



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ
DİNAMİK DAVRANIŞ ANALİZİ**

**Bilg. Yük. Müh. Zeynep ORMAN
Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Danışman
Doç. .Dr. Sabri ARIK
Eylül, 2007**

İSTANBUL



İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ
DİNAMİK DAVRANIŞ ANALİZİ

Bilg. Yük. Müh. Zeynep ORMAN
Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman
Doç. .Dr. Sabri ARIK
Eylül, 2007

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımından dolayı çok değerli hocam Doç.Dr. Sabri ARIK'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen çalışma arkadaşım Tolga ENSARİ'ye ve bana her zaman destek olan aileme teşekkürü borç bilirim.

Eylül, 2007

Zeynep ORMAN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iii
ÖZET.....	vi
SUMMARY.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR.....	4
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	8
3.1. MATRİS SINIFLARI.....	10
3.2. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERDE DENGİ NOKTASI ANALİZİ.....	12
3.3. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN KARARLILIK TEOREMLERİ.....	13
3.3.1 Lyapunov Kararlılık Teoremi.....	14
3.3.2 Hurwitz Kararlılık Teoremi.....	15
3.3.3 LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi.....	16
4. COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ.....	18
4.1. GENEL YAPAY SİNİR AĞI MODELLERİ.....	18
4.2. COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞI MODELLERİ.....	21
4.3. COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ DENGİ NOKTASININ VARLIĞININ VE TEKLİĞİNİN ANALİZİ.....	29
4.4. COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ DENGİ NOKTASININ KARARLILIK ANALİZİ.....	42
5. BULGULAR.....	58
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	87
KAYNAKLAR.....	89
ÖZGEÇMİŞ.....	97

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 5.1 : Örnek 5.1 için $\tau = 0.5$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	60
Şekil 5.2 : Örnek 5.1 için $\tau = 0.5$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	60
Şekil 5.3 : Örnek 5.1 için $\tau = 1.0$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	61
Şekil 5.4 : Örnek 5.1 için $\tau = 1.0$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	61
Şekil 5.5 : Örnek 5.1 için $\tau = 2.0$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	62
Şekil 5.6 : Örnek 5.1 için $\tau = 2.0$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	62
Şekil 5.7 : Örnek 5.2 için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	64
Şekil 5.8 : Örnek 5.2 için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	64
Şekil 5.9 : Örnek 5.3 için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	65
Şekil 5.10 : Örnek 5.3 için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	65
Şekil 5.11 : Örnek 5.4 için $g(z(t)) = \tanh(z(t))$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	67
Şekil 5.12 : Örnek 5.4 için $g(z(t)) = \tanh(z(t))$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	67
Şekil 5.13 : Örnek 5.4 için $g(z(t)) = 0.5[z+1 - z-1]$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	68
Şekil 5.14 : Örnek 5.4 için $g(z(t)) = 0.5[z+1 - z-1]$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	68
Şekil 5.15 : Örnek 5.5 için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	69
Şekil 5.16 : Örnek 5.5 için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	69
Şekil 5.17 : Örnek 5.6 için $\tau = 0.5$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	71

Şekil 5.18 : Örnek 5.6 için $\tau = 0.5$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	71
Şekil 5.19 : Örnek 5.6 için $\tau = 1.5$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	72
Şekil 5.20 : Örnek 5.6 için $\tau = 1.5$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	72
Şekil 5.21 : Örnek 5.6 için $\tau = 2.0$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	73
Şekil 5.22 : Örnek 5.6 için $\tau = 2.0$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	73
Şekil 5.23 : Örnek 5.6 için $\tau = 0.5$ ve $g(z(t)) = 0.5[z + 1 - z - 1]$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	74
Şekil 5.24 : Örnek 5.6 için $\tau = 0.5$ ve $g(z(t)) = 0.5[z + 1 - z - 1]$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	74
Şekil 5.25 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	80
Şekil 5.26 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	80
Şekil 5.27 : $\tau = 1.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	81
Şekil 5.28 : $\tau = 1.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	81
Şekil 5.29 : $\tau = 2.0$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	82
Şekil 5.30 : $\tau = 2.0$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	82
Şekil 5.31 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = 0.5[z + 1 - z - 1]$ için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	83
Şekil 5.32 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = 0.5[z + 1 - z - 1]$ için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	83
Şekil 5.33 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 12$, $g(z(t)) = 0.5[z + 1 - z - 1]$ için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	84

Şekil 5.34 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 12$, $g(z(t)) = 0.5[z + 1 - z - 1]$ için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	84
Şekil 5.35 : $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için 4 farklı gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	85
Şekil 5.36 : $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için 4 farklı gecikmeli Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	85
Şekil 5.37 : $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için 16 farklı gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	86
Şekil 5.38 : $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için 16 farklı gecikmeli Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı.....	86

ÖZET

COHEN-GROSSBERG YAPAY SINIR AĞLARININ DİNAMİK DAVRANIŞ ANALİZİ

Bu tez çalışmasında, gecikme parametresinin sabit kaldığı ya da zamanla değiştiği Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarında, denge noktasının global kararlılığını sağlayan yeni koşullar elde edilmektedir. Bu kararlılık koşullarından bazıları, tanımlanan yeni Lyapunov fonksiyonlarının Lyapunov yaklaşımı ile test edilmesiyle elde edilmiştir. Bazı kararlılık koşulları ise, yine tanımlanmış Lyapunov fonksiyonlarına Halanay eşitsizliği prensibinin uygulanması ile elde edilmiştir. Elde edilen koşullar, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı sisteminin ağı parametreleri arasında gecikme parametresine bağlı olarak ya da gecikme parametresinden bağımsız olarak farklı ilişkiler kurmaktadır. Bu kararlılık koşulları elde edilirken, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı parametreleri üzerindeki genel kısıtlamalar oldukça esnek tutulmaya çalışılmıştır. Cohen-Grossberg yapay sinir ağı ara bağlantı matrislerinin simetrik olmadıkları varsayılmıştır. Kullanılan nöron aktivasyon fonksiyonlarının sınırlı, kesin artan ve türevi alınabilen gibi literatürde sıkça varsayılan özellikler, bu tez çalışmasında gözönüne alınmamış ve daha genel aktivasyon fonksiyonları kullanılmıştır.

Gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağları için elde edilen sonuçların özgünlüğünü göstermek için, bu sonuçlar, daha önce literatürde elde edilmiş olan diğer kararlılık sonuçları ile ayrıntılı olarak karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar, gerek teorik ve gerekse örnekler verilerek, bu çalışmada elde edilen sonuçların birçok durumda daha önceki sonuçlara göre daha avantajlı olduğunu göstermektedir.

SUMMARY

ANALYSIS OF DYNAMICAL BEHAVIOR OF COHEN-GROSSBERG NEURAL NETWORKS

In this thesis, we present some sufficient conditions for the existence, uniqueness and global asymptotic and exponential stability of the equilibrium point for Cohen-Grossberg neural networks with constant and time varying delays. Some of these stability conditions are derived by employing new Lyapunov functionals. Some results are derived by using Halanay inequality principle. The obtained results establish different relationships between the network parameters of the neural system depending or independent on the delay parameters. In obtaining the stability conditions, the restrictions on the network parameters are very much relaxed. We do not use the symmetry condition on the interconnection matrices. We also do not assume the boundedness and strictly increasingness of the functions.

In order to show the novelty of our results, we compare our results with the previous stability results derived in the literature. On the other hand, to prove the effectiveness of results we give some numerical examples together with the simulation results.

1. GİRİŞ

Cohen-Grossberg sinir ağları, Hopfield-tipi sinir ağları ve hücresel sinir ağları gibi farklı matematiksel modeller ile ifade edilen yapay sinir ağı sistemleri, özellikle son yıllarda birçok mühendislik probleminin çözümünde araç olarak kullanılmaktadır [1-5]. Bu uygulamalarda genel olarak işlenecek bilginin kararlı durum formunda olması arzu edilir. Bu nedenle yapay sinir ağlarında denge noktasının kararlılığı oldukça önemli bir gereksinimdir. Son yıllarda, kararlı durumlara sahip yapay sinir ağlarının tasarlanması ve analiz edilmesi önemli çalışma alanlarından birini oluşturmuştur. Birçok araştırmacı, farklı yapay sinir ağı modellerinin denge noktası ve kararlılık özellikleri üzerine çok sayıda çalışmalar yapmış ve denge noktasının tekliği ve global asimtotik kararlılığı için çeşitli yeterli koşullar elde etmişlerdir [6-25]. Bu çalışmalarda, elde edilen koşullar, yapay sinir ağı modellerinin çeşitli sınıfları için, tam kararlı, asimtotik kararlı, kesin kararlı ve üstel kararlı gibi kararlılığın çeşitli türlerini incelemektedir.

Yapay sinir ağlarının kararlılık özellikleri, genelde uygulandığı problemin yapısına bağlı olarak belirlenmektedir. Örneğin, yapay sinir ağı, optimizasyon problemlerini çözmek için kullanıldığında, başlangıç koşullarından bağımsız, sadece tek bir denge noktası olacak şekilde tasarlanmalı ve bu denge noktası global asimtotik kararlı olmalıdır [26]. Bununla birlikte, bir yapay sinir ağı, çağrışımlı bellek olarak tasarlandığında, başlangıç koşullarına bağlı olarak birden fazla denge noktasının olması istenir [27]. Bu tip bir uygulamada, bellekte saklanacak örüntüler, ağın kararlı durumları olacak şekilde bağlantı matrisleri seçilir. Bu şekilde, yapay sinir ağı, verilen herhangi bir örüntüye karşılık benzer bir örüntü üretilir. Bu tezin amacı ise, başlangıç koşullarından bağımsız ve kararlı tek bir denge noktasına yakınsayan Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının dinamik davranışlarının analizini yapmaktır.

1980'lerin başında Hopfield, bir dinamik yapay sinir ağı modeli geliştirmiş ve sistem kararlılığını analiz etmek için Lyapunov fonksiyonu olarak kullanılan bir enerji fonksiyonu önermiştir. Hopfield ele aldığı yapay sinir ağında, bağlantı matrisinin simetrik ve aktivasyon fonksiyonunun da sigmoid olduğunu gözönüne alarak, bu Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevinin negatif olduğunu göstermiştir. Bu da, sistemin global kararlı olduğu anlamına gelmektedir [28]. Yani, sistemin tüm çözümleri kararlı bir denge noktasına yakınsamaktadır. Bu nedenle, yapay

sinir ağılarında, simetrik bağlantı matrisinin kullanılması, sistemin global kararlılığı için yeterli bir koşuldur.

Bağlantı matrisinin simetrik olmasının, kararlı denge noktalarının varlığını kesinleştirmek için gerek bir koşul olmadığı, 1987 yılında Cohen ve Grossberg tarafından yapılan bir çalışmada gösterilmiştir [29]. Ayrıca, simetrik olmayan bağlantı matrislerinin kullanılması, yapay sinir ağlarında limit döngülerine, yani kararlı olmayan denge noktalarına yol açabilir [29].

Hopfield-tipi yapay sinir ağlarında, bağlantı matrisinin simetrik olma koşulu, global kararlılığı garanti ettiği halde, denge noktasının tekliği ve global asimtotik kararlılığı için her zaman yeterli bir koşul olmayabilir. Yapay sinir ağlarında global asimtotik kararlılığı belirlemek için, bağlantı matrisi üzerine daha fazla kısıtlama koymak gerekir. Bu kısıtlamalar da, kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının özelliklerine bağlıdır. Bu nedenle, bu tip yapay sinir ağlarının tasarlanmasında, gözönünde bulundurulması gereken iki önemli özellik vardır :

- (i) bağlantı matrisi üzerine getirilen koşullar,
- (ii) aktivasyon fonksiyonunun karakteristiği.

Hopfield-tipi yapay sinir ağlarında, aktivasyon fonksiyonlarının sınırlı ve monoton artan oldukları varsayılmaktadır. Sınırlı fonksiyonların kullanılması, bir denge noktasının varlığını garantiler. Bununla birlikte, bu varsayımlar, yapay sinir ağlarının uygulama alanlarını kısıtlamaktadır. Örneğin, sınırlı ve monoton artan fonksiyonların kullanılması, bazı optimizasyon problemlerinin çözümü için uygun değildir [30]. Ancak sınırlı olmayan aktivasyon fonksiyonlarının kullanılması durumunda da, denge noktasının varlığı incelenmelidir.

Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının dinamik davranışlarının analiz edilmesi, görüntü işleme, örüntü tanıma, çağrışımlı bellek ve bazı optimizasyon problemlerinin çözümü gibi uygulama alanlarında oldukça önemli rol oynamaktadır. Diğer yapay sinir ağlarından farklı olarak, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinde, yakınsama hızı için bir kontrol parametresi olarak kullanılan kuvvetlendirici fonksiyon ve durum uzayında sistemin kararlı noktalarını uygun yerlere koymamızı sağlayan bir davranış fonksiyonu kullanılmaktadır. Bununla birlikte, Hopfield-tipi yapay sinir ağları ve diğer birçok yapay sinir ağları, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin özel durumlarıdır.

Bilindiği üzere, gerçek zamanlı hesaplamalarda, sistemin hızlı bir şekilde denge noktasına yakınsaması oldukça önemlidir. Bu hesaplamaların hızını belirlemek için de genellikle üstel yakınsama hızı kullanılır. Bu nedenle, yapay sinir ağlarının üstel kararlılıklarının belirlenmesi, sadece teorikte değil uygulama alanında da oldukça önemli bir özelliktir.

Yapay sinir ağları, elektronik devreler ile gerçekleştirilebildiğinden, amplifikatörlerin sonlu anahartarlama hızları ve nöronlar arasındaki iletişim zamanı, gecikmelere yol açmaktadır [31]. Zaman gecikmeleri, osilasyonlara ve dolayısıyla ağların kararsızlığına neden olmakta ve bu şekilde sistemlerin dinamik davranışlarını etkilemektedir [31,32]. Bu nedenle, denge ve kararlılık özellikleri üzerinde, zamandan kaynaklanan gecikmelerin belirlenmesi, yapay sinir ağları için oldukça önemlidir.

Bu tez çalışmasının amacı, daha genel Lyapunov fonksiyonları kullanarak, zaman gecikmeli Cohen Grossberg yapay sinir ağları için, denge noktasının varlığı ve tekliği, global asimtotik ve üstel kararlılığı hakkında yeni yeterli koşullar elde etmektir.

Genel Kısımlarda, Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılık analizi ile ilgili bugüne kadar yapılmış çalışmalar geniş ve basit bir şekilde incelenecektir. Tezin, Malzeme ve Yöntem bölümünde, denge noktası kriterleri belirlenmeye çalışılırken kullanılan bazı matris sınıflarından ve matris ve vektör normlarından bahsedilecektir. Daha sonra, doğrusal olmayan sistemlerde denge noktası analizi ve bu analiz için kullanılan bazı kararlılık teoremleri verilecektir. Dördüncü bölüm olan Cohen-Grossberg Yapay Sinir Ağlarının Kararlılık Analizi'nde ise yapay sinir ağı modelleri ve gelişimleri hakkında bazı genel bilgilerden bahsedilecektir. Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelleri genel olarak ele alındıktan sonra, bu sistemlerin kararlılık analizlerinin nasıl yapıldığının anlaşılabilmesi açısından, ilk olarak Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının yakınsama özellikleri, bağlantı matrisinin simetrik olması koşulu altında, basit bir Lyapunov fonksiyonu kullanılarak verilecektir. Bu bilgilerden ve daha önce elde edilmiş kararlılık koşullarından hareketle, Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının denge noktasının varlığının ve tekliğinin analiz edilmesinden sonra, Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılığı için yeni sonuçlar elde edilmeye çalışılacaktır. Bulgular kısmında, elde edilen yeni kararlılık koşulları, literatürde daha önceden yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılacak ve bu karşılaştırmalar örneklerle ve bilgisayar uygulamaları ile desteklenecektir.

2. GENEL KISIMLAR

Yapay sinir ağlarının dayandığı ilk hesaplama modelinin temeli, 1943 yılında McCulloch ve Pitts tarafından yapılan yapay nöron tanımlanması ile ortaya atılmıştır [33]. Bu nöron, biyolojik nöronların bir soyutlaması ve yapay sinir ağının temel birimi olarak gösterilmiştir. McCulloch-Pitts nöron modelinde, iki durumlu eşik seviyesine sahip nöronlarla istenilen sayısal işlevlerin gerçekleştirileceği gösterilmiştir. Bu model, basit sayısal işlevlerden yararlanılarak daha karmaşık hesaplamaların ve işlevlerin yapılabilmesine işaret etmiştir.

Son zamanlarda, dinamik yapay sinir ağları üzerine yapılan çalışmalar oldukça artmıştır. Bu tür uygulamalar, denge noktasının varlığına ve kararlılığına bağlıdır. Yapay sinir ağlarının elektronik uygulamalarında zaman gecikmesi kaçınılmazdır. Bu nedenle, gecikmesiz yapay sinir ağlarının araştırılmasına paralel olarak, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarında kararlılık analizi üzerine de bir çok çalışma yapılmaktadır.

Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modeli, 1983 yılında Cohen ve Grossberg tarafından geliştirilmiş, çeşitli mühendislik problemlerinin çözümünde ve bilimsel alanlarda ve hesaplama teknolojisinde yaygın bir biçimde kullanılmıştır. Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modeli aşağıdaki diferansiyel denklemler ile tanımlanmıştır [1] :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t)) \left[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + u_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

Bu modelde, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ nöron durum vektörünü, $d_i(x_i(t))$ kuvvetlendirici fonksiyonunu, $c_i(x_i(t))$ davranış fonksiyonunu, $(a_{ij})_{n \times n}$ nöronların ağırlık katsayılarını temsil eden bağlantı matrisini, $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$ nöron aktivasyonlarını ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ de giriş vektörünü göstermektedir.

(2.1) ile tanımlanan Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin dinamik davranışını karakterize eden koşulların elde edilmesi ile ilgili literatürde oldukça fazla çalışma yapılmıştır [2,15-17]. Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin en önemli dinamik davranış özelliklerinden bir tanesi, sistemin belirli koşullar altında global kararlı olmasıdır. Bu da sistemin tüm çözümlerinin sabit bir denge noktasına yakınsaması anlamına gelmektedir. Özellikle Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılık analizi ile ilgili literatürde yayınlanmış önemli çalışmalar bulunmaktadır [19,23-25,34-38]. Bununla birlikte, yapay sinir ağları elektrik devreler ile gerçekleştirilmek istendiğinde, kullanılan kuvvetlendiricilerin sonlu anahtarlama hızlarından ve bağlantı zamanından kaynaklanan zaman gecikmeleri meydana gelmektedir [39]. Bu zaman gecikmeleri yapay sinir ağlarının osilasyon yapmasına, kararlı hal durumundan kararsız hal durumuna geçmesine, periyodik çözümler üretmesine kadar farklı dinamik davranışlar göstermesine neden olur [31,32]. Bu yüzden gecikme parametresinin sistem denklemlerine ilave edilerek, sistemin kararlılık analizinin bu duruma göre yapılması son derece önemlidir.

Ye, Michel ve Wang, standart Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modeline gecikme parametrelerini de ilave ederek, gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelini aşağıdaki denklem modeli ile ifade etmişlerdir [2] :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t)) \left[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)) + u_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

Yukarıdaki gecikmeli yapay sinir ağı sisteminde, τ_j , $j = 1, 2, \dots, n$ için zaman gecikmelerini temsil etmektedir. (2.2) ile verilen model daha sonra, Wang ve Zou [40,41], Lu ve Chen [42], Chen ve Rong [16], Rong [43], Liao ve diğ. [24], Cao ve Liang [44] tarafından geliştirilerek, $n \times n$ adet gecikme parametresinin bulunduğu ve gecikmesiz durumunda yer aldığı aşağıdaki hibrit Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelini incelemişlerdir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t)) \left[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i \right], \quad \forall i \quad (2.3)$$

Bu modelde, (b_{ij}) , $t - \tau_{ij}$ anında i . nöron ile j . nöron arasındaki bağlantı katsayısını temsil etmektedir.

(2.3) ile verilen yapay sinir ağı modelinin kararlılık özelliklerini inceleyen ve konu ile ilgili koşullar elde eden önemli sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda, robust kararlılık [43,23], üstel kararlılık [24], asimtotik kararlılık [35,37] gibi değişik kararlılık koşulları elde edilmiştir. Bazı özel durumlarda da, örneğin, $b_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ ya da $a_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, sistemin farklı model yapıları analiz edilerek kararlılık koşulları elde edilmeye çalışılmıştır [40].

Gecikmeli geribeslemeli sistemlerin modellenmesinde, sabit zaman gecikmelerinin kullanılması, genellikle az sayıda hücreye sahip olan basit devreler için yeterlidir. Ancak, birçok durumda gecikmeler zamanla değişmektedir. Bu nedenle, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağları üzerine yapılan çalışmalar, sabit gecikmeli olanlara göre daha önemli ve gerçekçidir. Son yıllarda, Hwang ve diğ. [15], Cao ve Liang [44], Arik ve Orman [19] ve Yuan ve Cao [45] gecikmesi zamanla değişen Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışını karakterize eden çalışmalar yapmışlardır. Gecikmesi zamanla değişen Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modeli aşağıdaki diferansiyel denklem ile temsil edilmektedir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t)) \left[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + u_i \right], \quad \forall i \quad (2.4)$$

Bu tez çalışmasının temel amacı, genel Cohen-Grossberg yapay sinir ağı sistemlerinin dinamik davranışlarının analiz edilmesidir. Bu amaçla, tez içeriğinde, yapılan çalışmalardan bir tanesinde, gecikmesi zamanla değişen Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının global kararlılıkları analiz edilmiştir. Bu çalışmada, daha genel Lyapunov fonksiyonları kullanılarak zaman gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağları için denge noktasının varlığı ve tekliği, global asimtotik ve üstel kararlılığı için yeni yeterli koşullar elde edilmiştir. Sistemin global üstel kararlılığını incelemek için Halanay eşitsizlik kuralı kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, ağ parametreleri arasında gecikmeden bağımsız bir ilişki kurmaktadır. Bu çalışmada elde edilen koşullar, literatürde daha önce elde edilmiş olan kararlılık koşulları [15,16] ile karşılaştırılmaktadır. Yapılan karşılaştırmalar sonucunda, elde edilen koşulların kullanılan aktivasyon fonksi-

yonlarının özellikleri açısından daha genel ve daha az kısıtlayıcı oldukları gösterilmiştir.

Bu tezin kapsamında yaptığımız diğer bir çalışma, çoklu zaman gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının global kararlılıkları için elde edilmiş sonuçlardır. Yine burada elde edilen sonuçlar, literatürdeki daha önce elde edilmiş sonuçlar [23-25] ile karşılaştırılmış ve bizim sonuçlarımızın birçok durumda avantajlı olduğu örneklerle gösterilmiştir. Bu nedenle, elde edilen sonuçlar, karşılaştırma yapılan makalelerde verilen sonuçlara bir alternatif olarak düşünülebilir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Hem doğrusal hem de doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kararlılık özelliklerini karakterize etmekte matrisler büyük önem taşır. Yapay sinir ağlarında denge noktasının kararlılığı, genel olarak, incelenen sistemin bağlantı matrisi elemanlarına uygulanan kısıtlama koşullarına dayanır. Başka bir deyişle, bağlantı matrisi üzerine yapılan koşullar, dinamik yapay sinir ağı sisteminin kararlı durum davranışını belirler. Bu nedenle kararlı matrislerin bazı türleri, yapay sinir ağları için istenen kararlılık koşullarının türetilmesinde özel bir öneme sahiptir. Sonuç olarak, dinamik yapay sinir ağlarının denge noktasının analiz edilmesinde matris teorisi çok önemli bir araçtır.

Aşağıda bu tezin kapsamı açısından önemli olduğu düşünülen matris sınıflarıyla ilişkili temel tanımlar ve bu matris sınıflarına ait bazı önemli özellikler verilecektir.

Öncelikle bu tezin içeriği boyunca kullanılan bazı temel gösterimler ifade edilecektir. Matrisler büyük harfler ile gösterilecektir. Örneğin; A, P . Bir A matrisinin evriği A^T şeklinde gösterilir. Burada üst simge T , evriği ifade eder. A^T , A matrisinin satırları ile sütunları yer değiştirilerek oluşturulur. Simetrik bir A matrisi için, $A = A^T$ 'dir. A^{-1} , A matrisinin tersini göstermektedir. λ_i , verilen herhangi bir A matrisinin i . özdeğerini gösterir. $\lambda_M(A)$ ve $\lambda_m(A)$ sırayla, A matrisinin maksimum ve minimum özdeğerlerini göstermektedir. $\det(A)$, A matrisinin determinantını ifade eder. Kesin pozitif (yarı kesin pozitif tanımlı) köşegen bir P matrisi, $P = \text{diag}(p_i) > 0$ ($P = \text{diag}(p_i \geq 0)$) ile gösterilecektir. Vektörler küçük harfler ile gösterilecektir. Örneğin; x, y . $x_1, x_2, \dots, x_n$ sayıları, x vektörünün bileşenleridir. x 'in evriği x^T ile gösterilir ve $x^T = (x_1 \ x_2 \dots x_n)$ olarak tanımlanır. x^T , bir satır vektörüdür.

Tüm n -boyutlu vektörlerin kümesi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ile gösterilir. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ gerçekte sayıdır ve n -boyutlu Öklid uzayı olarak tanımlanır. R^n şeklinde gösterilirler. Tüm gerçekte sayıları içeren tek-boyutlu Öklid uzayı R ile gösterilir.

Bir $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ vektörünün normu $\|x\|$ ile gösterilir ve aşağıdaki özellikleri sağlayan reel-değerli bir fonksiyondur :

- $\forall x \in R^n$ için $\|x\| > 0$ ve sadece $x = 0$ için $\|x\| = 0$.
- $\forall x, y \in R^n$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- $\forall \alpha \in R$ ve $\forall x \in R^n$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Bir x vektörünün p . normu şu şekilde tanımlanır :

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

En çok kullanılan üç vektör normu $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ ve $\|x\|_\infty$ 'dur.

$$\|x\|_1 = (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} = (x^T x)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Bir $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisi için en çok kullanılan üç matris normu aşağıdaki şekildedir :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

3.1. MATRİS SINIFLARI

Bu bölümde bazı matris sınıflarının tanımları verilmiştir :

Tanım 3.1.1

$n \times n$ boyutlu simetrik bir A matrisinin bütün özdeğerleri sıfırdan büyük ise, bu A matrisi kesin pozitif tanımlıdır ve $A > 0$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.2

$n \times n$ boyutlu simetrik bir A matrisinin bazı özdeğerleri sıfırdan büyük ve bazı özdeğerleri sıfıra eşit ise, bu A matrisi yarı kesin pozitif tanımlıdır ve $A \geq 0$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.3

$n \times n$ boyutlu bir A matrisinin bütün özdeğerlerinin gerçekteki kısmı sıfırdan büyük ise, bu A matrisi pozitif karardır. Bu özelliğe sahip matrisler aynı zamanda H -kararlı matrisi olarak da isimlendirilir ve $A \in H$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.4

$n \times n$ boyutlu bir A matrisinin bazı özdeğerlerinin gerçekteki kısmı sıfırdan büyük ve bazı özdeğerlerinin gerçekteki kısmı sıfıra eşit ise, bu A matrisi pozitif yarıkarardır. Bu özelliğe sahip matrisler aynı zamanda H_o -kararlı matrisi olarak da isimlendirilir ve $A \in H_o$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.5

Herhangi bir $A = (a_{ij})$ matrisinin elemanları $a_{ii} \geq 0$ ve $a_{ij} \leq 0$ özellikleri ile verilmiş olsun. Bu özelliklere sahip A matrisinin Z_n kümesinin bir elemanı olduğu kabul edilir.

Tanım 3.1.6

A matrisi Z_n kümesinin bir elemanı olsun. Eğer A matrisi pozitif karardır bir matris ise, bu durumda A matrisi tekil olmayan M-matrisi olarak isimlendirilir ve $A \in K$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.7

A matrisi Z_n kümesinin bir elemanı olsun. Eğer A matrisi pozitif yarıkarardır bir matris ise, bu durumda A matrisi M-matrisi olarak isimlendirilir ve $A \in K_o$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.8

A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa :

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

bu A matrisi, kesin köşegen satır baskın bir matristir.

Tanım 3.1.9

A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa :

$$a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

bu A matrisi, köşegen satır baskın bir matristir.

Tanım 3.1.10

A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa :

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|, \quad i = 1, \dots, n$$

bu A matrisi, kesin köşegen sütun baskın bir matristir.

Tanım 3.1.11

A $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa :

$$a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|, \quad i = 1, \dots, n$$

bu A matrisi, köşegen sütun baskın bir matristir.

3.2 DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERDE DENGİ NOKTASI ANALİZİ

Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının kararlılık analizine geçmeden önce, doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kararlılık teorisinden elde edilen bazı temel sonuçlardan söz edilmesi yararlı olacaktır.

Aşağıdaki doğrusal olmayan dinamik sistemi ele alalım :

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Bu sistem, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ durum vektörü olmak üzere, basit olarak şu şekilde gösterilebilir :

$$\dot{x} = f(x)$$

$f(x^*) = 0$ koşulunu sağlayan sabit bir x^* vektörü bu dinamik sistemin denge noktasıdır. Çoğunlukla, sistemin denge noktası yakınlardaki davranışı ile ilgilenilmektedir. Denge noktası civarındaki sistem yörüngelerinin denge noktasına yakınsaması, ayrılması ya da bu nokta etrafında osilasyon yapması gibi davranışları incelenmeye çalışılmaktadır.

$\dot{x} = f(x)$ eşitliğinin çözümünün olması ve bu çözümün de tek olması için, $f(x)$ fonksiyonu üzerine bazı kısıtlamalar koyulmalıdır. En azından bir çözümün olabilmesi için, $f(x)$ 'in tüm argümanlarının zamana göre sürekli olması yeterli bir koşuldur. Ancak, bu koşul tek başına çözümün tekliğini garanti etmez. $\dot{x} = f(x)$ sistemi analiz edilirken genel olarak fonksiyonun Lipschitz olduğu varsayılır.

Bir $f(x)$ fonksiyonu, tüm x ve y vektörleri için aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa, Lipschitz süreklidir :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Başka bir deyişle, $f(x)$ fonksiyonunun Jacobian'ı, tüm x değerleri için sınırlı ise, bu fonksiyon Lipschitz süreklidir [46]. Yukarıdaki eşitsizlikte, L , pozitif Lipschitz sabiti olarak adlandırılır.

Çözümün varlığı ve tekliği, $f(x)$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olması ile garanti edilir.

Dinamik analizleri basitleştirmek açısından, ele aldığımız sistemin denge noktasının orijinde olduğu varsayılacaktır. Daha sonraki bölümlerde göstereceğimiz şekilde, herhangi bir denge noktası değişkenleri değiştirme yolu ile orijine ötelenebilir. Aynı zamanda, $f(x)$ fonksiyonunun, $f(0) = 0$ eşitliğini sağladığı varsayılacaktır.

Bir sonraki bölümde ele alınacak olan teoremler, denge noktasının kararlılığı ya da asimtotik kararlılığının belirlenmesi için kullanılmaktadır.

3.3 DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN KARARLILIK TEOREMLERİ

Doğrusal olmayan dinamik bir sistemin denge noktası x^* , herhangi bir pozitif ε için, aşağıdaki eşitsizliği sağlayan pozitif bir δ varsa kararlıdır :

$t > 0$ olmak üzere,

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

Kararlı bir sistemde, tüm $x(t)$ çözümleri, denge noktasının yakın komşuluğundaki yerlerde bulunur. Bu şekilde birden fazla kararlı denge noktası olabilir.

x^* denge noktasının asimtotik kararlı olması için, aşağıdaki koşulu sağlayan pozitif bir δ vardır :

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

Asimtotik kararlılıkta, tek bir denge noktası vardır ve t sonsuza giderken, tüm $x(t)$ çözümleri bu denge noktasına yakınsamaktadır.

Doğrusal olmayan dinamik sistemler için, denge noktasının asimtotik kararlılığı enerji fonksiyonlarının yardımı ile incelenebilir. Bu tip enerji fonksiyonları aynı zamanda, Lyapunov fonksiyonları olarak da adlandırılır. Bu fonksiyonlar, 1900'lü yılların başlarında, diferansiyel eşitliklerin kararlılığını göstermek için Alexander Lyapunov tarafından ortaya atılmıştır.

3.3.1 Lyapunov Kararlılık Teoremi

Denge noktasının kararlılığı genellikle, pozitif enerji fonksiyonunun tanımlandığı ve denge noktasının kararlılık özellikleriyle ilgili bir sonuç çıkarmak için bu fonksiyonun zamana bağlı türevinin incelendiği Lyapunov yöntemiyle karakterize edilir.

Teorem 3.3.1.1 (Lyapunov) [47]

$\dot{x} = f(x)$ ile verilen sistem için denge noktası $x = 0$ olsun. $V(x) : R^n \rightarrow R$ sürekli, türevi alınabilir bir fonksiyon olsun. $V(x)$ fonksiyonunun zamana göre türevi $\dot{V}(x)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilir :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x_i) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

Eğer

$$V(0) = 0, V(x) > 0, \forall x \neq 0 \text{ ve } \dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in R^n$$

ise $x = 0$ kararlıdır. Ayrıca,

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$$

ise $x = 0$ asimtotik kararlıdır. Diğer taraftan,

$$\dot{V}(x) > 0, \forall x \neq 0$$

ise $x = 0$ kararsızdır.

Bu teoreme göre, $V(x)$ fonksiyonunun zamana göre türevi yarı negatif tanımlı olan (yani, $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0$), sürekli türevi alınabilen pozitif tanımlı bir fonksiyon (yani, orijinin her

komşuluğunda $\forall x \neq 0$ olmak üzere, $V(x) > 0$ bulabilirsek denge noktası kararlıdır. Eğer $\dot{V}(x)$ kesin negatif tanımlı (yani, $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$) ise orijin asimtotik kararlıdır. Son olarak, eğer $\dot{V}(x)$ pozitif tanımlı (yani, $\dot{V}(x) > 0, \forall x \neq 0$) ise orijin kararsızdır.

Bu teorem Lyapunov'un Direkt Metodu olarak adlandırılır. Bu metodun üstünlüklerinden biri denge noktasının kararlılık özelliklerini, sisteme ait diferansiyel denklemleri çözmeden belirlememizi sağlamasıdır. Ancak Lyapunov fonksiyonunun bulunması için bir yöntem bulunmamaktadır. Uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulunabilirse, sistemin kararlılığı belirlenebilir. Bununla birlikte, herhangi bir Lyapunov fonksiyonu bulunamazsa, bu sistemin kararsız olduğu anlamına gelmemektedir.

3.3.2 Hurwitz Kararlılık Teoremi

Teorem 3.3.2.1 (Hurwitz) [47]

$x = 0$, $\dot{x} = f(x)$ ile tanımlanmış sistemin denge noktası olsun. $\dot{x} = f(x)$ sisteminin, $x = 0$ civarında lineerleştirilmiş modeli aşağıdaki ifade ile verilir :

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Burada A , $\dot{x} = f(x)$ sisteminin Jacobian 'i olarak isimlendirilir.

$\dot{x} = f(x)$ sisteminin orijini, A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmının negatif ya da sıfır olması durumunda kararlıdır.

Ayrıca A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmı negatif ise orijin asimtotik kararlıdır. A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmı negatif olduğunda, A matrisine kararlılık matrisi ya da Hurwitz matrisi denir.

Eğer A 'nın, reel kısmı pozitif olan en az bir özdeğeri varsa, orijinin kararsız olacağı söylenir.

Aslında yukarıdaki teoremler denge noktası için aynı asimtotik kararlılık sonucunu belirtir. Bu iki teorem arasındaki bağı bulmak için aşağıdaki Lyapunov fonksiyonunu ele alalım :

$$V(x) = x^T P x$$

Burada P reel simetrik pozitif tanımlı bir matristir. $V(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki *Lyapunov denklemi* ile verilir :

$$\dot{V}(x) = x^T [PA + A^T P] x = -x^T Q x$$

Burada Q aşağıdaki şekilde tanımlanmış simetrik bir matristir :

$$-Q = PA + A^T P$$

Her pozitif tanımlı Q matrisi için, *Lyapunov denklemini* sağlayan pozitif tanımlı bir P matrisi varsa, A , ”*kararlılık matrisi*”dir. Buradan, eğer Q pozitif tanımlı ise, Lyapunov kararlılık teoremine göre, $\dot{x} = f(x)$ ’in orijininin asimtotik kararlı olduğu sonucuna varabiliriz, yani, A ’nın tüm özdeğerlerinin reel kısımları negatiftir.

Bir sonraki teorem, Lyapunov teoreminin daha genel bir ifadesi olan LaSalle’nin Değişmezlik İlkesidir. Bu teorem denge noktalarının yerel ve global asimtotik kararlılığı ile ilgilenir.

3.3.3 LaSalle’nin Değişmezlik İlkesi

Teorem 3.3.3.1 (LaSalle’nin Değişmezlik İlkesi) [47]

$\dot{x} = f(x)$ sistemi için denge noktası, $x = 0$ olsun. $V(x) : D \rightarrow R$, D içinde $\dot{V}(x) < 0$ şeklinde, orijinin D komşuluğunda sürekli türevi alınabilen pozitif tanımlı fonksiyon olsun.

$$S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

olsun. Orijin dışında hiç bir çözümün S içinde sonsuza kadar kalamayacağını varsayalım. Bu durumda, orijin asimtotik kararlıdır.

$\dot{x} = f(x)$ sistemi için denge noktası, $x = 0$ olsun. $V(x) : R^n \rightarrow R$ her $x \in R^n$ için $\dot{V}(x) < 0$ şeklinde, sürekli türevi alınabilen, radyal sınırlı olmayan pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun (yani, $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $V(x) \rightarrow \infty$).

$$S = \{x \in R^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

olsun. Orijin dışında hiç bir çözümün S içinde sonsuza kadar kalamayacağını varsayalım. Bu durumda, orijin global asimtotik kararlıdır.

Lyapunov teoreminden farklı olarak, LaSalle teoremi $V(x)$ fonksiyonunun pozitif tanımlı olmasını gerektirmez. Bununla birlikte, radyal sınırsızlığı kontrol etmek pozitif tanımlı fonksiyonlar için daha kolaydır. Eğer fonksiyon pozitif tanımlı değilse, bu radyal sınırsızlık için yeterli olmayabilir. Örnek olarak, şu fonksiyonu düşünelim :

$$V(x) = (x_1 - x_2)^2$$

$x_1 = x_2$ için $V(x) = 0$ 'dır. Yani, $\|x\| \rightarrow \infty$ olmasına rağmen, $V(x)$ sonsuza gitmez.

Not 3.3.1

Şunu önemle belirtmek gerekir ki, $\dot{x} = f(x)$ 'in orijini yerel veya global asimtotik kararlı denge noktası ise, bu, sistemin tek denge noktası olmak zorundadır. Bu nedenle, birden çok denge noktası olan sistemler için asimtotik kararlılık söz konusu değildir. Aynı zamanda, bir denge noktasının yerel asimtotik kararlılığının, onun global asimtotik kararlılığı için gerekli olduğunu da belirtmek gerekir.

Not 3.3.2

$\dot{x} = f(x)$ 'in denge noktası olan orijin kararlı fakat asimtotik kararlı değilse, orijin sistemin tek denge noktası olmayabilir. Bu da, sistem ilk koşullara bağlı olarak kararlı denge noktalarından birine yakınsayabilir anlamına gelmektedir. Bu durumda, orijin belirli bir denge noktasına yakınsamıştır veya global kararlıdır.

4. COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ

Dinamik yapay sinir ağları, son yıllarda üzerinde yoğun bir şekilde çalışılan ve bazı optimizasyon problemlerinin çözümü, analog-dijital dönüştürücü tasarımı gibi belirli problemlere başarı ile uygulanan bir konudur. Bu tür uygulamalarda, sisteme dışarıdan uygulanan her giriş vektörü için, tasarlanan yapay sinir ağının global asimtotik kararlı tek bir denge noktasına yakınsaması istenir. Bu nedenle, dinamik yapay sinir ağlarının kararlılık analizi, uygulamalı tasarımlar için kaçınılmazdır. Literatürde, dinamik yapay sinir ağlarının denge noktasının tekliği ve asimtotik kararlılığı kapsamlı bir biçimde çalışılmış ve bu kararlılık tipi için çeşitli yeterli koşullar sunulmuştur [7], [14], [18], [20], [35], [48] - [64]. Özellikle, [48] - [51]'de farklı yapay sinir ağı modelleri için denge noktasının yerel asimtotik kararlılığını sağlayan bir dizi yeterli koşul elde edilmiştir. Ancak, denge noktasının yerel asimtotik kararlılığı, onun global asimtotik kararlı olması anlamına gelmemektedir.

Denge noktalarının global asimtotik kararlılığının önemi ilk olarak [65]'de belirtilmiştir. Daha önceki bazı çalışmalarda, global asimtotik kararlılık koşulları, bağlantı matrisleri üzerine bazı özel kısıtlamalar getirerek elde edilmiştir. Örneğin, M-matris koşulu [60], diyagonal kararlılık koşulu [61], diyagonal yarı-kararlılık koşulu [62] ve satır toplamı baskın koşulu [63] gibi matris sınıflarının özellikleri kullanılarak birçok asimtotik kararlılık sonuçları elde edilmiştir.

Aşağıda, literatürde yaygın olarak kullanılan bazı yapay sinir ağı modellerine yer verilmiştir.

4.1 GENEL YAPAY SİNİR AĞI MODELLERİ

Klasik yapay sinir ağı modelleri aşağıdaki diferansiyel denklemler ile tanımlanabilir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

Hopfield tarafından ortaya konan bu model, özellikle optimizasyon problemlerinin çözümünde

başarılı bir şekilde uygulanmıştır [28]. (4.1) eşitliği vektör-matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Dx(t) + Af(x(t)) + u$$

Bu denklemde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ nöron durum vektörünü, $D = \text{diag}(d_i)$ pozitif diagonal matrisi, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ nöronların ağırlık katsayılarını temsil eden bağlantı matrisini, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ giriş vektörünü ve $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$ de nöron aktivasyonlarını göstermektedir. Dinamik yapay sinir ağlarının kararlılığını analiz etmek için, nöronların girdileri ve çıktıları arasındaki aktivasyonu karakterize eden doğrusal olmayan fonksiyonların sınıfını bilmek oldukça önemlidir. Hopfield tipi yapay sinir ağlarında aktivasyon fonksiyonlarının sınırlı ve monoton artan oldukları varsayılmaktadır.

Marcus ve Westerveld [32], (4.1) modeline tek bir $\tau > 0$ zaman gecikmesi ilave ederek aşağıdaki modeli elde etmiştir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t - \tau)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

(4.2) yapay sinir ağı modeli vektör-matris formunda şu şekilde yazılabilir :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Dx(t) + Af(x(t - \tau)) + u$$

Gapolsamy ve He [66], (4.2) modelini, sistem denklemlerine çoklu zaman gecikmeleri τ_{ij} ekleyerek değiştirdi. [66]'da ele alınan yapay sinir ağı modeli aşağıdaki biçimdedir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

Diğer bir taraftan, [3]'de, aşağıdaki durum denklemleriyle tanımlanan gecikmeli hücrel sinir ağları denilen, yeni bir hibrit yapay sinir ağı modeli ortaya konmuştur :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

Bu model vektör-matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t - \tau)) + u$$

Joy [67]'de, hücresel sinir ağı çeşidi olan hibrid sinir ağı modelini ve Hopfield yapay sinir ağı modelini genelleştirerek, gecikmeli yapay sinir sistemleri üzerinde çalışmıştır. [67]'de ortaya konulan model aşağıdaki biçimdedir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.5)$$

[22] ve [68]'deki çalışmada, gecikme parametrelerinin zamana bağlı olduğu durum ele alınarak aşağıdaki yapay sinir ağı modeli ileri sürülmüştür :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

(4.6) modeli aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Dx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t - \tau(t))) + u$$

Yapay sinir ağı modelleri (4.1) - (4.6), uygulamalı birçok alanda başarılı bir şekilde kullanılmıştır. Bu tip mühendislik uygulamaları, tasarlanacak sinir ağının dinamik davranışının analizine bağlıdır. Bu nedenle, yapay sinir ağlarının kararlılık analizleri ve denge koşullarının özellikleri oldukça önemlidir. Son zamanlarda bir çok araştırmacı yapay sinir ağlarının kararlılık özelliklerini analiz etmiş ve (4.1) - (4.6) ile tanımlanan sinir ağı modelleri için denge noktasının varlığı, tekliği ve global kararlılığı için çeşitli yeterli koşullar sunmuşlardır (bknz. [7], [10], [11], [39], [68] - [70]).

4.2 COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞI MODELLERİ

(4.1) - (4.6) ile verilen yapay sinir ağı modellerini kapsayan en genel model Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modeli ile gösterilebilir. Bu model, aşağıdaki matematiksel ifade ile tanımlanabilir [1]:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t)) \left[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + u_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelleri, ilk olarak Cohen ve Grossberg tarafından 1983 yılında öne sürülmüş, çeşitli mühendislik ve bilimsel alanlarda ve hesaplama teknolojisinde yaygın bir biçimde uygulanmıştır. Bu tür uygulamalarda, tasarlanan yapay sinir ağlarının kararlılığının belirlenmesi birincil önemdedir. (4.7) ile verilen modelde, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ nöron durum vektörünü, $d_i(x_i(t))$ kuvvetlendirici fonksiyonunu, $c_i(x_i(t))$ davranış fonksiyonunu, $(a_{ij})_{n \times n}$ nöronların ağırlık katsayılarını temsil eden bağlantı matrisini, $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$ nöron aktivasyonlarını ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ de giriş vektörünü göstermektedir. Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinde, $d_i(x_i(t))$ yakınsama hızı için kullanılan bir kontrol parametresidir. Denge noktası üzerinde herhangi bir etkisi yoktur. Davranış fonksiyonu $c_i(x_i(t))$ ise, sistemin kararlı çözümlerini durum uzayında uygun yerlere koymamıza olanak sağlar. Bu şekilde denge noktalarını optimize ederek sistemin davranışını etkiler.

(4.7) ile verilen diferansiyel eşitlik vektör-matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(x(t)) \left[-C(x(t)) + Af(x(t)) + u \right]$$

Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinde, kuvvetlendirici fonksiyon $D(x(t)) \equiv 1$ ve D pozitif bir sabit olmak üzere, davranış fonksiyonu da $C(x(t)) = Dx(t)$ alındığında bu modelden Hopfield ve hücrel yapay sinir ağları gibi bilinen diğer yapay sinir ağı modelleri elde edilebilir. Sonuç olarak, Hopfield ve hücrel yapay sinir ağları, Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının özel birer durumudur.

(4.7) modeli sistemde gecikme olması durumu da düşünülerek en genel şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t)) \left[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i \right], \forall i \quad (4.8)$$

Bu modelde, $\tau = \max(\tau_{ij})$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, $\tau_{ij} \geq 0$, gecikme parametresini göstermektedir. b_{ij} ise, sistemde τ_{ij} olması durumunda ağ içerisindeki nöronların ağırlık kat-sayılarını gösteren bağlantı matrisini göstermektedir.

$\tau_{ij} = \tau_j$ olması durumunda (4.8) yapay sinir ağı modeli aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t)) \left[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)) + u_i \right], \forall i \quad (4.9)$$

Bölüm 2’de söz konusu olduğu üzere, birçok durumda gecikmeler zamanla değişmektedir. Zamanla değişen gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağları aşağıdaki matematiksel ifade ile gösterilebilir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t)) \left[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + u_i \right], \forall i \quad (4.10)$$

(4.10) eşitliğinde, $\tau = \max(\tau_j(t))$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, $\tau_j(t) \geq 0$, zamanla değişen gecikme parametresini göstermektedir. Bu sistem,

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, \quad D(x(t)) = \text{diag} (d_1(x_1(t)), d_2(x_2(t)), \dots, d_n(x_n(t))) ,$$

$$C(x(t)) = (c_1(x_1(t)), c_2(x_2(t)), \dots, c_n(x_n(t)))^T ,$$

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad B = (b_{ij})_{n \times n},$$

$$f(x(t - \tau(t))) = \left(f_1(x_1(t - \tau_1(t))), f_2(x_2(t - \tau_2(t))), \dots, f_n(x_n(t - \tau_n(t))) \right)^T ,$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$$

olmak üzere, vektör-matris formunda aşağıdaki eşitlik ile tanımlanabilir :

$$\dot{x}(t) = D(x(t)) \left[-C(x(t)) + Af(x(t)) + B(f(x(t - \tau(t))) + u \right] \quad (4.11)$$

(4.8) - (4.10) sistemlerinin başlangıç koşulu, $C([- \tau, 0], R)$, $[- \tau, 0]$ 'dan R 'ye kadar sürekli fonksiyonların kümesini göstermek üzere aşağıdaki şekildedir :

$$x_i(t) = \phi_i(t) \in C([- \tau, 0], R)$$

Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modellerinin kararlılık koşullarını belirlemek için d_i , c_i ve f_i fonksiyonları üzerine bazı varsayımlar yapılmaktadır. Bu varsayımlar aşağıda verilmiştir :

Varsayım A_1 : $i = 1, 2, \dots, n$ için, $d_i(x)$ fonksiyonları sürekli, sınırlı ve pozitifdir. $\forall x \in R$ olmak üzere, $0 < \mu_i \leq d_i(x) \leq \rho_i$ koşulunu sağlayan μ_i ve ρ_i sabitleri vardır.

Varsayım A_2 : c_i fonksiyonları süreklidir. $i = 1, 2, \dots, n$, $\forall x, y \in R$, ve $x \neq y$ olmak üzere,

$$\frac{c_i(x) - c_i(y)}{x - y} \geq \gamma_i > 0$$

koşulunu sağlayan γ_i sabitleri vardır.

Varsayım A_3 : Aktivasyon fonksiyonları sınırlıdır. Yani M_i pozitif bir sabit ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, $|f_i(x)| \leq M_i$ 'dir.

Varsayım A_4 : Aktivasyon fonksiyonları sınırlı bir eğim ile monoton artandır. Yani, $i = 1, 2, \dots, n$, $\forall x, y \in R$, $x \neq y$ olmak üzere,

$$0 \leq \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq G_i$$

eşitsizliğini sağlayan G_i sabitleri vardır.

Varsayım A_5 : Aktivasyon fonksiyonları Lipschitz süreklidir. $i = 1, 2, \dots, n$, $\forall x, y \in R$ ve $x \neq y$ olmak üzere,

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq L_i |x - y|$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif L_i sabitleri vardır.

Lipschitz sürekli aktivasyon fonksiyonlarının hem monoton artan fonksiyonları hem de artan fonksiyonları içerdiğine dikkat edilmelidir. Diğer bir taraftan A_4 varsayımını sağlayan aktivasyon fonksiyonları monoton artan fonksiyonlardır. Bu nedenle, A_5 varsayımını sağlayan fonksiyonların sınıfı, A_4 varsayımını sağlayan fonksiyonların sınıfından daha geniştir.

Aktivasyon fonksiyonlarının A_3 koşulunu sağlaması durumunda sistemlerin denge noktası kesinlikle vardır. Bu da homeomorphism kuralından ileri gelmektedir. Homeomorphism kuralını sistemlerin denge noktasının varlığını ve tekliğini göstermek için kullanabiliriz. Bu kural aşağıdaki şekilde tanımlanabilir :

Kural 4.2.1 :

(4.8) - (4.10) ile verilen yapay sinir ağı modellerinin, denge noktası x^* olsun. Bu durumda, x^* , aşağıdaki eşitliği sağlamaktadır :

$$D(x^*)[-C(x^*) + Af(x^*) + Bf(x^*) + u] = 0 \quad (4.12)$$

$D(x^*)$, pozitif diyagonal bir matris olduğu için, (4.12) eşitliğini aşağıdaki şekilde yazabiliriz :

$$-C(x^*) + Af(x^*) + Bf(x^*) + u = 0 \quad (4.13)$$

$H(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x))^T$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$h_i(x) = -c_i(x_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij}f_j(x_j) + \sum_{j=1}^n b_{ij}f_j(x_j) + u_i$$

olmak üzere

$$H(x) = -C(x) + Af(x) + Bf(x) + u = 0 \quad (4.14)$$

olsun.

Açıkça görüldüğü üzere, (4.14) denkleminin çözümü, (4.13) eşitliğinin denge noktasıdır. Bu nedenle, (4.13) denkleminin tek bir çözümünün olması için, $H(x)$ 'in R^n 'de homomorfizm olması gerekir [4].

$H(x)$ 'in R^n 'de homomorfizm olabilmesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır [4]:

- $x, y \in R^n, \forall x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$
- $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$

Bu koşullardan birincisi denge noktasının tekliğini, ikincisi ise denge noktasının varlığını göstermek için kullanılmaktadır. Aktivasyon fonksiyonu üzerine verilen varsayımlara göre, $x \neq y$ için iki durum bulunmaktadır :

$$(i) \ x \neq y \text{ ve } f(x) - f(y) \neq 0,$$

$$(ii) \ x \neq y \text{ ve } f(x) - f(y) = 0.$$

Denge noktasının varlığı ve tekliği incelendikten sonra, (4.8) - (4.10) ile tanımladığımız yapay sinir ağı modellerinin global asimtotik ve üstel kararlılıklarını göstermek için ilk olarak denge noktası orijine taşınır. x^* , (4.8) - (4.10) ile tanımlanan sistemlerin denge noktası olsun. $z(t) = x(t) - x^*$ dönüşümü kullanılarak, x^* denge noktası orijine ötelenebilir. Bu şekilde (4.8) ile gösterilen yapay sinir ağı modeli aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$\dot{z}_i(t) = \alpha_i(z_i(t))[-\beta_i(z_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}g_j(z_j(t - \tau_{ij}))] \quad (4.15)$$

$\tau_{ij} = \tau_j$ için, yani sistemde n adet gecikme olması durumunda, (4.15) ile tanımlanan model aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\dot{z}_i(t) = \alpha_i(z_i(t))[-\beta_i(z_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}g_j(z_j(t - \tau_j))] \quad (4.16)$$

(4.10) yapay sinir ağı modeli ise denge noktası orijine ötelenerek aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\dot{z}_i(t) = \alpha_i(z_i(t)) \left[-\beta_i(z_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}g_j(z_j(t - \tau_j(t))) \right] \quad (4.17)$$

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T, \quad \alpha(z(t)) = \text{diag}(\alpha_1(z_1(t)), \alpha_2(z_2(t)), \dots, \alpha_n(z_n(t))),$$

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad B = (b_{ij})_{n \times n}, \quad \beta(z(t)) = (\beta_1(z_1(t)), \beta_2(z_2(t)), \dots, \beta_n(z_n(t)))^T,$$

$$g(z(t - \tau(t))) = (g_1(z_1(t - \tau_1(t))), g_2(z_2(t - \tau_2(t))), \dots, g_n(z_n(t - \tau_n(t))))^T$$

olmak üzere bu model vektör matris formunda aşağıdaki şekilde gösterilebilir :

$$\dot{z}(t) = \alpha(z(t))[-\beta(z(t)) + Ag(z(t)) + Bg(z(t - \tau_j(t)))] \quad (4.18)$$

(4-15) - (4.17) dönüştürülmüş sistemler için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz :

$$\alpha_i(z_i(t)) = d_i(z_i(t) + x_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\beta_i(z_i(t)) = c_i(z_i(t) + x_i^*) - c_i(x_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$g_i(z_i(t)) = f_i(z_i(t) + x_i^*) - f_i(x_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A_1, A_2, A_4 ve A_5 ile verilen varsayımları da sırasıyla aşağıdaki eşitsizliklere karşılık gelmektedir :

$$0 < \mu_i \leq \alpha_i(z_i(t)) \leq \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad z_i(t)\beta_i(z_i(t)) \geq \gamma_i z_i^2(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$|g_i(z_i(t))| \leq G_i|z_i(t)|, \quad z_i(t)g_i(z_i(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$|g_i(z_i(t))| \leq L_i|z_i(t)|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Aşağıda, Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarında kararlılık analizinin nasıl yapıldığının anlaşılabilmesi için enerji fonksiyonu olarak bir Lyapunov fonksiyonunun kullanıldığı basit bir kararlılık analizine yer verilmiştir. Yapay sinir ağlarının davranışlarını analiz etmek için enerji fonksiyonlarının kullanılması fikri, 1970'li yılların başlarında Amari [71], Grossberg [72] ve Little [73] tarafından ortaya atılmıştır. Cohen-Grossberg teoremi olarak bilinen genel prensip ise 1960'larda Grossberg'in yaptığı bir takım çalışmalar sonucu ortaya çıkmış bir kavramdır. Cohen ve Grossberg, 1983 yılında yaptıkları bir çalışmada, bu teoremi belirli bir sınıfa ait yapay sinir ağlarının kararlılıklarının belirlenmesi için kullanmışlardır [1].

Teorem 4.2.1 (Cohen-Grossberg Teoremi) [1]

(4.7) ile tanımlanan n nöronlu Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelini ele alalım. Bu diferansiyel denklem aşağıdaki kısıtlamaları sağlamaktadır :

1) a_{ij} matrisi simetriktir. Yani, $a_{ij} = a_{ji}$ ve $a_{ij} > 0$ 'dır.

2) $d_i(x)$ fonksiyonu sürekli ve $x > 0$ için $d_i(x) > 0$ 'dır.

3) $f_j(x)$ fonksiyonu türevi alınabilen bir fonksiyondur.

$$f'_j(x) = \frac{d}{dx}(f_j(x)) \geq 0 \text{ 'dır.}$$

4) $x_i \rightarrow \infty$ iken $(c_i(x_i) - a_{ii}) < 0$ 'dır.

5) $x > 0$ için $c_i(x)$ fonksiyonu sürekli.

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} c_i(x) = \infty$ ya da $\lim_{x \rightarrow 0^+} c_i(x) < \infty$ 'dir.

Ancak $x > 0$ için $\int_0^x \frac{1}{d_i}(s)ds = \infty$ 'dur.

Başlangıç zamanında ağıın durumu $x(0)$, R^n 'nin pozitif bölgesinde (yani, $x_i(0) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) ise, bu durumda yapay sinir ağı yine pozitif bölgede herhangi bir kararlı noktaya yakınsayacaktır. Ayrıca, bu şekilde sınırlı sayıda kararlı noktalar olacaktır.

Bu sistemin kararlılığını belirlemek için, Cohen-Grossberg teoremi, verilen koşullar altında, bir Lyapunov fonksiyonu kullanmaktadır :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} f_i(x_i) f_j(x_j) - \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} c_i(s) f'(s) ds \quad (4.19)$$

Bu fonksiyon sistemin enerji fonksiyonudur. Ağıın durumunun tabi olacağı mümkün olan tüm çözümler için, E fonksiyonunun zamana göre türevi negatif olacaktır.

a_{ij} 'nin simetrik olma koşulu, yani (1) koşulu kullanılarak, bu enerji fonksiyonunun zamana göre türevi aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{i=1}^n d_i(x_i) f'_i(x_i) \left[c_i(x_i) - \sum_{j=1}^n a_{ji} f_j(x_j) \right]^2$$

(2) ve (3) koşullarının sağlanması durumunda $x \neq x^*$ için fonksiyonun türevi negatif değerlidir. (4) koşulu ile, x^* 'ın sonlu bir değere sahip olması garanti edilir. Bu şekilde, denge noktalarının sonsuza gitmesi önlenir. Verilen diğer koşullar ((5) ve (6) koşulları) ile çözümün her zaman pozitif bölgede kalması sağlanmaktadır.

Biyolojik nörona benzeyen bir model için, pozitif bölgedeki kararlı bir denge noktasına yakınsamak önemlidir. Ancak, yapay sinirler için böyle bir koşula gerek yoktur. Bunların sonlu değere sahip kararlı herhangi bir noktaya yakınsamaları yeterlidir. f fonksiyonunun sınırlı olması durumunda, herhangi bir durum sonsuz değere sahip olamaz. Buna rağmen, sistemin kararlılığı yine de aşağıdaki kısıtlamalar ile belirlenmektedir :

Simetri : $a_{ij} = a_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$

Negatif Olmama : $d_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$

Monoton Artan : $f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) \geq 0$

Cohen-Grossberg teoremine göre, doğrusal olmayan eşitliklerle gösterilen (4.7) sisteminin, yukarıdaki üç özelliği karşılaması durumunda, (4.19) ile verilen enerji fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlamaktadır :

$$x_i \neq x_i^* \quad \text{için} \quad dE/dt \leq 0$$

Sonuç olarak, (4.7) ile tanımlanan global sistem kararlıdır [46]. Cohen-Grossberg yapay sinir ağları için yapılan bu analiz, belirli koşullar altında sistemin kararlı olduğunu göstermektedir. Ancak bu kararlılık analizi, sistemin denge noktasının varlığını ve tekliğini göstermek için yeterli değildir. Benzer şekilde, bu analiz, ele alınan yapay sinir ağı sisteminin global asimtotik ve üstel kararlılığını belirlemek için de kullanılamaz.

Bu nedenle, bir sonraki bölümde, belirli varsayımlar altında Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelleri için denge noktasının varlığı ve tekliğini gösteren koşullar verilmiştir. Daha sonra, bu sistemlerin denge noktalarının global asimtotik ve üstel kararlılık analizleri yapılmıştır.

4.3 COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ DENGE NOKTASININ VARLIĞININ VE TEKLİĞİNİN ANALİZİ

Bu bölümde, ilk olarak, (4.10) ile tanımlanan sistemin, denge noktasının varlığını ve tekliğini sağlayan iki yeterli koşul verilecektir :

Teorem 4.3.1 :

(4.11) ile tanımlanan ve A_1 , A_2 ve A_5 varsayımları ile verilen koşulları sağlayan Cohen-Grossberg yapay sinir ağı için denge noktası tektir eğer :

$$\gamma_m = \min_{1 \leq i \leq n}(\gamma_i) \quad \text{ve} \quad L_M = \max_{1 \leq i \leq n}(L_i) \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\|A\|_1 + \|B\|_1 < \frac{\gamma_m}{L_M}$$

İspat :

(4.14)'den yararlanarak Kural 4.3.1'deki (i) $x \neq y, f(x) \neq f(y)$ durumu için aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz :

$$H(x) - H(y) = -(C(x) - C(y)) + A(f(x) - f(y)) + B(f(x) - f(y)) \quad (4.20)$$

Bu eşitlik skaler formda aşağıdaki şekilde de yazılabilir :

$$h_i(x) - h_i(y) = -(c_i(x_i) - c_i(y_i)) + \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij})(f_j(x_j) - f_j(y_j)) \quad (4.21)$$

(4.21) eşitliğinin her iki tarafını $\text{sgn}(x_i - y_i)$ ile çarparak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir :

$$\begin{aligned} \text{sgn}(x_i - y_i)(h_i(x) - h_i(y)) &= -\text{sgn}(x_i - y_i)(c_i(x_i) - c_i(y_i)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \text{sgn}(x_i - y_i)(a_{ij} + b_{ij})(f_j(x_j) - f_j(y_j)) \\ &\leq -|c_i(x_i) - c_i(y_i)| + \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)|f_j(x_j) - f_j(y_j)| \\ &\leq -\gamma_i|x_i - y_i| + \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)L_j|x_j - y_j| \\ &\leq -\gamma_m|x_i - y_i| + \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)L_M|x_j - y_j| \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikten şu sonucu elde edebiliriz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{sgn}(x_i - y_i)(h_i(x) - h_i(y)) &\leq -\sum_{i=1}^n \gamma_m|x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)L_M|x_j - y_j| \\ &= -\sum_{i=1}^n \gamma_m|x_i - y_i| + L_M \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|a_{ji}| + |b_{ji}|)|x_i - y_i| \\ &\leq -(\gamma_m - L_M(\|A\|_1 + \|B\|_1))\|x - y\|_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

$x - y \neq 0$ ve $\|A\|_1 + \|B\|_1 < \gamma_m/L_M$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir :

$$\sum_{i=1}^n \text{sgn}(x_i - y_i)(h_i(x) - h_i(y)) < 0$$

ya da

$$\sum_{i=1}^n |h_i(x) - h_i(y)| = \|H(x) - H(y)\|_1 > 0$$

Buradan da, $\forall x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$ sonucuna kolaylıkla varılabilir.

Kural 4.3.1'deki (ii) $x \neq y, f(x) = f(y)$ durumunu ele alırsak,

$$H(x) - H(y) = -(C(x) - C(y)),$$

$$\text{sgn}(x_i - y_i)(h_i(x) - h_i(y)) = -\text{sgn}(x_i - y_i)(c_i(x) - c_i(y)) \leq -\gamma_i |x_i - y_i|$$

elde edilir.

$x - y \neq 0$ olduğunda şu sonucu elde ederiz :

$$\sum_{i=1}^n \text{sgn}(x_i - y_i)(h_i(x) - h_i(y)) < 0$$

Bu eşitsizlikten de doğrudan

$$\sum_{i=1}^n |h_i(x) - h_i(y)| = \|H(x) - H(y)\|_1 > 0$$

yazılabilir. Buradan da $\forall x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$ olduğu sonucuna varabiliriz.

$\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olduğunu göstermek için, $y = 0$ alındığında, (4.22) eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\sum_{i=1}^n \text{sgn}(x_i)(h_i(x) - h_i(0)) \leq -(\gamma_m - L_M(\|A\|_1 + \|B\|_1))\|x\|_1$$

$$(\gamma_m - L_M(\|A\|_1 + \|B\|_1))\|x\|_1 \leq \left| \sum_{i=1}^n \text{sgn}(x_i)(h_i(x) - h_i(0)) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^n |h_i(x) - h_i(0)| = \|H(x) - H(0)\|_1 \\
&\leq \|H(x)\|_1 + \|H(0)\|_1
\end{aligned}$$

Buradan da aşağıdaki eşitsizlik elde edilir :

$$\|H(x)\|_1 \geq (\gamma_m - L_M(\|A\|_1 + \|B\|_1))\|x\|_1 - \|H(0)\|_1$$

Sonuç olarak, $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ 'dur. Bu şekilde Teorem 4.3.1'in ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 4.3.2 :

A_1, A_2 ve A_4 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını kabul edelim. Eğer bazı $P = \text{diag}(p_i > 0)$ ve $Q = \text{diag}(q_i > 0)$ matrisleri için aşağıdaki koşul sağlanırsa, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ve $G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n)$ olmak üzere,

$$\Omega = 2P\Gamma G^{-1} - PA - A^T P - Q - PBQ^{-1}B^T P > 0$$

bu durumda, (4.11) ile tanımlanan Cohen-Grossberg yapay sinir ağının tek denge noktası vardır.

İspat :

İlk olarak $x \neq y$ ve $f(x) - f(y) \neq 0$ olduğu durumu ele alalım. $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ için, (4.20) eşitliğinin her iki tarafını $2(f(x) - f(y))^T P$ ile çarparak ve $(f(x) - f(y))^T Q(f(x) - f(y))$ terimini ekleyip çıkartarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz :

$$\begin{aligned}
&2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) \\
&= -2(f(x) - f(y))^T P(C(x) - C(y)) + 2(f(x) - f(y))^T PA(f(x) - f(y)) \\
&\quad + 2(f(x) - f(y))^T PB(f(x) - f(y)) + (f(x) - f(y))^T Q(f(x) - f(y)) \\
&\quad - (f(x) - f(y))^T Q(f(x) - f(y))
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz :

$$\begin{aligned} & -(f(x) - f(y))^T Q(f(x) - f(y)) + 2(f(x) - f(y))^T P B(f(x) - f(y)) \\ & \leq (f(x) - f(y))^T P B Q^{-1} B^T P(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

Diğer taraftan, A_2 ve A_4 varsayımlarını kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz :

$$\begin{aligned} (f(x) - f(y))^T P(C(x) - C(y)) & \geq (f(x) - f(y))^T P \Gamma(x - y) \\ & \geq (f(x) - f(y))^T P \Gamma G^{-1}(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

Sonuç olarak, (4.23) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} & 2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) \\ & \leq -2(f(x) - f(y))^T P \Gamma G^{-1}(f(x) - f(y)) + 2(f(x) - f(y))^T P A(f(x) - f(y)) \\ & \quad + (f(x) - f(y))^T P B Q^{-1} B^T P(f(x) - f(y)) + (f(x) - f(y))^T Q(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin eşdeğeri aşağıdaki şekildedir :

$$2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) \leq -(f(x) - f(y))^T \Omega(f(x) - f(y)) \quad (4.24)$$

Ω , pozitif tanımlı bir matris olduğu için, (4.24) eşitsizliğinden şu sonucu elde ederiz :

$$2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) = \sum_{i=1}^n 2p_i(f_i(x) - f_i(y))(h_i(x) - h_i(y)) < 0$$

Buradan da doğrudan, P pozitif diyagonal bir matris olmak üzere, $f(x) \neq f(y)$ için $H(x) - H(y) \neq 0$ sonucuna varabiliriz. Bu şekilde, $x \neq y$ ve $f(x) \neq f(y)$ için $H(x) - H(y) \neq 0$ olduğu ispatlanmıştır. Diğer taraftan, Teorem 4.3.1'i ispatlarken, $x \neq y$ ve $f(x) = f(y)$ için $H(x) - H(y) \neq 0$ olduğunu göstermiştik. Sonuç olarak, Teorem 4.3.2'de verilen koşullar altında, $\forall x \neq y$ için $H(x) - H(y) \neq 0$ 'dır.

Teorem 4.3.2’de verilen koşulların, aynı zamanda, $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ koşulunu sağladığını göstermek için, $y = 0$ alarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz :

$$\begin{aligned}
 2(f(x) - f(0))^T P(H(x) - H(0)) &= \sum_{i=1}^n 2p_i(f_i(x) - f_i(0))(h_i(x) - h_i(0)) \\
 &\leq -(f(x) - f(0))^T \Omega (f(x) - f(0)) \\
 &\leq -\lambda_m(\Omega)(f(x) - f(0))^T (f(x) - f(0))
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Bu eşitsizlikte, $\lambda_m(\Omega) > 0$, pozitif Ω matrisinin minimum özdeğerini göstermektedir. $p_M = \max(p_i)$ olmak üzere, (4.25) eşitsizliği şu şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned}
 \lambda_m(\Omega) \|f(x) - f(0)\|_2^2 &\leq \left| \sum_{i=1}^n 2p_i(f_i(x_i) - f_i(0))(h_i(x_i) - h_i(0)) \right| \\
 &\leq p_M \sum_{i=1}^n 2|f_i(x_i) - f_i(0)||h_i(x_i) - h_i(0)| \\
 &\leq 2p_M \|f(x) - f(0)\|_\infty \sum_{i=1}^n |h_i(x_i) - h_i(0)| \\
 &= 2p_M \|f(x) - f(0)\|_\infty \|H(x) - H(0)\|_1
 \end{aligned}$$

$\|f(x) - f(0)\|_\infty \leq \|f(x) - f(0)\|_2$ olduğu için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz :

$$\lambda_m(\Omega) \|f(x) - f(0)\|_\infty \leq 2p_M \|H(x) - H(0)\|_1$$

$\|f(x) - f(0)\|_\infty \geq \|f(x)\|_\infty - \|f(0)\|_\infty$ ve $\|H(x) - H(0)\|_1 \leq \|H(x)\|_1 + \|H(0)\|_1$ eşitsizliklerini kullanarak şöyle yazabiliriz :

$$\lambda_m(\Omega) \|f(x)\|_\infty - \lambda_m(\Omega) \|f(0)\|_\infty \leq 2p_M \|H(x)\|_1 + 2p_M \|H(0)\|_1$$

Buradan da aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz :

$$\|H(x)\|_1 \geq \frac{\lambda_m(\Omega) \|f(x)\|_\infty - \lambda_m(\Omega) \|f(0)\|_\infty - 2p_M \|H(0)\|_1}{2p_M}$$

Bu eşitsizlikten, $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ ya da $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olduğu sonucuna kolaylıkla varılabilir. Sonuç olarak, $H(x)$ 'in R^n 'de homomorfizm olduğu ispatlanmıştır. Buradan da, (4.11) ile gösterilen sistemin bir denge noktasının olduğu ve bu denge noktasının tek olduğu sonucuna varılabilir. (Yapılan ispatlarda aktivasyon fonksiyonunun sınırlı olmadığı varsayılmıştır. Aynı sonuçlar sınırlı fonksiyonlar için de gösterilebilir.)

Aşağıda, (4.8) ve (4.9) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelleri için denge noktasının varlığını ve tekliğini garantileyen yeterli koşullar verilmiştir.

Teorem 4.3.3 :

A_1 , A_2 ve A_5 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını kabul edelim. Eğer bazı $P = \text{diag}(p_i > 0)$ ve $Q = \text{diag}(q_i > 0)$ matrisleri için aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Omega = 2P\Gamma - GQ^{-1}G - PAQA^TP - K > 0 \quad (4.26)$$

bu durumda (4.8) ile tanımlanan Cohen-Grossberg yapay sinir ağının her u girdisi için tek denge noktası vardır.

(4.26) ile verilen ifadede, Γ , G ve K ifadeleri aşağıdaki gibidir :

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n), K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \text{ ve}$$

$$k_i = \sum_{j=1}^n (p_i G_j |b_{ij}| + p_j G_i |b_{ji}|)$$

İspat :

(4.15) ile tanımlanan $H(x)$ için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz :

$$H(x) - H(y) = -(C(x) - C(y)) + A(f(x) - f(y)) + B(f(x) - f(y)) \quad (4.27)$$

İlk olarak $x \neq y$ ve $f(x) - f(y) = 0$ olduğu *Kural 4.2.1*'in (ii). durumunu düşünelim. Bu

durumda, aşağıdaki eşitliği elde ederiz :

$$H(x) - H(y) = -(C(x) - C(y))$$

A_2 varsayımındaki koşulun sağlanması durumunda, $x \neq y$ koşulu doğrudan, $C(x) \neq C(y)$ olmasına neden olur. Buradan da $H(x) \neq H(y)$ sonucu elde edilir. Böylece, $x \neq y$ ve $f(x) - f(y) = 0$ durumu, $H(x) \neq H(y)$ sonucunu doğurur. $x - y \neq 0$ ve $f(x) - f(y) \neq 0$ olması durumunda, (4.27) eşitliğinin her iki tarafı, $2(x - y)^T P$ ifadesi ile çarpılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir :

$$\begin{aligned} 2(x - y)^T P(H(x) - H(y)) &= -2(x - y)^T P(C(x) - C(y)) + 2(x - y)^T PA(f(x) - f(y)) \\ &\quad + 2(x - y)^T PB(f(x) - f(y)) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Bu eşitlikde, $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ pozitif diyagonal bir matristir.

A_2 ve A_5 varsayımlarına göre, $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n) > 0$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz :

$$(x - y)^T P(C(x) - C(y)) \geq (x - y)^T P\Gamma(x - y)$$

$$\begin{aligned} 2(x - y)^T PA(f(x) - f(y)) &= 2(f(x) - f(y))^T A^T P(x - y) \\ &\leq (f(x) - f(y))^T Q^{-1}(f(x) - f(y)) \\ &\quad + (x - y)^T PAQA^T P(x - y) \\ &\leq (x - y)^T GQ^{-1}G(x - y) + (x - y)^T PAQA^T P(x - y) \\ &= (x - y)^T (GQ^{-1}G + PAQA^T P)(x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x - y)^T PB(f(x) - f(y)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i b_{ij}(x_i - y_i)(f_j(x_j) - f_j(y_j)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i |b_{ij}| |(x_i - y_i)| |f_j(x_j) - f_j(y_j)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i G_j |b_{ij}| |(x_i - y_i)| |(x_j - y_j)| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| ((x_i - y_i)^2 + (x_j - y_j)^2) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_j G_i |b_{ji}| (x_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p_i G_j |b_{ij}| + p_j G_i |b_{ji}|) (x_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n k_i (x_i - y_i)^2 \\
&= (x - y)^T K (x - y)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki üç eşitsizlikten yararlanarak, (4.28) denklemini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz :

$$\begin{aligned}
2(x - y)^T P(H(x) - H(y)) &\leq -2(x - y)^T P\Gamma(x - y) + (x - y)^T K(x - y) \\
&\quad + (x - y)^T (GQ^{-1}G + PAQA^T P)(x - y) \\
&= -(x - y)^T \Omega(x - y)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$x \neq y$ için, $\Omega > 0$ koşulu, $2(x - y)^T P(H(x) - H(y)) < 0$ olmasını sağlar. Bu da, tüm $x \neq y$ için, $H(x) \neq H(y)$ olması anlamına gelmektedir.

(4.29) eşitliğinde $y = 0$ seçilirse, şu eşitsizlik elde edilir :

$$2x^T P(H(x) - H(0)) \leq -x^T \Omega x$$

Buradan da, aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz :

$$|2x^T P(H(x) - H(0))| \geq x^T \Omega x$$

$$2\|P\|_\infty \|x\|_\infty \|H(x) - H(0)\|_1 > \lambda_m(\Omega) \|x\|_2^2$$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ ve $\|H(x) - H(0)\|_1 \leq \|H(x)\|_1 + \|H(0)\|_1$ olduğu için, şu eşitsizliği yazabiliriz :

$$\|H(x)\|_1 > \frac{\lambda_m(\Omega)\|x\|_2 - 2\|P\|_\infty\|H(0)\|_1}{2\|P\|_\infty}$$

$\|P\|_\infty$ ve $\|H(0)\|_1$ sonlu olduğu için, $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ 'dur. Bu nedenle, $H(x)$, R^n 'de homomorfizmdir ve (4.12) sisteminin çözümünü sağlayan tek bir x vardır. Böylece, denge noktasının varlığı ve tekliliği ispatlanmıştır.

Teorem 4.3.4 :

A_1 , A_2 ve A_5 varsayımlarında belirtilen koşulların sağlandığını kabul edelim. Eğer bazı $P = \text{diag}(p_i > 0)$ ve $Q = \text{diag}(q_i > 0)$ matrisleri için aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ve $G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n)$ olmak üzere,

$$\Theta = 2P\Gamma - (P|A|G + G|A^T|P) - GQG - |PBQ^{-1}B^TP| > 0$$

bu durumda, (4.9) ile tanımlanan Cohen-Grossberg yapay sinir ağının her u girişi için tek denge noktası vardır.

İspat :

Öncelikle aşağıdaki eşitsizlikleri gözönüne alalım :

$$(x - y)^T P(C(x) - C(y)) \geq (x - y)^T P\Gamma(x - y) = |x - y|^T P\Gamma |x - y|$$

$$\begin{aligned} 2(x - y)^T PA(f(x) - f(y)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i a_{ij}(x_i - y_i)(f_j(x_j) - f_j(y_j)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i |a_{ij}| |(x_i - y_i)| |f_j(x_j) - f_j(y_j)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i G_j |a_{ij}| |(x_i - y_i)| |(x_j - y_j)| \\ &\leq |x - y|^T (P|A|G + G|A^T|P) |x - y| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x - y)^T PB(f(x) - f(y)) &\leq (x - y)^T GQG(x - y) + (x - y)^T PBQ^{-1}B^TP(x - y) \\ &\leq |x - y|^T GQG |x - y| + |x - y|^T |PBQ^{-1}B^TP| |x - y| \end{aligned}$$

Yukarıdaki üç eşitsizliği (4.28)'de kullanarak, aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz :

$$\begin{aligned}
2(x-y)^T P(H(x) - H(y)) &\leq -2|(x-y)^T |P\Gamma|(x-y)| \\
&\quad + |x-y|^T (P|A|G + G|A^T|P)|x-y| \\
&\quad + |x-y|^T GQG|(x-y)| + |x-y|^T |PBQ^{-1}B^T P||x-y| \\
&= -|x-y|^T \Theta |x-y|
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$x - y \neq 0$ için, $\Theta > 0$ koşulu, $2(x-y)^T P(H(x) - H(y)) < 0$ olmasını sağlar. Bu nedenle, bütün $x \neq y$ 'ler için $H(x) \neq H(y)$ 'dir.

$y = 0$ alındığında, (4.30) eşitsizliği şu şekilde yazılabilir :

$$2x^T P(H(x) - H(0)) \leq -|x^T \Theta x|$$

Buradan da aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir :

$$2\|P\|_\infty \|x\|_\infty \|H(x) - H(0)\|_1 > \lambda_m(\Theta) \|x\|_2^2$$

$$\|H(x)\|_1 > \frac{\lambda_m(\Theta) \|x\|_2 - 2\|P\|_\infty \|H(0)\|_1}{2\|P\|_\infty}$$

$\|P\|_\infty$ ve $\|H(0)\|_1$ sonlu olduğu için, $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ 'dur. Bu nedenle, $H(x)$, R^n 'de homomorfizmdir.

Teorem 4.3.5 :

A_1 , A_2 ve A_4 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını kabul edelim. Eğer bazı $P = \text{diag}(p_i > 0)$ matrisi için aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Phi = 2P\Gamma G^{-1} - PA - A^T P - K > 0 \tag{4.31}$$

bu durumda, (4.8) ile tanımlanan Cohen-Grossberg sinir ağının her u girişi için tek denge noktası vardır.

(4.31) ile verilen ifadede Γ , G ve K ifadeleri aşağıdaki gibidir :

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n), \quad K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad \text{ve}$$

$$k_i = \sum_{j=1}^n (p_i |b_{ij}| + p_j |b_{ji}|) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

İspat :

(4.27) eşitliğinin, her iki tarafını $2(f(x) - f(y))^T P$ ifadesi ile çarparak, $P = \text{diag}(p_i > 0)$ olmak üzere, aşağıdaki eşitliği elde ederiz :

$$\begin{aligned} 2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) &= -2(f(x) - f(y))^T P(C(x) - C(y)) \\ &\quad + 2(f(x) - f(y))^T P A(f(x) - f(y)) \\ &\quad + 2(f(x) - f(y))^T P B(f(x) - f(y)) \\ &= -2(f(x) - f(y))^T P(C(x) - C(y)) \\ &\quad + (f(x) - f(y))^T (P A + A^T P)(f(x) - f(y)) \\ &\quad + 2(f(x) - f(y))^T P B(f(x) - f(y)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

A_2 ve A_4 varsayımlarından aşağıdaki eşitsizliği de yazabiliriz :

$$\begin{aligned} (f(x) - f(y))^T P(C(x) - C(y)) &\geq (f(x) - f(y))^T P \Gamma (x - y) \\ &\geq (f(x) - f(y))^T P \Gamma G^{-1} (f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

Ayrıca, aşağıdaki ifadeyi yazmamız da mümkündür :

$$2(f(x) - f(y))^T P B(f(x) - f(y)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i b_{ij} (f_i(x_i) - f_i(y_i)) (f_j(x_j) - f_j(y_j))$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i |b_{ij}| |f_i(x_i) - f_i(y_i)| |f_j(x_j) - f_j(y_j)| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 + (f_j(x_j) - f_j(y_j))^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_j |b_{ji}| (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p_i |b_{ij}| + p_j |b_{ji}|) (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 \\
&= \sum_{i=1}^n k_i (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 \\
&= (f(x) - f(y))^T K (f(x) - f(y))
\end{aligned}$$

Yukarıdaki iki eşitsizliği, (4.32) eşitliğinde kullanarak şunu yazabiliriz :

$$\begin{aligned}
2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) &\leq -2(f(x) - f(y))^T P \Gamma G^{-1} (f(x) - f(y)) \\
&\quad + (f(x) - f(y))^T (P A + A^T P) (f(x) - f(y)) \\
&\quad + (f(x) - f(y))^T K (f(x) - f(y)) \\
&= -(f(x) - f(y))^T \Phi (f(x) - f(y)) \tag{4.33}
\end{aligned}$$

$f(x) - f(y) \neq 0$ ve $\Phi > 0$ için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz :

$$2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) < 0$$

Bu eşitsizlikten de $f(x) - f(y) \neq 0$ için $H(x) \neq H(y)$ olduğu sonucuna varılabilir. Yani, tüm $x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$ sonucu elde edilir.

$y = 0$ alınması durumunda, (4.33) eşitsizliği, aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$2(f(x) - f(0))^T P(H(x) - H(0)) \leq -(f(x) - f(0))^T \Phi (f(x) - f(0))$$

Buradan da aşağıdaki eşitsizliği yazmak mümkündür :

$$|2(f(x) - f(0))^T P(H(x) - H(0))| > (f(x) - f(0))^T \Phi(f(x) - f(0))$$

Bu eşitsizlik aşağıdaki gibi de yazılabilir :

$$2\|P\|_\infty \|f(x) - f(0)\|_\infty \|H(x) - H(0)\|_1 > \lambda_m(\Omega) \|f(x) - f(0)\|_2^2$$

$\|f(x) - f(0)\|_\infty \leq \|f(x) - f(0)\|_2$, $\|H(x) - H(0)\|_1 \leq \|H(x)\|_1 + \|H(0)\|_1$ ve $\|f(x) - f(0)\|_1 \geq \|f(x)\|_1 - \|f(0)\|_1$ olduğu için, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz :

$$\|H(x)\|_1 > \frac{\lambda_m(\Phi) \|f(x)\|_2 - \lambda_m(\Phi) \|f(0)\|_2 - 2\|P\|_\infty \|H(0)\|_1}{2\|P\|_\infty}$$

$\|P\|_\infty, \|H(0)\|_1$ ve $\|f(0)\|_2$ sonlu olduğu için, $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ 'dur. Sınırlı olmayan aktivasyon fonksiyonları kullandığımız için, $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ olması $\|x\| \rightarrow \infty$ olması anlamına gelmektedir. Bu nedenle, $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ 'dur. Böylece, $H(x) : R^n \rightarrow R^n$, R^n 'de homomorfizmdir. Bu şekilde, ispat tamamlanmıştır.

4.4 COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ DENGE NOKTASININ KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde, Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılığını sağlayan koşullar sunulacaktır. İlk koşul, aşağıda ifade edilen Halanay eşitsizliği ilkesinden yararlanılarak elde edilecektir.

Kural 4.4.1 : (Halanay Eşitsizlik Kuralı) [47]

$\tau \geq 0$, bir sabit ve $V(t)$, $[-\tau, +\infty]$ aralığında tanımlanmış, yarı kesin pozitif, sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun türevi, p ve q sabitleri ve $t \geq 0$ için, $\dot{V}(t) \leq -pV(t) + q \sup_{t-\tau \leq s \leq t} V(s)$ eşitsizliğini sağlamaktadır. $p > q > 0$ olması durumunda, $t > 0$ için $V(t) \leq \sup_{-\tau \leq s \leq 0} V(s) e^{-\delta t}$ 'dir. Bu eşitsizlikte, $\delta, \delta = p - q e^{\delta \tau}$ eşitliğinin pozitif

bir köküdür.

Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılığı ile ilgili elde ettiğimiz teoremler aşağıda verilmiştir :

Teorem 4.4.1 :

A_1, A_2 ve A_5 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını kabul edelim. Ayrıca,

$\gamma_m = \min_{1 \leq i \leq n}(\gamma_i), \mu_m = \min_{1 \leq i \leq n}(\mu_i), \rho_M = \max_{1 \leq i \leq n}(\rho_i)$ ve $L_M = \max_{1 \leq i \leq n}(L_i)$ olsun.

Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$||A||_1 + ||B||_1 < \frac{\gamma_m \mu_m}{\rho_M L_M}$$

bu durumda, (4.18) ile verilen Cohen-Grossberg yapay sinir ağının denge noktası global üstel kararlıdır.

İspat :

Aşağıdaki kesin pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu gözönüne alalım :

$$V(z(t)) = \sum_{i=1}^n |z_i(t)|$$

$V(z(t))$ fonksiyonunun zamana göre türevi şu şekilde elde edilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq - \sum_{i=1}^n \alpha_i(z_i(t)) |\beta_i(z_i(t))| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i(z_i(t)) |a_{ij}| |g_j(z_j(t))| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i(z_i(t)) |b_{ij}| |g_j(z_j(t - \tau_j(t)))| \\ &\leq - \sum_{i=1}^n \mu_i \gamma_i |z_i(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_i |a_{ij}| L_j |z_j(t)| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_i |b_{ij}| L_j |z_j(t - \tau_j(t))| \\ &\leq - \mu_m \gamma_m \sum_{i=1}^n |z_i(t)| + \rho_M L_M \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |z_j(t)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_M L_M \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |z_j(t - \tau_j(t))| \\
= & -\mu_m \gamma_m \sum_{i=1}^n |z_i(t)| + \rho_M L_M \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ji}| |z_i(t)| \\
& + \rho_M L_M \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ji}| |z_i(t - \tau_i(t))| \\
\leq & -\mu_m \gamma_m \sum_{i=1}^n |z_i(t)| + \rho_M L_M \|A\|_1 \sum_{i=1}^n |z_i(t)| \\
& + \rho_M L_M \|B\|_1 \sum_{i=1}^n |z_i(t - \tau_i(t))| \\
\leq & -(\mu_m \gamma_m - \rho_M L_M \|A\|_1) V(z(t)) + \rho_M L_M \|B\|_1 V(z(t - \tau)) \\
\leq & -(\mu_m \gamma_m - \rho_M L_M \|A\|_1) V(z(t)) + \rho_M L_M \|B\|_1 \max_{t-\tau \leq s \leq t} (V(s))
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlik, $p = \mu_m \gamma_m - \rho_M L_M \|A\|_1$ ve $q = \rho_M L_M \|B\|_1$ olmak üzere şu şekilde yazılabilir :

$$\dot{V}(z(t)) \leq -pV(z(t)) + q \max_{t-\tau(t) \leq s \leq t} (V(s))$$

Kural 4.4.1'de verilen $p > q > 0$ koşulu, yukarıda elde ettiğimiz eşitsizliğe uygulandığında, şu sonucu elde ederiz :

$$\|A\|_1 + \|B\|_1 < \frac{\mu_m \gamma_m}{\rho_M L_M}$$

Buradan da doğrudan $\delta = (\mu_m \gamma_m - \rho_M L_M \|A\|_1) - \rho_M L_M \|B\|_1 e^{-\delta \tau}$ için,

$$V(z(t)) \leq \left(\sup_{-\tau \leq s \leq 0} V(s) \right) e^{-\delta t}$$

Bu eşitsizlikten, $V(z(t))$ 'in sıfıra üstel olarak yakınsadığı açık bir şekilde görülmektedir. Buradan da, $z(t)$ 'nin sıfıra bir δ yakınsama hızı ile global ve üstel olarak yakınsadığı söylenebilir. Yani, $\|z(t)\|_1 \leq (\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\phi(s)\|_1) e^{-\delta t}$ 'dir. Sonuç olarak, (4.18) ile verilen sistemin orijini global üstel kararlıdır.

Teorem 4.4.1 ile verilen kararlılık sonucunun gecikme parametresinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir. Aşağıda vereceğimiz sonuç ise, gecikme parametresinin zamana bağlı türevi-

ni içermektedir.

Teorem 4.4.2

(4.18) ile tanımlanan sistem için, $\tau_j(t)$ 'nin $\dot{\tau}_j(t) \leq \eta < 1$ olduğunu kabul edelim. A_1, A_2 ve A_4 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını ve $P = \text{diag}(p_i > 0)$, $Q = \text{diag}(q_i > 0)$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca, $\Upsilon = \text{diag}(\dot{\tau}_1(t), \dot{\tau}_2(t), \dots, \dot{\tau}_n(t))$ olsun.

Eğer,

$$\Omega = 2P\Gamma G^{-1} - PA - A^T P - Q - PB(I - \Upsilon)^{-1}Q^{-1}B^T P > 0$$

koşulu sağlanırsa, Cohen-Grossberg yapay sinir ağının orijini global asimtotik kararlıdır.

İspat :

k, r, p_i ve q_i pozitif sabitler olmak üzere, aşağıdaki kesin pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu ele alalım :

$$V(z(t)) = 2 \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i(t)} \frac{s}{\alpha_i(s)} ds + 2k \sum_{i=1}^n p_i \int_0^{z_i(t)} \frac{g_i(s)}{\alpha_i(s)} ds + (k + r) \sum_{i=j}^n q_j \int_{t-\tau_j(t)}^t g_j^2(z_j(\zeta)) d\zeta$$

$V(z(t))$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki şekilde ifade edilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) = & -z^T(t)\beta(z(t)) - z^T(t)\beta(z(t)) + 2z^T(t)Ag(z(t)) \\ & + 2z^T(t)Bg(z(t - \tau(t))) - 2kg^T(z(t))P\beta(z(t)) \\ & + 2kg^T(z(t))PAg(z(t)) + 2kg^T(z(t))PBg(z(t - \tau(t))) \\ & + kg^T(z(t))Qg(z(t)) + rg^T(z(t))Qg(z(t)) \\ & - kg^T(z(t - \tau(t)))(I - \Upsilon)Qg(z(t - \tau(t))) \\ & - rg^T(z(t - \tau(t)))(I - \Upsilon)Qg(z(t - \tau(t))) \end{aligned}$$

A_2 varsayımı kullanılarak, şu şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & -z^T(t)\Gamma(z(t)) - z^T(t)\Gamma(z(t)) + 2z^T(t)Ag(z(t)) \\
& + 2z^T(t)Bg(z(t - \tau(t))) - 2kg^T(z(t))P\Gamma G^{-1}g(z(t)) \\
& + 2kg^T(z(t))PAg(z(t)) + 2kg^T(z(t))PBg(z(t - \tau(t))) \\
& + kg^T(z(t))Qg(z(t)) + rg^T(z(t))Qg(z(t)) \\
& - kg^T(z(t - \tau(t)))(I - \Upsilon)Qg(z(t - \tau(t))) \\
& - rg^T(z(t - \tau(t)))(I - \Upsilon)Qg(z(t - \tau(t)))
\end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir :

$$\begin{aligned}
& -z^T(t)\Gamma(z(t)) + 2z^T(t)Ag(z(t)) \leq g^T(z(t))A^T\Gamma^{-1}Ag(z(t)), \\
& -z^T(t)\Gamma(z(t)) + 2z^T(t)Bg(z(t - \tau(t))) \leq g^T(z(t - \tau(t)))B^T\Gamma^{-1}Bg(z(t - \tau(t))), \\
& -kg^T(z(t - \tau(t)))(I - \Upsilon)Qg(z(t - \tau(t))) + 2kg^T(z(t))PBg(z(t - \tau(t))) \\
& \leq kg^T(z(t))PB(I - \Upsilon)^{-1}Q^{-1}B^TPg(z(t))
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikleri kullanarak, $\dot{V}(z(t))$ 'yi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & g^T(z(t))A^T\Gamma^{-1}Ag(z(t)) + g^T(z(t - \tau(t)))B^T\Gamma^{-1}Bg(z(t - \tau(t))) \\
& - 2kg^T(z(t))P\Gamma G^{-1}g(z(t)) + 2kg^T(z(t))PAg(z(t)) \\
& + kg^T(z(t))Qg(z(t)) + rg^T(z(t))Qg(z(t)) \\
& + kg^T(z(t))PB(I - \Upsilon)^{-1}Q^{-1}B^TPg(z(t)) \\
& - rg^T(z(t - \tau(t)))(I - \Upsilon)Qg(z(t - \tau(t))) \\
\leq & \|A^T\Gamma^{-1}A\|_2^2 g^T(z(t))g(z(t)) + \|B^T\Gamma^{-1}B\|_2^2 g^T(z(t - \tau(t)))g(z(t - \tau(t))) \\
& + kg^T(z(t))(-2P\Gamma G^{-1} + PA + A^TP + Q + PB(I - \Upsilon)^{-1}Q^{-1}B^TP)g(z(t)) \\
& + r q_M g^T(z(t))g(z(t)) - r q_m (1 - \eta) g^T(z(t - \tau(t)))g(z(t - \tau(t)))
\end{aligned}$$

$r = \|B^T \Gamma^{-1} B\|_2^2 / (q_m(1 - \eta))$ olsun. Böylece aşağıdaki şekilde yazabiliriz :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \left(\|A^T \Gamma^{-1} A\|_2^2 + \frac{q_M \|B^T \Gamma^{-1} B\|_2^2}{q_m(1 - \eta)} \right) g^T(z(t))g(z(t)) - k g^T(z(t)) \Omega g(z(t)) \\ &\leq \left(\|A^T \Gamma^{-1} A\|_2^2 + \frac{q_M \|B^T \Gamma^{-1} B\|_2^2}{q_m(1 - \eta)} - k \lambda_m(\Omega) \right) \|g(z(t))\|_2^2. \end{aligned}$$

$k > \frac{q_m(1-\eta)\|A^T \Gamma^{-1} A\|_2^2 + q_M \|B^T \Gamma^{-1} B\|_2^2}{q_m(1-\eta)\lambda_m(\Omega)}$ şeklinde seçilmesi $g(z(t)) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olmasını sağlar. $g(z(t)) \neq 0$ olması, $z(t) \neq 0$ olması anlamına gelmektedir. $g(z(t)) = 0$ ve $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki biçimde ifade edilebilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq -z^T(t)\Gamma z(t) - z^T(t)\Gamma z(t) + 2z^T Bg(z(t - \tau(t))) \\ &\quad - k g^T(z(t - \tau(t)))(I - \Upsilon)Qg(z(t - \tau(t))) \\ &\quad - r g^T(z(t - \tau(t)))(I - \Upsilon)Qg(z(t - \tau(t))) \\ &\leq -z^T(t)\Gamma z(t) - z^T(t)\Gamma z(t) + 2z^T Bg(z(t - \tau(t))) \\ &\quad - r q_m(1 - \eta) g^T(z(t - \tau(t)))g(z(t - \tau(t))). \end{aligned}$$

$-z^T(t)\Gamma z(t) + 2z^T Bg(z(t - \tau(t))) \leq g^T(z(t - \tau(t)))B^T \Gamma^{-1} Bg(z(t - \tau(t)))$ olduğu için $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq -z^T(t)\Gamma z(t) + g^T(z(t - \tau(t)))B^T \Gamma^{-1} Bg(z(t - \tau(t))) \\ &\quad - r q_m(1 - \eta) g^T(z(t - \tau(t)))g(z(t - \tau(t))). \end{aligned}$$

$r = \|B^T \Gamma^{-1} B\|_2^2 / (q_m(1 - \eta))$ için şunu elde ederiz :

$$\dot{V}(z(t)) \leq -z^T(t)\Gamma z(t)$$

Buradan da tüm $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olduğunu söyleyebiliriz. $g(z(t)) = z(t) = 0$ olması durumunda $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki şekilde yazılır :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -k g^T(z(t - \tau(t)))(I - \Upsilon)Qg(z(t - \tau(t))) \\ &\quad - r g^T(z(t - \tau(t)))(I - \Upsilon)Qg(z(t - \tau(t))). \end{aligned}$$

Tüm $g(z(t - \tau)) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olduğu açıktır. Bu nedenle, Teorem 4.4.2’de verilen koşullar altında $g(z(t - \tau(t))) = g(z(t)) = z(t) = 0$ olması durumunda, $\dot{V}(z(t)) = 0$ ’dır. Aksi durumda $\dot{V}(z(t)) < 0$ ’dır. Sonuç olarak, standart Lyapunov kararlılık teoremlerine göre [17], (4.18) ile tanımlanan sistemin orijini ya da (4.11) ile verilen sistemin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Teorem 4.4.2, gecikmenin sabit olması durumunda aşağıdaki özel durumdur :

Teorem 4.4.3 :

(4.18) ile tanımlanan sistem için, $\tau_j(t) = \tau_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) olduğunu kabul edelim. A_1, A_2 ve A_4 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını ve $P = \text{diag}(p_i > 0)$, $Q = \text{diag}(q_i > 0)$ olduğunu kabul edelim.

Eğer,

$$\Omega = 2P\Gamma G^{-1} - PA - A^T P - Q - PBQ^{-1}B^T P > 0$$

koşulu sağlanırsa, (4.11) ile tanımlanan Cohen-Grossberg yapay sinir ağının denge noktası asimtotik kararlıdır.

İspat:

Sabit bir τ_j gecikmesi için, $\dot{\tau}_j(t) = 0$ ’dır. Bu da, $\Upsilon = 0$ olduğu anlamına gelmektedir. Bu nedenle denge noktasının asimtotik kararlılığı doğrudan Teorem 4.4.2’nin bir sonucudur. Denge noktasının varlığı ve tekliği de Teorem 4.3.2’den elde edilebilen bir sonuçtur.

Kararlılık ile ilgili elde edilen daha ileri sonuçlar da aşağıda verilmiştir :

Teorem 4.4.4 :

A_1, A_2 ve A_5 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını kabul edelim. Eğer bazı $P = \text{diag}(p_i > 0)$ ve $Q = \text{diag}(q_i > 0)$ matrisleri için aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Omega = 2P\Gamma - GQ^{-1}G - PAQA^T P - K > 0 \quad (4.34)$$

bu durumda, (4.8) ile tanımlanan Cohen-Grossberg yapay sinir ağının denge noktası global asimtotik kararlıdır.

(4.34) ile verilen ifadede Γ , G ve K ifadeleri aşağıdaki gibidir :

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n), \quad K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad \text{ve}$$

$$k_i = \sum_{j=1}^n (p_i |b_{ij}| + p_j |b_{ji}|) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

İspat :

Aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu ele alalım :

$$V(z(t)) = 2 \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i(t)} p_i \frac{s}{\alpha_i(s)} ds + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| \int_{t-\tau_{ij}}^t z_j^2(\xi) d\xi + \rho \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t-\tau_{ij}}^t z_j^2(\xi) d\xi$$

Burada, p_i ve ρ , daha sonradan belirlenen pozitif sabitlerdir. Bu fonksiyonun zamana göre türevi aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -2 \sum_{i=1}^n p_i \beta_i(z_i(t)) z_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i a_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| z_j^2(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| z_j^2(t - \tau_{ij}) \\ &\quad + \rho \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_j^2(t) - \rho \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_j^2(t - \tau_{ij}) \\ &\leq -2 \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i a_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i |b_{ij}| |z_i(t)| |g_j(z_j(t - \tau_{ij}))| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| z_j^2(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| z_j^2(t - \tau_{ij}) + n\rho \sum_{j=1}^n z_j^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq -2 \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i a_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i G_j |b_{ij}| |z_i(t)| |z_j(t - \tau_{ij})| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| z_j^2(t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| z_j^2(t - \tau_{ij}) + n\rho \sum_{j=1}^n z_j^2(t) \\
&\leq -2 \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i a_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| (z_i^2(t) + z_j^2(t - \tau_{ij})) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| z_j^2(t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| z_j^2(t - \tau_{ij}) + n\rho \sum_{j=1}^n z_j^2(t) \\
&= -2 \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i z_i^2(t) + 2z^T(t) P A g(z(t)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p_i G_j |b_{ij}| + p_j G_i |b_{ji}|) z_i^2(t) + n\rho \sum_{j=1}^n z_j^2(t) \\
&\leq -2z^T(t) P \Gamma z(t) + g^T(z(t)) Q^{-1} g(z(t)) + z^T(t) P A Q A^T P z(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n k_i z_i^2(t) + n\rho \sum_{j=1}^n z_j^2(t) \\
&\leq -2z^T(t) P \Gamma z(t) + z^T(t) G Q^{-1} G z(t) + z^T(t) P A Q A^T P z(t) \\
&\quad + z^T(t) K z(t) + n\rho z^T(t) z(t) \\
&= -z^T(t) \Omega z(t) + n\rho z^T(t) z(t) \\
&\leq -\lambda_m(\Omega) z^T(t) z(t) + n\rho z^T(t) z(t) \\
&= -(\lambda_m(\Omega) - n\rho) z^T(t) z(t)
\end{aligned}$$

Eğer $\rho < \frac{\lambda_m(\Omega)}{n}$ seçilirse, bu durumda bütün $z(t) \neq 0$ için, $\dot{V}(z(t)) < 0$ olacaktır.

$z(t) = 0$ için ise, $\dot{V}(z(t))$ şu şekilde yazılabilir :

$$\dot{V}(z(t)) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i G_j |b_{ij}| z_j^2(t - \tau_{ij}) - \rho \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_j^2(t - \tau_{ij}) \leq -\rho \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_j^2(t - \tau_{ij})$$

En az bir tane sıfırdan farklı $z_j(t - \tau_{ij})$ olması durumunda, $\dot{V}(z(t)) < 0$ olacaktır. Bu nedenle, $z(t) = 0$ ve tüm i, j 'ler için, $z_j(t - \tau_{ij}) = 0$ olması durumunda, $\dot{V}(z(t)) = 0$ 'dır. Aksi durumda, $\dot{V}(z(t)) < 0$ 'dır. Ayrıca, $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olduğu için, $V(z(t))$ radyal sınırsız bir fonksiyondur. Sonuç olarak, (4.15) sisteminin orijini ya da bu sistemin eşdeğeri olan (4.8) sisteminin denge noktası, global asimtotik kararlıdır [68].

Teorem 4.4.5 :

A_1 , A_2 ve A_5 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını kabul edelim. Eğer bazı $P = \text{diag}(p_i > 0)$ ve $Q = \text{diag}(q_i > 0)$ matrisleri için aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Theta = 2P\Gamma - (P|A|G + G|A^T|P) - GQG - |PBQ^{-1}B^TP| > 0 \quad (4.35)$$

bu durumda, (4.9) ile tanımlanan Cohen-Grossberg yapay sinir ağının denge noktası global asimtotik kararlıdır.

(4.35) ile verilen ifadede Γ ve G ifadeleri aşağıdaki gibidir :

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \text{ ve } G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n)$$

İspat :

Aşağıdaki Lyapunov-Krasovskii fonksiyonunu ele alalım :

$$V(z(t)) = 2 \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i(t)} p_i \frac{s}{\alpha_i(s)} ds + \sum_{i=1}^n q_i \int_{t-\tau_i}^t g_i^2(z_i(\zeta)) d\zeta$$

Bu ifade de, p_i ve q_i pozitif sabitlerdir.

Bu fonksiyonun zamana göre türevi aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -2 \sum_{i=1}^n p_i \beta_i(z_i(t)) z_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i a_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_j)) + \sum_{i=1}^n q_i g_i^2(z_i(t)) - \sum_{i=1}^n q_i g_i^2(z_i(t - \tau_i)) \\ &\leq -2 \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i |a_{ij}| |z_i(t)| |g_j(z_j(t))| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_j)) + \sum_{i=1}^n q_i G_i^2 z_i^2(t) - \sum_{i=1}^n q_i g_i^2(z_i(t - \tau_i)) \\ &\leq -2 \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i |a_{ij}| |z_i(t)| |G_j| |z_j(t)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_j)) + \sum_{i=1}^n q_i G_i^2 z_i^2(t) - \sum_{i=1}^n q_i g_i^2(z_i(t - \tau_i)) \\
= & -2z^T(t) P \Gamma z(t) + |z^T(t)| (P|A|G + G|A^T|P) |z(t)| \\
& + 2z^T(t) P B g(z(t - \tau)) + z^T(t) G Q G z(t) - g^T(z(t - \tau)) Q^{-1} g(z(t - \tau)) \\
\leq & -2z^T(t) P \Gamma z(t) + |z^T(t)| (P|A|G + G|A^T|P) |z(t)| \\
& + z^T(t) G Q G z(t) + z^T(t) P B Q^{-1} B^T P z(t) \\
\leq & -2|z^T(t)| P \Gamma |z(t)| + |z^T(t)| (P|A|G + G|A^T|P) |z(t)| \\
& + |z^T(t)| G Q G |z(t)| + |z^T(t)| |P B Q^{-1} B^T P| |z(t)| \\
= & -|z^T(t)| (2P \Gamma - (P|A|G + G|A^T|P) - G Q G - |P B Q^{-1} B^T P|) |z(t)| \\
= & -|z^T(t)| \Theta |z(t)|
\end{aligned}$$

$\Theta > 0$ olması durumunda, tüm $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ 'dır. $z(t) = 0$ için, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki biçimde yazılabilir :

$$\dot{V}(z(t)) = - \sum_{i=1}^n q_i g_i^2(z_i(t - \tau_i))$$

Tüm $g(z(t - \tau)) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ 'dır. Bu nedenle, $z(t) = 0$ ve $z(t - \tau) = 0$ olması durumunda $\dot{V}(z(t)) = 0$, aksi durumda $\dot{V}(z(t)) < 0$ 'dır. Ayrıca, $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olduğu için, $V(z(t))$ radyal sınırsız bir fonksiyondur. Sonuç olarak, (4.16) sisteminin orijini ya da eşdeğer olarak (4.9) sisteminin denge noktası, global asimtotik kararlıdır [68].

Teorem 4.4.6 :

A_1 , A_2 ve A_4 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını kabul edelim. Eğer bazı $P = \text{diag}(p_i > 0)$ matrisi için aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Phi = 2P \Gamma G^{-1} - P A - A^T P - K > 0 \quad (4.35)$$

bu durumda, (4.8) ile tanımlanan Cohen-Grossberg sinir ağının denge noktası global asimtotik kararlıdır.

(4.35) ile verilen ifadede Γ , G ve K ifadeleri aşağıdaki gibidir :

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n), \quad K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad \text{ve}$$

$$k_i = \sum_{j=1}^n (p_i |b_{ij}| + p_j |b_{ji}|) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

İspat :

Aşağıdaki pozitif tanımlı ve radyal sınırsız Lyapunov fonksiyonunu ele alalım :

$$\begin{aligned} V(z(t)) = & 2n \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i(t)} \frac{s}{\alpha_i(s)} ds + 2\alpha \sum_{i=1}^n p_i \int_0^{z_i(t)} \frac{g_i(s)}{\alpha_i(s)} ds + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha p_i |b_{ij}| \int_{t-\tau_{ij}}^t g_j^2(z_j(\xi)) d\xi \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon \int_{t-\tau_{ij}}^t g_j^2(z_j(\xi)) d\xi + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 b_{ij}^2 \int_{t-\tau_{ij}}^t g_j^2(z_j(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

ρ_i , α ve ε daha sonradan belirlenecek pozitif sabitlerdir. Bu fonksiyonun zamana göre türevi aşağıdaki şekildedir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) = & -2 \sum_{i=1}^n n \beta_i(z_i(t)) z_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n a_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) - 2\alpha \sum_{i=1}^n p_i \beta_i(z_i(t)) g_i(z_i(t)) \\ & + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i a_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t)) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i b_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) \\ & + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| g_j^2(z_j(t)) - \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_j^2(z_j(t)) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 b_{ij}^2 g_j^2(z_j(t)) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 b_{ij}^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2na_{ij}z_i(t)g_j(z_j(t)) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 a_{ij}^2 g_j^2(z_j(t))$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2nb_{ij}z_i(t)g_j(z_j(t - \tau_{ij})) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 b_{ij}^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij}))$$

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i b_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) &\leq \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| g_i^2(z_i(t)) \\ &\quad + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \end{aligned}$$

$$-2\alpha \sum_{i=1}^n p_i \beta_i(z_i(t)) g_i(z_i(t)) \leq -2\alpha \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i z_i(t) g_i(z_i(t)) \leq -2\alpha \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i G_i^{-1} g_i^2(z_i(t))$$

Yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 a_{ij}^2 g_j^2(z_j(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 b_{ij}^2 g_j^2(z_j(t)) \\ &\quad - 2\alpha \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i G_i^{-1} g_i^2(z_i(t)) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i a_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t)) \\ &\quad + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| g_j^2(z_j(t)) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| g_i^2(z_i(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_i^2(z_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 [a_{ji}^2 + b_{ji}^2] g_i^2(z_i(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_i^2(z_i(t)) \\ &\quad - 2\alpha \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i G_i^{-1} g_i^2(z_i(t)) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i a_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t)) \\ &\quad + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p_i |b_{ij}| + p_j |b_{ji}|) g_i^2(z_i(t)) \end{aligned}$$

$\delta = \max(\frac{1}{\gamma_i}n^2[a_{ji}^2 + b_{ji}^2])$ olması durumunda, şu eşitsizliği elde ederiz :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta g_i^2(z_i(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_i^2(z_i(t)) \\
&\quad - 2\alpha g^T(z(t)) P \Gamma G^{-1} g(z(t)) + \alpha g^T(z(t)) (P A + A^T P) g(z(t)) \\
&\quad + \alpha g^T(z(t)) K g(z(t)) \\
&= n(\delta + \varepsilon) \|g(z(t))\|_2^2 - \alpha g^T(z(t)) \Phi g(z(t)) \\
&\leq n(\delta + \varepsilon) \|g(z(t))\|_2^2 - \alpha \lambda_m(\Phi) \|g(z(t))\|_2^2 \\
&= -(\alpha \lambda_m(\Phi) - n(\delta + \varepsilon)) \|g(z(t))\|_2^2
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte, $\alpha > \frac{n(\delta + \varepsilon)}{\lambda_m(\Phi)}$ olması durumunda, tüm $g(z(t)) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t))$ negatif tanımlıdır. (Biliyoruz ki, $g(z(t)) \neq 0$, $z(t) \neq 0$ olması anlamına gelmektedir.) $g(z(t)) = 0$ olması durumunda, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= -2 \sum_{i=1}^n n \beta_i(z_i(t)) z_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) \\
&\quad - \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 b_{ij}^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\
&\leq -2 \sum_{i=1}^n n \beta_i(z_i(t)) z_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 b_{ij}^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\
&= - \sum_{i=1}^n n \beta_i(z_i(t)) z_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 b_{ij}^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \leq 0
\end{aligned}$$

olduğu için,

$$\dot{V}(z(t)) \leq - \sum_{i=1}^n n \beta_i(z_i(t)) z_i(t)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Buradan da, tüm $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ 'dır. $g(z(t)) = z(t) = 0$ olması durumunda, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned}\dot{V}(z(t)) = & -\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_i} n^2 b_{ij}^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij}))\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte, en azından bir tane sıfırdan farklı $g_j(z_j(t - \tau_{ij}))$ olması durumunda, $\dot{V}(z(t)) < 0$ 'dır. Bu nedenle, tüm i, j 'ler için, $g(z(t)) = z(t) = 0$ ve $g_j(z_j(t - \tau_{ij})) = 0$ olması durumunda, $\dot{V}(z(t)) = 0$ 'dır. Aksi durumda, $\dot{V}(z(t)) < 0$ 'dır. Buna ek olarak, $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olduğu için, $V(z(t))$ radyal sınırsız bir fonksiyondur. Sonuç olarak, (4.15) ile verilen sistemin orijini ya da (4.8) sisteminin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Daha zayıf kararlılık koşulları için, uygun P ve Q pozitif diyagonal matrislerinin bulunması her zaman kolay değildir. Bu nedenle, 4.4.4 - 4.4.6 teoremlerinde elde edilen sonuçları, sadece ağ parametreleri ile ifade etmek daha uygun olacaktır. $P = Q = I$ (birim matris) olması durumunda aşağıdaki sonuçları verebiliriz :

Sonuç 4.4.1 :

A_1, A_2 ve A_5 varsayımlarında belirtilen koşulların sağlandığını kabul edelim.

Ayrıca, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n)$, $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ve

$$k_i = \sum_{j=1}^n (G_j |b_{ij}| + G_i |b_{ji}|) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olsun.

Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Omega^* = 2\Gamma - G^2 - AA^T - K > 0$$

bu durumda, (4.8) ile tanımlanan Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Sonuç 4.4.2 :

A_1, A_2 ve A_5 varsayımlarında belirtilen koşulların karşılandığını kabul edelim.

Ayrıca, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ve $G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n)$ olsun.

Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Theta^* = 2\Gamma - (|A|G + G|A^T|) - G^2 - |BB^T| > 0$$

bu durumda, (4.9) ile tanımlanan Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Sonuç 4.4.3 :

A_1, A_2 ve A_4 varsayımlarında belirtilen koşulların karşılandığını kabul edelim.

Ayrıca, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n)$, $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ve

$$k_i = \sum_{j=1}^n (G_j |b_{ij}| + G_i |b_{ji}|) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olsun.

Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Phi^* = 2\Gamma G^{-1} - A - A^T - K > 0$$

bu durumda, (4.8) ile tanımlanan Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının denge noktası global asimtotik kararlıdır.

5. BULGULAR

Bölüm 4.4’de elde ettiğimiz kararlılık sonuçları, daha önce literatürde yayınlanan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Öncelikle literatürde daha önce elde edilmiş kararlılık sonuçlarını bir kez daha ifade ediyoruz.

Teorem 5.1: [16]

(4.18) ile tanımlanan sistem için, $\tau_j(t) = \tau_j$ ’nin sabit bir gecikme olduğunu kabul edelim. $A_1 - A_4$ varsayımlarında belirtilen koşulların sağlandığını ve $P = \text{diag}(p_i > 0)$, $Q = \text{diag}(q_i > 0)$ olduğunu kabul edelim.

Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Omega = 2PTG^{-1} - PA - A^TP - Q - PBQ^{-1}B^TP > 0$$

bu durumda, (4.11) yapay sinir ağının denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Teorem 5.2: [15]

$A_1 - A_3$ ve A_5 varsayımlarında belirtilen koşulların sağlandığını kabul edelim.

Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$||A||_2 + ||B||_2 < \frac{\gamma_m \mu_m}{\rho_M L_M}$$

bu durumda, (4.11) yapay sinir ağının denge noktası global üstel kararlıdır.

Teorem 4.4.3 ve Teorem 5.1’de ağ parametrelerine empoze edilen koşullar özdeştir. Ancak, Teorem 5.1 aynı zamanda A_3 varsayımının da sağlanmasını gerektirir. Başka bir deyişle, Teorem 5.1’de aktivasyon fonksiyonlarının sınırlı oldukları varsayılmıştır. Teorem 4.4.3 ise aktivasyon

fonksiyonlarının sınırlı olma özelliğini kullanmamaktadır. Bu nedenle, bu tezde elde edilen sonuçlar, tasarımda daha geniş bir aktivasyon sınıfı kullanmamıza olanak sağladığı için Teorem 5.1’de elde edilen sonuçlardan daha geneldir.

Diğer taraftan, Teorem 5.2 de aktivasyon fonksiyonları için A_3 varsayımını kullanmaktadır. Aktivasyon fonksiyonları açısından bakıldığında, Teorem 4.4.1’de elde edilen sonuç, Teorem 5.2’de elde edilen sonuçtan daha geneldir. Teorem 4.4.1, bağlantı matrislerinin birinci ve Teorem 5.2’de ikinci normları üzerine bir kısıt getirmişlerdir. Bu koşullar birbirleriyle örtüşmediğinden, Teorem 4.3.1’de elde edilen koşul, Teorem 5.2’deki sonuca bir alternatif olarak düşünülebilir.

Teorem 4.4.1 ile verdiğimiz koşulun (4.18) sistemi için yeni ve yeterli bir kriter sağladığını göstermek için aşağıda farklı sistem parametreleri için örnekler ve bu örneklerle ait simülasyon sonuçları verilmiştir. Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının Hopfield-tipi yapay sinir ağlarına göre avantajını göstermek açısından simülasyonlar aynı sistem parametreleri kullanılarak Hopfield yapay sinir ağları için de yapılmıştır.

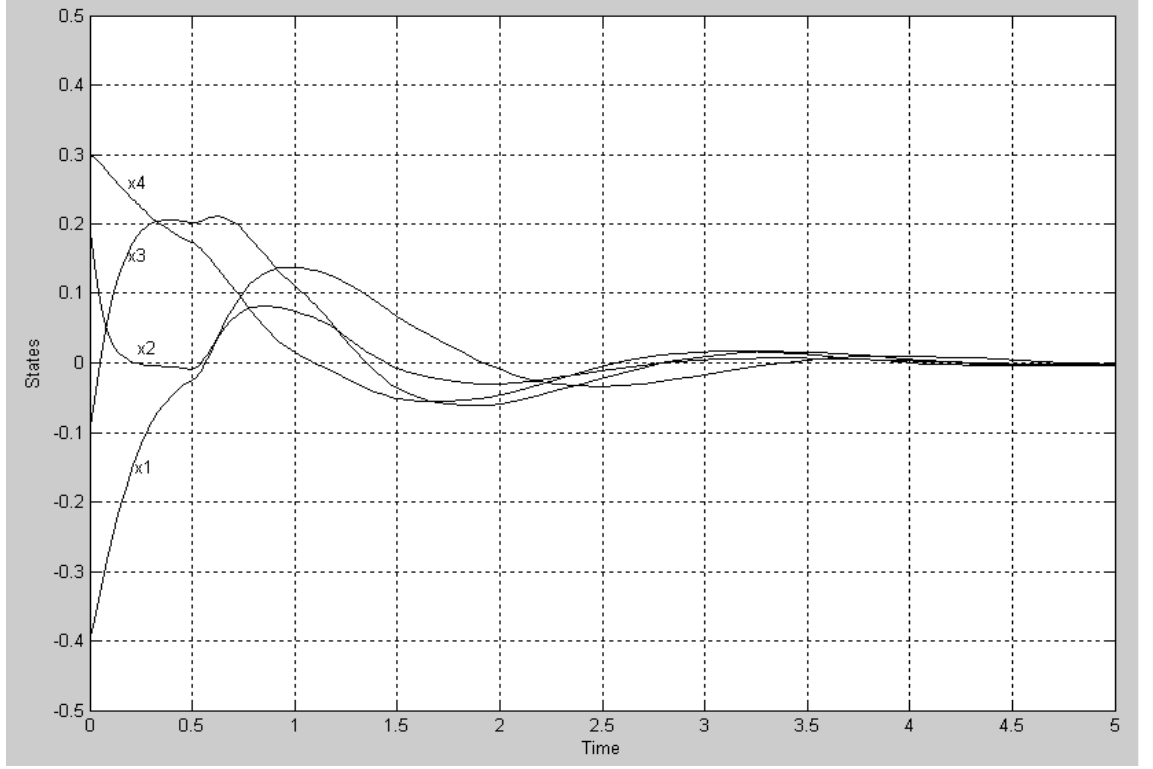
Örnek 5.1 : Sistem (4.18)’in ağ parametreleri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun :

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

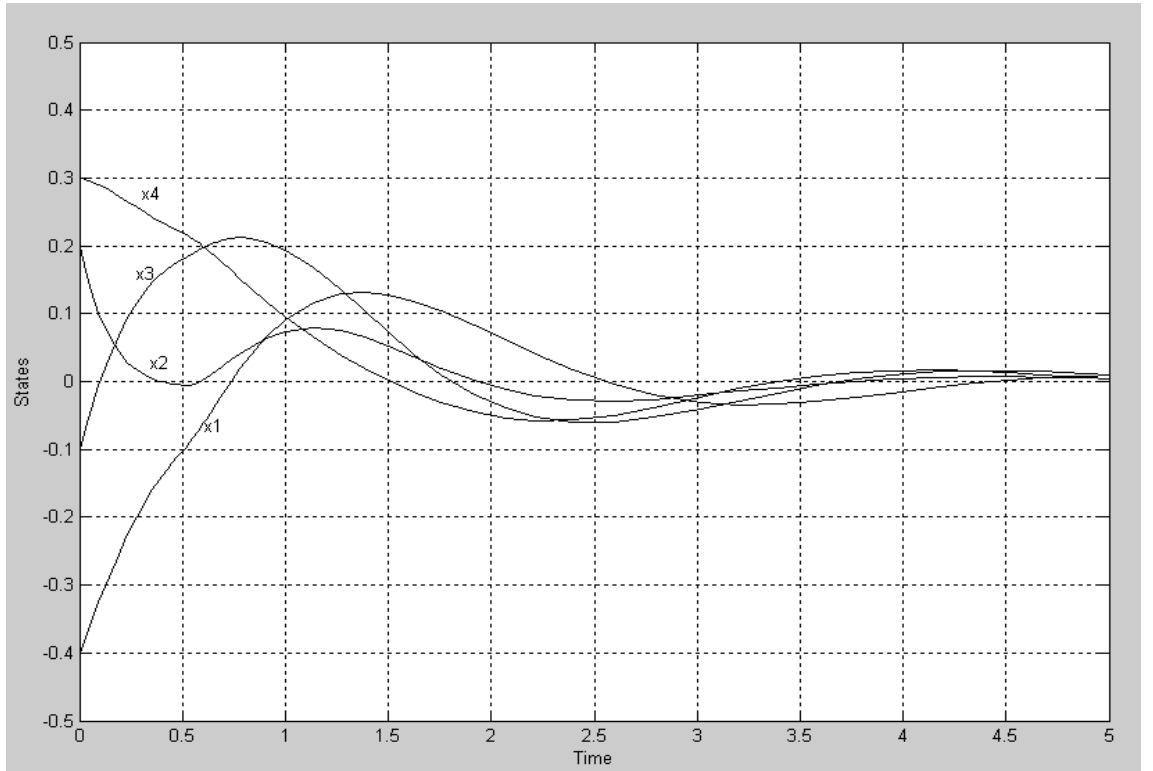
$\gamma_m = 3$, $\mu_m = 5$, $\rho_M = 5$, $L_M = 0.2$ olsun.

Buradan $\|A\|_1 = \|B\|_1 = 5$ olarak hesaplanır. $\|A\|_1 + \|B\|_1 < 15$ olduğu için Teorem 4.4.1 ile verilen koşulun bu ağ parametreleri ile sağlandığı açıkça görülmektedir.

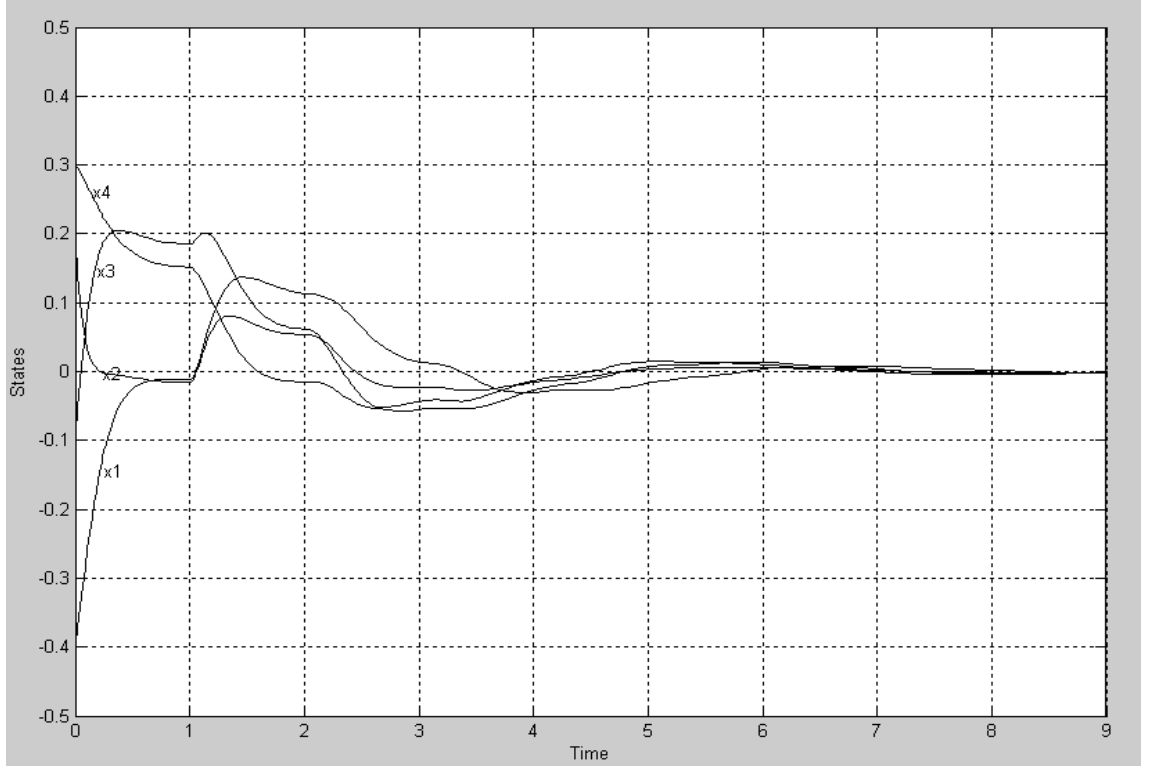
Bu sistem parametreleri ile birlikte, $D(z(t)) = 2 + \sin z(t)$, $C(z(t)) = 4z(t)$ ve $g(z(t)) = \tanh(z(t))$ alınarak gerçekleştirilmiş simülasyon sonuçları farklı zaman gecikmeleri ve yapay sinir ağı modelleri için Şekil 5.1 - Şekil 5.6’da verilmiştir.



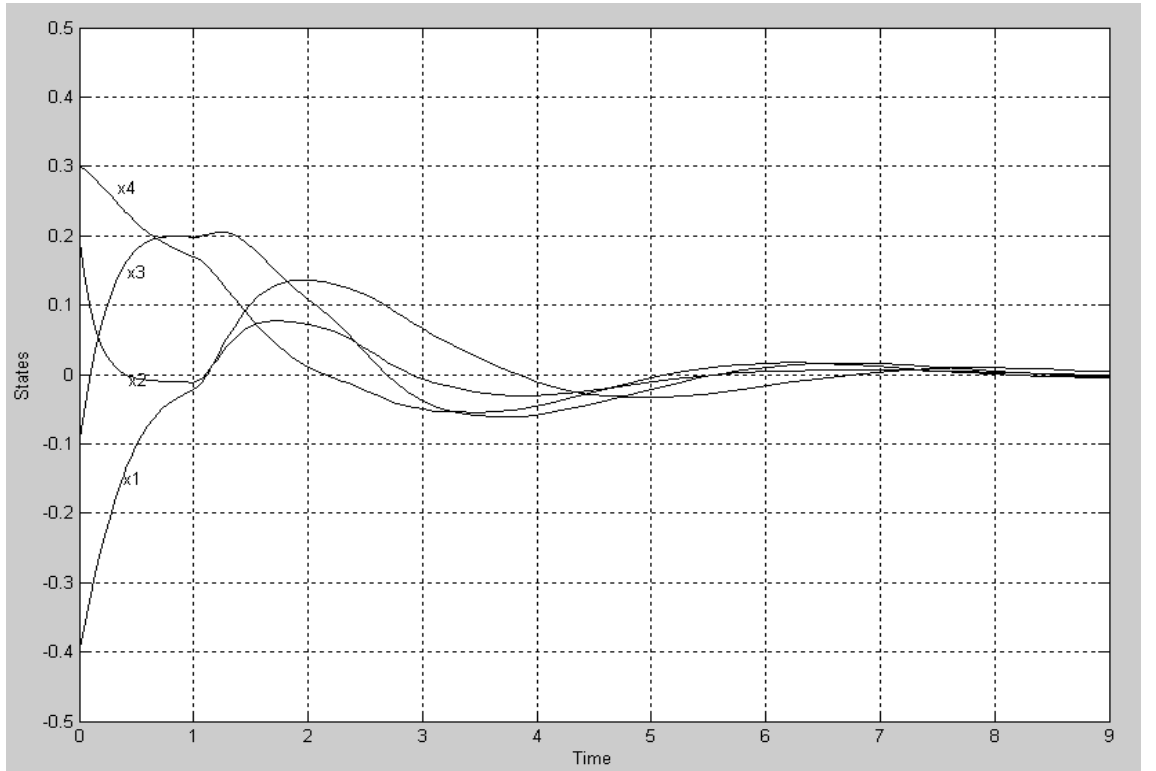
Şekil 5.1 : Örnek 5.1 için $\tau = 0.5$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



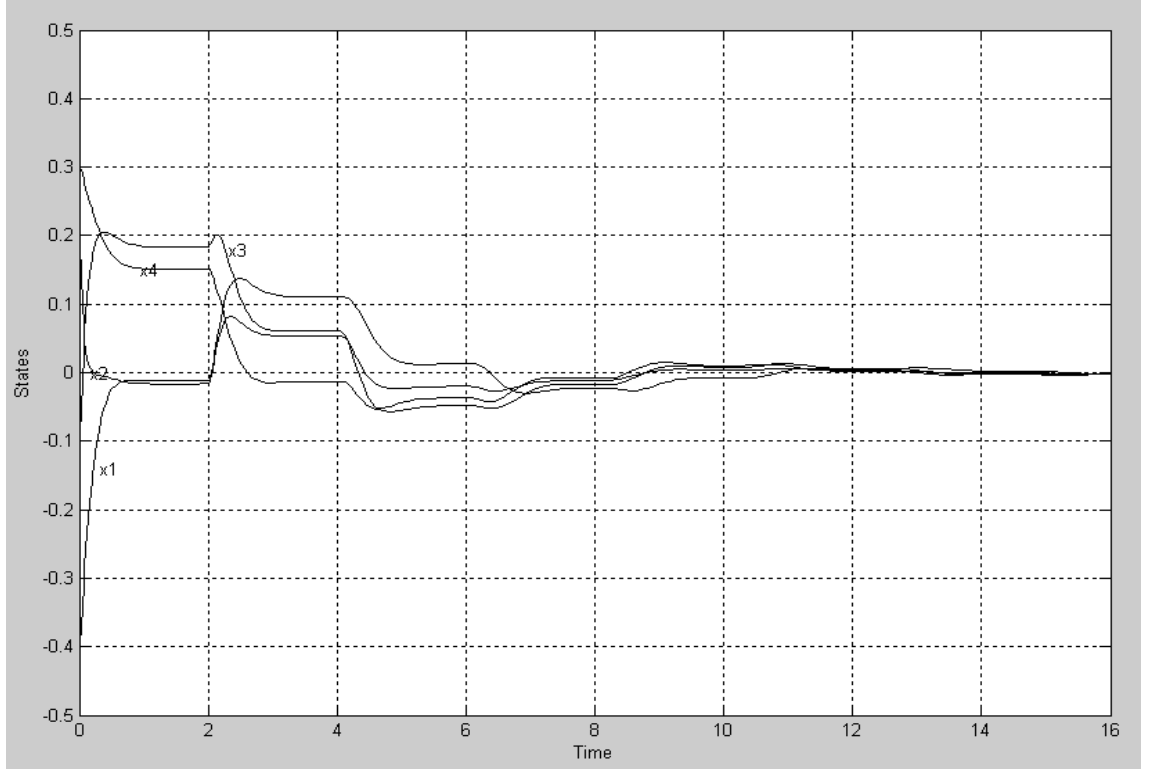
Şekil 5.2 : Örnek 5.1 için $\tau = 0.5$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



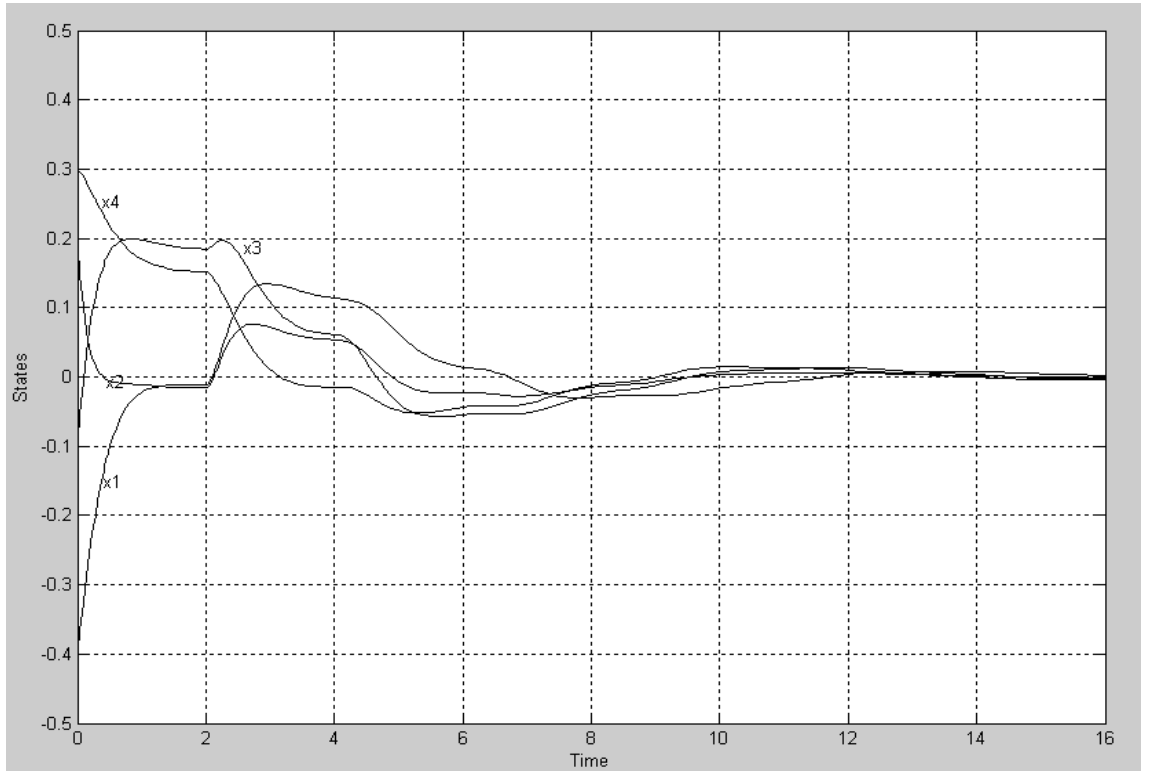
Şekil 5.3 : Örnek 5.1 için $\tau = 1.0$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.4 : Örnek 5.1 için $\tau = 1.0$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.5 : Örnek 5.1 için $\tau = 2.0$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.6 : Örnek 5.1 için $\tau = 2.0$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı

Örnek 5.2 : Sistem (4.18)'in ağ parametreleri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun :

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\gamma_m = 3$, $\mu_m = 5$, $\rho_M = 5$, $L_M = 0.2$ olsun.

Buradan $\|A\|_1 = \|B\|_1 = 4$ olarak hesaplanır. $\|A\|_1 + \|B\|_1 < 15$ olduğu için Teorem 4.4.1 ile verilen koşulun bu ağ parametreleri ile sağlandığı açıkça görülmektedir.

Bu sistem parametreleri ile birlikte, $D(z(t)) = 2 + \sin z(t)$, $C(z(t)) = 4z(t)$ ve $g(z(t)) = \tanh(z(t))$ alınarak gerçekleştirilmiş simülasyon sonuçları zaman gecikmesi $\tau = |\cos t|$ ve farklı yapay sinir ağı modelleri için Şekil 5.7 ve Şekil 5.8'de verilmiştir.

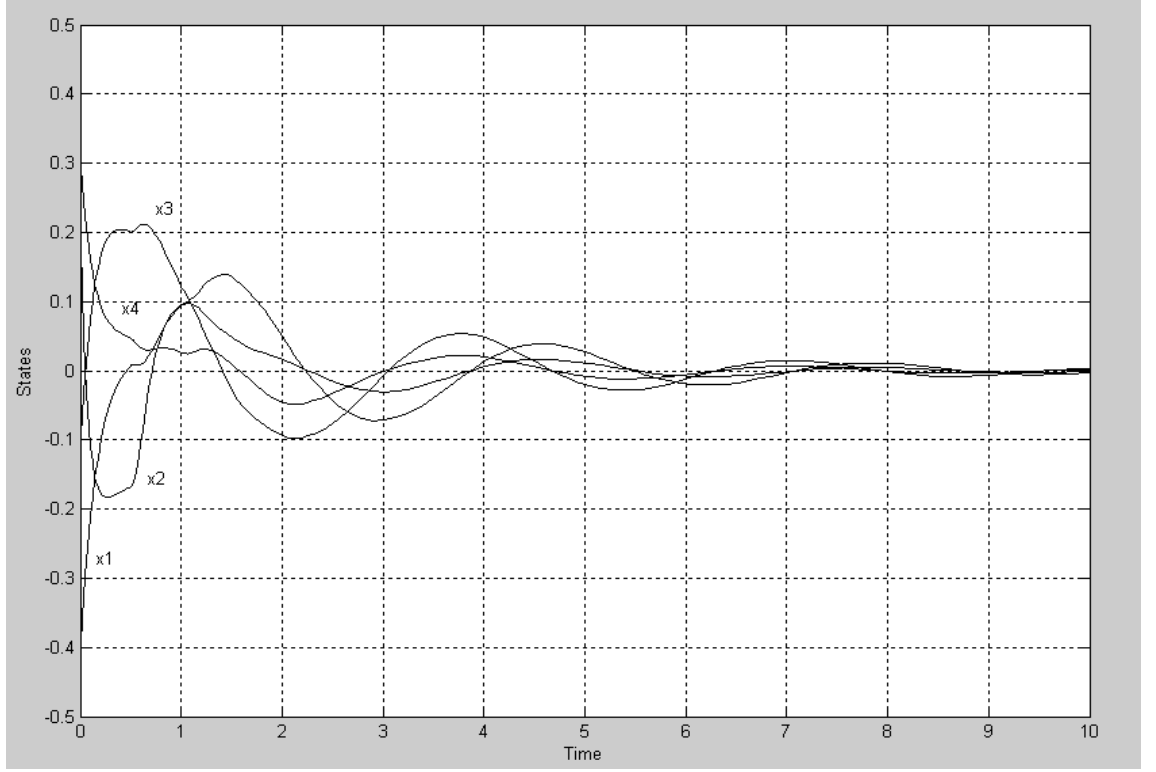
Örnek 5.3 : Sistem (4.18)'in ağ parametreleri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

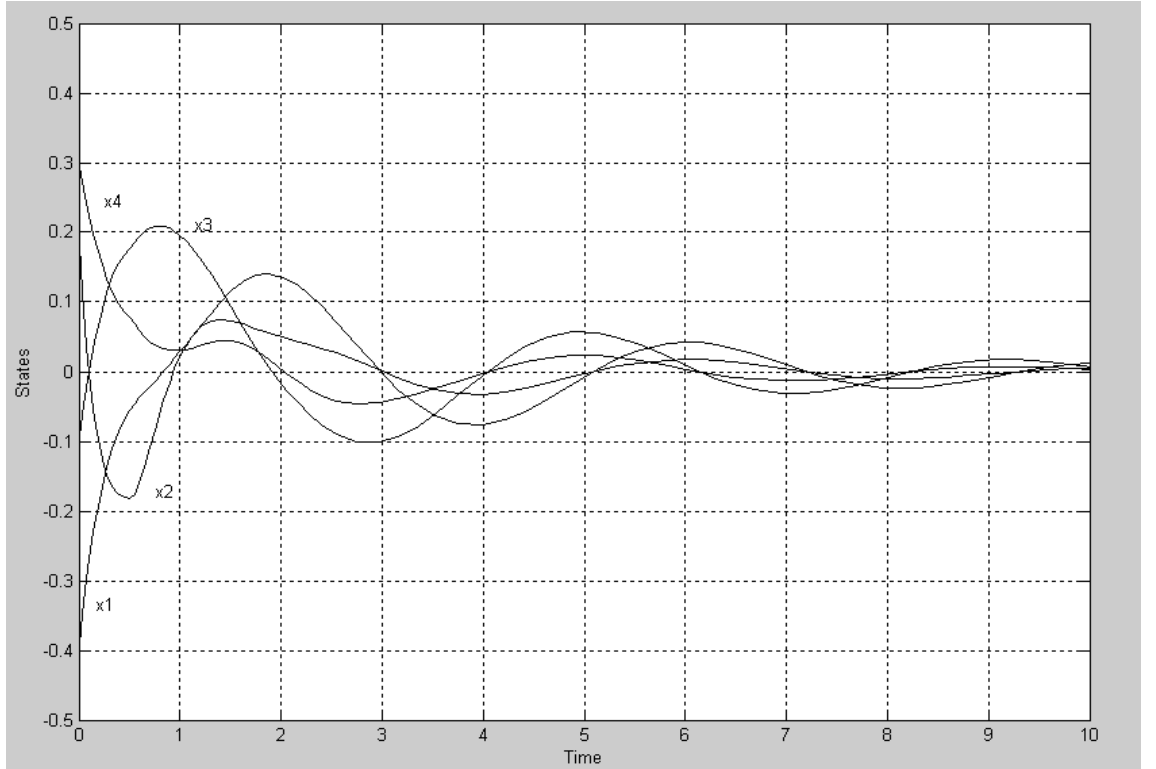
$\gamma_m = 3$, $\mu_m = 5$, $\rho_M = 5$, $L_M = 0.2$ olsun.

Buradan $\|A\|_1 = \|B\|_1 = 4$ olarak hesaplanır. $\|A\|_1 + \|B\|_1 < 15$ olduğu için Teorem 4.4.1 ile verilen koşulun bu ağ parametreleri ile sağlandığı açıkça görülmektedir.

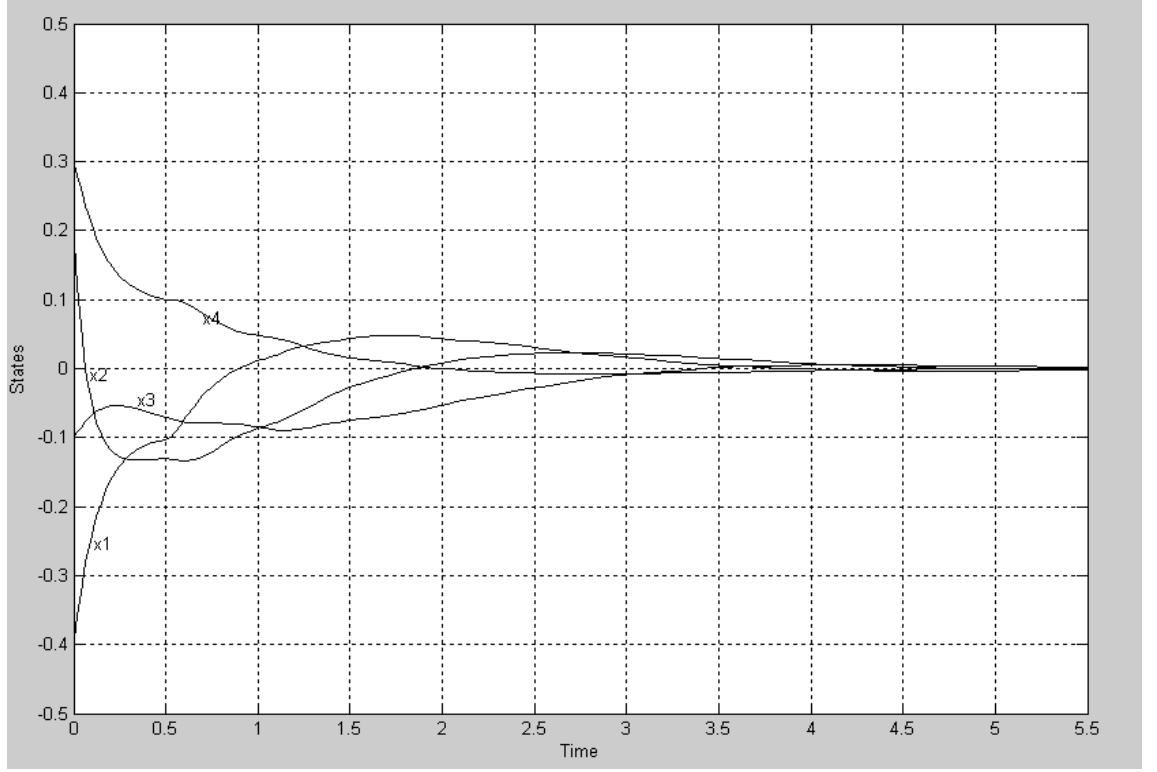
Bu sistem parametreleri ile birlikte, $D(z(t)) = 2 + \cos z(t)$, $C(z(t)) = 4z(t)$ ve $g(z(t)) = \tanh(z(t))$ alınarak gerçekleştirilmiş simülasyon sonuçları zaman gecikmesi $\tau = \ln(t + 1)$ ve farklı yapay sinir ağı modelleri için Şekil 5.9 ve Şekil 5.10'da verilmiştir.



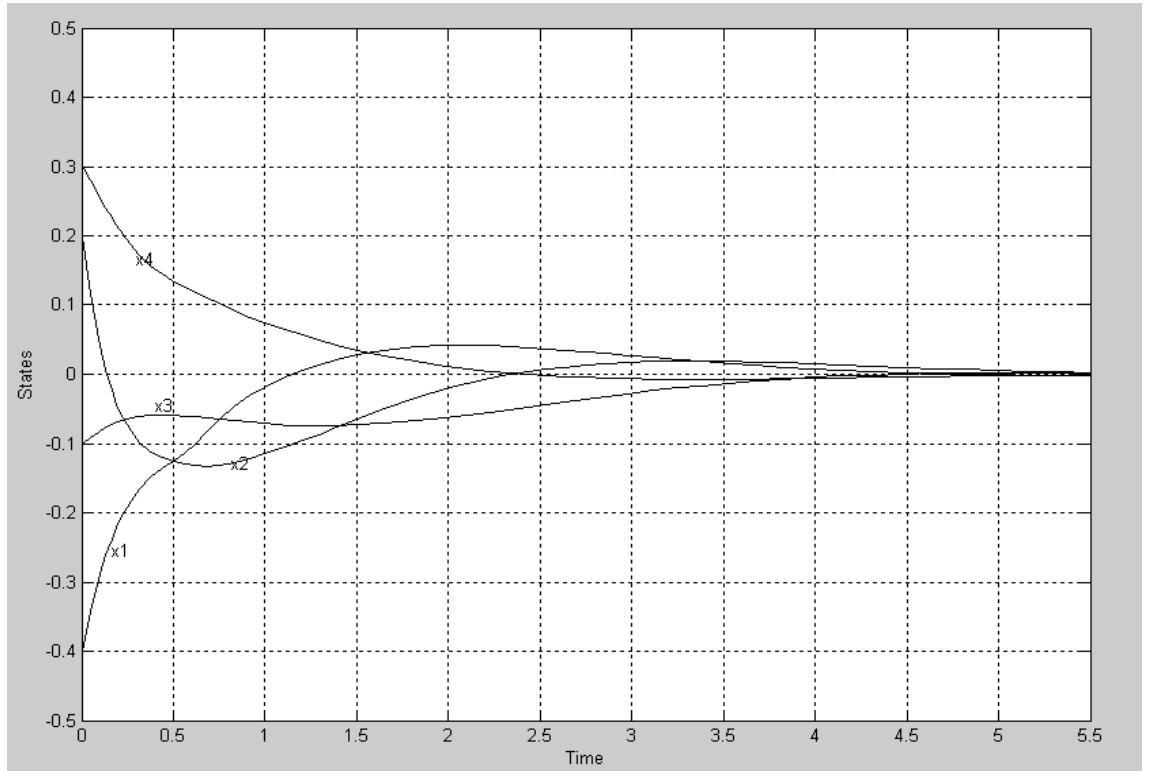
Şekil 5.7 : Örnek 5.2 için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.8 : Örnek 5.2 için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.9 : Örnek 5.3 için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.10 : Örnek 5.3 için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı

Örnek 5.4 : Sistem (4.18)'in ağ parametreleri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\gamma_m = 3$, $\mu_m = 5$, $\rho_M = 5$, $L_M = 0.2$ olsun.

Buradan $\|A\|_1 = 4$ ve $\|B\|_1 = 5$ olarak hesaplanır. $\|A\|_1 + \|B\|_1 < 15$ olduğu için Teorem 4.4.1 ile verilen koşulun bu ağ parametreleri ile sağlandığı açıkça görülmektedir.

Bu sistem parametreleri ile birlikte, $D(z(t)) = 1/2 \cos z(t) + 3/2$, $C(z(t)) = 4z(t)$ ve $\tau = 1/4 e^{-\sin t} - 1$ alınarak gerçekleştirilmiş simülasyon sonuçları farklı aktivasyon fonksiyonları ve yapay sinir ağı modelleri için Şekil 5.11 - Şekil 5.14'de verilmiştir.

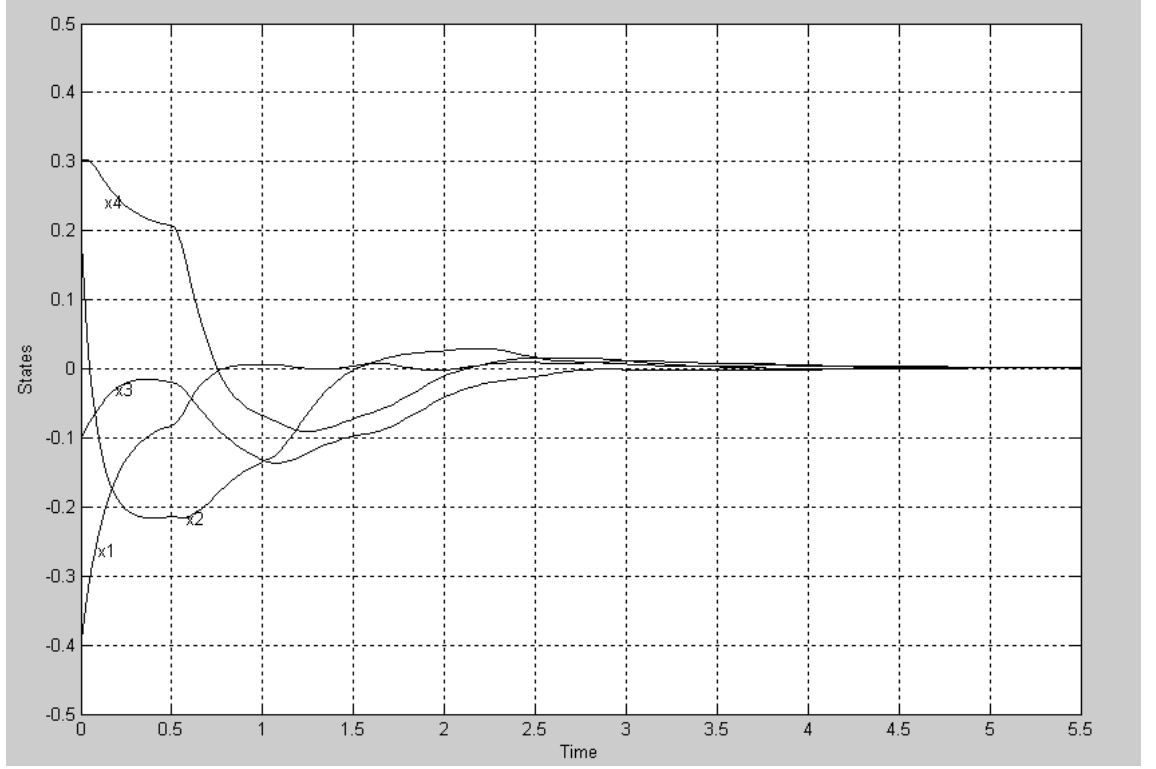
Örnek 5.5 : Sistem (4.18)'in ağ parametreleri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

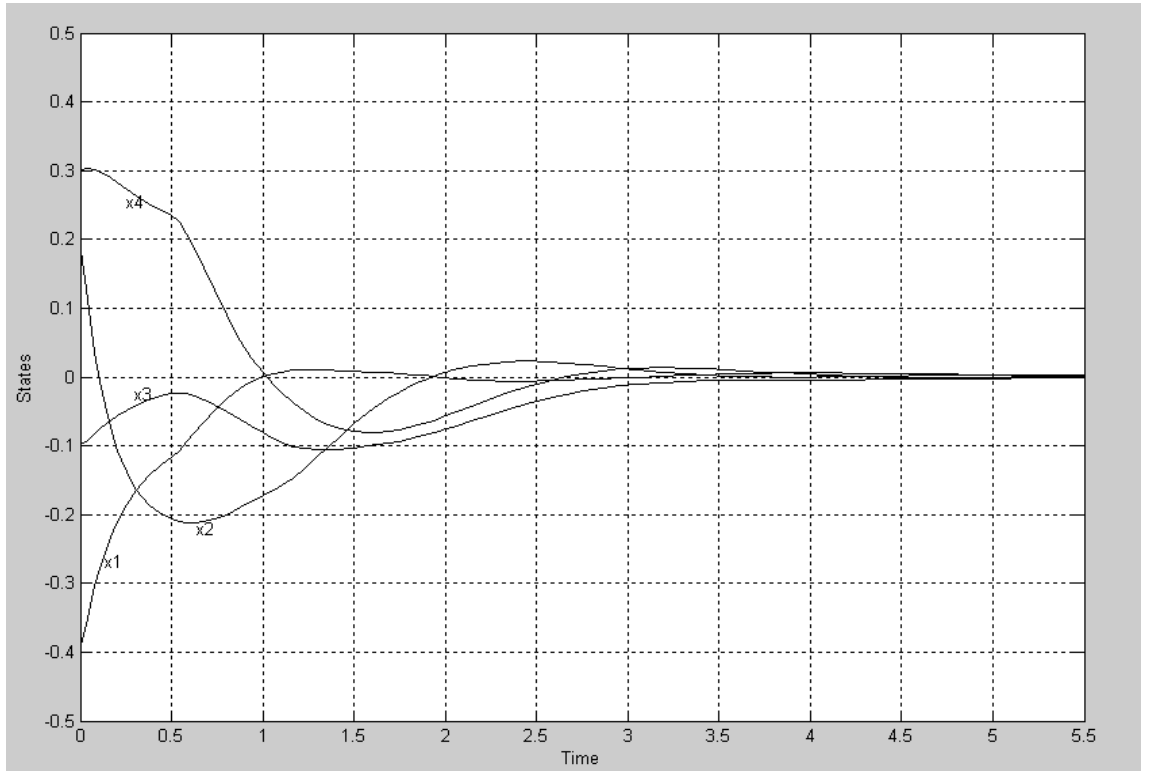
$\gamma_m = 3$, $\mu_m = 5$, $\rho_M = 5$, $L_M = 0.2$ olsun.

Buradan $\|A\|_1 = 5$ ve $\|B\|_1 = 6$ olarak hesaplanır. $\|A\|_1 + \|B\|_1 < 15$ olduğu için Teorem 4.4.1 ile verilen koşulun bu ağ parametreleri ile sağlandığı açıkça görülmektedir.

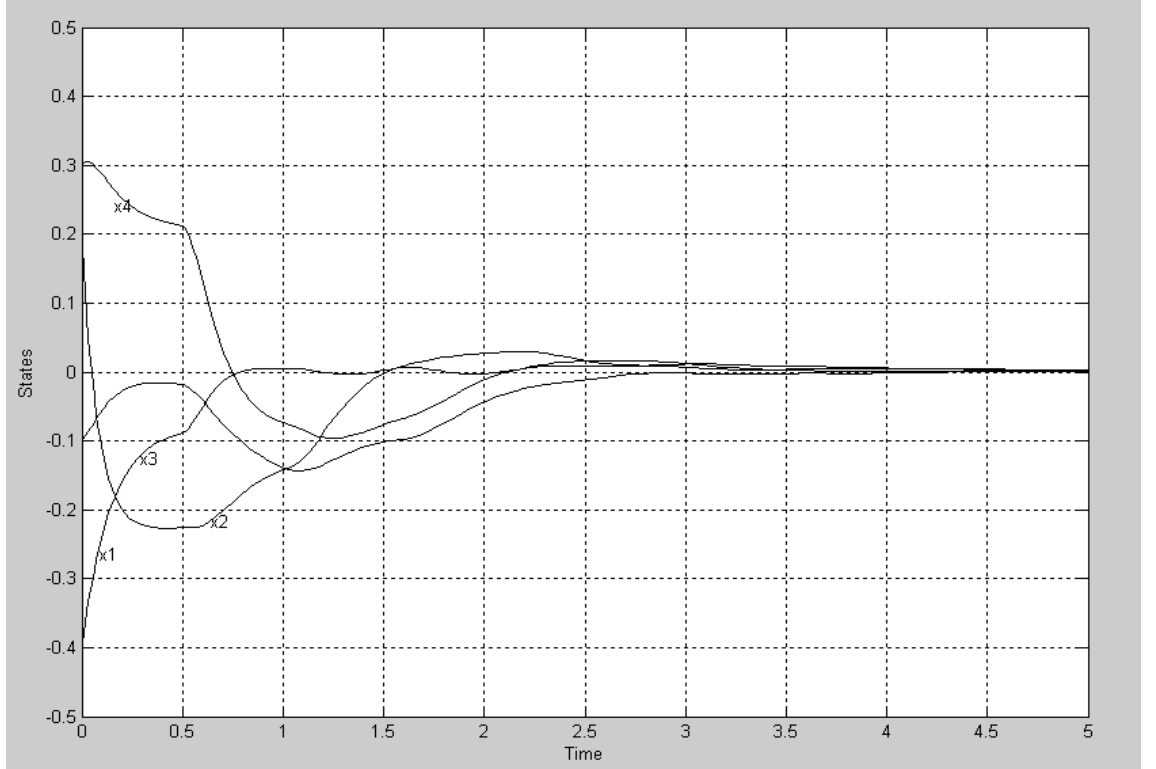
Bu sistem parametreleri ile birlikte $D(z(t)) = 2 + \sin z(t)$, $C(z(t)) = 4z(t)$, $\tau = \ln(t + 1)$ ve $g(z(t)) = 0.5[|z + 1| - |z - 1|]$ alınarak gerçekleştirilmiş simülasyon sonuçları farklı yapay sinir ağı modelleri için Şekil 5.15 ve Şekil 5.16'da verilmiştir.



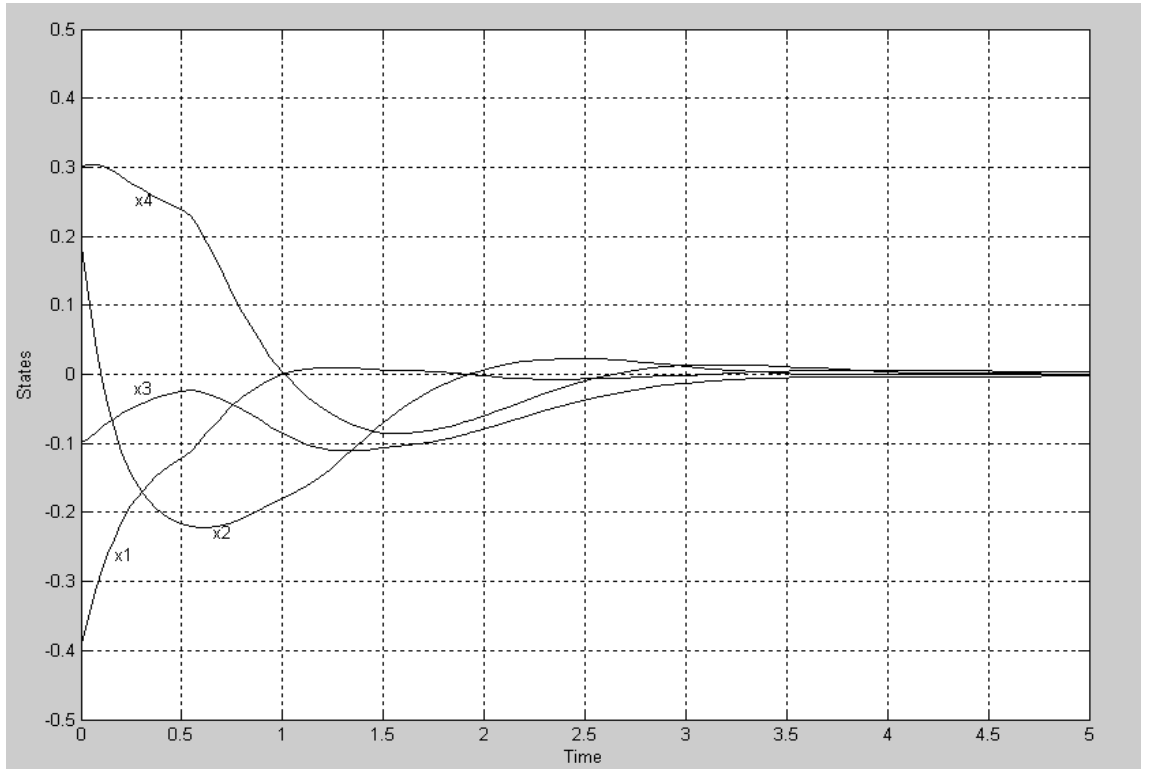
Şekil 5.11 : Örnek 5.4 için $g(z(t)) = \tanh(z(t))$ olması durumunda
Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



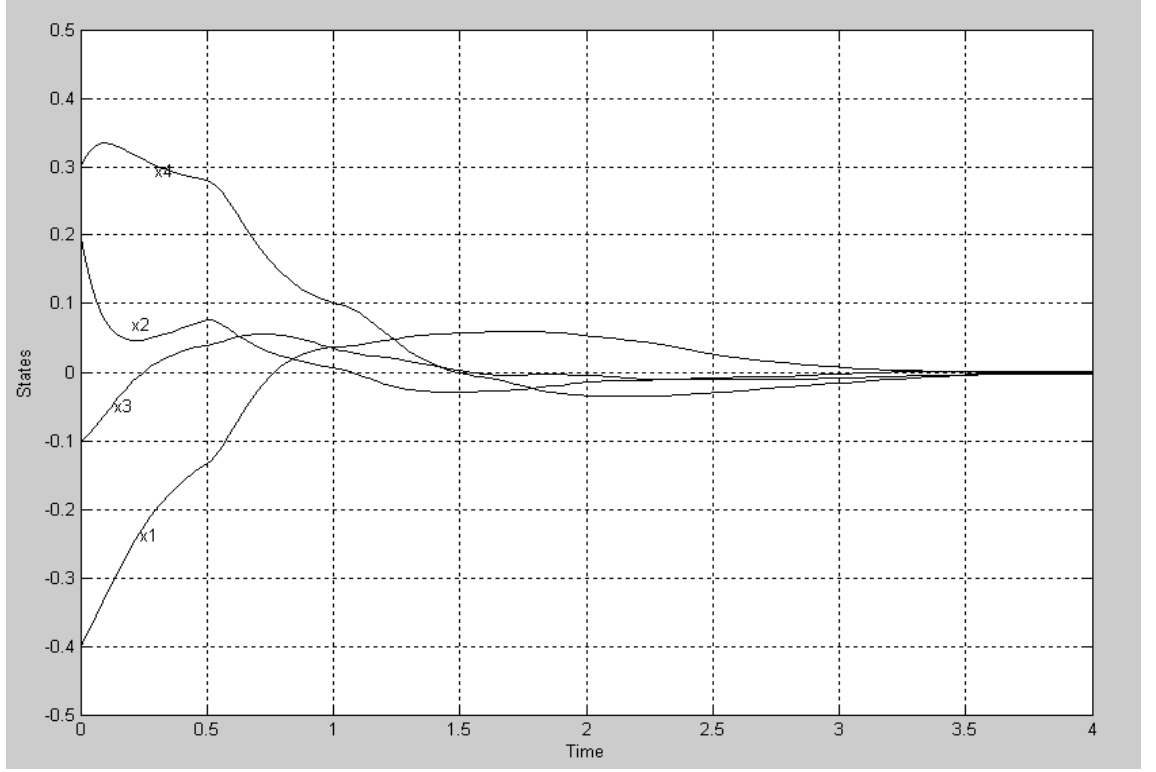
Şekil 5.12 : Örnek 5.4 için $g(z(t)) = \tanh(z(t))$ olması durumunda
Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



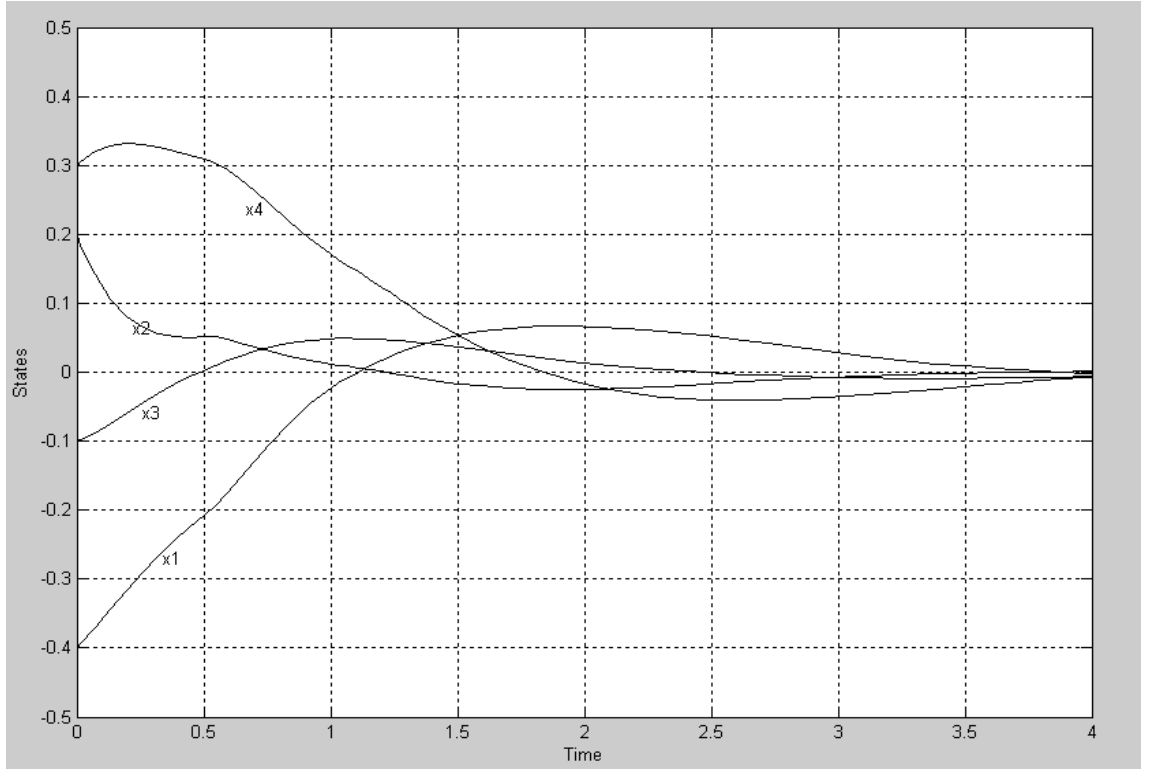
Şekil 5.13 : Örnek 5.4 için $g(z(t)) = 0.5[|z + 1| - |z - 1|]$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.14 : Örnek 5.4 için $g(z(t)) = 0.5[|z + 1| - |z - 1|]$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.15 : Örnek 5.5 için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.16 : Örnek 5.5 için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı

Teorem 4.4.3 ile verdiğimiz koşulun (4.18) sistemi için yeni ve yeterli bir kriter sağladığını göstermek için aşağıda farklı sistem parametreleri için örnekler ve bu örneklerle ait simülasyon sonuçları verilmiştir. Bu simülasyonlar aynı sistem parametreleri kullanılarak Hopfield-tipi yapay sinir ağları için de yapılmıştır.

Örnek 5.6 : Sistem (4.18)'in ağ parametreleri şu şekilde verilmiştir :

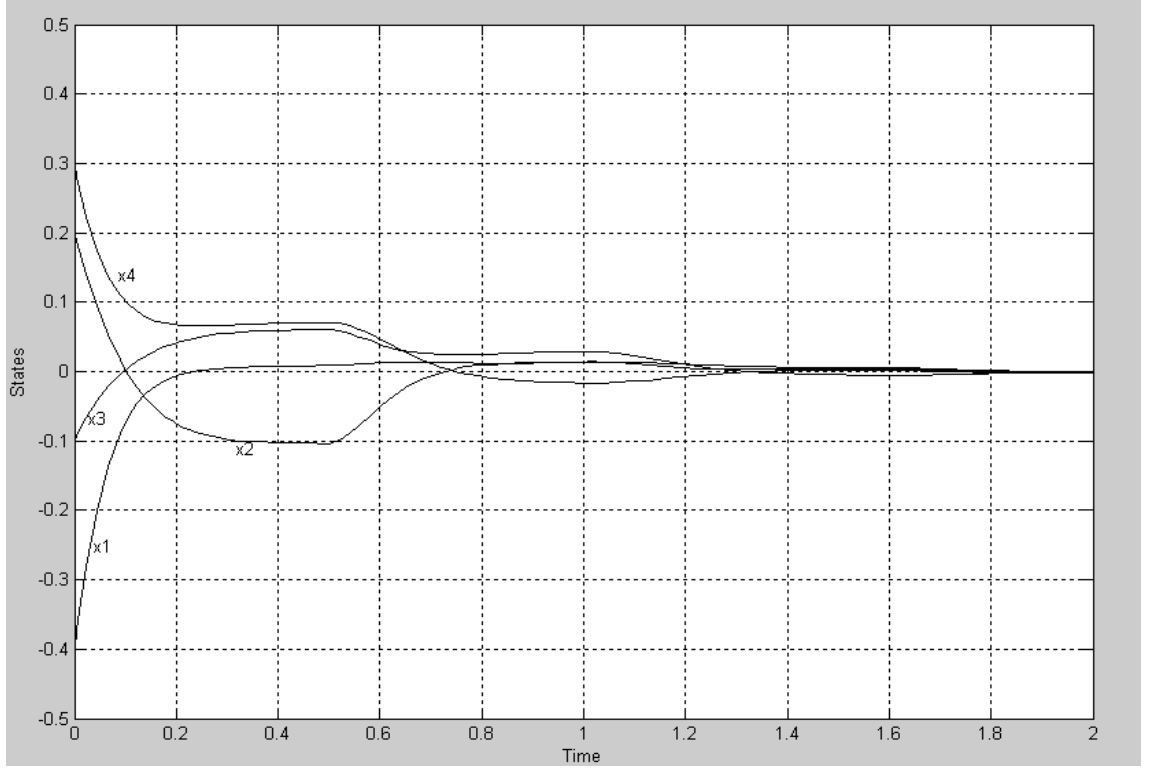
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$P = Q = G = \Gamma = I$ alınsın.

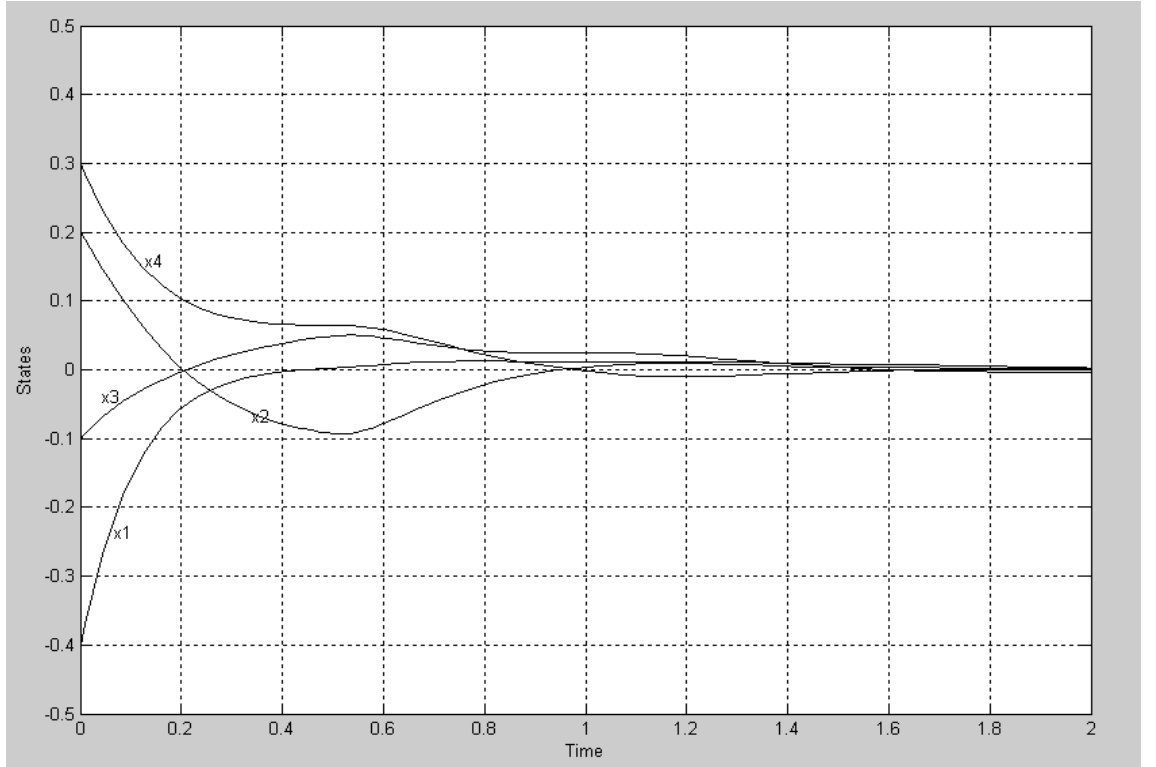
Buradan, $\Omega = 2I - (A + A^T) - I - BB^T = 3I > 0$ olduğundan Teorem 4.4.3 ile verilen koşulun sağlandığı görülür.

Bu sistem parametreleri ile birlikte, $D(z(t)) = 2 + \sin z(t)$, $C(z(t)) = z(t)$ ve $g(z(t)) = \tanh(z(t))$ alınarak gerçekleştirilmiş simülasyon sonuçları farklı zaman gecikmeleri ve yapay sinir ağı modelleri için Şekil 5.17 - Şekil 5.22'de verilmiştir.

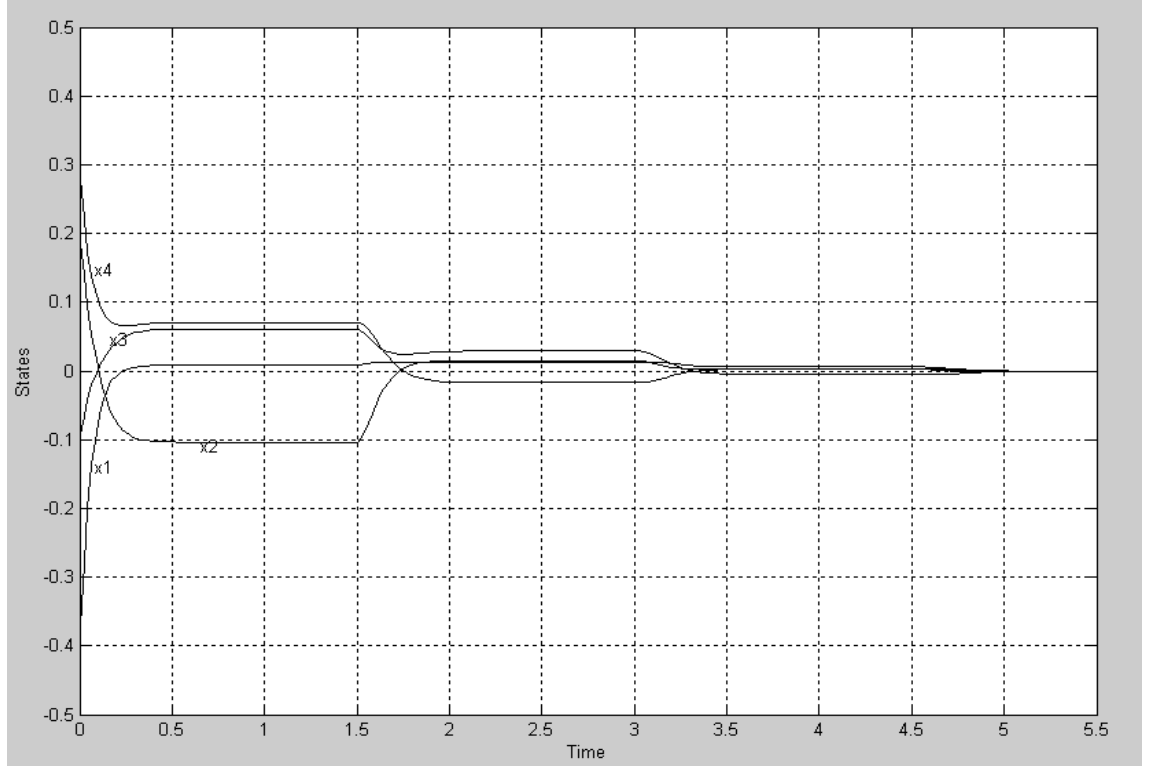
Şekil 5.23 ve Şekil 5.24'de ise, aynı sistem parametreleri için $\tau = 0.5$ ve $g(z(t)) = 0.5[|z + 1| - |z - 1|]$ olması durumunda farklı yapay sinir ağı modelleri için yapılan simülasyonlar verilmiştir.



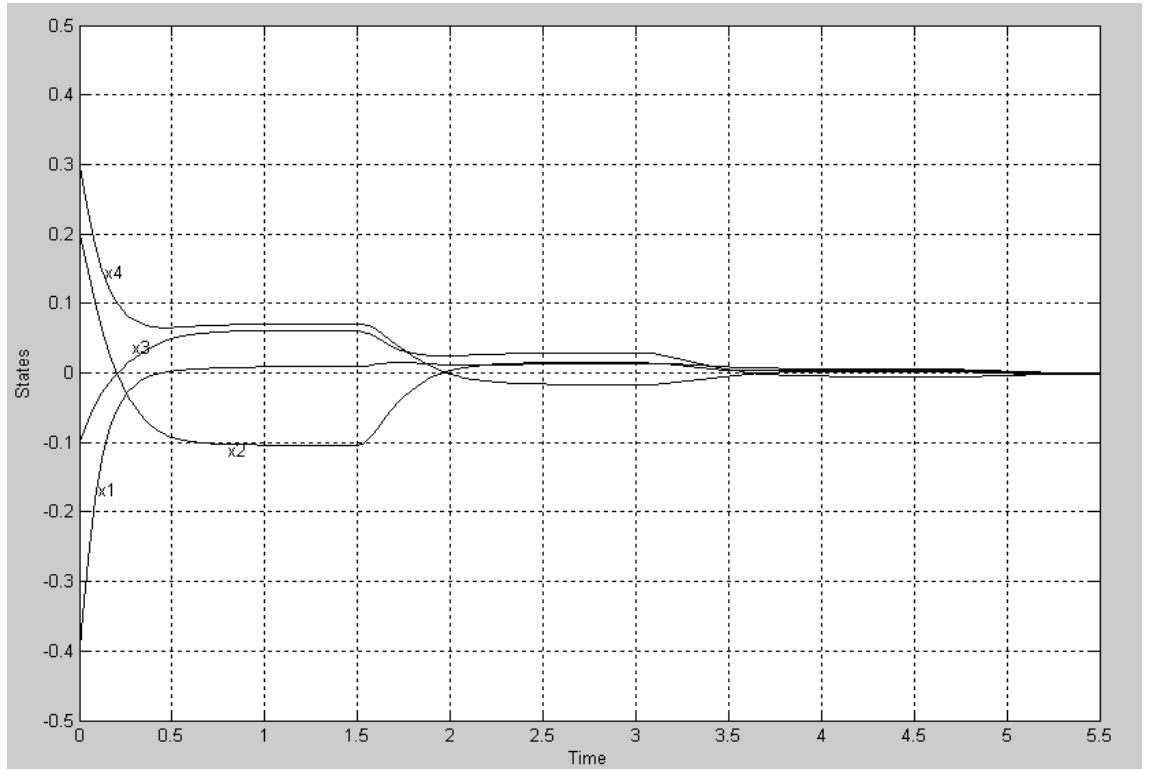
Şekil 5.17 : Örnek 5.6 için $\tau = 0.5$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



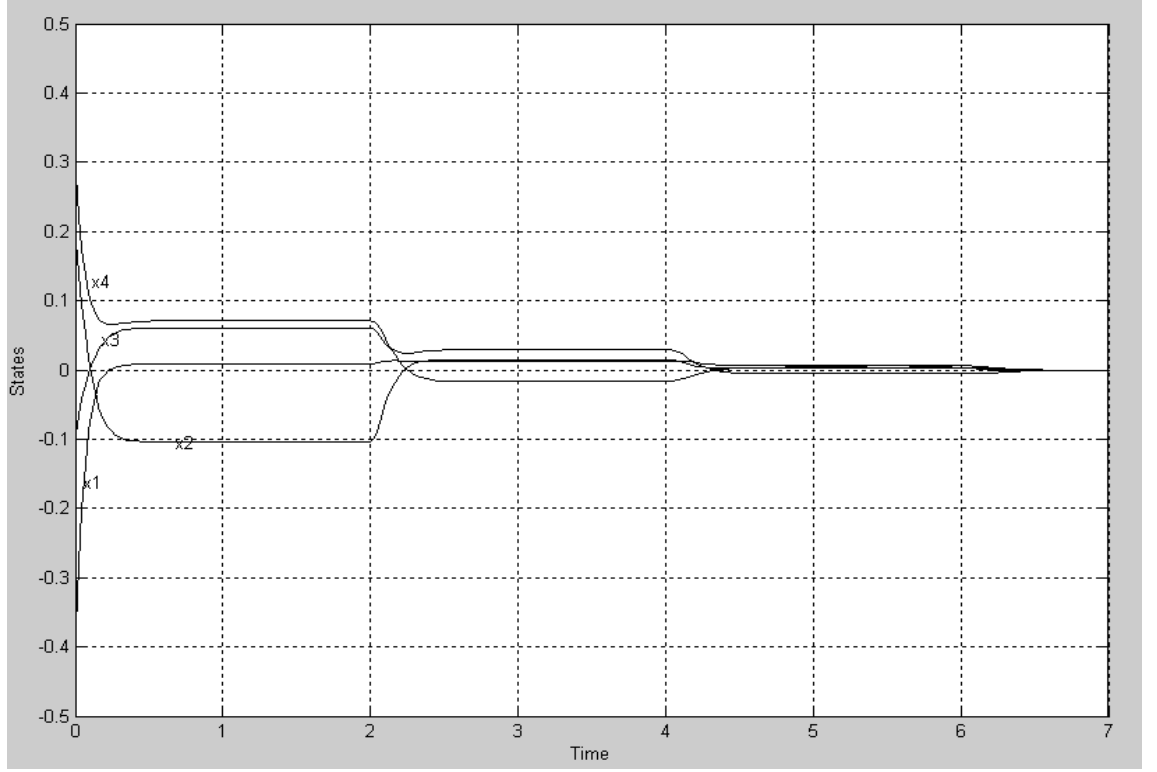
Şekil 5.18 : Örnek 5.6 için $\tau = 0.5$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



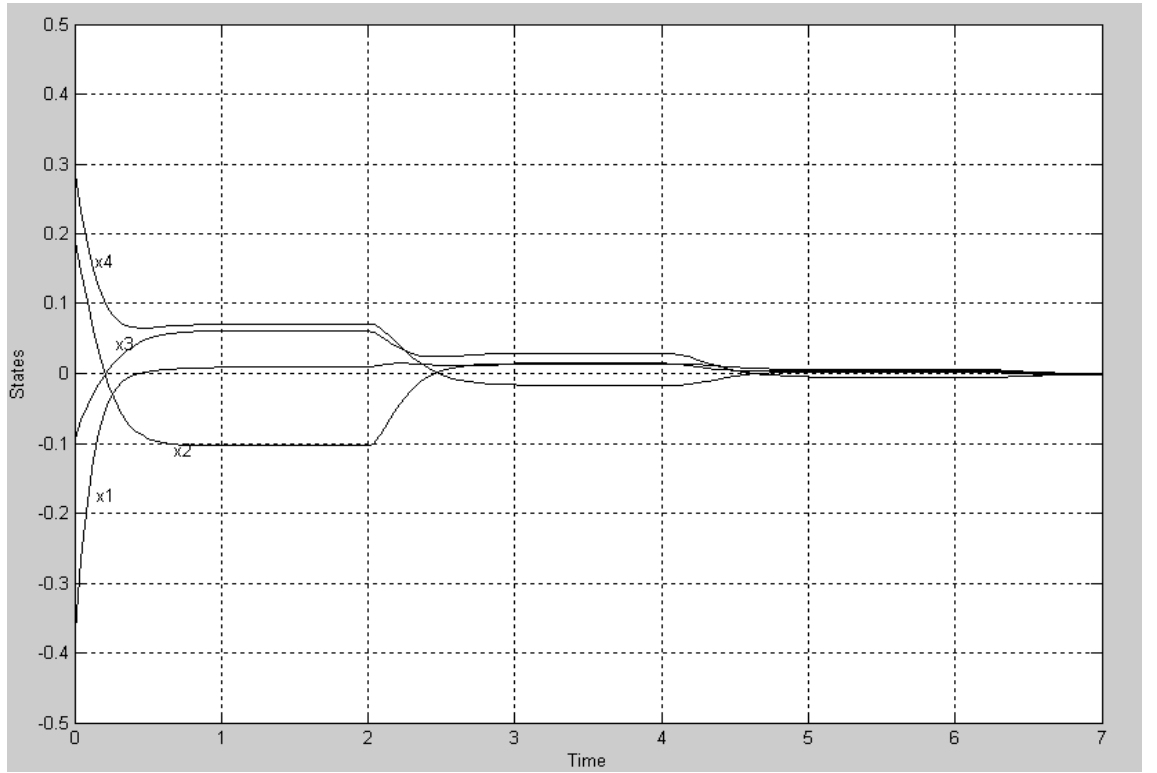
Şekil 5.19 : Örnek 5.6 için $\tau = 1.5$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



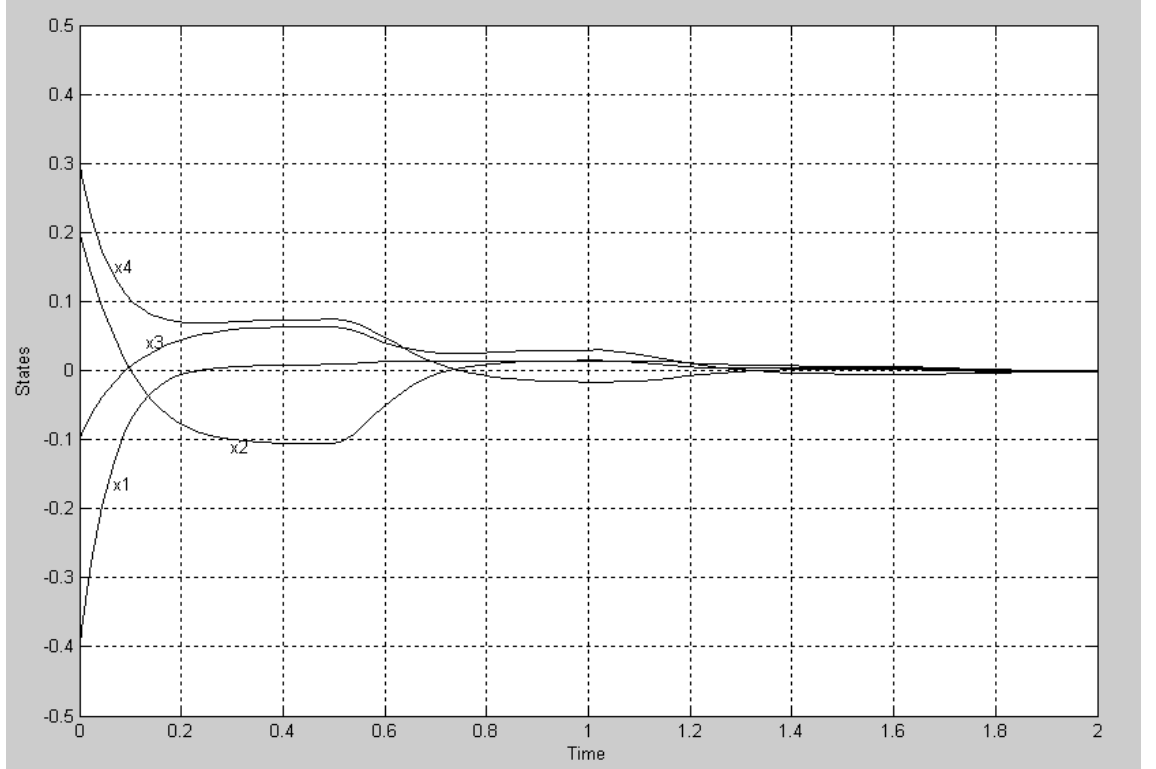
Şekil 5.20 : Örnek 5.6 için $\tau = 1.5$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



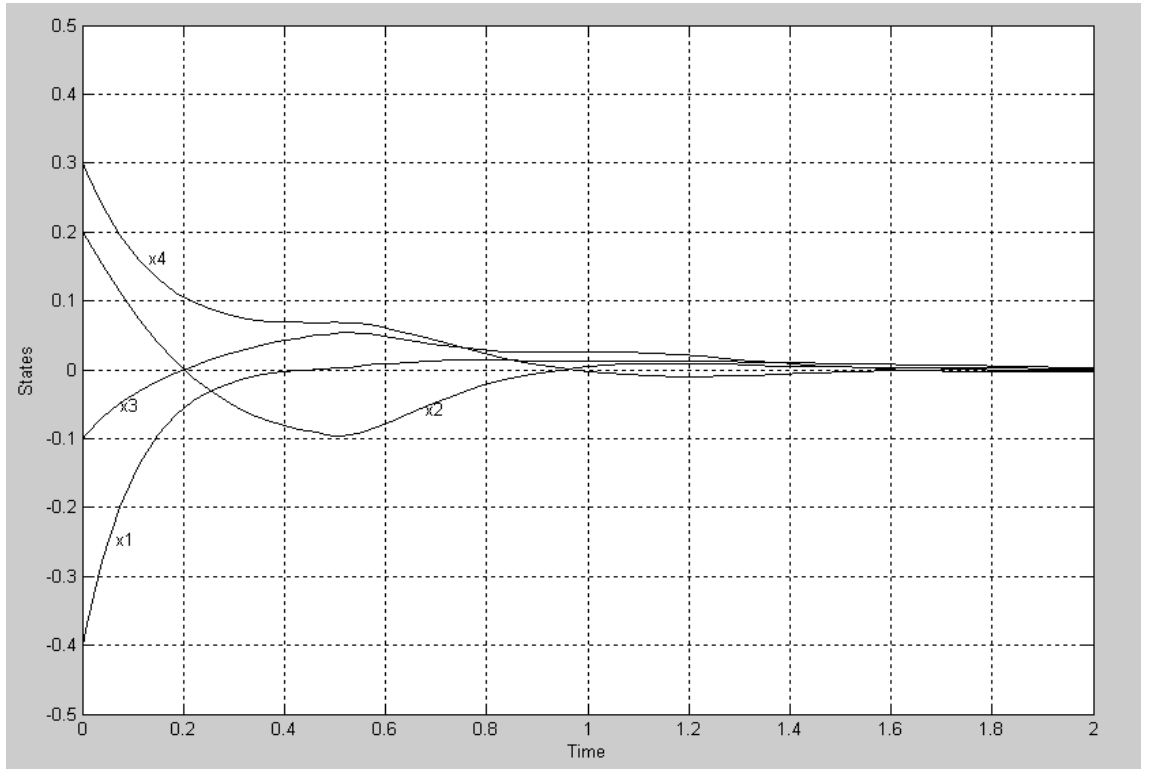
Şekil 5.21 : Örnek 5.6 için $\tau = 2.0$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.22 : Örnek 5.6 için $\tau = 2.0$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.23 : Örnek 5.6 için $\tau = 0.5$ ve $g(z(t)) = 0.5[|z + 1| - |z - 1|]$ olması durumunda Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.24 : Örnek 5.6 için $\tau = 0.5$ ve $g(z(t)) = 0.5[|z + 1| - |z - 1|]$ olması durumunda Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı

Literatürde elde edilmiş daha ileri kararlılık koşulları aşağıda verilmiştir :

Teorem 5.3 : [23]

$A_1 - A_3$ ve A_5 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını ve $P = \text{diag}(p_i > 0)$, $Q = \text{diag}(q_i > 0)$ olduğunu kabul edelim.

Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Upsilon = 2P\Gamma - PAQA^TP - GQ^{-1}G - GQG - PBQ^{-1}B^TP > 0$$

(4.9) ile verilen yapay sinir ağının denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Yukarıda verilen koşulda, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ve $G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n)$ oldukları kabul edilmiştir.

Sonuç 5.1 : [23]

$A_1 - A_3$ ve A_5 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını ve $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ve $G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n)$ olduklarını kabul edelim.

Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\Upsilon^* = 2\Gamma - AA^T - 2G^2 - BB^T > 0$$

bu durumda, (4.9) ile verilen yapay sinir ağının denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Teorem 5.4 : [24]

A_1 , A_2 ve A_5 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını kabul edelim.

Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{\gamma_i m_i} \left(m_i \sum_{j=1}^n (G_j^{2r_1} |a_{ij}| + G_j^{2r_2} |b_{ij}|) + \sum_{j=1}^n m_j (G_i^{2(1-r_1)} |a_{ji}| + G_i^{2(1-r_2)} |b_{ji}|) \right) \right\} < 2$$

bu durumda, (4.8) yapay sinir ağıının denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Yukarıda verilen koşulda, m_i , $i = 1, 2, \dots, n$, $r_1 \in [0, 1]$, $r_2 \in [0, 1]$ pozitif sabitlerdir.

Teorem 5.5 : [25]

A_1 , A_2 ve A_5 varsayımlarında verilen koşulların sağlandığını kabul edelim. Eğer aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\gamma_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [|a_{ij}|^{2-q_{ij}} G_j^{2-p_{ij}} + |a_{ji}|^{q_{ji}} G_i^{p_{ji}} + |b_{ij}|^{2-s_{ij}} G_j^{2-t_{ij}} + |b_{ji}|^{s_{ji}} G_i^{t_{ji}}] > 0$$

bu durumda, (4.8) sisteminin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Yukarıda verilen koşulda, $p_{ij}, q_{ij}, s_{ij}, t_{ij} \in R$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ daha sonradan belirlenecek sabitlerdir.

İlk olarak, Teorem 5.3’de verilen sonuçlar ile Teorem 4.4.5 ve Sonuç 4.4.2’de elde ettiğimiz sonuçları karşılaştıracğıız. Uygun pozitif P ve Q diyagonal matrislerinin bulunması her zaman kolay olmadığı için bu karşılaştırmaları en genel durumlar için yapmak kolay değildir. Bu nedenle, karşılaştırmalarımızı bazı özel durumlar için yapacağız. A ve B ’nin pozitif matrisler olduğu özel durumu gözönüne alalım, yani, $A = (a_{ij} \geq 0)$ ve $B = (b_{ij} \geq 0)$. Bu durumda, Teorem 4.4.5 ve 5.3’de elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekildedir :

$$\Theta = 2P\Gamma - (PAG + GA^T P) - GQG - PBQ^{-1}B^T P$$

$$\Upsilon = 2P\Gamma - PAQA^T P - GQ^{-1}G - GQG - PBQ^{-1}B^T P$$

Buradan da şunu yazabiliriz :

$$\begin{aligned} \Theta - \Upsilon &= -(PAG + GA^T P) + PAQA^T P + GQ^{-1}G \\ &= (Q^{-1/2}G - Q^{1/2}A^T P)^T (Q^{-1/2}G - Q^{1/2}A^T P) \geq 0 \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafı positif ya da sıfır olabileceği için, $\Upsilon \geq 0$ olması doğrudan

$\Theta > 0$ demektir. Bu nedenle, pozitif A ve B bağlantı matrisleri için, Teorem 5.3, Teorem 4.4.5’de elde ettiğimiz sonuçların özel bir durumu olarak düşünülebilir. Aynı ağ parametreleri için koşullar sadece ağ parametrelerine bağlı olarak ifade edildiklerinde, Sonuç 4.4.2 ve 5.1’in koşulları sırasıyla aşağıdaki şekildedir :

$$\Theta^* = 2\Gamma - (AG + GA^T) - G^2 - BB^T$$

$$\Upsilon^* = 2\Gamma - AA^T - 2G^2 - BB^T$$

$G = \Gamma = I$ olması durumunda, tüm pozitif A ve B matrisleri için, $\Upsilon^* = -AA^T - BB^T \leq 0$ olacağı açıkça görülmektedir. Bu nedenle, Sonuç 4.4.3’de verilen koşul sağlanmamaktadır. $G = \Gamma = I$ için, $\Theta^* = I - (A + A^T) - BB^T$ elde ederiz. A ve B ’nin yeterince küçük değerler olması durumunda, $\Theta^* > 0$ olması garanti edilmiş olur. Sonuç 4.4.2 ve Sonuç 4.4.3’de elde edilen sonuçlar arasında, A ve B matrisleri pozitif kabul edilerek de bir karşılaştırma yapılabilir. $G = \Gamma = I$ için, $\Upsilon^* = -AA^T - BB^T$ ’dir. AA^T ve BB^T her zaman pozitif yarı tanımlı matrisler oldukları için, buradan $\Upsilon^* \leq 0$ olduğu sonucuna varabiliriz. Buradan da, $G = \Gamma = I$ için, Sonuç 5.1’deki koşulu karşılayan herhangi gerçel A ve B matrislerinin bulunması mümkün değildir. Diğer taraftan, $G = \Gamma = I$ için, $\Theta^* = I - (|A| + |A^T|) - |BB^T|$ olduğu görülmektedir. Buradan da, $\Theta^* > 0$ olacak şekilde, A ve B matrislerinin bulunması her zaman mümkündür. Örneğin, $\lambda_{\max}(|A| + |A^T| - |BB^T|) < 1$ iken $\Theta^* > 0$ ’dır. Bu da, Sonuç 4.4.2’deki koşulun sağlandığı anlamına gelmektedir. Böylece bizim elde ettiğimiz kararlılık koşulları Cohen-Grossberg yapay sinir ağları için yeni yeterli kararlılık kriterleri teşkil etmektedir.

Elde ettiğimiz sonuçları, Teorem 5.4 ve Teorem 5.5’de verilen sonuçlar ile karşılaştırabilmek için, aşağıda bir örnek verilmiştir :

Örnek 5.7 : Aşağıda sistem parametreleri verilen örneği ele alalım :

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Sonuç 4.4.1’de yer alan Ω^* , şu şekilde hesaplanmaktadır :

$$\Omega^* = 2\Gamma - G^2 - AA^T - K = \begin{bmatrix} 2\gamma - 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma - 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma - 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma - 13 \end{bmatrix}$$

$\gamma > \frac{13}{2}$ için $\Omega^* > 0$ ’dır. Bu da, Sonuç 4.4.1’deki koşulun sağlandığı anlamına gelmektedir.

Aynı ağ parametreleri için Teorem 5.4’de verilen koşulları kontrol edelim. Teorem 5.4’de verilen koşulların sağlanabilmesi için aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan pozitif m_1, m_2, m_3 ve m_4 sabitleri olmalıdır.

$$(2\gamma - 10)m_1 - 2m_2 - 2m_3 - 2m_4 > 0$$

$$-2m_1 + (2\gamma - 10)m_2 - 2m_3 - 2m_4 > 0$$

$$-2m_1 - 2m_2 + (2\gamma - 10)m_3 - 2m_4 > 0$$

$$-2m_1 - 2m_2 - 2m_3 + (2\gamma - 10)m_4 > 0$$

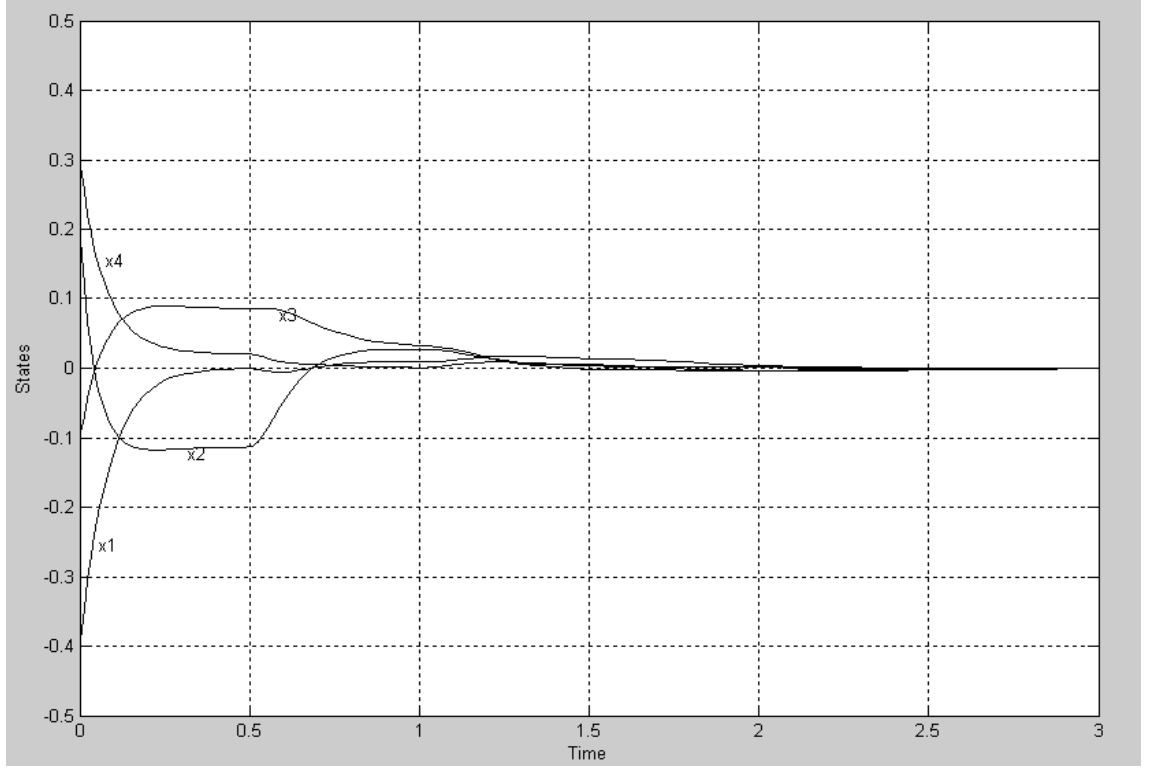
$$\Phi = \begin{bmatrix} 2\gamma - 10 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2\gamma - 10 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2\gamma - 10 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2\gamma - 10 \end{bmatrix}, m = (m_1, m_2, m_3, m_4)^T > 0$$

olması durumunda, $\Phi m > 0$ için Teorem 5.4’deki koşullar sağlanır. Diğer taraftan, matris teorisinden bilindiği üzere, Φ ’nin tekil olmayan bir M-matrisi olması durumunda, $\Phi m > 0$ ’ı sağlayan $m > 0$ pozitif vektörü vardır [65]. Φ ’nin tekil olmayan M-matrisi olması durumunda, Φ ’nin en azından bir satırı ya da sütunu monoton diyagonal baskın olmalıdır [74]. Φ , bu koşulu $\gamma > 8$ olması durumunda sağlar. Teorem 5.5’in sonucu, yukarıdaki parametrelerle verilen ağa uygulandığında, kararlılık koşulu yine $\gamma > 8$ olması durumunda elde edilir. Bu nedenle, $\frac{13}{2} < \gamma \leq 8$ için Teorem 5.4 ve 5.5’deki koşullar sağlanmamaktadır. Ancak Teorem

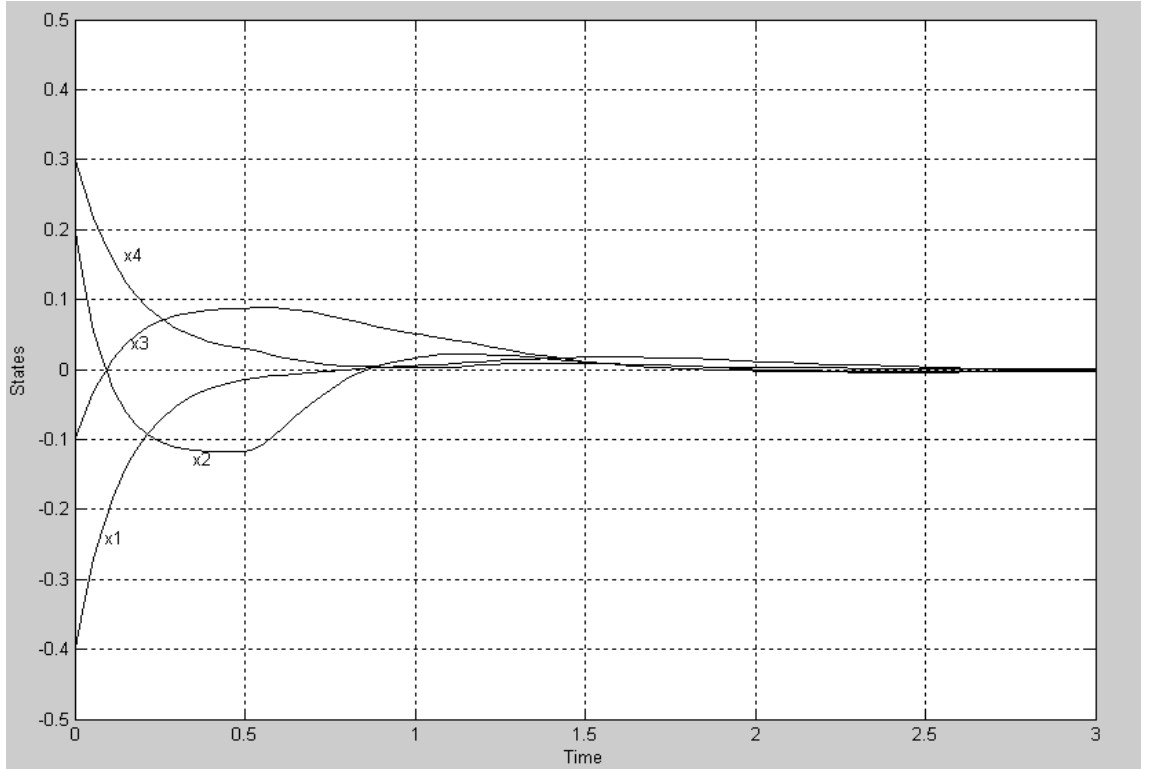
4.4.4’de verilen koşul yukarıda verilen ağ parametrelerine uygulanabilir.

Örnek 5.7 için Şekil 5.25 - Şekil 5.34’de farklı sistem parametreleri kullanılarak ve $D(z(t)) = 2 + \sin(z(t))$, $C(z(t)) = \gamma z(t)$ alınarak farklı yapay sinir ağı modelleri için yapılan simülasyon sonuçları verilmiştir.

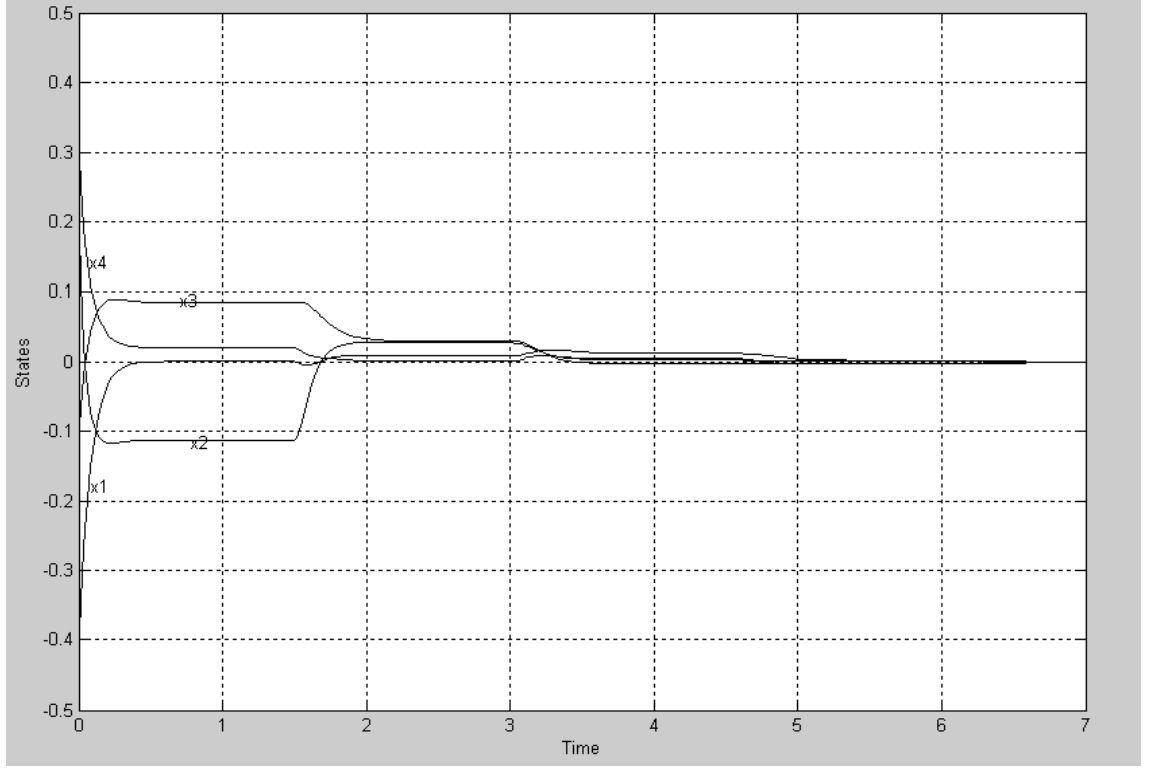
Aynı örnek için Şekil 5.35 ve Şekil 5.36’da $\tau = \tau_j$ için ve Şekil 5.37 ve Şekil 5.38’de ise $\tau = \tau_{ij}$ için farklı yapay sinir ağlarına uygulanan simülasyonlar verilmiştir. Şekil 5.35 ve Şekil 5.36’da gecikmeler, $\tau_1 = 0.05$, $\tau_2 = 0.3$, $\tau_3 = 0.2$, $\tau_4 = 0.7$ olarak alınmıştır. Şekil 5.37 ve Şekil 5.38’de ise, gecikmeler $\tau_1 = 0.05$, $\tau_2 = 0.3$, $\tau_3 = 0.2$, $\tau_4 = 0.7$, $\tau_5 = 0.35$, $\tau_6 = 0.25$, $\tau_7 = 0.85$, $\tau_8 = 0.4$, $\tau_9 = 0.55$, $\tau_{10} = 0.5$, $\tau_{11} = 0.6$, $\tau_{12} = 0.9$, $\tau_{13} = 0.15$, $\tau_{14} = 0.45$, $\tau_{15} = 0.75$, $\tau_{16} = 0.8$ olarak alınmıştır.



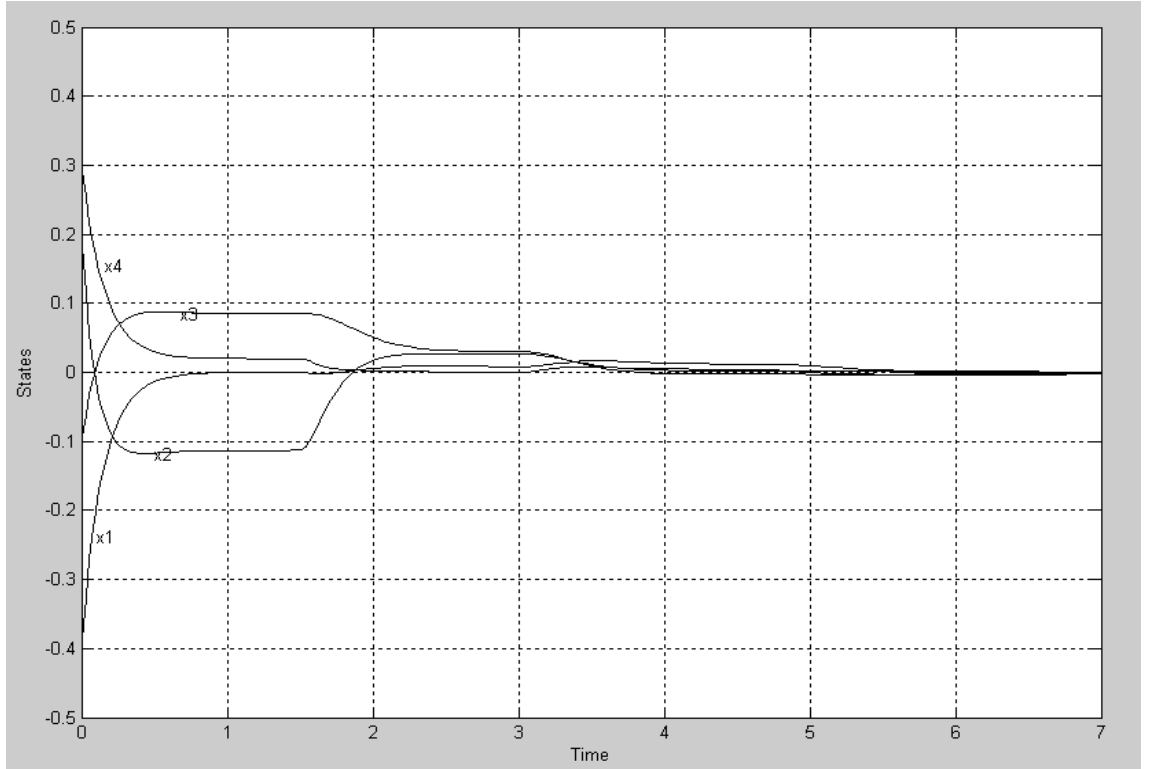
Şekil 5.25 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



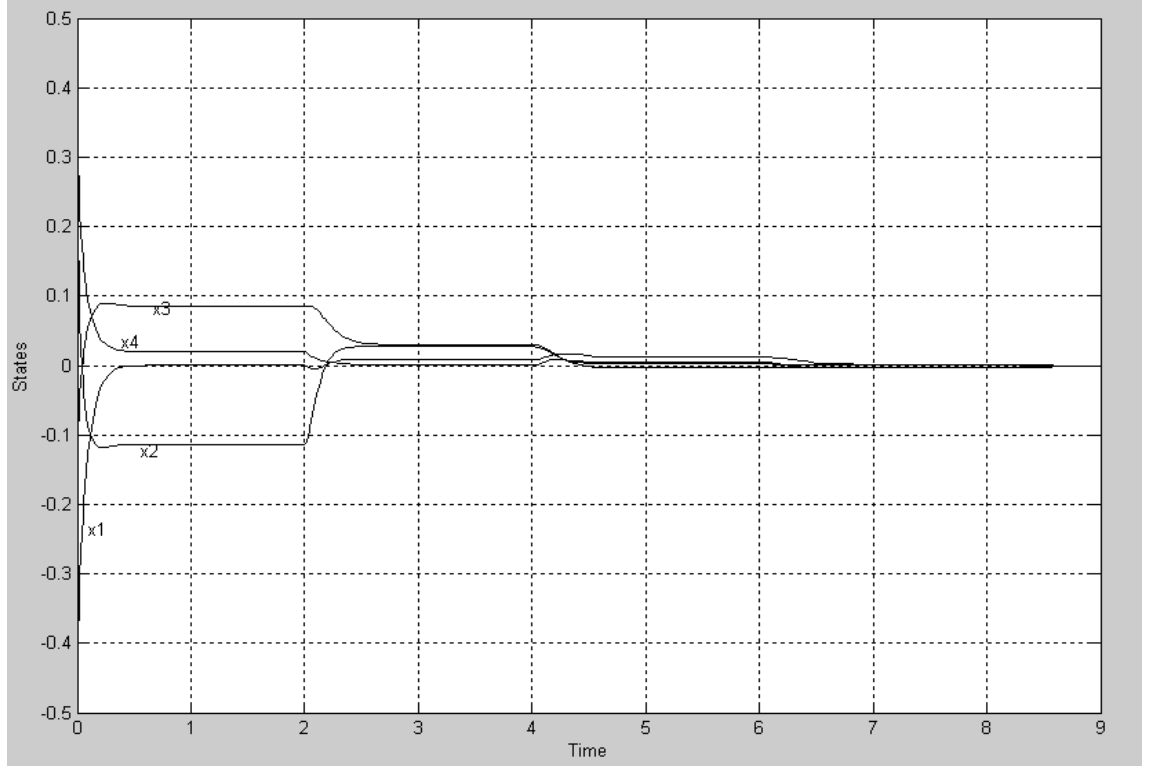
Şekil 5.26 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



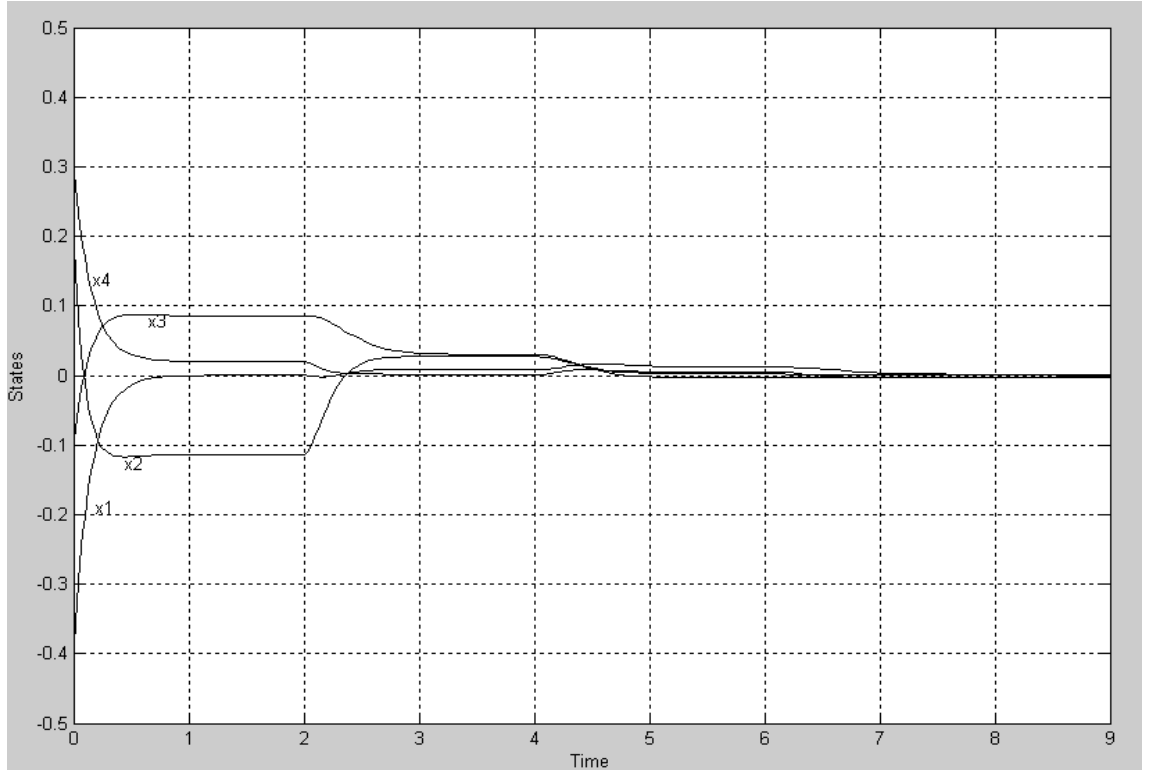
Şekil 5.27 : $\tau = 1.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



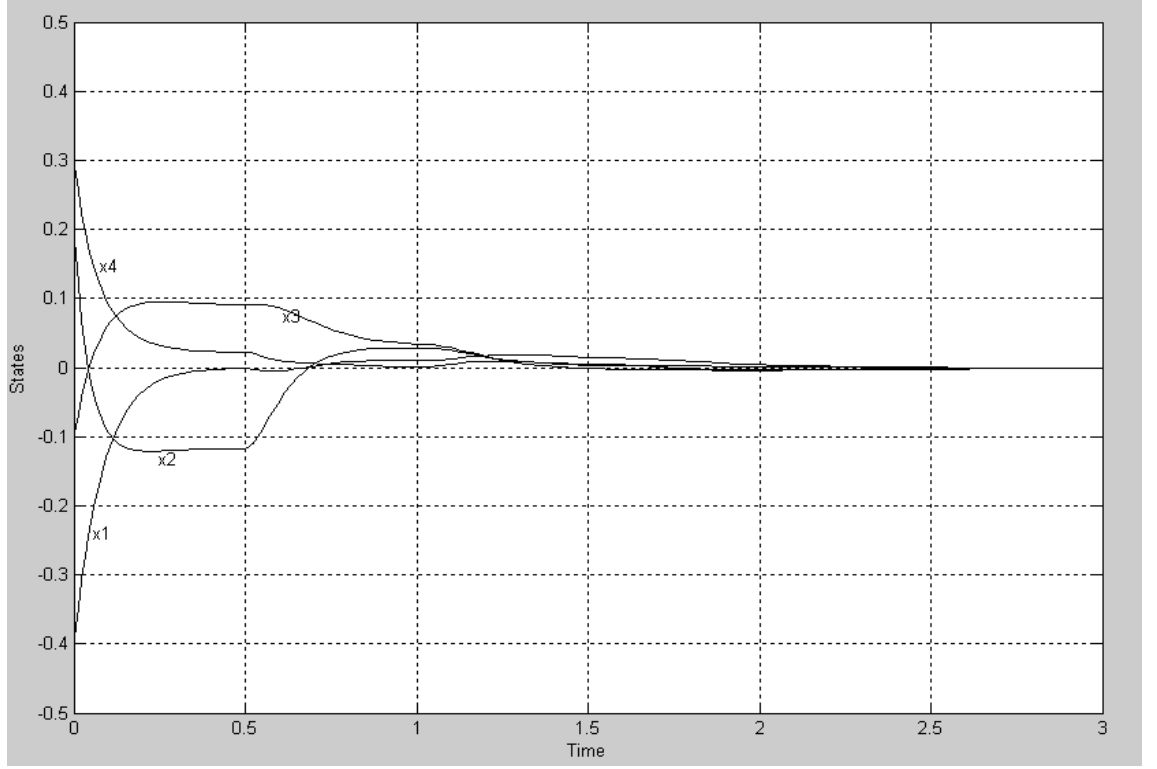
Şekil 5.28 : $\tau = 1.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



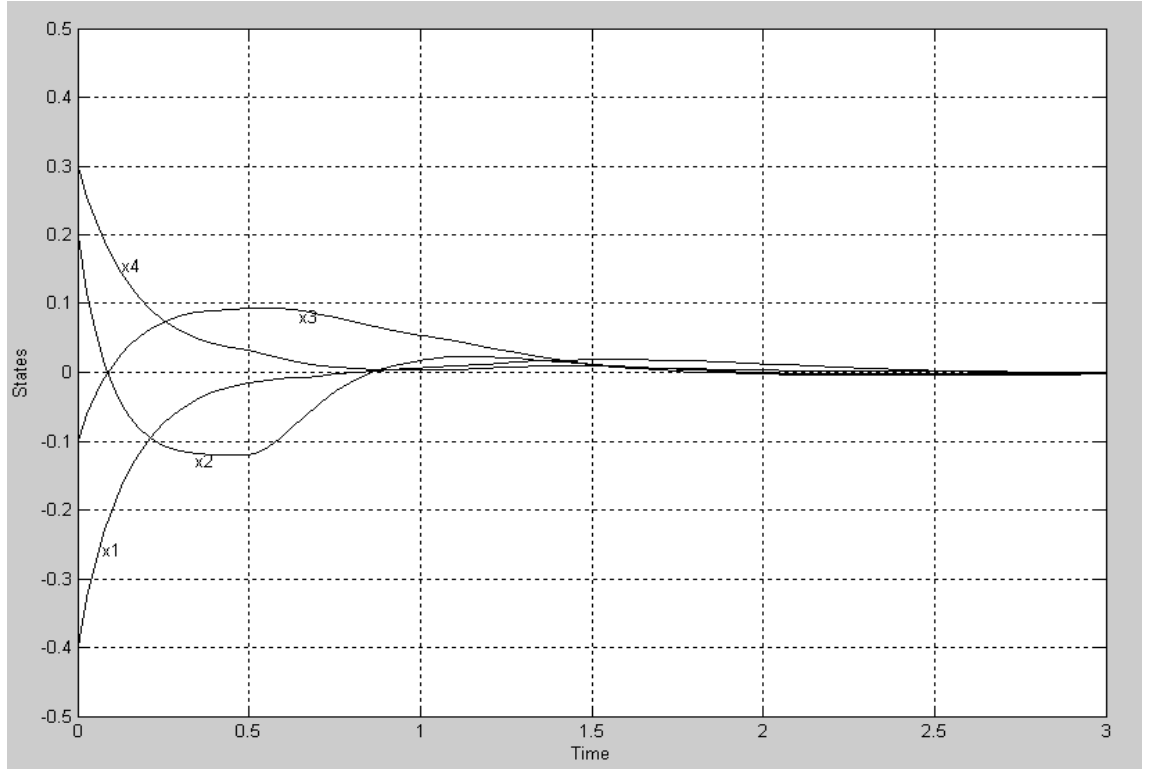
Şekil 5.29 : $\tau = 2.0$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



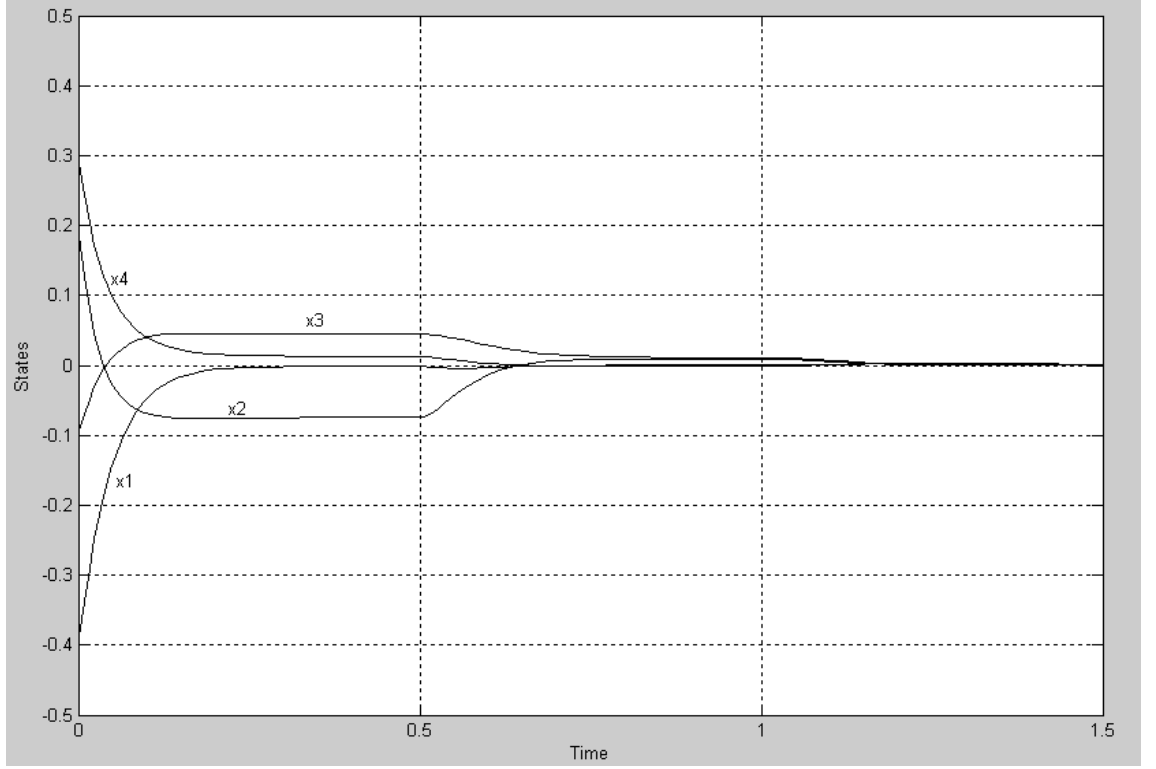
Şekil 5.30 : $\tau = 2.0$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



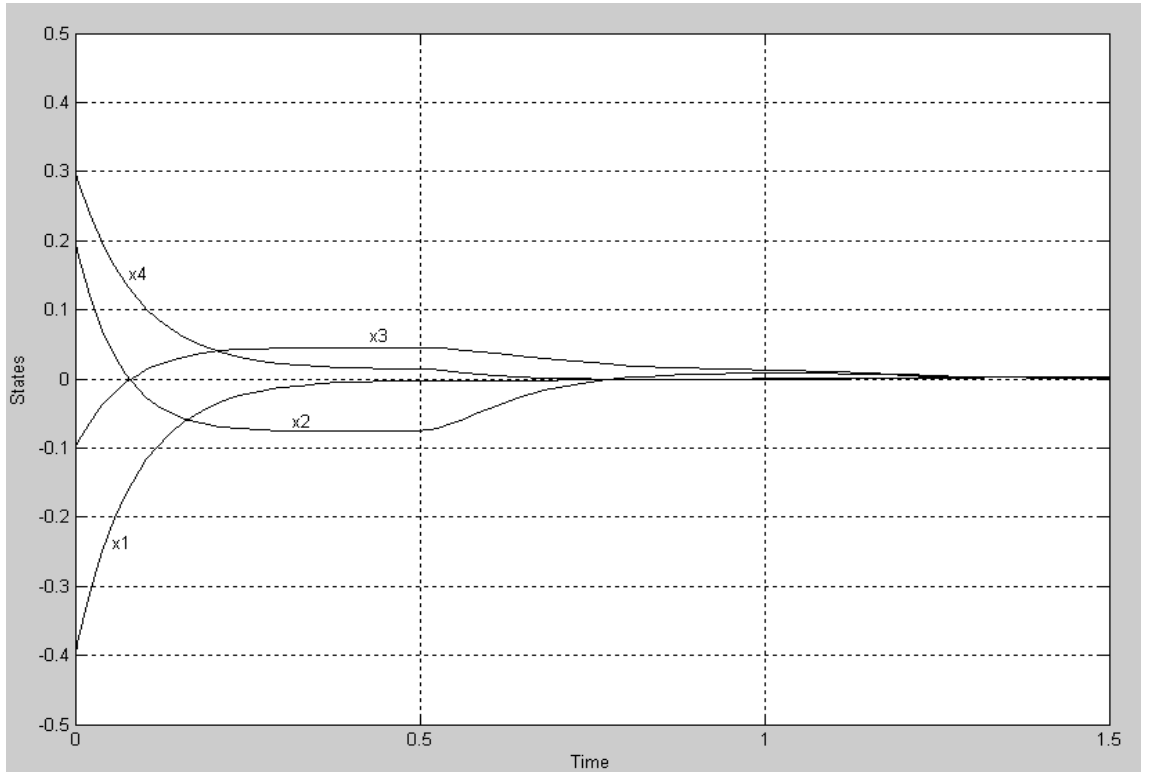
Şekil 5.31 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = 0.5[|z + 1| - |z - 1|]$ için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



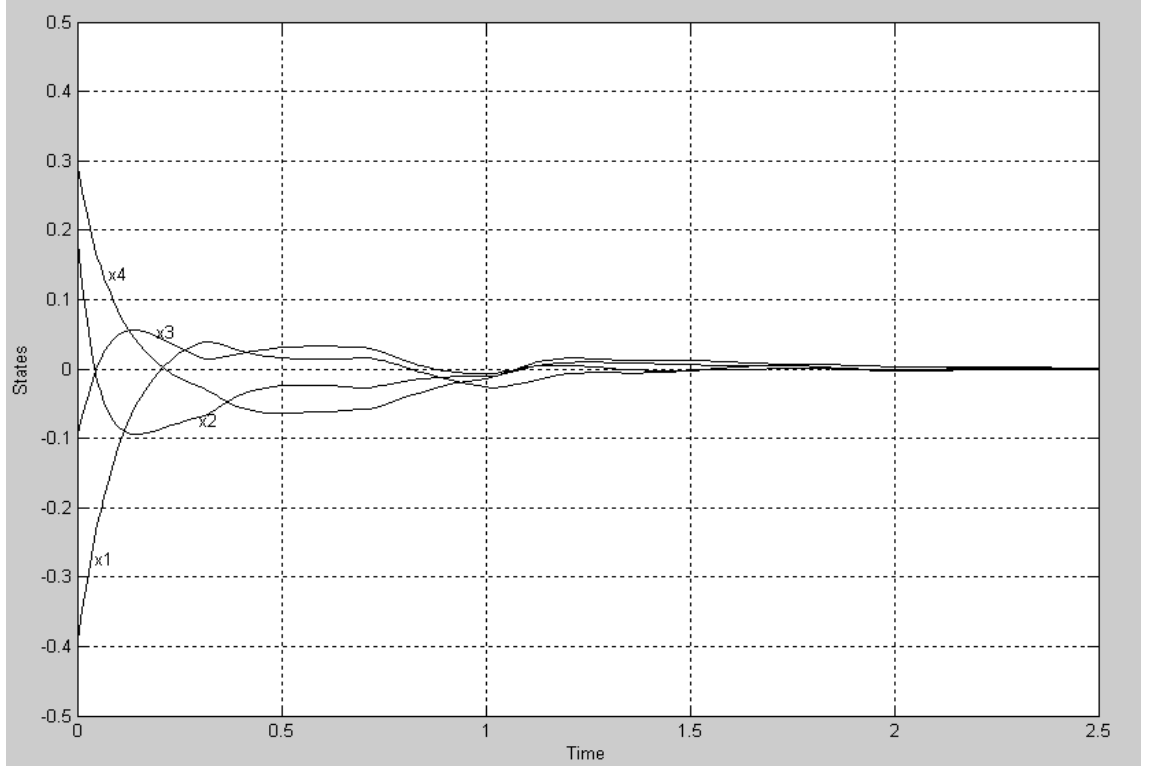
Şekil 5.32 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 7$, $g(z(t)) = 0.5[|z + 1| - |z - 1|]$ için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



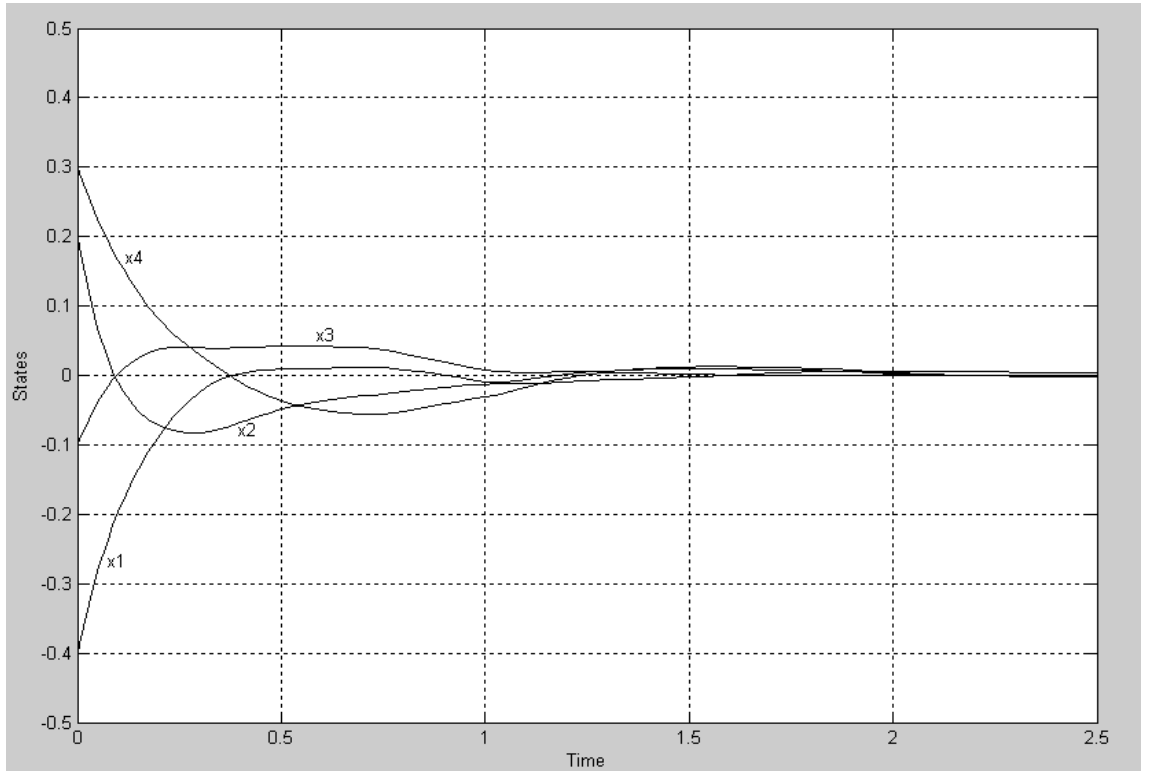
Şekil 5.33 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 12$, $g(z(t)) = 0.5[|z + 1| - |z - 1|]$ için Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



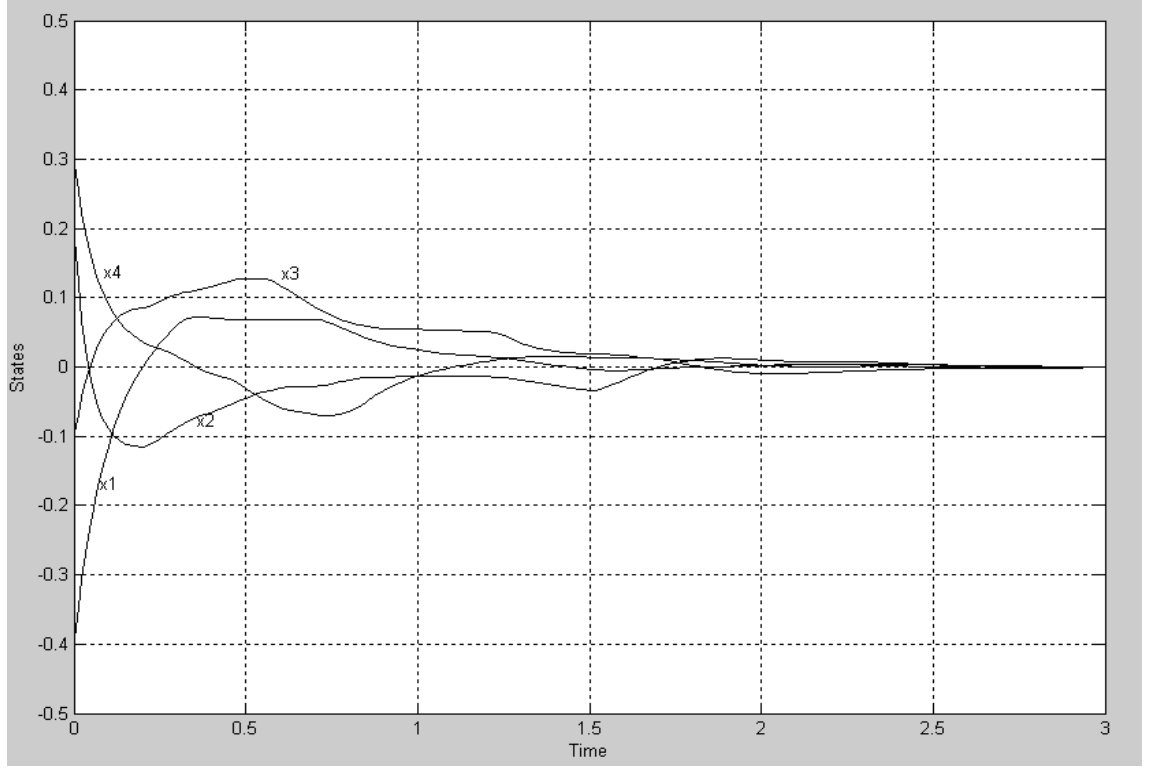
Şekil 5.34 : $\tau = 0.5$, $\gamma = 12$, $g(z(t)) = 0.5[|z + 1| - |z - 1|]$ için Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



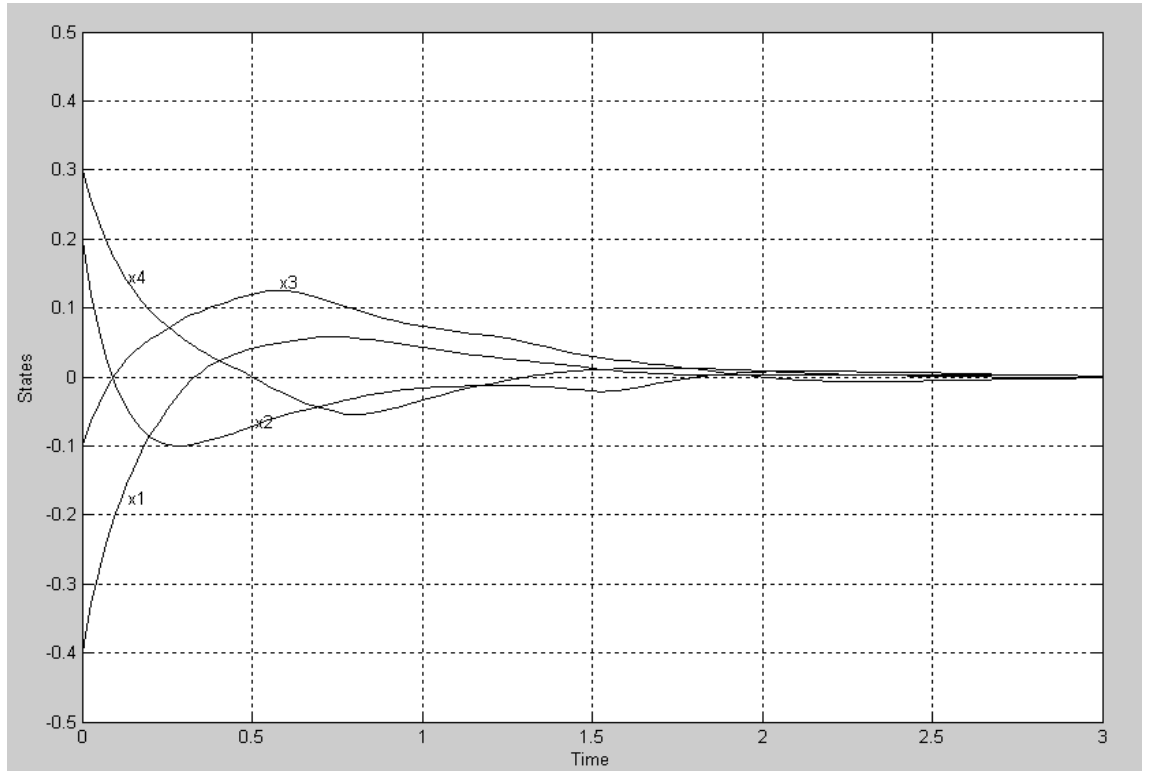
Şekil 5.35 : $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için 4 farklı gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.36 : $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için 4 farklı gecikmeli Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.37 : $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için 16 farklı gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağının dinamik davranışı



Şekil 5.38 : $\gamma = 7$, $g(z(t)) = \tanh(z)$ için 16 farklı gecikmeli Hopfield-tipi yapay sinir ağının dinamik davranışı

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, standart yapay sinir ağı modellerinden daha genel bir yapıya sahip olan Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin denge noktasının kararlılık özellikleri incelenmiştir. Farklı özellikteki aktivasyon fonksiyonlarının kullanıldığı durumlar için, Cohen-Grossberg yapay sinir ağının denge noktasının varlığı, tekliği, global asimtotik ve üstel kararlılığı için yeni koşullar elde edilmiştir. Elde edilen kararlılık koşulları incelenen yapay sinir ağının sistem parametreleri arasındaki ilişkilere dayanmaktadır. İncelenen yapay sinir ağı modeli gecikme parametresi de içerdiğinden dolayı, yapılan analizlerde gecikme parametresinin kararlılık koşulları üzerindeki etkileri de incelenmiştir. Gecikmenin sabit olduğu durumlarda elde edilen kararlılık koşulları gecikme parametrelerinden bağımsız olarak ifade edilebilmişlerdir. Gecikme parametrelerinin zamanla değiştiği durumlarda ise, kararlılık koşulları, Lyapunov teoremleri kullanıldığında gecikmeye bağlı olarak, Halanay teoremi kullanıldığında gecikmeden bağımsız olarak elde edilmiştir.

Bu tezin literatüre katkısı, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin denge noktası davranışını karakterize eden koşulların analiz edilmesidir. Bu analiz yapılırken denge noktasının varlığı ve tekliği ile denge noktasının kararlılık analizleri ayrı ayrı yapılmıştır. Çünkü denge noktasının varlığı ve tekliğini sağlayan koşullar bazen denge noktasının kararlılığını sağlamayabilir ya da kararlılığı sağlayan koşullar denge noktasının tekliğini garanti etmeyebilir. Bu nedenle, bu tezde yapılan çalışmalardan elde edilen koşulların önce denge noktasının varlığı ve tekliğini daha sonra da aynı koşulların denge noktasının kararlılığını sağladığı ispatlanmıştır.

Son yıllarda, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin kararlılık analizi ile ilgili oldukça fazla makale yayınlanmış ve bu çalışmalarda Cohen-Grossberg yapay sinir ağı sisteminin denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimtotik ve üstel kararlılığı ile ilgili yeterli koşullar sunulmuştur. Bu çalışmaların çoğunda kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının sınırlı ve gecikme parametrelerinin sabit oldukları varsayılmıştır. Yine bazı çalışmalarda aktivasyon fonksiyonlarının türevi alınabilir ve kesin artan oldukları kabul edilmiştir. Bizim elde ettiğimiz bazı sonuçlarda aktivasyon fonksiyonları ve gecikme parametreleri üzerinde yukarıda belirtilen kısıtlamalar kaldırılmıştır. Bu nedenle de elde ettiğimiz sonuçlar, literatürde daha önce verilmiş

olan kararlılık koşullarına göre daha genel olmaktadır. Diğer yandan, elde ettiğimiz kararlılık sonuçlarının test edilmesi de literatürde daha önce verilmiş olan sonuçlar ile kıyaslandığında daha kolaydır. Çünkü sistem parametrelerine dışardan ilave edilen bazı özel parametrelerin bulunması özellikle birçok durumda son derece kolaydır. Elde edilen sonuçların kolayca test edilebildiğini ve geniş bir yapay sinir ağı modeline uyarlanabileceğini göstermek açısından, hem farklı aktivasyon fonksiyonlarının hem de farklı gecikme parametrelerinin kullanıldığı sayısal örnekleri içeren ve elde edilen sonuçların yorumlanmasına yardımcı olacak simülasyonlarda yapılmıştır.

Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin daha genel bir yapıda olması ve birçok pratik problemin çözümünde kullanılması nedeni ile, dinamik davranışını karakterize eden çalışmaların devam edeceği açıktır. Bu alanda, bundan sonra yapılacak çalışmalarda özellikle daha genel karakteristik özelliklere sahip doğrusal olmayan aktivasyon fonksiyonlarının kullanılması ile birlikte, gecikme parametrelerinin sistem davranışı üzerindeki etkilerini en aza indirebilecek çalışmalar özel bir öneme sahip olacaktır. Ancak bu tür sonuçların elde edilebilmesi için de Lyapunov fonksiyonları analiz edilerek yeni Lyapunov fonksiyonlarının bulunması da ayrı bir araştırma konusu olarak önem arzedecektir.

KAYNAKLAR

- [1] COHEN, M.A. ve GROSSBERG, S., 1983, Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks, *IEEE Trans. Systems, Man Cybernetics*, 13 (5), 815-826.
- [2] YE, H., MICHEL A.N. ve WANG K., 1995, Qualitative analysis of Cohen Grossberg neural networks with multiple delay, *Physical Review E*, 51, 2611-2618.
- [3] ROSKA, T., WU, C.W., BALSÌ, M. ve CHUA, L.O., 1992, Stability and Dynamics of Delay-Type General and Cellular Neural Networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 39 (6), 487-490.
- [4] FORTÌ, M. ve TESI, A., 1995, New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 42 (7), 354-366.
- [5] ARİK, S. ve TAVSANOĞLU, V., 1998, Equilibrium analysis of delayed CNNs, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 45 (2), 168-171.
- [6] CAO, J.D., 1999, Periodic solutions and exponential stability in delayed cellular neural networks, *Phys. Rev. E*, 60 (3), 3244-3248.
- [7] ARİK, S. ve TAVSANOĞLU, V., 2000, On the Global asymptotic stability of delayed cellular neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 47 (5), 571-574.
- [8] LIAO, T.L. ve WANG, F.C., 2000, Global stability for cellular neural networks with time delay, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 11 (6), 1481-1484.
- [9] TAKAHASAHİ, N., 2000, A new sufficient condition for complete stability of cellular neural networks with delay, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 47 (6), 793-799.

- [10] YI, Z., HENG, P.A. ve LEUNG, K.S., 2001, Convergence analysis of cellular neural networks with unbounded delays, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 48 (6), 680-687.
- [11] HUANG, H., CAO, J. ve WANG, J., 2002, Global exponential stability and periodic solutions of recurrent neural networks with delays, *Physics Letters A*, 298 (5-6), 393-404.
- [12] SUN, C., ZHANG, K., FEI, S. ve FENG, C.B., 2002, On exponential stability of delayed neural networks with a general class of activation functions, *Physics Letters A*, 298 (1), 122-132.
- [13] YI, Z. ve TAN, K.K., 2002, Dynamical stability conditions for lotka-volterra recurrent neural networks with delays, *Physical Review E*, 66 (1), 011910.
- [14] LIAO, X., CHEN, G. ve SANCHEZ, E.N., 2002, LMI-based approach for asymptotic stability analysis of delayed neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 49, 1033-1039.
- [15] HWANG, C.C., CHENG C.J. ve LIAO, T.L., 2003, Globally exponential stability of generalized Cohen Grossberg neural networks with delays, *Physics Letters A*, 319 (1-2), 157-166.
- [16] CHEN, T. ve RONG, L., 2003, Delay-independent stability analysis of CohenGrossberg neural networks, *Physics Letters A*, 317 (5-6), 436-449.
- [17] XIAONG, W. ve CAO, J., 2005, Absolutely exponential stability of CohenGrossberg neural networks with unbounded delays, *Neurocomputing*, 68, 1-12.
- [18] ARİK, S. ve TAVSANOGU, V., 2005, Global asymptotic stability analysis of bidirectional associative memory neural networks with constant time delays, *Neurocomputing*, 68, 161-176.
- [19] ARİK, S. ve ORMAN, Z., 2005, Global stability analysis of CohenGrossberg neural networks with time varying delays, *Physics Letters A*, 341, 410-421.
- [20] LIAO, X. ve LI, C., 2005, An LMI approach to asymptotical stability of multi-delayed

neural networks, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 200, 139-155.

[21] SUN, J. ve WAN, L., 2005, Global exponential stability and periodic solutions of Cohen-Grossberg neural networks with continuously distributed delays, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 208, 1-20.

[22] HE, Y., WANG, Q.G. ve WU, M., 2005, LMI-based stability criteria for neural networks with multiple time-varying delays, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 212, 126-136.

[23] CAO, J. ve LI, X., 2005, Stability in delayed Cohen-Grossberg neural networks: LMI optimization approach, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 212, 54-65.

[24] LIAO, X., LI, C. ve WONG, K., 2004, Criteria for exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks, *Neural Networks*, 17, 1401-1414.

[25] LIU, J., 2005, Global exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays, *Chaos Solitons and Fractals*, 26, 935-945.

[26] HOPFIELD, J. ve TANK, D., 1985, Neural Computation of Decisions in Optimization Problems, *Biological Cybernetics*, 52, 141-152.

[27] HOPFIELD, J., 1982, Neural Networks and Physical systems with emergent collective Computational abilities, *Proc. of the National Academy of Sciences*, 79, 2554-2558.

[28] HOPFIELD, J., 1984, Neurons with Graded Responses have Collective Computational Properties like those of Two-State Neurons, *Proc. of the National Academy of Sciences*, 81, 3088-3092.

[29] CARPENTER, G., COHEN, M. ve GROSSBERG, S., 1987, Computing with neural networks, *Science*, 37, 54-115.

[30] KENNEDY, M.P. ve CHUA, L.O., 1988, Neural Networks for nonlinear programming, *IEEE Transactions on circuits and systems*, 35, 554-5562.

- [31] BALDI, P. ve ATIYA, A.F., 1994, How delays affect neural dynamics and learning, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5 (4), 612-621.
- [32] MARCUS, C.M. ve WESTERVELT, R.M., 1989, Stability of analog neural networks with delay, *Physical Review A*, 39 (1), 347-359.
- [33] McCULLOCH, W.S. ve PITTS, W., 1943, A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115-133, 1943, Reprinted in Anderson and Rosenberg , 1988.
- [34] ORMAN, Z. ve ARİK, S., 2006, New Results for Global Stability of Cohen-Grossberg Neural Networks with Discrete Time Delays, *International Conference on Neural Information Processing (ICONIP2006)*, October 2006, Hong Kong, published in Computer Science as Lecture Notes, 4232, Springer 2006, ISBN 3-540-46479-4.
- [35] WU, W., CUI, B.T., HUANG, M., 2007, Global asymptotic stability of delayed Cohen-Grossberg neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals*, 34, 872877.
- [36] LONG, F., WANG, Y., ZHOU, S., 2007, Existence and exponential stability of periodic solutions for a class of CohenGrossberg neural networks with bounded and unbounded delays, *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications*, 8, 797 810.
- [37] CHEN, Y., 2006, Global Asymptotic Stability of Delayed CohenGrossberg Neural Networks, *IEEE Transactions on Circuits and SystemsI*, 53 (2), 351-357.
- [38] GOU, S. ve HUANG, L., 2006, Stability Analysis of CohenGrossberg Neural Networks, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17 (1), 106-117.
- [39] CIVALLERI, P.P., GILLI, M., ve PANDOLFI, L., 1993, On stability of cellular neural networks with delay, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 40 (3), 157-165.
- [40] WANG, L. ve ZOU, X.F., 2002, Exponential stability of CohenGrossberg neural networks, *Neural Networks*, 15 (3), 415-422.

- [41] WANG, L. ve ZOU, X.F., 2002, Harmless delays in CohenGrossberg neural networks, *Physica D*, 170 (2), 162-173.
- [42] LU, W.L. ve CHEN, T.P., 2003, New conditions on global stability of CohenGrossberg neural networks, *Neural Computation*, 15 (5), 1173-1189.
- [43] RONG ,L.B., 2005, LMI-based criteria for robust stability of CohenGrossberg neural networks with delay, *Physics Letters A*, 339 (12), 63-73.
- [44] CAO ,J.D. ve LIANG, J.L., 2004, Boundedness and stability for CohenGrossberg neural network with time-varying delays, *J. Math. Anal. Appl.*, 296, 665-685.
- [45] YUAN, K. ve CAO, J., 2005, An analysis of global asymptotic stability of delayed CohenGrossberg neural networks via nonsmooth analysis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 52 (9), 1854-1861.
- [46] HAYKIN, S., 1994, *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, McMillan Publishing Company, New York.
- [47] KHALIL, H. K., 1988, *Nonlinear systems*, Mcmillian Publishing Company, New York.
- [48] MICHEL, A.N., FARREL, J.A. ve POROD, W., 1989, Qualitative analysis of neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2, 229-243.
- [49] MICHEL, A.N. ve GRAY, D.L., 1990, Analysis and synthesis of neural networks with lower block triangular interconnection structure, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 37, 1267-1283.
- [50] LI, J.H., MICHEL, A.N. ve POROD, W., 1988, Qualitative analysis and synthesis of a class of neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35, 976,985.
- [51] GRUJIC, L.T. ve MICHEL, A.N., 1991, Exponential stability and trajectory bounds of neural networks under structural variations, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 38

(10), 1182-1192.

[52] YANG, H. ve DILLON, T.S., 1994, Exponential stability and oscillation of Hopfield graded response neural network, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 12, 719-729.

[53] FORTI, M., MANETTI, S. ve MARINI, M., 1992, A condition for global convergence of a class of symmetric neural circuits, *IEEE Transactions on circuits and systems - I*, 39, 480-483.

[54] ABE, S., ve GEE, A.H., 1995, A condition for global convergence of a class of symmetric neural circuits, *IEEE Transactions on circuits and systems - II*, 42 (1), 39-45.

[55] FANG, Y., ve KINCAID, T.K., 1995, Stability analysis of dynamical neural networks, *IEEE Transactions on neural networks*, 7 (4), 996-1006.

[56] KELLY, D.G., 1990, Stability in contractive nonlinear neural networks, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 3 (3), 231-242.

[57] SUDHARSANAN, S.I., ve SUNDARESHAN, M.K., 1991, Equilibrium characterisation of dynamical neural networks and systematic synthesis procedure for associative memories, *IEEE Transactions on neural networks*, 2 (5), 509-521.

[58] AVITABILE, G., FORTI, M. ve MARINI, M., 1991, On a class of nonsymmetrical neural networks with application to ADC, *IEEE Transactions on circuits and systems - I*, 38, 533-541.

[59] FORTI, M., MANETTI, S. ve MARINI, M., 1994, Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks, *IEEE Transactions on circuits and systems*, 41 (4), 491-494.

[60] FORTI, M., LIBERATORE, A., MANETTI, S. ve MARINI, M., 1994, On absolute stability of neural networks, in *Proc. 1994 IEEE Int. Symp. Circ. Syst.*, 6, 241-244.

[61] KASZKUREWICZ, E., ve BHAYA, A., 1994, On a class of globally stable neural circuits, *IEEE Transactions on circuits and systems - I*, 41, 171-174.

- [62] KASZKUREWICZ, E., ve BHAYA, A., 1995, Comments on "Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks", *IEEE Transactions on circuits and systems*, 42, 497-499.
- [63] ROSKA, T., 1998, Some qualitative aspects of neural computing systems, in *Proc. 1998 IEEE Int. Symp. Circ. Syst.*, 751-754.
- [64] HIRSCH, M.W., 1989, Convergent activation dynamics in continuous time networks, *IEEE Transactions on neural networks*, 1, 331-349.
- [65] TANK, D.W. ve HOPFIELD, J.J., 1986, Simple 'neural' optimisation networks : A/D converter, signal desicion circuit, and a linear programming circuit, *IEEE Transactions on circuits and systems*, 32, 533-541.
- [66] GOPALSAMY, K., ve HE, X., 1994, Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays , *Physica D*, Vol. 76, pp. 344-358.
- [67] JOY, M., 1999, On the global convergence of a class of differential equations with applications in neural networks, *Journal Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 232, pp. 61-81.
- [68] LIAO, X., CHEN,G. ve SANCHEZ, E.N., 2002, LMI-based approach for asymptotic stability analysis of delayed neural networks, *IEEE Transactions on circuits and systems - I*, Vol. 49, pp. 1033-1039.
- [69] ZHANG, J., 2002, Absolutely exponential stability in delayed cellular neural networks, *Int. Journal of circuit theory and applications*, Vol. 30, No. 4, pp. 395-409.
- [70] CAO, J., 2001, Global stability conditions for delayed CNNs, *IEEE Transactions on circuits and systems - I*, Vol. 48, No. 11, pp. 1330-1333.
- [71] AMARI, S. 1972, Learning Patterns and Pattern Sequences by Self-organizing Nets of Threshold Elements, *IEEE Trans. Computers*, 21 (11), 1197-1206.

[72] GROSSBERG, S., 1972, Pattern Learning by Functional-differential Neural Networks with Arbitrary Path Weights in Schmitt, K. [Ed.], *Delay and Functional Differential Equations and Their Applications*, 121-160, Academic Press, NewYork, 1972, reprinted in Grossberg S., *Studies of Mind and Brain*, Reidel Press, Boston, 1982.

[73] LITTLE, W. A, 1974, The existence of persistent states in the brain, *Math. Biosci*, 19, 101-120.

[74] HORN, R.A. ve JOHNSON, C.R., 1991, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep ORMAN 23.01.1979 yılında İstanbul’da doğdu. İlköğrenimini Bahçelievler İlkokulunda, orta ve lise öğrenimini Ö. Şişli Terakki Lisesi’nde tamamladı. 1997 yılında Ö. Şişli Terakki Lisesi’nden mezun olduktan sonra, aynı sene İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümünde lisans öğrenimine başladı. 2001 yılında lisans öğrenimini bitirdikten sonra aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Programında yüksek lisans öğrenimine başladı. Bu dönem içerisinde İstanbul Kültür Üniversitesi’nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2003 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlayarak, aynı yıl içerisinde İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Programında doktora öğrenimine başladı. 2005 yılında İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi bünyesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başlayan Zeynep ORMAN yapay sinir ağları üzerinde çalışmalarına devam etmektedir.