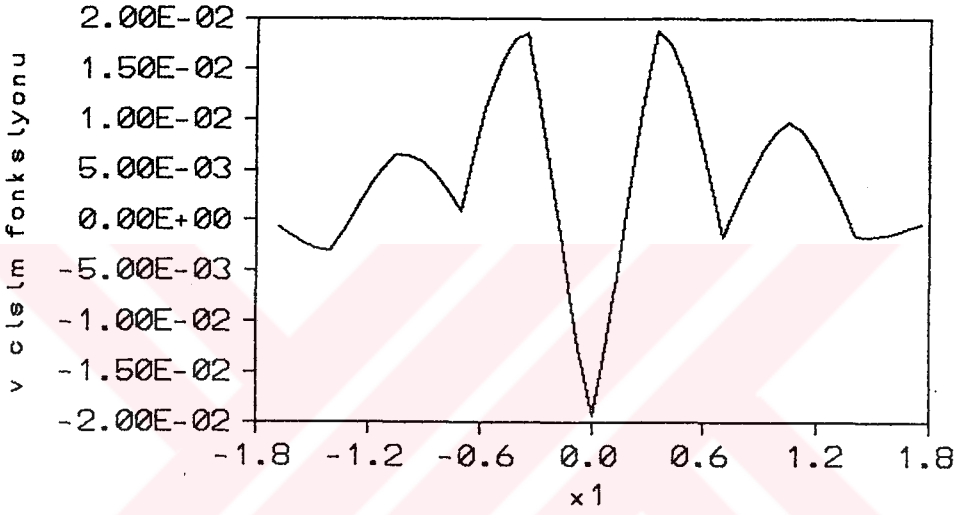
Şekil 3.18. Birinci şeride ilişkin ( $n=1$ ) cisim fonksiyonu



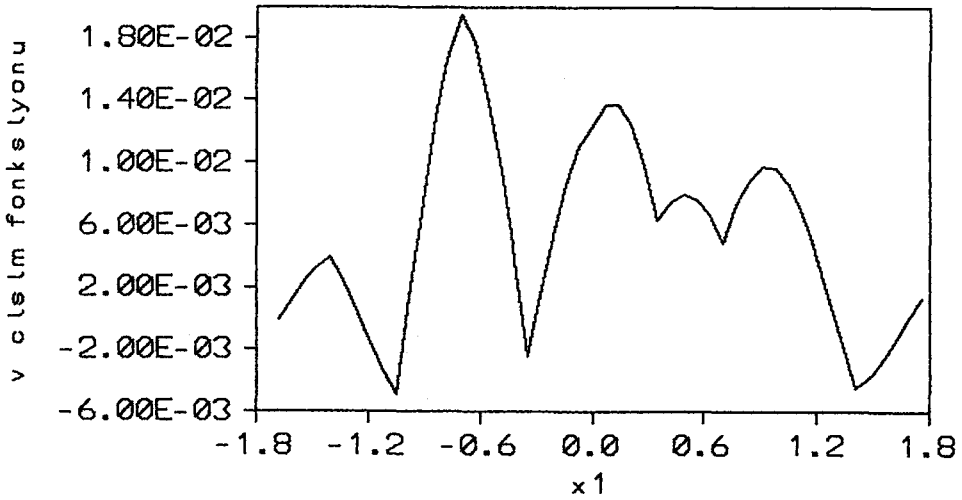
Şekil 3.19. İkinci şeride ilişkin ( $n=2$ ) cisim fonksiyonu



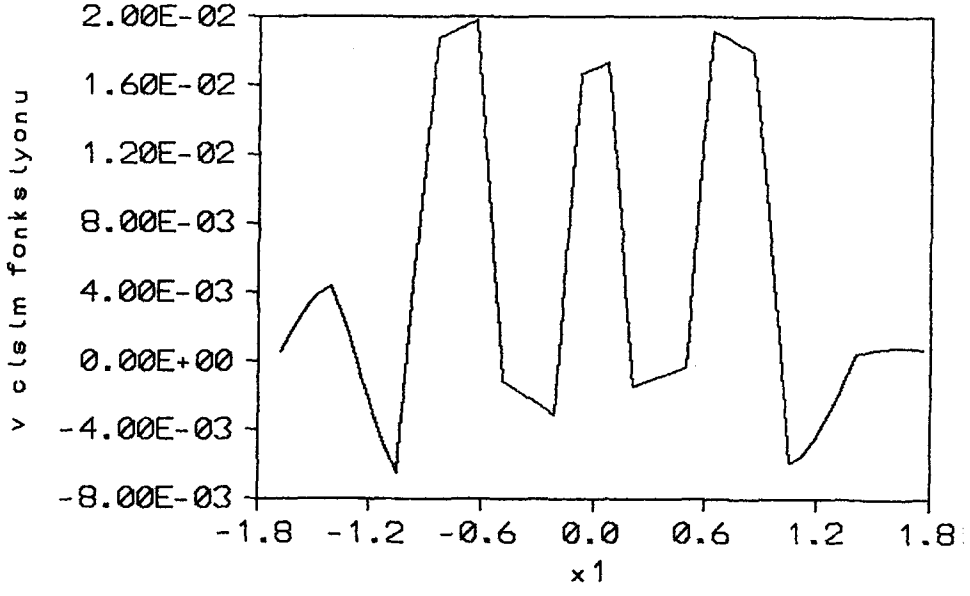
F) Şekil 3.22.-3.25. de ise yine A) deki  $h = 0.05 \text{ m}$ ,  $d = 0.35 \text{ m}$ ,  $\theta = -90^\circ$  değerlerine bu defa SNR'i 10 db olan bir beyaz gürültü katılmasıyla elde edilen sonuçlar verilmiştir. Ortaya çıkan neticelerden de anlaşılacağı gibi, bu halde bulunan değerler örnek cismin yerini ve parametrelerini tanımlamaya yeterli olamamaktadır. Bu ise buradaki örnekte ele alınan gürültünün fazla olmasından kaynaklanan doğal bir sonuçtur.



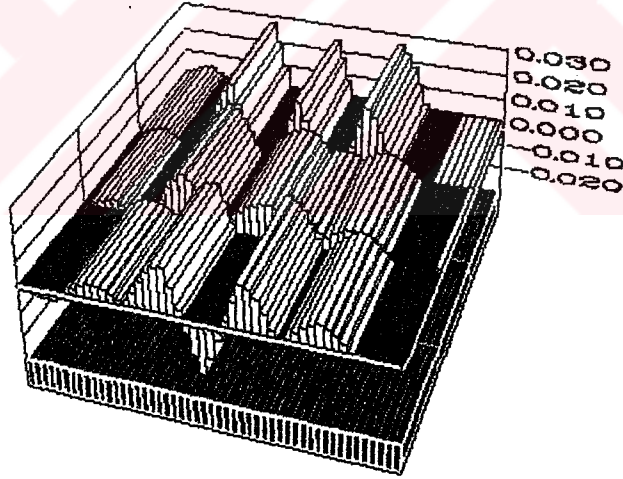
Şekil 3.22. Birinci şeride ilişkin ( $n=1$ ) cisim fonksiyonu



Şekil 3.23. İkinci şeride ilişkin ( $n=2$ ) cisim fonksiyonu



Şekil 3.24. Üçüncü şeride ilişkin ( $n=3$ ) cisim fonksiyonu



Şekil 3.25. Örnek cisim için üç boyutlu şekil

## BÖLÜM 4

### SONUÇLAR

Bölüm 3 de ele alınmış bulunan örnek uygulamadan çıkan sonuçlara bakarak diyebiliriz ki, bölüm 2 de geliştirilmiş olan hibrid yöntem, problemin özünde var olan "ill-posed" olma özelliğinden çok etkilenen direkt sayısal yöntemlerle zayıf kontrast halinde uygulanabilen ve Born yaklaşımına dayanan spektral yöntemlerin sahibolduğu kusurlardan, büyük ölçüde, arınmış durumdadır. Kullanılan baz fonksiyonların mümkün olabilen en küçük süppora sahibolmaları, hesaba katılan frekans aralığını mümkün olabilen en büyük değere çıkarabilmeye olanak vermiş ve, böylelikle, elde edilen sonucun kalitesini yükseltmiştir. Regülarizasyon teknikleri ile bu kalitede sonuçlar elde edebilmek mümkün değildir [6].

## KAYNAKLAR

- [1] WOLF, E. , Three-dimensional structure determination of semi transparent objects from holographic data, Opt. Communicat. , Vol.1, pp. 153-156, 1969
- [2] İDEMEN, M. , AKDUMAN, İ. , Two-dimensional Inverse Scattering Problems Connected with Bodies Buried in a Slab, Inverse Problems, Vol.6, pp. 749-766, 1990
- [3] MARTIN, P.A. , RAMM, A.G. , Inverse Scattering For Geophysical Problems-III, On the velocity inversion problems of acoustics, Proc. Roy. Soc. , A399, pp. 153-166, 1985
- [4] CHOMMELOUX, L. , PICHOT, CH. , BOLOMEY, J.C. , Electromagnetic Modeling for Microwave Imaging of Cylindrical Buried Inhomogeneities, IEEE Trans. on Microwave Theory and Techn. , Vol.MTT-34, pp. 1064-1076, 1986
- [5] TABBARA, W. , DUCHENE, B. , PICHOT, CH. , LESSELIER, D. , CHOMMELOUX, L. , JOACHIMOWICZ, N. , Diffraction Tomography, Contribution to the Analysis of some Application in Microwaves and Ultrasonics, Inverse Problems, Vol.4, pp. 305-331, 1988
- [6] LEE, J.M. , KIM, S.Y. , RA, J.W. , Spectral Inverse Technique for Reconstruction of Complex Permittivity Profiles, Electronics Letters, Vol.24(9),pp. 556-558, 1988
- [7] KIM, S.Y. , CHOI, H.C. , RA, J.W. , LEE, S.Y. , Electromagnetic Imaging of 2-D Inhomogeneous Dielectric Objects by an Improved Spectral Inverse Technique, IEEE Trans. on Magnetics, Vol.26, pp.634-637, 1990
- [8] CAUICCHI, T.J. , JOHNSON, S.A. , O'BRIEN, W.D. , Application of the Sinc Basis Moment Method to the Reconstruction of Infinite Circular Cylinders, IEEE Control, Vol.35, pp. 22-33, 1988
- [9] İDEMEN, M. , On Different Possibilities Offered by the Born Approximation in Inverse Scattering Problems, Inverse Problems, Vol.5, pp. 1057-1074, 1989

[10] PAPOULIS, A. , *Signal Analysis*, p. 274, Mc. Grow-Hill Book Company, N.Y. , 1977

[11] GELEAND, I.M. , FOMIN, S.V. , *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, INC. , Englewood Cliffs, N.J. , 1963



## YAPAY DATA TOPLANMASI

Bölüm 3 de göz önüne alınmış bulunan örnekteki  $\mathcal{D}$  cismi ile bunu içeren alt yarı-uzay arasındaki kontrast oldukça küçüktür. Bu nedenle,  $u_D(x')$  yi (2.16) aracılığıyla, sağ yanda  $u(y')$  yerine  $u_0(y')$  koyarak hesaplayabiliriz. Born yaklaşıklığı olarak bilinen bu hesaptaki hata  $k_1^4 \|v\|^2$  mertebesindedir. Bunu (2.16) yi

$$\begin{aligned} u_D(x') &= k_1^2 \int_{\mathcal{B}} G(x', y') v(y') [u_0(y') + u_D(y')] dy' \\ &= u_D^{(1)}(x') + k_1^2 \int_{\mathcal{B}} G(x', y') v(y') u_D(y') dy' \\ &= u_D^{(1)}(x') + k_1^2 \int_{\mathcal{B}} G(x', y') v(y') u_D^{(1)}(y') dy' + \dots \quad (Ek A1) \end{aligned}$$

şeklinde yazdıktan sonra itere ederek kolayca görürüz. Burada

$$u_D^{(1)}(x') = k_1^2 \int_{\mathcal{B}} G(x', y') v(y') u_0(y') dy' \quad (Ek A2)$$

konmuştur. Schwartz eşitsizliğinden yararlanarak, kolayca,

$$|u_D^{(1)}(x')| \leq k_1^2 \cdot \sqrt{\int_{\mathcal{B}} |G^2(x', y') u_0^2(y')|^2 dy'} \cdot \sqrt{\int_{\mathcal{B}} |v(y')|^2 dy'}$$

veya,

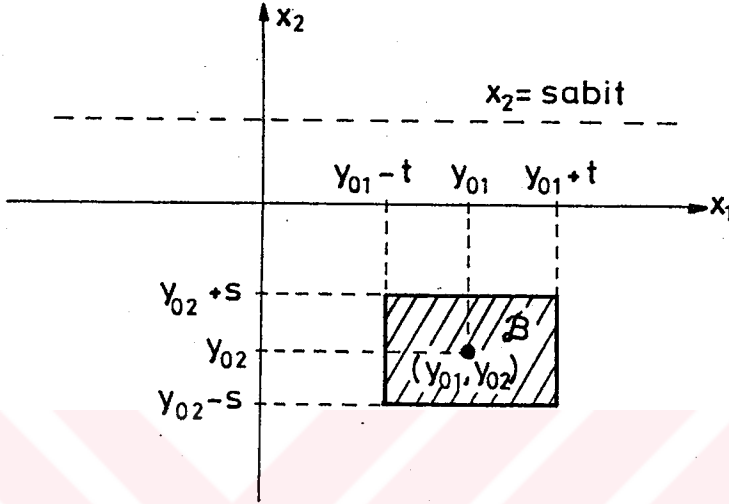
$$|u_D^{(1)}(x')| = O(k_1^2 \|v\|) \quad (Ek A3)$$

yazarız. Bu iterasyonun ikinci terimine konursa, ikinci terim için

$$\begin{aligned} \left| k_1^2 \int_{\mathcal{B}} G(x', y') v(y') u_D^{(1)}(y') dy' \right| &\leq k_1^2 |u_D^{(1)}(x')|_{\max} \int_{\mathcal{B}} |G(x', y') v(y')| dy' \\ &\leq k_1^2 O(k_1^2 \|v\|) O(\|v\|) \\ &\leq O(k_1^4 \|v\|^2) \end{aligned}$$

olduğunu anlarız.

Yukarıda sözü edilen  $u_D^{(1)}(x')$  yü kolayca hesaplayabilmek için  $\mathcal{B}$  bölgesinin, şekil A.1 deki gibi,  $2t \times 2s$  boyutlu bir dikdörtgen bölgeden oluştuğunu ve  $\mathcal{B}$  içinde  $v(y')$  nün  $v_0$  gibi bir sabitten ibaret olduğunu düşünelim. Bu halde, önce



Şekil A.1

$$u_D(x') \simeq u_D^{(1)}(x') = k_1^2 v_0 \int_{\mathcal{B}} G(x', y') u_0(y') dy'$$

$$\hat{u}_D(\nu, x_2) \simeq \hat{u}_D^{(1)}(\nu, x_2) = k_1^2 v_0 \int_{y_{01}-t}^{y_{01}+t} \int_{y_{02}-s}^{y_{02}+s} \hat{G}(\nu, x_2, y_1, y_2) u_0(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

sonra da, (2.2), (2.20a), (2.23a) ve (2.23b) de kullanılarak

$$\hat{u}_D \simeq k_1^2 v_0 \int_{y_{01}-t}^{y_{01}+t} \int_{y_{02}-s}^{y_{02}+s} \frac{e^{-i\nu y_1} e^{b(\nu) y_2}}{a(\nu) + b(\nu)} e^{-a(\nu) x_2} T e^{i k_1 (y_1 \cos \chi + y_2 \sin \chi)} dy_1 dy_2$$

yazılır. Basit bir takım hesaplamalar sonunda, kolayca,

$$\hat{u}_D(\nu, x_2) \simeq \frac{4T k_1^2 v_0 e^{-a(\nu) x_2} e^{(b(\nu) + i k_1 \sin \chi) y_{02}} e^{i(k_1 \cos \chi - \nu) y_{01}}}{[a(\nu) + b(\nu)] (k_1 \cos \chi - \nu) (b(\nu) + i k_1 \sin \chi)} \times \sin [(k_1 \cos \chi - \nu)t] \sinh [(b(\nu) + i k_1 \sin \chi)s]$$

bulunur.

## ÖZGEÇMİŞ

Ali Alkumru, 1966 Ankara doğumludur. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamlamıştır. 1985 yılında Saint-Benoit Fransız Lisesinden mezun olduktan sonra aynı yıl İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümünde öğrenime başlamıştır. 1989 yılında bu bölümden mühendis ünvanıyla mezun olmuş ve aynı bölümde yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. 1989 yılında İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fakültesi Elektromagnetik Alanlar ve Mikrodalga Tekniği Ana Bilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başlamış ve halen bu görevini sürdürmektedir.