BİR YARI DOĞRUSAL ELİPTİK DENKLEM İÇİN 3. SINIF SINIR PROBLEMİNİN İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF THE 3. TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SEMI-LINEAR ELLIPTIC EQUATION

KERİME KORKMAZ

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2008

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI** 'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :..
Doç. Dr. Emil NOVRUZOV

Üye (Danışman) :..
Prof. Dr. Kamal SOLTANOV

Üye :..
Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA

ONAY

Bu tez .../.../2008 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

..../..../2008

Prof. Dr. Erdem YAZGAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

BİR YARI DOĞRUSAL ELİPTİK DENKLEM İÇİN 3. SINIF SINIR PROBLEMİNİN İNCELENMESİ

Kerime KORKMAZ

ÖZ

Bu çalışmada yarı doğrusal *divergence* olmayan eliptik denklem için konulmuş 3. sınıf sınır probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir. Birinci bölümde, incelediğimiz problem tanımlanmış ve son zamanlarda bu tip denklemler üzerine yapılmış çalışmalardan bizim çalışmamıza yakın olanların bazıları kısaca açıklanmıştır. İkinci bölümde, bu çalışma için gerekli olan bazı genel ve özel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölüm, üç ayrı alt bölümden oluşmaktadır. İlk iki alt bölümde, gözönüne alınan problemin doğrusal olmayan kısmına bağlı olarak kritik altı, kritik ve kritik üstü durumlarda problemin çözümünün varlığı için yeterli koşullar elde edilmiş ve bu koşullar altında çözümün varlığı ispatlanmıştır. Üçüncü alt bölümde ise, problemin model bir durumunda çözümünün tekliği için yeterli koşullar elde edilmiş ve bu koşullar altında çözümün tekliği ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Yarı doğrusal eliptik denklem, 3. sınıf sınır problemi, kritik altı, kritik ve kritik üstü durumlar, varlık ve teklik teoremleri

Danışman : Prof. Dr. Kamal SOLTANOV, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

INVESTIGATION OF THE 3. TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SEMI-LINEAR ELLIPTIC EQUATION

Kerime KORKMAZ

ABSTRACT

The existence and uniqueness of the solution of 3. type boundary value problem for a semi-linear nondivergence elliptic equation is investigated in this work. In the first chapter, the problem is defined, and some works studied recently on this type of equations are explained shortly. In the second chapter, some necessary general and special information for this work is given. The third chapter consists of three sub chapters. In the first two sub chapters, sufficient conditions for existence of the solution of the problem in critical, sub critical, super critical cases depend on the nonlinear part of the problem are obtained and under these conditions the existence of the solution is proved. In the third sub chapter, in a model case of the problem, sufficient conditions for the uniqueness of the solution of the problem are obtained and under these conditions the uniqueness of the solution is proved.

Keywords: Semi-linear elliptic equation, 3. type boundary value problem, critical, sub critical and super critical cases, existence and uniqueness theorems

Advisor : Prof. Dr. Kamal SOLTANOV, Hacettepe University, Faculty of Science, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken yaptığım çalışmalarda yanımda olup bana yol gösteren, emek veren değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Kamal Soltanov'a teşekkür ederim.

Çalışma arkadaşlarım Arş. Gör. Eylem Öztürk'e ve Arş. Gör. Gamze Düzgün'e tüm sıkıntılarıma ortak olup çalışmalarıma destek verdikleri için teşekkür ederim.

Yine çalışma arkadaşım Arş. Gör. Özlem Tuzcuoğlu'na yardımlarından dolayı ve Öğr. Gör. Dr. Seçil Çayırlı'ya anlayışından dolayı teşekkür ederim.

Her an yanımda olan, sıkıntı ve sevinçlerime ortak olup beni destekleyen canım aileme çok teşekkür ederim.

İçindekiler

1 GİRİŞ

Bu çalışmada, aşağıdaki ikinci mertebeden yarı doğrusal *divergence* olmayan eliptik kısmi diferansiyel bir sınıf denklem için konulmuş 3. sınıf sınır problemi gözönüne alınmıştır.

$$Lu + g(x,u) = h(x), \; x \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x')u \right) \Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x'), \; x' \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

Burada, $n \geq 2$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ sınırı yeterince düzgün sınırlı bölgedir, u bilinmeyen fonksiyondur ve L, aşağıdaki gibi tanımlanmış 2. mertebeden *divergence* olmayan doğrusal düzgün eliptik diferansiyel ifadedir.

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u + c(x)u$$

Bu ifadede; a_{ij}, b_i ve c katsayıları verilen fonksiyonlardır ve $D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ dir, $(i,j = 1,...,n)$.
(1.1), (1.2) probleminde $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $a : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ verilen fonksiyonlardır, $g(x,\tau)$ fonksiyonu ikinci değişkenine bağlı doğrusal değildir,
ν, L operatörüne bağlı birim normal vektördür ve $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_j u \; \nu_i$ şeklindedir,
h ve φ genelleştirilmiş fonksiyonlardır.

Yarı doğrusal denklemler yüzyılı aşkın bir süreyle kapsamlı bir şekilde incelenmektedir. Bunun başlıca sebebi fizik, mekanik gibi bilim dallarından çıkan olayların matematiksel modellerinin daha çok ikinci mertebeden yarı doğrusal denklemler olarak elde edilmesidir. Böyle denklemlerde çözümün varlığının incelenmesiyle ilgili ilk sonuçları R. Emden, S. Bernstein, R.H. Fowler gibi bilimadamları elde etmiştir. Yarı doğrusal denklemlerin farklı varyansları kapsamlı şekilde J. Schauder, J. Leray, D. Hilbert, F. Courant; J. Moser, C. Miranda, E. DeGiorgi, J. L. Lions, L. Nirenberg, D. Gilbarg, N. S. Trudinger; S. Fucik, A. Kufner, vb bilimadamları tarafından çalışılmıştır ve hala daha fazla bilimadamı (H. Brezis, P. H. Rabinowitz, K. N. Soltanov, A. Bahri, P. L. Lions, vb) tarafından çalışılmaktadır. Bu çalışmalarda gözönüne alınan problemlerin çözümünün varlığı, sayısı ve davranışı üzerine önemli sonuçlar elde edilmektedir.

Yarı doğrusal denklemler üzerine son zamanlarda yapılan çalışmalardan bizim çalışmamıza yakın olanların bazılarının üzerinde duracağız.

Crandall, Rabinowitz ve Tartar [5] , çalışmalarında aşağıdaki doğrusal olmayan eliptik sınır değer problemini gözönüne almışlar.

$$\begin{cases} Lu = g(x,u), \ x \in \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega \ \textit{üzerinde} \end{cases}$$

Burada, g, pozitif u için tanımlı ve $u \longrightarrow 0$ düzgün yakınsıyor iken singülerdir.

L, doğrusal 2. mertebeden eliptik operatör öyle ki maksimum prensibini sağlıyor.

Bu çalışmada, gözönüne alınan problemin sınıra kadar sürekli klasik çözümünün varlığı incelenmiş ve g'nin x'ten bağımsız doğrusal olmadığı özel durumlarında çözümün sürekliliği üzerinde çalışılmıştır.

Bahri ve Brezis [3], çalışmalarında $n \geq 3$ olmak üzere n boyutlu kompakt Rieman manifoldu (M,d) üzerinde aşağıdaki problemi gözönüne almışlardır.

$$-\Delta u + qu = u^p, \ u \geq 0$$

Burada Δ *Laplace-Beltrami* operatör ve $q \in L_\infty(M)$, u bilinmeyen fonksiyondur. Bu çalışmada $p = \frac{n+2}{n-2}$ kritik durumunda problemin pozitif çözümünün varlığı üzerine çalışmışlardır. Bu problem için gerekli çözülebilirlik koşulunun $-\Delta + q$'nun *coercive*liği olduğunu elde etmişlerdir. Hatta bu koşulun $n = 3,4,5$ için yeterli olduğunu fakat $n \geq 6$ için ek koşullar gerektiğini göstermişlerdir.

Du ve Ma [6], 2001'deki çalışmalarında $\mathbb{R}^N$'de

$$u_t - \Delta u = \lambda u - u^p \ , \ u \geq 0, \ p > 1 \tag{1.3}$$

parabolik denklemini incelemek için önce aşağıdaki eliptik problemi incelemişler.

$$-Lu = \lambda a(x)u - b(x)u^p \ , \ x \in \mathbb{R}^N \tag{1.4}$$

Burada, $Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \left[a_{ij}(x)\, u_{x_i}\right]_{x_j}$ şeklindedir, dolayısıyla *divergence* formdadır.

a_{ij} keyfi mertebeden türevlenebilir fonksiyondur. L, düzgün eliptik operatördür öyle ki $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = 1,...,N)$ ve σ_1, σ_2 pozitif olmak üzere her $\xi \in \mathbb{R}^N$ için

$$\sigma_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \sigma_2 |\xi|^2$$

sağlanır. (1.4)'deki a ve b fonksiyonları, keyfi mertebeden türevlenebilir pozitif fonksiyonlardır. a_{ij}, a ve b fonksiyonları $|x| \longrightarrow \infty$ iken

$$a_{ij}(x) \longrightarrow a_{ij}^{\infty},\ a(x) \longrightarrow a^{\infty} > 0,\ b(x) \longrightarrow b^{\infty} > 0$$

sağlıyorlar.

Verilen bu koşullar altında (1.4)'ün her $\lambda > 0$ için tek pozitif çözümünün olduğunu ve her $\lambda \leq 0$ için pozitif çözümünün olmadığını kanıtlamışlar. Bu sonucu (1.3)'ü incelemekte kullanmışlar.

2002'de ise Du ve Ma [7], aşağıdaki problemi 2001'deki çalışmalarındaki koşullara benzer koşullarla incelemişler.

$$\Delta u + \lambda a(x)u - b(x)u^p = 0 \tag{1.5}$$

Burada, $x \in \mathbb{R}^N$, $N > 2$, $p > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$; a, C^1'den olan pozitif fonksiyon ve b negatif olmayan keyfi mertebeden türevlenebilir fonksiyondur.

Bu çalışmada, [6]'daki çalışmalarından farklı olarak b fonksiyonu üzerine sonsuzda koşul gelmeden problemi incelemişler.

(1.5) problemini Afrouzi ve Brown [1], $b(x) \equiv 1$, $a^{+}(x) \leq k\,|x|^{-(2+\delta)}$, $\left(k, \delta > 0, x \in \mathbb{R}^N\right)$ ve $p = 2$ olduğunda gözönüne almışlar ve λ_1 , $-\Delta u = \lambda(x)u$ özdeğeri olmak üzere problemin $\lambda > \lambda_1$ iken tek pozitif çözümünün olduğunu, $\lambda \leq \lambda_1$ iken pozitif çözümünün olmadığını kanıtlamışlar.

F. Pacella [15], yaptığı çalışmada

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

problemini incelemiş. Burada $N \geq 2$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı ve $T_0 = \left\{x = (x_1\,, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N, x_1 = 0\right\}$ hiperdüzlemine göre simetrik bölge, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon, g sürekli, f ve g simetrik fonksiyonlardır. Bu çalışmada, Ω halka ya da yuvar olduğunda, $g \equiv 0$ ve f ikinci değişkenine bağlı kesin konveks iken problemin tüm çözümlerinin simetrik olması için, u problemin çözümü olmak üzere, $L = -\Delta - f'(x,u)$ doğrusal operatörünün ilk özdeğerinin negatif olmaması yeterli koşul olarak bulunmuştur.

K.N. Soltanov [19], yaptığı çalışmada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sınırı yeterince düzgün sınırlı bölge ve $\rho, \mu \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} -\Delta u+u+|u|^{\rho}\,u=h\,(x)\ \ ,\ \ x\in\Omega \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}+|u|^{\mu}\,u\right)\Big|_{\partial\Omega}=\varphi\,(x')\ \ ,\ x'\in\partial\Omega \end{cases}$$

problemini gözönüne almış ve $\rho \geq 2\mu > 0$ iken bu problemin $H\,(\Omega) \equiv W_2^2\,(\Omega) \cap S_{1,\rho,2}(\Omega)$'da tek çözümü olduğunu kanıtlamış. Burada

$$S_{1,\rho,2}(\Omega) \equiv \left\{ u \in L_1\,(\Omega) : [u]^{\rho+2}_{S_{1,\rho,2}(\Omega)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |u|^{\rho}\,|D_i u|^2\,dx + \int_{\Omega} |u|^{\rho+2}\,dx < \infty \right\}$$

olarak tanımlanmıştır.

Gözönüne aldığımız tipteki denklemler üzerine *coercive* olmayan durumda da çalışmalar yapılmıştır. (Pohozaev [16], Rabinowitz [17], Soltanov [20], vb)

Biz de bu çalışmamızda (1.1), (1.2) probleminin *coercive* olduğu durumda, $g(x,\tau)$ fonksiyonunun τ'ya bağlı olarak sonsuza gitme hızının kritik altı, kritik ve üst kritik durumlarını ayrı ayrı inceledik. Gözönüne alınan durumlarda çözümün varlığı için problemin verileri üzerine yeterli koşulları elde ettik. Belirtmek gerekir ki problemi incelemek için Soltanov'un [19] makalesinde ispatladığı genel bir teoremi ve onun sonucunu uyguladık. Ayrıca model bir durumda (1.1), (1.2) probleminin çözümünün tekliğini gösterdik. Yaptığımız çalışmada, (1.1), (1.2) problemin çözümünün varlığını göstermekte kullandığımız sonucun, problemin daha genel koşullar altında incelenmesine imkan verdiği görülmüştür.

2 ÖNBİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilerideki bölümlerde kullanılacak bazı uzaylar, tanımlar, teoremler, gösterimler ve eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.1 *([2]) X tam doğrusal normlu uzayına **Banach** uzayı denir.*

Tanım 2.2 *([8]) X normlu uzayı sayılabilir yoğun altkümeye sahipse X **ayrılabilir** uzaydır.*

Tanım 2.3 *([8]) H, iç çarpımın ürettiği norma göre Banach uzay ise H **Hilbert** uzayıdır.*

Tanım 2.4 *([11]) X normlu doğrusal uzay olsun. X üzerindeki tüm doğrusal sınırlı fonksiyoneller uzayına X uzayının duali denir ve X^* ile gösterilir. $x' \in X^*$ olmak üzere X^* üzerindeki norm*

$$\|x'\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle x', x \rangle}{\|x\|_X}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.5 *([8]) X Banach uzayı olsun. Eğer $(X^*)^* \equiv X$ ise, X **refleksif** uzaydır.*

Daha açık olarak, eğer her $u^{**} \in (X^*)^*$ için

$$\langle u^{**}, u^* \rangle = \langle u^*, u \rangle, \ \forall u^* \in X^*$$

*eşitliğini sağlayan $u \in X$ varsa X uzayına **refleksif** uzay denir.*

Tanım 2.6 *([2]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $p \geq 1$ gerçel sayı olmak üzere Ω üzerinde*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty, x \in \Omega$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir u fonksiyonlar sınıfına $L_p(\Omega)$ denir.

Bu uzay doğrusal olmakla birlikte üzerindeki norm

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.7 *([2]) $p = \infty$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde hemen hemen heryerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L_\infty(\Omega)$ uzayı denir ve üzerindeki norm*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.8 *([8]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bölge olsun. L, 2. mertebeden kısmi türevli operatörü*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u$$

şeklinde ise divergence formda;

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u$$

şeklinde ise divergence olmayan formdadır. Burada a_{ij}, b_i, c, $(i, j = 1, .., n)$, Ω'da ölçülebilir katsayı fonksiyonlarıdır.

Ayrıca, eğer hemen hemen her $x \in \Omega$ ve her $\xi \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta\, |\xi|^2$$

olacak biçimde $\theta > 0$ sabiti varsa ve $a_{ij} = a_{ji}$ sağlanıyorsa, kısmi türevli L operatörü ***düzgün eliptik****tir.*

Tanım 2.9 *([9]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölge ve $h = h(x, \xi)$ hemen hemen her $x \in \Omega$ ve her $\xi \in \mathbb{R}^n$ için tanımlı olsun. Eğer*

(i) her $\xi \in \mathbb{R}^n$ için $h_\xi(x) = h(x, \xi)$ Ω'da ölçülebilir

(ii) hemen hemen her $x \in \Omega$ için $h_x(\xi) = h(x, \xi)$ $\mathbb{R}^{n\prime}$de sürekli

oluyorsa h fonksiyonu Caratheodary özelliğine sahiptir denir.

Tanım 2.10 *([9]) X Banach uzayı, X^* dual uzay olmak üzere $f : X \longrightarrow X^*$ operatörü $u \in X$ için*

$$\|u\|_X \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_X} \nearrow \infty$$

sağlanırsa f'e ***coercive****dir denir.*

Tanım 2.11 *([9])* $\{u_n\}$, *X Banach uzayında bir dizi ve* $u_0 \in X$ *olsun.* X^* *dual uzayından olan her* f *doğrusal sürekli fonksiyonu için*

$$\langle f, u_n \rangle \longrightarrow \langle f, u_0 \rangle$$

sağlanırsa $\{u_n\}$ *dizisi* u_0*'a zayıf yakınsıyor denir ve*

$$u_n \rightharpoonup u_0$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.12 *([18])* (Ω, Σ, μ) *ölçüm uzayı,* $\{f_n\}$ *ölçülebilir fonksiyonlar dizisi,* f *ölçülebilir fonksiyon olmak üzere* $\forall \varepsilon > 0$ *için*

$$\lim_{n \to \infty} \mu \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

oluyorsa $\{f_n\}$ *dizisi* f *fonksiyonuna ölçüme göre yakınsıyor denir ve*

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

olarak gösterilir.

Önerme 2.13 *([18])* (Ω, Σ, μ) *ölçüm uzayı,* $\mu(\Omega) < \infty$, $\{f_n\}$ *ölçülebilir fonksiyonlar dizisi* f *fonksiyonuna ölçüme göre yakınsıyor olsun.O zaman öyle* $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ *altdizisi vardır ki* $f_{n_k} \xrightarrow{hhy} f$ *sağlanır.*

Teorem 2.14 *([18])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölge,* $\{f_n\}$, $L_p(\Omega)$*'da fonksiyonlar dizisi ve* $f_n \underset{L_p(\Omega)}{\longrightarrow} f$ *olsun. O zaman* $\{f_n\}$ *dizisi* f*'e ölçüme göre yakınsar.*

Teorem 2.15 *([9]) Banach uzaylarında zayıf yakınsak bir dizi sınırlıdır.*

Teorem 2.16 *([22])* X *refleksif bir Banach uzay olsun ve* $\{x_n\}$ *bu uzayda sınırlı bir dizi olsun.O zaman bu diziden öyle bir altdizi seçilebilir ki bu uzayda zayıf yakınsar.*

Teorem 2.17 *([14])* X *ve* Y *doğrusal normlu uzaylar ve* $A : X \longrightarrow Y$ *doğrusal operatör ise* A *operatörünün sınırlılığı ve sürekliliği denktir.*

Teorem 2.18 *([14])* X *ve* Y *Banach uzaylar ve* $A : X \longrightarrow Y$ *doğrusal sürekli operatör olsun.O zaman* $A : X \longrightarrow Y$ *zayıf süreklidir.*

SOBOLEV UZAYLARI

Tanım 2.19 (Sobolev Uzayları) *([2])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölge,* $m > 0$ *bir tamsayı ve* $1 \leq p \leq \infty$ *olsun.*

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir.

Burada

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

ve

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

dir. Bu doğrusal uzay üzerindeki norm, $1 \leq p < \infty$ *için;*

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq\ |\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ *için;*

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} = \max_{0\leq\ |\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L\infty(\Omega)}$$

şeklindedir. Sobolev uzayları Banach uzaylarıdır. $m = 0$ *için* $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ *dır.* $p = 2$ *ise* $W_2^m(\Omega)$ *uzayı bir Hilbert uzayıdır. Bu uzay üzerindeki iç çarpım*

$$\langle u, v\rangle_m = \int_\Omega \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} D^\alpha u(x)\ \ D^\alpha v(x)\, dx$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.20 *([2])* X *ve* Y *Banach uzayları olmak üzere* $X \subset Y$ *olsun. Her* $u \in X$ *için*

$$\|u\|_Y \leq c\,\|u\|_X \ \ , (c > 0)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa X *uzayı* Y *uzayına sürekli gömülür denir.*

Tanım 2.21 *([9])* X *Banach uzayı olmak üzere* $X \subset Y$ *olsun. Eğer,* X *uzayında* $u_0 \in X$*'a zayıf yakınsayan keyfi* $\{u_n\} \subset X$ *dizisi* Y *uzayında* u_0*'a güçlü yakınsıyorsa* X *uzayı* Y *uzayına kompakt gömülür denir.*

Ayrıca, X *refleksif Banach uzayı ve* Y *Banach uzayı ise,* X*'in* Y*'ye kompakt gömülmesi aşağıdaki iki koşulun sağlanmasına denktir.*

1. $X \subset Y$

2. X'teki keyfi sınırlı bir küme Y'deki kompakt bir küme tarafından kapsanır.

Teorem 2.22 *([12]) $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ya da C^1 sınıfına ait açık sınırlı bir bölge olsun. Aşağıdaki gömülmeler süreklidir.*

(i) *Eğer $1 \leq p < n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right]$*

(ii) *Eğer $p = n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$*

(iii) *Eğer $p > n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$.*

Teorem 2.23 *([12]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, C^1 sınıfına ait açık sınırlı bir bölge olsun. Aşağıdaki gömülmeler kompakttır.*

(i) *Eğer $p < n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right)$*

(ii) *Eğer $p = n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$*

(iii) *Eğer $p > n$ ise, $W^1_p(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$.*

Teorem 2.24 *([8]) Ω, sınırı C^1 sınıfına ait sınırlı bölge olsun. Öyle bir doğrusal sınırlı*

$$T : W^1_p(\Omega) \longrightarrow L_p(\partial\Omega)$$

operatörü vardır ki aşağıdakiler sağlanır.

(i) *$Tu = u|_{\partial\Omega}$, $u \in W^1_p(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$*

(ii) *$\|Tu\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W^1_p(\Omega)}$, $\forall u \in W^1_p(\Omega), c = c(p, \Omega)$*

Teorem 2.25 *([2]) Eğer $u \in W^m_p(\Omega)$ ise $v = u|_{\partial\Omega}$ olmak üzere $v \in W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ ve*

$$\|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)} \leq K_1 \|u\|_{W^m_p(\Omega)}$$

sağlanır. Tersine, eğer $v \in W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ ise o zaman $v = u|_{\partial\Omega}$ olacak şekilde öyle bir $u \in W^m_p(\Omega)$ vardır ki

$$\|u\|_{W^m_p(\Omega)} \leq K_2 \|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)}$$

sağlanır.

Teorem 2.26 *([2])* Ω, *$\mathbb{R}^n$'de uniform C^m-regularity özelliğine sahip olsun. Eğer $mp < n$ ve $p \leq q \leq \frac{(n-1)p}{n-pm}$ ise*

$$W_p^m(\Omega) \subset L_q(\partial\Omega)$$

sürekli gömülmesi vardır. Eğer $mp = n$ ise $p \leq q < \infty$ için bu gömülme vardır.

(Uniform C^m-regularity özelliği: Eğer $\partial\Omega$ sınırının yerel bir sonlu açık örtüsü $\{U_j\}$ ve ona karşılık gelen birebir, m-smooth dönüşümlerin bir dizisi $\{\Phi_j\}$ varsa öyle ki Φ_j, U_j'yi $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ kümesine götürüyor ve şu özellikler sağlanıyor:

(i) Bazı $\delta > 0$ için, $\cup_{j=1}^{\infty}\Psi_j(\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{2}\}) \supset \Omega_\delta$, $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$.

(ii) Bazı sonlu R için, U_j kümelerinin her $R+1$ koleksiyonu boş arakesite sahiptir.

(iii) Her j için, $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$.

(iv) $(\Phi_{j,1}, .., \Phi_{j,n})$ ve $(\Psi_{j,1}, .., \Psi_{j,n})$, Φ_j ve Ψ_j'nin bileşenlerini temsil etmek üzere, öyle bir sonlu M sayısı vardır ki, her α için $|\alpha| \leq m$, her i için $1 \leq i \leq n$ ve her j için, $|D^\alpha\Phi_{j,i}(x)| \leq M$, $x \in U_j$ ve $|D^\alpha\Psi_{j,i}(y)| \leq M$, $y \in B$'dir.

O zaman Ω, uniform C^m-regularity özelliğine sahiptir.)

Teorem 2.27 *([2])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölge olsun. Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $L_p(\Omega)$ Banach uzayıdır.*

Teorem 2.28 *([2])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölge olsun. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L_p(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır.*

Teorem 2.29 *([2])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölge olsun. $1 < p < \infty \iff L_p(\Omega)$ refleksif uzaydır.*

Teorem 2.30 *([2])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölge olsun. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $W_p^m(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır.*

Teorem 2.31 *([2])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *bölge olsun. Eğer $1 < p < \infty$ ise $W_p^m(\Omega)$ refleksif uzaydır.*

Teorem 2.32 *([21])* Ω, *sınırı C^1'den olan sınırlı bölge olsun. En az bir $c = c(\Omega)$ sabiti vardır ki her $u \in W_2^1(\Omega)$ için*

$$\int_\Omega |u|^2 \, dx \leq c \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, dx \right)$$

sağlanır.

Sonuç 2.33 *Ω, sınırı C^1'den olan sınırlı bölge olsun. Her $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ $(\alpha > 1)$ için en az bir $c = c(\Omega)$ sabiti vardır ki,*

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + c$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.34 *([19]) X, Y Banach uzayları ve X^*, Y^* onların dual uzayları olsun. Kabul edelim ki $S_0 \subseteq X$ zayıf tam pseudo-normlu uzaydır. Aşağıdaki koşullar sağlansın.*

(i) $f : S_0 \longrightarrow Y$ zayıf kompakt (zayıf sürekli) dönüşüm olsun öyle ki S_0 "refleksif" bir pseudo-normlu uzaydır.

(ii) X_0 topolojik vektör uzayı ve Y_0^*, Y^*'da yoğun refleksif ayrılabilir Banach uzayı olmak üzere

$$g : X_0 \subseteq S_0 \longrightarrow Y_0^* \subset Y^*$$

sınırlı dönüşümü vardır öyle ki $g(X_0)$, Y_0^*'da yoğun doğrusal alt küme kapsar ve g^{-1}, Y_0^*'dan S_0'a zayıf kompakt dönüşümdür.

(iii) f ve g dönüşümleri genelleşmiş anlamda X_0 üzerinde coercive ikili oluştursun: $x \in X_0$ için

$$[x]_{S_0} \nearrow \infty \ \ iken \ \ \frac{\langle f(x), g(x)\rangle}{[x]_{S_0}} \nearrow \infty$$

dir.($[.]_{S_0}$, S_0'da pseudo-normdur.)

O zaman

$$\langle f(x), y^*\rangle = \langle y, y^*\rangle, \ y^* \in Y^*$$

eşitliği her $y \in M \subseteq Y$ için S_0'da çözülebilirdir öyle ki

$$M = \left\{ y \in Y : sup \left\{ \frac{\langle y, g(x)\rangle}{[x]_{S_0}} : x \in X_0 \right\} < \infty \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.35 (Test Fonksiyonu) *([10]) φ, kompakt support'a sahip gerçel değerli ve her mertebeden sürekli türevi olan bir fonksiyon ise $(\varphi \in C_c^\infty(\Omega))$ φ'ye test fonksiyonu denir.*

Bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemi ile test fonksiyonlar kümesi bir vektör uzayıdır (bu uzayı D ile göstereceğiz).

Tanım 2.36 (Genelleştirilmiş Fonksiyon) *([10]) f, D üzerinde tanımlı bir fonksiyonel olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f'e genelleştirilmiş fonksiyon denir:*

(a) Her α_1 ve α_2 gerçel (veya kompleks) sayıları ve her $\varphi_1,\ \varphi_2 \in D$ için

$$\langle f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2\rangle = \alpha_1 \langle f, \varphi_1\rangle + \alpha_2 \langle f, \varphi_2\rangle$$

(b) Her sıfıra yakınsayan $\{\varphi_n\} \subset D$ dizisi için $\{\langle f, \varphi_n\rangle\}$ dizisi sıfıra yakınsar.

Yukarıdaki tanımdan açıktır ki integrallenebilir bir f fonksiyonu D üzerinde genelleştirilmiş fonksiyondur. Gerçekten, her $\varphi \in D$ için

$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

integrali sonludur ve integralin özelliklerinden yukarıdaki tanımın koşulları sağlanır.

Tanım 2.37 (Zayıf Türev) *([8]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir bölge ve $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ ($L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} |$ her $V \subset\subset \Omega$ için $u \in L^1(V)\}$), α multiindex olmak üzere eğer her test fonksiyonu φ için*

$$\int\limits_{\Omega} uD^\alpha\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa v'ye u'nun $|\alpha|$. zayıf kısmi türevi denir ($D^\alpha u = v$).

Lemma 2.38 (Genel Hölder Eşitsizliği) *([8]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bir bölge ve $1 \le p_1, ..., p_m \le \infty$, $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ olsun. $u_k \in L_{p_k}(\Omega)$, $k = 1, ..., m$ ise*

$$\int\limits_{\Omega} |u_1...u_m|\, dx \le \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L_{p_k}(\Omega)}$$

olur.

Lemma 2.39 (Young Eşitsizliği) *([8]) Her $a, b > 0$ için*

$$ab \le \varepsilon a^p + c(\varepsilon)b^q$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$ ve $c(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}}\, q^{-1}$ dir.

Lemma 2.40 (Kısmi İntegrasyon Formülü) *([8])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı, açık ve* $\partial\Omega$ *sınırı* C^1*'den olsun,* ν_i *sınırın birim normal vektörünün* ($\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$) *i. bileşeni olmak üzere* $u,\ v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *olsun. O zaman;*

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_i} v dx = -\int\limits_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u v \nu_i dS,$$

dir, $(i = 1...n)$.

Lemma 2.41 (Green Formülü) *([8])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı, açık ve* $\partial\Omega$ *sınırı* C^1*'den olsun.* $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, ν $\partial\Omega$*'nın dış birim normali olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır.*

(i) $\int\limits_{\Omega} \Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$

(ii) $\int\limits_{\Omega} Dv.Du dx = -\int\limits_{\Omega} u \Delta v dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS$

(iii) $\int\limits_{\Omega} \left(u\Delta v - v\Delta u\right) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS$

Lemma 2.42 *([2]) Eğer* $1 \leq p < \infty$ *ve* $a \geq 0,\ b \geq 0$ *ise o zaman*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 2.43 *([13])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ *sınırlı bölge* $p > 1,\ q > 1$ *olmak üzere*

$$f : L_p(\Omega) \longrightarrow L_q(\Omega)$$

sınırlı bir dönüşüm ve

$$f(x, .) : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca $\{u_m\} \subset L_p(\Omega)$ *ve* $u_0 \in L_p(\Omega)$ *için*

$$u_m \rightharpoonup u_0$$

ve

$$u_m \xrightarrow[\Omega]{hhy} u_0$$

olsun. O zaman $\exists \{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ *vardır ki*

$$f(x, u_{m_k}) \rightharpoonup f(x, u_0)$$

sağlanır.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırı yeterince düzgün sınırlı bölge olmak üzere, çalışmamızda kullandığımız c_1 , c_2 , c_3 , c_4 katsayıları aşağıdaki eşitsizliklerden gelmektedir.

1. Tanım 2.20 ve Teorem 2.22'den çıkar ki $n = 2$ iken $1 < p_0 < \infty$ ve $n \geq 3$ iken $p_0 := \frac{2n}{n-2}$ için öyle bir c_1 sayısı vardır ki

$$\|u\|_{L_{p_0}(\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.1}$$

sağlanır. Daha sonra, $(p_0)'$ olarak işaret edeceğimiz sayı $n = 2$ için $1 < (p_0)' < \infty$ ve $n \geq 3$ için $(p_0)' := \frac{2n}{n+2}$ olarak alınacaktır.

2. Tanım 2.20 ve Teorem 2.26'dan çıkar ki $n = 2$ iken $1 \leq p^* < \infty$ ve $n \geq 3$ iken $p^* := \frac{2(n-1)}{n-2}$ için öyle bir c_2 sayısı vardır ki

$$\|u\|_{L_{p^*}(\partial\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.2}$$

sağlanır.

3. Teorem 2.32'den çıkar ki öyle bir c_3 sayısı vardır ki

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq c_3 \left(\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \right) \tag{2.3}$$

sağlanır.

4. Teorem 2.25'teki ilk eşitsizlikten çıkar ki öyle c_4 sayısı vardır ki

$$\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c_4 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.4}$$

sağlanır.

3 İKİNCİ MERTEBEDEN YARI DOĞRUSAL ELİPTİK KISMİ DİFERANSİYEL BİR SINIF DENKLEM İÇİN KONULMUŞ 3.SINIF SINIR PROBLEMİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sınırı yeterince düzgün sınırlı bölge olmak üzere, aşağıdaki problemin uygun uzaylarda çözümünün varlığı incelenecektir.

$$Lu + g(x,u) = h(x),\ x \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x')u\right)\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x'),\ x' \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

Burada, genel olarak $q > 1$ olmak üzere $h \in (W_2^1(\Omega))^* + L_q(\Omega)$ ve $\varphi \in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ alınacaktır.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(1) Keyfi $x \in \overline{\Omega}$ için $a_{ij}(x) \in L_\infty(\Omega)$'dır, $a_{ij}(x)|_{\partial\Omega}$ tanımlıdır ve $a_{ij}(x)|_{\partial\Omega} \in L_\infty(\partial\Omega)$'dır, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ $(i,j = 1,...,n)$ sağlanır ve öyle $\theta > 0$ vardır ki $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta\,|\xi|^2$$

olmak üzere L diferansiyel formu düzgün eliptiktir.

(2) $g(x,\tau)$, $\Omega \times \mathbb{R}^1$de Caratheodary fonksiyonu olmak üzere öyle $\alpha \geq 0$ sayısı ve $\widetilde{c_0} \in L_{q_1}(\Omega)$, $\widetilde{c_1} \in L_{q_2}(\Omega)$ fonksiyonları vardır ki $\forall x \in \Omega$ için

$$\widetilde{c_0}(x), \widetilde{c_1}(x) \geq 0$$

ve

$$|g(x,\tau)| \leq \widetilde{c_0}(x)\,|\tau|^\alpha + \widetilde{c_1}(x)$$

sağlanır.

Burada, $q_1, q_2 \geq 1$ sayıları α'ya bağlı olarak daha sonra gerekli olduğu şekilde tanımlanacaktır.

(3) $a \in L_{s_1}(\partial\Omega)$ öyle ki $s_1 := \begin{cases} > 1,\ n = 2\ iken \\ n-1\ ,\ n \geq 3\ iken \end{cases}$ dir.

Gözönüne alınan problemin çözümü aşağıdaki formda anlaşılacaktır.

Tanım 3.1 *$u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ fonksiyonu, keyfi $v \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ için,*

$$\int\limits_{\Omega} (Lu + g(x,u))\, v dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x')u \right) v dx' = \int\limits_{\Omega} hv dx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi v dx' \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlarsa, u fonksiyonuna (1.1), (1.2) probleminin genelleşmiş çözümü denir.

Daha sonra, L diferansiyel formu ve g operatörü üzerine elde edilecek koşullar altında (3.1) eşitliğinin sol tarafı anlamlı olacaktır.

L diferansiyel formu, 2. mertebeden eliptik operatör yarattığından uygun koşullar altında

$$L : W_2^1(\Omega) \longrightarrow \left(W_2^1(\Omega) \right)^*$$

tanımlanabilir.

Doğrusal olmayan g operatörünün bilinmeyen fonksiyonuna bağlılığı, (2) koşulundan görüldüğü gibi, bir fonksiyon olarak $g(x,\tau)$ fonksiyonunun τ'ya bağlılığı gibidir. Dolayısıyla, τ'ya bağlı sonsuza gitme hızı en fazla α. mertebeden olabilir.

O halde, L ve g operatörlerinin yarattığı (1.1), (1.2) probleminin incelenmesi, $W_2^1(\Omega)$ ve $L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayları arasındaki bağlantılara göre farklılık gösterir.

(1.1), (1.2) problemini $n = 2$ ve $n \geq 3$ olduğunda farklı koşullar altında inceleyeceğimizden bu durumları ayrı gözönüne alacağız. $n \geq 3$ iken problemi doğrusal olmayan g dönüşümünün bilinmeyen fonksiyonuna bağlılık mertebesinden dolayı kritik altı, kritik ve kritik üstü durumlarından oluşan bölümlerde inceleyeceğiz. Dolayısıyla, bu bölümler α'nın kritik altı, kritik ve kritik üstü durumlarına bağlı oluşmaktadır. O halde, kritik altı ve kritik durumları beraber inceleyebildiğimiz için 2 durum ortaya çıkıyor.

1 Kritik Altı ve Kritik Durum

$$0 \leq \alpha < \frac{n+2}{n-2} \qquad ve \qquad \alpha = \frac{n+2}{n-2}$$

2 Kritik Üstü Durum

$$\alpha > \frac{n+2}{n-2}$$

3.1 KRİTİK ALTI VE KRİTİK DURUMDA (1.1), (1.2) PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

Bu bölümde, $n = 2$ durumu ve $n \geq 3$ iken kritik altı durum $(0 \leq \alpha < \frac{n+2}{n-2})$ ve kritik durum $(\alpha = \frac{n+2}{n-2})$ gözönüne alınacaktır. $n = 2$ iken $0 \leq \alpha < \infty$ için (1.1), (1.2) problemini kritik altı durum gibi inceleyebildiğimizden $n = 2$ durumunu bu bölümde gözönüne alacağız.

Bu bölümde, kritik altı ve kritik durum incelendiğinden $W_2^1(\Omega) \subset L_{\alpha+1}(\Omega)$ kapsaması sağlanır. Dolayısıyla, (1.1), (1.2) probleminin çözümü olarak, (3.1) eşitliğini keyfi $v \in W_2^1(\Omega)$ için sağlayan $u \in W_2^1(\Omega)$ fonksiyonu anlaşılacaktır.

Aşağıdaki koşulları kabul edelim.

(2′) (2) koşulu sağlansın öyle ki q_1 ve q_2 sayıları, $q_0 := (p_0)'$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın.

$n = 2$ iken

$$q_1 > 1,\ q_2 := q_0 > 1$$

$n \geq 3$ iken

$$q_1 := \begin{cases} \frac{p_0 q_0}{p_0 - \alpha q_0},\ 0 \leq \alpha < \frac{n+2}{n-2} \\ \infty \qquad ,\alpha = \frac{n+2}{n-2} \end{cases},\ q_2 := q_0$$

(i) a_{ij} ve b_i öyle fonksiyonlardır ki $s := \begin{cases} > 2,\ n = 2\ iken \\ n\ ,\ n \geq 3\ iken \end{cases}$ olmak üzere $D_i(a_{ij}),\ b_i \in L_s(\Omega), (i, j = 1, ..., n)$.

Bu fonksiyonlar için,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|D_i(a_{ij}) + b_i\|_{L_s(\Omega)} \equiv \sigma_1$$

tanımlayalım.

(ii) c ve a fonksiyonları, $c \in L_{\frac{s}{2}}(\Omega)$ ve $a \in L_{s_1}(\partial\Omega)$ olmak üzere aşağıdaki bağlantılardan birini sağlasın.

(a) Keyfi $x \in \Omega$ için $c(x) \geq \widetilde{c} > 0$ olacak şekilde $\widetilde{c}$ sayısı vardır ki $\theta_1 := \min\left\{\theta, \widetilde{c}\right\}$ olmak üzere (i)'de tanımlanan σ_1 sayısı

$$\sigma_1 < \frac{\theta_1}{c_1}$$

olsun. (c_1, (2.1) eşitsizliğindeki katsayıdır.) Bu durumda a fonksiyonu aşağıdakilerden birini sağlasın.

(a$_1$) Keyfi $x' \in \partial\Omega$ için $a(x') \geq 0$

(a$_2$) $\|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)} < \frac{\theta_1 - \sigma_1 c_1}{c_2^2}$ (c_2, (2.2) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

(b) Keyfi $x' \in \partial\Omega$ için $a(x') \geq a_0 > 0$ olacak şekilde a_0 sayısı vardır ki $\theta_1^{'} := \min\{\theta, a_0\}$ olmak üzere (i)'de tanımlanan σ_1 sayısı

$$\sigma_1 < \frac{\theta_1^{'} c_3}{c_1}$$

olsun. (c_1, (2.1) eşitsizliğindeki ve c_3, (2.3) eşitsizliğindeki katsayılardır.) Bu durumda c fonksiyonu aşağıdakilerden birini sağlasın.

(b$_1$) Keyfi $x \in \Omega$ için $c(x) \geq 0$

(b$_2$) $\|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)} < \frac{\theta_1^{'} c_3 - \sigma_1 c_1}{c_1^2}$

(iii) g dönüşümü $W_2^1(\Omega)$'dan $(W_2^1(\Omega))^*$'a tanımlı olmak üzere öyle $0 < k_0 < \sigma_0$ ve $k_1 \in \mathbb{R}$ sayıları vardır ki keyfi $u \in W_2^1(\Omega)$ için

$$\langle g(x,u), u \rangle \geq -k_0 \|u\|^2_{L_{p_0}(\Omega)} - k_1$$

eşitsizliğini sağlasın. Buradaki σ_0 sayısı aşağıdaki gibi tanımlansın.

(ii)(a) koşulu sağlanırsa

$$\sigma_0 = \begin{cases} \frac{\theta_1 - \sigma_1 c_1}{c_1^2}, & (a_1) \ durumunda \\ \frac{\theta_1 - \sigma_1 c_1 - c_2^2 \|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)}}{c_1^2}, & (a_2) \ durumunda \end{cases}$$

şeklinde; (ii)(b) koşulu sağlanırsa

$$\sigma_0 = \begin{cases} \frac{\theta_1^{'} c_3 - \sigma_1 c_1}{c_2^2}, & (b_1) \ durumunda \\ \frac{\theta_1^{'} c_3 - \sigma_1 c_1}{c_1^2} - \|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)}, & (b_2) \ durumunda \end{cases}$$

şeklindedir.

Kaydedelim ki (1),(2$'$),(3) ve (i)-(iii) koşulları altında tanımdaki (3.1) eşitliğinin sol kısmındaki integraller her $u, v \in W_2^1(\Omega)$ için anlamlıdır.

Teorem 3.2 *(1),(2$'$),(3),(i)-(iii) koşulları sağlansın öyle ki (2$'$) koşulundaki α sayısı $n = 2$ iken $0 \leq \alpha < \infty$ ve $n \geq 3$ iken $0 \leq \alpha \leq \frac{n+2}{n-2}$ olsun.*

O zaman her $h \in (W_2^1(\Omega))^*$ ve her $\varphi \in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için (1.1), (1.2) probleminin $W_2^1(\Omega)$ uzayında genelleşmiş çözümü vardır.

İspat. Bu teoremin ispatı için Teorem 2.34 kullanılacak. Teorem 2.34'ü uygulamak için gözönüne alınan problemin, teoremin koşullarını sağladığını göstermeliyiz. Bunun için önce (1.1), (1.2) probleminin yarattığı dönüşümleri ve uygun uzayları tanımlayalım.

$$S_0 \equiv X_0 \equiv W_2^1(\Omega) \equiv X, \quad Y_0 \equiv \; Y \equiv (W_2^1(\Omega))^* \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

$$Y_0^* \equiv Y^* \equiv X$$

$$f_1(u) := Lu + g(x,u), \;\; f_2(u) := \frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x')\,u$$

olmak üzere

$$f : \{\; f_1, \;\; f_2\} : S_0 \longrightarrow Y \tag{3.2}$$

ve

$$\Psi_1 \equiv \Psi_2 \equiv Id$$

olmak üzere

$$\Psi : \{\; \Psi_1, \Psi_2\} : X \longrightarrow X \tag{3.3}$$

olsun.

$S_0 \equiv W_2^1(\Omega)$ Sobolev uzayı olduğundan ayrılabilir Hilbert uzayıdır. Dolayısıyla, S_0 ayrılabilir, refleksif Banach uzayı olduğundan Teorem 2.34'ün koşulunu sağlar. ■

Teoremin ispatına devam etmek için tanımladığımız dönüşümlerin de Teorem 2.34'ün koşullarını sağladığını göstermemiz gerekiyor. Bunun için gerekli olan ilave bilgileri ispatlarıyla beraber verelim. Teorem 3.2'nin ispatına daha sonra devam edeceğiz.

Lemma 3.3 *(3.2)'de tanımlanan* $f : \{\; f_1, \;\; f_2\} : W_2^1(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega))^* \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *dönüşümü Teorem 3.2'nin koşulları altında zayıf süreklidir.*

İspat. f'in $W_2^1(\Omega)$'dan $(W_2^1(\Omega))^* \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$'ya zayıf sürekli olduğunu göstermek için f_1 ve f_2 dönüşümlerinin uygun uzaylarda zayıf sürekli olduğunu gösterelim.

Önce $f_1 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega))^*$ dönüşümüne bakalım.

L, doğrusal operatör olduğundan zayıf sürekliliğini göstermek için uygun uzayda sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $(W_2^1(\Omega))^*$'daki norm tanımından kullanarak normun sınırlılığını gösterelim.

$u, v \in W_2^1(\Omega)$ alalım.

$$\|Lu\|_{(W_2^1(\Omega))^*} \equiv \sup_{\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \le 1} |\langle Lu, v\rangle| \tag{*}$$

olmak üzere bu eşitliğin sağ kısmını üstten değerlendireceğiz. Aşağıdaki forma bakalım.

$$|\langle Lu, v\rangle| = \left|\int\limits_{\Omega} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u \ v dx + \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u \ v dx + \int\limits_{\Omega} c(x) u v dx\right|$$

Bu eşitlikteki ilk terim için

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u = \sum_{i,j=1}^{n} D_i\left(a_{ij}(x) D_j u\right) - \sum_{i,j=1}^{n} D_i\left(a_{ij}(x)\right) D_j u$$

eşitliğini gözönüne alırsak

$$|\langle Lu, v\rangle| = \left|\int\limits_{\Omega} -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x) D_j u) v dx + \int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} (D_i(a_{ij}) + b_i) D_i u \ v dx + \int\limits_{\Omega} c(x) u v dx\right| \tag{3.4}$$

elde edilir.

(3.4)'teki ilk terimde önce kısmi integrasyon uygulayalım.

$$\left|\int\limits_{\Omega} -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x) D_j u) v dx\right| \leq \left|\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_j u D_i v dx\right| + \left|\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_j u \ \nu_i \ v dx'\right| \tag{3.5}$$

(3.5)'teki ilk terimde uygun Hölder eşitsizliği kullandıktan sonra aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_j u D_i v dx\right| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)} \|D_j u\|_{L_2(\Omega)} \|D_i v\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)} \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.5)'teki ikinci terimde Tanım 2.4'ten ve (2.4) eşitsizliğinden kullanırsak aşağıdaki değerlendirme alınır.

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_j u \ \nu_i v dx'\right| &\leq \int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}(x) D_j u \ v\right| dx' \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)} \|D_j u\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)} \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ &\leq c_4^2 \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)} \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.6) ve (3.7)'yi, (3.5)'te gözönüne alırsak

$$\left|\int_{\Omega}-\sum_{i,j=1}^{n}D_i(a_{ij}(x)D_ju)vdx\right|\leq\left(\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)}+c_4^2\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)}\right)\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.8}$$

elde edilir.

(3.4)'teki ikinci terimde uygun Hölder eşitsizliğini, (i)'deki gösterimi ve (2.1) eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(D_i(a_{ij})+b_i)D_iu\ vdx\right| &\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|D_i(a_{ij})+b_i\|_{L_s(\Omega)}\|D_iu\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_{p_0}(\Omega)}\\ &\leq\sigma_1c_1\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir.

(3.4)'teki son terimde (ii) koşulunu, uygun Hölder eşitsizliğini ve (2.1) eşitsizliğini kullanalım.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega}c(x)uvdx\right| &\leq\|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)}\|u\|_{L_{p_0}(\Omega)}\|v\|_{L_{p_0}(\Omega)}\\ &\leq c_1^2\|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)}\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.10}$$

(3.8), (3.9) ve (3.10)'u, (3.4)'te gözönüne alırsak

$$|\langle Lu,v\rangle|\leq\left(\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)}+c_4^2\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)}+\sigma_1c_1+c_1^2\|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)}\right)\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik,

$$\gamma_1\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\right):=\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)}+c_4^2\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)}+\sigma_1c_1+c_1^2\|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)}\right)$$

olmak üzere

$$|\langle Lu,v\rangle|\leq\gamma_1\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\right)\|v\|_{W_2^1(\Omega)}$$

şeklinde yazılır. Bu eşitsizlik her $u,v\in W_2^1(\Omega)$ için geçerli olduğundan $\|v\|_{W_2^1(\Omega)}\leq 1$ üzerinde supremum için de geçerlidir. $\|v\|_{W_2^1(\Omega)}\leq 1$ olmak üzere supremuma geçersek (*)'a göre

$$\|Lu\|_{\left(W_2^1(\Omega)\right)^*}\leq\gamma_1\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\right)$$

elde edilir. $\gamma_1(.):\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ sürekli, doğrusal, monoton artan fonksiyon olduğundan $\forall u\in B(0,r)\subset W_2^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\leq r\Longrightarrow\gamma_1\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\right)\leq\gamma_1(r)$$

olur ve

$$\|Lu\|_{\left(W_2^1(\Omega)\right)^*} \le \gamma_1(r)$$

bulunur. Böylece L, $W_2^1(\Omega)$'dan $(W_2^1(\Omega))^*$'ya sınırlı dönüşümdür. O halde L doğrusal sınırlı olduğundan doğrusal süreklidir (Teorem 2.17'den), dolayısıyla zayıf süreklidir (Teorem 2.18'den).

g'nin $W_2^1(\Omega)$'dan $(W_2^1(\Omega))^*$'a zayıf sürekli olduğunu göstermek için $W_2^1(\Omega)$'dan olan $\{u_m\}$ dizisi $u_m \underset{W_2^1(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$ olduğunda $g(x,u_{m_k}) \underset{\left(W_2^1(\Omega)\right)^*}{\rightharpoonup} g(x,u_0)$ olacak şekilde $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ altdizisi bulmak yeterlidir. Bunun için Lemma 2.43'ü kullanacağız. O halde Lemma 2.43'ün koşullarının sağlandığını gösterelim.

(2') koşulundaki kabullerden kullanarak g'nin $L_{p_0}(\Omega)$'dan $L_{q_0}(\Omega)$'ya sınırlı dönüşüm olduğunu ve $g(x,u_{m_k}) \underset{L_{q_0}(\Omega)}{\rightharpoonup} g(x,u_0)$ olacak şekilde $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ altdizisi bulunduğunu göstereceğiz.

1. g'nin $L_{p_0}(\Omega)$'dan $L_{q_0}(\Omega)$'ya sınırlı dönüşüm olduğunu önce $n \ge 3$ için göstereceğiz. Buradan elde edeceğimiz değerlendirmeden $n = 2$ için de sınırlı olduğu açıkça görülecektir. $(2')$ koşulunu gözönüne alırsak aşağıdaki değerlendirmeyi alırız.

$$\int_\Omega |g(x,u)|^{q_0}\,dx \le 2^{q_0}\left(\int_\Omega \left|\,\widetilde{c}_0\,\right|^{q_0} |u|^{\alpha q_0}\,dx + \int_\Omega \left|\,\widetilde{c}_1\,\right|^{q_0}\,dx\right)$$

Burada uygun Hölder eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_\Omega |g(x,u)|^{q_0}\,dx \le 2^{q_0}\left(\left\|\widetilde{c}_0\right\|^{q_0}_{L_{q_1}(\Omega)} \|u\|^{\alpha q_0}_{L_{p_0}(\Omega)} + \left\|\widetilde{c}_1\right\|^{q_0}_{L_{q_0}(\Omega)}\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik

$$\gamma_2\left(\|u\|_{L_{p_0}(\Omega)}\right) := 2\left(\left\|\widetilde{c}_0\right\|^{q_0}_{L_{q_1}(\Omega)} \|u\|^{\alpha q_0}_{L_{p_0}(\Omega)} + \left\|\widetilde{c}_1\right\|^{q_0}_{L_{q_0}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{q_0}}$$

olmak üzere

$$\|g(x,u)\|_{L_{q_0}(\Omega)} \le \gamma_2\left(\|u\|_{L_{p_0}(\Omega)}\right)$$

şeklinde yazılır. $\gamma_2(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli, monoton artan fonksiyon olduğundan $\forall u \in B(0,r) \subset L_{p_0}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L_{p_0}(\Omega)} \le r \Longrightarrow \gamma_2\left(\|u\|_{L_{p_0}(\Omega)}\right) \le \gamma_2(r)$$

olur. Buradan

$$\|g(x,u)\|_{L_{q_0}(\Omega)} \le \gamma_2(r)$$

bulunur. Böylece

$$g : L_{p_0}(\Omega) \longrightarrow L_{q_0}(\Omega) \text{ sınırlı dönüşümdür.} \tag{3.11}$$

2. g Caratheodary fonksiyonu olduğundan hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$g(x,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ süreklidir.} \tag{3.12}$$

3. $\{u_m\} \subset W_2^1(\Omega)$ zayıf yakınsak ve $W_2^1(\Omega) \subset L_{p_0}(\Omega)$ olduğundan

$$u_m \underset{L_{p_0}(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0 \tag{3.13}$$

Ayrıca, $1 \leq p^{\prime} < p_0$ için $W_2^1(\Omega) \subset L_{p^{\prime}}(\Omega)$ kompakt gömüldüğünden ve $\{u_m\} \subset W_2^1(\Omega)$ zayıf yakınsak olduğundan $\exists \{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ vardır ki $u_{m_k} \underset{L_{p^{\prime}}(\Omega)}{\longrightarrow} u_0$.(Tanım 2.21)

$L_{p^{\prime}}(\Omega)$'de güçlü yakınsama Ω'da hemen hemen her yerde yakınsamayı gerektirdiğinden $\exists \left\{u_{m_{k_j}}\right\} \subset \{u_{m_k}\}$ vardır ki (Önerme 2.13 ve Teorem 2.14'ten)

$$u_{m_{k_j}} \underset{\Omega}{\longrightarrow} u_0 \ hhy \tag{3.14}$$

Dolayısıyla, (3.11), (3.12), (3.13) ve (3.14)'ten $g : W_2^1(\Omega) \subset L_{p_0}(\Omega) \longrightarrow L_{q_0}(\Omega)$ dönüşümünün Lemma 2.43'ün koşullarını sağladığı görülür. O halde Lemma 2.43'ten

$$g(x, u_{m_k}) \underset{L_{q_0}(\Omega)}{\rightharpoonup} g(x, u_0)$$

elde edilir. Burada $L_{q_0}(\Omega) \subset (W_2^1(\Omega))^*$ olduğunu gözönüne alırsak

$$g(x, u_{m_k}) \underset{\left(W_2^1(\Omega)\right)^*}{\rightharpoonup} g(x, u_0)$$

elde edilir.

Böylece L ve g'nin zayıf sürekliliğinden $f_1 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega))^*$ zayıf sürekli olduğu elde edilir.

Şimdi $f_2 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ zayıf sürekliliğini gösterelim.

f_2 doğrusal dönüşüm olduğundan uygun uzayda sınırlı olduğunu göstermek yeterli olacak. Bunun için $u \in W_2^1(\Omega)$ ise $u|_{\partial\Omega} \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ olduğundan $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ uzayındaki norm tanımından kullanarak normun sınırlılığını gösterelim. $u, v \in W_2^1(\Omega)$ alalım.

$$\|f_2(u)\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \equiv \sup_{\|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq 1} |\langle f_2(u), v\rangle| \tag{**}$$

olmak üzere (**) eşitliğinin sağ kısmını üstten değerlendireceğiz.

$$\left|\langle f_2(u), v\rangle\right| = \left|\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dx' + \int\limits_{\partial\Omega} a(x') u v dx'\right|$$

$$= \left|\int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_j u \ \nu_i \ v dx' + \int\limits_{\partial\Omega} a(x') u v dx'\right| \tag{3.15}$$

eşitliğindeki ilk terim için aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_j u \ \nu_i \ v dx'\right| \leq \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij} D_j u \ v\right| dx'$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)} \|D_j u\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty \ (\partial\Omega)} \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{3.16}$$

(3.15)'teki ikinci terim için uygun Hölder eşitsizliğini ve (2.2) eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega} a(x') u v dx'\right| \leq \|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)} \|u\|_{L_{p^*}(\partial\Omega)} \|v\|_{L_{p^*}(\partial\Omega)}$$

$$\leq c_2^2 \|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)} \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{3.17}$$

elde edilir.

(3.16) ve (3.17)'yi (3.15)'te gözönüne alırsak

$$\left|\langle f_2(u), v\rangle\right| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty \ (\partial\Omega)} + c_2^2 \|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)}\right) \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik

$$\gamma_3\left(\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right) := \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty \ (\partial\Omega)} + c_2^2 \|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)}\right) \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

olmak üzere

$$\left|\langle f_2(u), v\rangle\right| \leq \gamma_3\left(\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right) \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

şeklinde yazılır. Bu eşitsizlik her $u, v \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için geçerli olduğundan $\|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq 1$ üzerinde supremum için de geçerlidir. O halde (**) göre

$$\|f_2(u)\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq \gamma_3\left(\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right)$$

elde edilir. $\gamma_3(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli, doğrusal, monoton artan fonksiyon olduğundan $\forall u \in B(0,r) \subset W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için

$$\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq r \Longrightarrow \gamma_3\left(\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right) \leq \gamma_3(r)$$

olur ve

$$\|f_2(u)\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq \gamma_3(r)$$

bulunur. Böylece, $f_2 : W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ sınırlı dönüşümdür. f_2 doğrusal sınırlı olduğundan doğrusal sürekli (Teorem 2.17), dolayısıyla zayıf süreklidir (Teorem 2.18).

f_1 ve f_2'nin uygun uzaylarda zayıf sürekli olmasından f'in $W_2^1(\Omega)$'dan $(W_2^1(\Omega))^* \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$'ya zayıf sürekli olduğu ispatlandı. ■

Lemma 3.4 *(3.2)'de tanımlanan f dönüşümü ve (3.3)'te tanımlanan Ψ dönüşümü Teorem 3.2'nın koşulları altında $W_2^1(\Omega)$ uzayında coercive ikili oluşturur.*

İspat. Ψ dönüşümü birim dönüşüm olarak tanımlandığından *coercive* ikililik adi anlamda *coercive*liğe denktir. f dönüşümünün *coercive* olduğunu göstermek için $u \in W_2^1(\Omega)$ olmak üzere aşağıdaki dual forma bakalım.

$$\langle f(u), u\rangle = \int_\Omega -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u \; u dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u \; u dx + \int_\Omega c(x) u^2 dx$$
$$+ \int_\Omega g(x,u) u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dx' + \int_{\partial\Omega} a(x') u^2 dx' \qquad (3.18)$$

(3.18)'deki ilk terimde

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x) D_j u) - \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x)) D_j u$$

eşitliğini gözönüne alıp daha sonra kısmi integrasyondan kullanırsak, sınır koşullarını gözönüne alıp gerekli sadeleştirmeleri yaparsak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\langle f(u), u\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u D_i u dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u \; \nu_i \; u dx' + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x)) D_j u \; u dx$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u \; u dx + \int_\Omega c(x) u^2 dx + \int_\Omega g(x,u) u dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u \; \nu_i \; u dx' + \int_{\partial\Omega} a(x') u^2 dx'$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u D_i u dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x) + b_i(x)) D_i u \; u dx + \int_\Omega c(x) u^2 dx$$

$$+\int_{\Omega} g(x,u)udx+\int_{\partial\Omega} a(x')u^2dx' \tag{3.19}$$

Bu eşitlikteki her terimi ayrı ayrı değerlendireceğiz.

(3.19)'daki ilk terimde koşul (1)'i gözönüne alalım.

$$\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_juD_iudx \geq \theta\left\|Du\right\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.20}$$

(3.19)'daki ikinci terim için önce uygun Hölder eşitsizliğini, sonra (i)'deki gösterimi ve (2.1) eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)+b_i(x))D_iu\ udx \geq -\sum_{i,j=1}^{n}\left\|D_i(a_{ij}(x)+b_i(x))\right\|_{L_s(\Omega)}\left\|D_iu\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|u\right\|_{L_{p_0}(\Omega)}$$

$$\geq -\sigma_1\left\|u\right\|_{W_2^1(\Omega)}\left\|u\right\|_{L_{p_0}(\Omega)} \geq -\sigma_1\, c_1\left\|u\right\|^2_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.21}$$

elde edilir.

(3.19)'daki dördüncü terim için (iii) koşulunu ve (2.1) eşitsizliğini kullanalım.

$$\int_{\Omega} g(x,u)udx \geq -k_0\left\|u\right\|^2_{L_{p_0}(\Omega)}-k_1\ \geq -k_0c_1^2\ \left\|u\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}-k_1 \tag{3.22}$$

(3.20), (3.21) ve (3.22)'yi, (3.19)'da gözönüne alırsak

$$\left\langle f\left(u\right),u\right\rangle \geq \theta\left\|Du\right\|^2_{L_2(\Omega)}-\sigma_1\, c_1\left\|u\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\int_{\Omega} c(x)u^2dx-k_0\, c_1^2\left\|u\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}-k_1+\int_{\partial\Omega} a(x')u^2dx' \tag{3.23}$$

elde ederiz.

Bu adımdan sonra (ii) koşulundaki (a) ve (b) durumları için *coercive*liği ayrı ayrı göstereceğiz.

Durum 1. Bu durumda (ii)(a) koşulunun sağlandığını kabul edelim. (3.23)'teki üçüncü terim için kabulümüzü kullanalım.

$$\int_{\Omega} c(x)u^2dx \geq \widetilde{c}\int_{\Omega} u^2dx=\widetilde{c}\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.24}$$

(ii)(a) koşulundaki (a_1) ve (a_2) durumları için ayrı ayrı *coercive*liği gösterelim.

Önce (a_1) durumuna bakalım.

(3.24) ve (a_1) durumunu (3.23)'te gözönüne alalım.

$$\left\langle f\left(u\right),u\right\rangle \geq \theta\left\|Du\right\|^2_{L_2(\Omega)}-\sigma_1\, c_1\ \left\|u\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\widetilde{c}\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)}-k_0c_1^2\ \left\|u\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}-k_1$$

Burada $\theta_1 := \min\left\{\theta, \widetilde{c}\right\}$ gözönüne alırsak

$$\langle f(u), u\rangle \geq \left(\theta_1 - \sigma_1 c_1 - k_0 c_1^2\right) \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - k_1$$

elde ederiz.

(iii) koşulunda kabul ettiğimiz k_0 üzerindeki değerlendirmeden $\theta_1 - \sigma_1 c_1 - k_0 c_1^2 > 0$ olduğu görülür.

Şimdi (a_2) durumuna bakalım.

(3.23)'teki son terim için uygun Hölder eşitsizliğini ve (2.2) eşitsizliğini kullanırsak

$$\int\limits_{\partial\Omega} a(x')u^2 dx' \geq -\|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{L_{p^*}(\partial\Omega)} \geq -c_2^2 \|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \qquad (3.25)$$

elde edilir.

(3.24) ve (3.25)'i (3.23)'te gözönüne alırsak

$$\langle f(u), u\rangle \geq \theta \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} - \sigma_1 c_1 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \widetilde{c} \|u\|^2_{L_2(\Omega)} - k_0 c_1^2 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

$$-k_1 - c_2^2 \|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

elde edilir. Burada $\theta_1 := \min\left\{\theta, \widetilde{c}\right\}$ gözönüne alırsak

$$\langle f(u), u\rangle \geq \left(\theta_1 - \sigma_1 c_1 - k_0 c_1^2 - c_2^2 \|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)}\right) \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - k_1$$

elde edilir.

(iii) koşulunda kabul ettiğimiz k_0 üzerindeki değerlendirmeden $\theta_1 - \sigma_1 c_1 - k_0 c_1^2 - c_2^2 \|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)} > 0$ olduğu görülür. O halde (a_1) ve (a_2) durumlarında

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \nearrow \infty$$

olur.

Dolayısıyla, (ii)(a) koşulu sağlandığında f dönüşümünün $W_2^1(\Omega)$'da *coercive* olduğunu gösterdik.

Durum 2. Bu durumda (ii)(b) koşulunun sağlandığını kabul edelim.

(3.23)'teki son terim için kabulümüzü kullanalım.

$$\int\limits_{\partial\Omega} a(x')u^2 dx' \geq a_0 \int\limits_{\partial\Omega} u^2 dx' = a_0 \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \qquad (3.26)$$

(ii)(b) koşulundaki (b_1) ve (b_2) durumları için ayrı ayrı *coercive*liği gösterelim.

Önce (b_1) durumuna bakalım.

(3.26) ve (b_1)'i (3.23)'te gözönüne alalım.

$$\langle f(u), u\rangle \geq \theta \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} - \sigma_1 c_1 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - k_0 c_1^2 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - k_1 + a_0 \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

Burada $\theta_1^{\shortmid} := \min\{\theta, a_0\}$ gözönüne alır ve (2.3) eşitsizliğini kullanırsak

$$\langle f(u), u\rangle \geq \left(\theta_1^{\shortmid} c_3 - \sigma_1 c_1 - k_0 c_1^2\right) \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - k_1$$

elde edilir.

(iii) koşulunda bu durum için kabul ettiğimiz k_0 üzerindeki değerlendirmeden $\theta_1^{\shortmid} c_3 - \sigma_1 c_1 - k_0 c_1^2 > 0$ olduğu görülür.

Şimdi (b_2) durumuna bakalım.

(3.23)'teki üçüncü terim için Hölder eşitsizliğini ve (2.1) eşitsizliğini kullanalım.

$$\int_\Omega c(x) u^2 dx \geq - \|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{L_{p_0}(\Omega)} \geq -c_1^2 \|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.27}$$

(3.26) ve (3.27)'yi (3.23)'te gözönüne alalım.

$$\langle f(u), u\rangle \geq \theta \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} - \sigma_1 c_1 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c_1^2 \|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$
$$-k_0 c_1^2 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - k_1 + a_0 \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

Burada $\theta_1^{\shortmid} := \min\{\theta, a_0\}$ gözönüne alır ve (2.3) eşitsizliğini kullanırsak

$$\langle f(u), u\rangle \geq \left(\theta_1^{\shortmid} c_3 - \sigma_1 c_1 - c_1^2 \|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)} - k_0 c_1^2\right) \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - k_1$$

elde edilir.

(iii) koşulunda bu durum için kabul ettiğimiz k_0 üzerindeki değerlendirmeden $\theta_1^{\shortmid} c_3 - \sigma_1 c_1 - c_1^2 \|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)} - k_0 c_1^2 > 0$ olduğu görülür. O halde (b_1) ve (b_2) durumlarında

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \nearrow \infty$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla, (ii)(b) koşulu sağlandığında f dönüşümünün $W_2^1(\Omega)$'da *coercive* olduğunu gösterdik.

Böylece, her iki durumda da f'in $W_2^1(\Omega)$'da *coercive* olduğunu elde etmiş olduk. ■

Teorem 3.2'nin ispatının devamı. Lemma 3.3 ve Lemma 3.4'ten (3.2)'de tanımlanan f dönüşümünün Teorem 2.34'ün koşullarını sağladığı görülür. (3.3)'te tanımlanan Ψ dönüşümü ise birim dönüşüm olduğundan sınırlıdır ve tersi vardır. Ayrıca Ψ doğrusal olduğundan Ψ^{-1} dönüşümü zayıf süreklidir. Dolayısıyla, Ψ dönüşümü de Teorem 2.34'ün koşulunu sağlar.

O halde

$$\int\limits_{\Omega}(Lu+g(x,u))\,vdx+\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+a(x')u\right)vdx'=\int\limits_{\Omega}hvdx+\int\limits_{\partial\Omega}\varphi vdx',\ \ \forall v\in W_2^1(\Omega)$$

denkleminin

$$M=\left\{(h,\varphi)\in\left(W_2^1(\Omega)\right)^*\times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega):\sup\left\{\frac{\langle h,u\rangle+\langle\varphi,u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}}:u\in W_2^1(\Omega)\right\}<\infty\right\}$$

olmak üzere keyfi $(h,\varphi)\in M$ için $W_2^1(\Omega)$'da çözümü vardır. M kümesi böyle tanımlandığından ve

$$\|h\|_{(W_2^1(\Omega))^*}=\sup\left\{\frac{\langle h,u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}}:u\in W_2^1(\Omega)\right\}$$

$$\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}=\sup\left\{\frac{\langle\varphi,u\rangle}{\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}}:u\in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right\}$$

norm tanımlarından

$$M=\left\{(h,\varphi)\in\left(W_2^1(\Omega)\right)^*\times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega):\|h\|_{(W_2^1(\Omega))^*}+\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}<\infty\right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 2.34'ü (1.1), (1.2) problemine uygulayarak elde edilir ki Teorem 3.2'nin koşulları altında keyfi $h\in(W_2^1(\Omega))^*$ ve keyfi $\varphi\in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $(1.1),(1.2)$ probleminin $W_2^1(\Omega)$'da genelleşmiş çözümü vardır. ■

3.2 KRİTİK ÜSTÜ DURUMDA (1.1), (1.2) PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

Bu durumda, $n \geq 3$ için kritik üstü durum, yani $\alpha > \frac{n+2}{n-2}$ olduğu gözönüne alınacaktır.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(2″) (2) koşulu sağlansın öyle ki q_1 ve q_2 sayıları aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$q_1 := \infty, \; q_2 := \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

(i′) a_{ij} ve b_i öyle fonksiyonlardır ki $p := \frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1}$ olmak üzere $D_i(a_{ij}), b_i \in L_p(\Omega)$, $(i, j = 1, ..., n)$.

(ii′) g dönüşümü $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$'dan $L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$'ya tanımlı olmak üzere öyle $k_0 > 0$ ve $k_1 \in \mathbb{R}$ sayıları vardır ki keyfi $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ için

$$\langle g(x,u), u\rangle \geq k_0 \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} - k_1$$

eşitsizliğini sağlasın.

(iii′) $c \in L_{\frac{p}{2}}(\Omega)$ olsun. a fonksiyonu, $a \in L_{n-1}(\partial\Omega)$ olmak üzere aşağıdakilerden birini sağlasın.

(a′) Öyle bir $a_0 > 0$ sayısı vardır ki keyfi $x' \in \partial\Omega$ için $a(x') \geq a_0$ sağlanır.

(b′) Öyle $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki $\theta_2 \leq \min\{\theta, k_0\} - \varepsilon_0$ olmak üzere $\|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} < \frac{\theta_2}{c_2^2}$ sağlanır. (c_2, (2.2) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

Kaydedelim ki (1),(2″),(3) ve (i′)-(iii′) koşulları altında tanımdaki (3.1) eşitliğinin sol kısmındaki integraller her $u, v \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ için anlamlıdır.

Teorem 3.5 *(1),(2″),(3),(i′)-(iii′) koşulları sağlansın öyle ki (2″) koşulundaki α sayısı $\alpha > \frac{n+2}{n-2}, (n \geq 3)$ olsun.*

O zaman her $h \in (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$ ve her $\varphi \in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için, (1.1), (1.2) probleminin $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayında genelleşmiş çözümü vardır.

İspat. Bu teoremin ispatı için Teorem 2.34 kullanılacak. Teorem 2.34'ü uygulamak için gözönüne alınan problemin teoremin koşullarını sağladığını göstermeliyiz. Bunun için önce (1.1), (1.2) probleminin yarattığı dönüşümleri ve uygun uzayları tanımlayalım.

$$S_0 \equiv X_0 \equiv W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega) \equiv X$$

$$Y_0 \equiv Y \equiv \left(W_2^1(\Omega)\right)^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$$

$$Y_0^* \equiv Y^* \equiv X$$

$$f_1(u) := Lu + g(x,u), \; f_2(u) := \frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x')u$$

olmak üzere

$$f := \{f_1, \; f_2\} : S_0 \longrightarrow Y \tag{3.28}$$

ve

$$\Psi_1 \equiv \Psi_2 \equiv id$$

olmak üzere

$$\Psi := \{\Psi_1 \,, \Psi_2\} : X \longrightarrow X \tag{3.29}$$

olsun.

$W_2^1(\Omega)$ ve $L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayları ayrılabilir, refleksif, Banach uzayları olduğundan S_0 uzayı Teorem 2.34'ün koşulunu sağlar. ■

Teoremin ispatına devam etmek için tanımladığımız dönüşümlerin de Teorem 2.34'ün koşullarını sağladığını göstermemiz gerekiyor. Bunun için gerekli olan ilave bilgileri ispatlarıyla beraber verelim. Teorem 3.5'in ispatına daha sonra devam edeceğiz.

Lemma 3.6 *(3.28)'de tanımlanan $f : \{\, f_1, \; f_2\} : W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$ dönüşümü Teorem 3.5'in koşulları altında zayıf süreklidir.*

İspat. $f_1 : W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$ zayıf sürekli olduğunu göstermek için L ve g'nin uygun uzaylarda zayıf sürekliliklerini gösterelim.

L doğrusal operatörünün zayıf sürekliliğini göstermek için uygun uzayda sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

$u, v \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ alalım.

$$\|Lu\|_{\left(W_2^1(\Omega)\right)^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} \equiv \sup_{\|v\|_{W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)} \leq 1} |\langle Lu, v\rangle| \tag{***}$$

olmak üzere bu eşitliğin sağ kısmını üstten değerlendireceğiz. Aşağıdaki eşitliğe bakalım.

$$|\langle Lu, v\rangle| = \left| \int\limits_{\Omega} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u \; v dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u \; v dx + \int\limits_{\Omega} c(x) u v dx \right|$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x) D_j u) v dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (D_i(a_{ij}(x)) + b_i(x)) D_i u \; v dx + \int\limits_{\Omega} c(x) u v dx \right| \tag{3.4}$$

(3.4)'teki ilk terim için daha önce (3.8) eşitsizliğini elde etmiştik.

Şimdi (3.4)'teki ikinci terime bakalım. İkinci terimde uygun Hölder eşitsizliğini kullanırsak ve $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \|D_i(a_{ij}) + b_i\|_{L_p(\Omega)} \equiv \sigma_2$ olarak işaret edersek

$$\left| \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (D_i(a_{ij}) + b_i) D_i u \; v dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|D_i(a_{ij}) + b_i\|_{L_p(\Omega)} \|D_i u\|_{L_2\,(\Omega)} \|v\|_{L_{\alpha+1}\,(\Omega)}$$

$$\leq \sigma_2 \; \|u\|_{W_2^1\,(\Omega)} \|v\|_{L_{\alpha+1}\,(\Omega)} \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.4)'teki son terimde (iii$'$) koşulunu ve uygun Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\left| \int\limits_{\Omega} c(x) u v dx \right| \leq \|c\|_{L_{\frac{p}{2}}(\Omega)} \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \|v\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \tag{3.31}$$

alınır. (3.8), (3.30) ve (3.31)'i (3.4)'te gözönüne alır ve $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ normuyla değerlendirirsek

$$|\langle Lu, v\rangle| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)} + c_4^2 \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)} \right) \|u\|_{W_2^1\,(\Omega)} \|v\|_{W_2^1\,(\Omega)}$$

$$+\sigma_2 \; \|u\|_{W_2^1\,(\Omega)} \|v\|_{L_{\alpha+1}\,(\Omega)} + \|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \|v\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

$$\leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)} + c_4^2 \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)} + \sigma_2 \; + \|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)} \right) \|u\|_{W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik

$$\gamma_4 \left(\|u\|_{W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)} \right) := (\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)} + c_4^2 \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty(\partial\Omega)} + \sigma_2$$

$$+ \|c\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega)}) \|u\|_{W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

olmak üzere

$$|\langle Lu, v\rangle| \leq \gamma_4 \; \left(\|u\|_{W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)} \right) \|v\|_{W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

şeklinde yazılır. $\|v\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)} \leq 1$ olmak üzere supremuma geçersek (***)'a göre

$$\|Lu\|_Y \leq \gamma_4\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}\right)$$

elde edilir. $\gamma_4\,(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli, doğrusal, monoton artan fonksiyon olduğundan $\forall u \in B\,(0, r) \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}\,(\Omega)$ için

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)} \leq r \Longrightarrow \gamma_4\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}\right) \leq \gamma_4\,(r)$$

olur ve

$$\|Lu\|_{\left(W_2^1(\Omega)\right)^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} \leq \gamma_4\,(r)$$

bulunur.

Böylece L, $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}\,(\Omega)$'dan $\left(W_2^1(\Omega)\right)^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$'ya sınırlı dönüşümdür. O halde, L doğrusal sınırlı olduğundan doğrusal süreklidir (Teorem 2.17'den); dolayısıyla zayıf süreklidir (Teorem 2.18'den).

g'nin $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}\,(\Omega)$'dan $\left(W_2^1(\Omega)\right)^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$'ya zayıf sürekli olduğunu göstermek için $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}\,(\Omega)$'dan olan $\{u_m\}$ dizisi $u_m \underset{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$ olduğunda $g(x, u_{m_k}) \underset{\left(W_2^1(\Omega)\right)^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}{\rightharpoonup} g(x, u_0)$ olacak şekilde $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ altdizisi bulmak yeterlidir. Bunun için Lemma 2.43'ü kullanacağız. O halde Lemma 2.43'ün koşullarının sağlandığını gösterelim.

$\{u_m\} \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}\,(\Omega)$ alalım ve $u_m \underset{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$ olsun. O zaman

$$u_m \underset{W_2^1(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0 \text{ ve } u_m \underset{L_{\alpha+1}(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$$

olduğu açıktır.

1. g'nin $L_{\alpha+1}\,(\Omega)$'dan $L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,(\Omega)$'a sınırlı dönüşüm olduğunu göstereceğiz. ($2''$) koşulundan ve uygun Hölder eşitsizliğinden kullanırsak aşağıdaki değerlendimeyi alırız.

$$\int_\Omega |g(x,u)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\, dx \leq 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\left(\int_\Omega \left|\,\tilde{c}_0\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} |u|^{\alpha+1}\, dx + \int_\Omega \left|\,\tilde{c}_1\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\, dx\right)$$

$$\leq 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\left(\left\|\tilde{c}_0\right\|_{L_\infty(\Omega)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} + \left\|\tilde{c}_1\right\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)$$

Bu eşitsizlik

$$\gamma_5\left(\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\right) := 2\left(\left\|\tilde{c}_0\right\|_{L_\infty(\Omega)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} + \left\|\tilde{c}_1\right\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$

olmak üzere

$$\|g(x,u)\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} \leq \gamma_5\left(\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\right)$$

şeklinde yazılır. $\gamma_5(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli, monoton artan fonksiyon olduğundan $\forall u \in B(0,r) \subset L_{\alpha+1}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \leq r \Longrightarrow \gamma_5\left(\|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\right) \leq \gamma_5(r)$$

olur. Buradan

$$\|g(x,u)\|_{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} \leq \gamma_5(r)$$

bulunur. Böylece

$$g : L_{\alpha+1}(\Omega) \longrightarrow L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega) \text{ sınırlı dönüşümdür.} \tag{3.32}$$

2. g Caratheodary fonksiyonu olduğundan koşulundan hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$g(x,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ süreklidir.} \tag{3.33}$$

3. $1 \leq p' < p_0$ için $W_2^1(\Omega) \subset L_{p'}(\Omega)$ kompakt gömüldüğünden ve $\{u_m\} \subset W_2^1(\Omega)$ zayıf yakınsak olduğundan $\exists\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ vardır ki $u_{m_k} \underset{L_{p'}(\Omega)}{\longrightarrow} u_0$.(Tanım 2.21'den)

   Buradan da $\exists\left\{u_{m_{k_j}}\right\} \subset \{u_{m_k}\}$ vardır ki (Önerme 2.13 ve Teorem 2.14'ten)

$$u_{m_{k_j}} \underset{\Omega}{\longrightarrow} u_0 \;\; hhy \tag{3.34}$$

(3.32), (3.33) ve (3.34)'ten g dönüşümünün Lemma 2.43'ün koşullarını sağladığı görülür. O halde Lemma 2.43'ten

$$g(u_{m_k}) \underset{L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}{\rightharpoonup} g(u_0)$$

dolayısıyla

$$g(u_{m_k}) \underset{\left(W_2^1(\Omega)\right)^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}{\rightharpoonup} g(u_0)$$

olduğu elde edilir.

Böylece L ve g'nin uygun uzaylardaki zayıf sürekliliğinden

$f_1 : W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega) \longrightarrow \left(W_2^1(\Omega)\right)^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$ zayıf sürekli olduğu elde edilir.

Şimdi $f_2 : W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega) \longrightarrow W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ zayıf sürekliliğini gösterelim.

f_2 doğrusal dönüşüm olduğundan uygun uzayda sınırlı olduğunu göstermek yeterli olacak. Bunun için $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ ise $u|_{\partial\Omega} \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ olduğundan $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ uzayındaki norm tanımından kullanarak normun sınırlılığını göstermeliyiz. Daha önce Lemma 3.3' ün ispatında $\|f_2(u)\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ normunun sınırlı olduğunu göstermiştik. Böylece, $f_2 : W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ sınırlı dönüşümdür. f_2 doğrusal sınırlı olduğundan doğrusal sürekli (Terom 2.17), dolayısıyla zayıf süreklidir (Teorem 2.18).

f_1 ve f_2'nin uygun uzaylarda zayıf sürekli olmasından
$f : W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$ zayıf sürekli olduğu elde edilir. ■

Lemma 3.7 *(3.28)'de tanımlanan f dönüşümü ve (3.29)'da tanımlanan Ψ dönüşümü Teorem 3.5'in koşulları altında $W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayında coercive ikili oluşturur.*

İspat. Ψ dönüşümü birim dönüşüm olarak tanımlandığından *coercive* ikililik adi anlamda *coercive*liğe denktir. f dönüşümünün *coercive* olduğunu göstermek için $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ olmak üzere aşağıdaki dual forma bakalım.

Daha önce $\langle f(u), u\rangle$ için gerekli işlemleri yaparak aşağıdaki eşitliği elde etmiştik.

$$\langle f(u), u\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u D_i u dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x) + b_i(x)) D_i u \, u dx$$
$$+ \int_\Omega c(x) u^2 dx + \int_\Omega g(x,u) u dx + \int_{\partial\Omega} a(x') u^2 dx' \tag{3.19}$$

(3.19)'daki ilk terimde koşul (1)'i gözönüne alalım.

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u D_i u dx \geq \theta \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.20}$$

(3.19)'daki ikinci terim için önce uygun Hölder eşitsizliğini kullanalım ve $\sum_{i,j=1}^n \|D_i(a_{ij}) + b_i\|_{L_p(\Omega)} \equiv \sigma_2$ işaret edelim. Sonra Young eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki değerlendirmeyi elde ederiz.

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x) + b_i(x)) D_i u \, u dx \geq -\sum_{i,j=1}^n \|D_i(a_{ij}(x) + b_i(x))\|_{L_p(\Omega)} \|D_i u\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$
$$\geq -\sigma_2 \|Du\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$
$$\geq -\varepsilon \|Du\|^2_{L_2(\Omega)} - c(\varepsilon)\sigma_2^2 \|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \tag{3.35}$$

(3.19)'daki üçüncü terim için uygun Hölder eşitsizliğini kullanalım.

$$\int_\Omega c(x) u^2 dx \geq -\|c\|_{L_{\frac{p}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \tag{3.36}$$

(3.35) ve (3.36)'yı birlikte gözönüne alıp Young eşitsizliğini kullanalım.

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)+b_i(x))D_iu\ udx+\int\limits_{\Omega}c(x)u^2dx$$

$$\geq -\varepsilon\left\|Du\right\|^2_{L_2(\Omega)}-\varepsilon'\left\|u\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}-c\left(\varepsilon'\right)\left(c\left(\varepsilon\right)\sigma_2^2\ +\left\|c\right\|_{L_{\frac{p}{2}}(\Omega)}\right)^{\frac{p}{2}} \tag{3.37}$$

(3.20), (3.37) ve (ii′) koşulunu (3.19)'da gözönüne alırsak

$$\left\langle f\left(u\right),u\right\rangle \geq \left(\theta-\varepsilon\right)\left\|Du\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left(k_0-\varepsilon'\right)\left\|u\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

$$-\left(c\left(\varepsilon'\right)\left(c\left(\varepsilon\right)\sigma_2^2\ +\left\|c\right\|_{L_{\frac{p}{2}}(\Omega)}\right)^{\frac{p}{2}}+k_1\right)+\int\limits_{\partial\Omega}a(x')u^2dx' \tag{3.38}$$

elde edilir.

Burada $A:=c\left(\varepsilon'\right)\left(c\left(\varepsilon\right)\sigma_2^2\ +\left\|c\right\|_{L_{\frac{p}{2}}(\Omega)}\right)^{\frac{p}{2}}+k_1$ diyelim.

Bu adımda, öncelikle (iii′)(a′) koşulunun sağlandığını kabul edelim ve bu koşulu (3.38)'de gözönüne alalım.

$$\left\langle f\left(u\right),u\right\rangle \geq \left(\theta-\varepsilon\right)\left\|Du\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left(k_0-\varepsilon'\right)\left\|u\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

$$-A+a_0\left\|u\right\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \tag{3.39}$$

Burada $\theta'\leq\min\left\{\theta,a_0\right\}-\varepsilon$ olmak üzere (2.3) eşitsizliğini kullanalım.

$$\left\langle f\left(u\right),u\right\rangle \geq \theta' c_3\ \left\|u\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\left(k_0-\varepsilon'\right)\left\|u\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}-A \tag{3.40}$$

O halde

$$\left\|u\right\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}\equiv\left\|u\right\|_{W_2^1(\Omega)}+\left\|u\right\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\nearrow\infty$$

iken

$$\frac{\left\langle f\left(u\right),u\right\rangle}{\left\|u\right\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}}$$

ifadesine bakalım. $\theta''\leq\min\left\{\theta' c_3,k_0\right\}-\varepsilon'$ olmak üzere (3.40)'da gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\begin{aligned}\left\langle f\left(u\right),u\right\rangle &\geq \theta''\left(\left\|u\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\left\|u\right\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\right)-A\\ &\geq \theta''\left(\left\|u\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\left\|u\right\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)}-1\right)-A\\ &\geq \frac{\theta''}{2}\left(\left\|u\right\|_{W_2^1(\Omega)}+\left\|u\right\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\right)^2-\theta''-A\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left\|u\right\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}\equiv\left\|u\right\|_{W_2^1(\Omega)}+\left\|u\right\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\nearrow\infty$$

iken

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}} \nearrow \infty$$

olduğu elde edilir.

Şimdi (iii′)(b′) koşulunun sağlandığını kabul edelim..

(3.38)'deki son terim için uygun Hölder eşitsizliğini ve (2.2) eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_{\partial\Omega} a(x')u^2 dx' \geq -\|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{L_{p^*}(\partial\Omega)}$$

$$\geq -c_2^2 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.25}$$

elde edilir ve (3.25)'i (3.38)'de gözönüne alırsak

$$\langle f(u), u\rangle \geq (\theta - \varepsilon)\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + (k_0 - \varepsilon')\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

$$-A - c_2^2 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.42}$$

elde edilir.

(3.42)'de $c' = mes\Omega$ olmak üzere Teorem 2.33'ten kullanırsak

$$\langle f(u), u\rangle \geq (\theta - \varepsilon)\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + (k_0 - \varepsilon')\|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}$$

$$-A - c_2^2 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} \left(\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)} + c'\right)$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_0 > 0$ için $\theta_2 \leq \min\{\theta, k_0\} - \varepsilon_0$ olduğunu gözönüne alalım.

$\widetilde{A} := A + c'c_2^2 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}$ olarak gösterelim.

$$\langle f(u), u\rangle \geq \left(\theta_2 - c_2^2 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right)\left(\|Du\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\right) - \widetilde{A}$$

$$\geq \frac{\left(\theta_2 - c_2^2 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right)}{2}\left(\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\right) - c' - \widetilde{A}$$

$$\geq \frac{\left(\theta_2 - c_2^2 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right)}{2}\left(\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|^2_{L_{\alpha+1}(\Omega)} - 1\right) - c' - \widetilde{A}$$

$$\geq \frac{\left(\theta_2 - c_2^2 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right)}{4}\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)}\right)^2$$

$$-\frac{\left(\theta_2 - c_2^2 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right)}{2} - c' - \widetilde{A}$$

elde edilir. Burada $\theta_2 - c_2^2 \|a\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} > 0$ olduğunu gözönüne alırsak

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)} \equiv \|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{L_{\alpha+1}(\Omega)} \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}} \nearrow \infty$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla (iii′) koşulundaki her iki durumda f dönüşümünün $W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)$ uzayında *coercive* olduğunu gösterdik. ■

Teorem 3.5'in ispatının devamı. Lemma 3.6 ve Lemma 3.7'den, (3.28)'de tanımlanan f dönüşümünün Teorem 2.34'ün koşullarını sağladığı görülür. (3.29)'da tanımlanan Ψ dönüşümü ise birim dönüşüm olduğundan sınırlıdır, tersi vardır. Ayrıca, Ψ dönüşümü doğrusal olduğundan Ψ^{-1} dönüşümü zayıf süreklidir. Dolayısıyla, Ψ dönüşümü de Teorem 2.34'ün koşullarını sağlar.

O halde

$$\int\limits_{\Omega}(Lu+g(x,u))\,vdx+\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+a(x')u\right)vdx'=\int\limits_{\Omega}hvdx+\int\limits_{\partial\Omega}\varphi vdx',\ \forall v\in W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)$$

denkleminin

$$M=\{(h,\varphi)\in\left[(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)\right]\times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega):\sup\{\frac{\langle h,u\rangle+\langle\varphi,u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}}$$

$$:u\in W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)\}<\infty\}$$

olmak üzere keyfi $(h,\varphi)\in M$ için $W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)$'da çözümü vardır. M kümesi böyle tanımlandığından ve

$$\|h\|_{(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}=\sup\left\{\frac{\langle h,u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)}}:u\in W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)\right\}$$

$$\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}=\sup\left\{\frac{\langle\varphi,u\rangle}{\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}}:u\in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right\}$$

norm tanımlarından

$$M=\left\{(h,\varphi)\in\left[(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)\right]\times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega):\|h\|_{(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)}+\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}<\infty\right\}$$

olur. Dolayısıyla, Teorem 2.34'ü (1.1), (1.2) problemine uygularsak elde edilir ki Teorem 3.5'in koşulları altında keyfi $h\in(W_2^1(\Omega))^*+L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)$ ve keyfi $\varphi\in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $(1.1), (1.2)$ probleminin $W_2^1(\Omega)\cap L_{\alpha+1}(\Omega)$'da genelleşmiş çözümü vardır. ■

3.3 (1.1), (1.2) PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİ ÜZERİNE

Bu kısımda, (1.1), (1.2) probleminde yer alan g dönüşümünün model bir durumunda problemin çözümünün tekliğini göstereceğiz. Öncelikle aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(i) a_{ij} ve b_i öyle fonksiyonlardır ki $s := \begin{cases} > 2 \ , \ n = 2 \ iken \\ n \ , \ \ n \geq 3 \ iken \end{cases}$ olmak üzere $D_i(a_{ij}), b_i \in L_s(\Omega), (i, j = 1, ..., n)$.

Bu fonksiyonlar için

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|D_i(a_{ij}) + b_i\|_{L_s(\Omega)} \equiv \sigma_1 < \infty$$

tanımlayalım.

(ii) c ve a fonksiyonları $c \in L_{\frac{s}{2}}(\Omega)$ ve $a \in L_{s_1}(\partial\Omega)$ olmak üzere aşağıdaki bağlantılardan birini sağlasın.

(a) Keyfi $x \in \Omega$ için $c(x) \geq \widetilde{c} > 0$ olacak şekilde $\widetilde{c}$ sayısı vardır ki $\theta_1 := \min\left\{\theta, \widetilde{c}\right\}$ olmak üzere (i)'de tanımlanan σ_1 sayısı

$$\sigma_1 < \frac{\theta_1}{c_1}$$

olsun.(c_1, (2.1) eşitsizliğindeki katsayıdır.) Bu durumda a fonksiyonu aşağıdakilerden birini sağlasın.

($\mathbf{a_1}$) Keyfi $x' \in \partial\Omega$ için $a(x') \geq 0$.

($\mathbf{a_2}$) $\|a\|_{L_{s_1}(\partial\Omega)} < \frac{\theta_1 - \sigma_1 c_1}{c_2}$ (c_2, (2.2) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

(b) Keyfi $x' \in \partial\Omega$ için $a(x') \geq a_0 > 0$ olacak şekilde a_0 sayısı vardır ki $\theta_1^{'} := \min\{\theta, a_0\}$ olmak üzere (i)'de tanımlanan σ_1 sayısı

$$\sigma_1 < \frac{\theta_1^{'} c_3}{c_1}$$

olsun.(c_1, (2.1) eşitsizliğindeki ve c_3, (2.3) eşitsizliğindeki katsayıdır.) Bu durumda c fonksiyonu aşağıdakilerden birini sağlasın.

($\mathbf{b_1}$) Keyfi $x \in \Omega$ için $c(x) \geq 0$.

($\mathbf{b_2}$) $\|c\|_{L_{\frac{s}{2}}(\Omega)} < \frac{\theta_1^{'} c_3 - \sigma_1 c_1}{c_1^2}$

Teorem 3.8 *(1.1), (1.2) problemindeki g dönüşümü $\rho > 0$ olmak üzere*

$$g(x,\tau) = d(x)\,|\tau|^{\rho-1}\,\tau + k(x)$$

şeklinde olsun. Burada, q_1, q_2 sayıları aşağıdaki gibi olmak üzere $d \in L_{q_1}(\Omega)$ ve $k \in L_{q_2}(\Omega)$ olsun. $q_0 := (p_0)'$ olmak üzere

$n = 2$ iken $q_1 > 1$ ve $q_2 = q_0 > 1$;

$n \geq 3$ iken

$$q_1 = \begin{cases} \frac{p_0 q_0}{p_0 - \rho q_0} \ , & 0 < \rho < \frac{n+2}{n-2} \\ \infty \ , & \rho \geq \frac{n+2}{n-2} \end{cases} \ , \quad q_2 = \begin{cases} q_0 \ , & 0 < \rho \leq \frac{n+2}{n-2} \\ \frac{\rho+1}{\rho} \ , & \rho > \frac{n+2}{n-2} \end{cases}$$

Ayrıca $\forall x \in \Omega$ için $d(x) \geq 0$ olsun ve (1),(3),(i),(ii) koşulları sağlansın.

Bu durumda (1.1), (1.2) probleminin $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+1}(\Omega)$ uzayından olan çözümü tektir.

İspat. Kabul edelim ki u, v (1.1), (1.2) probleminin iki farklı çözümüdür. O halde $x \in \Omega$ ve $x' \in \partial\Omega$ olmak üzere

$$Lu + g(x,u) = h(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x')\,u = \varphi(x')$$

ve

$$Lv + g(x,v) = h(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + a(x')\,v = \varphi(x')$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$Lu + g(x,u) - Lv - g(x,v) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x')\,u - \frac{\partial v}{\partial \nu} - a(x')\,v = 0$$

elde edilir.

$$w = u - v$$

dersek

$$Lw + g(x,u) - g(x,v) = 0 \tag{3.43}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = -a\left(x'\right) w \tag{3.44}$$

problemi elde edilir. Şimdi bu problemin sıfırdan farklı çözümü olamayacağını gösterelim. Kabul edelim ki w bu problemin sıfırdan farklı bir çözümüdür.

(3.43)'ten

$$\langle Lw + g(x,u) - g(x,v), w \rangle = 0$$

ve

$$\int\limits_{\Omega} Lw \; w dx + \int\limits_{\Omega} \left[g(x,u) - g(x,v)\right](u-v)\, dx = 0 \tag{3.45}$$

olur. Burada daha önce elde ettiğimiz (3.19) eşitliğini gözönüne alalım.

$$0 = \int\limits_{\Omega} Lw \; w dx + \int\limits_{\Omega} \left[g(x,u) - g(x,v)\right](u-v)\, dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_j w D_i w dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x) + b_i(x)) D_i w \; w dx + \int\limits_{\Omega} c(x) w^2 dx$$

$$+ \int\limits_{\Omega} d(x) \left(|u|^{\rho-1} u - |v|^{\rho-1} v\right)(u-v)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} a(x') w^2 dx'$$

Burada (3.20) ve (3.21) eşitsizliklerini gözönüne alırsak

$$0 = \int\limits_{\Omega} Lw \; w dx + \int\limits_{\Omega} \left[g(x,u) - g(x,v)\right](u-v)\, dx$$

$$\geq \theta \left\|Dw\right\|^2_{L_2\,(\Omega)} - \sigma_1 \, c_1 \left\|w\right\|^2_{W_2^1\,(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} c(x) w^2 dx$$

$$+ \int\limits_{\Omega} d(x) \left(|u|^{\rho-1} u - |v|^{\rho-1} v\right)(u-v)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} a(x') w^2 dx'$$

elde edilir. $d(x) \geq 0$ ve $\left(|u|^{\rho-1} u - |v|^{\rho-1} v\right)(u-v) > 0$ olduğunu gözönüne alırsak son eşitsizlikten

$$0 \geq \theta \left\|Dw\right\|^2_{L_2\,(\Omega)} - \sigma_1 c_1 \left\|w\right\|^2_{W_2^1\,(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} c(x) w^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} a(x') w^2 dx'$$

alırız. Burada c ve a fonksiyonları için kabul ettiğimiz (ii) koşulundaki bağlantılara göre farklı değerlendirmeler elde edilir. Daha önce (Lemma 3.4 ispatında) elde ettiğimiz bu değerlendirmeler ve σ_1 üzerine kabul edilen koşuldan

$$0 \geq \theta \left\|Du\right\|^2_{L_2\,(\Omega)} - \sigma_1 c_1 \; \left\|u\right\|^2_{W_2^1\,(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} c(x) u^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} a(x') u^2 dx' > 0$$

olduğu görülür. Bu ise (3.45) eşitliği ile çelişir.

O zaman (3.43), (3.44) probleminin sıfırdan farklı çözümü olamaz, yani $w = 0$ olmalıdır. O halde, gözönüne alınan durumda (1.1), (1.2) probleminin $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+1}(\Omega)$ uzayından olan çözümü tektir. ∎

KAYNAKLAR

[1] G. A. Afrouzi, K. J. Brown ; *On a Diffusive Logistic Equation*, J. Math. Anal. Appl. 225 (1998) 326-339

[2] R. A. Adams ; *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[3] A. Bahri, H. Brezis ; *Non-linear Elliptic equations on Riemannian manifolds with the Sobolev critical exponent*, Topics in Geometry, 1-100, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. , 20, 1996

[4] R. D. Benguria, J. Dolbeault, M. J. Esteban ; *Classification of the Solutions of Semilinear Elliptic Problems in a Ball,* Journal of Diff. Eq. 167, 438-466 (2000)

[5] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, L. Tartar ; *On a Dirichlet Problem With a Singular Nonlinearity,* Comm. Partial Differential Equations 2 (1977), no. 2, 193-222

[6] Y. Du, L. Ma ; *Logistic Type Equations on R^N by a Squeezing Method involving Boundary Blow-up Solutions,* J. London Mat. Soc. (2) 64 (2001) 107-124

[7] Y. Du, L. Ma ; *Positive Solutions of an Elliptic Partial Differential Equation on R^N ,* J. Math. Anal. Appl. 271 (2002) 409-425

[8] L. C. Evans ; *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS 1998

[9] S. Fucik, A. Kufner ; *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier, New York, 1980

[10] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov ; *Generalized Functions*, Vol 1, Academic Press, 1964

[11] D. Gilbarg, N. S. Trudinger ; *Elliptic Partial Differential Equations of Second order*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1983

[12] S. Kesavan ; *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley & Sons, India,1989

[13] J. L. Lions ; *Quelques méthodes de resolution des problémes aux Limities non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris 1969

[14] L. A. Lusternik and V. J. Sobolev ; *Elements of Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1974

[15] F. Pacella ; *Symmetry Results for Solutions of Semilinear Elliptic Equation with Convex Nonlinearities,* Journal of Functional Analysis 192, 271-282 (2002)

[16] S. I. Pohozaev ; *Equations of the Type* $\Delta u = f(x, u, Du)$, Math. S. 1980 v113.n2

[17] P. H. Rabinowitz ; *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems*, J. Functional Analysis 7, (1971), 487-513

[18] M. M. Rao ; *Measure Theory and Integration*, John Wiley & Sons, New York,1984

[19] K. N. Soltanov ; *Some Boundary Problem for Emden-Fowler Type Equations, Function Spaces*, Differential Operators and Nonlinear Analysis, (FSDONA, 2004) May 27-June 2, 2004, Svratka, Czech Republic, 2005, 311-318

[20] K. N. Soltanov ; *On noncoercive semilinear equations*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Volume 2, Issue 2, June 2008, Pages 344-358

[21] M. Struwe; *Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, 1990

[22] K. Yosida ; *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1980

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kerime KORKMAZ

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Yılı : 1983

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise : 1998-1999 Bolu Anadolu Öğretmen Lisesi, Bolu
1999-2001 Hasan Ali Yücel Anadolu Öğretmen Lisesi, Ankara

Lisans : 2001-2005 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi :

2006- Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi