

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ HİZMET KANALINA SAHİP KUYRUK SİSTEMLERİNİN ANALİZİ

Mustafa ULAŞ

Tez Yöneticisi:

Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ HİZMET KANALINA SAHİP KUYRUK SİSTEMLERİNİN ANALİZİ

Mustafa ULAŞ

Yüksek Lisans Tezi
İstatistik Anabilim Dalı

Bu tez, tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman:

Üye:

Üye:

Üye:

Üye:

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŐEKKÖR

Bu çalıőmanın planlanmasında ve yűrűtűlmesinde çalıőmalarım sűresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen bilgi ve hoőgűrűlerinden yararlandıėım deėerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK' a ve Yrd. Doç.Dr. Nurhan HALİSDEMİR'e en içten teőekkűr ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

İçindekiler.....	I
Özet.....	II
Abstract.....	III
1. PARALEL HOMOJEN KUYRUK SİSTEMLERİ ANALİZİ.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Kuyruk Sistemlerinin İncelenmesi.....	3
1.2.1. Poisson Süreçleri ve Temel Özellikleri.....	5
1.3. Doğum-Ölüm Süreçleri.....	10
1.4. Bekleme Hattı Sistemi.....	13
1.4.1. Kuyruk Modelinde Geliş ve Hizmet Yapısını Açıklamakta Kullanılan Dağılımlar.....	14
1.4.2. Bekleme Hattı Probleminin Temel Kavramları	14
1.4.2.1. Kendall-Lee Taha Simgesi.....	15
1.4.3. M/M/n Sistemi.....	17
1.4.3.1. Lemma.....	17
1.4.3.2. Doğum Parametresinin Bulunması.....	18
1.4.3.3. Ölüm Parametresinin Bulunması.....	19
2. PARALEL İKİ HETEROJEN KANALLI KUYRUK SİSTEMİNİN ANALİZİ VE SEKTÖR UYGULAMASI.....	26
2.1. Giriş.....	26
2.2. Sistemin Tanımı.....	26
2.3. Sisteme Ait Denklemlerin Elde Edilmesi.....	27
2.4. Sistemin Çözümü.....	28
2.5. Denklem Parametrelerinin Bulunması	30
2.5.1. Sistemdeki Ortalama Müşteri Sayısı.....	30
2.5.2. Sistemde Ortalama Bekleme Süresi.....	31
2.5.3. Kuyrukta Bekleyen Ortalama Müşteri Sayısı.....	31
2.5.4. Kuyrukta Ortalama Bekleme Süresi.....	33
3. UYGULAMA.....	35
4. SONUÇ VE TARTIŞMA	41
KAYNAKLAR.....	42
ÖZGEÇMİŞ.....	44
EKLER.....	45

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİ HİZMET KANALINA SAHİP KUYRUK SİSTEMLERİNİN ANALİZİ

Mustafa ULAŞ

Fırat Üniversitesi
Fen-Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

2007 , Sayfa : 49

Bu çalışmada, paralel kanallı bekleme hattı kuyruk sistemi teorik olarak incelendi. Poisson süreci ve özellikleri ele alındı, ayrıca doğum ölüm süreci kullanılarak paralel hatlı kuyruk sisteminin parametreleri bulundu.

Bunun yanında iki heterojen kanallı kuyruk sisteminin analizi yapılarak parametreleri bulundu. Kuyruk teorisinin genel tanımı, kullanım yerleri günümüz teknolojisinden faydalanarak örneklerle ifade edildi. Kuyruk çeşitleri genel olarak ve şekillerden faydalanarak verildi. Kuyruk teorisinde kullanılan temel kavramlar sembollerle birlikte anlatıldı. Kuyruk sisteminin simgelenmiş hali ile bu simgelerin anlamları verildi.

Stokastik süreçler tanımı verildi ve bu tanımdan yararlanarak Poisson süreci incelendi. Stokastik süreçler teorisinde önemli bir yer tutan Markov Süreçleri, bunların geçiş ihtimalleri, geçiş ihtimallerinin özellikleri ve Markov zinciri ile ilgili dağılımlar incelendi.

Poisson sürecin kuyruk sistemine uygulanması gösterildi. Müşteri akımı Poisson süreçli ve hizmet süreleri birbirinden farklı üstel dağılıma sahip iki paralel heterojen kanallı kuyruk sisteminin tanımı yapıldı. Bu sisteme ait denklemlerden faydalanarak sistemde n birim bulunması ihtimali ve sistemin boş olması ihtimali hesaplandı. Sistemde bir birimin bulunması ihtimali hesaplanırken, bu birimin iki kanaldan hangisinde bulunacağı ihtimali ayrı ayrı göz önüne alındı. Bulunan bu parametrelerden faydalanarak sistem parametreleri olan sistemdeki ortalama müşteri sayısı, sistemde ortalama bekleme süresi, kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı ve kuyruktaki ortalama bekleme süresi hesaplandı.

Dördüncü bölümde ise, bu çalışmada elde edilen sonuçlar ve yapılabilecek çalışmalar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Paralel Kanal, Servis Oranı, Geçiş İhtimali

ABSTRACT

Master Thesis

THE ANALYSIS OF THE QUEUEING SYSTEM WHICH HAVE TWO SERVICE CHANNELS

Mustafa Ulaş

Fırat University
Graduate School of Science and Technology
Department of Statistics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

2007, Page: 49

In this study, we investigated the queueing system with parallel channel and waiting line theoretically. Finally, we obtained the parameters of queueing system with parallel line.

Besides we investigated queueing system with parallel heterogeneous channels and waiting line and waiting line theoretically. They are analysed, their parameters are found.

General definition of queueing theory and using places are examples. General kinds of queueing systems and their figures are given. Basic Notion which are used in queueing theory is given with symbols and means of symbols are given.

Stochastic processes are defined and Poisson processes are investigated. We studied the Markov Processes and their transition probabilities, their specialities and Markov Chain. Poisson processes and on queueing system is showed.

By using queueing system with two heterogeneous channel's equations we calculate n , one and empty system probabilities. While we are calculating one unit probabilities we beware of channel is placed.

In the final chapter, a discussion of result are summarized and some further research topics are proposed.

Key Words: Parallel Channel, Service Rate, Transition Probability.

1. PARALEL HOMOJEN KUYRUK SİSTEMLERİ ANALİZİ

1.1. Giriş

Stokastik süreçler teorisi, olasılık kurallarına göre, zaman içinde gelişen sistemleri inceler. Teorinin, bilim ve tekniğin birçok dalında özellikle de Astronomi, Biyoloji, Endüstri, Tıp v.b. alanlarında uygulamaları mevcuttur. Son yıllarda araştırmacılar stokastik süreçleri etkin bir şekilde kullanmaktadırlar. Biyolog, hayvan ve insan kitlelerindeki büyümeyle ya da azalmayla; fizikçi, küçük partiküllerin hareketleriyle ilgilenir (İnal, 1988). Bunun yanında; günlük hayatta insan ihtiyaçlarını gidermek veya ihtiyaçlarını en optimum zamanda en optimum maliyetle karşılamak gibi problemleri de kapsamaktadır.

Örnek olarak, bir kitlenin büyüklüğünü göz önüne alalım: Başlangıçta (yani sıfır zamanında) kitlenin büyüklüğü $\mathcal{E}_0$ olabilir. Sonraki gözleme dek bazı bireyler kitleden ayrılabilir yada bazı bireyler ortaya çıkabilir. Kitlenin 1 zamanındaki büyüklüğü olan $\mathcal{E}_1$, bir tesadüfi değişkendir ve $\mathcal{E}_0$ 'a bağlıdır. 2 zamanındaki büyüklüğü veren $\mathcal{E}_2$, stokastik olarak $\mathcal{E}_0$ ve $\mathcal{E}_1$ 'e bağlıdır. Bu süreç için stokastik model, kitlenin herhangi i ve j ($j > i$) zamanları arasındaki büyüme (yada azalmayı) gösterir ve $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_i$ 'ye bağlıdır.

Kesikli zamanlı stokastik süreçlerde gözlemler yalnızca tespit edilmiş zamanlarda yapılır. Sürekli zamanlı stokastik süreçlerde ise, gözlemler tüm olası zamanlarda düşünülür. Bu tür süreçlerin çözümlenmesi oldukça karmaşıktır.

Stokastik süreç, tesadüfi değişkenler ailesi olarak adlandırılır. $\mathcal{E}_t$ 'deki t , sürecin parametresidir. $x_t, \mathcal{E}_t$ 'nin $t \in T$ zamanında aldığı değeri gösterir. T 'ye indis yada parametre kümesi adı verilir. Stokastik sürecin indis kümesi $T = \{0,1,2,\dots\}$ olduğunda kesikli parametrelili süreç, $T = \{t, t \geq 0\}$ olduğunda sürekli parametrelili süreç denir.

Eğer her $h > 0$ ve $t \in T$ için $P(x - h < \mathcal{E}_t < x + h)$ olasılığı varsa x 'e $\{\mathcal{E}_t, t \in T\}$ stokastik sürecinin bir olası değeri yada durumu denir. Durum uzayında sonlu sayıda yada sayılabilir sonsuzlukta durum varsa sürecin kesikli durum uzayı olduğu söylenir. Durum uzayı kesikli değilse sürekli dir.

Tanım 1.1.1 : $\{\Omega, F, P\}$ bir ihtimal uzayı ve $\mathcal{E}_t$ ise $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_t(x)$ bir stokastik süreç olsun. Bu süreç ; $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ olmak üzere $Z_0 = \mathcal{E}_{t_0}$, $Z_1 = \mathcal{E}_{t_1} - \mathcal{E}_{t_0} \dots Z_n = \mathcal{E}_{t_n} - \mathcal{E}_{t_{n-1}}$ şartını sağlıyorsa sürece **bağımsız artımlı süreç** denir.

Tanım 1.1.2: $\mathcal{E}_t, t \geq 0$ stokastik süreç ve $u > v$ için $\mathcal{E}_u - \mathcal{E}_v \approx \mathcal{E}_{u-v}$ olursa $\mathcal{E}_t$ 'ye **homojen süreç** denir.

Stokastik sürecin geniş ve kapsamlı bir uygulaması da kuyruk sistemleridir. Günlük yaşantıda, kuyrukta bekleyen insanlar ve araçlar ile her zaman karşılaşırız. Bunlar arasında maça gitmek için bilet bekleyen insanlar, hastanelerdeki hasta kuyruğu, bankadaki müşterilerin işlem yapmak için bekledikleri kuyruk, limanlarda yük boşaltmak için bekleyen gemi kuyruğu, mağazalarda kasiyere para ödemek için bekleyen müşteri kuyruğunu örnek olarak verebiliriz. Bahsedilen kuyrukların meydana gelmesindeki tek sebep, hizmet için gelen müşteri isteklerinin anında karşılanamamasıdır. Böylece kuyruk, sınırlı bir hizmet nedeniyle hattı durumudur (Öztürk, 1984).

Kuyruk teorisi, gelişlerin tesadüf olduğu bir sistemde, servisin karşılanması için, sistemin davranışını kestirim amacıyla model geliştirme uğraşları olarak başlamış ve gelişmiştir. A.K. Erlang telefon akışları üzerine uğraşlarını ve bulgularını “Aplication of the Theory or Probability to Telephone Trunk Problems” başlığıyla 1909 yılında bir kitapta toplayarak kuramsal çalışmalarının ilkinin oluşturmuştur (Cox 1972).

1950 yıllarına kadar kuramsal çalışmalar sistem öğelerinin değişik durumları üzerine yoğunlaşmıştır. Bu tür çalışmaların belli başlıları 1927’de Molina, 1928’de Fry’ın Erlangın çalışmalarını geliştirmesi, 1930’da ve 1934’de Polaczek’in, 1931’de Kolmogorov, 1932’de Khintchine’nin 1932’de Crommelin’in yaptığı çalışmalardır.

Erlang’ın uygulamasıyla başlayan çalışmalar zamanla kuyruk (bekleme hattı) olaylarını anlama ve kontrol etme yöntemlerini geliştirmiştir. Ancak uygulamada telefon akışlarının ötesine geçmeye 1950’lerden sonra başlamıştır. 1950’lerle kuramsal çalışmalar iş yerlerinde, stoklamada, hastanelerde ve benzeri yerlerde oluşan yığılma olaylarına hızla uygulanmaya başlanmıştır. (Kosten L. Oxford - 1973)

Günümüz işletmelerinin en önemli sorunlarından birisi müşterilerine etkin servis yöntemi oluşturmamaktır. Bekleme hattı modelleri bu konuda yöneticilere oldukça yararlı olabilmektedir. Şöyle ki, hizmet için gelen müşteriler isteklerini bir an önce karşılanmasını isterler. Çünkü müşteriler fazla beklediklerinde psikolojik bir tedirginliğe girdikleri gibi zamanlarını boşa harcamalarının da bir maliyeti söz konusudur. Müşteriler gereğinden fazla bekletildiğinde, büyük bir olasılıkla işletme müşterilerinin büyük birçoğunu kaybedecektir. Öte yandan yönetici, müşterilere hizmet veren personelin sayısını da düşürmek zorundadır. Yönetici servis maliyetinin düşük olmasını isterken servisin niteliğini yükseltmeyi ve müşterilerin

bekleme zamanlarını en düşük seviyede tutmayı amaçlamalıdır. Böylece işletmenin yararları ile müşterilerin yararlarının fazla çatışmadığı bir ekonomik dengeye ulaşılır.

Bu nedenle; işletme yöneticisi bu hizmeti sunan işletme yada işletme birimlerini optimal bir biçimde düzenlemelidir. Çünkü bu işletmelerde talebin büyüklüğü yada niteliği süreklilik arz etmez. Sistemde bulunan müşteriler hizmet sunulan birime geldiklerinde, kendilerinden önce kimse gelmemişse, hemen hizmet verilmektedir. Öte yandan, eğer sırada uzun bir süre beklemek gerekiyorsa müşteri kuyruğu terk eder ve müşteri kaybı olur. Bazen de tam tersi olur. Yani, hizmet talebinde bulunan hiçbir müşteri olmadığı için hizmet birimi boş beklemektedir.

Görülüyor ki hizmet talebinin belirsizliği, iki önemli durumu ortaya çıkarmaktadır.

- 1) Müşterilerin beklemesi,
- 2) Bekleme sebebiyle müşteri kaybı ve hizmet biriminin boş kalması.

Yukarıda belirtilen sonuçlar işletmelerin optimal hizmet vermesinin bir zaruri sonucu olan ve literatürde adına kuyruk sistemi veya bekleme hattı denilen modellerde ortaya çıkmaktadır.

Amacımız; sistemin temel yapısını teşkil eden bekleme hattı veya kuyruk sistemlerinin analizini ve düzenlenmesini sağlamaktır.

1.2. Kuyruk Sistemlerinin İncelenmesi

Kuyruk sistemleri, Tek kanal, çok kanallı, Homojen (veya Heterojen) paralel yada seri sistemler olarak karşımıza çıkar. Bu sistemlerde kendi aralarında çeşitli disiplinler, dağılımlar, servis (hizmet) olanakları ve hizmet oranları bakımından ayrılırlar (Halac, 1991) .

Kuyruk sistemlerinde müşteriler kuyruğa dışarıdan gelir ve servis veren personel meşgul ise, servis disiplinine göre sıra kendisine gelinceye kadar kuyrukta bekler. Sırası gelen müşteri servis veren personel boş olduğunda servise girer ve isteği karşılandıktan sonra kuyruk sistemini terk eder. Kuyruk sistemi çalışmaya başladığında (Örneğin bankanın kapılarını açması) sistemdeki birimler ilk durum ve geçen sürece göre etkilenir. Bu zamanda sistemin geçici durum şartında olduğu söylenir. Yeterli bir süre geçtikten sonra sistemin durumu, belirli beklenmeyen şartlar dışında, ilk duruma ve geçen süreye bağımlı değildir. Kuyruk Teorisinin çalışmalarımızda durağan (homojen) durumunda işlediğini düşüneceğiz. Çünkü zamanın çoğunda sistem durağan durumda işlediği gibi geçici durumları analitik model haline getirmek güçtür.

Kuyruk sistemlerinin çeşitliliğini yukarıda belirttik. En basit kuyruk sistemi belirli bir zamanda en önce gelen müşteriye servise alan ve sonra gelenleri kuyrukta bekleterek servis olanaklarını sağlayan tek kanallı olanıdır. Buna tek kuyruk tek servis sisteminde denir.

Tanımlanan kuyruk sistemleri genellikle şu beş terim (Özellik) ile açıklanır.

a) Müşteriler:

Müşteriler işlerinin görülmesi için servis sistemine gelen araçlar, kişiler, gereçler, hammadde ve makinelerdir. Müşterilerin servis sistemine gelişleri belirli ya belirsiz şekilde olabilir.

b) Geliş Özellikleri:

Müşterilerin servis sistemine gelişleri türlü özellikler gösterebilir. Müşterilerin gelişleri bazen kontrol edilebilir bazen de kontrol edilemez. Ayrıca müşterilerin gelişleri belirli zamanlarda tek kişi veya gruplar halinde olabilir. Müşterilerin gelişlerinin olasılık dağılımı türlü biçimde olabilir. Gelişleri açıklamak için yaygınca kullanılan dağılımlar, Sabit dağılım, Üstel dağılım, Poisson dağılımı ve Erlang dağılımıdır. Bu dağılımların kendine has özellikleri vardır.

c) Kuyruk Disiplini:

Müşterilerin hizmet için seçilme düzenine kuyruk disiplini denir. Servis için gelen müşteriler kuyruğa girdiğinde belirli bir zamanda servise girmeleri servis disiplinince belirlenir. Servis disiplininde kullanılan standart kural, ilk gelen ilk hizmet görür kuralıdır. Bunun yanında önce sıra alanlar (Rezervasyon yaptıranlar) kuralı, rastgele seçim kuralı, hizmetin öncelik özelliği kuralı, son gelen servis görür kuralı, en kısa servis zamanı gerektiren işler için gelenler servis görür kuralları da kuyruk disiplininde kullanılır.

d) Servis İmkanlarının Yapısı:

Servis imkanlarının fiziksel düzenlenmesi türlü özellikte olabilir. Genellikle servis olanaklarının düzenlenmesinde tek kanallı ve çok kanallı şekilde bir ayırım düşünülür.

e) Servis Oranı:

Servis oranı hizmet için gelen müşterilerin ihtiyaçlarını karşılamak için istenen servis süresi dağılımı ile ilgilidir. Servis için gelen müşterilerin her biri aynı miktarda süreyi gerektirirse servis oranı tek biçimli (Uniform) olabilir. Karmaşık olan servis oranları ise Erlang veya Üstel olasılık dağılımları ile gösterilir.

1.2.1 Poisson Süreçleri ve Temel Özellikleri

Bekleme hattında, müşterilerin geliş, ayrılış ve kaybolma analizi çoğu zaman Poisson dağılımına uyduğundan Poisson sürecinin tanımı ve temel özellikleri verilecektir.

Tanım 1.2.1: Aşağıdaki üç koşulu sağlayan $\mathcal{E}_t$ sürecine Poisson Süreci denir.

$$\text{a) } \mathcal{E}_0 = 0, P(\mathcal{E}_t = 0) = 1 \quad (1.2.1)$$

b) Bağımsız artımlı ve homojen süreçtir.

$$\text{c) } P(\mathcal{E}_t = k) = \frac{\lambda t (\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (1.2.2)$$

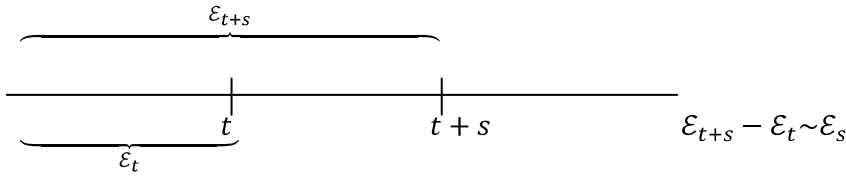
Poisson Sürecinin Temel Özellikleri :

1) $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 'ler Poisson sürecinin geliş anları ve $T_1 = t_1, T_2 = t_2 - t_1, \dots, T_n = t_n - t_{n-1}$ olsun. Bu durumda;

$T_1, T_2, \dots, T_n$ 'ler tam bağımsız tesadüfi değişkenlerdir ve her birisi λ parametrelili üstel dağılıma sahiptir.

İspat: $n \geq 1$ için, $t_{n+1} - t_n$ 'in $t_1, t_2, \dots, t_n$ 'lerden bağımsız olduğunu gösterelim. Bu durumda,

$t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}$ 'de bağımsız olacaktır.



Poisson süreci bağımsız artımlı olduğundan,

$$P(\mathcal{E}_{t+s} - \mathcal{E}_t = 0 / \mathcal{E}_t; u \leq t) = P(\mathcal{E}_{t+s} - \mathcal{E}_t = 0) \quad (1.2.3)$$

$$= P(\mathcal{E}_{t+s} - \mathcal{E}_t = 0) = e^{-\lambda s} \quad (1.2.4)$$

(1.2.3) eşitliğinde t 'nin yerine t_n koyalım

$$P(\mathcal{E}_{t+s} - \mathcal{E}_t = 0 / \mathcal{E}_t; u \leq t) = P(\mathcal{E}_{t+s} - \mathcal{E}_t = 0) \quad (1.2.5)$$

$(\mathcal{E}_t, u \leq t)$ 'ile ilgili bilgi $t_1, t_2, \dots, t_n$ lerle aynıdır. Çünkü ; (1.2.4) gereğince, Poisson süreci ancak $t_1, t_2, \dots, t_n$ anlarında durum değiştirir. Bu takdirde

$$P(\mathcal{E}_{t+s} - \mathcal{E}_t = 0 / t_1, t_2, \dots, t_n) = e^{\lambda s}$$

$$P(\mathcal{E}_{n+1} - t_n > s / t_1, t_2, \dots, t_n) = e^{\lambda s}$$

$$P(t_{n+1} - t_n > s) = e^{-\lambda s}, \quad s \geq 0$$

elde edilir.

Şimdi $T_1, T_2, \dots, T_n$ ' lrin üstel dağılıma sahip olduğunu gösterelim:

$$P(t_{n+1} - t_n > s) = e^{-\lambda s} \ (s \geq 0) \text{ olduğundan } \forall n \geq 1 \text{ için}$$

$$P(T_{n+1} > s) = e^{-\lambda s}$$

veya

$$P(T_k > s) = e^{-\lambda s} \Rightarrow P(T_k > s) = 1 - e^{-\lambda s}$$

olur, yani;

$$F(s) = P(T_k < s) = 1 - e^{-\lambda s}$$

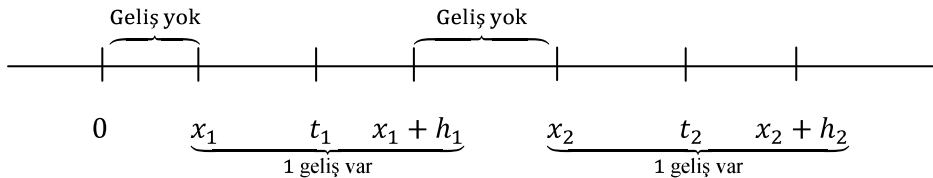
2) $t_1, t_2, \dots, t_n$ geliş anlarının ortak yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki formülle ifade edilir.

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda x} , & (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ 0 , & d.d. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

İspat : Bu özelliği $n=2$ için ispat edelim. Yani $f_2(x_1, x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda x} \ (x_1 < x_2)$ olduğunu gösterelim. Tanıma göre t_1 ve t_2 'nin Ortak yoğunluk fonksiyonu,

$$f_2(x_1, x_2) = \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \frac{P(\overbrace{x_1 < t_1 + h_1, x_2 < t_2 < x_2 + h_2}^A)}{h_1 h_2} \quad (1.2.7)$$

dir. Bu limiti hesaplamak için önce $P(A)$ ihtimalini hesaplayalım. $\forall x_1, x_2, h_1, h_2 \in \mathfrak{R}^+$ için ;



$$P(A) = P(\mathcal{E}_{x_1} = 0, \mathcal{E}_{x_1+h_1} - \mathcal{E}_{x_1} = 1, \mathcal{E}_{x_2} - \mathcal{E}_{x_1+h_1} = 0, \mathcal{E}_{x_2+h_2} - \mathcal{E}_{x_2} = 1) \quad (1.2.8)$$

Bu olaylar Poisson özelliğine göre birbirinden bağımsız yani bağımsız artımlı süreç olduğundan

$$P(A) = P(\varepsilon_{x_1} = 0)P(\varepsilon_{x_1+h_1} - \varepsilon_{x_1} = 1)P(\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_{x_1+h_1} = 0)P(\varepsilon_{x_1+h_1} - \varepsilon_{x_2} = 1) \quad (1.2.9)$$

Homojenlik özelliğine göre,

$$P(A) = P(\varepsilon_{x_1} = 0)P(\varepsilon_{h_1} = 1)P(\varepsilon_{x_2} - (x_1 + h_2) = 0)P(\varepsilon_{h_2} = 1) \quad (1.2.10)$$

Bu ihtimaller (1.2.2)'de yazıldığına,

$$P(A) = \lambda^2 h_1 h_2 e^{-\lambda x_2} e^{-\lambda h_2}$$

elde edilir.

$$\frac{P(A)}{h_1 h_2} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda x_2} e^{-\lambda h_2}}{h_1 h_2} h_1 h_2 \quad h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow 0 \quad (1.2.11)$$

alalım. O halde,

$$f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} P(A) = \lambda^2 e^{-\lambda x_2} \quad x_1 < x_2 \quad (1.2.12)$$

genel olarak,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda x_n}, x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad (1.2.13)$$

elde edilir.

3) λ parametrelili Poisson sürecinde n . geliş anı n ve λ parametrelili Gamma dağılımına sahiptir.

Yani t_n 'nin yoğunluk fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, x \geq 0 \quad (1.2.14)$$

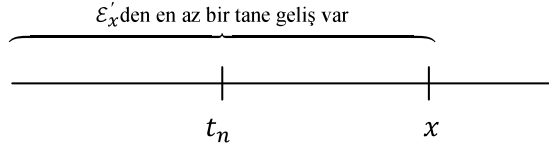
dır.

İspat : n . geliş anı olan t_n 'a aşağıdaki biçimde ifade

$$t_n = (t_n - t_{n-1}) + (t_{n-1} - t_{n-2}) + \dots + (t_2 - t_1) + (t_1 - t_0), t_0 = 0$$

$$t_n = T_n + T_{n-1} + \dots + T_1$$

Burada T_i 'ler (1.2.11) özelliğine göre üstel dağılıma sahiptir. $(t_n < x)$ olayını gözönüne alırsak;



$$(t_n < x) = (\mathcal{E}_x \geq n) \quad (1.2.15)$$

(1.2.14) deki iki eşit olayın ihtimali,

$$P(t_n < x) = P(\mathcal{E}_x \geq n)$$

$$F_n(x) = P(\mathcal{E}_x \geq n)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} P(\mathcal{E}_x = k) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!} \quad (1.2.16)$$

(1.2.16)'nın x 'e göre türevi alındığında,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k(k-1)(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda (\lambda x)^{k-1} k e^{-\lambda x}}{k(k-1)!} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda (\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda (\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right] \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \left[\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right] \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

$$f_n(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)} \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad (1.2.18)$$

4) $\mathcal{E}_t, t \geq 0$ Poisson süreci ve $0 < t_1 < t_2 < \dots$ 'ler de bu sürecin geliş anlarıdır. Her bir geliş anı p ile sağlanıyor, $1 - p$ ihtimali ile sağlanmıyor.

N_t ile $[0, t]$ aralığında gelen ve sağlanan (yerleşen) geliş anlarının sayısı gösterildiğinde, N_t, λ_p parametrelili Poisson süreci olacaktır. Bundan dolayı N_t sürecinin Poisson özelliklerini sağlaması gerekir.

Yani;

$$1) N_t = 0$$

$$2) N_t, t \geq 0 \text{ Bağımsız artımlı ye homojen süreçtir.}$$

$$3) P(N_t = k) = \frac{(\lambda t p)^k e^{-\lambda p}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.19)$$

(1.2.19) ifadesini ispat edelim.

İspat: $H_1, H_2, \dots, H_n$ 'ler Ω 'nın bir ayrışımı ise,

$$\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} H_n, H_i H_j = \emptyset (i \neq j) \quad (1.2.20)$$

Herhangi bir A olayı için,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A/H_i)P(H_i) \quad (1.2.21)$$

$$P(N_t = k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(N_t = k/\mathcal{E}_t = n)P(\mathcal{E}_t = n) \quad (1.2.22)$$

(1.2.22) eşitliği, $[0, t]$ aralığında n gelişten k tanesinin sağlanması ihtimalidir.

$$P\left(N_t = \frac{k}{\mathcal{E}_t} = n\right), (n = k, k + 1, \dots) \quad (1.2.23)$$

(1.2.23) ifadesini hesaplamak için Bernoulli denemelerini ifade edelim ve her bir geliş anını bir Bernoulli denemesi gibi ele alalım. Yani her geliş anının sağlanmasını başarı sonucu gibi düşünelim, n denemede k -tane başarılı sonucun gerçekleşmesi ihtimali,

$$P(N_t = k/\mathcal{E}_t = n) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (1.2.24)$$

k 'nin herhangi bir değeri için Binom İhtimali olur.

$$P(\mathcal{E}_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (1.2.25)$$

(1.2.24) ve (1.2.25) i (1.2.22) de yerine yazarsak;

$$P(N_t = k) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k q^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (1.2.26)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k q^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (\lambda t)^k (\lambda t)^{-k} \frac{k!}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{(\lambda t p)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t q)^{n-k}}{(n-k)!} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$= \frac{(\lambda t p)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda t(1-p)}$$

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t p)^k}{k!} e^{-\lambda t p} \quad k = 1, 2, \dots$$

bulunur. Böylece (1.2.19) ifadesi elde edilir.

1.3 Doğum ölüm Süreçleri

Tanım 1.3.1: Farzedelim $\mathcal{E}_t, t$ sürekli parametrelili ve kesikli durum uzaylı homojen Markov Sürecidir. Bu sürecin geçiş ihtimalleri olan $P_{ij}(h)$ aşağıdaki koşulu sağlar.

$$P_i = (\mathcal{E}_h = j) = P_{ij}(h) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & ; j = i + 1 \\ \mu_i h + o(h) & ; j = i - 1 \\ (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) & ; j = i \\ o(h) & ; d.d. (j = i \mp 2, i \mp 3, \dots) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Bu durumda $\mathcal{E}_t$, sürecine doğum - ölüm süreci denir. λ_i ye doğum μ_i ye ölüm parametresi denir. Farzedelim $P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t)$ dır. Burada $P_k(t) = P(\mathcal{E}_t = k)$ ve bu sürecin $X = (0, 1, \dots)$ olur. Burada $k = 0, 1, \dots$, değerlerini almaktadır. Bu süreçle ilgili olarak aşağıdaki iki problem ortaya çıkabilir.

a) $P_k(t)$ için diferansiyel denklemin bulunması

b) P_k ihtimallerinin hesaplanması.

Burada (a) ve (b)'nin bulunması için geçiş oranlarının hesaplanması gerekir.

Tanıma göre;

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} = P_{i,i+1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,i+1}(h) - P_{i,i+1}(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,i+1}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_i h + o(h)}{h} = \lambda_i \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

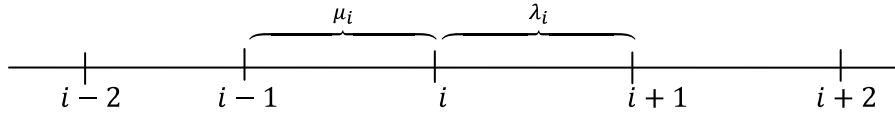
$$\begin{aligned} a_{i,i-1} = P_{i,i-1}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,i-1}(h) - P_{i,i-1}(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,i-1}(h)}{h} = \mu_i \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

olur.

İndislerin farklı olduğu durumları bulduk. Şimdide aynı olduğu durumları inceleyelim. $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 0$ olduğu önceden biliniyor. Burada;

$$\sum_j P_{ij}(t) = 1 \quad (1.3.4)$$

($j = i \pm 2, i \pm 3, \dots$) olduğunda $a_{ij} = 0$ olur.



$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij} &= a_{i0} + a_{i1} + \dots + a_{i,i-2} + a_{i,i-1} + a_{i,i} + a_{i,i+1} + a_{i,i+2} + \dots = 0 \\ &= a_{i,i-1} + a_{i,i} + a_{i,i+1} = 0 \\ &= \lambda_i + a_{ii} + \mu_i = 0 \Rightarrow a_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i) \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

yada tanıma göre;

$$a_{ii} = \begin{cases} \lambda_i & ; & j = i + 1 \\ \mu_i & ; & j = i - 1 \\ -(\lambda_i \mu_i) & ; & j = i \\ 0 & ; & j = i \pm 2, i \pm 3, \dots \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Bu süreç en çok araştırılan süreçtir. Bu tanımda $\mu_i = 0$ yani başlangıçta ölüm yoktur. Burada $\mathcal{E}_t$, Markov sürecidir, a_{ij} 'lerin yardımıyla, $P_j(t) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) a_{ij}$ denklemini açarsak;

$$P_j(t) = P_0(t) a_{0j} + \dots + P_{j-2}(t) a_{j-2,j} + P_{j-1}(t) a_{j-1,j} + P_j(t) a_{jj} + P_{j+1}(t) a_{j+1,j} + P_{j+2}(t) a_{j+2,j} + \dots$$

$$P_j(t) = P_{j-1}(t) a_{j-1,j} + P_j(t) a_{jj} + P_{j+1}(t) a_{j+1,j} \quad (1.3.7)$$

elde ederiz. (1.3.7) denklem sistemi j 'ye göre fark, t 'ye göre diferansiyel denklemlerdir. (1.3.7) denkleminin her iki tarafı için (stady-state) denge durumu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P'_j(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (P_{j-1}(t) a_{j-1,j} + P_j(t) a_{jj} + P_{j+1}(t) a_{j+1,j}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_{j-1}(t) a_{j-1,j} + \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t) a_{jj} + \lim_{t \rightarrow \infty} P_{j+1}(t) a_{j+1,j} \\ &= P_{j-1} a_{j-1,j} + P_j a_{jj} + P_{j+1} a_{j+1,j} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} P'_j(t)$ 'yi hesaplayalım,

$$\sum P_i(t) a_{ij} = 0 \quad (1.3.9)$$

$P_k(t) \rightarrow k$ olduğunda, $P'_k(t) \rightarrow P'_k(t) = 0$ olur. (1.3.8)'dan

$$0 = \lambda_{j-1} P_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) P_j + \mu_{j+1} P_{j+1} \quad (1.3.10)$$

elde edilir.

(1.3.10) denklem $j = 0$ alırsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$-\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 = 0 \quad (1.3.11)$$

(1.3.10) denklem sistemini çözersek,

$$-\lambda_j P_j + \mu_j P_j + \lambda_{j-1} P_{j-1} + \mu_{j+1} P_{j+1} = 0 \quad (1.3.12)$$

$$\underbrace{\mu_{j+1} P_{j+1} - \mu_j P_j}_{u_j} = \underbrace{\mu_j P_j - \lambda_{j-1} P_{j-1}}_{u_{j-1}} \quad (1.3.13)$$

$$u_j = u_{j-1} \Rightarrow u_j = u_{j-1} = u_{j-2} = \dots = u_1 = u_0 = 0 \quad (1.3.14)$$

$j = 0$ için $u_0 = 0$ alalım.

$$u_j = 0 \Rightarrow u_{j+1} P_{j+1} - \lambda_j P_j = 0 \quad (1.3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{j+1} &= \frac{\lambda_j P_j}{u_{j+1}} \quad (j = 0, 1, \dots) \\ P_j &= \frac{\lambda_{j-1} P_{j-1}}{u_j}, P_{j-1} = \frac{\lambda_{j-2} P_{j-2}}{u_{j-1}}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.3.16)$$

$j = 0$ için;

$$P_1 = \frac{\lambda_0 P_0}{u_1} \quad (1.3.17)$$

olur. O halde;

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \cdot \frac{\lambda_{j-2}}{\mu_{j-1}} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \\ P_j &= \frac{\lambda_{j-1} \lambda_{j-2} \dots \lambda_0}{\mu_j \mu_{j-1} \dots \mu_1} P_0 \\ P_j &= \theta_j P_0 \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1 \text{ elde edilir.}$$

$(\mathcal{E}_{t+h} = j) = \cup_{i=1}^N (\mathcal{E}_{t+h} = j, \mathcal{E}_t = j)$ denkleminde her iki tarafı j üzerinden toplarsak;

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j P_0 \Rightarrow P_0 \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j} \quad (1.3.19)$$

bulunur.

$$(\mathcal{E}_{t+h} = j) = (\mathcal{E}_{t+h} = j, \mathcal{E}_t = 0) \cup (\mathcal{E}_{t+h} = j, \mathcal{E}_t = 1) \cup \dots \cup (\mathcal{E}_{t+h} = j, \mathcal{E}_{t+h} = N)$$

denkleminde x 'i yerine yazarsak;

$$P_j = \frac{\theta_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j}$$

olur. Burada,

1) $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j < \infty$ (seri yakınsak). Bu durumda P_j 'ler bulunur (istasyonel dağılım vardır).

2) $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \infty \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\infty} = 0$

$$P_j = \theta_j P_0 = \frac{\theta_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j} = \theta_j 0 = 0$$

Bu durumda limit dağılımı yada denge durumu (stady-state) veya istasyonel dağılım yoktur. İstasyonel dağılımın olabilmesi için,

i. $P_j \geq 0$

ii. $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$

olmalıdır.

1.4. Bekleme Hattı Sistemi

Bekleme hattı, belirli bir zaman birimi içerisinde iş bitirme hizmetinin yürütüldüğü bir veya çok sayıda hizmet merkezlerine işi bitirilecek olandan fazla birimlerin gelmesi halinde ortaya çıkmaktadır.

Bekleme hattı sistemleri genellikle; benzin istasyonları, park yerleri, bakkal, market, doktor muayenahaneleri, uçakların havalanmak veya inmek için beklemeleri, müşterilerin bankalarda para çekmek, yatırmak ve benzeri hizmetler için beklemeleri ile çeşitli büro ve iş merkezlerinde işin niteliğine göre oluşan kuyruklardan dolayı beklemelerini sayabiliriz.

İşte bu tür çözülmesi zor problemler bekleme hattı teorisi, çerçevesinde ele alınmaktadır. Bekleme hattı teorisi, bireysel olaylardan çok kitle olaylarıyla uğraşmaktadır. Bu nedenle bu teori istatistiğin alanına girmektedir.

Bekleme hattı problemlerinin incelenmesi ile ilgili ilk sistematik çalışmaları 1909 yılında Danimarka 'lı A.K. Erlang yayınlamıştır. İlk önce bekleme hattı problemleri telefon şebekelerinde sınırlı kalmıştır. Daha sonra sistem geliştirilmiştir, ikinci dünya savaşı yıllarında cepheden sağ salım gelen uçaklar, kısmen de inişi iznini beklerken vurulmuş, kısmen de havaalanı üzerindeki bekleme alanında yakıt bitmesinden düşmek zorunda kalmıştır. İşte bu sebeplerden dolayı askeri yetkililer beklemekten dolayı bu vahim sonuçları asgariye indirme problemini çözmeye uğraşmışlardır.

Bekleme hattı problemlerinin sistematik inceleme amacını, problemi daha açık hale getirebilmek için önce problemin tasvir edilmesi teşkil etmektedir. Bundan sonra bekleme hattı teorisi optimum çözümler için kullanılabilir. Genellikle beklemek hiç hoş bir olay olmayıp, maliyete neden olduğu gibi, benzeri bazı sakıncaları da vardır. Diğer taraftan ek hizmet merkezlerinin kurulması ve yaşatılması da aynı şekilde maliyetlere neden olmaktadır. Dolayısıyla bir bekleme hattı sistemi ile ilgili karar alma sırasındaki hizmet kapasitesinin genişletilmesi için yapılacak maliyetler ile hizmet bekleyen birimlerin bekleme sürelerinden kaynaklanacak sakıncaların karşılaştırılması gerekecektir. Bu şartlar altında bekleme ve hizmet maliyetleri minimum kılınacaktır. Bekleme maliyetlerine kuyrukta beklemekten vazgeçen müşteriden sağlanacak kârı da kayıp kâr olarak dahil edilmelidir.

Bekleme hattı problemlerinde tesadüf önemli bir rol oynamaktadır. Bir taraftan hatta bir birimin gelişi farklı aralıklarda, yani tesadüfi (stokastik) olarak gerçekleşmekte, diğer taraftan genellikle iş bitirme süresi tesadüften farklı olmaktadır. Aksamaları tespit edebilmek ve önleyebilmek amacıyla hattın uzunluğu, ortalama bekleme süresi veya hizmet yerlerinin sayısı ile ilgili sorulara genellikle ihtimal hesapları veya matematiksel istatistiğin uygun yöntemleriyle cevap vermemiz gerekiyor.

1.4.1 Kuyruk Modelinde Geliş ve Hizmet Yapısını Açıklamakta Kullanılan Dağılımlar

Kuyruk modellerinde müşterilerin geliş yapısının ve onlara verilen servis (hizmet) yapısının bilinmesi önemlidir. Müşterilerin kuyruk sistemlerine gelişleri tesadüfi olabileceği gibi önceden de bilinebilir. Müşterilerin gelişleri genellikle tesadüfi olduğu kabul edilir ve gelişler ile gelişler arası süreyi açıklamada olasılık dağılımlarından daha çok Poisson ve Üstel dağılım kullanılır. Müşterilerin kuyruk sistemlerine geliş süreçleri, geliş oranları ve gelişler arasındaki süre bulunarak açıklanır. Geliş oranı (λ) zaman birimi başına müşterilerin kuyruk sistemine geliş sayısıdır ve Poisson dağılımına sahiptir.

Gelişler arası ortalama süre ($1/\lambda$), burada (λ) ortalama geliş oranıdır. Eğer müşterilerin geliş sayıları (ortalama geliş oranı λ) Poisson dağılımlı ise gelişler arasındaki süre $1/\lambda$ ile üstel dağılımlıdır. Bir başka deyişle gelişler arası süre üstel dağılım ise müşterilerin gelişleri Poisson dağılımlı olmalıdır.

Servis oranı (μ), zaman birimi başına servis sayısıdır. Servis süresi, bir servisi gerçekleştirmek için gerekli olan zamandır. Poisson, üstel dağılımları kuyruk teorisinde önemli bir rol oynar. Bilindiği gibi, Poisson ve Üstel dağılımlar Poisson süresince sağlanır. Poisson süreci tesadüfi bir süreç olup aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

a) Süreç bellekli değildir. Yani bir zaman aralığında meydana gelen olayların sayısı daha önceki dönemlerde meydana gelen olaylardan bağımsızdır.

b) Süreç oranları (geliş oranı λ ve servis oranı μ) ele alınan tüm zaman döneminde sabit varsayılır.

c) Küçük zaman biriminde meydana gelen bir olayın olasılığı, süreç oranı ile zaman birimi çarpımıdır.

d) Sürecin belirli bir zaman aralığında meydana gelen geliş ve servislerin tamamlanma sayılarının olasılığını sağlayan dağılım Poisson dağılımıdır.

e) Süreç olaylarının (geliş ve servisin tamamlanması) meydana gelişleri arasındaki sürelerin olasılığını sağlayan dağılım Üstel dağılımdır.

1.4.2. Bekleme Hattı Probleminin Temel Kavramları

Geliş hizmet oranlarını yukarıda tanımladık. Bunlardan başka temel kavramları şunlardır:

1) Kuyruk (servis) Disiplini:

Hangi müşterinin daha sonra hizmet göreceğini belirleyen yöntemdir. Genellikle ilk gelene ilk hizmet (FIFO) disiplini uygulanır.

2) Geliş Kaynağı:

Müşterileri veren grubun büyüklüğü veya hacmidir. Az sayıda potansiyel müşteri varsa, ana kitle sonludur. Potansiyel müşteri sayısı çoksa (Örneğin 30 veya 50'nin üzerindeki müşteri) geliş kaynağı sonsuzdur.

3) Kuyrukta Ortalama Müşteri Sayısı (L_q):

Servis görmek üzere beklemekte olan müşteri sayısıdır. Buna kuyruk uzunluğu da denir.

4) Sistemde Ortalama Müşteri Sayısı(L_s):

Servis görmekte ve kuyrukta bekleyen müşteri sayısıdır.

5) Kuyrukta Bekleme Süresi(W_q):

Bir müşterinin kuyrukta bekleyerek harcadığı süredir.

6) Müşterinin kuyrukta bekleme süresi (WS):

Müşterinin kuyrukta bekleme süresi serviste ile serviste harcadığı sürenin toplamıdır.

7) Servis sisteminde Ortalama Müşteri Sayısı (L_n):

Bekleme hattında hiç müşteri olmadığı süreler düşünülmeden kuyrukta bekleyen ortalama veya ümit edilen müşteri sayısıdır.

8) Bir Müşterinin Ortalama Bekleme Süresi (W_n):

Boş olmayan kuyruk sistemlerinde bir müşteri daima kuyrukta beklerse, müşterinin kuyrukta bekleme süresidir. Bu değer servis alanı dolu olduğunda kuyruğa giren bütün müşteriler için ortalama bekleme süresidir.

Kuyruk sistemleri; geliş ve ayrılış dağılımları, kanal özelliği, kuyruk disiplini, müşteri sayısı ve geliş kaynağının sonlu veya sonsuz olduğuna göre bilim adamlarınca kabul edilen belli sembollerle ifade bulmuştur.

1.4.2.1. Kendall-Lee, Taha Simgesi

D.Kendall(1953) çok kanallı kuyruklarda geliş dağılımı, servis süresi dağılımı ve sistemde bulunan paralel servis sayısını tanımlamak üzere faydalı bir notasyon önermiştir. Daha sonra A.Lee(1966) notasyona 4. ve 5. Karakteristikler olan servis disiplini ve sistemde bulunan

maksimum müşteri sayısını eklemiştir. H.A. Taha (1968) altında bir karakteristik olan geliş kaynağını simgelemeye katarak onları daha kapsamlı kılmıştır. Tüm bir simgeleme

$$(a/b/c): (d/e/f)$$

şeklinde. Bu gösterişte bulunan simgelerin anlamları;

- a) Geliş (veya gelişler arası) dağılımı
- b) Ayrılış (veya servis süresi) dağılımı
- c) Sistemde bulunan paralel servis kanalları sayısı
- d) Servis disiplini
- e) Sistemde (servis ye kuyrukta) müsaade edilen
- f) Geliş kaynağı büyüklüğü (müşteri sayısı)

Verilen simgelemede bulunan özellikleri toplu halde açıklamaya çalışalım.

a ve b simgeleri:

M: Poisson geliş ve ayrılış dağılımları (Bu, gelişler arası sürenin veya servis süresinin üstel olması ile aynı anlamdadır).

D: Deterministik gelişler arası süre veya servis süresi

E_k : Gelişler arası veya servis dağılımının Erlang veya Gamma dağılımı

GI: Gelişler (veya gelişler arası sürenin) bağımsız dağılımı

G: Ayrılış (veya servis süresinin) genel simgesi.

c simgesi:

Paralel servis kanalını belirleyen pozitif bir değerdir.

d simgesi:

FIFO: İlk giren ilk çıkar (first in first out)

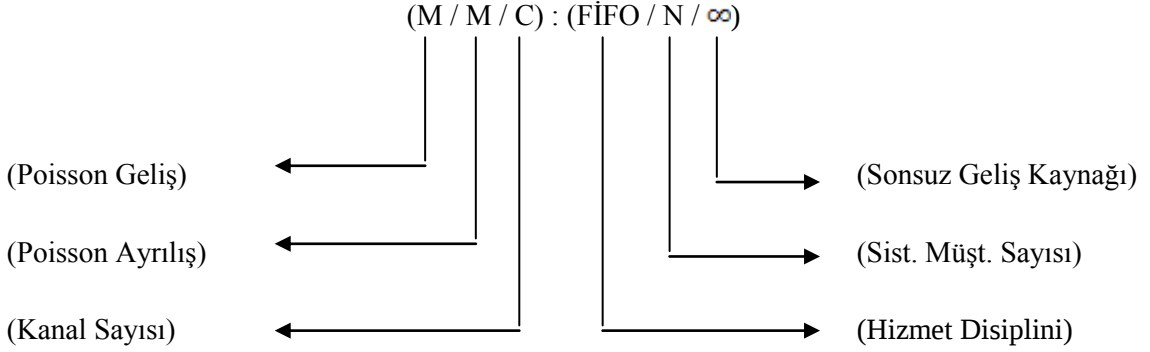
LCFS: Son giren ilk çıkar (last come first served)

SIRO: Rastgele servis (Service in random order)

GD: Genel servis disiplini (General service discipline)

e ve f simgesi:

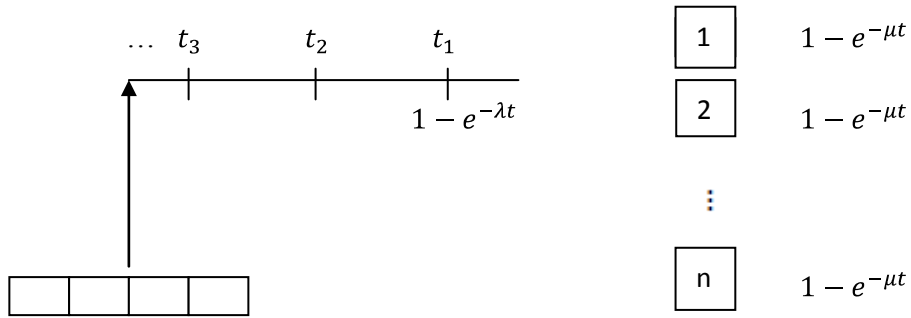
Sonlu ve sonsuz kuyruklarda olmak üzere sistemde ve geliş kaynağında bulunan birey sayısını vermektedir. Şu şekilde açıklarsak,



olur.

1.4.3. M/ M / n Sistemi

Bu sistem, k müşteri gelişli n kanallı, gelişler ve ayrılışlar Poisson, hizmet süresi de üstel dağılıma uyan bir sistem olup, hizmet disiplini ilk gelene ilk hizmet biçimindedir. Kanallar dolu olduğunda müşteri bekleme hattına girer. Bu sistem aşağıdaki şekil yardımıyla gösterilebilir.



Şekil (1.4.1)

1.4.3.1 Lemma

Farzedelim $\frac{\lambda}{n\mu} < 1$ koşulu vardır. Bu durumda $\mathcal{E}_t$: t anında sistemde hizmet alan müşteri sayısı olmak üzere,

$$P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\mathcal{E}_t : k) \quad (1.4.1)$$

limiti vardır. Limiti varsa $P_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ ($P_0, P_1, \dots$) şartını sağlıyorsa P_k 'ya Ergodik dağılım denir. M/M/n sistemi için ergodiklik şartı $\lambda/n\mu < 1$ 'dir.

Bir servis sistemini incelerken iki önemli problemle karşılaşırız.

- 1) Ergodik dağılımın mevcut olması gerekir.
- 2) Ergodik dağılımın hesaplanması gerekir.

t anında sisteme gelen müşteri sayısı N_t ise $EN_t = \lambda_t$ ve $EN_1 = \lambda_1$ olur. Burada;

λ : Birim zamanda sisteme gelen ortalama müşteri sayısı,

$n\mu$: Birim zamanda hizmet alan ortalama müşteri sayısıdır.

$\lambda < n\mu \Rightarrow$ Sistemde hiçbir zaman sonsuz sayıda müşteri olmaz. Yani sistem, gelen bütün müşterilere hizmet verebilir. Ergodikliğin anlamı da budur.

Kabul edelim ki $\lambda/n\mu < 1$ şartı doğrudur. 0 zaman P_k ihtimalini hesaplamak gerekir. P_k ihtimalini hesaplamak için doğum ve ölüm sürecini kullanalım. $\mathcal{E}_t, t \geq 0$ doğum ve ölüm sürecidir. Önce bu sürecin parametresini bulalım.

1.4.3.2 Doğum parametresinin bulunması

Önce, sistemde k tane müşteri olduğunu varsayalım ve h süresinde sisteme 1 müşterinin gelmesi ihtimalini bulalım. η bir müşterinin hizmet süresi olsun

$$P_{k,k+1} = P\left(\mathcal{E}_{t+h} = k + \frac{1}{\mathcal{E}_t} = k\right) \quad (1.4.2)$$

$$= P(\mathcal{E}_h = 1)[P(\eta > h)]^k \quad (1.4.3)$$

$$= P(\mathcal{E}_h = 1)[1 - P(\eta > h)]^k$$

$$= e^{-\lambda h} \lambda h e^{-\lambda h k}$$

$$= [1 - \lambda h + o(h)] \lambda h e^{-\lambda h k} \quad (1.4.4)$$

(1.4.4) ifadesinde limite geçerse,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{k,k+1}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda h e^{-\lambda h k} - (\lambda h)^2 e^{-\lambda h k} + o(h)}{h} \right) = \lambda \quad (1.4.5)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{k,k+1}(h)}{h} = \lambda \Rightarrow P_{k,k+1}(h) = \lambda h + o(h) \quad (1.4.6)$$

olur. (1.3.1), (1.3.10) ve (1.3.6) eşitliklerinden

$$P'_{k,k+1}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{P_{k,k+1}(h) - P_{k,k+1}(0)}{h} \right], P_{k,k+1}(0) = 0 \quad (1.4.7)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda h + o(h) - 0}{h} \right) = \lambda \quad (1.4.8)$$

Böylece $\lambda_k = \lambda$ olduğu bulunur.

1.4.3.3. Ölüm Parametresinin Bulunması

$$\mu_k = \alpha_{k,k-1} = P'_{k,k-1}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{k,k-1}(h) - P_{k,k-1}(0)}{h} \quad (1.4.9)$$

Eğer herhangi bir anda sistemde k tane müşteri varsa h süresinde bir müşterinin hizmet almasını tamamlaması ihtimali; yada bir kanalın boşalması ve h süresinde hiç müşteri gelmemesi ihtimali $P_{k,k-1}(h)$ 'dır.

$P_{k,k-1}(h)$ 'ın bulunması:

a) $k \leq n$ ise sistemde bekleme yoktur (müşteri sayısı en fazla kanal sayısına eşittir).

$$P_{k,k-1}(h) = P(\mathcal{E}_h = 0)P(\mu_h = 1) \quad (1.4.10)$$

Bir kanalın boşalması ihtimali $1 - e^{-\mu h} (= P)$

Bir kanalın boşalmaması ihtimali $e^{-\mu h} (= q)$

k kanaldan birisinin boşalması yada hizmetin tamamlanması ihtimali; $P = 1 - e^{-\mu h}$ ve $q = e^{-\mu h}$ 'dır yani $\binom{k}{1} = C_k^1$ şeklinde boşalacaktır. Bunu Bernolli denemeleri biçiminde ele alacak olursak,

$$p(\mu_h = 1) = C_k^1 P^1 q^{k-1} (1 - e^{-\mu h})^1 (e^{-\mu h})^{k-1} \quad (1.4.11)$$

(1.4.10) 'da (1.4.11)'i yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} P_{k,k-1} &= e^{-\lambda h} \binom{k}{1} (1 - e^{-\mu h})^1 (e^{-\mu h})^{k-1} + o(h) \\ &= k \left[(e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h} e^{-\mu h})^1 e^{-\mu h k-1} \right] + o(h) \\ &= k \left[e^{-\lambda h} e^{-\mu h k-1} - e^{-\mu h} e^{-\mu h k-1} \right] + o(h) \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

(1.4.12) 'yi elde ederek limite geçerse,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{k,k-1}(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} k \left[\frac{e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h k} - e^{-\mu h} e^{-\lambda h k}}{h} \right] + o(h) \\
&= k \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-h(\lambda + \mu(k-1))} - e^{-h(\lambda + \mu k)}}{h} \right]
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

$\frac{0}{0}$ belirsizliği olduğundan L'Hospital kuralı gereğince,

$$= k(-\lambda - \mu_{k-1} + \lambda + \mu_k) = k\mu \tag{1.4.14}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\mu_k = a_{k,k-1} = P'_{k,k-1}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{k,k-1}(h) - P_{k,k-1}(0)}{h}, P'_{k,k-1}(0) = 0 \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{k,k-1}(h)}{h} = k\mu
\end{aligned}$$

$$\text{Sonuç olarak, } k \leq n \text{ için } \mu_k = k\mu \text{ olur.} \tag{1.4.15}$$

b) $k > n$ için (tüm kanallar dolu ise) $\mu_k = ?$

$$P_{k,k-1}(h) = P(\mathcal{E}_h = 0)P(\mu h = 1) \tag{1.4.16}$$

Herhangi bir kanaldan ayrılışın olması; $\mu_k = P'_{k,k-1}(0) = n\mu$ bulunur. Yani; $k > n$ için $\mu_k(h) = n\mu$ bulunur. $\lambda_k = \lambda$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & ; \quad k \leq n \text{ için} \\ n\mu & ; \quad k > n \text{ için} \end{cases}$$

$$P_k = \theta_k \text{ ve } \theta_k = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \dots \mu_k} \tag{1.4.17}$$

$k \leq n$ için θ'_k yı bulalım

$$\theta_k = \frac{\lambda^k}{1\mu 2\mu \dots k\mu} = \frac{\lambda^k}{\mu^k k!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \tag{1.4.18}$$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ olduğundan

$$\theta_k = \frac{1}{k!} (\rho)^k \text{ elde edilir.}$$

$k > n$ için θ_k 'yı bulalım,

$$\begin{aligned}
\theta_k &= \frac{\lambda^k}{\mu_1 \dots \mu_k} = \frac{\lambda^k}{\mu_1 \dots \mu_n \mu_{n+1} \dots \mu_k} \\
&= \frac{\lambda^k}{1\mu 2\mu \dots n\mu (n\mu \dots n\mu)} \\
&= \frac{\lambda^k}{n! \mu^n (n\mu)^{k-n}} \text{ burada } k = k - n + n \text{ alırsak,} \\
&= \frac{\lambda^{k-n+n}}{n! \mu^n (n\mu)^{k-n+n-n}} = \frac{\lambda^{k-n} \lambda^n}{n! \mu^n (n\mu)^{k-n}} \\
&= \frac{\lambda^k}{n! \mu^n (n\mu)^{k-n}} \text{ burada } k = k - n + n \text{ alırsak,} \\
&= \frac{\lambda^{k-n+n}}{n! \mu^n (n\mu)^{k-n+n-n}} = \frac{\lambda^{k-n} \lambda^n}{n! \mu^n (n\mu)^{k-n}} \\
\theta_k &= \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}
\end{aligned} \tag{1.4.20}$$

$P_k = \theta_k P_0$ ’ dan

$$\begin{aligned}
P_k &= \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} P_0 \\
&= \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} \rho^n \frac{1}{n!} P_0 \\
&= P_n \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n}
\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

Böylece aranan ihtimal,

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho}{k!} P_0 & ; \quad k \leq n \\ P_n \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} & ; \quad k > n \end{cases} \tag{1.4.22}$$

olarak bulunur. Burada P_k ; herhangi bir anda sistemde k - tane müşterinin olması ihtimalidir. Müşteri, kanallar dolu olduğu zaman bekleme hattının boşalmasını bekler. Hizmet aldıktan sonrada sistemi terk eder.

$W: (W \geq 0)$ herhangi bir müşterinin sistemde bekleme süresi olsun. Bu tesadüfi değişken dağılım fonksiyonu ve beklenen değerini bulalım:

$P(W = 0)$ ihtimalini hesaplayalım. Bu ihtimal sürekli tesadüfi değişkenler için sıfırdır. Bekleme süresi (waiting time)

$$P(W = 0) = 1 - P(W > 0) \quad (1.4.23)$$

$$P(W > 0) = P(\mathcal{E} \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(\mathcal{E} = k) = \sum_{k=n}^{\infty} P_k$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} P_n \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} = \frac{\rho_n}{1 - \frac{\rho}{n}} < 0 \quad (1.4.24)$$

Sisteme gelen müşterinin sistemde beklemesi için $\mathcal{E}$ 'nin en az n olması gerekir $\left(\frac{\rho}{n} < 1\right)$.

$\mathcal{E}$: sistemde olan müşteri sayısı olsun. Burada W sürekli değildir.

$$P(W = 0) = 1 - \frac{\rho_n}{1 - \frac{\rho}{n}} \quad (1.4.25)$$

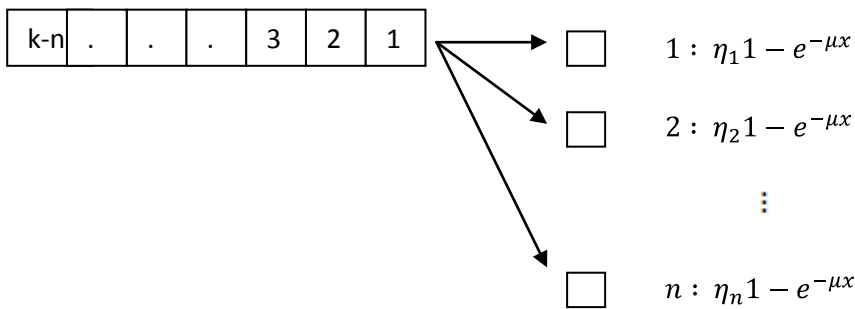
W 'nın dağılım fonksiyonunu bulursak,

$$P(W < t) = 1 - P(W \geq t) \quad t \leq 0 \text{ ise } F(t) = 0$$

elde edilir. $t > 0$ ise $P(W \geq t)$ 'yi bulalım.

Bu ihtimali bulmak için tam ihtimal formülünden yararlanalım.

$$P(W \geq t) = \sum_{k=n}^{\infty} P(W > t/\mathcal{E}_t = k) P_k(t) \quad (1.4.26)$$



$\mathcal{E} = k$ olduğunda $W = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_{k-n+1}$ olur. $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ 'ler aynı dağılıma sahiptir. Her biri n kanaldan en az birinin boşalmasına kadar geçen süredir.

η : n kanaldan en az birinin boşalmasına kadar geçen süre;

$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{k-n+1}$ 'ler bağımsız tesadüfi değişkenlerdir. W 'nın dağılım fonksiyonunu bulmak için $\mathcal{E}$ 'lerin herhangi birisinin dağılım fonksiyonunu bulmak yeterlidir.

η_i : i . müşterinin hizmet süresi

η : $\min (\eta_1, \dots, \eta_n)$

η 'nın dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} P(\eta > t) &= P(\eta_1 > t) \dots P(\eta_n > t) \\ &= e^{-\lambda t} \dots e^{-\lambda t} = e^{-n\lambda t} \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

olur. Yani her bir $\mathcal{E}_i$, $n\lambda$ parametrelili üstel dağılıma sahiptir. Farzedelim $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'ler bağımsız ve her biri μ parametrelili üstel dağılıma sahiptir. $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 'lerin yoğunluk fonksiyonu, (Poisson dağılımı özelliğinden)

$$\frac{a(ax)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-ax} = f_n(x)$$

biçimindedir.

W 'nın yoğunluk fonksiyonu,

$$f_w(x/k) = \frac{n\mu(n\mu)^{k-n}}{(k-n)!} \quad (1.4.28)$$

dır.

$$P(W > t/\mathcal{E} = k) = \int_t^\infty \frac{n\mu(n\mu)^{k-n}}{(k-n)!} e^{-n\mu x} dx \quad (1.4.29)$$

P_k ve $P(W > t/\mathcal{E} = k)$ değerlerini (1.4.26) formülünde yerine koyalım.

$$P(W \geq t) = \sum_{k=n}^\infty \left(\int_t^\infty \frac{n\mu(n\mu)^{k-n}}{(k-n)!} e^{-n\mu x} dx \right) P_n \quad (1.4.30)$$

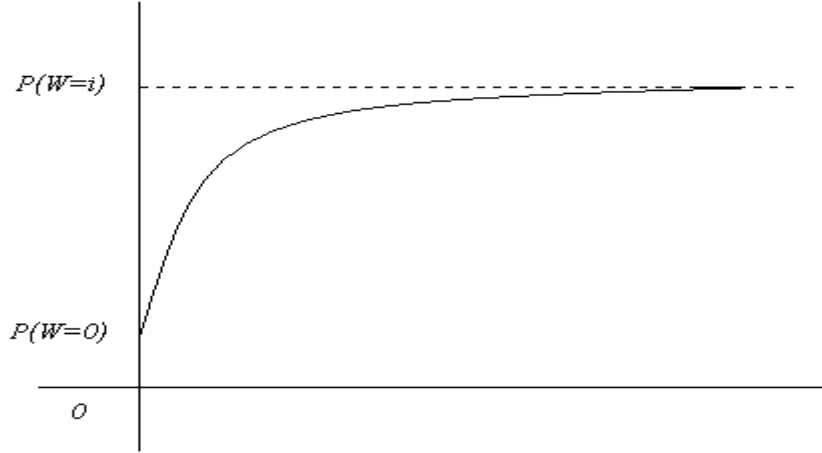
$$= \int_t^\infty \left(\sum_{k=n}^\infty \frac{(n\mu)^{k-n}}{(k-n)!} e^{-n\mu x} \right) dx n\mu P_n \quad (1.4.31)$$

$$= n\mu P_n \int_t^\infty e^{\mu \rho x - n\mu x} dx \quad (1.4.32)$$

$$= -\frac{nP_n\mu}{(n-\rho)\mu} e^{-(n-\rho)\mu x} \Big|_t^\infty \quad (1.4.33)$$

$$= \frac{nP_n\mu}{(n-\rho)\mu} e^{-(n-\rho)\mu x} = P(W \geq t) \quad t > 0 \text{ için} \quad (1.4.34)$$

Bu fonksiyon hem kesikli hem de süreklidir. Buna mixed (karışık) dağılım denir



Sonuç olarak;

$$P(W < t) = 1 - \frac{nP_n\mu}{(n-\rho)\mu} e^{-(n-\rho)\mu t}$$

$$P(W \geq t) = \frac{nP_n\mu}{(n\mu - \lambda)} e^{-(n-\rho)t} \quad t > 0 \text{ için}$$

W 'nın dağılım fonksiyonunu bulduk.

Şimdi $\mathcal{E}_q$ 'nin beklenen değerini bulalım:

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} P_0 & ; \quad 0 \leq k < n \\ P_n \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} & ; \quad k \geq n \end{cases}$$

Burada ; $P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$ dir.

$\mathcal{E}_q$: bekleme hattındaki müşteri sayısı

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{E}_q = k - n) &= L_q = \sum_{k=n}^{\infty} (k - n) P_n \left(\frac{\rho}{n} \right)^{k-n} \\
&= P_n \sum_{k=n}^{\infty} (k - n) \left(\frac{\rho}{n} \right)^{k-n}
\end{aligned} \tag{1.4.35}$$

(1.4.35) ifadesinde $(k - n) = u$ alırsak,

$$\begin{aligned}
&= P_n \sum_{k=n}^{\infty} u \left(\frac{\rho}{n} \right)^u = P_n \left(\frac{\rho}{n} \right) \sum_{k=n}^{\infty} u \left(\frac{\rho}{n} \right)^{u-1} \\
&= P_n \left(\frac{\rho}{n} \right) \sum_{k=n}^{\infty} u \frac{d}{d \left(\frac{\rho}{n} \right)} \left(\frac{\rho}{n} \right)^u \\
&= P_n \left(\frac{\rho}{n} \right) \frac{d}{d \left(\frac{\rho}{n} \right)} \left[\sum_{u=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n} \right)^u \right] \\
&= P_n \left(\frac{\rho}{n} \right) \frac{d}{d \left(\frac{\rho}{n} \right)} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)} \right) \\
&= P_n \left(\frac{\rho}{n} \right) \left(\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\rho}{n} \right) \right)^2} \right) = P_n \left(\frac{\rho}{n} \right) \left(\frac{n^2}{(n - p)^2} \right) \\
&= P_n \rho \left(\frac{n}{(n - p)^2} \right) = P_n \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{n}{\left(n - \frac{\lambda}{\mu} \right)^2} \right) \\
&= P_n \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{n\mu^2}{(n\mu - \lambda)^2} = P_n \frac{(\lambda n\mu)}{(n\mu - \lambda)^2} \\
&= \frac{\rho^2}{n!} \frac{(\lambda n\mu)}{(n\mu - \lambda)^2} P_0 = \frac{\left(\lambda/\mu \right)^n (\lambda n\mu)}{n! (n\mu - \lambda)^2} P_0 \\
EE_q = L_q &= \frac{\left(\lambda/\mu \right)^n \lambda\mu}{(n - 1)! (n\mu - \lambda)^2} P_0
\end{aligned} \tag{1.4.36}$$

olarak bulunur.

2. PARALEL İKİ HETEROJEN KANALLI KUYRUK SİSTEMİNİN ANALİZİ VE SEKTÖR ÜZERİNE UYGULAMASI

2.1.Giriş

Temeli 1917 yılında Kopenhagen Telefon Şebekesi'nin mühendisi A.K.Erlang tarafından atılan **Stokastik servis sistemleri** (Fransa'da Bekleme hattı, Amerika ve İngiltere'de ise kuyruk teorisi olarak adlandırılır) hızla gelişerek önemli sonuçlar ve uygulamalarla zenginleştirilmiştir. Bu teorinin gelişmiş ülkelerde çeşitli modelleri gündeme, bilim ve teknolojinin birçok alanlarında (otomatik telefon santralleri, üretim hattı, bilgisayar sistemleri, internet v.s.) başarı ile kullanılmıştır. İlk yıllarda esas problem çeşitli kuyruk sistemlerinin temel karakteristiklerinin hesaplanması olmuştur. Daha sonra bu hesaplamalardan yararlanarak ve ekonomik-teknolojik düşüncelere dayanarak müşterinin kuyrukta beklemesi ve hizmet veren kanalların boş kalmasından doğan masrafları minimuma indirmek ve istenen hizmet seviyesine ulaşmak problemi gündeme gelmiştir.

Yukarıda bahsedilen problemlerin araştırılması neticesinde kuyruk teorisi hızla gelişmiş ve yeni kuyruk modelleri ortaya koyulmuştur. Öyle ki günlük hayatımızın hemen hemen her safhasında mutlak suretle bir kuyrukta bekleme hattı problemi ve buna bağlı olarak müşterinin ya da birimin kaybolma olasılığı ile karşılaşmaktadır. Yönetim bilimi işte bu tür beklemeden kaynaklanan işletmelerin kayıplarını en iyileştirmenin yollarını aramaktadırlar. Bu çalışmada da sektör de bulunan bekleme ve beklemeden kaynaklanan kayıpları en iyileştirme hedef alınmıştır. $M/\bar{M}/2/\infty$ modeli seçilmiş ve bu sistemde müşteri kaybının analizi yapılmıştır.

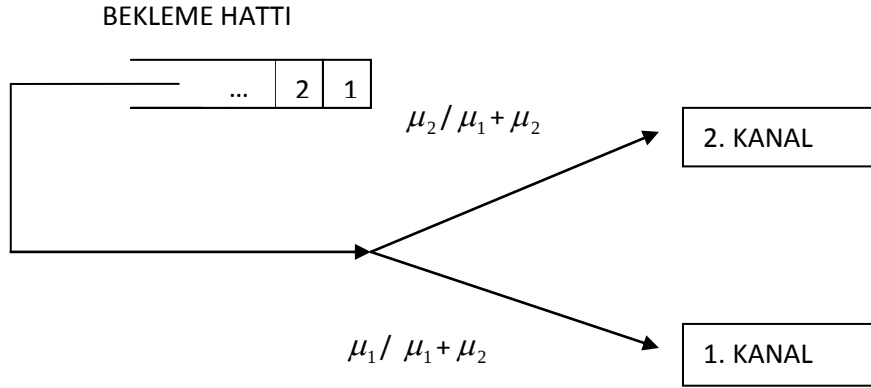
Modelin temel karakteristikleri;

- 1) Kuyruk sistemine gelen müşteriler servis bitene kadar bekleme hattında bekler veya
- 2) Sistem boş ise gelen müşterilere hemen servis verilir ve servisi tamamlanan müşteri sistemi terk eder. Sistem Şekil 2.1 ile şöyle ifade edilebilir:

2.2. Sistemin Tanımı

Poisson geliş akımlı, μ_1 ve μ_2 gibi iki farklı üstel parametrelili paralel kanaldan oluşan bir sistem göz önüne alınıyor. Bekleme hattında sınırsız sayıda müşteri olabilir. Ayrıca kanalların her ikisi de boş olduğunda sisteme gelen müşteri $\mu_1/\mu_1 + \mu_2$ ihtimali ile 1. kanalı, $\mu_2/\mu_1 + \mu_2$ ihtimali ile 2. kanalı tercih eder. Gelen müşteri kanallardan birisi dolu diğeri boş ise, 1 ihtimalle boş olanı seçer.

Müşteri hizmet alıncaya kadar kanallardan birinin boşalmasını bekler. Daha sonra hizmetini alarak sistemi terk eder. Bu sistem aşağıdaki şekilde gösteriliyor.



Şekil 2.1.

2.3. Sisteme Ait Denklemlerin Elde Edilmesi

$P_n(1), n \geq 2$ için t zamanında sistemde n birimin (müşterinin) bulunması ihtimali olsun.

$n = 1$ olduğunda müşteri 1. ya da 2. hizmet kanalında olabilir.

$P_1(1,0,t)$; t zamanında sistemde 1 birimin ya da 1. kanalda bir birimin olduğunu gösterir. İkinci kanal boştur.

Benzer şekilde, $P_1(0,1,t)$; sistemde ya da 2. kanalda 1 birimin olduğu ve birinci kanalın boş olduğunu gösterebilir.

Sistemi tanımlayan denklemler aşağıdaki gibi kurulur (Saaty, 1961)

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu_1 P_1(1,0,t) + \mu_2 P_1(0,1,t)$$

$$P_1'(1,0,t) = -(\lambda + \mu_1) P_1(1,0,t) + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \lambda P_0(t) + \mu_2 P_2(t)$$

$$P_1'(0,1,t) = -(\lambda + \mu_2) P_1(0,1,t) + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \lambda P_0(t) + \mu_1 P_2(t)$$

$$P_2'(t) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_2(t) + \lambda[P_1(1,0,t) + P_1(0,1,t)] + (\mu_1 + \mu_2)P_3(t)$$

$$P_n'(t) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (\mu_1 + \mu_2)P_{n+1}(t), \quad n > 2$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} < 1 \text{ varsayımı altında (steady-state) denge-durum denklemleri sağlanır}$$

ve zamana göre türevleri alınarak 0'a eşitlendiğinde aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$0 = -\lambda P_0 + \mu_1 P_1(1,0) + \mu_2 P_1(0,1) \quad (2.3.1)$$

$$0 = -(\lambda + \mu_1) P_1(1,0) + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \lambda P_0 + \mu_2 P_2 \quad (2.3.2)$$

$$0 = -(\lambda + \mu_2) P_1(0,1) + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \lambda P_0 + \mu_1 P_2 \quad (2.3.3)$$

$$0 = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_2 + \lambda[P_1(1,0) + P_1(0,1)] + (\mu_1 + \mu_2)P_3 \quad (2.3.4)$$

$$0 = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_n + \lambda P_{n-1} + (\mu_1 + \mu_2)P_{n+1}, \quad n > 2 \quad (2.3.5)$$

2.4. Denklem Sisteminin Çözümü

(2.3.2) ve (2.3.3) denklemleri sistemde 1 müşteri olduğu, fakat farklı kanallarda bulunma durumu gösterdiği için birlikte çözümünü yapalım.

$$0 = -(\lambda + \mu_1) P_1(1,0) + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \lambda P_0 + \mu_2 P_2$$

$$0 = -(\lambda + \mu_2) P_1(0,1) + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \lambda P_0 + \mu_1 P_2$$

Kolaylık olması bakımından $\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = \pi$ ve $\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = 1 - \pi$ ile gösterelim, ayrıca

$\rho = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} < 1$ varsayımı altında bu denge-durum (steady-state) denklemleri sağlanır.

Bu iki denklemi alt alta topladığımızda,

$$-(\lambda + \mu_1)P_1(1,0) - (\lambda + \mu_2)P_1(0,1) + \pi \lambda P_0 + (1 - \pi) \lambda P_0 + (\mu_1 + \mu_2)P_2 = 0$$

olur.

$$-(\lambda + \mu_1)P_1(1,0) - (\lambda + \mu_2)P_1(0,1) + \pi \lambda P_0 - \pi \lambda P_0 + \lambda P_0 + (\mu_1 + \mu_2)P_2 = 0$$

$$-(\lambda + \mu_1)P_1(1,0) - (\lambda + \mu_2)P_1(0,1) + \lambda P_0 + (\mu_1 + \mu_2)P_2 = 0$$

$(\mu_1 + \mu_2)$ ile eşitliğin her iki tarafını bölelim,

$$-\frac{(\lambda + \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2}P_1(1,0) - \frac{(\lambda + \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}P_1(0,1) + \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}P_0 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}P_2 = 0$$

Ortak parantezlere aldığımızda;

$$-\left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\right]P_1(1,0) - \left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right]P_1(0,1) + \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}P_0 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}P_2 = 0$$

$\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} = \rho, \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = \pi, \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = 1 - \pi$ olarak ifade edilmişti. Yerine yerleştirdiğimizde;

$$-\left[\rho + \pi\right]P_1(1,0) - \left[\rho + (1 - \pi)\right]P_1(0,1) + \rho P_0 + P_2 = 0$$

buluruz. Parantezi açtığımızda,

$$-\rho P_1(1,0) - \pi P_1(1,0) - \rho P_1(0,1) - (1 - \pi)P_1(0,1) + \rho P_0 + P_2 = 0$$

Elde edriz. Sistemde 1 müşteri bulunması ihtimalini,

$$P_1 = P_1(1,0) + P_1(0,1)$$

şeklinde ifade ettiğimizde;

$$-\rho [P_1(1,0) + P_1(0,1)] - \pi P_1(1,0) - (1 - \pi)P_1(0,1) + \rho P_0 + P_2 = 0$$

$$-\rho P_1 - \pi P_1(1,0) - (1 - \pi)P_1(0,1) + \rho P_0 + P_2 = 0 \quad (2.4.1)$$

elde ederiz. (2.3.1) denklemini alalım.

$$0 = -\lambda P_0 + \mu_1 P_1(1,0) + \mu_2 P_1(0,1)$$

Her iki tarafı $(\mu_1 + \mu_2)$ 'ye bölelim.

$$-\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} P_0 - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} P_1(1,0) + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} P_1(0,1) = 0$$

Yine aynı şekilde;

$$-\rho P_0 - \pi P_1(1,0) - (1 - \pi)P_1(0,1) = 0 \quad (2.4.2)$$

$$0 = \lambda(P_0 - 1) + (\mu_1 + \mu_2)(1 - P_0)(\mu_1 + \mu_2)P_1$$

olur. Her iki tarafı $(\mu_1 + \mu_2)$ ifadesine böldüğümüzde,

$$0 = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (P_0 - 1) + \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)} (P_0 - 1) - \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)} P_1$$

gerekli sadeleştirmeler sonucu;

$$0 = \rho(P_0 - 1) + (1 - P_0) - P_1$$

$$0 = -\rho(1 - P_0) + (1 - P_0) - P_1$$

$$0 = (1 - P_0)(1 - \rho) - P_1 \text{ ise;}$$

$$P_1 = (1 - \rho)(1 - P_0) \quad (2.4.3)$$

olarak bulunur.

2.5. Denklemin Parametrelerinin Bulunması

2.5.1. Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

L: sistemdeki ortalama müşteri sayısı olmak üzere;

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n$$

$P_1 = (1 - \rho)(1 - P_0)$ (1.3.4) de bulunmuş idi. Bu ifade $P_n = \rho^{n-1}P_1$ ifadesinde yerine konulduğunda

$P_n = \rho^{n-1}(1 - \rho)(1 - P_0)$ olarak elde edilir.

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n (1 - \rho) \rho^{n-1} (1 - P_0)$$

$$= (1 - \rho)(1 - P_0) \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$$

Geometrik diziden $\sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} = \frac{1}{(1 - \rho)^2}$ olarak bulunur. Yerine yazıldığında

$$L = (1 - \rho)(1 - P_0) \frac{1}{(1 - \rho)^2}$$

elde edilir. Sadeleşme sonucu,

$$L = \frac{1 - P_0}{1 - \rho}$$

bulunur.

$P_0 = 1 - \rho$ idi. Yerine konulduğunda

$$L = \frac{1 - (1 - \rho)}{1 - \rho} = \frac{1 - 1 + \rho}{1 - \rho}$$

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} \tag{2.5.1}$$

elde edilir.

2.5.2. Sistemde Ortalama Bekleme Süresi

W: Sistemde ortalama bekleme süresi

Bir steady-state kuyruk sisteminde;

$\frac{1}{\lambda}$:Ard arda gelen iki müşterinin gelişleri arasındaki ortalama zaman

L: Sistemde müşterilerin ortalama sayısı veya kuyruk uzunluğu

W:Sistemde bir müşterinin servis alırken harcadığı ortalama zaman

Bu üç ortalama sonlu ise çok genel kesin şartlarla karşılaşır.(Allen, 1978).

O zaman $L = \lambda W$

$$\text{ve } L_q = \lambda W_q$$

İle gösterilen formülü ilk kez ortaya atan Little'dir. Bu formül Little formülü adı ile anılır.

Little formülüne göre

$$L = \lambda W \text{ idi.}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} \text{ olur.}$$

(2.5.1)'ü yerine koyduğumuzda

$$W = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) \quad (2.5.2)$$

bulunur.

2.5.3. Kuyrukta Bekleyen Ortalama Müşteri Sayısı

$$EL_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)P_n$$

$$P_n = P_2 \rho^{n-2} \text{ olduğundan}$$

Yerine yazarsak;

$$L_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)P_2 \rho^{n-2}$$

$$= P_2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-2) \rho^{n-2}$$

$n-2 = u$ diyelim.

$$= P_2 \sum_{u=0}^{\infty} u \rho^u \text{ olur}$$

$$\begin{aligned}
&= P_2 \rho \sum_{u=1}^{\infty} u \rho^{u-1} \\
&= P_2 \rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{u=0}^{\infty} \rho^u \right) \\
&= P_2 \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \\
&= P_2 \rho \left(\frac{1}{(1-\rho)^2} \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$P_2 = \rho P_1$$

$$P_1 = (1-\rho)(1-P_0)$$

$$P_2 = \rho(1-\rho)(1-1+\rho)$$

$$P_2 = \rho^2(1-\rho)$$

olduğundan yerine konulunca,

$$L_q = (1-\rho) \rho^2 \rho \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$L_q = \frac{\rho^3}{(1-\rho)} \quad (2.5.3)$$

elde edilir.

2.5.4. Kuyrukta Ortalama Bekleme Süresi

Little teoremine göre kuyrukta bekleme süresi

$$L_q = \lambda W_q$$

$$W = \frac{L_q}{\lambda}$$

(2.5.3)'da bulunan kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı,

$$L_q = \frac{\rho^3}{(1-\rho)}$$

Burada yerine yerleştirdiğimiz takdirde yeni denklem,

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho^3}{1-\rho} \right)$$

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho^3}{(1-\rho)} \tag{2.5.4}$$

olarak bulunur.

3. UYGULAMA

İki hizmet kanalına sahip kuyruk sistemlerinin analizinin daha iyi anlaşılabilir olması için Tablo 3.1. de bulunan veriler üzerinde gerekli çalışmalar yapılarak, teori kısmında elde edilen formüllere uygulanırlığı incelenmiştir. Öncelikle bir günlük mesai saatlerinde müşterilerin sisteme geliş anları, bekleme anları, hizmet süreleri ve hangi kanalda hizmet aldıkları tespit edilmiştir. Müşterilerin geliş anlarının hangi dağılıma uyduğu Ki-kare yöntemi ile incelenmiş ve parametresi olan λ elde edilmiştir. Bunun yanında aynı süreç hizmet anlarının dağılımının tespitinde de uygulanmıştır. Burada hizmet anlarının parametresi olarak 1.ci kanalda μ_1 ve 2.ci kanalda ise μ_2 kullanılmıştır. Ki-kare dağılımının $n_i \geq 5$ koşulu altında uygulanabildiği için son iki aralık birleştirilerek aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

$X_i - X_{i-1}$	$0 < X \leq 3$	$3 < X \leq 6$	$6 < X \leq 9$	$9 < X \leq 15$
n_i	80	27	19	7
np_i	68,23	33,11	24,07	6,93
$(n_i - np_i)^2 / np_i$	2,03	1,12	1,06	0,0007

Her bir aralığın ortasını uygun gözlenen değer n_i 'ye çarpıp elde edilen sayıların toplamını 132'ye bölmek suretiyle,

$\bar{X} = [(1,5) \times 80 + (4,5) \times 27 + (7,5) \times 19 + (12) \times 7] / 132 = 3.07$ bulunur. Burada λ parametresi için yaklaşık olarak $\lambda = 1 / 3.07 = 0,326$ bulunur. Şimdi de

$$\begin{aligned}
 P_i &= P(X_{i-1} < X < X_i) \\
 &= F_{(x_i)} - F_{(x_{i-1})} = e^{-\mu_1 x_{i-1}} - e^{-\mu_1 x_i}
 \end{aligned}$$

Formülünü kullanarak P_1, P_2, P_3 ve P_4 ihtimallerini buluruz.

$$P_1 = 1 - e^{-0,72} = 0,513$$

$$P_2 = e^{-0,72} - e^{-1,44} = 0,249$$

$$P_3 = e^{-1,44} - e^{-2,88} = 0,181$$

$$P_4 = e^{-2,88} - e^{-5,76} = 0,0529$$

Şimdide Ki-kare test istatistiğini kullanalım.

$$X_{k-r-1}^2 = \sum_{i=1}^k (n_i - np_i)^2 / (np_i) = \sum_{i=1}^k n_i^2 / (np_i) - n$$

Burada k=4 aralık sayısı r=1 bilinmeyen parametre sayısıdır. $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde $X_1^3 = 4,21$ ve t_{kr} değeri ki-kare tablosundan $t_{kr} = 5,99$ olarak bulunur. $X_n^2 < t_{kr}$ olduğu belirlenir.

$\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyi için $k=4$, $r=1$ olmak üzere $X_h^2 = 4,21$ ve $t_{kr} = 5,99$ olarak bulunur.

H_0 : Veriler üstel dağılıma uyar.

H_1 : Veriler üstel dağılıma uymaz.

Deneyisel ve teorik sonuçları karşılaştırarak $x_h^2 < t_{kr}$ olduğu belirtir. Böylece H_0 kabul edilir. Buradan $\lambda = 0.326$ olduğu görülür.

Hizmet alan müşterilerin hizmet sürelerine göre analizi:

1.ci kanalda toplam 82 müşteri hizmet almış ve hizmet sürelerine göre aşağıdaki gibi gruplandırılmıştır.

X_i	$0 < X \leq 3$	$3 < X \leq 6$	$6 < X \leq 9$	$9 < X \leq 12$	$12 < X \leq 15$
	37	23	17	4	2

Ki-kare dağılımının $n_i \geq 5$ koşulu altında uygulanabildiği için son iki aralık birleştirilerek aşağıdaki aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

$X_i - X_{i+1}$	$0 < X \leq 3$	$3 < X \leq 6$	$6 < X \leq 9$	$9 < X \leq 15$
n_i	37	23	17	6

Her bir aralığın ortasını uygun gözlenen değer n_i 'ye çarpıp elde edilen sayıların toplamını 82'ye bölerek,

$\bar{X} = [(1,5) \times 37 + (4,5) \times 23 + (7,5) \times 16 + (6) \times 12] / 82 = 5,37$ bulunur. Burada μ_1 parametresi için yaklaşık olarak $\mu_1 = 1 / 5,32 = 0,186$ bulunur. Şimdi,

$$P_i = P(X_{i-1} < X < X_i)$$

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = e^{-\mu_1 x_{i-1}} - e^{-\mu_1 x_i}$$

Formülünü kullanarak P_1, P_2, P_3 ve P_4 ihtimallerini buluruz.

$$P_1 = 1 - e^{-0,83} = 0,563$$

$$P_2 = e^{-0,83} - e^{-1,66} = 0,246$$

$$P_3 = e^{-3,32} = 0,1539$$

$$P_4 = e^{-3,32} - e^{-6,64} = 0,0348$$

Bu sayısal sonuçları yukarıdaki tabloda yerine koyalım:

$X_i - X_{i+1}$	$0 < X \leq 3$	$3 < X \leq 6$	$6 < X \leq 9$	$9 < X \leq 15$
n_i	37	23	17	6
np_i	46,16	20,17	12,61	3,86
$(n_i - np_i)^2 / np_i$	1,81	0,397	0,91	1,60

Şimdide Ki-kare test istatistiğini kullanalım:

$$X_{k-r-1}^2 = \sum_{i=1}^k (n_i - np_i)^2 / (np_i) = \sum_{i=1}^k n_i^2 / (np_i) - n$$

Burada $k=4$ aralık sayısı $r=1$ ve $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde $\chi_1^3 = 4,71$ ve t_{kr} değeri Ki-kare tablosundan $t_{kr} = 5,99$ olarak bulunur. $\chi_n^2 < t_{kr}$ olduğu belirlenir.

$X_i - X_{i+1}$	$0 < X \leq 3$	$3 < X \leq 6$	$6 < X \leq 12$	$12 < X \leq 18$
n_i	18	13	12	7

Ki-kare dağılımından;

$$\bar{X} = [(1.5) \times 18 + (4.5) \times 13 + (9) \times 12 + (15) \times 7] / 50 = 5.97$$

$$\mu_1 = 1 / 5.97 = 0.167$$

$$P_1 = 1 - e^{-0.423} = 0.577$$

$$P_2 = e^{-0.423} - e^{-0.846} = 0.226$$

$$P_3 = e^{-0.846} - e^{-1.692} = 0.245$$

$$P_4 = e^{-1.692} - e^{-3.384} = 0.15$$

2.ci hizmet kanalı içinde yine aynı disiplinler uygulanırsa;

$X_i - X_{i+1}$	$0 < X \leq 3$	$3 < X \leq 6$	$6 < X \leq 12$	$12 < X \leq 18$
n_i	18	13	12	7
np_i	28,85	11,3	12,25	7,5
$(n_i - np_i)^2 / np_i$	4,08	0,25	0,25	0,033

$k=4$ aralık sayısı $r=1$ ve $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde $X_1^3 = 4,91$ ve t_{kr} değeri Ki-kare tablosundan $t_{kr} = 5,73$ olarak bulunur. $X_n^2 < t_{kr}$ $4.91 < 5.73$ olduğu belirlenir.

Şimdi de elde edilen formüller yardımıyla istenen parametreleri bulabiliriz:

$P_n(t)$, $n \geq 2$ için t zamanında sistemde n birimin(müşterinin) bulunması ihtimali olsun.

$n=1$ olduğundan müşteri 1. yada 2. hizmet kanalında olabilir

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} < 1 \quad \text{varsayımı altında denge durumları sağlanır. Banka sektöründe bir}$$

günde gelen müşterilerin gelişler arası sürelerin sürekli olduğu dikkate alınarak yapılan hesaplama sonucunda $\lambda = 0,326$ ve gelen müşterilerin 1. kanalda almış oldukları hizmetin ortalama süresi $\mu_1 = 0,186$ ve müşterilerin ikinci kanalda almış oldukları hizmetin ortalama süresi $\mu_2 = 0.167$ olarak hesaplanmış ve $\rho = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} < 1$ varsayımı sağlanmış oldu.

Sistemin boş kalması P_0 idi,

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}$$

$$\lambda = 0.326, \quad \mu_1 = 0.186, \quad \mu_2 = 0.167$$

olmak üzere,

$$\rho = \frac{0.326}{0.186 + 0.167} = \frac{0.326}{0.353} = 0.923$$

Steady-State (denge durumunu) sağlar, buradan $1 - 0.923 = 0.077$ olarak bulunur.

Sistemin boş kalması $P_0 = 0.077$ olur.

Sistemde ortalama müşteri sayısı:

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0.923}{0.077} = 11.98$$

ve sistemde ortalama bekleme süresi ise:

$$W = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho_i}{1 - \rho} \right) = \frac{1}{0.326} (11.98) = 36.74$$

Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı:

$$L_q = \frac{\rho^3}{(1 - \rho)} = \frac{0.786}{0.077} = 10.20$$

Kuyrukta ortalama bekleme süresi:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho^3}{1 - \rho} \right) = \frac{1}{0.326} \left(\frac{0.786}{0.077} \right) = 31.23$$

1.ci kanalın yükü,

$$\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{0.186}{0.353} = 0.526 \Rightarrow \pi$$

2.ci kanalın yükü ise

$$\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{0.167}{0.353} = 0.473 \Rightarrow 1 - \pi \text{ bulunur.}$$

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, Stokastik Süreçler teorisinin önemli bir kısmını oluşturan Poisson ve Markov süreçlerinin tanımı ve özellikleri kısaca verildi. Ayrıca kuyruk modellerine ait genel bilgiler verildi.

Paralel ve heterojen iki kanallı bekleme hattı sisteminin tanımlayan denklemler üzerinde çeşitli matematiksel işlemler yaparak sistem parametreleri hesaplandı. Denklem sisteminin çözümü yapılarak n müşteri olma ihtimali ve sistemin boş olma ihtimali bulundu. Daha sonra bunlar kullanılarak sistem parametreleri olan sistemdeki ortalama müşteri sayısı, sistemde ortalama bekleme süresi, kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı ve kuyrukta ortalama bekleme süresi hesaplandı.

Ayrıca banka sektörü üzerine uygulaması yapıldı. Elde edilen sonuçlara göre sistemin boş kalması olasılığı $P_0 = 0,077$ ve sistemin yükü $\rho = 0,972$ olarak hesaplandı. Buna göre sistemin iyi çalıştığı yorumu yapıldı.

KAYNAKLAR

- [1] Allen, A.O, 1978, Probability, Statistics and Queueing Theory Academic Pres New York, San Francisco. London, 387 p.
- [2] Cooper. R. B. 1972, Introduction to Queueing Theory, The Macmillan Company. New York, 277 p.
- [3] Çinlar. E. 1975, Introduction to Stochastic Processes Prentice Hall Inc.Englewood Clifs, 395p.
- [4] Halaç, O.1991, Kantitatif Karar Verme Teknikleri Evrim Basım Yayın Dağıtım İst. , 579 s.
- [5] İnal, C. 1988, Olasılıksal Süreçlere Giriş. Hacettepe Üniversitesi Yayınları. Ankara 122 s.
- [6] Karayalçın, İ.İ. 1993, Yöneylem “Hareket” Araştırması Menteş Yayınevi.İstanbul. 669 s.
- [7] Kleinrock, L,1975, Queueing Systems Volume I .Theory. John Wiley and Sons.New York. 415p.
- [8] Kleinrock, L. 1976, Queueing Systems Volume II Computer Applications John Wiley and Sons, New York. 549 p.
- [9] Öztürk, A. 1984, Yöneylem Araştırması Uludağ Üniversitesi Basımevi. Bursa 302 s.
- [10] Parzen, E. 1962, Stochastic Processes Holden-Day Inc.San Francisco.361 p.
- [11] Saaty, T.L. 1961, Elements of Queueing Theory with Applications.Mc Grow.Hill Book Company. London 423 p.
- [12] Akalın, S. 1970, Yöneylem Araştırması, Ege Üniversitesi İşletme Fakültesi Yayınları, No:5 İzmir.
- [13] Akdeniz, F. 1984, Olasılık ve İstatistik, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, No:138, Ankara.
- [14] Allen. A.O. , 1978, Probability, Statsitics and Queing Theory With Computer Applicayions. Academic Press, Newyork, San-Francisco, London.
- [15] Ayoun. S. and Rosberg, Z., 1991, Optimal Routing to two Paralel Heterogeneous Serves with resequencing, IEE Transactions on Automomatic Control Vo: 36 No:12.
- [16] Barlett. M.S., 1978, An İntroduction to Stochastic Processes, Cambridge Universty Press.

- [17] Caon. D.R. and Smith. L.W., 1972, Queues, Universty of North Carolina, London.
- [18] Çinlar. E., 1975, Introduction to Stochastic processes Prentice-Hall. Englewood Cliffs Nj.
- [19] Halaç. O., 1991, Kantitatif Karar Verme Teknikleri (Yöneylem Araştırması), İstanbul Üniversitesi. İşletme fakültesi, Evrim Dağıtım, İstanbul.
- [20] Kara. İ., 1976, Servis Sistemleri ve Gelişler Zamana Bağlı Olduğunda Kapasite Sorununa Matematiksel Yaklaşım, E.İ.İ.A. Yayınları, No:160/102, Eskişehir.
- [21] Karayalçın. İ. , 1993, İ. Yöneylem Araştırması, İ.T.Ü. İşletme Fakültesi, Menteş Kitabevi.
- [22] Karlin. S. And Taylor. H.M. A First Course in Stochastic Processes, Second Edition, Stanford Universty and The Weizmann Istitute of Science
- [23] Lin. W. And Kumar., 1984, P.R Optimal Control of a Queueing System with two Heterogenous Servers, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. Ac-84, pp 696-705.
- [24] Öztürk. A., 1984, Yöneylem Araştırması, Uludağ Üniversitesi Yayınları.
- [25] Parzen. E., 1962, Stochastic Processes, Statistical Science Division State Universty of Newyork at Bufalo.
- [26] Rosberg. Z. And Makowski. A., 1990, Optimal Routing to Parallel Heterogenous Servers – Small Arrival Rates, IEEE Trans. Automatic Control. Vol.35, pp:789-796.
- [27] Taha. H., 1976, A. Operations Research An Introduction, Collier Mac Millian International Editions, Newyok.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa ULAŞ 1980 yılında Elazığ'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamladı. 2005 yılında Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'nden mezun oldu. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen yüksek lisansa devam etmektedir.

4. EKLER

Ek : Tablo 3.1.

Müşteri No	Geliş anları, t_k	Gelişler arası süreler $t_{k+1}-t_k$	Bekleme Süresi (dk)	Hizmet Süresi, u_k	1.kanalda alınan hizmet süresi(dk)	2.kanalda alınan hizmet süresi(dk)
1	09:00	----	----	4	4	----
2	09:04	4	----	5	5	----
3	09:07	3	----	3	----	3
4	09:08	1	2	3	3	-----
5	09:11	3	1	5	-----	5
6	09:12	1	3	7	7	----
7	09:15	3	2	2	-----	2
8	09:17	2	3	8	8	
9	09:19	2	---	13	-----	13
10	09:23	4	2	3	3	----
11	09:28	5	1	4	4	-----
12	09:30	2	1	6	-----	6
13	09:31	1	4	12	5	-----
14	09:32	1	6	9	-----	9
15	09:40	8	2	8	8	-----
16	09:44	4	3	13	-----	13
17	09:45	1	5	11	11	-----
18	09:49	4	7	8	8	-----
19	09:51	2	6	4	-----	4
20	09:53	2	3	4	4	-----
21	09:55	2	2	9	9	-----
22	09:56	1	3	11	-----	11
23	10:06	10	2	3	3	-----
24	10:07	1	4	7	7	-----
25	10:09	2	-----	6	-----	-----
26	10:12	3	3	4	4	-----
27	10:13	1	-----	6	-----	6

28	10:17	4	2	8	8	-----
29	10:20	3	3	4	-----	4
30	10:23	3	2	12	12	-----
31	10:25	2	1	6	-----	6
32	10:26	1	7	2	-----	2
33	10:29	3	-----	3	3	-----
34	10:30	1	3	4	4	-----
35	10:36	6	-----	15	-----	15
36	10:41	5	2	4	4	-----
37	10:42	1	5	3	3	-----
38	10:43	1	7	2	2	-----
39	10:46	3	9	9	9	-----
40	10:49	3	3	12	-----	12
41	10:51	2	6	10	10	-----
42	10:52	1	8	5	-----	5
43	11:02	10	-----	5	5	-----
44	11:05	3	2	3	----	3
45	11:14	9	-----	15	15	-----
46	11:15	1	-----	7	-----	7
47	11:23	8	2	9	-----	9
48	11:25	2	1	2	2	----
49	11:27	2	2	3	3	-----
50	11:30	3	4	2	2	-----
51	11:31	1	3	3	3	-----
52	11:33	2	1	8	-----	8
53	11:36	3	2	7	7	-----
54	11:40	4	4	5	-----	5
55	11:41	1	5	7	7	-----
56	11:42	1	4	12	-----	12
57	11:45	3	4	5	5	-----
58	11:47	2	8	3	3	-----
59	11:49	2	6	2	2	-----
60	11:50	1	4	6	6	-----

61	11:53	3	2	3	----	3
62	11:55	2	2	7	-----	7
63	11:58	3	-----	6	6	-----
64	12:00	2	5	9	-----	9
65	12:03	3	3	11	11	-----
66	12:04	1	8	6	-----	6
67	12:06	2	9	14	-----	14
68	12:09	3	6	5	5	-----
69	12:13	4	4	3	3	-----
70	12:17	4	1	2	2	-----
71	12:21	4	-----	8	8	-----
72	12:23	3	-----	6	-----	6
73	12:27	4	2	2	2	-----
74	12:42	14	-----	8	8	-----
75	12:55	13	-----	6	6	-----
76	13:02	7	-----	6	6	-----
77	13:11	9	-----	9	-----	9
78	13:22	11	-----	12	12	-----
79	13:25	3	-----	16	-----	16
80	13:30	5	4	7	7	-----
81	13:35	5	3	2	2	-----
82	13:36	1	4	9	9	-----
83	13:39	3	-----	4	-----	4
84	13:41	2	3	5	-----	5
85	13:43	2	-----	7	7	-----
86	13:44	1	4	3	3	-----
87	13:48	4	1	11	11	-----
88	13:50	2	-----	4	-----	4
89	13:54	4	5	4	-----	5
90	13:55	1	4	6	-----	6
91	13:57	2	2	5	5	-----
92	13:59	2	4	7	7	-----
93	14:05	6	-----	4	-----	4

94	14:06	1	2	11	11	-----
95	14:09	3	5	6	-----	6
96	14:12	3	7	6	6	-----
97	14:15	3	4	5	-----	5
98	14:20	5	4	15	15	-----
99	14:22	2	4	5	-----	5
100	14:25	3	4	8	-----	8
101	14:28	3	8	3	3	-----
102	14:30	2	7	3	-----	3
103	14:37	7	2	2	2	-----
104	14:42	5	-----	4	4	-----
105	14:45	3	-----	6	-----	6
106	14:53	8	-----	2	2	-----
107	15:01	8	-----	6	6	-----
108	15:05	4	-----	8	-----	8
109	15:07	2	-----	4	4	-----
110	15:11	4	2	4	4	-----
111	15:23	12	-----	5	-----	5
112	15:25	2	----	1	1	-----
113	15:36	11	-----	7	7	-----
114	15:42	6	-----	4	4	-----
115	15:45	3	----	5	-----	5
116	15:48	3	-----	9	9	-----
117	15:51	4	-----	12	-----	12
118	15:55	4	4	3	3	-----
119	16:07	2	3	1	1	-----
120	16:12	5	-----	7	7	-----
121	16:13	1	-----	9	-----	9
122	16:16	3	4	9	9	-----
123	16:20	4	6	13	----	13
124	16:23	3	2	7	7	-----
125	16:25	2	5	2	2	-----
126	16:32	7	2	9	-----	9

127	16:35	3	-----	6	6	-----
128	16:37	2	4	3	3	-----
129	16:43	6	-----	18	-----	18
130	16:46	3	3	7	7	-----
131	16:49	3	8	3	3	-----
132	16:53	4	9	12	12	-----