T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ANALİTİK İTERASYON YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet SİMEKLİ
DANIŞMAN: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

VAN- 2007

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ANALİTİK İTERASYON YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet SİMEKLİ

VAN- 2007

KABUL ve ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Gabil AMİRALİ danışmanlığında, Mehmet SİMEKLİ tarafından hazırlanan "Adi Diferansiyel Denklemlerde Başlangıç Değer Problemleri İçin Analitik İterasyon Yöntemi" isimli çalışma …./…./ 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: ……………………………………………………………… İmza:

Üye: ………………………………………………………………. İmza:

Üye: ………………………………………………………………. İmza:

Üye: ………………………………………………………………. İmza:

Üye: ………………………………………………………………. İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…./ 2007 Gün ve …………………….sayılı kararı ile onaylanmıştır.

…………………………………………

Enstitü Müdürü

ÖZET

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ANALİTİK İTERASYON YÖNTEMİ

SİMEKLİ, Mehmet
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ
Ekim 2007, 45 sayfa.

Bu çalışmada adi diferansiyel denklemlerde başlangıç değer problemlerinin çözümü için analitik iterasyon yöntemi kullanılmıştır. Başlangıç şartlarında çözümlerin varlık ve tekliği, Picard teoreminden elde edilen ardışık yaklaşıkların, Lipschitz şartı ve Gronwall eşitsizliğine göre durumları ele alınmıştır. Çözümlerin başlangıç şartlarına ve fonksiyonlara bağımlılığı ile devamı ve lokal olmayan varlığı incelenmiştir. Sonuç olarak Lipschitz şartının, Picard teoreminin hipotezinden çıkarılamayacağı gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Ardışık yaklaşıklar, Çözümlerin devamı, Çözümlerin fonksiyonlara bağımlılığı, Çözümlerin lokal olmayan varlığı, Gronwall eşitsizliği, Lipschitz şartı, Picard teoremi, Weierstrass M- testi.

ABSTRACT

ANALYTIC APPROXIMATE METHOD FOR INITIAL VALUE PROBLEMS AT ORDINARY DIFFERANTIAL EQUATIONS

SIMEKLI, Mehmet
Msc Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Gabil AMIRALI

October 2007, 45 pages.

In this study, analytic approximation method is used to ordinary solution of differential equations for unique value problems. In this study, existence and uniqueness of solutions for initial conditions and successive approximations of Picard's theorem were discussed and provided with respect to Lipschitz condition and Gronwall inequality. Additionally, dependence of solutions on the initial conditions and the functions with continuity of the solutions and non-local existence were discussed. As a result the study represents that the Lipschitz condition can not be extracted from the hypothesis of Picard's theorem.

Key words: Successive approximations, Continuity of the solutions, Dependence of the solutions on the functions, Non-local existence of solutions, Gronwall inequality, Lipschitz condition, Picard's theorem, Weierstrass M- test.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimimde kendimi yetiştirmeme ve geliştirmeme yardımcı olan, bana sabırla yol gösterip, özveriyle yardımlarını esirgemeyen, değerli hocam Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil Amirali'ye, Sayın Prof. Dr. Cemil Tunç'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Musa Çakır'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Hakkı Duru'ya, Sayın Yrd. Doç. Dr. Sabahattin Şevgin'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Fevzi Erdoğan'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Cesim Temel'e, Sayın Araştırma Görevlisi Erkan Çimen'e ve adını daha sayamadığım bu çalışmada katkısı geçen bütün öğretim üyelerine sonsuz saygı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca bu çalışmada katkısı olan arkadaşlarıma, çevreme, akrabalarıma, herkese ve tabi ki aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Mehmet SİMEKLİ
Ekim 2007, VAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Anlamı**
k	Lipschitz sabiti
lub	En küçük üst sınır
R	Reel sayılar kümesi
exp	Üstel
ε	Epsilon
$\Re^2$	İki boyutlu uzay
!	Faktöriyel
e	Doğal logaritma tabanı
$\neq$	Eşit değil
$\equiv$	Denktir
$\vert\ \vert$	Mutlak değer
∞	Sonsuz
$\bar{x}(t)$	$x(t)$ çözümünün devamı
x'_-	Sol taraf türevi
$\in$	Eleman
$F''(t)$	F fonksiyonunun t'ye göre ikinci türevi
Lip	Lipschitz
Min	Minimum
$\sum$	Toplam sembolü
$\int$	İntegral işareti

1. GİRİŞ

Birinci kısımda, birçok durumda çözümlerin çok bilinen özel fonksiyonların terimleri ile açıklanabilir olduğu belirtildi ve denklemin homojen olmayan kısmının genel çözümü, homojen kısmının çözümü ile homojen olmayan kısmının kısmi çözümünün toplamı şeklinde açıkça ifade edildi ve bunun bulunmasının metotları geliştirildi..

İkinci kısımda, bazı ikinci dereceden lineer denklemlerin özel fonksiyonlar olarak ifade edilemeyen çözümleri ele alındı. Ancak bunların bir bakıma farklı yakınsak kuvvet serileri tarafından verilen çözümleri, analitik çözümlere sahiptirler. Tüm bunların içinden teorik olarak çözümlerin varlığı ve tekliğinin daha geniş birinci dereceden diferansiyel denklemlerin sınıfına girdiğini iddia edecek genel bir metot olabildiği tasarlanamaz. Bu bölümde, Picard'ın yaklaşık metoduyla birinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin Başlangıç Değer Problemlerinin çözümünün ayrıntılı ele alınan genel biçimi,

$$x'(t) = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

dır. $f(t,x)$, (t_0, x_0) 'ın belirli komşuluğunda tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur.

Picard teoremi,yukarıda ifade edilen Başlangıç değer problemi (1.1) için verilen lineer olmayan diferansiyel denkleme denk integral denklemi kullanarak Ardışık yaklaşıklar metodu ile Başlangıç değer problemi (1.1)'in tek çözümünü verir. Picard teoremi, (1.1)'in lokal çözümünü vermesine rağmen, sadece lokal olmayan alanda çözümün sürekliliği dikkate alınmayacak, aynı zamanda teorem lokal olmayan alanın dışına da genişletilecektir.

2. LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Başlangıç değer problemleri, Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonlardan elde edilen ardışık yaklaşıklar ile tek çözüme sahiptir. Çözümün tekliği, Gronwall eşitsizliği diye adlandırılan eşitsizlik yardımıyla bulunur. Bu nedenle ilk olarak, başlangıç için Picard'ın teoremi tanıtılmış ve sonra Gronwall eşitsizliği uygulanmıştır (Somasundaram, 2005). Coddington ve Levinson (1984) çözümlerin genişletilmesine ait bir fikir belirtilmiş, minumum ve maksimum çözümler verilmiş, tekliğin sonuçları üzerinde durulmuştur. Coddington (1989) birinci derece denklemlerde çözümün varlık ve tekliği, denklemler değişkenlere ayrılarak açık ve kesin bir şekilde ifade edilmiştir.

Ross (1974) birçok durumda çözümlerin çok bilinen özel fonksiyonların terimleri ile açıklanabilir olduğunu, lineer olmayan başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlık ve tekliğini araştırmış, çözümlerin devamı işlemiştir. Erkip (1985); çözümlerin başlangıç şartlarına, başlangıç değerlerine ve fonksiyonlara bağımlılığını belirtmiş ve ele alınan problemin çözümü, analitik iterasyon yöntemiyle incelemiştir.

Picard'ın teoremi verilen diferansiyel denkleme denk integral denklemi kullanarak ardışık yaklaşıklar metodu ile başlangıç değer probleminin tek çözümünü verir. Picard teoremi lokal çözümü vermesine rağmen, sadece geniş bir alanda çözümün sürekliliği dikkate alınmamış, aynı zamanda teorem lokal olmayanların dışında da incelenmiştir. (Edwards ve Penny, 1996).

Caferoğlu ve Kaçar (1993), lineer ve adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin yaklaşık metotlarla çözümü incelemiş ve bu türden bir metot olan Picard' ın ardışık yaklaşıklar metodu vermiştir. Amirali ve Duru (2002), başlangıç değer problemleri için yaklaşık metotları ve nümerik metotları vermiş ve çeşitli yakınsama ve kararlılık özellikleri incelemiştir.

3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ANALİTİK İTERASYON YÖNTEMİ

Bu bölümde ele alınan başlangıç değer probleminin çözümünün varlık ve tekliği için ihtiyaç duyulan teorem, tanım, ispatlar v.b ayrıntılı bir şekilde işlenecek, çeşitli durumlar için çözüm, ardışık yaklaşıkların da yardımıyla analitik iterasyonlarla yapılacaktır.

3.1. Lipschitz Şartı ve Gronwall Eşitsizliği

Başlangıç değer problemi (1.1), Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonların verdiği ardışık yaklaşıklar ile tek çözüme sahiptir. Çözümün tekliği, Gronwall eşitsizliği diye adlandırılan eşitsizlik yardımıyla elde edilir. Bu nedenle Picard'ın teoremine bir başlangıç olarak, ilkin Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonların bir sınıfı tanıtılacak ondan sonra Gronwall eşitsizliği tanıtılacaktır.

Tanım 3.1. Bir $D \subset \Re^2$ bölgesinde tanımlı bir $f(t,x)$ fonksiyonu, k pozitif bir sabit olacak şekilde

$$\left| f(t,\, x_1) \,-\, f(t,\, x_2) \right| \le k \left| x_1 \,-\, x_2 \right| \tag{3.1}$$

şartını sağlarsa, bu durumda $f(t,x)$ D' deki x'e göre Lipschitz şartını sağlıyor denir, burada her $(t,\, x_1)$ ve $(t,\, x_2)$ D'nin kendi noktalarıdır. $k > 0$ sabiti D'deki f fonksiyonu için Lipschitz sabiti olarak adlandırılır.Tüm fonksiyonların sınıfı, $\mathrm{D} \subset \Re^2$ bölgesindeki k Lipschitz sabiti ile birlikte Lipschitz şartı (3.1)' i sağlarsa bu durum $f \in Lip\ (D,\, k)$ ile gösterilir.

Tanıma göre, eğer her $x_1 \ne x_2$ için $f \in Lip\ (D,\, k)$ ise

$$\frac{\left| f\ (t, x_1) - f(t,\, x_2) \right|}{\left| x_1 - x_2 \right|} \le k$$

olur. Buradan $f(t,\, x)$' in $D \subset \Re^2$'de x'e göre Lipschitz şartını sağladığını göstermek için her $(t,x) \in D \subset \Re^2$ için

$$\left| \frac{f\ (t,\, x_1) - f(t,\, x_2)}{x_1 - x_2} \right|$$

ifadesinin sınırlı olduğunu ispatlamak yeterlidir. Her $(t,\ x)\in D\ \subset \Re^2$ için sınırlıdır. Yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafındaki ifadenin en küçük üst sınırı, $(t,\ x)\in D$ iken k Lipschitz sabitini verir.

Not 3.1. Yukarıdaki tanım, bir D tanım bölgesi tarafından, $\Re^2$'de boş olmayan, bağlantılı, açık bir küme anlamına gelir. Bu nedenle doğru, D'de tamamen uzanan, D'nin herhangi iki noktasında birleşen tahmini parçalardır.

Diferansiyel hesabın ortalama değer teoreminin bir sonucu olarak, aşağıdaki teorem bir $D\subset \Re^2$ bölgesinde verilen bir $f\ (t,\ x)$ fonksiyonun Lipschitz olması için yeterli şartı verir.

Teorem 3.1. $f\,(t,x)$ fonksiyonu, $R=\{(t,\ x):\ |t-\ t_0|\le a,\ |x-\ x_0|\le b\ \}\ a,b>0$ için dikdörtgeninde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ var ve R'de süreklidir. O halde $f\ (t,\ x)$ R'de x' e göre k Lipschitz sabiti ile

$$k=\ \text{lub}\,|\,f_x(t,x)\,|$$

olacak şekilde Lipschitz şartını sağlar.

İspat: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, R kapalı dikdörtgeninde sürekli olduğu için R'de sınırlıdır, bu yüzden R'de en küçük üst sınır vardır.

$$k=\ \underset{(t,x)\in R}{\text{lub}}\left|\frac{\partial f\,(t,x)}{\partial x}\right| \tag{3.2}$$

olsun.

$(t,\ x_1)$ ve $(t,\ x_2)$ R' nin herhangi iki noktası olsun. O halde; diferansiyel hesabın ortalama değer teoreminden, bir $\varepsilon\in\ [x_1,x_2]$ noktası vardır,

$$f\ (t,\ x_1)\ -f\ (t,\ x_2)\ =\ \left[\frac{\partial}{\partial x}\ f\ (t,\ \varepsilon)\right](\,x_1-\ x_2\,)\,,\qquad (t,\ \varepsilon)\in\ R \tag{3.3}$$

olur.

(3.3)' de (3.2) kullanılırsa, R'de her $(t,\ x_1)$ ve $(t,\ x_2)$ için

$$|\ \ f\ (t,\ x_1)\ -\ f\ (t,\ x_2)\ \ |\ \le\ k\ \ |x_1-x_2|$$

elde edilir. Bu $f\,(t,x\,)$' in R'deki k Lipschitz sabiti ile Lipschitz şartını sağladığını ispatlar.

Not 3.2. Yukarıdaki teoremde verilen şart tek başına yeterlidir ancak R'de Lipschitz şartını sağlayan bir $f\,(t,x)$ fonksiyonu için gerekli olmadığı aşağıdaki örnek ile gösterilmektedir.

Örnek 3.1. $f\ (t,\ x) = t^2 \left|x\right|$ fonksiyonu $R = \left\{(t,\ x):\ \left|t\right| \leq 1,\ \ \left|x\right| \leq 1\right\}$ de var olmayan $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ için Lipschitz şartını sağlar.

$$f\ (t,\ x_1) - f\ (t,\ x_2) = t^2\ \left[\ \left|x_1\right| - \left|x_2\right|\ \right] \leq t^2\ \left|x_1 - x_2\right|$$

$\left|t\right| \leq 1$ olduğu için,

$$\left|f\ (t,\ x_1) - f\ (t,\ x_2)\right| \leq \left|x_1 - x_2\right|$$

elde edilir ve $f\ (t,\ x) \in L\ (R,\ 1)$ olarak gösterilir.

$$x > 0 \text{ ise } \frac{\partial f}{\partial x} = t^2, \quad x < 0 \text{ ise } \frac{\partial f}{\partial x} = -t^2$$

olur.

Buradan $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $t \neq 0$ için $(t,\ 0) \in R$'nin herhangi bir noktasında var değildir.

Örnek 3.2. $f\ (t,\ x) = x^{1/2}$ fonksiyonunun aşağıdaki şartlar için Lipschitz şartını sağlayıp sağlamadığını kontrol ediniz.

(i) $R_1 = \left\{(t,\ x)\ :\ \left|t\right| \leq 1,\ \ 0 \leq x \leq 2\right\}$

(ii) $R_2 = \left\{(t,\ x)\ :\ \left|t\right| \leq a,\ \ b \leq x \leq c,\ \ a,\ b,\ c > 0\right\}$

(i) ifadesinin ispatında, $f\ (t,\ 0) = 0$ olur.

$$\left|\frac{f\ (t,\ x) - f\ (t,\ 0)}{x - 0}\right| = \frac{1}{\left|x^{1/2}\right|}, \quad x \neq 0 \tag{3.4}$$

bulunur.

$(t,\ 0) \in\ D \subset R^2$ olduğundan (3.4) ifadesi ∞' a gider. Bu yüzden (3.4)'ün sol tarafı $x \to 0$ olduğunda sınırsızdır. Bu yüzden fonksiyon R_1'de Lipschitz şartını sağlamaz.

(ii) için $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\ x^{-1/2}$ dir.

$x \in \left[\ b,\ c\right]$ ve $b \neq 0$ için $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{b}}$ olur.

Bu yüzden $f\ (t,\ x)$ R_2'de Lipschitzdir.

Örnek 3.3. $f(t,\ x) = (x + x^2)\dfrac{\cos t}{t^2}$ fonksiyonunun Lipschitz şartını $\left|x\right| \leq 1$ ve $\left|t - 1\right| < \dfrac{1}{2}$ de sağladığını gösteriniz ve Lipshitz sabitini bulunuz?

$$f\ (t,\ x_1) - f\ (t,\ x_2)\ =\ (x_1 + x_1^2)\ \frac{\cos t}{t^2}\ -\ (x^2\ +\ x_2^2)\ \frac{\cos t}{t^2}$$

$$=\ \frac{\cos t}{t^2}\ [\ (\ x_1\ -\ x_2\ )\ +\ (\ x_1\ -\ x_2)\ (x_1\ +\ x_2)\ ]$$

buradan

$$\left|f(t,x_1) - f(t,x_2)\right| \le \frac{\left|\cos t\right|}{t^2}\ \left|x_1 - x_2\right|\ \left|1 + x_1 + x_2\right| \tag{3.5}$$

olur.

$$\left|t-1\right| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \tag{3.6}$$

elde edilir.

(3.5)’in sağ tarafı (3.6) kullanılarak açılırsa,

$$\left|f\ (\ t,\ x_1)\ -\ f\ (t,\ x_2)\right|\ \le\ \frac{1}{(1/2)^2}\ \left[\left|\ x_1 - x_2\right|.3\ \right]\ =\ 12\ \left|\ x_1\ -\ x_2\ \right|$$

bulunur. Böylece

$$\left|f\ (\ t,\ x_1)\ -\ f\ (t,\ x_2)\right|\ \le\ 12\ \left|\ x_1\ -\ x_2\ \right|$$

olduğu görülür ki, $f\ (t,\ x)$ verilen bölgede Lipschitz sabiti 12 ile Lipschitz şartını sağlar.

Aşağıda Gronwall eşitsizliği olarak bilinen integral eşitsizliğinin adi diferansiyel denklemlerin derslerine temel oluşturur. Burada Picard teoreminde çözümün tekliğinin ispatlanmasına ihtiyaç duyulacaktır.

Teorem 3.2. (Gronwall Eşitsizliği) $t\ \ge\ t_0$ için $f\ (t)$ ve $g\ (t)$ iki negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. k negatif olmayan bir sabit olsun. Ayrıca *f(t)* fonksiyonu

$$f\ (\ t\ )\ \le\ k\ +\ \int_{t_0}^{t} g\ (s) f\ (s)\ ds,\ t \ge\ t_0 \tag{3.7}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$f\ (t)\ \le\ k\ \exp\left[\ \int_{t_0}^{t} g\ (s)\ ds\ \right],\quad t \ge\ t_0 \tag{3.8}$$

olur.

İspat : $$F\ (t) =\ k\ +\ \int_{t_0}^{t} g\ (s) f\ (s)\ ds \tag{3.9}$$

olsun.

Not 3.1' den herhangi bir $t \geq t_0$ için $F(t) \neq 0$ ve

$$F'(t) = g(t) f(t) \text{ ve } F(t_0) = k \tag{3.10}$$

olur.

$t > t_0$ için $F(t) \neq 0$ hipotezden

$$\frac{f(t)}{k + \int_{t_0}^{t} g(s) f(s)\, ds} = \frac{f(t)}{F(t)} \leq 1$$

elde edilir.

$g(t)$ negatif olmadığı için, yukarıdaki eşitsizlikten $t \geq t_0$ için

$$\frac{g(t) f(t)}{F(t)} \leq g(t)$$

olur.

Yukarıdaki eşitsizlikte (3.10) kullanılırsa,

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leq g(t) \tag{3.11}$$

elde edilir.

(3.11)'in integrali t_0'dan t'ye alınırsa

$$\left[\log F(t) \right]_{t_0}^{t} \leq \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

bulunur. Bu

$$\log F(t) - \log F(t_0) \leq \int_{t_0}^{t} g(s) ds$$

sonucunu verir.

$F(t_0) = k$ ve $F(t)$ kullanılırsa,

$$\log \left[k + \int_{t_0}^{t} f(s) g(s)\, ds \right] - \log k \leq \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitsizlik

$$\log\left[k + \int_{t_0}^{t} f(s) g(s) ds \right] \leq \log k + \log\left[\exp \int_{t_0}^{t} g(s) ds \right]$$

olarak yazılabilir ve her iki tarafın üsteli alınırsa,

$$k+\int_{t_0}^{t} f(s)\,g(s)\,ds \le k.\exp\left[\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right] \tag{3.12}$$

olur.

(3.12)'nin sağ tarafı, hipotezde verilen terimlerin daha küçükleriyle tekrar yerleştirilirse, Gronwall eşitsizliğinden

$$F(t) \le \; k \, \exp\left[\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right]$$

olur.

3.2. Ardışık Yaklaşıklar ve Picard Teoremi

Önce Picard'a göre ardışık yaklaşıklar tanıtılacak, ele alınan başlangıç değer problemi (1.1) hakkında bazı temel bilgiler verilecektir. $x' = f(t, x)$ diferansiyel denklemi ele alınsın. $f(t, x)$ $D \subset R^2$ tanım bölgesinde (t_0, x_0) aralığında bir noktada tanımlı, sürekli bir fonksiyon olsun.

Bu problem t_0'ı içeren bazı aralıklarda belirlenir ve $x(t)$, I' da gerçel değerli diferansiyellenebilir fonksiyondur. $(t, x(t)) \in D$, $x' = f(t, x)$ diferansiyel denklemini ve $x(t_0)=x_0$'ı sağlar. Bu problem, başlangıç değer problemi diye adlandırılıp kısaca

$$x' = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.13}$$

ile gösterilir.

Fonksiyon yukarıdaki şartları sağlıyorsa başlangıç değer problemi (3.13)'ün çözümü diye adlandırılır. $x(t)$, I'da başlangıç değer problemi (3.13)'ün bir çözümü ise I' da sürekli $x'(t)$ birinci derece türevine sahiptir.

Yöntemlerden önce ayrıca, aşağıdaki temel teoremde, başlangıç değer problemi (3.13) ile aynı çözüme sahip denk formdaki bir integral denklemi kurulacaktır.

Teorem 3.3. Bir $x(t)$ fonksiyonu bir I aralığında

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \tag{3.14}$$

ancak ve ancak başlangıç değer problemi (3.13)'ün bir çözümü ise, (3.14) integral denkleminin çözümüdür.

İspat: $x(t)$, başlangıç değer problemi (3.13)'ün bir çözümü olsun. O halde (3.13)'ten $t \in I = [t_0,\ t]$ için

$$x'(t) = f(t,\ x(t)) \tag{3.15}$$

bulunur.

$x(t)$, (3.13)'ün bir çözümü ise I' da sürekli bir fonksiyondur. Çünkü I'da diferansiyellenebilirdir. $x(t)$, I'da sürekli, f'te D'de sürekli olduğu için, $F(t) = f(t,\ x(t))$ fonksiyonu D' de süreklidir. Bu yüzden I'da integrallenebilirdir.

(3.15)'in t_0'dan t' ye integrali alınırsa

$$x(t) - x(t_0) = f(s,\ x_{n-1}(s))\, ds$$

elde edilir.

Burada $x(t_0) = x_0$ alındığı için,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ x(s))\, ds$$

olur.

Tersine, $x(t)$ I'da, (3.14) şartını sağlarsa integral hesabının temel teoremi kullanıldığında, her $t \in I$ için $x(t)$'nin $x'(t)$ türevi,

$$x'(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ x(s))ds$$

olarak elde edilir.

Ayrıca (3.14)'ten $x(t_0) = x_0$ bulunur. Böylece $x(t)$ integral denklemi (3.14)'ü sağlarsa $x(t)$, başlangıç değer problemi (3.13)'ün bir çözümüdür.

Not 3.3. (3.14) bir integral denklemi diye adlandırılır. Çünkü $x(t)$ bilinmeyen fonksiyonu integral işareti altında gözükür.

Not 3.4. Tekrarlanabilir operatörler ardışık yaklaşıklar gibidir. Picard teoremi göz önüne alınırsa, başlangıç değer probleminin türev biçiminde, (3.13) yaklaşıkların ele alınan ifadesi, onun denk integral formundan daha zordur. Bu nedenle, yukarıda teoremde formülize edilip, uyarlanmıştır. İlk önce, Picard'a göre ardışık yaklaşıklar tanıtılacaktır.

Şimdi Picard'ın ardışık yaklaşıkları tanımlanacaktır. $x(t_0) = x_0$ ise, $x_0(t) = x_0$ sabit fonksiyonu tanımlansın. Bu sabit fonksiyon başlangıç koşulunu sağlasa bile, genel integral denklemini sağlamaz. Fakat

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (s,\ x_0(s))\ ds \tag{3.16}$$

bulunursa $x_1(t)$, $x(t)$'ye $x_0(t)$'den biraz daha yakın olabilir. Benzer bir yoldan $x_2(t)$, $x_3(t)\ldots$ bulunabilir. Bu metot başarılı bir şekilde sürdürülürse,

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (s,\ x_{n-1}(s))\ ds \tag{3.17}$$

elde edilir.

Picard teoreminin kritik noktası, verilen başlangıç değer problemi (3.13)'ün tek çözümü $n \to \infty$ iken $x_n(t) \to x(t)$ olmasıdır.

Ayrıca metotlardan önce, aşağıdaki örneklerde birkaç ardışık yaklaşık hesaplanacaktır.

Örnek 3.4. $x' = 1 + tx$, $x(0) = 1$ başlangıç değer probleminin ilk dört yaklaşığını bulunuz?

İlk yaklaşık $x_0(t) = x(0) = 1$ olarak bulunur. İkinci yaklaşık,

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (s,\ x_0(s))\ ds = x_0 + \int_{0}^{t} [\ 1 + s\ x_0(s)]\ ds$$

$x_0(t) = 1$ yaklaşığı kullanılırsa,

$$x_1(t) = 1 + \int_{0}^{t} (\ 1 + s\ )\ ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} \tag{3.18}$$

bulunur.

Şimdi, $$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (\ s,\ x_1(s))\ ds = x_0 + \int_{0}^{t} [\ 1 + s\ x_1(s)]\ ds \tag{3.19}$$

olur.

(3.19)'de $x_1(t)$ yaklaşığı kullanılırsa,

$$x_2(t) = 1 + \int_{0}^{t} 1 + \mathrm{s}\left[\ 1 + s + \frac{s^2}{2}\right] ds$$

$$x_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8}$$

bulunur.

$$x_3(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (\ s,\ x_2\ (s)\ ds = x_0 + \int_{0}^{t} \left[\ 1 + s x_2\ (s)\right]\ ds \tag{3.20}$$

olsun.

$x_2(t)$ yaklaşığı (3.20)'de kullanılırsa,

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t \left[1 + s \left(1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{8} \right) \right] ds$$

$$= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^5}{15} + \frac{t^6}{48}$$

olur.

Örnek 3.5. Aşağıdaki başlangıç değer probleminin ilk dört yaklaşığını

$$x'(t) = x + t \ , \quad x(0) = 1$$

$x_n(t)$ n-inci yaklaşığını ve $x_n(t)$ dizisinin limitini bulunuz?

Verilen denklem integral denklemine denktir.

$$x(t) = 1 + \int_0^t [\, s + x(s)] \, ds$$

olur.

İlk olarak $x_0(t) = x(0) = 1$ birinci yaklaşığı tanımlansın. Verilen ardışık yaklaşıklar ile

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t (s+1) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!}$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t \left(s + 1 + s + \frac{s^2}{2!} \right) ds$$

$$= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3!}$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t \left[s + \left(1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3!} \right) \right] ds$$

$$= 1 + t + \left(t^2 + \frac{t^3}{3} \right) + \frac{t^4}{4!}$$

$$x_4(t) = 1 + \int_0^t \left[s + \left(1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4!} \right) \right] ds$$

$$= 1 + t + \left(t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{3.4} \right) + \frac{t^5}{5!}$$

bulunur.

Bu işlemler sürdürülürse,

$$x_n(t) = 1 + t + 2 \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

elde edilir.

$n \to \infty$ olarak limit alınırsa,

$$0 < t < 1 \text{ iken } n \to \infty \text{ alındığında } \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ olduğu için}$$

$$x(t) = 1 + t + 2\,(e^t - t - 1)$$

olur.

Böylece verilen diferansiyel denklemin tam çözümünün $x(t) = 2e^t - t - 1$ olduğu kolayca görülebilir.

Not 3.5. Verilen lineer denklem bir çözüm ise, Picard ardışık yaklaşıkları başlangıç değer problemi (3.13)'ün tam çözümüne yakınsar.

Not 3.6. Picard ardışık yaklaşıklarının hesabında, ayrıca başlangıç yaklaşığı aynı zamanda sabit bir fonksiyon dışından da alınabilir. Genelde böyle yaklaşıkların bir dizisinin başlangıç değer probleminin bir çözümüne yakınsayacağı söylenemez. Bu nokta örneklerin birinden sonra gösterilecektir.

Ayrıca metotlardan önce aşağıda bunların yaklaşıkları hakkında iki kritik bilgi verilecektir.

(a). Verilen tanım bölgesinde ardışık yaklaşıkların iyi tanımlandığı bir aralık vardır.

(b). Ardışık yaklaşıklar bu aralıklarda sürekli fonksiyonlar olarak vardır.

(t_0, x_0) noktası civarındaki R kapalı dikdörtgensel bölgesi düşünülürse,

$$R = \left\{ (t, x) \in \Re^2 \;:\; |t - t_0| \le a,\; |x - x_0| \le b,\; a, b > 0 \right\}$$

$f(t, x)$ R' de süreklidir, $f(t, x)$ R'de sınırlıdır. Bu nedenle her $t, x \in R$ için R'de

$$|f(t, x)| \le M \tag{3.21}$$

olacak şekilde bir M sabiti vardır.

(a) kullanılarak aşağıdaki işlemler sürdürülür.

Tanımdan verilen yaklaşıklar ile

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s))\, ds, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

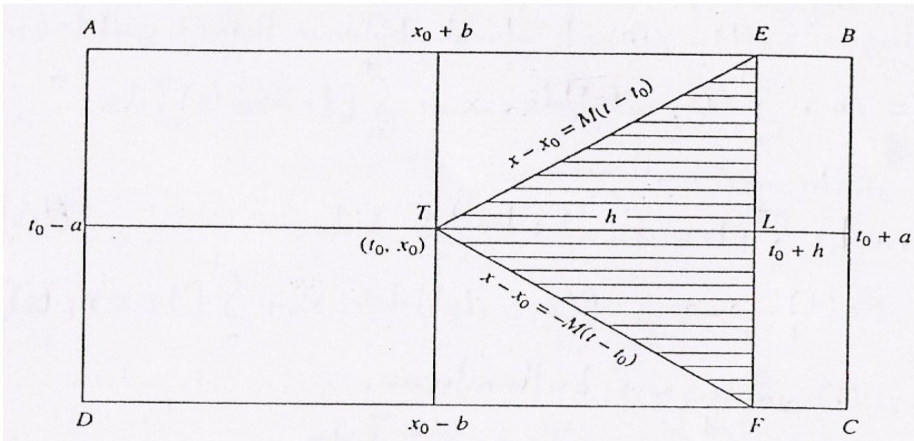
bulunur. Böylece

$$|x_k(t) - x_0| \le M\, |t - t_0| \tag{3.22}$$

olur. Bu yaklaşıklar (t_0, x_0)'dan geçen farklı eğrileri gösterir ve verilen R bölgesinde $k \to \infty$ alındığında çözüm eğrisi ile çakışır. Birinci yaklaşıktan bu eğrilerin

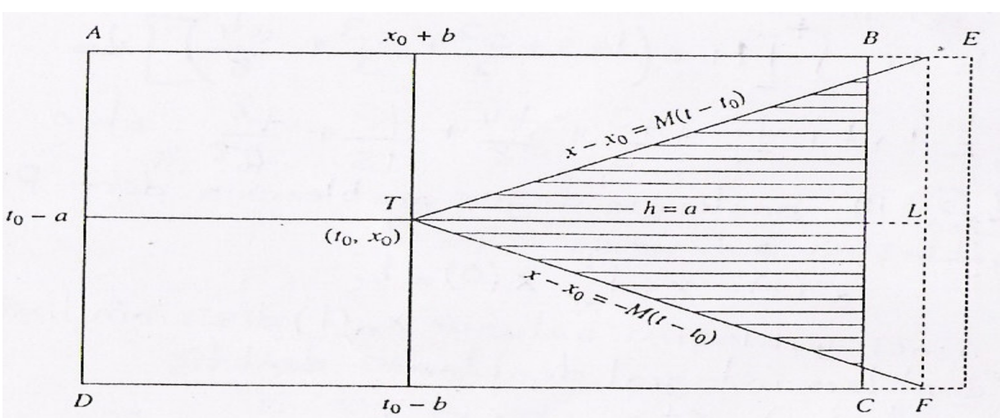
$$x - x_0 = M\,(t - t_0) \quad \text{ve} \quad x - x_0 = -M\,(t - t_0) \tag{3.23}$$

arasında uzandığı görülür.(3.23) denklemindeki bu iki doğru Şekil 3.1 veya Şekil 3.2'den görülür ki E ve F ' nin her ikisi de dikdörtgensel bölgenin AB ve DC kenarını kesecektir. Bu durumda aralığın uzunluğu yatayda h olsun. Uzunluk R ' de t_0 'dan h ' a belirlenecektir.



Şekil 3.1. $TL = h = \dfrac{b}{M} < a$.

$(t_0 + h,\ x_0 + b)$ noktası Şekil 3.1'de AB kenarı üzerinde uzanır. Buradan $x_0 + b - x_0 = M(t_0 + h - t_0)$ olur. $h = \dfrac{b}{M} < a$ 'yı verir. Bu durumda $h = \dfrac{b}{M} < a$ alınır. (3.23) denklemindeki doğrular Şekil 3.2' de E ve F 'nin AB ve DC 'yi kestiği gösterilirse o halde $h = \dfrac{b}{M} > a$ ve $|t - t_0| < \dfrac{b}{M}$ aralığı R bölgesinin dış tarafındaki noktaları verir.



Şekil 3.2. $h = a < TL = \dfrac{b}{M}$.

Bu nedenle $h=a$ seçilir, yaklaşım eğrileri R bölgesinin içinde uzanır. $h=\min(a,\frac{b}{M})$ olur.

Bu durumda $|t - t_0| <$ h aralığının varlığı bulunur.

$h=\min(a,\frac{b}{M})$ 'de $|t - t_0|<h$ aralığının varlığı kurulduktan sonra yaklaşıklar tanımlandı aşağıdaki teoremde (d) formu kullanılabilecektir.

Teorem 3.4. Ardışık yaklaşıkların dizisi

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (s,\ x_{k-1}(s)\ ), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.24}$$

ise $I=|t - t_0| < h = \min\left(a,\ \frac{b}{M}\right)$'de sürekli fonksiyonlar olarak vardır ve $(t,\ x_k(t\ ))$ her bir $t\in\ I$ için R'dedir ve her $t\in I$ için x_k

$$|\ x_k(t)-x_0\ |\le M\,|\ t-t_0\ | \tag{3.25}$$

ı sağlar.

İspat: Teorem matematiksel tümevarımla ispatlanacaktır. Her $t\in I$ için $x_0(t)=x_0$ sürekli bir fonksiyondur. $k = 0$ için sürekli bir fonksiyon olarak vardır ve (3.25)'i sağlar. $t\in\ I$ için

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (s,\ x_0\ (s))\ ds$$

olur. Buradan

$$|\,x_1\ (t) - x_0| \le \left|\int_{t_0}^{t} |f\ (\ s,\ x_0\ (s)|\ ds\right| \le M\ |\ t - t_0| < \mathrm{M}\ \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{M}} = b$$

olur. Bu da x_1'in (3.25) eşitsizliğini sağladığını gösterir. Buradan da $(\ t,\ x_1) \in R$ olduğundan, belirlenen x_0 için $f(t,x_1)$ I'da sürekli bir fonksiyondur.

Böylece $x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (s,\ x_0)\ ds$ bir $f(t,x_0)$ sürekli fonksiyonunun integralinin üst limitinin fonksiyonu olduğu için, I'da sürekli bir fonksiyon olarak vardır.

Bu durumda yukarıdaki adımdan teoremin $k=1$ için doğru olduğu çözülmüştür. Bu yüzden teoremin k için doğru olduğu varsayılırsa ve aşağıda matematiksel tümevarımla $k + 1$ için doğruluğu ispatlanır.

$x_k(t\ )$'nin I'da sürekli bir fonksiyon olduğu varsayılırsa, sürekli bir türeve sahiptir ve her $t\ \in I$ için

$$|x_k(t) - x_0| \leq b$$

olur.

Böylece varsayım ile $t \in I$ için $(t, x_k(t)) \in R$ ve bu sebeple her $t \in I$ için $f(t, x_k(t))$ R' de vardır ve süreklidir.

$$|f(t, x_k(t)| \leq M$$

yi sağlar. Şimdi

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\, ds$$

olduğu düşünülsün.

$f(t, x_k(t))$, I' da sürekli olduğu için, buradan $x_{k+1}(t)$ sürekli bir fonksiyonun integralinin üst limitinin fonksiyonudur. Bu yüzden $t \in I$ için $x_{k+1}(t)$ vardır ve süreklidir. Ayrıca

$$|x_{k+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s) ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s))|\, ds \leq M \int_{t_0}^{t} ds$$

olur. Bu

$$|x_{k+1}(t) - x_0| \leq M \int_{t_0}^{t} ds = M(t - t_0) \leq M\, b \leq b$$

olduğunu ispatlar.

Bu nedenle, $(t, x_{k+1}(t)) \in R$ ve böylece $f(t, x_{k+1}(t))$ R de sürekli bir fonksiyon olarak vardır. Bu yüzden teorem, tümevarımla k'nın tüm değerleri için doğrudur.

Örnek 3.6. Aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümünün varlığını, h' ın olası en iyi değerleri için bulunuz?

$$x'(t) = x^2, \quad x(1) = -1$$

Çözüm: $t = 1$ civarında ve $x(t) =$ -1'de tanımlıdır. Bu yüzden çözüm, (- 1, 1) aralığında $a, b > 0$ için

$$|t - 1| \leq a \quad \text{ve} \quad |x + 1| \leq b$$

olduğundan R dikdörtgensel bölgesi civarında seçilebilir. R' de

$$M = \max |f(t, x(t))|$$

tanımlansın. O halde

$$f\ (t,\ x\ (t))\ =\ x^2 \text{ ve } -(1+b) < x < b-1$$

den

$$\max\left|f\ (t,\ x)\right|\ =\ (b\ +1)^2$$

olur. Buradan

$$h\ = \min\left(a,\ \frac{b}{(1+\ b)^2}\right)$$

dir.

$F\ (b) = \dfrac{b}{(1+b)^2}$ minumum değer olsun. $F'(b)\ = \dfrac{1\ -\ b}{(\ b\ +1\ )^3}$ dir. Buradan $b = 1$ alınırsa $F'(b) = 0$ olur.

b=1'de $F''(b)\ = \dfrac{-1}{2^3}$ negatif olduğundan, $b = 1$ $F(b)$'nin maksimum değerini verir. Böylece $F(1)\ =\ \dfrac{1}{4}$' tür. Buradan h, a ile $\dfrac{1}{4}$ arasında minimum değer olarak seçilmek zorundadır.

Bu yüzden $a\ \geq\ \dfrac{1}{4}$ ise, o halde $h\ = \dfrac{b}{(1\ +\ b)^2} \leq \dfrac{1}{4}$ a'dan bağımsızdır. $a < \dfrac{1}{4}$ ise o halde $h\ <\ \dfrac{1}{4}$ tür. Her iki durumda da $h\ \leq \dfrac{1}{4}$ bulunur. Bu sebeple

$$h\ = \left[a,\ \frac{b}{(\ b\ +\ 1)^2}\right] = \min\left(a,\ \frac{1}{4}\right)\ =\ \frac{1}{4}$$

olur.

Bu, teoremde h' ın muhtemel en iyi değeridir ve

$$|\ t\ -\ 1\ |\ \leq \frac{1}{4} \text{ veya } \frac{3}{4}\ \leq\ t\ \leq\ \frac{5}{4}$$

aralığına uygundur.

Başlangıç için gerekli bilgiler geliştirildi, şimdi bir durumda, bu bölümün asıl varlık ve teklik teoremi kurulacaktır.

Teorem 3.5. (Picard)

(c) $f\ (t,\ x)$,

$$R\ = \left\{\ (t,\ x):\ \left|t\ -\ t_0\ \right| \leq\ a,\ \left|x\ -\ x_0\right| \leq\ b,\ \ a,\ b\ >\ 0\ \right\}$$

kapalı dikdörtgeni üzerinde gerçel değerli sürekli bir fonksiyon olarak tanımlansın ve her $(t,\ x)\ \in\ R$ için $|f\ (t,\ x)| \leq M$ olsun.

(d) $f(t,\ x)$, x'e göre her (t, x_1) ve $(t,\ x_2) \in\ R$ için k Lipschitz sabitiyle birlikte

$$|f\ (t,\ x_1)\ -\ f\ \ (t,\ x_2)|\ \leq k\ |x_1\ -\ x_2|$$

Lipschitz şartını sağlasın.

O halde

$$x_0(t)\ =\ x_0, \qquad x_{n+1}(t)\ =\ x_0\ +\ \int_{t_0}^{t} f\ (t,\ x_n(s))\ ds \tag{3.26}$$

ardışık yaklaşıkları $I =\ |\ t\ -\ t_0\ |\ <\ h\ = \min\left\{\ a,\ \dfrac{b}{M}\right\}$ aralığında

$$x'(t)\ =\ f(t,\ x), \qquad x_0(t_0) = x_0$$

başlangıç değer problemi (3.13)'ün bir $x(t)$ tek çözümüne yakınsar.

Uyarı 3.1. $f(t,x)$ R'de sürekli olduğundan, her $(t,x) \in R$ için $|f(t,x)| \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Ayrıca yaklaşıkların $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ için $I = |\ t - t_0\ | \leq h$ aralığında sürekli fonksiyonlar olarak varlığı ve iyi tanımlandığı zaten belirtildi. Bu yüzden teoremde sadece bu aralık dikkate alındı.

İspat: Teorem aşağıda 3 adımda ispatlanır.

Adım 1. Bu adımda (3.26) ardışık yaklaşıklarının (x_n) dizisinin yakınsaması ele alınacaktır. Bunun için $x_n(t)$ dizisi ile birlikte bir seri birleştirilecektir. Yaklaşıkların farkı terimlerdir ve birleşik serinin kısmi toplamlarının dizisi $(x_n(t))$ dir. Yaklaşıkların özellikleri ve $f(t, x_n)$'de Lipschitz şartıyla birlikte serinin pozitif sabitleri ile iyi bilinen yakınsak bir seri tarafından üstten sınırlandırılır, buradan Weierstrass M - testi yardımıyla $x_n(t)$'nin düzgün yakınsadığı sonucuna varılır.

$$x_n(t) = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})$$

olsun. Bu yüzden serinin n- inci kısmi toplamı $x_n(t)$

$$x_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty}\ [x_i(t) - x_{i-1}(t)] \tag{3.27}$$

olur.

Bu yüzden $x_n(t)$ dizisinin yakınsaması, (3.27) serisinin yakınsamasına denktir.

Teorem 3.4 ile ardışık yaklaşıkların $x_n(t)$ dizisi, $t\in I$ için $(t,x_n(t))\in R$ ve $h=\min\left(a,\ \dfrac{b}{M}\right)$'de, $I = |t - t_0| < h$ aralığında sürekli fonksiyonlar olarak vardır ve iyi tanımlanmıştır. Şimdi $t > t_0$ veya $t_0 < t < t_0 + h$ için ispat yapılacaktır, $t < t_0$ veya $t_0 - h < t$ için ispat benzerdir.

Teorem 3.4' te her $t \in I$ için

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq M.|t - t_0| \tag{3.28}$$

bulunur. Yaklaşıkların tanımı kullanılırsa,

$$x_2(t) - x_1(t) = \int_{t_0}^{t} [\ \mathrm{f}\,(s, x_2(s)) - \mathrm{f}\,(s, x_1(s))]\ ds$$

olur. Buradan

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \left|\left[f(s, x_2(s) - f(s, x_1(s))\right]\right| ds$$

dir. f Lipschitz şartı (3.25)'i sağladığı için,

$$|x_2(t) - x_1(s)| \leq k.\int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_0(s)|\ ds$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte, (3.27) kullanılırsa

$$|x_2(t) - x_1(s)| \leq k.M\int_{t_0}^{t} |s - t_0|\,ds = \frac{k.M\,(t - t_0)^2}{2}$$

bulunur. Buradan

$$|x_2(t) - x_1(s)| \leq \frac{k.M\,(t - t_0)^2}{2} \tag{3.29}$$

elde edilir.

Benzer bir sonuç aralığın diğer yarısı için doğrudur. Tümevarımla ispat yapılacaktır. $t \in I$ için

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{M\ k^{n-1}|t - t_0|^n}{n!} \tag{3.30}$$

olur. (3.28) ve (3.29)' dan $n = 1,2$ için sonucun doğru olduğu görülür.

n için sonuç doğru olsun ve $t \leq t_0$ veya $t \in [t_0 - h,\ t_0]$ için ispat benzer olduğundan $t \geq t_0$ veya $t \in [t_0, t_0 + h]$ için $n + 1$ ispatlanır.

$x_{n+1}(t)$ ve $x_n(t)$'nin tanımından,

$$x_{n+1}(t)-x_n(t)=\int_{t_0}^{t}[f(s,x_n(s))-f(s,x_{n-1}(s)]\,ds$$

olur. Buradan

$$\left|x_{n+1}(t)-x_n(t)\right|\le\int_{t_0}^{t}\left|f(s,x_n(s))-f(s,x_{n-1}(s))\right|ds$$

olur. $f\ (t,\ x)$ Lipschitz şartını (3.25)'i sağladığından,

$$\left|\ x_{n+1}(t)-x_n(t)\right|\le k\int_{t_0}^{t}\left|x_n(s)\sim x_{n-1}(s)\right|ds$$

olur. n için varsayım doğru olduğundan yukarıdaki (3.30) kullanılırsa

$$\left|x_{n+1}(t)-x_n(t)\right|\le\frac{kMk^{n-1}}{n!}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^n\,ds$$

$$=\frac{Mk^n}{n!}\frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)}=\frac{Mk^n\left|\,t-t_0\right|^{\,n+1}}{(n+1)!} \tag{3.31}$$

elde edilir.

Bu yüzden sonuç $(n+1)$ için doğrudur. Bu nedenle $n=1,2,3,\ldots$ için tümevarımla sonuç doğrudur.

$$\frac{Mk^n(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{Mk^nh^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{M}{k}\frac{k^{n+1}h^{n+1}}{(n+1)!} \tag{3.32}$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

(3.31) ve (3.32)'den

$$\left|x_{n+1}(t)-x_n(t)\right|\ \le\ \frac{M}{k}\frac{k^{n+1}h^{n+1}}{(n+1)!} \tag{3.33}$$

olur.

(3.33)'ten görülür ki, $x_o(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\ \left[x_n(t)-x_{n+1}(t)\right]$ serisi, pozitif sabitlerin $\frac{M}{k}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!}$ yakınsak kuvvet serisi tarafından baskındır. Bu yüzden (3.27) serisi Weierstrass M - testi ile $t_0\le t\le t_0+h$ için düzgün yakınsar. Bu nedenle $x_o(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\ \left[x_n(t)-x_{n+1}(t)\right]$ sadece n - inci kısmı toplamı $x_n(t)$'dir. $x_n(t)$, $t_0\le t\le t_0+h$'daki her bir t için $n\to\infty$ için bir limite yönelir. Her bir $x_n(t)$ fonksiyonu sürekli ve $x_n(t)\to x\ (t)$ düzgün yakınsadığından $\left[t_0,\ t_0+h\right]$ aralığında, $x\,(t)$ limit fonksiyonu süreklidir.

Adım 2. Şimdi $x(t)$ limit fonksiyonunun, başlangıç değer problemi (3.13)'ün bir çözümü olduğu gösterilecektir. Bunun için ilk olarak $f\left(t,\ x_n(t)\right)$ nin $f\left(t,\ x(t)\right)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı ispatlanır.

Her bir $x_n(t)$ $[t_0, t_0+h]$ için $|x_n(t)-x_0| \le b$'yi sağladığından $\left(t,\ x(t)\right) \in R$ ve $[t_0, t_0+h]$ için $|x(t)-x_0| \le b$ olduğu belirtilmişti. Bu yüzden $f\ (t,\ x(t))$ bu aralıkta tanımlıdır. $f(t,x)$ Lipschitz şartını sağladığından $t \in [t_0, t_0+h]$ için

$$|\ f(t,x(t)) - f(t,x_n(t))\ | \le \mathrm{k}\,|x(t)-x_n(t)\ | \tag{3.34}$$

olur. $x_n(t) \to x(t)$ düzgün yakınsadığından, $[t_0,\ t_0\ +\ h]$ için her t ve her $n\ \ge\ n_0$ için verilen $\varepsilon > 0$

$$|\ x(t)\ -\ x_n(t)\ | < \frac{\varepsilon}{k} \tag{3.35}$$

da bir $n_0 > 0$ vardır

Her $n\ \ge\ n_0$ her $t\ \ge\ t_0$ veya $[t_0,\ t_0\ +\ h]$ için (3.34)'te (3.35) kullanılırsa

$$\left|f\ (\ t,\ x(t))\ -\ f\ (t,\ x_n(t))\right|\ =\ \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu da $f\ (t,\ x_n(t))$ fonksiyonlarının dizisinin $f\ (t,\ x(t))$'ye düzgün olarak yakınsadığını ispatlar.

f R'de sürekli ve x_n, $[t_0,\ t_0\ +\ h]$ de sürekli olduğundan, $f\ (t,\ x_n)$ her $n\ =\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$ için bu aralıkta süreklidir.

Bu yüzden şartlar, integral işareti altında limit alındığı için $\mathrm{n} \to \infty$ alındığında $f\ (t,\ x_n) \to f\ (t,\ x\ )$ dizisi için geçerlidir. Bu nedenle

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f\ (t,\ x_n\ )\ dt$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f\ (t, x_n(t))\ dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (t, x(t))\ dt$$

olur. Bu durum, $[t_0,\ t_0\ +\ h]$ için $x(t)$ limit fonksiyonunun

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (t,\ x(t))\ dt$$

integral denklemini sağladığını gösterir. Teorem 3.1'den $x(t)$ limit fonksiyonu, $[t_0,\ t_0\ +\ h]$ için $x(t_0) = x_0$ olduğundan $x'\ (t)\ = f\ (t,\ x)$'i sağlar. Bu, $[t_0,\ t_0\ +\ h]$ için temel başlangıç değer problemi (1.1)'in çözümünün varlığını ispatlar.

Adım 3. Burada sadece Gronwall eşitsizliği kullanılarak, başlangıç değer problemi (3.13)'ün çözümünün tekliği ispatlanacaktır. Başlangıç değer problemi (3.13)'ün çözümü yalnız $x(t)$ olmasın, başka çözüm de $y(t)$ olsun. O halde her ikisi de $[t_0,\ t_0\ +\ h]$ için integral denklemini sağlar. Buradan

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (s,\ x\ (s))\ ds$$

$$y(t)\ =\ x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (s,\ y\ (s))\ ds$$

olur. O halde

$$|\ x(t)\ -\ y(t)\ |\ \leq \int_{t_0}^{t} \left| f\ (s,\ x(s)\ -\ f\ (s,\ y(s)) \right|\ ds$$

olur. f R' de, Lipschitz şartını sağladığı için,

$$\left| x(t)\ -\ y(t) \right| \leq k \int_{t_0}^{t} \left| x(s)\ -\ y(s) \right|\ ds$$

bulunur. Tartışma ve Sonuç kısmında Sonuç 5.1'de bu durum ayrıntılı olarak işlenecektir. Her $[t_0,\ t_0\ +\ h]$ için

$$\left| x(t)\ -\ y(t) \right|\ = 0$$

elde edilir. Bu da her $t \in\ [t_0,\ t_0\ +\ h]$ için $x(t) \equiv\ y(t)$'yi verir. Bu, $x(t)$'nin başlangıç değer problemi (3.13)'ün tek çözümünü verdiğini ispatlar. Böylece Picard teoremi tamamen ispatlanmış olur.

Uyarı 3.2. Picard'ın teoremi lokal varlık teoremi diye adlandırılır. Çünkü teorem, sadece t_o'ın komşuluklarında bir çözümü garanti eder. Picard'ın teoremi yardımıyla genelde başlangıç değer problemi (3.13)'ün herhangi bir çözümü bulanamayabilir. Çünkü ardışık yaklaşıkların içinden gelen integraller çok karmaşıklaşmış olabilir ve hesabı zordur. Teoremin asıl vurgusu, çok genel şartlar altında bir başlangıç değer problemi(3.13)'ün çözümünün varlık ve tekliğini iddia etmektir. Diferansiyel denklemlerin teorisinde böylesi teoremler varlık ve teklik teoremi diye adlandırılır. Bu yüzden teoremin teorik olarak önemi, başlangıç değer problemlerini çözmenin pratik olarak yararından daha fazladır.

Aşağıdaki teoremde, $x_n(t)$ n-inci yaklaşımı ile $x(t)$ çözümü yaklaşıklarında hata için bir üst sınır elde edilecektir.

Teorem 3.6. $x_n(t)$ n-inci ardışık yaklaşıkları Teorem 3.5'in başlangıç değer problemi (3.13)'ün $x(t)$ çözümünü her $t \in I$ için sağlar ve

$$| \, x(t) - x_n(t) \, | \leq \frac{M}{k} \frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!} e^{kh}$$

olur.

İspat: Teorem 3.5' ten

$$x(t) = x_o + \sum_{p=1}^{\infty} \left[x_p(t) - x_{p-1}(t) \right]$$

ve

$$x_n(t) = x_o + \sum_{p=1}^{n} \left[x_p(t) - x_{p-1}(t) \right]$$

dir. Böylece

$$\left| x(t) - x_n(t) \right| = \left| \sum_{p=n+1}^{\infty} \left[x_p(t) - x_{p-1}(t) \right] \right|$$

$$\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \left| \, x_p(t) - x_{p-1}(t) \, \right| \tag{3.36}$$

bulunur. Önceki Teoremin (3.30)'undan, $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\left| x_n(t) - x_{n-1}(t) \right| \leq \frac{M}{k} \frac{(kh)^n}{n!} \tag{3.37}$$

olur. (3.36)'da (3.37) kullanılırsa

$$\left| x(t) - x_n(t) \right| \leq \frac{M}{k} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(kh)^p}{p!} = \frac{M}{k} \frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(kh)^p}{p!} \tag{3.38}$$

elde edilir. $\sum_{p=o}^{\infty} \frac{(kh)^p}{p!}, e^{kh}$ 'ın bir üstel toplam serisidir. (3.38)'den

$$\left| x(t) - x_n(t) \right| \leq \frac{M}{k} \frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!} e^{kh}$$

bulunur.

Not 3.7. $\varepsilon_n = \dfrac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!}$ olsun. Bu genelde e^{kh} ile gösterilen yakınsak üstel serinin (n + 2). nci terimidir. $n \to \infty$ alındığında $\varepsilon_n \to 0$ olur.

Not 3.8. Yukarıdaki (3.7) notu üzerinde Picard teoreminin 2. adımı kullanılabilirse

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds$$

bulunur. $n \to \infty$ alındığında $x_{n+1}(t) \to x(t)$ olduğu bilinir ve $t \in I$ için $x(t)$ sürekli bir fonksiyondur . İspatın tamamlanması için,

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

göstermek yeterlidir. $x(t)$ aşağıdaki

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

başlangıç değer problemi (3.13)'ün çözümüne denk olan integral denklemini sağlar. Buna göre Not 3.7'den x, I ' da sürekli ve f , R 'de sürekli olduğu için, buradan $\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ I da t ' nin sürekli bir fonksiyonu olarak vardır. Ayrıca

$$\left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} \left| f(s, x(s)) - f(s, x_n(s)) \right| ds$$

olur. $f \in L(R, k)$ için

$$\left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} s, x_n(s))\, ds \right| \leq k.\int_{t_0}^{t} \left| x(s) - x_n(s) \right|\, ds$$

elde edilir. Not 3.7' den $n \to \infty$ alındığında her bir $t \in I$ için

$$\left| \int_{t_0}^{t} f\,(s, x(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f\,(s, x_k(s)\, ds \right| \leq k\,\frac{M}{k}\,\frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{kh}\,\left| t - t_0 \right| \to 0$$

elde edilir. Böylece $x(t)$ integral denklemini sağladığından başlangıç değer problemi (3.13)'ün çözümüdür.

Aşağıdaki örnek Lipschitz şartının Picard teoreminin hipotezinden çıkarılamayacağını gösterir.

Örnek 3.7. Aşağıdaki başlangıç değer problemini inceleyiniz.

$$x'(t) = 2x^{1/2}, \qquad x(0) = 0$$

$f(t, x) = 2x^{1/2}$ olsun. O halde $x_1 \to 0$ alındığında

$$\frac{\left| f(t, x_1) - f(t, 0) \right|}{\left| x_1 - 0 \right|} = \frac{2x_1^{1/2}}{\left| x_1 \right|} = \frac{2}{\sqrt{x_1}}$$

bulunur. $f\ (t,\ x)$ sınırsızdır. Bu yüzden $f(t,\ x)$, (0, 0)'ın komşuluğunda Lipschitz şartını sağlamaz.

$$x(0) = 0, \qquad x_0(t) = 0$$

olduğu için Picard teoreminin tekliğinin sonunda, Lipschitz şartının yokluğunun doğruluğunun boşa çıkarılacağı görülecektir.
Birinci yaklaşık kullanılırsa,

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\ ds = x_0$$

bulunur. $x_0 = 0$ için $x_1(t) = 0$ olur.

Benzer bir mantıkla $x_2(t), x_3(t)...$ nin tümü sıfırdır. $n \to \infty$ alındığında $x_n(t) \to 0$ olduğundan $x_n(t)$'nin limit fonksiyonu Picard'ın teoremi ile başlangıç değer problemi (3.13)'ün çözümü $x(t) \equiv 0$'dır.

$x'(t) = 2x^{1/2}$ olduğu için, $\dfrac{dx}{x^{1/2}} = 2dt$'nin integrali alınırsa $2x^{1/2} = 2t + c$ bulunur. başlangıç şartında $c = 0$ kullanılır. Bu yüzden $x = t^2$ başlangıç değer problemi (3.13)'ün çözümüdür ve bu çözüm Picard teoreminden elde edilen $x(t) \equiv 0$ çözümünden farklıdır. Böylece Picard teoreminin çözümünün tekliği, Lipschitz şartının varsayımı çıkarıldığında hatalıdır.

Yukarıdaki örnek Lipschitz şartı çıkarıldığında Picard teoreminin çözümünün teklik kısmı etkileyiciliğini gösterir. Bu yüzden, Picard teoremi yalnız Lipschitz şartı olmaksızın başlangıç değer probleminin çözümünün varlığına sahip olup olmadığını doğal yoldan araştırır. Bu durum aşağıdaki Cauchy – Peano teoremine uygundur.

Teorem 3.7. (Cauchy –Peano Varlık Teoremi) $f(t,x)$, R kapalı dikdörtgeninde sürekli bir fonksiyon olsun ve R'de $|f(t,x)| \le M$ olsun. $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ olsun. O halde $|t - t_0| \le h$ aralığında

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x'(t_0) = x_0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü vardır.

3.3. Çözümlerin Başlangıç Şartlarına Bağımlılığı

Çok ilginçtir ki, başlangıç şartlarında kurulan Picard ardışık yaklaşıkları, başlangıç şartlarının fonksiyonlarının çözümleri olduğu görülür. Çözüm $x\ (t, t_0, x_0)$ ile gösterilebilir. Bu yüzden, farklı başlangıç şartları için aynı denklemin farklı çözümlerinin elde edilmesi aşikardır. Aşağıdaki teoremde Gronwall eşitsizliği yardımıyla, tüm bu çözümlerin t_0 ve x_0 ın sürekli fonksiyonları olacağı anlatılacaktır.

Teorem 3.8. $a \le t \le b$ için

(**e**) $x' = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$, (**f**) $x' = f(t,x),\ x(t_0*) = x_0*$,

iki başlangıç değer problemi

$x(t) = x\ (t,\ t_0,\ x_0)$ ve $x*(t) = x\ (t,\ t_0*,\ x_0^*)$ sırasıyla bu problemlerin çözümleri olsun. D' de her $t \in [a,\ b\ ]$ için $f \in L(D,k)$ ve $|f(t,x)| \le M$ olsun.

O halde verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $a \le t \le b$ için $\left| t - t_0{}^* \right| < \delta$ ve $\left| x - x_0{}^* \right| < \delta$ olacak şekilde bir δ >0 varsa, $\left| x(t) - x^*(t) \right| < \varepsilon$ olur.

İspat: Başlangıç şartlarında, $t_0, t_0^* \in [a,b]$, $t_0^* > t_0$, $x(t_0) = x_0$ ve $x(t_0^*) = x_0^*$ verilsin. O halde Picard teoreminden, $x\ (t)$ ve $x*(t)$ tek çözümü aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$x(t) = x_0(t) + \int_{t_0*}^{t} f(s, x(s))ds$$

$$x*(t) = x_0*(t) + \int_{t_0*}^{t} f(s, x*(s))ds$$

$$x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

$$x^*(t) = x_0^*(t) + \int_{t_0^*}^{t} f(s, x^*(s))ds$$

$$x(t) - x^*(t) = x_0(t) - x_0{}^*(t) + \int_{t_0}^{t_0^*} f(s, x(s))\,ds + \int_{t_0^*}^{t} f(s, x(s))\,ds - \int_{t_0^*}^{t} f(s, x^*(s))\,ds$$

$$= x_0 - x_0{}^* + \int_{t_0}^{t_0^*} f(s, x(s))\,ds + \int_{t_0^*}^{t} \left[f(s, x(s))\,ds - f(s, x^*(s)) \right] ds$$

elde edilir. $f \in L(D,k)$ olduğundan her $t, x \in D$ için

$$\left| f(s, x(s) - f(s, x^*(s)) \right| \le k \left| x(s) - x^*(s) \right|$$

ve

$$\left| f(t, x(s)) \right| \le M$$

olur. Her $t \in [a,b]$ için

$$\left|x(t) - x^*(t)\right| \le \left|x_0 - x_0^*\right| + M \left| (t_0 - t_0^*) \right| + \int_{t_0^*}^{t} k \left|x(s) - x^*(s)\right| ds$$

olur.

$k = \left| x_0 - x_0 * \right| + M \left| (t_0 - t_0 *) \right|$ ve $f(s) = \left| x(s) - x*(s) \right|$, $g(s) = k$ alınır ve Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|x(t) - x^*(t)\right| \le \left[\left|x_0 - x_0^*\right| + M \left| t_0 - t_0^*\right| \right] \exp \int_{t_0^*}^{t} k\, ds$$

$$= \left[\left|x_0 - x_0^*\right| + M \left|t_0 - t_0 *\right|\right] \exp k\,(t - t_0^*)$$

bulunur. Buradan

$$\left|x(t) - x*(t)\right| \le \left[\left|x_0 - x_0 *\right| \right] \exp k\,(b - a) \qquad (3.39)$$

olur. Bu kısmidir.

$$x - x_0 = M(t - t_0) \qquad (3.40)$$

$(t_0, t_0 *)$ ' da olacaktır. $[a,b]$' deki her t için (3.40)'da (3.39) kullanırsa,

$$\left| x(t) - x^*(t) \right| \le \left[2 \left|x_0^* - x_0\right| \right] \exp k(b - a)$$

olur. Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2\exp[k(b-a)]}$ seçilir.

$\left|x_0 * - x_0\right| < \delta(\varepsilon)$ olduğu için,

$$\left|x(t) - x^*(t)\right| < 2\frac{\varepsilon}{2\exp k(b-a)} \exp k(b - a) = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\left|t - t_0 *\right| < \delta(\varepsilon)$ ve $\left|x_0 - x_0 *\right| < \delta(\varepsilon)$ ispatlanır.

Not 3.9. Başlangıç şartları değiştirildiğinde farklı çözümler biri diğerinin komşuluğunda uzanan aynı başlangıç değer problemine benzerdir. δ ve ε küçük ise aynı zamanda $\left|x(t) - x*(t)\right|$'de küçüktür, $\delta = \varepsilon = 0$ ise, o halde $x(t) = x^*(t)$'dır ve başlangıç değer probleminin birçok çözümü verilen (t_0, x_0) noktasından geçer.

3.4. Çözümlerin Fonksiyonlara Bağımlılığı

Geçen bölümde, başlangıç noktasının komşuluğundaki başlangıç değer probleminin iki farklı çözümünün farklı başlangıç şartları ile nasıl davrandıkları açıklandı. Çözümlerin, başlangıç şartlarının sürekli fonksiyonları olduğu daha fazla titizlikle işlendi. Bu bölümde iki farklı fonksiyonun iki başlangıç değer problemi arasında bağlantı elde edilecektir ve fonksiyonlar biraz değiştiğinde çözümlerin nasıl değiştiği açıklanacaktır. Bunun için çözümlerin fonksiyonlara bağımlılığı hakkında bilgi verilecek, Gronwall Eşitsizliği'nin genelleştirilmiş formuna, k sabiti, t' nin bir fonksiyonu tarafından değiştirildiği zaman ihtiyaç duyulacaktır ve bu yüzden aşağıdaki teoremde ilk olarak böylesi bir eşitsizlik kurulacaktır.

Teorem 3.9. $t \in I$ $t \geq t_0$ için f, g ve h sürekli fonksiyonlar olarak tanımlanırsa

$$f(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^{t} g(s) f(s)\, ds$$

eşitsizliği $t \geq t_0$ için

$$f(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^{t} g(s) h(s) \exp\left[\int_{s}^{t} g(u) du\right] ds$$

anlamına gelir.

İspat:
$$f(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^{t} g(s) f(s) ds \tag{3.41}$$

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} g(s) f(s) ds$$

olsun. O halde $t \geq t_0$ için

$$z'(t) = g(t) f(t) \tag{3.42}$$

olur. I' da $g(t) \geq 0$ olduğundan (3.41)'nin her iki yanı $g(t)$ ile çarpılır ve (3.42)'de kullanılırsa,

$$z'(t) \leq g(t)[h(t) + z(t)]$$

$$z'(t) - g(t)\, z(t) \leq g(t)\, h(t)$$

bulunur. Bu bir integral çarpanın bulunması ile çözülecek birinci dereden diferansiyel bir denklemdir.Bu integral çarpanı,

$$\exp\left[-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right]$$

dur. Buradan çözüm,

$$z(t)\ \exp\left[-\int_{t_0}^{t} g(u)du\right] \le \int_{t_0}^{t} g(s)h(s)\ \exp\left[-\int_{t_0}^{s} g(u)du\right] ds$$

$$z(t) \le \int_{t_0}^{t} g(s)h(s)\left[\exp\ -\int_{t_0}^{s} g(u)du\right]\exp\left[\int_{t_0}^{t} g(u)du\right]ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} g(s)h(s)\exp\left[\int_{s}^{t} g(u)du\right]ds \qquad (3.43)$$

bulunur. (3.43)'te $z(t)$ yerleştirilirse,

$$\int_{t_0}^{t} g(s)f(s)ds \le \int_{t_0}^{t} g(s)h(s)\ exp\left[\int_{s}^{t} g(u)du\right]ds \qquad (3.44)$$

olur. (3.41)'de (3.44)'ün sol tarafı tekrar yazılırsa daha az eşitsizlik elde edilir.

$$f(t)-h(t) \le \int_{t_0}^{t} g(s)h(s)\ \exp\ \left[\int_{s}^{t} g(u)du\right]\ ds$$

elde edilir. Başka bir ifadeyle,

$$f(t) \le h(t) + \int_{t_0}^{t} g(s)h(s)\ \exp\ \left[\int_{s}^{t} g(u)du\right]\ ds$$

bulunur. Bu eşitsizlik, Gronwall eşitsizliğinin genel formuyla ispatlanır.

Bu eşitsizlik kullanılırsa aşağıdaki teorem bulunacaktır.

Teorem 3.10. $R = \left\{(t,x) = \left|t-t_0\right| \le a,\ \left|x-x_0\right| \le b\right\}$ olsun. f ve g R'de şu şartları sağlayan iki sürekli fonksiyon olsun: **(g)** x'e göre $f \in L(R,k)$'dır.

(h) Verilen ε >0 ve her $t,x \in R$ için $\left|f(t,x)-g(t,x)\right| < \varepsilon$'dur.

$x_1(t)$ *ve* $x_2(t)$; $[t,\ x_1(t)]$, $[t,x_2(t)] \in R,$ $\left|\ t-t_0\ \right| < h$ için aşağıdaki başlangıç değer problеminin çözümleri olsun:

$$x'(t) = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (3.45)$$

$$x'(t) = y(t,x), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (3.46)$$

O halde $h = t - t_0$ için $\left|x_1(t)-x_2(t)\right| \le \frac{\varepsilon}{k}\left(e^{kh}-1\right)$

olur.

İspat: Picard teoreminden,

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (s, x_1(s))\ ds$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g\ (s, x_2(s))\ ds$$

olur. Buradan

$$x_1(t) - x_2(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\ ds - \int_{t_0}^{t} g(s, x_2(s))\ ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left[f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s) \right]\ ds + \int_{t_0}^{t} \left[f(s, x_2(s)) - g(s, x_2(s)) \right]\ ds$$

elde edilir. (f) ve (g) şartları kullanılırsa,

$$\left| x_1(t) - x_2\ (\mathrm{t}) \right| \le k \int_{to}^{t} \left| x_1(t) - x_2(t) \right|\ ds + \varepsilon\ (t - t_0) \tag{3.47}$$

bulunur. Gronwall eşitsizliğine başvurulup,

$h(t) = \varepsilon(t - t_0),\ \ g(t) = k, \quad f(t) = x_1(t) - x_2(t)$ alınırsa

$$\left| x_1(t) - x_2(t) \right| \le \varepsilon\ (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} (s - t_0)\ k\ \ \exp\left[\int_{s}^{t} k\ \ du \right] ds$$

$$= \varepsilon\ (t - t_0) +\ k\varepsilon \int_{t_0}^{t} (s - t_0)\ e^{k(t-s)} ds \tag{3.48}$$

bulunur. Burada (3.48)'in sağ tarafının integrali değerlendirilecektir:

$$k\varepsilon \int_{to}^{t} (s\ -\ t_0) e^{-k(s-t)} ds = \frac{-k\varepsilon}{k} \int_{t_0}^{t}\ (s - t_0)\ d\left[e^{-k(s-t)} \right]$$

$$= -\varepsilon \left[(s - t_0)\ e^{-k(s-t)} - \int_{t_0}^{t} e^{-k(s-t)} ds \right]$$

$$= -\left[(s - t_0)\ e^{-k(s-t)} + \frac{e^{-k(s-t)}}{k} \right]_{t_0}^{t}$$

$$= -\varepsilon \left[(t - t_0) + \frac{1}{k} - \frac{e^{-k(t_0 - t)}}{k} \right] \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.48)'de (3.49) kullanırsa,

$$\left| x_1(t) - x_2(t) \right| \le \frac{\varepsilon}{k} e^{k(t-t_0)} - \frac{\varepsilon}{k} = \frac{\varepsilon}{k} (e^{kh} - 1)$$

eşitsizliği elde edilir. $\left| t - t_0 \right| = h$ için

$$\left|x_1(t)-x_2(t)\right| < \frac{\varepsilon}{k}(e^{kh-1})$$

olur.

3.5. Çözümlerin Devamı

Picard teoremine göre, D bölgesindeki kapalı bir R dikdörtgeninin (t_0, x_0) başlangıç noktası civarında başlangıç değer probleminin çözümü elde edildi ve R 'de $h=\min(a,\dfrac{b}{M})$ ile R ' de $f\ (t,\ x) \leq M$ için yakınsamanın aralığı tanımlandı. Muhtemel en iyi h bölgenin bir parçası olarak R kapalı dikdörtgeninde tanımlandı ve çözüm, sol kenar üzerindeki $\left(t_o-h,\ t_0\right)$ da ve sağ kenar üzerindeki $\left(t_o,\ t_o+h\right)$'da elde edildi, dikdörtgenin dış tarafındaki noktalar dikkate alınmadı. Bu yüzden çözümün muhtemel en iyi aralığın dış tarafında var olup olmadığı sorusu ortaya çıkar. Soru ilk olarak şunlarla cevaplanır:

(**ı**) Çözümün tanımlı olduğu en geniş açık aralık üzerinde tanımlı olması

(**i**) Genel bir bölgede çözümün devamı için şartların oluşturulması.

Picard'ın teoreminde aynı notasyon kullanılır, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.12. En geniş açık aralıkta çözüm $x(t)$ ile $x(t_0)=x_0$'ın tanımlı olduğu iki tipten biridir:

(**j**) $[a,b]$ a ve b ' nin her ikisi ile ve a veya b ' den biri ile sınırlıdır.

(**k**) Bütün t ekseni boyunca $-\infty < t < +\infty$ olur.

İspat: D, $(t,\ x)$ düzleminde $\left(t_0, x_0\right)$'ın içi de dahil olmak üzere verilen bir bölge olsun. R dikdörtgeni dikkate alınsın.

$$R=\left\{\ (t,x)=\left|t-t_o\right| \ \leq\ a,\ \left|x-x_o\right|\ \leq\ b,\ \ a,b>0\right\}$$

olsun. Picard teoremi, $\left|\ t-t_o\right| \ \leq h$'da başlangıç değer probleminin $x(t)$ tek çözümünü garanti eder.

$$x' = f\left(t,x\right),\quad x\left(t_o\right)=x_o \tag{3.50}$$

ve $x(t)$ çözümü $\left|\ t-t_o\right|\ \leq\ h$ aralığının dışında tanımlı değildir. $x(t)$ çözümü $(t,\ x_1)\in D$ olarak tanımlandığında R'nin uç noktasına doğru ise, o halde $t_1 =\ t_0\ +\ h$ ve $x_1 = x(t_1)$'dir.

Şimdi $(t_1,\ x_1) \in\ D$ noktası ve Picard teoremi ile orada $x'(t) = f(t,\ x)$'in bir $\bar{x}\ (t)$ tek çözümü vardır. Bu durumda $\bar{x}\ (t_1)\ =\ x_1$ olur ve bu çözüm $h_1 > 0$ için $t_1 \leq\ t\ \leq\ t_1 +\ h_1$ 'deki bazı aralıklarda vardır.

$y(t)$ çözümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$y(t) = \begin{cases} t_0 - h \leq t \leq t_0 + h = t_1 & \text{için } x(t) \\ t_1 \leq t \leq t_1 + h_1 & \text{için } \bar{x}(t) \end{cases}$$

$|t - t_0| <\ h$'ın dışında, $t_o - h \leq t \leq t_1 + h_1$ en geniş aralıklarında $y(t)$'nin başlangıç değer problemi (3.50)'nin çözümü olduğu ispatlanacaktır.

$y(t)$ fonksiyonları bu aralıkta sürekli fonksiyonlar olduğundan $y(t_0) = x(t_0) = x_0$ olur. $t_0 - h \leq t \leq t_0 + h$ aralığında

$$x(t) = x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))ds \tag{3.51}$$

bulunur. Bu aralıkta $y(t)\ =\ x(t)$ olduğu için (3.51)'de bu aralıkta olur.

$$y(t) = x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, y(s))ds \tag{3.52}$$

olur. $t_0 + h = t_1 \leq t \leq t_1 + h_1$ aralığı üzerinde düşünüldüğünde,

$$x(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, x(s))ds \tag{3.53}$$

olur. (3.53) tanımı kullanılarak,

$$y(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f\left(s, y(s)\right)\ ds \tag{3.54}$$

bulunur. Şimdi (3.51)'den

$$x_1 = x(t_1) = x_o + \int_{t_o}^{t_1} f\left(s, x(s)\right)\ ds$$

dir. Bu aralıkta $x(s)\ =\ y(s)$ olduğu için yukarıdaki gibi tekrar yazılabilirse,

$$x_1 = x\ (t_1) = x_o + \int_{t_o}^{t} f\left(s, y(s)\right)\ ds \tag{3.55}$$

elde edilir. (3.54)'te (3.55) kullanılırsa h_1>0 için $t_0 + h \leq t \leq t_1 + h_1$ aralığında

$$y(t) = x_o + \int_{t_o}^{t_1} f\left(s, y(s)\right)ds + \int_{t_1}^{t} f\left(s, y(s)\right)\ ds$$

$$= x_o + \int_{t_o}^{t} f\left(s, y(s)\right)\, ds \tag{3.56}$$

elde edilir.

(3.52) ve (3.56) birleştirilirse; $y(t)$ h_1>0 için $t_0 - h \le t \le t_1 + h_1$ genişletilmiş aralığında (3.56) integral denklemini sağladığı sonucuna varılır. $y(t)$ aralıkta sürekli olduğu için, aynı zamanda $f\ \left(t,\, y(t)\right)$ aralıkta süreklidir. Buradan $y'(t) = f\left(t, y(t)\right)$ olur. Böylece genişletilmiş fonksiyon $\left[t_o\ \text{-}\ h,\ t_1 + h_1\right]$'de başlangıç değer problemi (3.13)'ün bir çözümüdür.

$y(t)$ fonksiyonu, $x(t)$'nin çözümünün $\left[x_0\ \text{-}\ h,\ x_1 +\ h_1\right]$ aralığına devamı diye adlandırılır. Picard teoremi $\left[\ t_1\ +\ h_1,\ \ y\ (t_1 + h_1)\ \right]$ uç noktalarında tekrar uygulanırsa, h_2>0 ve $t_2 = t_1 + h_1$ için $t_0 - h \le t \le t_2 + h_2$ sabit geniş aralığı üzerinde devamı elde edilir. Bu yöntem sonsuza kadar tekrarlanırsa, çözüm h_n>0 için sayılamayan geniş bir $t_0 - h \le t \le t_n + h_n$ aralığında $\left(t_o + h,\ x(t_o + h)\right)$'dan çok uzağa genişletilerek başarılı bir şekilde devam ettirilebilir. Benzer bir metot uyarlanarak çözüm $t_o - h$'ın sol tarafında en geniş bir aralığa genişletilebilir.

Sağ ve sol uç noktalarının her iki tarafında bu yöntemin sürdürülebilirliği sınırsızdır. Çözümler sayılamayan geniş $\left[a_n, b_n\right]$ aralıklarına başarılı bir şekilde genişletilir. Çözümün devamının süreci aşağıdaki aralıkların ardışıklığından elde edilir:

$$\left[t_o - h,\ t_o + h\right] \subseteq \left[a_o, b_o\right] \subseteq \left[a_1, b_1\right] \subseteq \left[a_2, b_2\right] \subseteq \ldots \subseteq \left[a_n, b_n\right] \subseteq \ldots..$$

Sonlu veya sonsuz limitin varlığında, $a = \lim a_n$ ve $b = \lim b_n$ olsun. Her iki durumda da, en geniş bir açık (a,b) aralığında, $\mathrm{y}\left(t_0\right) = x\left(t_0\right) = x_0$ için $y(t)$ çözümünün varlığı elde edilir. Limitler üzerine bağlı olan devam aralıkları aşağıdaki dört tipten herhangi biri olabilir:

$(i)\ (-\infty, b),\quad (ii)\ (a, \infty),\quad (iii)\ (a,b),\quad (iv)\ (-\infty, \infty)$

Bu durum, teoremin ispatını tamamlar.

Aşağıdaki teorem, bir D bölgesindeki çözümün devamı için yeterli bir minimum şartı verir.

Teorem 3.13. $f(t,\ x)$, $(t,\ x)$ düzleminin bazı D bölgelerinde sürekli olsun ve $f \in L(D,k)$ ve D'de sınırlı olsun. (h_1, h_2)'de $x(t)$ aşağıdaki başlangıç değer problemi (3.57)'nin tek çözümü

$$x'(t) = f(t,x), \qquad x(t_o) = x_o \tag{3.57}$$

dır. O halde

$$x(h_1 + 0) = \lim_{t \to h_1 + 0} x(t) \ \text{ ve } \ x(h_2 - 0) = \lim_{t \to h_2 - 0} x(t)$$

vardır.

$\left(h_1,\ x\ (\ h_1\ +\ 0)\right)$ veya $\left(h_2,\ x\ (h_2-0)\right)$ D'de ise, o halde $x(t)$ çözümü, h_2'nin solu veya h_1'in sağında sürekli olabilir.

İspat: $f(t,x)$, (t,x) düzleminin bazı bölgelerinde sürekli olsun ve başlangıç değer problemi(3.57), (h_1,h_2) için bir $x(t)$ çözümüne sahip olsun ve $x(t)$ çözümü $h_1 < t_0 < h_2$ için (t_o,x_o) noktasından geçsin. D' de $|f| \leq M$ ise,

$$x(h_1+0)=\lim_{t\to h_1+0} x(t) \quad \text{ve} \quad x(h_2-0)=\lim_{t\to h_2-0} x(t)$$

vardır. Şimdi çözüm , $t \in (h_1,h_2)$ için

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

olur. $h_1 < t_1 < t_2 < h_2$ dikkate alınırsa, o halde

$$x(t_1)=x_o+\int_{t_o}^{t_1} f\left(s,x(s)\right)\,ds$$

$$x(t_2)=x_o+\int_{t_o}^{t_2} f\left(s,x(s)\right)\,ds$$

bulunur. Böylece

$$\left|x(t_1)-x(t_2)\right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \left|f(s,x(s))\right|\,ds \leq M(t_2-t_1)$$

olur. Buradan $t_1,\,t_2 \to h_1+0,\ \ x(t_1)-x(t_2)\to 0$ için, integrallerin yakınsaklığının Cauchy kriteri ile $x(h_1+0)$ olduğunu gösterir. Benzer bir mantıkla $x(h_2-0)$ vardır.

D'de $(h_2,\ x(h_2-0))$ noktası varsayılsın ve (h_1,h_2)'de $\bar{x}(t)$

$$\begin{array}{ll} t\in(h_1,h_2)\text{ için} & \bar{x}(t)=x(t) \\ t=h_2\text{'de} & \bar{x}(t)=x(h_2-0) \end{array}$$

olarak fonksiyon tanımlansın.

$\left(h_1,\ h_2\right]$'de başlangıç değer problemi (3.57)'nin $x(t)$ çözümünün olacağı incelenecektir. Bunun için, $t=h_2$'de soldaki $\bar{x}(t)$ türevinin varlığı gösterilmek zorundadır.

$\bar{x}(t)$, $\left(h_1,\ h_2\right]$'de başlangıç değer problemi (3.57)'nin çözümü olduğu için, Picard teoreminden $t\in(h_1,h_2]$ için

$$\bar{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\,(s, \bar{x}(s))\,ds \tag{3.58}$$

bulunur. Buradan integral hesabının temel teoreminden sol taraftaki türev,

$$\bar{x}'_{-}(h_2) = \bar{x}'(h_2 - 0) = f(h_2,\ \bar{x}(h_2))$$

olarak bulunur.

$\bar{x}$ fonksiyonu x çözümünün $(h_1,\ h_2]$'ye kadar devamı diye adlandırılır. Ayrıca ileride bu metodun ispatı tamamlanabilir. Picard teoremi ile başlangıç değer problemi (3.57), $(x_2,\ x(h_2 - 0))$ noktasından geçen bir çözüme sahiptir ve bu çözüm $h>0$ için bazı $[h_2, h_2 + h]$ aralıklarında vardır. $\hat{x}(t)$,

$$\begin{aligned} t \in [h_1, h_2] &\text{ için} \quad \hat{x}(t) = \bar{x}(t) \\ t \in [h_2, h_2 + h] &\text{ için} \quad \hat{x}(t) = y(t) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın ve $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ olsun. $[h_2, h_2 + h]$'de $\hat{x}(t)$'nin başlangıç değer problemi (3.57)'nin çözümü olacağı gösterilecektir.

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f\,(s, \hat{x}(s))\,ds \tag{3.59}$$

olsun. $(h_1, h_2]$ aralığında, $\hat{x}(t) = \bar{x}$ olur. Bu yüzden $\hat{x}(t)$ (3.58) ile aralıkta çözümdür.

$t \in (h_2, h_2 + h)$, $h>0$ için çözümün devamının tanımından,

$$\hat{x}(t) = x(h_2 - 0) + \int_{h_2}^{t} f\,(s, \hat{x}(s))\,ds \tag{3.60}$$

dir. (3.59)'dan,

$$x(h_2 - 0) = \hat{x}_0 + \int_{t_0}^{h_2} f\,(s, \hat{x}(s))\,ds \tag{3.61}$$

olur. (3.60)'da (3.61) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x}_0 + \int_{t_0}^{h_2} f\,(s, \hat{x}(s))\,ds + \int_{h_2}^{t} f\,(s, \hat{x}(s))\,ds \\ &= \hat{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f\,(s, \hat{x}(s))\,ds \end{aligned} \tag{3.62}$$

bulunur. $\hat{x}(s)$'nin devamlılığı, $f(s, \hat{x}(s))$'nin devamlılığı anlamına gelir. Böylece (3.62) ayrılırsa $t \in [h_1, h_2 + h]$, $h>0$ için

$$\hat{x}'(t) = f(t, \hat{x})$$

elde edilir. Bu yüzden $\hat{x}$, $h>0$ için $[h_1, h_2]$'den $(h_1, h_2 + h]$'a çözümün devamıdır.

Böylece $(h_2, x(h_2 - 0))$'dan geçen hemen hemen bir çözüm varsa ispat biter, o halde çözüm $\hat{x}\,(h_2,\ h_2 + h]$' ye tamamlanabilir.

Tanım 3.2. $\hat{x}(t)$ fonksiyonu, $x(t)$ çözümünün $(h_1, h_2]$'ye devamı diye adlandırılır ve $\hat{x}(t)$ $h > 0$ için $(h_1, h_2 + h)$'de $\hat{x}(t)$ çözümünün bir devamı olarak adlandırılır.

Not 3.7. $x(t)$'nin $(h_1, h_2 + h)$'a birçok devamı $(h_2, x(h_2 - 0))$'ın içinden geçen başlangıç değer problemi (3.57)'nin çözümü olduğu belirtildi. Bu devamlar için, en geniş aralıkların bulunması metodu $(h_1, h_2 + h)$ gibi tekrarlanmış bağ olabilir. Böylece bölgenin sınırına ulaşılır.

Not 3.8. Yukarıdaki teoremle $f\ (t,\ x)$ fonksiyonu bölge olmaksızın sınırlandırılmıştı, aşağıdaki örnek ile bunun çıkarılamayacağı gösterilecektir.

Örnek 3.8. Aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümünü (-1,0) için çözünüz.

$$x'(t) = x^2, \qquad x(0) = 0$$

Bu denklemin çözümü, $(t,\ x)$ düzleminde (-1,1) noktasından geçen $x = -\dfrac{1}{t}$'dir ve çözüm (-1, 0)'da vardır. Fakat $x(t)$, (-1, 0]'da tanımlı olmadığı için (-1, 0]'a tamamlanamaz. Çünkü çözüm $t = 0$' da sınırsızdır.

3.6. Çözümlerin Lokal Olmayan Varlığı

Önceki bölümün tüm anlatımı içinde, başlangıç noktası civarında Picard teoreminin başlangıç değer problemi (3.13)'ün çözümünün varlık ve tekliğini garanti ettiği görüldü ve çözümün sürdürülebilirliğini tüm bölgelerde ispatlamak zorunludur. Picard teoremi bölgenin tüm noktalarında tanımlı olduğu için başlangıç noktası civarında çözümü verdiği ve $|t - t_0| \le a$ aralığından baştanbaşa geçmediği için, lokal bir varlık teoremi olarak adlandırılır. $|t - t_0| \le a$ aralığının tümü üzerinde çözüm var olduğu taktirde, lokal olmayan şekilde çözümün varlığı söylenir. Bu yüzden bu bölümde bazı lokal olmayan varlık teoremleri elde edilecek. Böylesi çözümler bazı zamanlar genişlik içindeki çözümler olarak adlandırılır.

Teorem 3.14. f , S

$$S = \{(t, x) : |t - t_0| \le a,\ \ |x| < \infty,\ a > 0\}$$

şeridinde gerçel sürekli bir fonksiyon olsun ve f, S'de $k>0$ sabitiyle Lipschitz şartını sağlasın. O halde (x_k) ardışık yaklaşıkları

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{3.63}$$

problemi için $|t-t_0| \le a$' nın tüm aralıklarında vardır ve (3.63)'ün bir $x(t)$ çözümüne yakınsar.

İspat: İlk olarak, verilen bölge aşağıda veya yukarıda sınırlı değildir. Buradan S'de $f(t,\ x)$ in sınırlılığa ihtiyaç duyulmadığından Picard teoremindeki $(x_n(t))$ yaklaşıkları bulunamayabilir

Bununla birlikte Picard teoreminde,

$$x_0(t) + \sum_{p=1}^{\infty}[x_p(t) - x_{p-1}(t)] \tag{3.64}$$

seri dikkate alınacaktır. n-inci kısmi toplam $x_n(t)$ dir ve $x_n(t) \to x(t)$ başlangıç değer problemi (3.13)'ün çözümünü verir.

$f(t,\ x)$, S' de sınırlı olmadığı için, serinin farklı terimlerini tahmin etmenin farklı bir metodu edinilecektir.

$$M_0 = |x_0| \quad \text{ve} \quad M_1 = \max|x_1(t)|$$

olsun. x_0 verildiği için M_0 vardır. Şu gerçek görülür ki, aşağıda M_1 iyi tanımlanmıştır.

$f(t,\ x)$, S'de sabit bir x_0 için süreklidir. $f(t,x_0)$, $|t-t_0| \le a$'da sürekli bir fonksiyondur.

Bu yüzden $x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t,x_0)ds$ bu aralıklarda sürekli bir fonksiyondur. Böylece $|x_1(t)|$ bu aralıklar içinde maksimumdur. $x_1(t)$, M_1 olarak alınmalıdır. M_0, M_1 bilindiğine göre $M = M_0 + M_1$ olsun.

Böylece tanımdan açıktır ki,

$$|x_0(t)| = |x_0| \le M \quad ve \quad |x_1(t) - x_0(t)| \le M \tag{3.65}$$

elde edilir. $t_0 \le t \le a$ ise, o halde

$$\begin{aligned} |x_2(t) - x_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s,x_1(s)) - f(s,x_0(s))]ds \right| \\ &\le \int_{t_0}^{t} |f(s,x_1(s)) - f(s,x_0(s))|ds \end{aligned}$$

$$\leq k\int_{t_0}^{t} \left|x_1(s)-x_0(s)\right|ds \leq kM(t-t_0) \tag{3.66}$$

olur.

$$\left|x_3(t)-x_2(t)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} \left[f(s,x_2(s))-f(s,x_1(s))\right]ds\right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \left|f(s,x_2(s))-f(s,x_1))\right|ds$$

$$\leq k \int_{t_0}^{t} \left|x(s) - y(s)\right|ds \tag{3.67}$$

bulunur. (3.67)'de (3.66) kullanılırsa

$$\left|x_3(t)-x_2(t)\right| \leq k^2 M\int_{t_0}^{t}(s-t_0)ds = \frac{k^2 M}{2}(t-t_0)^2$$

elde edilir. Bu yüzden genelde tümevarımla

$$\left|x_n(t)-x_{n-1}(t)\right| \leq \frac{k^{n-1}M(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

ispatlanabilir. Benzer düşünce $t_0 - a < t < t_0$ aralığı için doğrudur. Buradan her t için

$$\left|x_n(t)-x_{n-1}(t)\right| \leq \frac{k^{n-1}M(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\leq \frac{k^{n-1}M}{(n-1)!}a^{n-1}$$

bulunur. Bu yüzden

$$\left|x_0(t)\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n(t)-x_{n-1}(t)\right| \leq M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ka)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{3.68}$$

olur. Buradan (3.68)'in sol tarafındaki her bir terim, pozitif sabitlerin yakınsak serisinin terimlerinden daha az benzerdir. Bu yüzden Weierstrass M- testi ile (3.64) serisi $\left|t-t_0\right| \leq a$ aralığında düzgün yakınsar ve limiti $x(t)$'dir.

$x(t)$'nin (3.63)'ün bir çözümü olması aşağıdaki gibi işlemler olacağını gösterir. $x(t)$ nin

$$x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds = 0 \tag{3.69}$$

integral denklemini sağladığı gösterilmek zorundadır.

$$x_n - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds = 0 \tag{3.70}$$

olduğu bilinir. (3.69)'da (3.70)'den x_0' ın değeri kullanılır ve (3.69)'da tekrar yazılırsa,

$$x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds = x(t) - x_n(t)$$

$$+ [f(s, x_n(s))ds - f(s, x(s))]ds$$

elde edilir. Bu yüzden,

$$\left| x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right| \leq \left| x(t) - x_n(t) \right|$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left| f(s, x_{n-1}(s)) - f(s, x(s)) \right| ds \tag{3.71}$$

bulunur. $x_n(t) \to x(t)$ düzgün yakınsadığından $t \in [a - t_0,\ a + t_0]$ için, $n \to \infty$ alındığında (3.70)'in sağ tarafı 0'a gider. Böylece

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (s, x(s))\ ds \tag{3.72}$$

olur. Çözüm tek değilse, $[t_0,\ t_0 + a]$' da $y(t)$ diğer çözüm olsun. O halde

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\ ds \tag{3.73}$$

olur. (3.72) ve (3.73'ten,

$$\left| x(t) - y(t) \right| \leq \int_{t_0}^{t} \left| f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \right|\ ds$$

$$\leq\ k \int_{t_0}^{t} \left| x(s)\ -\ y(s) \right| ds \tag{3.74}$$

bulunur. Buradaki k Lipschitz sabitidir.

Sonuç olarak Gronwall eşitsizliği altında, (3.74)'ten $\left| y(t) - x(t) \right| = 0$ elde edilir. Bu da $y(t) = x(t)$ demektir. Çözümün tekliği ispatlanır.

Aşağıdaki teorem kullanılarak, tüm düzlem üzerinde, çözümün varlık ve tekliğinde aşağıdaki gibi bir sonuca varıldı.

Teorem 3.15. $f(t, x)$, $\left| t \right| < \infty\ ve \left| x(t) \right| < \infty$ düzlemi üzerinde a herhangi bir pozitif bir sayı için

$$S = \{(t,x): \ |\ \mathrm{t}\ | \le a,\ |x| < \infty\}$$

şeridinde Lipschitz şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. O halde her t için her başlangıç değer problemi (3.57), $x'(t) = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$ gibi var olan bir çözüme sahiptir.

İspat: t herhangi bir gerçel sayı ise, $a > 0$'dır. $|t - t_0| \le a$ aralığını içerir. Bunun için a, f fonksiyonu $S = \{(t,x): |t - t_0| \le a,\ |x(t)| < \infty\}$ şeridi üzerinde Teorem 3.14'ün şartlarını sağlar.

Teorem 3.14'ten $x_n(t)$ ardışık yaklaşıkları, başlangıç değer problemi (3.57)'nin tek çözümü için $x(t)$ ' ye yakınsar.

Sonraki teorem, $|x_n(t) - x_0(t)|$ var olduğunda, en geniş aralığı verir.

Teorem 3.16. $f(t,x)$ S şeriti

$$S = \{(t,x): |t - t_0| \le a, \quad |x(t)| < \infty\}$$

üzerinde sürekli olsun. $a > 0$'da $f \in Lip(S,k)$ olsun. O halde ardışık yaklaşıklar $|t - t_0| \le a$ $|f(t,x_0)| \le M$ için

$$|x_n(t) - x_0(t)| \le \frac{M}{k}(e^{ka} - 1)$$

i sağlar.

İspat: $f(t,\ x)$ sürekli olduğu için, $f(t,x)$ x ve t' de ayrı ayrı süreklidir. Böylece sabit bir x_0 için $f(t,\ x_0)$, $[t_0,\ t_0 + a]$'da süreklidir. Bu yüzden bir $M > 0$ vardır ve bu aralıkta $|f(t,x_0)| \le M$ 'dir. Böylece

$$|x_1(t) - x_0(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,x_0)\, ds \right|$$

$$\le \int_{t_0}^{t} |f(s,x_0)|\, ds \le M\ |t - t_0| \tag{3.75}$$

olur. (3.75) kullanıldığında,

$$|x_2(t) - x_1(t)| \le \frac{kM(t - t_0)^2}{2}$$

elde edilir. Tümevarım ile,

$$|x_p(t) - x_{p-1}(t)| \le \frac{k^{p-1} M (t - t_0)^p}{p!} \tag{3.76}$$

bulunur. $|t - t_0| \le a$ için $x_n(t)$ yerine seride (3.76) kullanılırsa,

$$\left| x_n(t) - x_0(t) \right| = \left| \sum_{p=1}^{n} x_p(t) - x_{p-1}(t) \right| \le \sum_{p=1}^{n} \left| x_p(t) - x_{p-1}(t) \right|$$

$$\le \frac{M}{k} \sum_{p=1}^{n} \frac{k^p \left| t - t_0 \right|^p}{p!} = \frac{M}{k} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p (t - t_0)^p}{p!}$$

$$\le \frac{M}{k}(e^{ka} - 1)$$

elde edilir. Bu da

$$\left| x_n(t) - x_0(t) \right| \le \frac{M}{k}(e^{ka} - 1) \tag{3.77}$$

i ispatlar. $\frac{M}{k}(e^{ka} - 1) = b$ alınırsa, o halde teoremin (3.77) formundan

$$\left| x_n(t) - x_0 \right| \le b$$

elde edilir. $n \to \infty$ olarak limit alınırsa $\left| x(t) - x(t_0) \right| \le b$ olur.

Şimdi R bölgesi

$$R = \{(t,x) : \left| t - t_0 \right| \le a, \quad \left| y - y_0 \right| \le b, \quad a,b > 0\}$$

dikkate alınacaktır.

R sınırlı ve S şeridi kapalı olduğu için $f(t,\ x)$ R'de süreklidir. Her $t, x \in R$ için pozitif bir N sabiti vardır ve $\left| f(t,x) \right| \le N$' dir.

Böylece Picard'ın (3.26) yöntemi kullanılarak, R'de başlangıç değer problemi (3.57)'nin çözümü kurulabilir.

Örnek 3.9. $f(t,x) \in L(D,k)$ ise $f(t,x)$ sürekli midir?

$f(t,x) = x + [t]$, $[t]$; x'ten biraz büyük veya x'e eşit tam sayı için $f(t,x)$, R'de Lipschitz şartını sağlar.

$$f(t,x_1) - f(t,x_2) = (x_1 - x_2)$$

için

$$\left| f(t,x_1) - f(t,x_2) \right| \le k \ \left| x_1 - x_2 \right|$$

olur. Herhangi sınırlı $D \subset R$ bölgesinde $f \in L(D,k)$ olur.

t bir sabit ise, $f(t,\ x)$ sürekli bir fonksiyondur. Fakat $[t]$ her t için süreksiz olduğundan $f(t,x)$ süreksizdir.

Örnek 3.10. Aşağıdaki başlangıç değer problemi için M, k, h' ı bulunuz?

$$x'(t) = x^2 + t^2, \quad x(0) = 0, \qquad R = \{(t,x) : \left| t \right| \le 1, \ \left| x \right| \le 1\}$$

hipotezde, $-1 < t < 1, \quad -1 < x < 1$ yazılırsa, buradan

$$M = |f(t,x)| = 2h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Ayrıca $f(t,x) = t^2 + x^2$ olur.

Böylece

$$f(t,x_1) - f(t,x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

olur.

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le \left(|x_1| + |x_2|\right)\left(|x_1 - x_2|\right)$$

yi verir.

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le 2\ |x_1 - x_2|$$

dir. Lipschitz sabiti $k = 2$ olarak bulunur.

4. BULGULAR

Başlangıç değer probleminin Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonlardan elde edilen ardışık yaklaşıklar ile tek çözüme sahip olduğu bulundu. Lipschitz şartının Picard teoreminin hipotezinden çıkarılamayacağı görüldü.

Başlangıç şartlarında kurulan Picard ardışık yaklaşıklarının başlangıç şartlarının fonksiyonları olduğu görüldü. Farklı başlangıç şartlarında başlangıç değer probleminin farklı çözümlerinin elde edilmesinin aşikar olduğu ve Gronwall eşitsizliği yardımıyla tüm çözümlerin t_0 ve x_0'ın sürekli fonksiyonları olduğu görüldü.

Çözümlerin sadece lokal bölgelerde değil lokal olmayan bölgelerde de var olduğu görüldü. Lokal olmayan varlık teoremlerindeki çözümlerin bazen genişlik içindeki çözümler olarak da adlandırıldığına işaret edildi.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Gronwall eşitsizliğinde $g\ (s\ ) = \ k$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.1. Eğer her $t\ \geq\ t_0$ için $f\ (t\ ) \leq k \int_{t_0}^{t} f\ (\ s)\ ds$ ise, o halde her $t\ \geq\ t_0$ için $f\ (\ t\ ) \equiv\ 0$ olur.

Her $\varepsilon > 0$ için verilen hipotez $t\ \geq\ t_0$ iken

$$f(t)\ \leq\ \varepsilon\ +\int_{t_0}^{t} k\, f\ (s\ )\ ds \tag{5.1}$$

olarak tekrar yazılabilir.

Buradan $t\ \geq\ t_0$ için Gronwall eşitsizliği kullanılırsa,

$$f\ (\ t\ )\ \leq\ \exp\ \left[\int_{t_0}^{t} k\ ds\right],$$

bulunur. Her $t\ \geq t_0$ için

$$f\ (t)\ \leq \varepsilon\ \ \exp\,[k(t-t_0)] \tag{5.2}$$

bulunur.

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, (5.2)'den $\varepsilon \to\ 0$ için $f\ (t\,) \equiv\ 0$ elde edilir.

Sonuç 5.2. f sürekli ve R 'de Lipschitz şartını sağlasın. x ve y x_0 'ı kapsayan I aralığında ise,

$$x'(t) = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

ifadesinin iki çözümüdür. O halde I aralığında her t için $x(t) = y(t)$ olur.

$|t-t_0| < h$ ve $\varepsilon > 0$ için Teorem 3.10'dan,

$$|\ x(t) - y(t)\ | \leq \frac{\varepsilon}{k}\left(e^{kh}-1\right)$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan yukarıdaki teoremde $\varepsilon \to 0$ alınabilir. Bunun sonucunda $x\,(t) = y\,(t)$ olur. Bu da Picard teoreminin çözümünün tekliğini ispatlar.

KAYNAKLAR

Amirali, G., Duru,H., 2002. ***Nümerik Analiz***. Pagema Yayıncılık

Caferoğlu, M.Y., Kaçar A.,1993. ***Lineer Adi Diferansiyel Denklemler İçin Sınır Değer Problemlerinin Yaklaşık Metotlarla Çözümü***. Erzurum.

Coddington, E.A., 1989. ***An Introduction to Ordinary Differential Equations.*** Dover Publications, Newyork.

Coddington, E.A., Levinson, N., 1984. ***Theory of Ordinary Differantial Equations.*** Krieger Publishing Company, Florida.

Edwards, C.H., Penney, Jr. D.E.,1996. ***Differential Equations and Boundary Value Problems, Computing and Modeling .*** New Jersey.

Erkip, A.K., 1985. ***Introduction to Theoretical Aspects of Ordinary Differantial Equations.*** Odtü Yayınları, Ankara.

Ross, S.L., 1974. ***Differantial Equations Second Edition.*** John Wiley & Sons, Inc, U.S.A.

Somasundaram, D., 2005. ***Ordinary Differantial Equations –A First Course***. Narosa Publishing House, New Delhi.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Diyarbakır’da doğdu. İlk orta ve lise öğrenimini Diyarbakır’da tamamladı. 1997 yılında Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü’nü kazandı. Ortam şartlarının ve bazı sorunlardan dolayı 2. sınıfta bu bölümü bırakmak zorunda kaldı. 1999 yılında Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nü kazandı. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2006 yılında Van Kavuncu İlköğretim Okulu’nda, 2007 yılında Van Şehit Kemal Görgülü İlköğretim Okulu’nda Matematik Öğretmenliği yaptı.