

YARI FINSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DEĞME YAPILAR

Nurten KILIÇ

Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca

Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER

Eylül - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Nurten KILIÇ'ın DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı "Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Değme Yapılar" başlıklı bu çalışma, jürimizce Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

06/09/2019

Prof. Dr. Önder UYSAL

Enstitü Müdürü, Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Bölüm Başkanı, Matematik Bölümü

Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER

Danışman, Matematik Bölümü

Sınav Komitesi Üyeleri

Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER

Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Matematik Bölümü, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi

Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

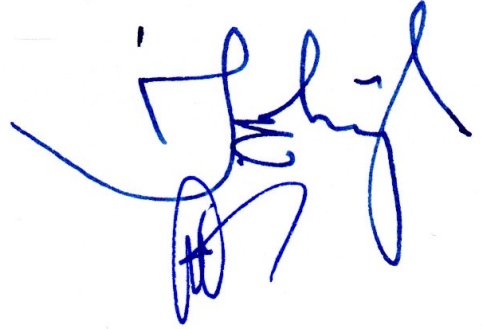
Matematik Bölümü, Uşak Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa Emre KANSU

Fizik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi İlkem TURHAN ÇETİNKAYA

Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallarına uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan intihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %18 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER



Nurten KILIÇ



YARI FINSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DEĞME YAPILAR

Nurten KILIÇ

Matematik, Doktora Tezi, 2019

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER

ÖZET

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Tez çalışmasının ilk bölümünde literatür taramasına yer verildi ve tezin literatürdeki yeri ifade edildi. İkinci bölümde değme yarı metrik, Lorentz ve Kenmotsu yarı metrik yapıların Riemann manifoldları üzerinde elde edilen sonuçları incelendi. Üçüncü bölümde yarı Finsler manifoldları tanıtıldı. Dördüncü, beşinci ve altıncı bölüm ise özgün kısımlardan oluşmaktadır. Dördüncü bölümde yarı Finsler manifoldları üzerinde yarı metrik ile birlikte (hemen hemen) değme ve ε -Sasakian yapılar kuruldu. Beşinci bölümde yarı Finsler manifoldları üzerinde Lorentz yapılar kurularak bu yapıların integrallenebilir (normal) olması için bazı önemli koşullar elde edildi. Ayrıca Sasakian Lorentz yapılar çalışılıp eğrilikler hesaplandı. Altıncı bölümde yarı Finsler metriği ile birlikte yarı Finsler manifoldları üzerinde (hemen hemen) Kenmotsu yapılar inşa edildi. Bu yapıların integrallenebilir (normal) olması için bazı önemli şartlar elde edildi. Ayrıca Kenmotsu Finsler manifoldlarının eğrilikleri hesaplandı. Son bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrıldı.

Anahtar Kelimeler: Yarı Finsler manifoldu, Yarı Finsler metrik, Tanjant demet, Değme manifold, Lorentz manifold, Kenmotsu manifold, Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensör.

CONTACT STRUCTURES ON INDEFINITE FINSLER MANIFOLDS

Nurten KILIÇ

Mathematics, Ph.D. Thesis, 2019

Thesis Supervisor : Prof. Dr. A. Funda SAĞLAMER

SUMMARY

This thesis consists of seven parts. The first chapter is devoted to literature review and place of the thesis in the literature. In the second chapter, contact pseudo metric, Lorentzian and Kenmotsu pseudo metric structures on Riemannian manifolds are mentioned. In the third chapter, indefinite Finsler manifolds are remarked. Our original results are contained in the fourth, fifth and sixth chapters. In the fourth chapter, (almost) contact and ε -Sasakian structures are constructed on indefinite Finsler manifolds with pseudo-metric. In the fifth chapter, contact Lorentzian structures are established on indefinite Finsler manifolds and some important integrability(normality) conditions are given. Also, Sasakian Lorentzian structures are presented and curvatures of these structures are calculated. In the sixth chapter, (almost) Kenmotsu structures are set up on indefinite Finsler manifolds with pseudo Finsler metric. Then, significant integrability(normality) conditions are found for these structures. Moreover, curvatures of Kenmotsu Finsler manifolds are calculated. The last chapter is dedicated to discussion and conclusion.

Keywords: Indefinite Finsler manifold, Indefinite Finsler metric, Tangent bundle, Contact manifold, Lorentz manifold, Kenmotsu manifold, Riemann curvature tensor, Ricci tensor.

TEŞEKKÜR

Tanıştığımız günden bu yana güler yüzünü benden esirgemeyen, doktora eğitiminin her aşamasında benim yanımda olan, engin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER'e, tez çalışmam boyunca benden yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Mustafa Emre KANSU'ya ve Dr. Öğr. Üyesi İlkem TURHAN ÇETİNKAYA'ya, her zaman benim yanımda ve bana destek olan annem Ayten KILIÇ, babam Ahmet KILIÇ ve kardeşim Eyüp KILIÇ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
SUMMARY.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. DEĞME YARI METRİK YAPILAR.....	5
2.1. Değme Yarı Metrik Manifoldlar.....	5
2.2. Değme Lorentz Manifoldları.....	8
2.3. Kenmotsu Yarı Metrik Manifoldları.....	10
3. YARI FINSLER MANİFOLDLARI.....	12
3.1. Yarı Finsler Manifoldları.....	12
3.2. Vektörel Finsler Koneksiyonları.....	17
3.3. Finsler Koneksiyon Eğrilikleri.....	20
4. YARI FINSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DEĞME YAPILAR.....	22
4.1. Hemen Hemen Değme Finsler Yapılar.....	22
4.2. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Hemen Hemen Değme Yarı Metrik Yapılar	24
4.3. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Değme Yapıların İntegrallenebilir Tensör Alanları.....	28
4.4. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde ε -Sasakian Yapılar.....	36
5. YARI FINSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DEĞME LORENTZ YAPILAR	48
5.1. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Hemen Hemen Değme Lorentz Yapılar ...	48
5.2. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Değme Lorentz Yapıların İntegrallenebilir Tensör Alanları.....	52

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

5.3. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Sasakian Lorentz Yapılar.....	60
6. YARI FINSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE KENMOTSU YAPILAR.....	72
6.1. Kenmotsu Yarı Finsler Metrikli Yapılar	72
6.2. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Hemen Hemen Kenmotsu Yarı Metrik Yapılar	
74	
6.3. Hemen Hemen Kenmotsu Yarı Metrik Yapıların İntegrallenebilir Tensör Alanları	
75	
6.4. Kenmotsu Yarı Finsler Manifoldlarının Eğrilikleri	79
7. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	88
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	94
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
M	$2n + 1$ boyutlu düzgün manifold
$TM = M'$	M nin tanjant demeti
TM'	M nin double tanjant demeti
$(TM')^{\mathcal{H}}$	Yatay distrübüsyon
$(TM')^{\mathcal{V}}$	Dikey distrübüsyon
T^*M'	TM' nin dual vektör uzayı
π	Kanonik projeksiyon dönüşümü
F^*	Yarı-Finsler fonksiyonu
G	Sasaki metrik
g^{F^*}	Yarı Finsler metrik
Ω	İkinci temel form
T	Torsiyon tensörü
∇	Koneksiyon
R	Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci eğrilik tensörü
K^*	Kesit eğriligi
C^∞	Düzgün fonksiyonların kümesi
$[\cdot, \cdot]$	Lie operatörü
F^{2n+1}	Yarı Finsler manifoldu
F	Finsler fonksiyonu
g^F	Finsler metrik
π_*	Türev dönüşümü
$(M')^h$	Yatay vektör demeti
$(M')^v$	Dikey vektör demeti

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri, eğrilerin ve yüzeylerin matematiksel analizi sonucu ortaya çıkmıştır. Karmaşık şekiller ve eğriler arasındaki ilişkilerin nedenleri, seri ve analitik fonksiyonlar gibi analizde ortaya çıkan bazı cevapsız ve cevaplanmamış soruların yanıtlarını vermek için eğrilerin ve yüzeylerin matematiksel analizi geliştirilmiştir. Başlangıçta sadece Öklid uzayına uygulanan araştırmalar daha sonra Öklid dışı alana, metrik ve topolojik uzaylara genişletilmiştir. Manifold kavramı ise lokal olarak Öklid uzayını andıran topolojik bir uzaydır. Diferensiyel geometride manifold teorisi, manifold teorisinde ise hemen hemen değme ve değme manifoldları oldukça önemli bir yere sahiptir. C^∞ sınıfından $(2n + 1)$ boyutlu bir manifoldun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n) \times 1$ tipine indirgenebiliyorsa bu durumda manifold hemen hemen değme manifold olarak adlandırılır. 1950 yılında ilk kez J. Gray tarafından tek boyutlu manifoldlar üzerine yapılan çalışmada $U(n) \times 1$ grup yapısının bir indirgenmesi ile hemen hemen değme yapılar tanımlanmıştır. Bu tanıma göre tek boyutlu bir hemen hemen değme yapı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \eta(\xi) = 1$$

denklemini sağlayan ϕ , $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η 1-form olmak üzere (ϕ, ξ, η) üçlüsü ile gösterilir. 1960 yılında ise Sasaki (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapı üzerinde

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitlikleri ile ifade edilen uygun bir g metriği tanımlamış ve hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. η , 1-form ve g yarı-Riemann metrik olmak üzere (η, g) değme yarı-metrik yapı, değme metrik yapıların doğal bir genelleştirmesi olarak kabul edilir. Yarı-Riemann metrik ile birleştirilen değme yapılar ilk olarak 1969 yılında Takashi tarafından ortaya atılmıştır. Takashi daha çok Sasaki yapı üzerine odaklanmıştır. Böylece bu konu ile ilgili bir çok çalışma Sasaki yarı-metrikler ile bağlantılı hale gelmiştir. Kumar, Rani ve Nagaich, ε -Sasakian manifoldların eğrilik tensörü için bazı temel sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca ε -Sasakian manifoldlar için ϕ kesitsel eğrilik, total reel kesitsel eğrilik arasındaki

denklik bağıntısını ispat etmişlerdir. q -indeksine sahip ε -hemen hemen değme metrik M manifoldu için aşağıda verilen manifold sınıfları mevcuttur.

- (1) $\varepsilon = 1$ ve $q = 2r$ ise M space-like hemen hemen değme metrik manifolddur.
- (2) $\varepsilon = -1$ ve $q = 2r + 1$ ise M time-like hemen hemen değme metrik manifolddur (Bejancu ve Deshmukh, 1997).

2010 yılında Calvaruso ve Perrone, hemen hemen değme ve değme manifoldlarını yarı-Riemann metrik yardımıyla ele almış bu yapılara ait integrallenebilme koşullarını vermişler ve eğrilikleri çalışmışlardır. $\varepsilon = -1$ ve $q = 1$ özel durumu ise son zamanlarda, Duggal tarafından çalışılan Lorentz hemen hemen değme manifold sınıfını içerir. 2011 yılında ise Calvaruso tarafından Lorentz metrik kullanılarak Lorentz değme yapılar ile ilgili geniş çaplı bir çalışma yapılmıştır.

Kenmotsu ise 1972 yılında değme manifoldlarının bir diğer önemli alt sınıfı olarak nitelendirilen Kenmotsu manifoldlarını tanımlamıştır. M , $(2n + 1)$ boyutlu bir hemen hemen değme metrik yapıya sahip bir manifold olmak üzere

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X$$

eşitliği sağlanırsa, bu durumda M manifoldu Kenmotsu manifoldu olarak adlandırılır. Yarı metrik ile birlikte ele alınan Kenmotsu manifoldları üzerinde light-like geometri Massamba 2009, 2011 ve Aktan 2008 tarafından çalışılmıştır. Prasad ise quarter simetrik metrik koneksiyonu ile birlikte Kenmotsu manifoldlar üzerine çalışmıştır (Prasad, 2017). 2004 yılında hemen hemen Kenmotsu yarı-metrik manifoldlar Wang Y. ve Liu X. tarafından çalışılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir (Wang Y. ve Liu X., 2004).

Diğer taraftan 1918 yılında Paul Finsler tarafından yapılan tez çalışması sonucu Finsler Geometri ortaya çıkmıştır. Paul Finsler'in tezinin yayınlanmasının ardından konu ile ilgili çalışmalar yapan bilim insanları bu uzayı Finsler uzayı olarak adlandırmışlardır. Böylece zaman içerisinde Finsler geometrisi diferensiyel geometri alanında ayrı bir çalışma dalı olmuştur. Finsler uzayında yapılan çalışmalar yalnızca geometri alanında değil, mühendislik, istatistik, fizik, dinamik, biyoloji, yer çekim ve uzay zaman teorisi gibi birçok uygulamalı bilim dalı için de oldukça büyük bir önem arz etmektedir.

Finsler ele aldığı çalışmada geometrisini tanımlarken iç çarpım yerine Minkowski normu kullanmıştır ve bu normdan elde edilen metrik zamanla Finsler metriği olarak isimlendirilmiştir. Finsler geometrisi, Riemann geometrisinin analog bir benzeri olarak düşünülebilir.

Yani, Riemann uzayda ele alınan ifadeler M manifoldu üzerinde iken Finsler uzayda bu ifadeler TM tanjant demeti üzerindedir. Örneğin, eğrilik tensörü Riemann geometride M üzerinde olmasına karşın Finsler geometride $TM - \{0\}$ üzerindedir. Böylece Finsler metriğinin Riemann metriğine göre daha genel kapsamlı bir metrik olmasının anlaşılması ile birlikte bu uzayda yapılan çalışmalarda bir artış söz konusu olmuştur. Ayrıca Finsler'in tez çalışmasından itibaren Finsler manifoldları üzerinde eğriler ve yüzeyler ile ilgili birçok çalışma mevcuttur (Antonelli 2003, Miron 1982, Matsumoto 1986, Sinha and Yadav 1988, Szilazi and Vincze 2000, Asanov 1985). Ancak yarı Finsler manifoldları üzerine yapılan çok az sayıda çalışma vardır (Bejancu and Farran 2013, Beem 1970, Beem and Chern 1971, Bejancu and Farran 1999). Özellikle diferensiyel geometrinin önemli alt sınıflarını oluşturan hemen hemen değme, değme, Lorentz ve Kenmotsu yapıların yarı Finsler manifoldları üzerindeki özellikleri ile ilgili bir çalışma literatürde mevcut değildir. Bu nedenle bu tez çalışmasında yarı Finsler metrik tensör alanı kullanılarak bu yapılara ait kapsamlı bir çalışma yapıldı ve bu yapılara ait önemli sonuçlar elde edildi.

$(2n+1)$ boyutlu düzgün bir M manifoldunun tanjant demeti TM olmak üzere $M' = TM \setminus \theta(M)$ tanjant demeti üzerinde $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ yarı Finsler manifoldu tanımlanır ise F^* , Finsler temel fonksiyonu $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^i \partial y^j}$ eşitliği ile ifade edilir. $TM' = (TM')^{\mathcal{H}} \oplus (TM')^{\mathcal{V}}$ olmak üzere yarı Finsler manifoldunun $(TM')^{\mathcal{H}}$ yatay vektör demeti ve $(TM')^{\mathcal{V}}$ dikey vektör demeti tanımlanır. Böylece, Finsler koneksiyonlarını, Finsler tensör alanlarını, h -kovaryant ve v -kovaryant türev operatörlerini, diferensiyel formu ve Finsler koneksiyon eğrilikleri elde edilir. $M' = (M')^h \oplus (M')^v$ olmak üzere sırasıyla, $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ yapıları hemen hemen değme yapıları gösterebilir. Böylece M' üzerinde

$$G = g_{ij}^{F^*} dx^i \otimes dx^j + g_{ij}^{F^*} \delta y^i \otimes \delta y^j = G^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{V}}$$

$2q$ indeksli yarı-Riemann metrik tanımlanabilir. Bu metrik Sasaki Finsler metriği olarak adlandırılır. Burada g^{F^*} , $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerindeki metrik olup q indekslidir. Özel olarak, $q = 1$ seçilirse Lorentz Finsler metrik olarak adlandırılır.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde değme yarı-metrik yapılar, Lorentz ve Kenmotsu yarı-metrik yapıların Riemann geometride sahip olduğu tanım ve özelliklere yer verildi.

Üçüncü bölümde ise çalışmamızın temeli niteliğinde olan yarı Finsler manifoldları tanımlandı. Dördüncü bölümde, yarı Finsler manifoldları üzerinde yarı metrik yapı ile birlikte hemen hemen değme ve değme yapılar kuruldu. Bu yapıların integrallenebilir ya da normal olması

için bazı şartlar elde edildi. Yarı Finsler manifoldları üzerinde ε -Sasakian yapılar tanıtılarak vektör demetleri üzerinde ε -Sasakian yapıların eğrilikleri için sonuçlar elde edildi. Ayrıca ε -Sasakian Finsler yapılar üzerinde yatay ve dikey Ricci tensörleri hesaplandı.

Tez çalışmasının beşinci bölümünde ise yarı Finsler manifoldları üzerinde değme Lorentz yapılar tanıtılarak yapıların integrallenebilir olması için yeni şartlar elde edildi. Ayrıca yarı Finsler manifoldları üzerinde Sasakian Lorentz yapılar tanımlandı ve bu yapılara ait eğrilikler hesaplandı.

Altıncı bölümde, yarı Finsler manifoldları üzerinde hemen hemen Kenmotsu ve Kenmotsu yapılar çalışıldı. Bu yapıların integrallenebilir olması için yeni şartlar elde edildi. Ayrıca yarı metrik yapıya sahip Kenmotsu Finsler manifoldlarının eğrilikleri için önemli sonuçlar elde edildi.

Tez çalışmasının son bölümünde ise tartışma ve sonuç kısmına yer verildi.

2. DEĞME YARI-METRİK YAPILAR

Bu bölümde değme yarı-metrik manifoldları, değme Lorentz manifoldları, Sasakian ve Kenmotsu yarı-metrik manifoldları ile ilgili literatürde yer alan tanım ve sonuçlar verildi.

2.1. Değme Yarı-Metrik Manifoldları

Tanım 2.1.1. $(2n+1)$ boyutlu bir M manifoldu üzerinde, ϕ $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı, ξ vektör alanı ve η 1-form olmak üzere, M manifoldu üzerinde herhangi bir X vektör alanı için

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= 1 \\ \phi^2 X &= -X + \eta(X)\xi \\ \phi(\xi) &= 0 \\ \eta \circ \phi &= 0 \\ \text{rank} \phi &= 2n\end{aligned}\tag{2.1}$$

eşitlikleri sağlanıyor ise M üzerinde (ϕ, ξ, η) yapısı bir hemen hemen değme yapı olarak adlandırılır. M üzerinde bir g yarı-Riemann metriği için $\varepsilon = \mp 1$ olmak üzere,

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \varepsilon \eta(X)\eta(Y)\tag{2.2}$$

olarak tanımlansın. Böylece g yarı-Riemann metriğine (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile birleştirilmiş metriktir denir.

(ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapı ile birleştirilmiş g yarı-Riemann metriği ile birlikte düzgün M manifoldu, hemen hemen değme yarı-metrik manifold olarak adlandırılır. Ayrıca (2.1) ve (2.2) eşitliklerinden $g(\xi, \xi) = \varepsilon$ olmak üzere $\eta(X) = \varepsilon g(\xi, X)$ olur. Diğer taraftan (2.2) eşitliğinden $g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y)$ elde edilir. Böylece g skew simetrik olur.

(ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme yarı-metrik yapısının kompleks yapısı

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = (\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt})$$

olsun. (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapının normal olması için gerek ve yeter şart J hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olmasıdır. J nin integrallenebilir olması için

gerek ve yeter şart ise J nin Nijenhuis tensörünün sıfıra eşit olmasıdır.

$$\begin{aligned} [J, J]((X, 0), (Y, 0)) &= (N^{(1)}(X, Y), N^{(2)}(X, Y)), \\ [J, J]((X, 0), (0, \frac{d}{dt})) &= (N^{(3)}(X), N^{(4)}(X)) \end{aligned}$$

olup, buradan

$$N_\phi(X, Y) = \phi^2[X, Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y] + [\phi X, \phi Y]$$

olmak üzere dört tensör alanı $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ sırasıyla

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= N_\phi(X, Y) + 2d\eta(X, Y) \otimes \xi, \\ N^{(2)}(X, Y) &= (L_{\phi X}\eta)Y - (L_{\phi Y}\eta)X, \\ N^{(3)}(X, Y) &= (L_\xi\phi)X, \\ N^{(4)}(X, Y) &= (L_\xi\eta)X \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $N^{(1)} = 0$ olması $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ olduğunu gösterir. Böylece J nin integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart $N^{(1)} = 0$ olmasıdır (Calvaruso ve Perrone, 2010).

Yardımcı Teorem 2.1.2. M nin bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme yarı-metrik yapısı için $\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) + 2\varepsilon d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2\varepsilon d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \\ &+ \varepsilon N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) + 3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \end{aligned}$$

eşitliği vardır (Calvaruso ve Perrone, 2010).

(ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile birleştirilmiş g yarı-Rieamann metriği

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \tag{2.3}$$

eşitliğini sağlıyorsa (ϕ, ξ, η, g) yapısı değme yarı-metrik yapı olarak adlandırılır. Böylece (M, ϕ, ξ, η, g) manifolduna da değme yarı-metrik manifoldu denir.

M nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere, (2.1) ve (2.3) ifadelerinden

$$d\eta(\xi, X) = -g(X, \phi\xi)$$

olur (Calvaruso ve Perrone, 2010).

Sonuç 2.1.3. (M, ϕ, ξ, η, g) değme yarı-metrik manifold üzerinde

$$2g((\nabla_X \phi)Y, Z) = g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) + 2\varepsilon d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2\varepsilon d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \quad (2.4)$$

olur (Calvaruso ve Perrone, 2010).

Değme yarı-metrik manifoldu üzerinde ξ nin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul $N^{(3)} = 0$ olmasıdır. (2.3) eşitliğini dikkate alırsak $L_\xi \eta = 0$ olmasından

$$\begin{aligned} 0 &= (L_\xi d\eta)(X, Y) = \xi(d\eta(X, Y)) - d\eta([\xi, X], Y) - d\eta(X, [\xi, Y]) \\ &= (L_\xi g)(X, \phi Y) + g(X, (L_\xi \phi)Y) \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $L_\xi g = 0$ sağlanması için gerek ve yeter şart $L_\xi \phi = 0$ olmasıdır. Buradan

$$h = \frac{1}{2}L_\xi \phi = \frac{1}{2}N^{(3)} \quad (2.5)$$

tensörü tanımlanabilir. Diğer taraftan (2.4) ifadesi kullanılarak kovaryant türeve ait aşağıdaki özellikler verilebilir.

$$\nabla_\xi \phi = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla_X \xi = -\varepsilon \phi X - \phi h X. \quad (2.7)$$

Ayrıca Riemann olma durumunda, (2.6) ve (2.7) ifadelerinden h nin self-adjoint olduğu, $h\phi = -\phi h$ ve $h\xi = tr h$ olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan $\tau = L_\xi g$ alınırsa,

$$\tau(X, Y) = 2g(X, h\phi Y)$$

olur.

Standart ortonormalleştirme işlemi (M, ϕ, ξ, η, g) (hemen hemen) değme yarı-metrik man-

ifoldunun, özel lokal yarı-ortonormal bir bazı olduğunu gösterir. Bu baz ϕ -baz olarak adlandırılır ve $\{\xi, e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n\}$ şeklinde gösterilir. Burada e_i space-like (time-like) ise ϕe_i space-like (time-like) olur (Calvaruso ve Perrone, 2010).

Yardımcı Teorem 2.1.4. (M, ϕ, ξ, η, g) değme yarı-metrik manifoldunda

$$\operatorname{div} \xi = 0, \operatorname{div} \eta = 0$$

olur (Calvaruso ve Perrone, 2010).

Tanım 2.1.5. (M, ϕ, ξ, η, g) değme yarı-metrik manifoldu

- (i) Normal yani, $[\phi, \phi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$ ise Sasakian,
- (ii) $h = 0$ yani ξ Killing vektör alanı ise K -değme olarak adlandırılır (Calvaruso ve Perrone, 2010).

Teorem 2.1.6. (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme yarı-metrik manifoldunun Sasakian olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \varepsilon \eta(Y)X \quad (2.8)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Calvaruso ve Perrone, 2010).

(2.8) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.7. Sasakian yarı-metrik manifoldu K -değmedir (Calvaruso ve Perrone, 2010).

2.2. Değme Lorentz Manifolrları

Tanım 2.2.1. $(2n+1)$ boyutlu bir M manifoldu üzerinde, ϕ $(1, 1)$ -tipinde bir tensör alanı, ξ vektör alanı ve η 1-form olmak üzere, M manifoldu üzerinde herhangi bir X vektör alanı için

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1 \\ \phi^2 X &= -X + \eta(X)\xi \\ \phi(\xi) &= 0 \\ \eta \circ \phi &= 0 \\ \operatorname{rank} \phi &= 2n \end{aligned} \quad (2.9)$$

eşitlikleri gerçekleşiyor ve g , M üzerinde Lorentz metriği olmak üzere

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (2.10)$$

özellikleri sağlanıyorsa (ϕ, ξ, η, g) yapısına, M üzerinde bir hemen hemen değme Lorentz metrik yapısıdır denir (Calvaruso, 2011).

(2.9) ve (2.10) ifadelerinden $\eta(X) = -g(\xi, X)$ olur. Ayrıca $g(\xi, \xi) = -1$ olduğundan ξ karakteristik vektör alanı time-like dır. Diğer taraftan $g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y)$ dir. Böylece g nin skew-simetrik olduğu görülür.

(ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ve g Lorentz metriği ile birlikte M manifolduna hemen hemen değme Lorentz manifoldu denir ve (M, ϕ, ξ, η, g) ile gösterilir.

(ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul J hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olmasıdır. J nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart ise J nin Nijenhuis tensörünün integrallenebilir olmasıdır (Calvaruso, 2011).

Yardımcı Teorem 2.2.2. M nin bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme Lorentz metrik yapısı için $\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) - 2d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) + 2d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \\ &\quad - N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) + 3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \end{aligned}$$

eşitliği vardır (Calvaruso, 2011).

Eğer g Lorentz metriği

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (2.11)$$

eşitliğini sağlıyor ise o zaman η , M üzerinde bir değme form olur ve (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı değme Lorentz manifold olarak adlandırılır (Calvaruso, 2011).

Sonuç 2.2.3. (M, ϕ, ξ, η, g) değme Lorentz manifoldu için

$$2g((\nabla_X \phi)Y, Z) = 2d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) - 2d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) \quad (2.12)$$

olur (Calvaruso, 2011).

Ayrıca değme Lorentz manifoldu üzerinde ξ nin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $N^{(3)} = 0$ olmasıdır.

Standart ortonormalleştirme işlemi ile birlikte (hemen hemen) değme Lorentz manifoldunun yarı-ortonormal bir baza sahip olduğu görülür ve bu baz ϕ -baz olarak adlandırılır. Böyle bir baz $\{\xi, e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n\}$ formundadır (Calvaruso, 2011).

Yardımcı Teorem 2.2.4. (M, ϕ, ξ, η, g) değme Lorentz manifoldunda

$$\operatorname{div} \xi = 0, \operatorname{div} \eta = 0$$

olur (Calvaruso, 2011).

Tanım 2.2.5. (M, ϕ, ξ, η, g) değme Lorentz manifoldu

- (i) Normal yani, $[\phi, \phi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$ ise Sasakian,
- (ii) $h = 0$ yani ξ Killing vektör alanı ise K -değme olarak adlandırılır (Calvaruso, 2011).

Teorem 2.2.6. (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme Lorentz manifoldunun Sasakian olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \phi)Y = \eta(Y)X + g(X, Y)\xi \quad (2.13)$$

olmasıdır (Calvaruso, 2011).

(2.13) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.7. Sasakian yarı-metrik manifoldu K -değmedir (Calvaruso, 2011).

2.3. Kenmotsu Yarı Metrik Manifoldları

$(2n + 1)$ boyutlu bir M manifoldu üzerinde (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme yarı-metrik yapısı Tanım 2.1.1 deki gibi tanımlanmış olsun. Φ ikinci temel form olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(X, \phi Y) = \Phi(X, Y)$$

dir. Böylece $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$ ile birlikte hemen hemen değme yarı metrik manifold, hemen hemen Kenmotsu yarı- metrik manifold olarak adlandırılır.

Hemen hemen değme yapıların normallik şartının

$$N_\phi = [\phi, \phi] + 2d\eta \otimes \xi$$

Nijenhuis tensör alanının sıfıra eşit olması olduğunu biliyoruz. M hemen hemen Kenmotsu yarı metrik manifoldu normal hemen hemen değme yapıya sahip olduğunda, Kenmotsu yarı metrik manifold olarak adlandırılır (Wang ve Liu, 2014).

Yardımcı Teorem 2.3.1. (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme yarı metrik manifold, L_X , X yönündeki Lie türev ve $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ olmak üzere $N(X, Y) = (L_{\phi X}\eta)Y - (L_{\phi Y}\eta)X$ ifadesi ile birlikte

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N_\phi(Y, Z), \phi X) \\ &+ \varepsilon N(Y, Z)\eta(X) + 2\varepsilon d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2\varepsilon d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \end{aligned}$$

eşitliği vardır (Wang ve Liu, 2014).

Önerme 2.3.2. (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen Kenmotsu yarı metrik manifold ve $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$2g((\nabla_X \phi)Y, Z) = g(N_\phi(Y, Z), \phi X) + 2g(\varepsilon g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X, Z)$$

eşitliği vardır (Wang ve Liu, 2014).

Önerme 2.3.3. (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen Kenmotsu yarı metrik manifold olsun. Böylece

$$\begin{aligned} Ric(\xi, \xi) &= -2n - tr h^2 \\ div \xi &= 2n, div \eta = -2n\varepsilon \end{aligned}$$

olur (Wang ve Liu, 2014).

Teorem 2.3.4. (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen Kenmotsu yarı metrik manifoldun Kenmotsu yarı metrik manifold olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \phi)Y = \varepsilon g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Wang ve Liu, 2014).

3. YARI FINSLER MANİFOLDLARI

Bu bölümde tez çalışmamızın temelini oluşturan yarı Finsler manifoldları tanıtıldı, vektörel Finsler koneksiyonları ve Finsler koneksiyon eğrilikleri verildi.

3.1. Yarı Finsler Manifoldları

M , $(2n + 1)$ boyutlu düzgün bir reel manifold ve TM ise bu manifoldda ait tanjant demeti olsun. U , M manifoldunun açık alt kümesi olmak üzere M üzerinde bir koordinat sistemi $\{(U, \varphi) : x^1, \dots, x^{2n+1}\}$ ya da kısaca $\{(U, \varphi) : x^i\}$ ile gösterilir. $\pi : TM \rightarrow M$ kanonik projeksiyonu ile $x \in M$ noktasında $T_x M$ fibresi bulunur, yani $T_x M = \pi^{-1}(x)$ olur ve M deki koordinat sistemi sayesinde TM de $\{(U^*, \Phi) : x^1, \dots, x^{2n+1}, y^1, \dots, y^{2n+1}\} = \{(U^*, \Phi) : x^i, y^i\}$ şeklinde yeni bir koordinat sistemi tanımlanabilir, burada $U^* = \pi^{-1}(U)$ olur ve $\Phi : U^* \rightarrow \mathbb{R}^{4n+2}$ diffeomorfizmi her $x \in U$ ve $y_x \in T_x M$ için $(x^1, \dots, x^{2n+1}, y^1, \dots, y^{2n+1}) = \Phi(y_x)$ şeklinde tanımlıdır. y_x nin koordinatları kısaca (x, y) ile gösterilir. Şimdi M de $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir diğer koordinat sistemi olan $\{(\tilde{U}, \tilde{\varphi}) : \tilde{x}^i\}$ yi ele alalım. Böylece TM üzerinde (x, y) ve $(\tilde{x}, \tilde{y})$ lokal koordinatlar arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^i &= \tilde{x}^i(x^1, \dots, x^{2n+1}), \\ \tilde{y}^i &= B_j^i(x) y^j.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Burada $B_j^i(x) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$ şeklindedir. Ayrıca (3.1) ifadesinden $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ ve $\{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}\}$ lokal çatıları aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\begin{aligned}B_{ik}^j(x) &= \frac{\partial^2 \tilde{x}^j}{\partial x^i \partial x^k}, \\ \frac{\partial}{\partial x^i} &= B_i^j(x) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + B_{ik}^j(x) y^k \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j},\end{aligned}\tag{3.2}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = B_i^j(x) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}.\tag{3.3}$$

Diğer taraftan M nin T^*M kotanjant demeti üzerindeki $\{dx^i, dy^i\}$ ve $\{d\tilde{x}^i, d\tilde{y}^i\}$ lokal dual çatıları arasındaki bağıntılar ise aşağıdaki gibidir:

$$d\tilde{x}^i = B_j^i(x)dx^j, \quad (3.4)$$

$$d\tilde{y}^i = B_{jk}^i(x)y^j dx^k + B_j^i(x)dy^j. \quad (3.5)$$

TM nin sıfır kesiti θ olmak üzere $\theta(M) \cap M' = \emptyset$ ve $\pi(M') = M$ için TM nin boştan farklı bir açık alt manifoldu M' ile gösterilsin. $M'_x = T_x M \cap M'$ pozitif konik set yani her $k > 0$ ve $y \in M'_x$ için $ky \in M'_x$ olur. Açıkçası M' , bir Finsler manifoldu tanımı için gerekli olan $TM^0 = TM \setminus \theta(M)$ eşitliğini sağlar.

$F : M' \rightarrow (0, \infty)$ düzgün fonksiyon ve $F^* = F^2$ olsun. M' deki her $\{(U', \Phi') : x^i, y^i\}$ koordinat sistemi için aşağıdaki koşullar sağlanır.

(F1) F in $(y^1, \dots, y^{2n+1})$ e göre pozitif olarak homojenlik derecesi 1 dir. Yani her $(x, y) \in \Phi'(U')$ ve $k > 0$ için

$$F(x^1, \dots, x^{2n+1}, ky^1, \dots, ky^{2n+1}) = kF(x^1, \dots, x^{2n+1}, y^1, \dots, y^{2n+1}) \quad (3.6)$$

eşitliği sağlanır.

(F2) Her $(x, y) \in \Phi'(U')$ noktasında

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}, i, j \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}, \quad (3.7)$$

ifadeleri $\mathbb{R}^{2n+1}$ de pozitif tanımlı kuadratik formun bileşenleridir. (F1) ve (F2) koşullarını gerçekleyen F temel fonksiyonu ile birlikte $F^{2n+1} = (M, M', F)$ bir Finsler manifoldu olur. Ancak (F2) koşulu Finsler geometrisinin bazı uygulamaları için uygun değildir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için $q < 2n+1$ olmak üzere $F^* : M' \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon tanımlansın. Ayrıca M' de ki her $\{(U', \Phi') : x^i, y^i\}$ koordinat sistemi için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

(F1*) F^* in $(y^1, \dots, y^{2n+1})$ e göre pozitif olarak homojenlik derecesi 2 dir. Yani her $(x, y) \in \Phi'(U')$ ve $k > 0$ için

$$F^*(x^1, \dots, x^{2n+1}, ky^1, \dots, ky^{2n+1}) = k^2 F^*(x^1, \dots, x^{2n+1}, y^1, \dots, y^{2n+1}) \quad (3.8)$$

eşitliği sağlanır.

(F^2) Her $(x, y) \in \Phi'(U')$ noktasında $g_{ij}(x, y)$ (3.7) deki gibi tanımlı olup $\mathbb{R}^{2n+1}$ de q negatif eigen değerli ve $(2n+1) - q$ pozitif eigen değerli, $0 < q < 2n+1$, bir kuadratik formun bileşenleridir. Böylece $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ q indeksli bir yarı Finsler manifoldu olur (Bejancu ve Farran, 2000).

Özel olarak $q = 1$ ise F^{2n+1} Lorentz Finsler manifoldu ve $q = 0$ ise Finsler manifoldu olur. Finsler fonksiyonu ile yarı Finsler fonksiyonu arasındaki bağıntı ise

$$F(x, y) = |F^*(x, y)|^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

eşitliği ile verilir. (3.8) ve (3.9) kullanılarak

$$\begin{aligned} F(x^1, \dots, x^{2n+1}, ky^1, \dots, ky^{2n+1}) &= |F^*(x^1, \dots, x^{2n+1}, ky^1, \dots, ky^{2n+1})|^{\frac{1}{2}} \\ &= |k^2 F^*(x^1, \dots, x^{2n+1}, y^1, \dots, y^{2n+1})|^{\frac{1}{2}} \\ &= k |F^*(x^1, \dots, x^{2n+1}, y^1, \dots, y^{2n+1})|^{\frac{1}{2}} \\ &= k F(x^1, \dots, x^{2n+1}, y^1, \dots, y^{2n+1}) \end{aligned}$$

bulunur. Yani F^{2n+1} yarı-Finsler manifoldunun temel fonksiyonu olan F , (3.6) yı sağlar. Şimdi (3.6) ifadesinin k ya göre diferensiyelini alalım.

$$y^i \frac{\partial F}{\partial y^i} = F, \quad (3.10)$$

buradan

$$y^i \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} = 0 \quad (3.11)$$

olur. (3.7) ifadesinde F^* yerine F^2 alınırsa,

$$g_{ij} = F \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{\partial F}{\partial y^j} \quad (3.12)$$

bulunur. Ayrıca (3.10) ve (3.12) ifadelerinden

$$g_{ij} y^j = F \frac{\partial F}{\partial y^i} \quad (3.13)$$

ve

$$g_{ij} y^i y^j = F^* \quad (3.14)$$

bulunur. (3.14) eşitliği yarı Finsler manifoldu için geçerlidir. (3.8) ifadesinde k ya göre türev alınıp, $k = 1$ yazılırsa

$$y^i \frac{\partial F^*}{\partial y^i} = 2F^* \quad (3.15)$$

olur. Elde edilen son ifadenin y^j ye göre türevi alınır

$$2y^i g_{ij} = y^i \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{\partial F^*}{\partial y^j} \quad (3.16)$$

elde edilir. Son olarak (3.16) ifadesinin y^k ya göre türevi alınır

$$y^i \frac{\partial^3 F^*}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} = 0$$

bulunur. Buradan her F^{2n+1} yarı Finsler manifoldu için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(x, y)y^i = 0, \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(x, y)y^j = 0, \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(x, y)y^k = 0. \quad (3.17)$$

(F2) ve (F2*) ifadelerinden $\forall (x, y) \in \Phi'(U')$ için

$$\det[g_{ij}(x, y)] \neq 0 \quad (3.18)$$

olduğunu yani, $[g_{ij}(x, y)]$ nin $m \times m$ tipinde terslenebilir bir matris olduğu söylenebilir.

Karşıt olarak, (3.11) den

$$\det\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}\right] = 0,$$

olup (3.12) ile birlikte

$$\det[g_{ij} - \frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{\partial F}{\partial y^j}] = 0 \quad (3.19)$$

olur.

$\mathbb{R}^{2n+1}$ in bir açık pozitif konik alt cümlesi D ve D üzerinde bir düzgün reel fonksiyon olan f fonksiyonunu ele alalım. Tensör alanlarının lokal bileşenlerinin çoğu pozitif homojen fonksiyonlar olduğundan aşağıdaki tanım verilebilir:

f pozitif homojenlik derecesi r olan bir fonksiyon ise $\forall k > 0$ ve $(y^1, \dots, y^{2n+1}) \in D$ için

$$f(ky^1, \dots, ky^{2n+1}) = k^r f(y^1, \dots, y^{2n+1}) \quad (3.20)$$

olur. Buradan $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$ için $\frac{\partial f}{\partial y^i}$ nin pozitif homojenlik derecesinin $r-1$ olduğunu söyleyebiliriz (Bejancu ve Farran, 2000).

Teorem 3.1.1. (Euler Teoremi) D üzerinde düzgün bir f fonksiyonunun pozitif homojenlik derecesinin r olması için gerek ve yeter koşul

$$y^i \frac{\partial F}{\partial y^i} = r f \quad (3.21)$$

olmasıdır.

Önerme 3.1.2. (i) $\frac{\partial F^*}{\partial y^i}$ nin $(y^1, \dots, y^{2n+1})$ e göre pozitif homojenlik derecesi 1 dir.

(ii) $\frac{\partial F}{\partial y^i}$ ve g_{ij} nin $(y^1, \dots, y^{2n+1})$ e göre pozitif homojenlik derecesi 0 dir.

(iii) (3.10), (3.11), (3.15) ve (3.17) ifadelerinden (3.21) kullanılarak $\forall x \in M$, $M'_x = T_x M \cap M'$ alıp $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ yarı Finsler manifoldunun her tanjant uzayında üç hiperyüzey tanımlanır. Bu yüzeyler aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} IM_x^+ &= \{y \in M'_x; F^*(x, y) = 1\}, \\ IM_x^- &= \{y \in M'_x; F^*(x, y) = -1\}, \\ \Lambda M_x &= \{y \in M'_x; F^*(x, y) = 0\} \end{aligned}$$

(Bejancu ve Farran, 2000).

$T_x M$ de alınan IM_x^+ , IM_x^- ve ΛM_x hiperyüzeyleri, sırasıyla pozitif indikatriks, negatif indikatriks ve x noktasındaki null(lightlike) Finsler koni olarak adlandırılır. IM_x^- ve ΛM_x sadece yarı Finsler manifoldlarında tanımlıdır. Özel olarak F^{2n+1} bir Riemann manifoldu ise sadece IM_x^+ vardır ki o da birim küredir. F^{2n+1} , $0 < q < 2n+1$ indeksli yarı Riemann manifoldu olduğunda IM_x^+ , IM_x^- ve ΛM_x , sırasıyla, birim yarı-küre, birim yarı-hiperbolik uzay ve null(lightlike) koni olarak adlandırılır. Ayrıca

$$IM^+ = \bigcup_{x \in M} IM_x^+, IM^- = \bigcup_{x \in M} IM_x^-, \Lambda M = \bigcup_{x \in M} \Lambda M_x$$

yazılabilir.

F^{2n+1} bir Riemann manifoldu olduğunda IM^+ , M üzerinde bir küre demeti olur (Bejancu ve Farran, 2000).

Örnek 3.1.3. M , indeksi $0 \leq q < 2n+1$ olan $g = (g_{ij})$ yarı Riemann metriği ile verilmiş $(2n+1)$ boyutlu bir yarı Riemann manifoldu olsun. Böylece $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ bir yarı

Finsler manifoldu olur. Burada $M' = TM^0$ ve $F^*(x, y) = g_{ij}(x)y^i y^j$ şeklindedir. $\mathbb{R}^{2n+1}$ de öklidyen yapı

$$F(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{2n+1} (y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

ve $\mathbb{R}^{2n+1}$ de $0 \leq q < 2n + 1$ indeksli yarı öklidyen yapı

$$F^*(x, y) = -\sum_{i=1}^q (y^i)^2 + \sum_{a=q+1}^{2n+1} (y^a)^2 \quad (3.23)$$

ile verilir (Bejancu ve Farran, 2000).

3.2. Vektörel Finsler Koneksiyonları

Bu bölümde yarı-Finsler manifoldları için yatay ve dikey distribüsyonlar, Finsler tensör alanları, Finsler koneksiyonu için yatay ve dikey kovaryant türev operatörleri ve dış diferensiyel operatörü gibi temel kavramlara yer verildi.

$0 < q < 2n + 1$ indeksli yarı Finsler manifoldu $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ olsun. $\pi : M' \rightarrow M$ submersiyonunun $\pi_* : TM' \rightarrow TM$ tanjant dönüşümünü ele alalım ve $(TM')^\mathcal{V} = \ker \pi_*$ vektör demetini tanımlayalım. $U' \subset M'$ koordinat komşuluğunda $\pi^i(x, y) = x^i$ lokal koordinatlar cinsinden $\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_j^i$ ve $\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$ bulunur. Yani $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$, $\Gamma(TM'|_{U'})^\mathcal{V}$ nin bir bazıdır. Böylece $(TM')^\mathcal{V}$, F^{2n+1} in dikey vektör demeti olarak adlandırılır.

Lokal olarak, $U' \subset M'$ koordinat komşuluğunda X^i ler U' üzerinde düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$X^\mathcal{V} = X^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (3.24)$$

olur. Ayrıca $(TM')^\mathcal{V}$ nin dual vektör demeti $(T^*M')^\mathcal{V}$ ile gösterilir. Böylece Finsler 1-form $(T^*M')^\mathcal{V}$ nin düzgün kesitidir. $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{2n+1}}\right\}$ nin dual bazının $\{\delta y^1, \dots, \delta y^{2n+1}\}$ olduğunu kabul edelim. Böylece $\delta y^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \delta_j^i$ olur. Yani $w \in (T^*M')^\mathcal{V}$ için $w_i(x, y) = w\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ olmak üzere

$$w^\mathcal{V} = w_i(x, y) \delta y^i \quad (3.25)$$

yazılır.

TM' de $(TM')^\mathcal{V}$ nin tamamlayıcı distribüsyonu $(TM')^\mathcal{H}$ ile gösterilir ve nonlinear konek-

siyon ya da yatay distribüsyon olarak adlandırılır. Böylece

$$TM' = (TM')^{\mathcal{H}} \oplus (TM')^{\mathcal{V}} \quad (3.26)$$

eşitliği yazılır.

$\{\frac{\delta}{\delta x^1}, \dots, \frac{\delta}{\delta x^{2n+1}}\}$ lokal vektör alanlarının seti $\Gamma(TM'|_{U'})^{\mathcal{H}}$ üzerinde bir bazdır. Yani,

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (3.27)$$

olur.

M' üzerinde X vektör alanını düşünelim. $X \in TM'$ için, lokal olarak

$$X = X^i(x, y) \frac{\delta}{\delta x^i} + \tilde{X}^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (3.28)$$

yazılır. Açık olarak, $\tilde{X}^i(x, y) = 0$ için $(M')^h \subset M'$ ve $X^i(x, y) = 0$ için $(M')^v \subset M'$ elde edilir. $\{\frac{\delta}{\delta x^1}, \dots, \frac{\delta}{\delta x^{2n+1}}\}$ nin dual bazı $\{dx^1, \dots, dx^{2n+1}\}$, yani, $dx^i(\frac{\delta}{\delta x^j}) = \delta_j^i$ olsun. Böylece her bir $w \in \Gamma(T^*M')^{\mathcal{H}}$ için $\tilde{w}_i(x, y) = w(dx^i)$ ve $\tilde{w}_i = w_i - N_i^j w_j$ olmak üzere

$$w^{\mathcal{H}} = \tilde{w}_i(x, y) dx^i \quad (3.29)$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$\delta y^i = dy^i + N_j^i(x, y) dx^j \quad (3.30)$$

olur (Bejancu ve Farran, 2000).

w 1-form ve $w = \tilde{w}_i(x, y) dx^i + w_i(x, y) \delta y^i$ ve $w = w^{\mathcal{H}} + w^{\mathcal{V}}$ olmak üzere

$$w^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{V}}) = 0, w^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{H}}) = 0 \quad (3.31)$$

yazılır. M' üzerinde $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ tipinde bir Finsler tensör alanı aşağıdaki lokal forma sahiptir.

$$T = T_{j_1 \dots j_q, b_1 \dots b_s}^{i_1 \dots i_p, a_1 \dots a_r}(x, y) \frac{\delta}{\delta x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\delta}{\delta x^{i_p}} \otimes dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_r} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{j_q}} \otimes \delta y^{b_1} \otimes \dots \otimes \delta y^{b_s} \quad (3.32)$$

(Sinha ve Yadav, 1988).

Tanım 3.2.1. M' üzerinde tanımlanan ∇ Finsler koneksiyonu, yine M' üzerinde tanımlanan $\nabla = F\Gamma$ lineer koneksiyonudur ve bu koneksiyon $y_x \in M'$ olmak üzere $(T_{y_x}M')^{\mathcal{H}}$ yatay lineer uzayı ∇ ya göre paraleldir. Benzer şekilde $y_x \in M'$ için $(T_{y_x}M')^{\mathcal{V}}$ dikey lineer uzayı da ∇ ya göre paraleldir.

M' üzerindeki ∇ lineer koneksiyonunun M' üzerinde Finsler koneksiyonu olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}} = 0, (\nabla_X Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{H}} = 0, \forall X, Y \in T_{y_x}M', \quad (3.33)$$

$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{H}} + (\nabla_X Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{V}}, \quad (3.34)$$

$$\nabla_X w = (\nabla_X w^{\mathcal{H}})^{\mathcal{H}} + (\nabla_X w^{\mathcal{V}})^{\mathcal{V}}, \forall w \in T_{y_x}^*M' \quad (3.35)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Sinha ve Yadav, 1991).

Uyarı 3.2.2. ∇ , M' üzerinde bir Finsler koneksiyonu olsun. Böylece aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} Y \in (T_{y_x}M')^{\mathcal{V}} &\Rightarrow \forall X \in T_{y_x}M'; \nabla_X Y \in (T_{y_x}M')^{\mathcal{V}}, \\ Y \in (T_{y_x}M')^{\mathcal{H}} &\Rightarrow \forall X \in T_{y_x}M'; \nabla_X Y \in (T_{y_x}M')^{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

(Szilasi ve Vincze, 2000).

Tanım 3.2.3. M' üzerinde bir ∇ Finsler koneksiyonu için Finsler tensör alanları cebirinde h ve v kovaryant türev operatörleri mevcuttur. $\forall X \in T_{y_x}M'$ için

$$\nabla_X^{\mathcal{H}} Y = \nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y, \nabla_X^{\mathcal{H}} f = X^{\mathcal{H}}(f), \forall Y \in T_{y_x}M', \forall f \in \mathfrak{F}(M') \quad (3.37)$$

olsun. Eğer $w \in T_{y_x}^*M'$ ise $\forall Y \in T_{y_x}M'$ için

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}} w)(Y) = X^{\mathcal{H}}(w(Y)) - w(\nabla_X^{\mathcal{H}} Y) \quad (3.38)$$

yazılır ve $\nabla_X^{\mathcal{H}}$, h kovaryant türev operatörü olarak adlandırılır.

Benzer şekilde $\forall X \in T_{y_x}M'$ için

$$\nabla_X^{\mathcal{V}} Y = \nabla_{X^{\mathcal{V}}} Y, \nabla_X^{\mathcal{V}} f = X^{\mathcal{V}}(f), \forall Y \in T_{y_x}M', \forall f \in \mathfrak{F}(M') \quad (3.39)$$

olsun. Eğer $w \in T_{y_x}^*M'$ ise $\forall Y \in T_{y_x}M'$ için

$$(\nabla_X^{\mathcal{V}} w)(Y) = X^{\mathcal{V}}(w(Y)) - w(\nabla_X^{\mathcal{V}} Y) \quad (3.40)$$

yazılır ve $\nabla_X^\mathcal{V}$, v kovaryant türev operatörü olarak adlandırılır (Antonelli, 2003).

Tanım 3.2.4. $w \in T_{y_x}^* M'$, M' üzerinde bir diferensiyel q -form, ∇ ; M' üzerinde bir lineer koneksiyon ve T ; ∇ nın torsiyon tensörü olsun. Bu durumda dw dış diferensiyeli $\forall X_i \in T_{y_x} M'$ için

$$\begin{aligned} dw(X_1, \dots, X_{q+1}) &= \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} (\nabla_{X_i} w)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{q+1}) \\ &- \sum_{1 \leq i \leq j \leq q+1} (-1)^{i+j} w(T(X_i, X_j), X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{q+1}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Sinha ve Yadav, 1988).

Önerme 3.2.5. ∇ , M' üzerinde bir Finsler koneksiyonu ve $w \in T_{y_x}^* M'$ 1-form olmak üzere $\forall X, Y \in T_{y_x} M'$ için dw dış diferensiyeli aşağıdaki eşitlikler ile ifade edilir.

$$dw(X^\mathcal{V}, Y^\mathcal{V}) = (\nabla_X^\mathcal{V} w)(Y^\mathcal{V}) - (\nabla_Y^\mathcal{V} w)(X^\mathcal{V}) + w(T(X^\mathcal{V}, Y^\mathcal{V})), \quad (3.42)$$

$$dw(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) = (\nabla_X^\mathcal{H} w)(Y^\mathcal{H}) - (\nabla_Y^\mathcal{H} w)(X^\mathcal{H}) + w(T(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H})) \quad (3.43)$$

(Miron, 1982).

Bir Finsler koneksiyonunun T torsiyon tensör alanı beş Finsler tensör alanı ile karakterize edilir. Bu tensör alanları aşağıdaki gibi ifade edilir: $[T(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H})]^\mathcal{V}$, $[T(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{V})]^\mathcal{V}$, $[T(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{V})]^\mathcal{H}$, $[T(X^\mathcal{V}, Y^\mathcal{V})]^\mathcal{V}$, $[T(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H})]^\mathcal{H}$ (Miron, 1982).

3.3. Finsler Koneksiyon Eğrilikleri

$\forall X, Y, Z \in T_{y_x} M'$ için, ∇ Finsler koneksiyon eğriliği

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (3.44)$$

eşitliği ile verilir. $R(X, Y)Z$ operatörü yatay vektör alanlarını yatay vektör alanlarına ve dikey vektör alanlarını dikey vektör alanlarına dönüştürür. Sonuç olarak her $X, Y, Z \in T_{y_x} M'$ için

$$R(X, Y)Z = R^\mathcal{H}(X, Y)Z^\mathcal{H} + R^\mathcal{V}(X, Y)Z^\mathcal{V} \quad (3.45)$$

yazılır. $R(X, Y)Z$, X ve Y ye göre skew simetriktir. Böylece aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 3.3.1. $T_{y_x}M'$ tanjant uzayı üzerinde ∇ Finsler koneksiyon eğriliği aşağıda verilen altı Finsler tensör alanı ile ifade edilir.

$$R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} = \nabla_X^{\mathcal{H}} \nabla_Y^{\mathcal{H}} Z^{\mathcal{H}} - \nabla_Y^{\mathcal{H}} \nabla_X^{\mathcal{H}} Z^{\mathcal{H}} - \nabla_{[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]} Z^{\mathcal{H}}, \quad (3.46)$$

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} = \nabla_X^{\mathcal{V}} \nabla_Y^{\mathcal{H}} Z^{\mathcal{H}} - \nabla_Y^{\mathcal{H}} \nabla_X^{\mathcal{V}} Z^{\mathcal{H}} - \nabla_{[X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{H}}]} Z^{\mathcal{H}}, \quad (3.47)$$

$$R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{V}} = \nabla_X^{\mathcal{H}} \nabla_Y^{\mathcal{H}} Z^{\mathcal{V}} - \nabla_Y^{\mathcal{H}} \nabla_X^{\mathcal{H}} Z^{\mathcal{V}} - \nabla_{[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]} Z^{\mathcal{V}}, \quad (3.48)$$

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{H}} = \nabla_X^{\mathcal{V}} \nabla_Y^{\mathcal{V}} Z^{\mathcal{H}} - \nabla_Y^{\mathcal{V}} \nabla_X^{\mathcal{V}} Z^{\mathcal{H}} - \nabla_{[X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}]} Z^{\mathcal{H}}, \quad (3.49)$$

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{V}} = \nabla_X^{\mathcal{V}} \nabla_Y^{\mathcal{H}} Z^{\mathcal{V}} - \nabla_Y^{\mathcal{H}} \nabla_X^{\mathcal{V}} Z^{\mathcal{V}} - \nabla_{[X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{H}}]} Z^{\mathcal{V}}, \quad (3.50)$$

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}} = \nabla_X^{\mathcal{V}} \nabla_Y^{\mathcal{V}} Z^{\mathcal{V}} - \nabla_Y^{\mathcal{V}} \nabla_X^{\mathcal{V}} Z^{\mathcal{V}} - \nabla_{[X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}]} Z^{\mathcal{V}} \quad (3.51)$$

(Antonelli, 2003).

Böylece ∇ Finsler koneksiyon eğrilik tensörü Berwald bazına göre üç farklı şekilde ifade edilir.

$$R\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \frac{\delta}{\delta x^h} = R_{hjk}^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \quad (3.52)$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \frac{\delta}{\delta x^h} = P_{hjk}^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \quad (3.53)$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \frac{\delta}{\delta x^h} = S_{hjk}^i \frac{\delta}{\delta x^i}. \quad (3.54)$$

Bu üç bileşen Teorem 3.3.1 de ifade edilen birinci, üçüncü ve beşinci Finsler tensörlerine karşılık gelmektedir. Diğer üç Finsler tensörü ise aşağıda verilen eşitliklere karşılık gelmektedir.

$$R\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^h} = R_{hjk}^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (3.55)$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^h} = P_{hjk}^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (3.56)$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^h} = S_{hjk}^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (3.57)$$

Böylece $\nabla \Gamma = (N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i)$ Finsler koneksiyonları R_{hjk}^i, P_{hjk}^i ve S_{hjk}^i olmak üzere üç lokal bileşene sahiptir (Antonelli, 2003).

4. YARI FINSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DEĞME YAPILAR

Bu bölümde yarı Finsler manifoldları üzerinde yarı Finsler metriği kullanılarak hemen hemen değme, değme ve ε -Sasakian yapılar kuruldu. İlk olarak hemen hemen değme Finsler manifoldlarını ele alalım.

4.1. Hemen Hemen Değme Finsler Yapılar

M' üzerinde ϕ tensör alanı, η 1-form ve ξ vektör alanı olmak üzere

$$\phi = \phi^{\mathcal{H}} + \phi^{\mathcal{V}} = \phi_j^i(x, y) \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^j + \tilde{\phi}_j^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dy^j, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \eta^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{V}} = \eta_i(x, y) dx^i + \tilde{\eta}_i(x, y) dy^i, \\ \xi &= \xi^{\mathcal{H}} + \xi^{\mathcal{V}} = \xi^i(x, y) \frac{\delta}{\delta x^i} + \tilde{\xi}^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \end{aligned} \quad (4.2)$$

olsun.

Tanım 4.1.1. M' üzerinde ϕ , η ve ξ (4.1) ve (4.2) deki gibi tanımlansın. Böylece

$$\begin{aligned} \eta^{\mathcal{H}} &= \eta_i(x, y) dx^i, \\ \eta^{\mathcal{V}} &= \tilde{\eta}_i(x, y) dy^i, \\ \xi^{\mathcal{H}} &= \xi^i(x, y) \frac{\delta}{\delta x^i}, \\ \xi^{\mathcal{V}} &= \tilde{\xi}^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$(\phi^{\mathcal{H}})^2 = -I^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}} \otimes \xi^{\mathcal{H}}, (\phi^{\mathcal{V}})^2 = -I^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}} \otimes \xi^{\mathcal{V}} \quad (4.3)$$

$$\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 1 \quad (4.4)$$

eşitlikleri varsa, bu durumda $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ yapıları sırasıyla $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde hemen hemen değme Finsler yapılar olarak adlandırılırlar. Burada $M' = (M')^h \oplus (M')^v$ bir Finsler vektör demetidir.

Teorem 4.1.2. $(M')^h$ ve $(M')^v$ Finsler vektör demetleri üzerindeki hemen hemen değme Finsler yapılar $(\phi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}})$ olsunlar. Böylece

$$\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = \phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0, \eta^{\mathcal{H}} \circ \phi^{\mathcal{H}} = \eta^{\mathcal{V}} \circ \phi^{\mathcal{V}} = 0 \quad (4.5)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (4.3) yardımıyla

$$(\phi^{\mathcal{H}})^2(\xi^{\mathcal{H}}) = -\xi^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})(\xi^{\mathcal{H}})$$

yazılır. Ayrıca $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = 0$ ya da $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})$, sıfır eigen değerine karşılık gelen $\phi^{\mathcal{H}}$ in nontrivial eigen vektörüdür. (4.3) kullanılarak

$$0 = (\phi^{\mathcal{H}})^2(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})) = -\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}))\xi^{\mathcal{H}}$$

veya

$$\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}))\xi^{\mathcal{H}}$$

elde edilir. Eğer $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})$ nontrivial eigen vektör ise $\eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})) \neq 0$ olur. Böylece

$$0 = (\phi^{\mathcal{H}})^2(\xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}))\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = (\eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})))^2\xi^{\mathcal{H}} \neq 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Yani $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = 0$ olur. Benzer şekilde $\phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0$ ifadesi de elde edilir.

Diğer taraftan $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = 0$ olduğundan $\forall X^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$\eta^{\mathcal{H}}(\phi(X^{\mathcal{H}}))\xi^{\mathcal{H}} = \phi^3(X^{\mathcal{H}}) + \phi(X^{\mathcal{H}}) = -\phi^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) + \phi^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}))\xi^{\mathcal{H}} = 0$$

ve

$$\eta^{\mathcal{V}}(\phi^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}))\xi^{\mathcal{V}} = 0$$

elde edilir. Böylece $\eta^{\mathcal{H}} \circ \phi^{\mathcal{H}} = 0$ ve $\eta^{\mathcal{V}} \circ \phi^{\mathcal{V}} = 0$ olur.

Teorem 4.1.3. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler yapılar ise $rank\phi^{\mathcal{H}} = rank\phi^{\mathcal{V}} = 2n$ dir.

İspat.

$$\begin{aligned}\phi^{\mathcal{H}} : (T_{y_x} M')^{\mathcal{H}} &\rightarrow (T_{y_x} M')^{\mathcal{H}}, \forall y_x \in M', \\ \text{rank} \phi^{\mathcal{H}} + \ker \phi^{\mathcal{H}} &= 2n + 1 = \dim M'_x, (\forall x \in M).\end{aligned}\quad (4.6)$$

$\forall X^{\mathcal{H}} \in \ker \phi^{\mathcal{H}}$ için $\phi^{\mathcal{H}} X^{\mathcal{H}} = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece $0 = \phi^2 X^{\mathcal{H}} = -X^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}$ ya da $X^{\mathcal{H}} = \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}$ elde edilir. Yani $X^{\mathcal{H}} \in \text{Sp}\{\xi^{\mathcal{H}}\} = \ker \phi^{\mathcal{H}}$ olur. Buradan $\ker \phi^{\mathcal{H}} = \dim(\ker \phi^{\mathcal{H}}) = 1$ olur ve (4.6) den, $\text{rank} \phi^{\mathcal{H}} = 2n$ bulunur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\phi^{\mathcal{V}} : (T_{y_x} M')^{\mathcal{V}} &\rightarrow (T_{y_x} M')^{\mathcal{V}}, \forall y_x \in M', \\ \text{rank} \phi^{\mathcal{V}} + \ker \phi^{\mathcal{V}} &= 2n + 1 = \dim M'_x, (\forall x \in M)\end{aligned}\quad (4.7)$$

$\forall X^{\mathcal{V}} \in \ker \phi^{\mathcal{V}}$ için $\phi^{\mathcal{V}} X^{\mathcal{V}} = 0$ olduğundan $0 = \phi^2 X^{\mathcal{V}} = -X^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}$ ya da $X^{\mathcal{V}} = \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}$ elde edilir. Böylece $X^{\mathcal{V}} \in \text{Sp}\{\xi^{\mathcal{V}}\} = \ker \phi^{\mathcal{V}}$ bulunur. Buradan $\ker \phi^{\mathcal{V}} = \dim(\ker \phi^{\mathcal{V}}) = 1$ olur ve (4.7) eşitliğinden, $\text{rank} \phi^{\mathcal{V}} = 2n$ elde edilir.

Uyarı 4.1.4. $(M')^h$ ve $(M')^v$ tek boyutlu olmak üzere $(M')^h$ ve $(M')^v$ alt demetleri üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme yapıları ile birlikte $((M')^h, \phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $((M')^v, \phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler manifoldları olarak adlandırılırlar.

4.2. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Hemen Hemen Değme Yarı Metrik Yapılar

$F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ yarı Finsler manifoldu olsun. (V^i) ve (W^j) lokal bileşenler ile birlikte V ve W vektör alanları için $g_{ij}^{F^*}$, (3.7) eşitliğindeki gibi tanımlanmak üzere,

$$\begin{aligned}g^{F^*} : \Gamma(TM')^{\mathcal{V}} \times \Gamma(TM')^{\mathcal{V}} &\rightarrow \mathfrak{S}(M'), \\ g^{F^*}(V, W)(x, y) &= g_{ij}^{F^*}(x, y)V^i(x, y)W^j(x, y)\end{aligned}\quad (4.8)$$

tanımlayalım. Böylece

$$g_{ij}^{F^*}(x, y) = g^{F^*}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)(x, y) \quad (4.9)$$

yazılır. Açık olarak g^{F^*} simetrik Finsler tensör alanı olur. g^{F^*} , yarı-Finsler metrik olarak adlandırılır. Ayrıca g^{F^*} , $(TM')^{\mathcal{V}}$ Finsler vektör demeti üzerinde yarı-Riemann metrik olarak düşünülebilir.

Benzer şekilde g_{ij}^{F*} , (3.7) deki gibi olmak üzere,

$$g^{F*} : \Gamma(TM')^{\mathcal{H}} \times \Gamma(TM')^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathfrak{S}(M'),$$

$$g^{F*}(V, W)(x, y) = g_{ij}^{F*}(x, y)V^i(x, y)W^j(x, y), \quad (4.10)$$

$$g_{ij}^{F*}(x, y) = g^{F*}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right)(x, y) \quad (4.11)$$

tanımlanabilir. g^{F*} , yarı Finsler metrik olarak adlandırılır. Ayrıca $g^{F*}, (TM')^{\mathcal{H}}$ Finsler vektör demeti üzerinde yarı Riemann metrik olarak düşünülebilir (Bejancu ve Farran, 2000). Bir Finsler vektörü $X \in (TM')^{\mathcal{V}} (X \in (TM')^{\mathcal{H}})$ için $g_{y_x}^{F*} = g^{F*}(y_x), (y_x) = (x, y) \in M'$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g_{y_x}^{F*}(X, X) &> 0 \quad \text{veya} \quad X = 0 \Rightarrow \textit{Space-like}, \\ g_{y_x}^{F*}(X, X) &< 0 \Rightarrow \textit{time-like}, \\ g_{y_x}^{F*}(X, X) &= 0, X \neq 0 \Rightarrow \textit{light-like(null)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Diğer taraftan bir Finsler normu(uzunluk)

$$\|X\| = |g_{y_x}^{F*}(X, X)|^{\frac{1}{2}}. \quad (4.13)$$

eşitliği ile verilir (Bejancu ve Farran, 2000).

$g_{y_x}^{F*}(X, X) = 1$ ise X birim space-like Finsler vektör, $g_{y_x}^{F*}(X, X) = -1$ ise X birim time-like Finsler vektör olarak adlandırılır. X birim Finsler vektör ise $\varepsilon = g_{y_x}^{F*}(X, X)$ ifadesinde yer alan ε , X in işareti olarak adlandırılır. $\forall X, Y \in \Gamma(TM')$ için

$$G : \Gamma(TM') \times \Gamma(TM') \rightarrow \mathfrak{S}(M'),$$

$$G(X, Y) = G^{\mathcal{H}}(X, Y) + G^{\mathcal{V}}(X, Y) \quad (4.14)$$

tanımlayalım. Açık olarak G , M' üzerinde $(0, 2)$ tipinde bir simetrik tensör alanı olur. Ayrıca G , non-dejenere ve sabit indekslidir. q yarı Finsler metriğinin indeksi olmak üzere, M' üzerinde G yarı-Riemann metriğinin indeksi $2q$ olur.

$$G = g_{ij}^{F*} dx^i \otimes dx^j + g_{ij}^{F*} dy^i \otimes dy^j = G^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{V}} \quad (4.15)$$

M' üzerinde G Sasaki Finsler metriği olarak adlandırılır.

Tanım 4.2.1. $(M')^h$ yatay vektör demeti ve $(M')^v$ dikey vektör demeti üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme yapılar olsunlar. $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ metrik yapıları

$$\begin{aligned} G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - \varepsilon \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}), \\ G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) &= G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) - \varepsilon \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}), \\ G(\phi X, \phi Y) &= G^{\mathcal{H}}(\phi X, \phi Y) + G^{\mathcal{V}}(\phi X, \phi Y) \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitliklerini sağlarsa, bu durumda $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ yapısı $(M')^h$ üzerinde hemen hemen değme yarı metrik Finsler yapı olarak ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapısında $(M')^v$ üzerinde hemen hemen değme yarı metrik Finsler yapı olarak adlandırılır. Burada $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) = \varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}), \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) = \varepsilon G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Sonuç 4.2.2. $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ sırasıyla $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde hemen hemen değme yarı metrik Finsler yapılar olsunlar. (4.16) ve (4.17) ifadelerinden

$$\begin{aligned} G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= -G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}), \\ G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= -G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

ve

$$\begin{aligned} G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) &= -G^{\mathcal{H}}(\phi^2 X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}), \\ G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) &= -G^{\mathcal{V}}(\phi^2 X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} \Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}), \\ \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}), \\ \Omega(X, Y) &= G(X, \phi Y) \end{aligned} \quad (4.20)$$

ikinci temel form tanımlanabilir (Sinha ve Yadav, 1991).

Önerme 4.2.3. Yukarıda tanımlanan ikinci temel form için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\begin{aligned}\Omega(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) &= \Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}), \\ \Omega(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) &= \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\end{aligned}\tag{4.21}$$

ve

$$\begin{aligned}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= -\Omega(Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}), \\ \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= -\Omega(Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})\end{aligned}\tag{4.22}$$

(Sinha ve Yadav, 1991).

Önerme 4.2.4. ∇ , M' üzerinde Finsler koneksiyonu ve Ω ; $\Omega(X, Y) = d\eta(X, Y)$ şartını sağlayan ikinci temel form olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= (\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta)(Y^{\mathcal{H}}) - (\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta)(X^{\mathcal{H}}) + \eta(T(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})), \\ \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= (\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta)(Y^{\mathcal{V}}) - (\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta)(X^{\mathcal{V}}) + \eta(T(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})).\end{aligned}\tag{4.23}$$

Böylece M' üzerinde hemen hemen değme yarı metrik Finsler yapı hemen hemen ε -Sasakian Finsler yapı olarak adlandırılır. Ayrıca $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapıları sırasıyla $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde hemen hemen ε -Sasakian yapılar olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.5. Ω ikinci temel form ve M' üzerinde torsiyonu sıfır olan ∇ hemen hemen ε -Sasakian Finsler koneksiyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= (\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta)Y^{\mathcal{H}} - (\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta)X^{\mathcal{H}}, \\ \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= (\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta)Y^{\mathcal{V}} - (\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta)X^{\mathcal{V}}\end{aligned}\tag{4.24}$$

(Sinha ve Yadav, 1991).

Tanım 4.2.6. M' üzerinde hemen hemen ε -Sasakian Finsler yapı, η ; 1-formu Killing vektör alanı olduğunda ε -Sasakian Finsler yapı olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned}(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta)(Y^{\mathcal{H}}) + (\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta)(X^{\mathcal{H}}) &= 0, \\ (\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta)(Y^{\mathcal{V}}) + (\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta)(X^{\mathcal{V}}) &= 0.\end{aligned}\tag{4.25}$$

M' üzerindeki ∇ torsiyonsuz Finsler koneksiyonu Sasakian Finsler koneksiyonu olarak adlandırılır (Sinha ve Yadav, 1991).

Teorem 4.2.7. M' üzerinde ε -Sasakian Finsler yapı ile birlikte ∇ torsiyonsuz Finsler koneksiyonu ve Ω ikinci temel form olsun. Böylece aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= 2(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta)(Y^{\mathcal{H}}) = -2(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta)(X^{\mathcal{H}}), \\ \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= 2(\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta)(Y^{\mathcal{V}}) = -2(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta)(X^{\mathcal{V}}).\end{aligned}\quad (4.26)$$

(4.20) ve (4.23) ifadelerinden $G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$ ve $G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})$ yazılır. Böylece

$$d\eta(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = \Omega^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \quad (4.27)$$

ve

$$d\eta(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = \Omega^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \quad (4.28)$$

elde edilir (Sinha ve Yadav, 1991).

4.3. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Değme Yapıların İntegrallenebilir Tensör Alanları

$F^{2n+1} = (M, M', F^*)$, $0 \leq q < 2n + 1$ indeksli yarı Finsler manifoldu olsun. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler yapılarının integrallenebilir tensör alanı $\forall \xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall \xi^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için aşağıdaki gibidir.

$$N^{\mathcal{H}}(X, Y) = [\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}] - \phi[\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] - \phi[X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}] + \phi^2[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}$$

ve

$$N^{\mathcal{V}}(X, Y) = [\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}] - \phi[\phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}] - \phi[X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}] + \phi^2[X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}] + d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}.$$

Ayrıca $\forall \xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall \xi^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ tensör alanı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= N_{\phi}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, \\ N^{(2)}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= (L_{\phi X}^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})(Y^{\mathcal{H}}) - (L_{\phi Y}^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}), \\ N^{(3)}(X^{\mathcal{H}}) &= (L_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi)(X^{\mathcal{H}}), N^{(4)}(X^{\mathcal{H}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

ve

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= N_{\phi}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) + d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}, \\ N^{(2)}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= (L_{\phi X}^{\mathcal{V}}\eta^{\mathcal{V}})(Y^{\mathcal{V}}) - (L_{\phi Y}^{\mathcal{V}}\eta^{\mathcal{V}})(X^{\mathcal{V}}), \\ N^{(3)}(X^{\mathcal{V}}) &= (L_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi)(X^{\mathcal{V}}), N^{(4)}(X^{\mathcal{V}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{V}}\eta^{\mathcal{V}})(X^{\mathcal{V}}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Hemen hemen değme Finsler yapının normal olması için gerek ve yeter şart yukarıda tanımlanan dört tensör alanının sıfır olmasıdır.

Yardımcı Teorem 4.3.1. $N^{(1)} = 0$ ise $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ (Yalınız ve Çalışkan, 2013).

Önerme 4.3.2. $(M')^h$ ve $(M')^v$ Finsler vektör demetleri üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler yapılarının normal olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} N_{\phi}^{\mathcal{H}} + d\eta^{\mathcal{H}} \otimes \xi^{\mathcal{H}} &= 0, \\ N_{\phi}^{\mathcal{V}} + d\eta^{\mathcal{V}} \otimes \xi^{\mathcal{V}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

$F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ manifoldunun yarı Finsler metriği ile birlikte $(M')^h$ ve $(M')^v$ vektör demetleri üzerindeki hemen hemen değme yarı metrik Finsler yapıları sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ olsunlar. $(M')^h$ ve $(M')^v$ vektör demetleri üzerinde, $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ yarı-Riemann metrik olarak düşünülebilir. Eğer $\xi^{\mathcal{H}}$ karakteristik vektör alanı $G^{\mathcal{H}}$ yarı Riemann metriğine göre ve $\xi^{\mathcal{V}}$ karakteristik vektör alanı da $G^{\mathcal{V}}$ yarı Riemann metriğine göre bir Killing vektör alanı ise bu durumda $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerindeki değme

yarı metrik yapıya bir K -değme yarı metrik yapı ve $(M')^h$ ve $(M')^v$ demetleri de K - değme yarı-metrik Finsler vektör demetleri olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 4.3.3. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı Finsler metrik yapılar olsunlar. Böylece $N^{(2)} = 0$ ve $N^{(4)} = 0$ olur. Diğer taraftan $N^{(3)} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ metriklerine göre $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ vektör alanlarının Killing vektör alanı olmasıdır.

İspat. (4.20) ve (4.27) ifadelerinden

$$d\eta^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = \Omega(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi^2 Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

eşitliği elde edilir. Buradan $d\eta^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = 0$ olur. Böylece $N^{(2)} = 0$ olur. Diğer taraftan

$$0 = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi \xi^{\mathcal{H}}) = d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = X^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) - \xi^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - \eta^{\mathcal{H}}[X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}]$$

elde edilir. Böylece

$$\xi^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - \eta^{\mathcal{H}}([\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}]) = 0$$

olur. Buradan $(L_{\xi}^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}) = 0$ elde edilir. Yani $N^{(4)} = 0$ olur. Ayrıca

$$(L_{\xi}^{\mathcal{H}}G)(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \varepsilon \xi^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})) - \varepsilon \eta^{\mathcal{H}}[\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}] = \varepsilon (L_{\xi}^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} = 0$$

olduğundan $(L_{\xi}^{\mathcal{H}}d\eta^{\mathcal{H}}) = 0$ bulunur. Sonuç olarak

$$(L_{\xi}^{\mathcal{H}}d\eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{H}}\Omega)(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= \xi^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], \phi Y^{\mathcal{H}}) - G(X^{\mathcal{H}}, \phi[\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]) \\ &= (L_{\xi}^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, (L_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, N^3(Y^{\mathcal{H}})) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $N^{(3)} = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\xi^{\mathcal{H}}$ ın Killing vektör alanı olmasıdır. Benzer şekilde $N^{(2)} = 0$ ve $N^{(4)} = 0$ olur. Ayrıca $N^{(3)} = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\xi^{\mathcal{V}}$ ın Killing vektör alanı olmasıdır.

Yardımcı Teorem 4.3.4. $(M')^h$ ve $(M')^v$ Finsler vektör demetleri üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapılar olurlar.

Böylece $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}), \phi X^{\mathcal{H}}) - d\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + d\Omega(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}) \\ + \varepsilon N^{(2)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - \varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) + \varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) \quad (4.32)$$

ve $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$2G^{\mathcal{V}}((\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}), \phi X^{\mathcal{V}}) - d\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) + d\Omega(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}, \phi Z^{\mathcal{V}}) \\ + \varepsilon N^{(2)}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) - \varepsilon d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) + \varepsilon d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}) \quad (4.33)$$

olur.

İspat. ∇ bir Finsler koneksiyonu olmak üzere

$$2G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = X^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + Y^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) - Z^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \\ + G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \quad (4.34)$$

ve

$$2G^{\mathcal{V}}(\nabla_X^{\mathcal{V}}Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = X^{\mathcal{V}}G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) + Y^{\mathcal{V}}G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) - Z^{\mathcal{V}}G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \\ + G^{\mathcal{V}}([X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}], Z^{\mathcal{V}}) + G^{\mathcal{V}}([Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}], Y^{\mathcal{V}}) - G^{\mathcal{V}}([Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) \quad (4.35)$$

eşitlikleri mevcuttur. Ayrıca

$$d\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = X^{\mathcal{H}}\Omega(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + Y^{\mathcal{H}}\Omega(Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) + Z^{\mathcal{H}}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \\ - \Omega([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) - \Omega([Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - \Omega([Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \quad (4.36)$$

ve

$$d\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = X^{\mathcal{V}}\Omega(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) + Y^{\mathcal{V}}\Omega(Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) + Z^{\mathcal{V}}\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \\ - \Omega([X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}], Z^{\mathcal{V}}) - \Omega([Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}], Y^{\mathcal{V}}) - \Omega([Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) \quad (4.37)$$

yazılır. (4.20) ve (4.35) kullanılarak

$$\begin{aligned}
2G^\nu((\nabla_X^\nu \phi)Y^\nu, Z^\nu) &= \phi Y^\nu G^\nu(X^\nu, Z^\nu) - Z^\nu \Omega(X^\nu, Y^\nu) + G^\nu([X^\nu, \phi Y^\nu], Z^\nu) + \Omega([Z^\nu, X^\nu], Y^\nu) \\
&- G^\nu([\phi Y^\nu, Z^\nu], X^\nu) + Y^\nu \Omega(X^\nu, Z^\nu) - \phi Z^\nu G^\nu(X^\nu, Y^\nu) + \Omega([X^\nu, Y^\nu], Z^\nu \\
&+ G^\nu([\phi Z^\nu, X^\nu], Y^\nu) - G^\nu([Y^\nu, \phi Z^\nu], X^\nu)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir. (4.37) ifadesinden, (4.20), (4.21) ve (4.22) kullanılarak

$$\begin{aligned}
d\Omega(X^\nu, \phi Y^\nu, \phi Z^\nu) &= X^\nu \Omega(Y^\nu, Z^\nu) + \phi Y^\nu G^\nu(Z^\nu, X^\nu) - \varepsilon \phi Y^\nu (\eta^\nu(Z^\nu) \eta^\nu(X^\nu)) \\
&+ \varepsilon \phi Z^\nu (\eta^\nu(Y^\nu) \eta^\nu(X^\nu)) - \phi Z^\nu G^\nu(X^\nu, Y^\nu) + G^\nu([X^\nu, \phi Y^\nu], Z^\nu) - \varepsilon \eta^\nu[X^\nu, \phi Y^\nu] \eta^\nu(Z^\nu) \\
&+ G^\nu([\phi Z^\nu, X^\nu], Y^\nu) - \varepsilon \eta^\nu(Y^\nu) \eta^\nu[\phi Z^\nu, X^\nu] - \Omega([\phi Y^\nu, \phi Z^\nu], X^\nu)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.30) ve (4.20) kullanılarak

$$\begin{aligned}
G^\nu(N^{(1)}(Y^\nu, Z^\nu), \phi X^\nu) &= -\Omega([Y^\nu, Z^\nu], X^\nu) + \Omega([\phi Y^\nu, \phi Z^\nu], X^\nu) \\
&- G^\nu([\phi Y^\nu, Z^\nu], X^\nu) + \varepsilon \eta^\nu[\phi Y^\nu, Z^\nu] \eta^\nu(X^\nu) - G^\nu([Y^\nu, \phi Z^\nu], X^\nu) + \varepsilon \eta^\nu[Y^\nu, \phi Z^\nu] \eta^\nu(X^\nu)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

eşitliği elde edilir. (4.29) ifadesinden

$$\begin{aligned}
N^{(2)}(Y^\nu, Z^\nu) \eta^\nu(X^\nu) &= \phi Y^\nu (\eta^\nu(Z^\nu)) - \phi Z^\nu (\eta^\nu(Y^\nu)) - \eta^\nu[\phi Y^\nu, Z^\nu] \\
&- \eta^\nu[Y^\nu, \phi Z^\nu] \eta^\nu(X^\nu)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

bulunur. (4.37), (4.39), (4.40) ve (4.41) kullanılarak (4.33) elde edilir. Benzer şekilde (4.34), (4.20), (4.21), (4.22), (4.34) ve (4.36) kullanılarak

$$\begin{aligned}
d\Omega(X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}, \phi Z^\mathcal{H}) &- d\Omega(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) + G^\mathcal{H}(N^{(1)}(Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}), \phi X^\mathcal{H}) + \varepsilon N^{(2)}(Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}) \\
&+ \varepsilon d\eta^\mathcal{H}(\phi Y^\mathcal{H}, X^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H}) - \varepsilon d\eta^\mathcal{H}(\phi Z^\mathcal{H}, X^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}) \\
&= \phi Y^\mathcal{H} G^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H}, X^\mathcal{H}) - \phi Z^\mathcal{H} G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) + G^\mathcal{H}([X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}], Z^\mathcal{H}) + G^\mathcal{H}([\phi Z^\mathcal{H}, X^\mathcal{H}], Y^\mathcal{H}) \\
&- \Omega([\phi Y^\mathcal{H}, \phi Z^\mathcal{H}], X^\mathcal{H}) + Y^\mathcal{H} \Omega(X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) - Z^\mathcal{H} \Omega(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) + \Omega([X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}], Z^\mathcal{H}) \\
&+ \Omega([Z^\mathcal{H}, X^\mathcal{H}], Y^\mathcal{H}) + \Omega([Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}], X^\mathcal{H}) + \Omega([\phi Y^\mathcal{H}, \phi Z^\mathcal{H}], X^\mathcal{H}) \\
&- \Omega([Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}], X^\mathcal{H}) - G^\mathcal{H}([\phi Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}], X^\mathcal{H}) - G^\mathcal{H}([Y^\mathcal{H}, \phi Z^\mathcal{H}], X^\mathcal{H}) \\
&= 2G^\mathcal{H}((\nabla_X^\mathcal{H} \phi)Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.3.5. $\Omega = d\eta$ ve $N^{(2)} = 0$ ile birlikte $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı metrik yapılar olmak üzere $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$(a) \quad 2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}), \phi X^{\mathcal{H}}) + \varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) - \varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \quad (4.42)$$

ve

$$2G^{\mathcal{V}}((\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}), \phi X^{\mathcal{V}}) + \varepsilon d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}) - \varepsilon d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) \quad (4.43)$$

$$(b) \quad \nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi = 0, \nabla_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi = 0 \quad (4.44)$$

eşitlikleri vardır.

İspat. (a) (4.42) ve (4.43) ifadelerinden elde edilmek istenilen eşitliğin varlığı aşıkardır.

(b) $N^{(2)}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = 0$ olmasından

$$N^{(2)}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{H}}[\phi X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}] = -d\eta^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = 0$$

olur. Böylece (4.42) den $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$G^{\mathcal{H}}((\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi)X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = 0$$

elde edilir. Yani $\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi = 0$ olur. Benzer şekilde $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$G^{\mathcal{V}}((\nabla_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi)X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = 0$$

olur. Yani $\nabla_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi = 0$ bulunur.

Önerme 4.3.6. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı Finsler metrik yapılar olmak üzere, bu yapıların K -değme yarı Finsler metrik yapılar olması için gerek ve yeter şart $N^{(3)} = 0$ olmasıdır.

Sonuç 4.3.7. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde ε -Sasakian Finsler yapılar K -değme yarı-metrik yapılarıdır.

Teorem 4.3.8. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı Finsler metrik yapılar olmak üzere, bu yapıların K -değme yarı metrik Finsler yapılar olmaları için gerek ve yeter şart

$$\nabla_X^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} = -\frac{\varepsilon}{2} \phi X^{\mathcal{H}}, \nabla_X^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}} = -\frac{\varepsilon}{2} \phi X^{\mathcal{V}} \quad (4.45)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapıları birer K -değme yarı metrik yapı olsun. Böylece $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ Killing vektör alanı olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$L_{\xi}^{\mathcal{H}} G^{\mathcal{H}} = L_{\xi}^{\mathcal{V}} G^{\mathcal{V}} = 0.$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= -G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \nabla_Y^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}), \\ G^{\mathcal{V}}(\nabla_X^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= -G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \nabla_Y^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

elde edilir. Diğer taraftan Kozsul formülünden

$$\begin{aligned} 2G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= \varepsilon X^{\mathcal{H}} \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) + \xi^{\mathcal{H}} G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - \varepsilon Y^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})) \\ &+ G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) + \varepsilon \eta^{\mathcal{H}}[Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}] + G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

ve

$$\begin{aligned} 2G^{\mathcal{H}}(\nabla_Y^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) &= \varepsilon Y^{\mathcal{H}} \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) + \xi^{\mathcal{H}} G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) - \varepsilon X^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})) \\ &+ G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) + \varepsilon \eta^{\mathcal{H}}[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] + G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

bulunur. (4.47) ve (4.48) ifadelerinden

$$G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}(\nabla_Y^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) = \varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

olur ve (4.40), (4.46) kullanılarak, $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(-\frac{\varepsilon}{2} \phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

bulunur. Böylece $\nabla_X^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} = -\frac{\varepsilon}{2} \phi X^{\mathcal{H}}$ olur. Benzer şekilde $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için, $\xi^{\mathcal{V}}$ Killing vektör alanı olduğundan, Kozsul formülünden, $\forall Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ olmak üzere

$$G^{\mathcal{V}}(\nabla_X^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(-\frac{\varepsilon}{2} \phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})$$

elde edilir. Böylece

$$\nabla_X^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}} = -\frac{\varepsilon}{2} \phi X^{\mathcal{V}}$$

bulunur.

$\xi^{\mathcal{H}}$ ın Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $N^{(3)} = 0$ olmasıdır. Diğer taraftan (4.27) ve (4.28) göz önüne alınırsa ve $L_{\xi^{\mathcal{H}}} \eta^{\mathcal{H}} = 0$ olmasından

$$\begin{aligned} 0 &= (L_{\xi^{\mathcal{H}}} d\eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \xi^{\mathcal{H}}(d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})) - d\eta^{\mathcal{H}}([\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, [\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]) \\ &= (L_{\xi^{\mathcal{H}}} G^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, (L_{\xi^{\mathcal{H}}} \phi) Y^{\mathcal{H}}) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece $L_{\xi^{\mathcal{H}}} G^{\mathcal{H}} = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $L_{\xi^{\mathcal{H}}} \phi = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Böylece

$$h = \frac{1}{2} L_{\xi^{\mathcal{H}}} \phi = \frac{1}{2} N^{(3)} \quad (4.49)$$

şeklinde bir tensör ortaya çıkar. Bu tensör değme yarı Finsler metrik yapıların geometrisinin tanımlanmasında önemli bir rol oynar. Ayrıca (4.42) ve (4.43) kullanılarak kovaryant türev operatörüne ait aşağıdaki özellikler ispatlanabilir.

$$\nabla_{\xi^{\mathcal{H}}} \phi = 0, \nabla_{\xi^{\mathcal{V}}} \phi = 0 \quad (4.50)$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} &= -\frac{\varepsilon}{2} \phi X^{\mathcal{H}} - \phi h X^{\mathcal{H}}, \\ \nabla_X^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}} &= -\frac{\varepsilon}{2} \phi X^{\mathcal{V}} - \phi h X^{\mathcal{V}}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Riemann durumunda (4.50) ve (4.51) ifadeleri kullanılarak h tensörünün self-adjoint olduğu, yani $h\phi = -\phi h$ ve $h\xi = trh = 0$ olduğu ispatlanabilir. Ayrıca $\tau = L_\xi G$ alınırsa

$$\begin{aligned}\tau(X^\nu, Y^\nu) &= 2G^\nu(X^\nu, h\phi Y^\nu), \\ \tau(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) &= 2G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, h\phi Y^\mathcal{H})\end{aligned}$$

bulunur.

Standart ortonormalleştirme işlemi ile birlikte her bir $((M')^h, \phi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}, \eta^\mathcal{H}, G^\mathcal{H})$ (hemen hemen) değme yarı Finsler metrik manifoldu $\phi^\mathcal{H}$ - bazı olarak adlandırılan özel bir çeşit lokal yarı ortonormal baza sahiptir. Böyle bir baz $\{E_1^\mathcal{H}, \dots, E_n^\mathcal{H}, \phi E_1^\mathcal{H}, \dots, \phi E_n^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}\}$ formundadır. Benzer şekilde $((M')^v, \phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$ (hemen hemen) değme yarı Finsler metrik manifoldu ise ϕ^ν - bazı olarak adlandırılan özel bir çeşit lokal yarı ortonormal baza sahiptir. Böyle bir baz $\{E_1^\nu, \dots, E_n^\nu, \phi E_1^\nu, \dots, \phi E_n^\nu, \xi^\nu\}$ formundadır. Özel olarak, yarı-Riemann metrik, ξ nin space-like yada time-like olmasına göre, $(q, 2n + 1 - q)$ ya da $(q + 1, 2n - q)$ olması durumunda hemen hemen değme Finsler yapı ile uyumludur. Şimdi bununla ilgili aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 4.3.9. $((M')^h, \phi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}, \eta^\mathcal{H}, G^\mathcal{H})$ ve $((M')^v, \phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$ değme yarı metrik Finsler manifoldları olsunlar. Böylece

$$\begin{aligned}div\xi^\mathcal{H} &= 0, div\eta^\mathcal{H} = 0, \\ div\xi^\nu &= 0, div\eta^\nu = 0\end{aligned}$$

olur.

İspat. $(TM')^\mathcal{H}$ üzerinde $\{E_1^\mathcal{H}, \dots, E_n^\mathcal{H}, \phi E_1^\mathcal{H}, \dots, \phi E_n^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}\}$ $\phi^\mathcal{H}$ - bazını ele alalım. Böylece $\nabla_\xi^\mathcal{H} \xi^\mathcal{H} = 0$ ve $h\phi = -\phi h$ olduğundan, (4.3), (4.4) ve (4.51) ifadelerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}div\xi^\mathcal{H} &= tr\nabla\xi^\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G^\mathcal{H}(\nabla_{E_i}^\mathcal{H} \xi^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G^\mathcal{H}(\nabla_{\phi E_i}^\mathcal{H} \xi^\mathcal{H}, \phi E_i^\mathcal{H}) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G^\mathcal{H}(\varepsilon \phi E_i^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G^\mathcal{H}(\phi h E_i^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G^\mathcal{H}(\varepsilon E_i, \phi E_i) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G^\mathcal{H}(\phi h E_i, E_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i G^\mathcal{H}(\phi h E_i^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G^\mathcal{H}(\phi h E_i^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) = 0\end{aligned}$$

ve

$$\operatorname{div}\eta^{\mathcal{H}} = -\operatorname{tr}\nabla_{\eta}^{\mathcal{H}} = -\varepsilon\operatorname{div}\xi^{\mathcal{H}} = 0$$

bulunur. Benzer olarak $(TM')^{\mathcal{V}}$ üzerinde $\{E_1^{\mathcal{V}}, \dots, E_n^{\mathcal{V}}, \phi E_1^{\mathcal{V}}, \dots, \phi E_n^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}\}$ $\phi^{\mathcal{V}}$ -bazını ele alınırsa

$$\operatorname{div}\eta^{\mathcal{V}} = -\operatorname{tr}\nabla_{\eta}^{\mathcal{V}} = -\varepsilon\operatorname{div}\xi^{\mathcal{V}} = 0$$

elde edilir.

4.4. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde ε -Sasakian Yapılar

Tanım 4.4.1. $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı metrik Finsler yapıları

(i) Normal, yani $[\phi^{\mathcal{H}}, \phi^{\mathcal{H}}] + d\eta^{\mathcal{H}} \otimes \xi^{\mathcal{H}} = 0$, $[\phi^{\mathcal{V}}, \phi^{\mathcal{V}}] + d\eta^{\mathcal{V}} \otimes \xi^{\mathcal{V}} = 0$ ise Sasakian olarak adlandırılır.

(ii) $h = 0$, yani $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ Killing vektör alanları ise K -değme olarak adlandırılır.

Teorem 4.4.2. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme yarı metrik Finsler yapıların ε -Sasakian yapı olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}[G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} - \varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}], \quad (4.52)$$

$$(\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}[G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} - \varepsilon\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}] \quad (4.53)$$

olmasıdır.

İspat. Yapı normal ise $N^{(1)} = N^{(2)} = 0$ ve $\Omega = d\eta$ olur. Böylece (4.42) ifadesini kullanarak

$$\begin{aligned} 2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) &= \varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) - \varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \\ &= \varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\varepsilon G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) - \varepsilon G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) \\ &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) - \varepsilon G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) \\ &= G^{\mathcal{H}}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} - \varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} - \varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}})$$

olur. Benzer şekilde (4.43) ifadesini kullanarak $\forall X^\nu, Y^\nu, \xi^\nu \in (TM')^\nu$ için

$$(\nabla_X^\nu \phi) Y^\nu = \frac{1}{2} (G^\nu(X^\nu, Y^\nu) \xi^\nu - \varepsilon \eta^\nu(Y^\nu) X^\nu)$$

bulunur. Diğer taraftan yapı (4.52) ve (4.53) eşitliklerini sağlar. Ayrıca (4.52) eşitliğinde $Y^\mathcal{H} = \xi^\mathcal{H}$ alınırsa

$$(\nabla_X^\mathcal{H} \phi) \xi^\mathcal{H} = \frac{1}{2} (G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} - \varepsilon X^\mathcal{H}),$$

$$-\phi(\nabla_X^\mathcal{H} \xi^\mathcal{H}) = \frac{1}{2} \varepsilon (\eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} - X^\mathcal{H}),$$

$$-\phi^2(\nabla_X^\mathcal{H} \xi^\mathcal{H}) = -\frac{\varepsilon}{2} (\phi X^\mathcal{H}),$$

$$\nabla_X^\mathcal{H} \xi^\mathcal{H} = -\frac{\varepsilon}{2} \phi X^\mathcal{H}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.53) eşitliğinde de $Y^\nu = \xi^\nu$ alınırsa

$$\nabla_X^\nu \xi^\nu = -\frac{\varepsilon}{2} \phi X^\nu$$

olur. ξ skew-simetrik olduğundan $\xi^\mathcal{H}$ ve ξ^ν nin Killing vektör alanı olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca

$$\begin{aligned} N_\phi(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) + d\eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} &= -\phi(\nabla_X^\mathcal{H} \phi Y^\mathcal{H} - \phi \nabla_Y^\mathcal{H} X^\mathcal{H}) + \phi(\nabla_Y^\mathcal{H} \phi X^\mathcal{H} - \phi \nabla_X^\mathcal{H} Y^\mathcal{H}) \\ &+ (\nabla_{\phi X}^\mathcal{H} \phi Y^\mathcal{H} - \phi \nabla_{\phi X}^\mathcal{H} Y^\mathcal{H}) - (\nabla_{\phi Y}^\mathcal{H} \phi X^\mathcal{H} - \phi \nabla_{\phi Y}^\mathcal{H} X^\mathcal{H}) + d\eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} \\ &= -\phi(\nabla_X^\mathcal{H} \phi) Y^\mathcal{H} + \phi(\nabla_Y^\mathcal{H} \phi) X^\mathcal{H} + (\nabla_{\phi X}^\mathcal{H} \phi) Y^\mathcal{H} - (\nabla_{\phi Y}^\mathcal{H} \phi) X^\mathcal{H} \\ &= \frac{1}{2} \{-\phi(G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} - \varepsilon \eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}) X^\mathcal{H}) + \phi(G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, X^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} - \varepsilon \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}) Y^\mathcal{H}) \\ &+ G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} - \varepsilon \eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}) \phi X^\mathcal{H} - G^\mathcal{H}(\phi Y^\mathcal{H}, X^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} - \varepsilon \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}) \phi Y^\mathcal{H}\} + d\eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} \\ &= -G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} + d\eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} \\ &= -d\eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} + d\eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve benzer şekilde

$$N_\phi(X^\nu, Y^\nu) + d\eta^\nu(X^\nu, Y^\nu)\xi^\nu = 0$$

olup yapı ε -Sasakian yapı olur.

Teorem 4.4.3. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^h, \xi^h, \eta^h, G^h)$ ve $(\phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$ yapılarının K -değme olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen iki durumun sağlanmasıdır.

- (1) $(M')^h$ üzerinde ξ^h, G^h metriğine göre Killing vektör alanı ve $(M')^v$ üzerinde ξ^ν, G^ν metriğine göre Killing vektör alanıdır.
- (2) $(M')^h$ demetinin her noktasında flag eğriligi $\frac{\varepsilon}{4}$ ve $(M')^v$ demetinin her noktasında flag eğriligi $\frac{\varepsilon}{4}$ tür.

İspat. $(M')^h$ üzerinde $(\phi^h, \xi^h, \eta^h, G^h)$ K -değme yapı olsun. X^h, ξ^h a ortogonal birim vektör alanı olmak üzere (3.45) ifadesinden,

$$\begin{aligned} G^h(R(X^h, \xi^h)\xi^h, X^h) &= G^h(\nabla_X^h \nabla_\xi^h \xi^h - \nabla_\xi^h \nabla_X^h \xi^h - \nabla_{[X^h, \xi^h]} \xi^h, X^h) \\ &= G^h(\frac{\varepsilon}{2} \nabla_\xi^h (\phi X^h) + \frac{\varepsilon}{2} (-\frac{\varepsilon}{2} (\phi^2 X^h)) - \frac{\varepsilon}{2} \phi(\nabla_\xi^h X^h), X^h) \\ &= \frac{1}{4} \{G^h(X^h, X^h) - \eta^h(X^h)G^h(\xi^h, X^h)\} \\ &= \frac{1}{4} G^h(X^h, X^h) \end{aligned}$$

bulunur. X^h bir space-like vektör ise ξ^h bir time-like vektör olur veya X^h bir time-like vektör ise ξ^h bir space-like vektör olur.

Şimdi $(M')^v$ üzerinde $(\phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$ K -değme yapı olsun. Benzer olarak, X^ν, ξ^ν a ortogonal birim vektör alanı olmak üzere, (3.45) ifadesinden

$$G^\nu(R(X^\nu, \xi^\nu)\xi^\nu, X^\nu) = \frac{1}{4} \{G^\nu(X^\nu, X^\nu) - \eta^\nu(X^\nu)G^\nu(\xi^\nu, X^\nu)\} = \frac{1}{4} G^\nu(X^\nu, X^\nu)$$

bulunur. X^ν bir space-like vektör ise ξ^ν bir time-like vektör olur ya da X^ν bir time-like vektör ise ξ^ν bir space-like vektör olur. Böylece

$$K(X^h, \xi^h) = \frac{G^h(R(X^h, \xi^h)\xi^h, X^h)}{\varepsilon G^h(X^h, X^h)} = \frac{\varepsilon}{4}$$

ve

$$K(X^\nu, \xi^\nu) = \frac{G^\nu(R(X^\nu, \xi^\nu)\xi^\nu, X^\nu)}{\varepsilon G^\nu(X^\nu, X^\nu)} = \frac{\varepsilon}{4}$$

elde edilir. Diğer taraftan $(M')^h$ üzerinde $\xi^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}}$ metriğine göre Killing vektör alanı olduğundan $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$\begin{aligned}\varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}(\nabla_Y^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \\ &= -2G^{\mathcal{H}}(\nabla_Y^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \\ &= -2G^{\mathcal{H}}(-\frac{\varepsilon}{2}\phi Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \\ &= \varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}),\end{aligned}$$

$$d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}})$$

bulunur. Sonuç olarak $(M')^h$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ yapısı K -değme yapı olur. Benzer şekilde $(M')^v$ üzerinde $\xi^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}}$ metriğine göre Killing vektör alanı olduğundan $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}})$$

elde edilir ki bu da $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapısının K -değme yapı olduğunu gösterir.

Teorem 4.4.4. $(M')^h$ ve $(M')^v$ Finsler vektör demetleri üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ ε -Sasakian Finsler yapılar olsunlar. Böylece ∇ Finsler koneksiyonunun Riemann eğriliği aşağıdaki gibidir:

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} = \frac{1}{4}\{\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}\}, \quad (4.54)$$

$$R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{4}\{\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}\}. \quad (4.55)$$

İspat. $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$, $(M')^h$ üzerinde ε -Sasakian Finsler yapı olsun. (3.45) ifadesinden

$$\begin{aligned}R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} &= \nabla_X^{\mathcal{H}} \nabla_Y^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} - \nabla_Y^{\mathcal{H}} \nabla_X^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} - \nabla_{[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]} \xi^{\mathcal{H}} \\ &= \nabla_X^{\mathcal{H}}(-\frac{\varepsilon}{2}\phi Y^{\mathcal{H}}) - \nabla_Y^{\mathcal{H}}(-\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{H}}) - \nabla_{\nabla_X^{\mathcal{H}} Y^{\mathcal{H}} - \nabla_Y^{\mathcal{H}} X^{\mathcal{H}}} \xi^{\mathcal{H}} \\ &= -\frac{\varepsilon}{2}(\nabla_X^{\mathcal{H}} \phi)Y^{\mathcal{H}} + \frac{\varepsilon}{2}(\nabla_Y^{\mathcal{H}} \phi)X^{\mathcal{H}} = \frac{\varepsilon^2}{4}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} \\ &\quad - \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}) = \frac{1}{4}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}})\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $(\phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$, $(M')^\nu$ üzerinde ε -Sasakian Finsler yapı olsun. (3.45) ifadesinden

$$\begin{aligned} R(X^\nu, Y^\nu)\xi^\nu &= \nabla_X^\nu \nabla_Y^\nu \xi^\nu - \nabla_Y^\nu \nabla_X^\nu \xi^\nu - \nabla_{[X^\nu, Y^\nu]}\xi^\nu \\ &= \nabla_X^\nu \left(-\frac{\varepsilon}{2}\phi Y^\nu\right) - \nabla_Y^\nu \left(-\frac{\varepsilon}{2}\phi X^\nu\right) - \nabla_{\nabla_X^\nu Y^\nu - \nabla_Y^\nu X^\nu}\xi^\nu \\ &= -\frac{\varepsilon}{2}(\nabla_X^\nu \phi)Y^\nu + \frac{\varepsilon}{2}(\nabla_Y^\nu \phi)X^\nu = \frac{\varepsilon^2}{4}(\eta^\nu(Y^\nu)X^\nu \\ &\quad - \eta^\nu(X^\nu)Y^\nu) = \frac{1}{4}(\eta^\nu(Y^\nu)X^\nu - \eta^\nu(X^\nu)Y^\nu) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.4.5. $(M')^h$ ve $(M')^\nu$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^h, \xi^h, \eta^h, G^h)$ ve $(\phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$ ε -Sasakian Finsler yapılar olmak üzere

$$R(X, Y)\phi Z = R(X, Y)\phi Z^h + R(X, Y)\phi Z^\nu, \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} R(X^\nu, Y^\nu)\phi Z^\nu &= \phi R(X^\nu, Y^\nu)Z^\nu + \frac{\varepsilon}{4}\{G^\nu(\phi X^\nu, Z^\nu)Y^\nu - G^\nu(Y^\nu, Z^\nu)\phi X^\nu \\ &\quad + G^\nu(X^\nu, Z^\nu)\phi Y^\nu - G^\nu(\phi Y^\nu, Z^\nu)X^\nu\}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} R(X^h, Y^h)\phi Z^h &= \phi R(X^h, Y^h)Z^h + \frac{\varepsilon}{4}\{G^h(\phi X^h, Z^h)Y^h - G^h(Y^h, Z^h)\phi X^h \\ &\quad + G^h(X^h, Z^h)\phi Y^h - G^h(\phi Y^h, Z^h)X^h\} \end{aligned} \quad (4.58)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (3.45) ve (4.52) ifadelerini kullanarak

$$\begin{aligned} R(X^h, Y^h)\phi Z^h &= \frac{1}{2}\nabla_X^h(G^h(Y^h, Z^h)\xi^h) - \frac{\varepsilon}{2}\nabla_X^h(\eta^h(Z^h)Y^h) + \frac{1}{2}\{G^h(X^h, \nabla_Y^h Z^h)\xi^h \\ &\quad - \varepsilon\eta^h(\nabla_Y^h Z^h)X^h\} + \phi R(X^h, Y^h)Z^h - \frac{1}{2}\nabla_Y^h(G^h(X^h, Z^h)\xi^h) + \frac{\varepsilon}{2}\nabla_Y^h(\eta^h(Z^h)X^h) \\ &\quad - \frac{1}{2}G^h(\nabla_X^h Z^h, Y^h)\xi^h + \frac{\varepsilon}{2}(\eta^h(\nabla_X^h Z^h))Y^h - \frac{1}{2}G^h([X^h, Y^h], Z^h)\xi^h \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}\eta^h(Z^h)[X^h, Y^h] = \phi R(X^h, Y^h)Z^h + \frac{\varepsilon}{4}\{G^h(X^h, Z^h)\phi Y^h - G^h(Y^h, Z^h)\phi X^h\} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}((\nabla_Y^h \eta^h)Z^h X^h - (\nabla_X^h \eta^h)Z^h Y^h) = \phi R(X^h, Y^h)Z^h + \frac{\varepsilon}{4}\{G^h(X^h, Z^h)\phi Y^h \\ &\quad - G^h(Y^h, Z^h)\phi X^h + \Omega(Y^h, Z^h)X^h - \Omega(X^h, Z^h)Y^h\} = \phi R(X^h, Y^h)Z^h \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{4}\{G^h(X^h, Z^h)\phi Y^h - G^h(Y^h, Z^h)\phi X^h - G^h(\phi Y^h, Z^h)X^h + G^h(\phi X^h, Z^h)Y^h\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca (3.45) ve (4.53) ifadelerini kullanarak

$$\begin{aligned}
R(X^\nu, Y^\nu)\phi Z^\nu &= \frac{1}{2}\nabla_X^\nu(G^\nu(Y^\nu, Z^\nu)\xi^\nu) - \frac{\varepsilon}{2}\nabla_X^\nu(\eta^\nu(Z^\nu)Y^\nu) + \frac{1}{2}\{G^\nu(X^\nu, \nabla_Y^\nu Z^\nu)\xi^\nu \\
&- \varepsilon\eta^\nu(\nabla_Y^\nu Z^\nu)X^\nu\} + \phi R(X^\nu, Y^\nu)Z^\nu - \frac{1}{2}\nabla_Y^\nu(G^\nu(X^\nu, Z^\nu)\xi^\nu) + \frac{\varepsilon}{2}\nabla_Y^\nu(\eta^\nu(Z^\nu)X^\nu) \\
&- \frac{1}{2}G^\nu(\nabla_X^\nu Z^\nu, Y^\nu)\xi^\nu + \frac{\varepsilon}{2}(\eta^\nu(\nabla_X^\nu Z^\nu))Y^\nu - \frac{1}{2}G^\nu([X^\nu, Y^\nu], Z^\nu)\xi^\nu \\
&+ \frac{\varepsilon}{2}\eta^\nu(Z^\nu)[X^\nu, Y^\nu] = \phi R(X^\nu, Y^\nu)Z^\nu + \frac{\varepsilon}{4}(G^\nu(X^\nu, Z^\nu)\phi Y^\nu - G^\nu(Y^\nu, Z^\nu)\phi X^\nu) \\
&+ \frac{\varepsilon}{2}((\nabla_Y^\nu \eta^\nu)Z^\nu X^\nu - (\nabla_X^\nu \eta^\nu)Z^\nu Y^\nu) = \phi R(X^\nu, Y^\nu)Z^\nu + \frac{\varepsilon}{4}\{G^\nu(X^\nu, Z^\nu)\phi Y^\nu \\
&- G^\nu(Y^\nu, Z^\nu)\phi X^\nu + \Omega(Y^\nu, Z^\nu)X^\nu - \Omega(X^\nu, Z^\nu)Y^\nu\} = \phi R(X^\nu, Y^\nu)Z^\nu \\
&+ \frac{\varepsilon}{4}\{G^\nu(X^\nu, Z^\nu)\phi Y^\nu - G^\nu(Y^\nu, Z^\nu)\phi X^\nu - G^\nu(\phi Y^\nu, Z^\nu)X^\nu + G^\nu(\phi X^\nu, Z^\nu)Y^\nu\}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 4.4.6. (4.57), (4.58), (4.56) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
R(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H})Z^\mathcal{H} &= -\phi R(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H})\phi Z^\mathcal{H} + \frac{\varepsilon}{4}\{G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H})X^\mathcal{H} - G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H})Y^\mathcal{H} \\
&- G^\mathcal{H}(\phi Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H})\phi X^\mathcal{H} + G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H})\phi Y^\mathcal{H}\},
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
R(X^\nu, Y^\nu)Z^\nu &= -\phi R(X^\nu, Y^\nu)\phi Z^\nu + \frac{\varepsilon}{4}\{G^\nu(Y^\nu, Z^\nu)X^\nu - G^\nu(X^\nu, Z^\nu)Y^\nu \\
&- G^\nu(\phi Y^\nu, Z^\nu)\phi X^\nu + G^\nu(\phi X^\nu, Z^\nu)\phi Y^\nu\}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

ve

$$\begin{aligned}
G^\mathcal{H}(R(\phi X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H})\phi Z^\mathcal{H}, \phi W^\mathcal{H}) &= G^\mathcal{H}(R(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H})Z^\mathcal{H}, W^\mathcal{H}) + \frac{1}{4}\{-\eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H})\eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H})G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, W^\mathcal{H}) \\
&- \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H})\eta^\mathcal{H}(W^\mathcal{H})G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) + \eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H})\eta^\mathcal{H}(W^\mathcal{H})G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) \\
&+ \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H})\eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H})G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, W^\mathcal{H})\},
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
G^\nu(R(\phi X^\nu, \phi Y^\nu)\phi Z^\nu, \phi W^\nu) &= G^\nu(R(X^\nu, Y^\nu)Z^\nu, W^\nu) + \frac{1}{4}\{-\eta^\nu(Y^\nu)\eta^\nu(Z^\nu)G^\nu(X^\nu, W^\nu) \\
&- \eta^\nu(X^\nu)\eta^\nu(W^\nu)G^\nu(Y^\nu, Z^\nu) + \eta^\nu(Y^\nu)\eta^\nu(W^\nu)G^\nu(X^\nu, Z^\nu) \\
&+ \eta^\nu(X^\nu)\eta^\nu(Z^\nu)G^\nu(Y^\nu, W^\nu)\}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

olur.

İspat. (4.57) eşitliğinden

$$\begin{aligned} R(\phi X^\nu, \phi Y^\nu) \phi Z^\nu &= \phi R(\phi X^\nu, \phi Y^\nu) Z^\nu + \frac{\varepsilon}{4} \{-G^\nu(X^\nu, Z^\nu) \phi Y^\nu + \varepsilon \eta^\nu(X^\nu) \eta^\nu(Z^\nu) \phi Y^\nu \\ &+ G^\nu(\phi Y^\nu, Z^\nu) X^\nu - G^\nu(\phi Y^\nu, Z^\nu) \eta^\nu(X^\nu) \xi^\nu - G^\nu(\phi X^\nu, Z^\nu) Y^\nu \\ &+ \eta^\nu(Y^\nu) G^\nu(\phi X^\nu, Z^\nu) \xi^\nu + G^\nu(Y^\nu, Z^\nu) \phi X^\nu - \varepsilon \eta^\nu(Y^\nu) \eta^\nu(Z^\nu) \phi X^\nu\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G^\nu(R(\phi X^\nu, \phi Y^\nu) \phi Z^\nu, \phi W^\nu) &= G^\nu(\phi R(\phi X^\nu, \phi Y^\nu) Z^\nu, \phi W^\nu) \\ &+ \frac{\varepsilon}{4} \{-G^\nu(X^\nu, Z^\nu) G^\nu(\phi Y^\nu, \phi W^\nu) + \varepsilon \eta^\nu(X^\nu) \eta^\nu(Z^\nu) G^\nu(\phi Y^\nu, \phi W^\nu) \\ &+ G^\nu(\phi Y^\nu, Z^\nu) G^\nu(X^\nu, \phi W^\nu) - G^\nu(\phi X^\nu, Z^\nu) G^\nu(Y^\nu, \phi W^\nu) \\ &+ G^\nu(Y^\nu, Z^\nu) G^\nu(\phi X^\nu, \phi W^\nu) - \varepsilon \eta^\nu(Y^\nu) \eta^\nu(Z^\nu) G^\nu(\phi X^\nu, \phi W^\nu) \\ &= G^\nu(R(X^\nu, Y^\nu) Z^\nu, W^\nu) + \frac{1}{4} \{-\eta^\nu(Y^\nu) \eta^\nu(Z^\nu) G^\nu(X^\nu, W^\nu) \\ &- \eta^\nu(X^\nu) \eta^\nu(W^\nu) G^\nu(Y^\nu, Z^\nu) \\ &+ \eta^\nu(Y^\nu) \eta^\nu(W^\nu) G^\nu(X^\nu, Z^\nu) + \eta^\nu(X^\nu) \eta^\nu(Z^\nu) G^\nu(Y^\nu, W^\nu)\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.58) eşitliğinden

$$\begin{aligned} R(\phi X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}) \phi Z^\mathcal{H} &= \phi R(\phi X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}) Z^\mathcal{H} + \frac{\varepsilon}{4} \{-G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) \phi Y^\mathcal{H} + \varepsilon \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H}) \phi Y^\mathcal{H} \\ &+ G^\mathcal{H}(\phi Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) X^\mathcal{H} - G^\mathcal{H}(\phi Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} - G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) Y^\mathcal{H} \\ &+ \eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) \xi^\mathcal{H} + G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) \phi X^\mathcal{H} - \varepsilon \eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H}) \phi X^\mathcal{H}\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G^\mathcal{H}(R(\phi X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}) \phi Z^\mathcal{H}, \phi W^\mathcal{H}) &= G^\mathcal{H}(\phi R(\phi X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}) Z^\mathcal{H}, \phi W^\mathcal{H}) \\ &+ \frac{\varepsilon}{4} \{-G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(\phi Y^\mathcal{H}, \phi W^\mathcal{H}) + \varepsilon \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(\phi Y^\mathcal{H}, \phi W^\mathcal{H}) \\ &+ G^\mathcal{H}(\phi Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, \phi W^\mathcal{H}) - G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, \phi W^\mathcal{H}) \\ &+ G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, \phi W^\mathcal{H}) - \varepsilon \eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, \phi W^\mathcal{H}) \\ &= G^\mathcal{H}(R(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) Z^\mathcal{H}, W^\mathcal{H}) + \frac{1}{4} \{-\eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, W^\mathcal{H}) \\ &- \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(W^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) \\ &+ \eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(W^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) + \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}) \eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H}) G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, W^\mathcal{H})\} \end{aligned}$$

bulunur.

$X^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ birim vektörü $\xi^{\mathcal{H}}$ a ortogonal ise $(TM')^{\mathcal{H}}$ deki düzlem kesit olan $\{X^{\mathcal{H}}, \phi X^{\mathcal{H}}\}$ yatay ϕ -kesit olarak adlandırılır. Benzer olarak $X^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ birim vektörü $\xi^{\mathcal{V}}$ a ortogonal ise $(TM')^{\mathcal{V}}$ deki düzlem kesit olan $\{X^{\mathcal{V}}, \phi X^{\mathcal{V}}\}$ dikey ϕ -kesit olarak adlandırılır. Böylece yatay flag eğriliği $K^*(X^{\mathcal{H}})$ ile dikey flag eğriliği ise $K^*(X^{\mathcal{V}})$ ile gösterilir. Ayrıca

$$K^*(X^{\mathcal{H}}, \phi X^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, \phi X^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \quad (4.63)$$

$$K^*(X^{\mathcal{V}}, \phi X^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, \phi X^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) \quad (4.64)$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Sırasıyla yatay ϕ -kesitsel eğrilik ve dikey ϕ -kesitsel eğrilik olarak adlandırılır.

Sasakian yarı Finsler manifoldunda ϕ -kesitsel eğrilik

$$K^*(X) = K^*(X^{\mathcal{H}}) + K^*(X^{\mathcal{V}})$$

formundadır.

Önerme 4.4.7. $(M')^h$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ yapısı K -değme Finsler yapı olsun. $(M')^h$ lokal olarak simetrik ise, ε -Sasakian Finsler yapının sabit eğriliği $\frac{\varepsilon}{4}$ tür.

İspat. (4.52) ve (4.55) eşitliklerinden $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$(\nabla_Z^{\mathcal{H}} R)(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \frac{\varepsilon}{4} \{G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}\} - R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} \quad (4.65)$$

elde edilir. $(M')^h$ lokal simetrik yani $(\nabla_Z^{\mathcal{H}} R) = 0$ olduğundan (4.65) yardımıyla

$$R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} = \frac{\varepsilon}{4} \{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}\} \quad (4.66)$$

yazılır. $\{X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\}$ ortonormal çifti için, $X^{\mathcal{H}}$ time-like bir vektör olduğunda, $Y^{\mathcal{H}}$ space-like olmak zorundadır. Çünkü aynı anda iki vektör time-like ya da space-like olduğu zaman birbirine dik olamaz. Böylece

$$K(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \frac{G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})}{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})} = \frac{\varepsilon}{4} \left\{ \frac{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})}{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})} \right\} = \frac{\varepsilon}{4}$$

elde edilir.

Önerme 4.4.8. $(M')^v$ üzerinde $(\phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$ yapısı K -değme Finsler yapı olsun. $(M')^v$ lokal olarak simetrik ise, ε -Sasakian Finsler yapının sabit eğriligi $\frac{\varepsilon}{4}$ tür.

İspat. (4.53) ve (4.54) eşitliklerinden $\forall X^\nu, Y^\nu, Z^\nu, \xi^\nu \in (TM')^\nu$ için

$$(\nabla_Z^\nu R)(X^\nu, Y^\nu, \xi^\nu) = \frac{\varepsilon}{4} \{G^\nu(Z^\nu, Y^\nu)X^\nu - G^\nu(Z^\nu, X^\nu)Y^\nu\} - R(X^\nu, Y^\nu)Z^\nu \quad (4.67)$$

elde edilir. $(M')^v$ lokal simetrik yani $(\nabla_Z^\nu R) = 0$ olduğundan (4.67) yardımıyla

$$R(X^\nu, Y^\nu)Z^\nu = \frac{\varepsilon}{4} \{G^\nu(Y^\nu, Z^\nu)X^\nu - G^\nu(X^\nu, Z^\nu)Y^\nu\} \quad (4.68)$$

yazılır. $\{X^\nu, Y^\nu\}$ ortonormal çifti için, X^ν time-like bir vektör olduğunda, Y^ν space-like olmak zorundadır. Çünkü aynı anda iki vektör time-like ya da space-like olduğu zaman birbirine dik olamaz. Böylece

$$K(X^\nu, Y^\nu) = \frac{G^\nu(R(X^\nu, Y^\nu)Y^\nu, X^\nu)}{G^\nu(X^\nu, X^\nu)G^\nu(Y^\nu, Y^\nu)} = \frac{\varepsilon}{4} \left\{ \frac{G^\nu(Y^\nu, Y^\nu)G^\nu(X^\nu, X^\nu)}{G^\nu(X^\nu, X^\nu)G^\nu(Y^\nu, Y^\nu)} \right\} = \frac{\varepsilon}{4}$$

elde edilir.

$(M')^h$, ε -Sasakian Finsler manifoldun S^h yatay Ricci tensörü, $\{E_1^h, \dots, E_{2n}^h, \xi^h\}$, $(TM')^h$ nin lokal ortonormal çatısı olmak üzere

$$\begin{aligned} S^h(X^h, Y^h) &= \sum_{i=1}^{2n} G^h(R(X^h, E_i^h)E_i^h, Y^h) + G^h(R(X^h, \xi^h)\xi^h, Y^h) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} G^h(R(E_i^h, X^h)Y^h, E_i^h) + G^h(R(X^h, \xi^h)\xi^h, Y^h) \end{aligned} \quad (4.69)$$

eşitliği ile verilir.

$(M')^v$, ε -Sasakian Finsler manifoldun S^v dikey Ricci tensörü $\{E_1^v, \dots, E_{2n}^v, \xi^v\}$, $(TM')^v$ nin lokal ortonormal çatısı olmak üzere

$$\begin{aligned} S^v(X^v, Y^v) &= \sum_{i=1}^{2n} G^v(R(X^v, E_i^v)E_i^v, Y^v) + G^v(R(X^v, \xi^v)\xi^v, Y^v) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} G^v(R(E_i^v, X^v)Y^v, E_i^v) + G^v(R(X^v, \xi^v)\xi^v, Y^v) \end{aligned} \quad (4.70)$$

eşitliği ile verilir.

Önerme 4.4.9. q indeksli $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı metrik yapıların K - değme olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} \left(\frac{2n-q}{4}\right), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{2n-q+1}{4}\right), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ time-like ise} \end{cases}, \\ S^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) &= \begin{cases} \left(\frac{2n-q}{4}\right), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{2n-q+1}{4}\right), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ time-like ise} \end{cases} \end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. (4.55) ve (4.69) göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(R(E_i^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})E_i^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) = \frac{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{2n}}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$, q indeksli yarı Finsler manifoldu olduğundan, $G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \varepsilon = 1$ ise $\xi^{\mathcal{H}}$ space-like vektör olur. Böylece

$$S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^q G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) + \frac{1}{4} \sum_{i=q+1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) = \frac{2n-q}{4}$$

bulunur. $G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \varepsilon = -1$ ise $\xi^{\mathcal{H}}$ time-like vektör olur. Böylece

$$S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{q-1} G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) + \frac{1}{4} \sum_{i=q+1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) = \frac{2n-q+1}{4}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.54) ve (4.70) göz önünde bulundurulursa, $\xi^{\mathcal{V}}$ space-like vektör için

$$S^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \frac{2n-q}{4}$$

elde edilir. $\xi^{\mathcal{V}}$ time-like vektör için ise

$$S^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \frac{2n-q+1}{4}$$

eşitliği bulunur.

Yardımcı Teorem 4.4.10. $(M')^h$, ε -Sasakian Finsler manifoldun $S^{\mathcal{H}}$ yatay Ricci tensörü ve $(M')^v$, ε -Sasakian Finsler manifoldun $S^{\mathcal{V}}$ dikey Ricci tensörü aşağıda verilen eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} \left(\frac{2n-q}{4}\right) \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{2n-q+1}{4}\right) \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ time-like ise,} \end{cases} \\ S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) &= \begin{cases} \left(\frac{2n-q}{4}\right) \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{2n-q+1}{4}\right) \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ time-like ise.} \end{cases} \end{aligned}$$

İspat. $\xi^{\mathcal{H}}$ space-like vektör olsun. (4.55) ve (4.69) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(R(E_i^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(R(\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})E_i^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}), E_i^{\mathcal{H}}) + \frac{1}{4} G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^{2n} \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) \right\} + \frac{1}{4} \{ \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) \} \\ &= \frac{1}{4} \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})(2n - q) + \frac{1}{4} \{ \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \} = \frac{2n - q}{4} \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. $\xi^{\mathcal{H}}$ time-like vektör ise

$$S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \left(\frac{2n - q + 1}{4}\right) \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})$$

olur. Benzer şekilde (4.54) ve (4.70) eşitliklerini kullanarak, $\xi^{\mathcal{V}}$ bir space-like vektör ise

$$S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \left(\frac{2n - q}{4}\right) \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})$$

olur ve $\xi^{\mathcal{V}}$ bir time-like vektör ise

$$S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \left(\frac{2n - q + 1}{4}\right) \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})$$

bulunur.

5. YARI FINSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DEĞME LORENTZ YAPILAR

Bu bölümde yarı Finsler manifoldları üzerinde hemen hemen değme Lorentz yapılar, değme Lorentz yapılar ve Sasakian Lorentz yapılar kuruldu. Ayrıca bu yapılara ait eğrilikler hesaplandı. İlk olarak yarı Finsler manifoldları üzerinde hemen hemen değme Lorentz yapıları ele alalım.

5.1. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Hemen Hemen Değme Lorentz Yapılar

$F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ q indeksli bir yarı Finsler manifoldu olsun. Özel olarak $q = 1$ olarak alınırsa F^{2n+1} Lorentz Finsler manifoldu olarak adlandırılır. (V^i) ve (W^j) lokal bileşenleri ile birlikte V ve W vektör alanları için $g_{ij}^{F^*}$, (3.7) deki gibi olmak üzere,

$$g^{F^*} : \Gamma(TM')^{\mathcal{V}} \times \Gamma(TM')^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathfrak{S}(M'),$$

$$g^{F^*}(V, W)(x, y) = g_{ij}^{F^*} V^i(x, y) W^j(x, y) \quad (5.1)$$

tanımlayalım. Böylece

$$g_{ij}^{F^*}(x, y) = g^{F^*}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)(x, y) \quad (5.2)$$

yazılır. Açık olarak g^{F^*} simetrik Finsler tensör alanı olur. g^{F^*} , Lorentz Finsler metrik olarak adlandırılır. Ayrıca g^{F^*} , $(TM')^{\mathcal{V}}$ Finsler vektör demeti üzerinde Lorentz metrik olarak düşünülebilir.

Benzer şekilde $g_{ij}^{F^*}$, (3.7) deki gibi olmak üzere,

$$g^{F^*} : \Gamma(TM')^{\mathcal{H}} \times \Gamma(TM')^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathfrak{S}(M'),$$

$$g^{F^*}(V, W)(x, y) = g_{ij}^{F^*}(x, y) V^i(x, y) W^j(x, y), \quad (5.3)$$

$$g_{ij}^{F^*}(x, y) = g^{F^*}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right)(x, y) \quad (5.4)$$

tanımlanabilir. g^{F^*} simetrik Finsler tensör alanı olur. Ayrıca g^{F^*} , $(TM')^{\mathcal{H}}$ Finsler vektör demeti üzerinde Lorentz metrik olarak düşünülebilir. Diğer taraftan $\forall X, Y \in \Gamma(TM')$

$$G : \Gamma(TM') \times \Gamma(TM') \rightarrow \mathfrak{S}(M'),$$

$$G(X, Y) = G^{\mathcal{H}}(X, Y) + G^{\mathcal{V}}(X, Y) \quad (5.5)$$

tanımlayalım. Burada $TM' = (TM')^{\mathcal{H}} \oplus (TM')^{\mathcal{V}}$ şeklindedir. Açık olarak G , $(0, 2)$ tipinde simetrik bir tensör alanı olur. Ayrıca G , M' üzerinde non-dejenere ve sabit indekslidir. M' üzerinde G yarı-Riemann metriğinin indeksi 2 dir. Böylece

$$G = g_{ij}^{F*} dx^i \otimes dx^j + g_{ij}^{F*} \delta y^i \otimes \delta y^j = G^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{V}} \quad (5.6)$$

yazılır. Burada g^{F*} Lorentz Finsler metriğidir. Yatay vektör demeti $(M')^h$ üzerinde $G^{\mathcal{H}}$ ve dikey vektör demeti $(M')^v$ üzerinde $G^{\mathcal{V}}$ Lorentz metrik olarak düşünülebilir.

Tanım 5.1.1. $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ indeksi 1 olan yarı Finsler manifoldu olmak üzere $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler yapılar olsun. $G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = -1$, yani $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ time-like vektörler olmak üzere G , M' üzerinde yarı-Finsler metriği ise

$$G(\phi X, \phi Y) = G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}), \quad (5.7)$$

$$G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}),$$

$$G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}),$$

$$\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) = -G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}), \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) = -G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) \quad (5.8)$$

eşitlikleri vardır. Böylece $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$, $(M')^h$ üzerinde hemen hemen değme Lorentz Finsler yapı ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ ise $(M')^v$ üzerinde hemen hemen değme Lorentz Finsler yapı olarak adlandırılır.

$(TM')^{\mathcal{H}}$ nin $\{E_1^{\mathcal{H}}, \dots, E_n^{\mathcal{H}}, \phi E_1^{\mathcal{H}}, \dots, \phi E_n^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}\}$ lokal $\phi^{\mathcal{H}}$ - bazını ele alalım. $(M')^h$ üzerinde $G^{\mathcal{H}}$ Lorentz metriği olduğundan

$$G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \varepsilon_0 = -1,$$

$$G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) = \varepsilon_i = +1,$$

$$G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}, E_j^{\mathcal{H}}) = \delta_{ij}$$

eşitlikleri yazılır. $\xi^{\mathcal{H}}$ time-like vektör ise diğer tüm $E_i^{\mathcal{H}}$, $(1 \leq i \leq 2n)$, vektörleri space-like olur.

Şimdi $(TM')^\nu$ nin $\{E_1^\nu, \dots, E_n^\nu, \phi E_1^\nu, \dots, \phi E_n^\nu, \xi^\nu\}$ lokal ϕ^ν - bazını ele alalım. $(M')^\nu$ üzerinde G^ν Lorentz metriği olduğundan

$$G^\nu(\xi^\nu, \xi^\nu) = \varepsilon_0 = -1$$

$$G^\nu(E_i^\nu, E_i^\nu) = \varepsilon_i = +1$$

$$G^\nu(E_i^\nu, E_j^\nu) = \delta_{ij}$$

eşitlikleri yazılır. ξ^ν time-like vektör ise diğer tüm E_i^ν , $(1 \leq i \leq 2n)$, vektörleri space-like olur. Böylece (TM') in ϕ - bazı $\{E_1, \dots, E_{2n}, \xi\} = \{E_1^\mathcal{H} + E_1^\nu, \dots, E_{2n}^\mathcal{H} + E_{2n}^\nu, \xi^\mathcal{H} + \xi^\nu\}$ şeklinde ifade edilir.

Sonuç 5.1.2. $(\phi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}, \eta^\mathcal{H}, G^\mathcal{H})$ ve $(\phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$, sırasıyla, $(M')^\mathcal{H}$ ve $(M')^\nu$ Finsler vektör demetleri üzerinde hemen hemen değme Lorentz Finsler yapılar olsunlar. (5.7) ve (5.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} G^\nu(\phi X^\nu, Y^\nu) &= -G^\nu(X^\nu, \phi Y^\nu), \\ G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) &= -G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} G^\nu(\phi X^\nu, \phi Y^\nu) &= -G^\nu(\phi^2 X^\nu, Y^\nu), \\ G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}) &= -G^\mathcal{H}(\phi^2 X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca ikinci temel form

$$\begin{aligned} \Omega(X^\nu, Y^\nu) &= G^\nu(X^\nu, \phi Y^\nu), \\ \Omega(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) &= G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

eşitlikleri ile verilir (Sinha ve Yadav, 1991).

Önerme 5.1.3. Yukarıda tanımlanan ikinci temel form

$$\Omega(\phi X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}) = \Omega(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}), \Omega(\phi X^\nu, \phi Y^\nu) = \Omega(X^\nu, Y^\nu) \quad (5.12)$$

ve

$$\Omega(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) = -\Omega(Y^\mathcal{H}, X^\mathcal{H}), \Omega(X^\nu, Y^\nu) = -\Omega(Y^\nu, X^\nu) \quad (5.13)$$

eşitliklerini sağlar (Sinha ve Yadav, 1991).

Önerme 5.1.4. ∇ , M' üzerinde Finsler koneksiyonu ve Ω ikinci temel form olmak üzere

$$\Omega(X, Y) = d\eta(X, Y), \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= (\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta)(Y^{\mathcal{H}}) - (\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta)(X^{\mathcal{H}}) + \eta(T(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})), \\ \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= (\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta)(Y^{\mathcal{V}}) - (\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta)(X^{\mathcal{V}}) + \eta(T(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})) \end{aligned} \quad (5.15)$$

eşitlikleri sağlansın. Böylece hemen hemen değme Lorentz Finsler yapı hemen hemen Sasakian Lorentz Finsler yapı olarak adlandırılır. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde sırasıyla $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapıları hemen hemen Sasakian Lorentz Finsler yapılar olarak adlandırılır.

Teorem 5.1.5. Ω ikinci temel form ve ∇ torsiyonsuz Lorentz Sasakian Finsler koneksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} \Omega(X, Y) &= (\nabla_X\eta)Y - (\nabla_Y\eta)X, \\ \Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= (\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta)Y^{\mathcal{H}} - (\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta)X^{\mathcal{H}}, \\ \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= (\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta)Y^{\mathcal{V}} - (\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta)X^{\mathcal{V}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (5.1.4) ve (5.15) eşitliklerinden (5.16) elde edilir.

Tanım 5.1.6. η Killing vektör alanı, yani

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta)(Y^{\mathcal{H}}) + (\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta)(X^{\mathcal{H}}) &= 0, \\ (\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta)(Y^{\mathcal{V}}) + (\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta)(X^{\mathcal{V}}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

ise M' üzerinde hemen hemen Sasakian Lorentz Finsler yapı Sasakian Lorentz Finsler yapı olarak adlandırılır. M' üzerinde ∇ torsiyonsuz Finsler koneksiyonu Sasakian Finsler koneksiyonu olarak adlandırılır (Sinha ve Yadav, 1991).

Teorem 5.1.7. M' üzerinde Sasakian Lorentz Finsler yapı ile birlikte ∇ torsiyonsuz Finsler koneksiyonu ve Ω ikinci temel form olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= 2(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta)(Y^{\mathcal{H}}) = -2(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta)X^{\mathcal{H}}, \\ \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) &= 2(\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta)(Y^{\mathcal{V}}) = -2(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta)X^{\mathcal{V}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

eşitlikleri sağlanır.

(5.12) ve (5.15) ifadelerinden $d\eta(X, Y) = G(X, \phi Y)$ bulunur. Böylece

$$d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = \Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}), \quad (5.19)$$

$$d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \quad (5.20)$$

eşitlikleri elde edilir.

5.2. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Değme Lorentz Yapıların İntegral- lenebilir Tensör Alanları

$F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ indeksi 1 olan Finsler manifoldu olsun. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ yapılarının integrallenebilir tensör alanı, $\forall \xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall \xi^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için aşağıdaki gibidir:

$$N^{\mathcal{H}}(X, Y) = [\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}] - \phi[\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] - \phi[X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}] + \phi^2[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}},$$

$$N^{\mathcal{V}}(X, Y) = [\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}] - \phi[\phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}] - \phi[X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}] + \phi^2[X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}] + d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}.$$

Ayrıca $\forall \xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall \xi^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ tensör alanı aşağıdaki gibidir.

$$N^{(1)}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = N_{\phi}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, \quad (5.21)$$

$$N^{(2)}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = (L_{\phi X}^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})(Y^{\mathcal{H}}) - (L_{\phi Y}^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}),$$

$$N^{(3)}(X^{\mathcal{H}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi)(X^{\mathcal{H}}), N^{(4)}(X^{\mathcal{H}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}})$$

ve

$$N^{(1)}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = N_{\phi}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) + d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}, \quad (5.22)$$

$$N^{(2)}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = (L_{\phi X}^{\mathcal{V}}\eta^{\mathcal{V}})(Y^{\mathcal{V}}) - (L_{\phi Y}^{\mathcal{V}}\eta^{\mathcal{V}})(X^{\mathcal{V}}),$$

$$N^{(3)}(X^{\mathcal{V}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi)(X^{\mathcal{V}}), N^{(4)}(X^{\mathcal{V}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{V}}\eta^{\mathcal{V}})(X^{\mathcal{V}}).$$

Hemen hemen değme Finsler yapının normal olması için gerek ve yeter şart yukarıda tanımlanan dört tensör alanının sıfır olmasıdır.

Yardımcı Teorem 5.2.1. Eğer $N^{(1)} = 0$ ise $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ olur (Yalınız ve Çalışkan, 2013).

Önerme 5.2.2. $(M')^h$ ve $(M')^v$ Finsler vektör demetleri üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler yapılarının normal olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} N_{\phi}^{\mathcal{H}} + d\eta^{\mathcal{H}} \otimes \xi^{\mathcal{H}} &= 0, \\ N_{\phi}^{\mathcal{V}} + d\eta^{\mathcal{V}} \otimes \xi^{\mathcal{V}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

$F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ Lorentz Finsler manifoldu olmak üzere $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapıları hemen hemen değme Lorentz yapılar olsunlar. Böylece Finsler vektör demetleri üzerinde $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ metrikleri Lorentz metrik olarak düşünülebilir. $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ vektör alanları $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ metriklerine göre Killing vektör alanları ise $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde değme Lorentz Finsler yapıları, K -değme Lorentz Finsler yapılar olarak adlandırılır. $(M')^h$ ve $(M')^v$ ise K -değme Lorentz Finsler vektör demetleri olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 5.2.3. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapıları değme Lorentz Finsler yapılar olsunlar. Böylece $N^{(2)} = 0$ ve $N^{(4)} = 0$ olur. Ayrıca $N^{(3)} = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ metriklerine göre $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ vektör alanlarının Killing vektör alanı olmasıdır.

İspat. (5.12) ve (5.19) eşitliklerinden

$$d\eta^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = \Omega(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi^2 Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

bulunur. Buradan $d\eta^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = 0$ elde edilir. Böylece $N^{(2)} = 0$ olur. Diğer taraftan

$$0 = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi \xi^{\mathcal{H}}) = d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = X^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) - \xi^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - \eta^{\mathcal{H}}[X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}]$$

olur ve

$$\xi^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - \eta^{\mathcal{H}}([\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}]) = 0$$

elde edilir. Böylece $(L_\xi^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}) = 0$ yani $N^{(4)} = 0$ olur. Buradan

$$(L_\xi^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = -\xi^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})) + \eta^{\mathcal{H}}[\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}] = -(L_\xi^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} = 0$$

yani, $(L_\xi^{\mathcal{H}}d\eta^{\mathcal{H}}) = 0$ bulunur. Sonuç olarak

$$(L_\xi^{\mathcal{H}}d\eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = (L_\xi^{\mathcal{H}}\Omega)(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = 0$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} 0 &= \xi^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], \phi Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi[\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]) \\ &= (L_\xi^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, (L_\xi^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}) \\ &= (L_\xi^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, N^{(3)}(Y^{\mathcal{H}})) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $N^{(3)} = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\xi^{\mathcal{H}}$ ın Killing vektör alanı olmasıdır. Benzer olarak $N^{(2)} = 0$ ve $N^{(4)} = 0$ ifadelerini ele alırsak, $N^{(3)} = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\xi^{\mathcal{V}}$ nin Killing vektör alanı olmasıdır.

Yardımcı Teorem 5.2.4. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme Lorentz Finsler yapılar olsunlar. Böylece $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$\begin{aligned} 2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) &= d\Omega(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}) - d\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}), \phi X^{\mathcal{H}}) \\ &\quad - d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) + d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) - N^{(2)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

ve

$$\begin{aligned} 2G^{\mathcal{V}}((\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) &= d\Omega(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}, \phi Z^{\mathcal{V}}) - d\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) + G^{\mathcal{V}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}), \phi X^{\mathcal{V}}) \\ &\quad - d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}) + d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) - N^{(2)}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. ∇ bir Finsler koneksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} 2G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \\ &\quad + X^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + Y^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) - Z^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}), \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned}
2G^\nu(\nabla_X^\nu Y^\nu, Z^\nu) &= G^\nu([X^\nu, Y^\nu], Z^\nu) + G^\nu([Z^\nu, X^\nu], Y^\nu) - G^\nu([Y^\nu, Z^\nu], X^\nu) \\
&+ X^\nu G^\nu(Y^\nu, Z^\nu) + Y^\nu G^\nu(X^\nu, Z^\nu) - Z^\nu G^\nu(X^\nu, Y^\nu)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
d\Omega(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) &= X^\mathcal{H}\Omega(Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}) + Y^\mathcal{H}\Omega(Z^\mathcal{H}, X^\mathcal{H}) + Z^\mathcal{H}\Omega(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}) \\
&- \Omega([X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}], Z^\mathcal{H}) - \Omega([Z^\mathcal{H}, X^\mathcal{H}], Y^\mathcal{H}) - \Omega([Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}], X^\mathcal{H}),
\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
d\Omega(X^\nu, Y^\nu, Z^\nu) &= X^\nu\Omega(Y^\nu, Z^\nu) + Y^\nu\Omega(Z^\nu, X^\nu) + Z^\nu\Omega(X^\nu, Y^\nu) \\
&- \Omega([X^\nu, Y^\nu], Z^\nu) - \Omega([Z^\nu, X^\nu], Y^\nu) - \Omega([Y^\nu, Z^\nu], X^\nu)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

yazılır. (5.27) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
2G^\nu((\nabla_X^\nu \phi)Y^\nu, Z^\nu) &= \phi Y^\nu G^\nu(X^\nu, Z^\nu) - Z^\nu\Omega(X^\nu, Y^\nu) + G^\nu([X^\nu, \phi Y^\nu], Z^\nu) \\
&+ \Omega([Z^\nu, X^\nu], Y^\nu) - G^\nu([\phi Y^\nu, Z^\nu], X^\nu) + Y^\nu\Omega(X^\nu, Z^\nu) - \phi Z^\nu G^\nu(X^\nu, Y^\nu) \\
&+ \Omega([X^\nu, Y^\nu], Z^\nu) + G^\nu([\phi Z^\nu, X^\nu], Y^\nu) - G^\nu([Y^\nu, \phi Z^\nu], X^\nu)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

yazılır ve (5.30) ifadesinden

$$\begin{aligned}
d\Omega(X^\nu, \phi Y^\nu, \phi Z^\nu) &= X^\nu\Omega(Y^\nu, Z^\nu) + \phi Y^\nu G^\nu(Z^\nu, X^\nu) - \phi Y^\nu(\eta^\nu(Z^\nu)\eta^\nu(X^\nu)) \\
&- \phi Z^\nu(\eta^\nu(Y^\nu)\eta^\nu(X^\nu)) - \phi Z^\nu G^\nu(X^\nu, Y^\nu) + G^\nu([X^\nu, \phi Y^\nu], Z^\nu) + \eta^\nu[X^\nu, \phi Y^\nu]\eta^\nu(Z^\nu) \\
&+ G^\nu([\phi Z^\nu, X^\nu], Y^\nu) + \eta^\nu(Y^\nu)\eta^\nu[\phi Z^\nu, X^\nu] - \Omega([\phi Y^\nu, \phi Z^\nu], X^\nu)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

hesaplanır. Böylece

$$\begin{aligned}
G^\nu(N^{(1)}(Y^\nu, Z^\nu), \phi X^\nu) &= -\Omega([Y^\nu, Z^\nu], X^\nu) + \Omega([\phi Y^\nu, \phi Z^\nu], X^\nu) - G^\nu([\phi Y^\nu, Z^\nu], X^\nu) \\
&- \eta^\nu[\phi Y, Z]\eta(X) - G^\nu([Y^\nu, \phi Z^\nu]X^\nu) - \eta^\nu[Y^\nu, \phi Z^\nu]\eta^\nu(X^\nu)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

olur ve $N^{(2)}(X^\nu, Y^\nu) = (L_{\phi X}^\nu \eta^\nu)(Y^\nu) - (L_{\phi Y}^\nu \eta^\nu)(X^\nu)$ olmasından

$$\begin{aligned}
N^{(2)}(Y^\nu, Z^\nu)\eta^\nu(X^\nu) &= \phi Y^\nu(\eta^\nu(Z^\nu)) - \phi Z^\nu(\eta^\nu(Y^\nu)) - \eta^\nu[\phi Y^\nu, Z^\nu] - \eta^\nu[Y^\nu, \phi Z^\nu]\eta^\nu(X^\nu)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

bulunur. Benzer işlemler yapılarak ve (5.29), (5.31), (5.32) ve (5.33) eşitlikleri kullanılarak (5.25) eşitliği elde edilir.

(5.21), (5.22), (5.12), (5.13), (5.26) ve (5.28) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
& d\Omega(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}) - d\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}), \phi X^{\mathcal{H}}) \\
& - N^{(2)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) + d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \\
& = \phi Y^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) - \phi Z^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) \\
& + G^{\mathcal{H}}([\phi Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - \Omega([\phi Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \\
& + Y^{\mathcal{H}}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) - Z^{\mathcal{H}}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \\
& + \Omega([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) + \Omega([Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) + \Omega([Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \\
& + \Omega([\phi Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) - \Omega([Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \\
& - G^{\mathcal{H}}([\phi Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \\
& = 2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})
\end{aligned}$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 5.2.5. $\Omega = d\eta$ ve $N^{(2)} = 0$ ile birlikte $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme Lorentz Finsler yapılar olmak üzere, $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}, \forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$\begin{aligned}
(a) 2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}), \phi X^{\mathcal{H}}) - d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \\
&\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) + d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}),
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
2G^{\mathcal{V}}((\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) &= G^{\mathcal{V}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}), \phi X^{\mathcal{V}}) - d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) \\
&\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}) + d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})
\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$(b) \nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi = 0, \quad \nabla_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi = 0 \tag{5.36}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (a)(5.34) ve (5.35) ifadelerinden ispat açıktır.

(b) $N^{(2)} = 0$ olmasından

$$N^{(2)} = (X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{H}}[\phi X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}] = -d\eta^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = 0$$

bulunur. Böylece (5.34) ifadesinden $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$G^{\mathcal{H}}((\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi)X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = 0$$

yani, $\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi = 0$ olur. Benzer olarak (5.35) yardımıyla $\forall X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$G^{\mathcal{V}}((\nabla_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi)X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = 0$$

yani, $\nabla_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi = 0$ olur.

Önerme 5.2.6. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme Lorentz Finsler yapılar olsunlar. Bu yapıların K -değme olmaları için gerek ve yeter şart $N^{(3)} = 0$ olmasıdır.

Sonuç 5.2.7. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ Sasakian Lorentz yapılar, K -değme Lorentz Finsler yapılarıdır.

Teorem 5.2.8. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme Lorentz Finsler yapılar olmak üzere bu yapıların K -değme Lorentz Finsler yapılar olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2}\phi X^{\mathcal{H}}, \\ \nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2}\phi X^{\mathcal{V}}\end{aligned}\tag{5.37}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde sırasıyla $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ K -değme Lorentz Finsler yapılar olsunlar. $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ metriklerine göre $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ Killing vektör alanları olmak üzere

$$L_{\xi}^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}} = L_{\xi}^{\mathcal{V}}G^{\mathcal{V}} = 0$$

eşitliği sağlanır. Yani

$$G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = -G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}), G^{\mathcal{V}}(\nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = -G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \nabla_Y^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}})\tag{5.38}$$

olur. Ayrıca Kozsul formülünden

$$\begin{aligned}2G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= \xi^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + Y^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})) - X^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})) \\ &\quad - \eta^{\mathcal{H}}[Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}] + G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}})\end{aligned}\tag{5.39}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} 2G^{\mathcal{H}}(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) &= \xi^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) - Y^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})) + X^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})) \\ &\quad - \eta^{\mathcal{H}}[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] + G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) \end{aligned} \quad (5.40)$$

eşitliği bulunur. (5.39) ve (5.40) eşitliklerinden

$$G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) = -d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

olur. $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için (5.32) ve (5.38) ifadelerinden

$$G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(\frac{1}{2}\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

bulunur, yani $\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\phi X^{\mathcal{H}}$ olur.

Benzer olarak, $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için $G^{\mathcal{V}}$ metriğine göre $\xi^{\mathcal{V}}$ Killing vektör alanı olduğundan, Kozsul formülü yardımıyla

$$G^{\mathcal{V}}(\nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(\frac{1}{2}\phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})$$

elde edilir. Yani

$$\nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\phi X^{\mathcal{V}}$$

olur.

$\xi^{\mathcal{H}}$ ın Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $N^{(3)} = 0$ olmasıdır. Diğer taraftan (5.12) ve (5.13) göz önüne alınırsa ve $L_{\xi^{\mathcal{H}}}\eta^{\mathcal{H}} = 0$ olmasından

$$\begin{aligned} 0 &= (L_{\xi^{\mathcal{H}}}d\eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \xi^{\mathcal{H}}(d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})) - d\eta^{\mathcal{H}}([\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, [\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]) \\ &= (L_{\xi^{\mathcal{H}}}G^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, (L_{\xi^{\mathcal{H}}}\phi)Y^{\mathcal{H}}) \end{aligned}$$

olur ve $L_{\xi^{\mathcal{H}}}G^{\mathcal{H}} = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $L_{\xi^{\mathcal{H}}}\phi = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Böylece

$$h = \frac{1}{2}L_{\xi^{\mathcal{H}}}\phi = \frac{1}{2}N^{(3)} \quad (5.41)$$

şeklinde bir tensör ortaya çıkar. Bu tensör değme Lorentz Finsler yapıların geometrisinin tanımlanmasında önemli bir rol oynar. Ayrıca (5.34) ve (5.35) ifadeleri kullanılarak, ko-

varyant türev operatörüne ait aşağıdaki özellikler ispatlanabilir:

$$\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi = 0, \nabla_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi = 0, \quad (5.42)$$

$$\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\phi X^{\mathcal{H}} - \phi h X^{\mathcal{H}}, \nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\phi X^{\mathcal{V}} - \phi h X^{\mathcal{V}}. \quad (5.43)$$

Riemann durumunda (5.42) ve (5.43) kullanılarak, h tensörünün self-adjoint olduğu, yani $h\phi = -\phi h$ ve $h\xi = trh = 0$ olduğu ispatlanabilir. Ayrıca $\tau = L_{\xi}G$ alınırsa

$$\tau(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = 2G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, h\phi Y^{\mathcal{H}}), \tau(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = 2G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, h\phi Y^{\mathcal{V}}) \quad (5.44)$$

elde edilir.

Standart ortonormalleştirme işlemi ile birlikte her bir $((M')^h, \phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ (hemen hemen) değme Lorentz Finsler manifoldu $\phi^{\mathcal{H}}$ - bazı olarak adlandırılan özel bir çeşit lokal yarı ortonormal baza sahiptir. Böyle bir baz $\{E_1^{\mathcal{H}}, \dots, E_n^{\mathcal{H}}, \phi E_1^{\mathcal{H}}, \dots, \phi E_n^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}\}$ formundadır. Benzer şekilde $((M')^v, \phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ (hemen hemen) değme Lorentz Finsler manifoldu ise $\phi^{\mathcal{V}}$ - bazı olarak adlandırılan özel bir çeşit lokal yarı ortonormal baza sahiptir. Böyle bir baz $\{E_1^{\mathcal{V}}, \dots, E_n^{\mathcal{V}}, \phi E_1^{\mathcal{V}}, \dots, \phi E_n^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}\}$ formundadır.

Yardımcı Teorem 5.2.9. $((M')^h, \phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $((M')^v, \phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme Lorentz Finsler yapılar olmak üzere

$$div\xi^{\mathcal{H}} = div\eta^{\mathcal{H}} = 0,$$

$$div\xi^{\mathcal{V}} = div\eta^{\mathcal{V}} = 0$$

olur.

İspat. $\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} = 0$ ve $h\phi = -\phi h$ olduğundan, (5.43) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \xi^{\mathcal{H}} &= \operatorname{tr} \nabla \xi^{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n G^{\mathcal{H}}(\nabla_{E_i}^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) + \sum_{i=1}^n G^{\mathcal{H}}(\nabla_{\phi E_i}^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}, \phi E_i^{\mathcal{H}}) \\
&= \sum_{i=1}^n G^{\mathcal{H}}(\frac{1}{2} \phi E_i^{\mathcal{H}} - \phi h E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) + \sum_{i=1}^n G^{\mathcal{H}}(\frac{1}{2} \phi^2 E_i^{\mathcal{H}} - \phi h(\phi E_i^{\mathcal{H}}), \phi E_i^{\mathcal{H}}) \\
&= -\sum_{i=1}^n G^{\mathcal{H}}(\phi h E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} G^{\mathcal{H}}(-E_i^{\mathcal{H}}, \phi E_i^{\mathcal{H}}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n G^{\mathcal{H}}(-\phi h(\phi E_i^{\mathcal{H}}), \phi E_i^{\mathcal{H}}) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} G^{\mathcal{H}}((\phi E_i^{\mathcal{H}}), E_i^{\mathcal{H}}) \\
&= \sum_{i=1}^n G^{\mathcal{H}}(h E_i^{\mathcal{H}}, \phi E_i^{\mathcal{H}}) + \sum_{i=1}^n G^{\mathcal{H}}(h \phi^2 E_i^{\mathcal{H}}, \phi E_i^{\mathcal{H}}) \\
&= \sum_{i=1}^n G^{\mathcal{H}}(h E_i^{\mathcal{H}}, \phi E_i^{\mathcal{H}}) - \sum_{i=1}^n G^{\mathcal{H}}(h E_i^{\mathcal{H}}, \phi E_i^{\mathcal{H}}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \eta^{\mathcal{H}} = -\operatorname{tr} \nabla \eta^{\mathcal{H}} = \operatorname{div} \xi^{\mathcal{H}} = 0$$

elde edilir. Benzer işlem adımları kullanılarak

$$\operatorname{div} \xi^{\mathcal{V}} = \operatorname{tr} \nabla \xi^{\mathcal{V}} = 0$$

olduğu görülür.

5.3. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Sasakian Lorentz Yapılar

Tanım 5.3.1. $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme Lorentz Finsler yapıları

(i) Normal, yani $[\phi^{\mathcal{H}}, \phi^{\mathcal{H}}] + d\eta^{\mathcal{H}} \otimes \xi^{\mathcal{H}} = 0$, $[\phi^{\mathcal{V}}, \phi^{\mathcal{V}}] + d\eta^{\mathcal{V}} \otimes \xi^{\mathcal{V}} = 0$ ise Sasakian olarak adlandırılır.

(ii) $h = 0$, yani $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$, sırasıyla, $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ Lorentz metriklerine göre Killing vektör alanı ise K -değme olarak adlandırılır.

Teorem 5.3.2. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Lorentz Finsler yapıların Sasakian yapı olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}} \phi) Y^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} [G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}}], \quad (5.45)$$

$$(\nabla_X^{\mathcal{V}} \phi) Y^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} [G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}}] \quad (5.46)$$

olmasıdır.

İspat. Yapı normal ise $\Omega = d\eta$ ve $N^{(1)} = N^{(2)} = 0$ olur. Böylece (5.34) yardımıyla

$$\begin{aligned} 2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) &= -G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \\ &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) \\ &= G^{\mathcal{H}}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}})$$

bulunur. Benzer olarak (5.35) yardımıyla $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$(\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}(G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}})$$

olur. Diğer taraftan yapı (5.45) ve (5.46) eşitliklerini sağlasın. Böylece (5.45) eşitliğinde $Y^{\mathcal{H}} = \xi^{\mathcal{H}}$ alınırsa

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)\xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + X^{\mathcal{H}}),$$

$$-\phi(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2}(-\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + X^{\mathcal{H}}),$$

$$-\phi^2(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2}(\phi X^{\mathcal{H}}),$$

$$\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\phi X^{\mathcal{H}}$$

elde edilir. Benzer olarak (5.46) eşitliğinde $Y^{\mathcal{V}} = \xi^{\mathcal{V}}$ alınırsa

$$\nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\phi X^{\mathcal{V}}$$

bulunur. ξ skew-simetrik olduğundan $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ nin Killing vektör alanı olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca

$$\begin{aligned}
& N_{\phi}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} = -\phi(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi Y^{\mathcal{H}} - \phi\nabla_X^{\mathcal{H}}Y^{\mathcal{H}}) \\
& + \phi(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\phi X^{\mathcal{H}} - \phi\nabla_Y^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}}) + (\nabla_{\phi X}^{\mathcal{H}}\phi Y^{\mathcal{H}} - \phi\nabla_{\phi X}^{\mathcal{H}}Y^{\mathcal{H}}) \\
& - (\nabla_{\phi Y}^{\mathcal{H}}\phi X^{\mathcal{H}} - \phi\nabla_{\phi Y}^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}}) + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} \\
& = -\phi(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}} + \phi(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\phi)X^{\mathcal{H}} + (\nabla_{\phi X}^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}} - (\nabla_{\phi Y}^{\mathcal{H}}\phi)X^{\mathcal{H}} \\
& = \frac{1}{2}\{-\phi(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}) + \phi(G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}) \\
& + G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} \\
& + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}}\} + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} \\
& = -G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} \\
& = -d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} \\
& = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$N_{\phi}^{\mathcal{V}} + d\eta^{\mathcal{V}} \otimes \xi^{\mathcal{V}} = 0$$

bulunur ve yapı Sasakian Lorentz yapı olur.

Teorem 5.3.3. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapılarının K -değme Lorentz yapılar olması için gerek ve yeter şart aşağıda verilen iki durumun sağlanmasıdır:

- (1) $(M')^h$ üzerinde $\xi^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}}$ metriğine göre Killing vektör alanı ve $(M')^v$ üzerinde $\xi^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}}$ metriğine göre Killing vektör alanıdır.
- (2) $\xi^{\mathcal{H}}$ vektörünü içeren düzlemsel kesit için $(M')^h$ nin her noktasında flag eğriliği $-\frac{1}{4}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ vektörünü içeren düzlemsel kesit için $(M')^v$ nin her noktasında flag eğriliği $-\frac{1}{4}$ olur.

İspat. $(M')^h$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$, K -değme Lorentz yapı olsun. (3.45) den, $X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}$ a ortogonal birim vektör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned}
G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}} - \nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}} - \nabla_{[X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}]}^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \\
&= G^{\mathcal{H}}(-\frac{1}{2}(\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}})) - \frac{1}{4}(\phi^2 X^{\mathcal{H}}) + \frac{1}{2}\phi(\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}}), X^{\mathcal{H}}) \\
&= G^{\mathcal{H}}(-\frac{1}{2}(\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi)X^{\mathcal{H}}) + \frac{1}{4}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) - \frac{1}{4}G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \\
&= \frac{1}{4}\{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) - \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})\} \\
&= \frac{1}{4}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\xi^{\mathcal{H}}$ birim time-like vektör alanı olduğundan $X^{\mathcal{H}}$ birim space-like vektör alanı olmak zorundadır. Böylece $G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) = 1$ ve $G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = 0$ olur. Benzer işlem adımları yardımıyla

$$G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) = \frac{1}{4}$$

eşitliği yazılır. Böylece

$$K(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \frac{G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})}{-G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})} = -\frac{1}{4}$$

ve

$$K(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \frac{G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})}{-G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})} = -\frac{1}{4}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için $(M')^h$ üzerinde $\xi^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}}$ metriğine göre Killing vektör alanı olduğundan

$$\begin{aligned}
d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= -G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \\
&= 2G^{\mathcal{H}}(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \\
&= 2G^{\mathcal{H}}(\frac{1}{2}\phi Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}})
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Sonuç olarak, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$, K -değme Lorentz yapı olur.

Benzer olarak, $(M')^v$ üzerinde $\xi^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}}$ metriğine göre Killing vektör alanı olsun. Böylece

$$d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}})$$

bulunur ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ K -değme Lorentz yapı olur.

Teorem 5.3.4. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^h, \xi^h, \eta^h, G^h)$ ve $(\phi^v, \xi^v, \eta^v, G^v)$ Sasakian Lorentz yapılar olsunlar. ∇ Finsler koneksiyonunun Riemann eğriliği

$$R(X^h, Y^h)\xi^h = \frac{1}{4}\{\eta^h(Y^h)X^h - \eta^h(X^h)Y^h\}, \quad (5.47)$$

$$R(X^v, Y^v)\xi^v = \frac{1}{4}\{\eta^v(Y^v)X^v - \eta^v(X^v)Y^v\} \quad (5.48)$$

eşitlikleri ile verilir.

İspat. $(M')^h$ üzerinde $(\phi^h, \xi^h, \eta^h, G^h)$ Sasakian Lorentz yapı olsun. (3.45) ifadesinden

$$\begin{aligned} R(X^h, Y^h)\xi^h &= \nabla_X^h \nabla_Y^h \xi^h - \nabla_Y^h \nabla_X^h \xi^h - \nabla_{[X^h, Y^h]}\xi^h \\ &= \nabla_X^h \left(\frac{1}{2}\phi Y^h\right) - \nabla_Y^h \left(\frac{1}{2}\phi X^h\right) - \nabla_{\nabla_X^h Y^h - \nabla_Y^h X^h} \xi^h \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_X^h \phi^h)Y^h - \frac{1}{2}(\nabla_Y^h \phi^h)X^h \\ &= \frac{1}{4}(\eta^h(Y^h)X^h - \eta^h(X^h)Y^h) \end{aligned}$$

bulunur.

$(M')^v$ üzerinde $(\phi^v, \xi^v, \eta^v, G^v)$ Sasakian Lorentz yapı olsun. Böylece (3.45) ifadesinden (5.48) elde edilir.

Teorem 5.3.5. $(\phi^h, \xi^h, \eta^h, G^h)$ ve $(\phi^v, \xi^v, \eta^v, G^v)$ Sasakian Lorentz Finsler yapılar olmak üzere

$$\begin{aligned} R(X^h, Y^h)\phi Z^h &= \phi R(X^h, Y^h)Z^h + \frac{1}{4}\{G^h(Y^h, Z^h)\phi X^h \\ &\quad - G^h(\phi X^h, Z^h)Y^h + G^h(\phi Y^h, Z^h)X^h - G^h(X^h, Z^h)\phi Y^h\}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} R(X^v, Y^v)\phi Z^v &= \phi R(X^v, Y^v)Z^v + \frac{1}{4}\{G^v(Y^v, Z^v)\phi X^v \\ &\quad - G^v(\phi X^v, Z^v)Y^v + G^v(\phi Y^v, Z^v)X^v - G^v(X^v, Z^v)\phi Y^v\} \end{aligned} \quad (5.50)$$

eşitlikleri vardır.

İspat. (3.45) ve (5.45) yardımıyla

$$\begin{aligned}
R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2}\nabla_X^{\mathcal{H}}(G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}) + \frac{1}{2}\nabla_X^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}) + \frac{1}{2}\{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \nabla_Y^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} \\
&+ \eta^{\mathcal{H}}(\nabla_Y^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}\} + \phi R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\nabla_Y^{\mathcal{H}}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}) - \frac{1}{2}\nabla_Y^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}) \\
&- \frac{1}{2}G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}(\eta^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}}))Y^{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] \\
&= \phi R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} - \frac{1}{4}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}) \\
&- \frac{1}{2}((\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}} - (\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}Y^{\mathcal{H}}) \\
&= \phi R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} - \frac{1}{4}\{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}} \\
&+ \Omega(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - \Omega(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}} \\
&= \phi R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} - \frac{1}{4}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}} \\
&- G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}})
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.45) ve (5.46) ifadelerinden yararlanılarak (5.50) elde edilir.

Sonuç 5.3.6. (5.49) ve (5.50) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} &= -\phi R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{1}{4}\{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}}\},
\end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}
R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}} &= -\phi R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\phi Z^{\mathcal{V}} \\
&+ \frac{1}{4}\{G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}} + G^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}} - G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}} - G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})\phi Y^{\mathcal{V}}\},
\end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned}
G^{\mathcal{H}}(R(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}}, \phi W^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}) \\
&+ \frac{1}{4}\{-\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}) - \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(W^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) \\
&+ \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(W^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}})\},
\end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}
G^{\mathcal{V}}(R(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}})\phi Z^{\mathcal{V}}, \phi W^{\mathcal{V}}) &= G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}}, W^{\mathcal{V}}) \\
&+ \frac{1}{4}\{-\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, W^{\mathcal{V}}) - \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(W^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) \\
&+ \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(W^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, W^{\mathcal{V}})\}
\end{aligned} \tag{5.54}$$

eşitlikleri elde edilir.

$X^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ birim vektörü $\xi^{\mathcal{H}}$ a ortogonal ise $(TM')^{\mathcal{H}}$ deki düzlemsel kesit olan $\{X^{\mathcal{H}}, \phi X^{\mathcal{H}}\}$ yatay ϕ -kesit olarak adlandırılır. Benzer olarak, $X^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ birim vektörü $\xi^{\mathcal{V}}$ a ortogonal ise $(TM')^{\mathcal{V}}$ deki düzlemsel kesit olan $\{X^{\mathcal{V}}, \phi X^{\mathcal{V}}\}$ dikey ϕ -kesit olarak adlandırılır. Böylece yatay flag eğriliği

$$K^*(X^{\mathcal{H}}, \phi X^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, \phi X^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \quad (5.55)$$

şeklinde ifade edilir. Yatay ϕ -kesitsel eğrilik olarak adlandırılır ve $K^*(X^{\mathcal{H}})$ ile gösterilir. Dikey flag eğriliği ise

$$K^*(X^{\mathcal{V}}, \phi X^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, \phi X^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) \quad (5.56)$$

eşitliği ile ifade edilir ve dikey ϕ -kesitsel eğrilik olarak adlandırılır, $K^*(X^{\mathcal{V}})$ ile gösterilir.

Önerme 5.3.7. $(M')^h$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$, K -değme Lorentz Finsler yapı olsun. $(M')^h$ lokal olarak simetrik ise Sasakian Lorentz Finsler yapının sabit eğriliği $-\frac{1}{4}$ olur.

İspat. $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için, (5.45) ve (5.47) eşitlikleri yardımıyla

$$(\nabla_Z^{\mathcal{H}} R)(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = -\frac{1}{4}\{G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}\} - R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) \quad (5.57)$$

elde edilir. $(M')^h$ lokal olarak simetrik olduğundan $(\nabla_Z^{\mathcal{H}} R) = 0$ olur. (5.57) ifadesinden

$$R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = -\frac{1}{4}\{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}\} \quad (5.58)$$

bulunur. Aynı anda time-like ya da space-like olan iki vektör birbirine dik olamaz. Bu nedenle $\{X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\}$ ortonormal çifti için, $X^{\mathcal{H}}$ time-like vektör olduğunda $Y^{\mathcal{H}}$ space-like olmalıdır. Böylece

$$K(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \frac{G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})}{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})} = -\frac{1}{4}\left\{\frac{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})}{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})}\right\} = -\frac{1}{4}$$

elde edilir.

Önerme 5.3.8. $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapısı K -değme Lorentz Finsler yapı olsun. $(M')^v$ lokal olarak simetrik ise, Sasakian Lorentz Finsler yapının sabit eğriliği $-\frac{1}{4}$ olur.

İspat. $\forall X^\nu, Y^\nu, Z^\nu, \xi^\nu \in (TM')^\nu$ için, (5.46) ve (5.48) eşitlikleri yardımıyla

$$(\nabla_Z^\nu R)(X^\nu, Y^\nu, \xi^\nu) = -\frac{1}{4}\{G^\nu(Z^\nu, Y^\nu)X^\nu - G^\nu(Z^\nu, X^\nu)Y^\nu\} - R(X^\nu, Y^\nu, Z^\nu) \quad (5.59)$$

bulunur. $(M')^\nu$ lokal olarak simetrik olduğundan $(\nabla_Z^\nu R) = 0$ olur. (5.59) ifadesinden

$$R(X^\nu, Y^\nu, Z^\nu) = -\frac{1}{4}\{G^\nu(Y^\nu, Z^\nu)X^\nu - G^\nu(X^\nu, Z^\nu)Y^\nu\} \quad (5.60)$$

olur. İki vektör aynı anda time-like yada space-like olur ise bu durumda birbirine dik olamaz. Bu nedenle $\{X^\nu, Y^\nu\}$ ortonormal çifti için, X^ν time-like vektör olduğunda Y^ν space-like olmalıdır. Böylece

$$K(X^\nu, Y^\nu) = \frac{G^\nu(R(X^\nu, Y^\nu)Y^\nu, X^\nu)}{G^\nu(X^\nu, X^\nu)G^\nu(Y^\nu, Y^\nu)} = -\frac{1}{4}\left\{\frac{G^\nu(Y^\nu, Y^\nu)G^\nu(X^\nu, X^\nu)}{G^\nu(X^\nu, X^\nu)G^\nu(Y^\nu, Y^\nu)}\right\} = -\frac{1}{4}$$

elde edilir.

$(M')^h$ Sasakian Lorentz Finsler manifoldun S^h yatay Ricci tensörü, $\{E_1^h, \dots, E_{2n}^h, \xi^h\}$, $(TM')^h$ nin lokal ortonormal çatısı olmak üzere

$$\begin{aligned} S^h(X^h, Y^h) &= \sum_{i=1}^{2n} G^h(R(X^h, E_i^h)E_i^h, Y^h) + G^h(R(X^h, \xi^h)\xi^h, Y^h) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} G^h(R(E_i^h, X^h)Y^h, E_i^h) + G^h(R(\xi^h, X^h)Y^h, \xi^h) \end{aligned} \quad (5.61)$$

eşitliği ile verilir.

Benzer olarak, $(M')^\nu$ Sasakian Lorentz Finsler manifoldun S^ν dikey Ricci tensörü $\{E_1^\nu, \dots, E_{2n}^\nu, \xi^\nu\}$, $(TM')^\nu$ nin lokal ortonormal çatısı olmak üzere

$$\begin{aligned} S^\nu(X^\nu, Y^\nu) &= \sum_{i=1}^{2n} G^\nu(R(X^\nu, E_i^\nu)E_i^\nu, Y^\nu) + G^\nu(R(X^\nu, \xi^\nu)\xi^\nu, Y^\nu) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} G^\nu(R(E_i^\nu, X^\nu)Y^\nu, E_i^\nu) + G^\nu(R(\xi^\nu, X^\nu)Y^\nu, \xi^\nu) \end{aligned} \quad (5.62)$$

eşitliği ile verilir. Böylece M' Lorentz Finsler manifoldun S Ricci tensörü

$$\begin{aligned}
S(X, Y) &= S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}})E_i^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, E_i^{\mathcal{V}})E_i^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) + G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \quad (5.63)
\end{aligned}$$

eşitliği ile verilir.

Önerme 5.3.9. $(M')^h$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ değme Lorentz Finsler yapısının K -değme olması için gerek ve yeter şart

$$S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \frac{n}{2} \quad (5.64)$$

olmasıdır.

$(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme Lorentz Finsler yapısının K -değme olması için gerek ve yeter şart

$$S^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \frac{n}{2} \quad (5.65)$$

olmasıdır.

İspat. (5.47) ifadesinden

$$\begin{aligned}
S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(R(E_i^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})E_i^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (5.48) ve (5.62) yardımıyla $S^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \frac{n}{2}$ eşitliği elde edilir.

Yardımcı Teorem 5.3.10. $S^{\mathcal{H}}$ ve $S^{\mathcal{V}}$ Sasakian Lorentz Finsler manifoldunun Ricci tensorü olmak üzere

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \frac{n}{2} \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), \\ S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) &= \frac{n}{2} \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) \end{aligned} \quad (5.66)$$

eşitlikleri sağlanır.

Örnek 5.3.11. $F^3 = (\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3)', F^*)$ bir Lorentz Finsler manifoldu olsun. Burada $(\mathbb{R}^3)' = \mathbb{R}^6 \setminus \theta$ nın 6-boyutlu bir C^∞ manifold olduğu açıktır. $\mathbb{R}^3$ deki $\{x_1, x_2, x_3\}$ koordinat sistemi sayesinde $(\mathbb{R}^3)'$ de $\{x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3\}$ koordinat sistemi elde edilebilir. $(T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ demetinin lokal bazı $\{\frac{\delta}{\delta x_1}, \frac{\delta}{\delta x_2}, \frac{\delta}{\delta x_3}\}$ ve $(T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ demetinin lokal bazıda $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\}$ dir. Her $X^{\mathcal{H}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ için $X^{\mathcal{H}} = X_1^{\mathcal{H}} \frac{\delta}{\delta x_1} + X_2^{\mathcal{H}} \frac{\delta}{\delta x_2} + X_3^{\mathcal{H}} \frac{\delta}{\delta x_3}$ ve her $X^{\mathcal{V}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ için $X^{\mathcal{V}} = X_1^{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial y_1} + X_2^{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial y_2} + X_3^{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial y_3}$ olsun. Böylece her $X \in (T(\mathbb{R}^3)')$ için $X = X_i^{\mathcal{H}} \frac{\delta}{\delta x_i} + X_i^{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial y_i}, 1 \leq i \leq 3$ şeklindedir. $\eta \in (T^*(\mathbb{R}^3)')$ 1-formu $\eta = \eta_i^{\mathcal{H}} dx^i + \eta_i^{\mathcal{V}} \delta y_i, 1 \leq i \leq 3$ olup $\eta^{\mathcal{H}} \in (T^*(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ ve $\eta^{\mathcal{V}} \in (T^*(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ için $\eta^{\mathcal{H}} = \eta_1^{\mathcal{H}} dx^1 + \eta_2^{\mathcal{H}} dx^2 + \eta_3^{\mathcal{H}} dx^3$ ve $\eta^{\mathcal{V}} = \eta_1^{\mathcal{V}} \delta y_1 + \eta_2^{\mathcal{V}} \delta y_2 + \eta_3^{\mathcal{V}} \delta y_3$ dir. Sasaki yarı-metrik Finsler tensör alanı $G = G^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{V}}$ olmak üzere $G = g_{ij}^{F^*} dx_i \otimes dx_j + g_{ij}^{F^*} \delta y_i \otimes \delta y_j, 1 \leq i \leq 3$ olup $g_{ij}^{F^*}, (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ ve $(T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ demetleri üzerinde Lorentz metriğidir. $((\mathbb{R}^3)')^h$ manifoldunun her noktasında lineer bağımsız olan

$$E_1^{\mathcal{H}} = \frac{\delta}{\delta x_1}, E_2^{\mathcal{H}} = x_2^2 \frac{\delta}{\delta x_2} + x_1 \frac{\delta}{\delta x_3}, E_3^{\mathcal{H}} = -\frac{\delta}{\delta x_3} = \xi^{\mathcal{H}}$$

vektörleri ile $((\mathbb{R}^3)')^v$ manifoldunun her noktasında lineer bağımsız olan

$$E_1^{\mathcal{V}} = \frac{\partial}{\partial y_1}, E_2^{\mathcal{V}} = y_2^2 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_3}, E_3^{\mathcal{V}} = -\frac{\partial}{\partial y_3} = \xi^{\mathcal{V}}$$

vektörlerini alalım. $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ Lorentz metrikleri

$$G^{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-x_1^2}{x_2^4} & \frac{x_1}{x_2} \\ 0 & \frac{x_1}{x_2} & -1 \end{bmatrix}, \quad G^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y_1^2}{y_2^4} & \frac{y_1}{y_2} \\ 0 & \frac{y_1}{y_2} & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı olup $G^{\mathcal{H}}(E_1^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(E_2^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(E_1^{\mathcal{H}}, E_2^{\mathcal{H}}) = 0, G^{\mathcal{H}}(E_1^{\mathcal{H}}, E_1^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(E_2^{\mathcal{H}}, E_2^{\mathcal{H}}) = 1, G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = -1$ ve $G^{\mathcal{V}}(E_1^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(E_2^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(E_1^{\mathcal{V}}, E_2^{\mathcal{V}}) = 0, G^{\mathcal{V}}(E_1^{\mathcal{V}}, E_1^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(E_2^{\mathcal{V}}, E_2^{\mathcal{V}}) = 1, G^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = -1$ dir. Ayrıca $\eta^{\mathcal{H}}(E_1^{\mathcal{H}}) = -G^{\mathcal{H}}(E_1^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = 0, \eta^{\mathcal{H}}(E_2^{\mathcal{H}}) = -G^{\mathcal{H}}(E_2^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = 0, \eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = -G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = 1$ ve $\eta^{\mathcal{V}}(E_1^{\mathcal{V}}) = -G^{\mathcal{V}}(E_1^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = 0, \eta^{\mathcal{V}}(E_2^{\mathcal{V}}) = -G^{\mathcal{V}}(E_2^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = 0, \eta^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = -G^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = 1$ dir. Böylece

her $Z^{\mathcal{H}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$, $Z^{\mathcal{H}} = Z_i^{\mathcal{H}} E_i^{\mathcal{H}}$ ve $Z^{\mathcal{V}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$, $Z^{\mathcal{V}} = Z_i^{\mathcal{V}} E_i^{\mathcal{V}}$, $1 \leq i \leq 3$, için $\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) = Z_3^{\mathcal{H}}$ ve $\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}) = Z_3^{\mathcal{V}}$ olur.

$\phi^{\mathcal{H}}$ ve $\phi^{\mathcal{V}}$; $(1, 1)$ tipinde yatay ve dikey tensör alanları aşağıdaki gibi tanımlı olsun.

$$\phi^{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ -x_2^2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{y_2^2} & 0 \\ -y_2^2 & 0 & 0 \\ -y_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \phi^{\mathcal{H}}(E_1^{\mathcal{H}}) &= -E_2^{\mathcal{H}}, \phi^{\mathcal{H}}(E_2^{\mathcal{H}}) = E_1^{\mathcal{H}}, \phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = 0, \\ \phi^{\mathcal{V}}(E_1^{\mathcal{V}}) &= -E_2^{\mathcal{V}}, \phi^{\mathcal{V}}(E_2^{\mathcal{V}}) = E_1^{\mathcal{V}}, \phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0 \end{aligned}$$

olur. Her $Z^{\mathcal{H}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ ve $Z^{\mathcal{V}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ için

$$\begin{aligned} \phi^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) &= -Z_1^{\mathcal{H}} E_2^{\mathcal{H}} + Z_2^{\mathcal{H}} E_1^{\mathcal{H}}, \phi^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}) = -Z_1^{\mathcal{V}} E_2^{\mathcal{V}} + Z_2^{\mathcal{V}} E_1^{\mathcal{V}} \\ (\phi^{\mathcal{H}})^2(Z^{\mathcal{H}}) &= -Z^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}}, (\phi^{\mathcal{V}})^2(Z^{\mathcal{V}}) = -Z^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca her $Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ ve $Z^{\mathcal{V}}, W^{\mathcal{V}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ için

$$\begin{aligned} G^{\mathcal{H}}(\phi Z^{\mathcal{H}}, \phi W^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, W^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) \eta^{\mathcal{H}}(W^{\mathcal{H}}) \\ G^{\mathcal{V}}(\phi Z^{\mathcal{V}}, \phi W^{\mathcal{V}}) &= G^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}, W^{\mathcal{V}}) + \eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}) \eta^{\mathcal{V}}(W^{\mathcal{V}}) \end{aligned}$$

dır. Böylece $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapıları, sırasıyla, $((\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ ve $((\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ manifoldları üzerinde birer hemen hemen değme Lorentz metrik Finsler yapılarıdır. Kozsul formülü kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} &= -\frac{1}{2} E_2^{\mathcal{H}}, \nabla_{E_1}^{\mathcal{H}} E_2^{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \xi^{\mathcal{H}}, \nabla_{\xi}^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} = 0, \nabla_{E_1}^{\mathcal{H}} E_1^{\mathcal{H}} = 0, \nabla_{E_2}^{\mathcal{H}} E_2^{\mathcal{H}} = 0 \\ \nabla_{\xi}^{\mathcal{H}} E_1^{\mathcal{H}} &= -\frac{1}{2} E_2^{\mathcal{H}}, \nabla_{E_2}^{\mathcal{H}} E_1^{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \xi^{\mathcal{H}}, \nabla_{\xi}^{\mathcal{H}} E_2^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} E_1^{\mathcal{H}}, \nabla_{E_2}^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} E_1^{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Bu eşitlikler sayesinde her $X^{\mathcal{H}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ ve $X^{\mathcal{V}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ için

$$\nabla_X^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \phi X^{\mathcal{H}}, \nabla_X^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \phi X^{\mathcal{V}}$$

olup, her $X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (T(R^3)')^{\mathcal{H}}$ ve $X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}} \in (T(R^3)')^{\mathcal{V}}$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{\mathcal{H}} \phi^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} &= \nabla_X^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}} Y^{\mathcal{H}}) - \phi^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}} Y^{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2} \{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}}\} \\ (\nabla_X^{\mathcal{V}} \phi^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} &= \nabla_X^{\mathcal{V}}(\phi^{\mathcal{V}} Y^{\mathcal{V}}) - \phi^{\mathcal{V}}(\nabla_X^{\mathcal{V}} Y^{\mathcal{V}}) = \frac{1}{2} \{G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $((\mathbb{R}^3)')^h, \phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $((\mathbb{R}^3)')^v, \phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ birer Sasakian Lorentz Finsler yapı olur.



6. YARI FINSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE KENMOTSU YAPILAR

Bu bölümde yarı Finsler manifoldları üzerinde yarı Finsler metriği ile birlikte hemen hemen Kenmotsu ve Kenmotsu yapılar kuruldu. Ayrıca Kenmotsu yarı Finsler manifoldlarının eğrilikleri hesaplandı. İlk olarak Kenmotsu yarı Finsler metrikli yapıları inceleyelim.

6.1. Kenmotsu Yarı Finsler Metrikli Yapılar

∇^1 ve ∇^2 Cartan koneksiyonları, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ düzgün fonksiyon olmak üzere, $(\mathbb{R}, F_1)$ ve (N^{2n}, F_2) yarı Finsler manifoldları olsun, ayrıca $p_1 : \mathbb{R} \times N^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $p_2 : \mathbb{R} \times N^{2n} \rightarrow N^{2n}$ olarak tanımlansın. $\mathbb{R}^0 = T\mathbb{R} \setminus \theta$, $(N^0)^{2n} = TN^{2n} \setminus \theta$ olmak üzere $F^* : \mathbb{R}^0 \times (N^0)^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $F^*(v_1, v_2) = F_1^2(v_1) + f^2(\pi_1(v_1))F_2^2(v_2)$ şeklinde tanımlanan yarı-Riemann metriği ile birlikte $\mathbb{R} \times N^{2n} = M^{2n+1}$ çarpım manifoldunu ele alalım. Bu çarpım $\mathbb{R} \times_f N^{2n}$ ile gösterilir ve $(\mathbb{R} \times_f N^{2n}, F^*)$ bir yarı Finsler manifoldu olur. $V_1 = \ker(d\pi_1)$ ve $d\pi_1 : TT\mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{R}$ olmak üzere π_1 kanonik dönüşümü $(V_1, d\pi_1, T\mathbb{R})$ dikey demetini verir. $V_2 = \ker(d\pi_2)$ ve $d\pi_2 : TTN^{2n} \rightarrow TN^{2n}$ olmak üzere π_2 kanonik dönüşümü de $(V_2, d\pi_2, TN^{2n})$ dikey demetini verir. Ayrıca

$$d\pi_1 \times d\pi_2 = d(\pi_1 \times \pi_2) : TT\mathbb{R} \times TTN^{2n} \rightarrow T\mathbb{R} \times TN^{2n}$$

ve

$$\ker d(\pi_1 \times \pi_2) = \ker d\pi_1 \oplus \ker d\pi_2$$

olsun. Buradan manifoldun dikey uzayı $\mathbb{R} \times N^{2n} = M^{2n+1}$, $V = V_1 \oplus V_2$ elde edilir. Böylece V_1 ve V_2 üzerinde g_1 ve g_2 yarı-Riemann metrikleri, $v \in T\mathbb{R}$, $w \in TN^{2n}$ ve $\pi_1(v) \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$G^\nu = g_1^{V_1} + f^2(\pi_1(v))g_2^{V_2}$$

$$G^\nu(X^\nu, Y^\nu)_{(v,w)} = f^2(\pi_1(v))g_2(X_w^\nu, Y_w^\nu)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$Z^\nu G^\nu(X^\nu, Y^\nu)_{(v,w)} = 2fZ^\nu((f(\pi_1(v))g_2(X_w^\nu, Y_w^\nu))) = 2fZ^\nu f(\pi_1(v)) \frac{1}{f^2(\pi_1(v))} G^\nu(X^\nu, Y^\nu)_{(v,w)}$$

bulunur. Bu bağıntılardan

$$Z^\nu G^\nu(X^\nu, Y^\nu) = 2\left(\frac{Z^\nu f}{f}\right)G^\nu(X^\nu, Y^\nu)$$

olur.

$(\mathbb{R}, F_1)$ ve (N^{2n}, F_2) Finsler manifoldları üzerinde ∇^1 ve ∇^2 Cartan koneksiyonlarına göre H_1 ve H_2 yatay uzaylar olsun. Böylece direkt toplam ayrışımı

$$TT(\mathbb{R} \times N^{2n}) = TTM^{2n+1} = TT\mathbb{R} \oplus TTN^{2n} = V_1 \oplus H_1 \oplus V_2 \oplus H_2$$

şeklinde yazılır. $\mathbb{R}$ ve N^{2n} manifoldları üzerinde F_1, F_2 Finsler metrikleri sayesinde H_1 ve H_2 yatay uzayları üzerinde g_1 ve g_2 Riemann metrikleri ortaya çıkar. Ayrıca bu Riemann metrikleri $T(T\mathbb{R} \times TN^{2n})$ üzerinde yarı-Riemann metrik oluştururlar. Böylece

$$G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})_{(v,w)} = f^2(\pi_1(v))g_2(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

yazılır. Buradan

$$Z^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})_{(v,w)} = 2fZ^{\mathcal{H}}(f(\pi_1(v))g_2(X_w^{\mathcal{H}}, Y_w^{\mathcal{H}})) = 2\left(\frac{Z^{\mathcal{H}}f}{f}\right)G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

olur.

Önerme 6.1.1. $M^{2n+1} = \mathbb{R} \times_f N^{2n}$ çarpım uzayı ile birlikte $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ yarı Finsler manifoldu olsun. $(N)^{2n} = TN^{2n} \setminus \theta$ Kahlerian yarı-metrik manifold ve $f(t) = ce^{\frac{t}{2}}$ olduğunu kabul edelim. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ hemen hemen Kenmotsu yarı-metrik yapılar olmak üzere, $\eta^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{V}}$ 1-formları ve $\Omega^{\mathcal{H}}, \Omega^{\mathcal{V}}$ ikinci temel formları ise aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$$d\eta^{\mathcal{H}} = d\eta^{\mathcal{V}} = 0, d\Omega^{\mathcal{H}} = \eta^{\mathcal{H}} \wedge \Omega^{\mathcal{H}}, d\Omega^{\mathcal{V}} = \eta^{\mathcal{V}} \wedge \Omega^{\mathcal{V}}, d\Omega = \eta \wedge \Omega, d\eta = 0.$$

İspat. $G = G^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{V}} : TTM \times TTM \rightarrow \mathfrak{S}(TM)$ ve $G_2 : TTN \times TTN \rightarrow \mathfrak{S}(TN)$ metrikleri Sasaki metrikler olsunlar. TN Kahlerian vektör demeti üzerinde G_2 Kahlerian metriğine göre Ω^* ikinci temel form olmak üzere

$$\begin{aligned} G(X, \phi Y) &= G(X^{\mathcal{H}} + X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{H}} + \phi Y^{\mathcal{V}}) = f^2(\pi_1(v))G_2(X, \phi Y) \\ &= f^2(\pi_1(v))G_2(X^{\mathcal{H}} + X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{H}} + \phi Y^{\mathcal{V}}), \end{aligned}$$

$$G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = f^2(\pi_1(v))[G_2(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) + G_2(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{H}})],$$

$$\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = f^2(\pi_1(v))[\Omega^*(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{V}}) + \Omega^*(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{H}})]$$

eşitlikleri vardır. Yani $d\Omega^* = 0$ olur. Böylece

$$d\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + d\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = 2f(t)f'(t)dt \wedge [\Omega^*(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{V}}) + \Omega^*(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{H}})]$$

$$d\Omega^{\mathcal{H}} + d\Omega^{\mathcal{V}} = \left(\frac{2f'}{f}\right)dt \wedge [\Omega^{\mathcal{H}} + \Omega^{\mathcal{V}}]$$

$$f(t) = e^{\frac{t}{2}} \rightarrow \frac{2f'(t)}{f(t)} = 1$$

ve

$$dt = \eta, d\eta^{\mathcal{H}} = d\eta^{\mathcal{V}} = 0, d\Omega^{\mathcal{H}} = \eta^{\mathcal{H}} \wedge \Omega^{\mathcal{H}}, d\Omega^{\mathcal{V}} = \eta^{\mathcal{V}} \wedge \Omega^{\mathcal{V}}, d\Omega = \eta \wedge \Omega, d\eta = 0$$

elde edilir.

6.2. Yarı Finsler Manifoldları Üzerinde Hemen Hemen Kenmotsu Yarı Metrik Yapılar

Tanım 6.2.1. $d\eta(X, Y) = 0$ eşitliği sağlanmak üzere, η temel 1-form ve ∇ , M' üzerinde Finsler koneksiyonu olsun. Böylece $\eta = df$ olacak şekilde M' üzerinde bir f fonksiyonu varsa

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{\mathcal{H}} \eta^{\mathcal{H}})(Y^{\mathcal{H}}) - (\nabla_Y^{\mathcal{H}} \eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}(T(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})) &= 0, \\ (\nabla_X^{\mathcal{V}} \eta^{\mathcal{V}})(Y^{\mathcal{V}}) - (\nabla_Y^{\mathcal{V}} \eta^{\mathcal{V}})(X^{\mathcal{V}}) + \eta^{\mathcal{V}}(T(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

eşitlikleri sağlanır (Sinha ve Yadav, 1991).

Böylece hemen hemen değme yarı-Finsler metrikli yapı, hemen hemen Kenmotsu yarı-metrik yapı olarak adlandırılır ve (6.1) eşitliklerini sağlayan ∇ koneksiyonu ise hemen hemen Kenmotsu Finsler koneksiyonu adı verilir. Ayrıca $((M')^h, \phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $((M')^v, \phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapıları ise hemen hemen Kenmotsu yarı-metrik Finsler manifoldları ya da hemen hemen ε -Kenmotsu Finsler manifoldları olarak adlandırılırlar.

Teorem 6.2.2. Hemen hemen Kenmotsu Finsler koneksiyonu ∇ torsiyonsuz ise, $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}} \eta^{\mathcal{H}})(Y^{\mathcal{H}}) - (\nabla_Y^{\mathcal{H}} \eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}) = 0, (\nabla_X^{\mathcal{V}} \eta^{\mathcal{V}})(Y^{\mathcal{V}}) - (\nabla_Y^{\mathcal{V}} \eta^{\mathcal{V}})(X^{\mathcal{V}}) = 0 \quad (6.2)$$

(Sinha ve Yadav, 1991).

6.3. Hemen Hemen Kenmotsu Yarı-Metrik Yapıların İntegrallenebilir Tensör Alanları

$F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ yarı Finsler manifoldu olmak üzere, $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen Kenmotsu yarı-metrik yapılarının integrallenebilir tensör alanları, $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$N_{\phi}^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = [\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}] - \phi[\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] - \phi[X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}] + \phi^2[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}],$$

$$N_{\phi}^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = [\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}] - \phi[\phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}] - \phi[X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}] + \phi^2[X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}]$$

eşitlikleri ile verilir. Böylece

$$N^{(1)}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = N_{\phi}^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}), \quad (6.3)$$

$$N^{(2)}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = (L_{\phi X}^{\mathcal{H}} \eta^{\mathcal{H}})(Y^{\mathcal{H}}) - (L_{\phi Y}^{\mathcal{H}} \eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}}),$$

$$N^{(3)}(X^{\mathcal{H}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{H}} \phi)(X^{\mathcal{H}}), N^{(4)}(X^{\mathcal{H}}) = (L_{\xi^{\mathcal{H}}} \eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}})$$

ve

$$N^{(1)}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = N_{\phi}^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}), \quad (6.4)$$

$$N^{(2)}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = (L_{\phi X}^{\mathcal{V}} \eta^{\mathcal{V}})(Y^{\mathcal{V}}) - (L_{\phi Y}^{\mathcal{V}} \eta^{\mathcal{V}})(X^{\mathcal{V}}),$$

$$N^{(3)}(X^{\mathcal{V}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{V}} \phi)(X^{\mathcal{V}}), N^{(4)}(X^{\mathcal{V}}) = (L_{\xi^{\mathcal{V}}} \eta^{\mathcal{V}})(X^{\mathcal{V}})$$

dört tensör alanı tanımlanabilir.

Önerme 6.3.1. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ hemen hemen Kenmotsu yarı metrik yapılarının normal olması için gerek ve yeter şart $N_{\phi}^{\mathcal{H}} = 0$ ve $N_{\phi}^{\mathcal{V}} = 0$ olmasıdır.

Yardımcı Teorem 6.3.2. $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ hemen hemen Kenmotsu yarı metrik yapılarının normal olması için gerek ve yeter şart $N^{(1)} = N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ olmasıdır.

Yardımcı Teorem 6.3.3. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde sırasıyla $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ hemen hemen Kenmotsu yarı metrik yapıları için

$$2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}), \phi X^{\mathcal{H}}) + \varepsilon N^{(2)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) + d\Omega(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}) - d\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}), \quad (6.5)$$

$$2G^{\mathcal{V}}((\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}), \phi X^{\mathcal{V}}) + \varepsilon N^{(2)}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) + d\Omega(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}, \phi Z^{\mathcal{V}}) - d\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) \quad (6.6)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. ∇ , Finsler koneksiyonu olmak üzere

$$2G^{\mathcal{H}}(\nabla_X^{\mathcal{H}}Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = X^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + Y^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) - Z^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}), \quad (6.7)$$

$$2G^{\mathcal{V}}(\nabla_X^{\mathcal{V}}Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = X^{\mathcal{V}}G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) + Y^{\mathcal{V}}G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) - Z^{\mathcal{V}}G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) + G^{\mathcal{V}}([X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}], Z^{\mathcal{V}}) + G^{\mathcal{V}}([Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}], Y^{\mathcal{V}}) - G^{\mathcal{V}}([Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) \quad (6.8)$$

olur. Ayrıca

$$d\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = X^{\mathcal{H}}\Omega(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + Y^{\mathcal{H}}\Omega(Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) + Z^{\mathcal{H}}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - \Omega([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) - \Omega([Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - \Omega([Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \quad (6.9)$$

ve

$$d\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = X^{\mathcal{V}}\Omega(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) + Y^{\mathcal{V}}\Omega(Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) + Z^{\mathcal{V}}\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) - \Omega([X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}], Z^{\mathcal{V}}) - \Omega([Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}], Y^{\mathcal{V}}) - \Omega([Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) \quad (6.10)$$

eşitlikleri vardır. (6.7) ve (4.20) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) &= \phi Y^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) - Z^{\mathcal{H}}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) \\
&+ \Omega([Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([\phi Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) + Y^{\mathcal{H}}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) - \phi Z^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \\
&+ \Omega([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([\phi Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}})
\end{aligned} \tag{6.11}$$

elde edilir. Ayrıca (6.3) ifadesinde (4.18) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G^{\mathcal{H}}(N^{(1)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}), \phi X^{\mathcal{H}}) &= -\Omega([Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) + \Omega([\phi Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \\
&- G^{\mathcal{H}}([\phi Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}[\phi Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}]\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}[Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}]\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})
\end{aligned} \tag{6.12}$$

bulunur. (6.4) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
N^{(2)}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) &= \phi Y^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}))\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - \phi Z^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}))\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \\
&- \eta^{\mathcal{H}}[\phi Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}]\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - \eta^{\mathcal{H}}[Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}]\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})
\end{aligned} \tag{6.13}$$

olur ve (6.9) ifadesinden,

$$\begin{aligned}
d\Omega(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}) &= X^{\mathcal{H}}\Omega(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + \phi Y^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) - \varepsilon\phi Y^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}))\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \\
&- \phi Z^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + \varepsilon\phi Z^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}))\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) \\
&- \varepsilon\eta^{\mathcal{H}}[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([\phi Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - \varepsilon\eta^{\mathcal{H}}[\phi Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}]\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \\
&- \Omega([\phi Y^{\mathcal{H}}, \phi Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}})
\end{aligned} \tag{6.14}$$

bulunur. Ayrıca (6.12), (6.13) ve (6.14) eşitliklerinden faydalananarak (6.5) bulunur. Benzer olarak, (4.18), (6.8) ve (6.12) eşitlikleri kullanılarak (6.6) elde edilir.

Yardımcı Teorem 6.3.4. $d\Omega = \eta \wedge \Omega$ ve $N^{(1)} = N^{(2)} = 0$ ile birlikte $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ hemen hemen Kenmotsu yarı metrik yapıları için

$$(\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\{\varepsilon G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}}\}, \tag{6.15}$$

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\{\varepsilon G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}\} \tag{6.16}$$

eşitlikleri vardır.

İspat. (6.6) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} 2G^\nu((\nabla_X^\nu \phi)Y^\nu, Z^\nu) &= -\eta^\nu(Y^\nu)G^\nu(\phi X^\nu, Z^\nu) - \varepsilon G^\nu(\xi^\nu, Z^\nu)G^\nu(X^\nu, \phi Y^\nu) \\ &= G^\nu(-\varepsilon G(X^\nu, \phi Y^\nu)\xi^\nu - \eta^\nu(Y^\nu)\phi X^\nu, Z^\nu), \end{aligned}$$

$$(\nabla_X^\nu \phi)Y^\nu = \frac{1}{2}\{\varepsilon G^\nu(\phi X^\nu, Y^\nu)\xi^\nu - \eta^\nu(Y^\nu)\phi X^\nu\}$$

elde edilir. Benzer olarak, (6.5) kullanılarak (6.16) elde edilir.

Teorem 6.3.5. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}, \eta^\mathcal{H}, G^\mathcal{H})$ ve $(\phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$ hemen hemen Kenmotsu yarı metrik yapılarının Kenmotsu yarı metrik yapı olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X^\mathcal{H} \phi)Y^\mathcal{H} = \frac{1}{2}\{\varepsilon G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H})\xi^\mathcal{H} - \eta^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H})\phi X^\mathcal{H}\},$$

$$(\nabla_X^\nu \phi)Y^\nu = \frac{1}{2}\{\varepsilon G^\nu(\phi X^\nu, Y^\nu)\xi^\nu - \eta^\nu(Y^\nu)\phi X^\nu\}$$

olmasıdır.

İspat. (6.15) ve (6.16) eşitlikleri sağlansın. (6.15) eşitliğinde $Y^\nu = \xi^\nu$ yazılırsa

$$(\nabla_X^\nu \phi)\xi^\nu = \frac{1}{2}\{\varepsilon G^\nu(\phi X^\nu, \xi^\nu)\xi^\nu - \eta^\nu(\xi^\nu)\phi X^\nu\},$$

$$-\phi(\nabla_X^\nu \xi^\nu) = -\frac{1}{2}\phi X^\nu,$$

$$\nabla_X^\nu \xi^\nu = -\frac{1}{2}\phi^2 X^\nu = \frac{1}{2}(X^\nu - \eta^\nu(X^\nu)\xi^\nu) \quad (6.17)$$

bulunur. Benzer şekilde (6.16) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_X^\mathcal{H} \xi^\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\phi^2 X^\mathcal{H} = \frac{1}{2}(X^\mathcal{H} - \eta^\mathcal{H}(X^\mathcal{H})\xi^\mathcal{H}) \quad (6.18)$$

elde edilir. Ayrıca (6.17) ve (6.18) ifadelerinden

$$(\nabla_X^\mathcal{H} \eta^\mathcal{H})Y^\mathcal{H} + (\nabla_Y^\mathcal{H} \eta^\mathcal{H})X^\mathcal{H} = G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}) = \Omega(\phi X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}), \quad (6.19)$$

$$(\nabla_X^\nu \eta^\nu)Y^\nu + (\nabla_Y^\nu \eta^\nu)X^\nu = G^\nu(\phi X^\nu, \phi Y^\nu) = \Omega(\phi X^\nu, Y^\nu), \quad (6.20)$$

$$2(\nabla_X^\mathcal{H} \eta^\mathcal{H}) = G^\mathcal{H}(\phi X^\mathcal{H}, \phi Y^\mathcal{H}) = \Omega(\phi X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}), \quad (6.21)$$

$$2(\nabla_X^\nu \eta^\nu) = G^\nu(\phi X^\nu, \phi Y^\nu) = \Omega(\phi X^\nu, Y^\nu) \quad (6.22)$$

bulunur. Böylece yapılar Kenmotsu yarı metrik yapılar olurlar.

6.4. Kenmotsu Yarı Finsler Manifoldlarının Eğrilikleri

Teorem 6.4.1. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ Kenmotsu yarı metrik Finsler yapılar ise, (3.46), (3.51), (4.4), (6.17) ve (6.18) ifadelerinden

$$R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{4}\{\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}\} \quad (6.23)$$

ve

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} = \frac{1}{4}\{\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}\} \quad (6.24)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} \\ &= \frac{1}{4}\{\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}\} \end{aligned} \quad (6.25)$$

elde edilir.

Teorem 6.4.2. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde sırasıyla $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ Kenmotsu yarı metrik yapılar olsunlar. Böylece (6.15), (6.16), (6.19), (6.20), (6.21) ve (6.22) ifadelerinden

$$\begin{aligned} R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}} &= \phi R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} - \frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}} \\ &\quad - G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}\}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\phi Z^{\mathcal{V}} &= \phi R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}} - \frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}} \\ &\quad - G^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}} + G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})\phi Y^{\mathcal{V}} - G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}}\} \end{aligned} \quad (6.27)$$

elde edilir.

Sonuç 6.4.3. (6.26) ve (6.27) eşitliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned} R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} &= -\phi R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}} - \frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}} \\ &\quad - G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}}\}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned}
R(X^\nu, Y^\nu)Z^\nu &= -\phi R(X^\nu, Y^\nu)\phi Z^\nu - \frac{\varepsilon}{4}\{G^\nu(Y^\nu, Z^\nu)X^\nu - G^\nu(X^\nu, Z^\nu)Y^\nu \\
&\quad - G^\nu(\phi Y^\nu, Z^\nu)\phi X^\nu + G^\nu(\phi X^\nu, Z^\nu)\phi Y^\nu\}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

eşitlikleri elde edilir.

Tanım 6.4.4. $X^\mathcal{H} \in (TM')^\mathcal{H}$ birim vektörü $\xi^\mathcal{H}$ a ortogonal ise $(TM')^\mathcal{H}$ deki düzlemsel kesit olan $\{X^\mathcal{H}, \phi X^\mathcal{H}\}$ yatay ϕ -kesit olarak adlandırılır. Benzer olarak, $X^\nu \in (TM')^\nu$ birim vektörü ξ^ν a ortogonal ise $(TM')^\nu$ deki düzlemsel kesit olan $\{X^\nu, \phi X^\nu\}$ dikey ϕ -kesit olarak adlandırılır. Böylece yatay flag eğriliği

$$K(X^\mathcal{H}, \phi X^\mathcal{H}) = \frac{G^\mathcal{H}(R(X^\mathcal{H}, \phi X^\mathcal{H})\phi X^\mathcal{H}, X^\mathcal{H})}{G(X^\mathcal{H}, X^\mathcal{H})G(\phi X^\mathcal{H}, \phi X^\mathcal{H})} \tag{6.30}$$

ile ifade edilir. Yatay ϕ -kesitsel eğrilik olarak adlandırılır ve $K(X^\mathcal{H})$ ile gösterilir. Dikey flag eğriliği ise

$$K(X^\nu, \phi X^\nu) = \frac{G^\nu(R(X^\nu, \phi X^\nu)\phi X^\nu, X^\nu)}{G(X^\nu, X^\nu)G(\phi X^\nu, \phi X^\nu)} \tag{6.31}$$

ile verilir. Dikey ϕ -kesitsel eğrilik olarak adlandırılır ve $K(X^\nu)$ ile gösterilir. Kenmotsu yarı metrik Finsler manifoldları üzerinde ϕ -kesitsel eğrilik

$$K(X) = K(X^\mathcal{H}) + K(X^\nu)$$

eşitliği ile gösterilir.

Önerme 6.4.5. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde sırasıyla $(\phi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}, \eta^\mathcal{H}, G^\mathcal{H})$ ve $(\phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$ Kenmotsu yarı metrik yapılar olsunlar. $(M')^h$ ve $(M')^v$ lokal olarak simetrik ise Kenmotsu yarı Finsler manifoldların sabit eğriliği $-\frac{\varepsilon}{4}$ olur.

İspat. (6.15), (6.16), (6.23) ve (6.24) eşitlikleri kullanarak, $\forall X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H} \in (TM')^\mathcal{H}$ için,

$$(\nabla_Z^\mathcal{H} R)(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = -\frac{\varepsilon}{4}\{G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H})X^\mathcal{H} - G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H})Y^\mathcal{H}\} - R(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H})Z^\mathcal{H} \tag{6.32}$$

olur. $(M')^h$ lokal olarak simetrik yani $\nabla_Z^\mathcal{H} R = 0$ olduğundan, (6.32) ifadesinden

$$R(X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H})Z^\mathcal{H} = -\frac{\varepsilon}{4}\{G^\mathcal{H}(Y^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H})X^\mathcal{H} - G^\mathcal{H}(X^\mathcal{H}, Z^\mathcal{H})Y^\mathcal{H}\} \tag{6.33}$$

bulunur. Aynı anda iki vektör time-like ya da space-like olduğu zaman birbirine dik olamaz. Bu nedenle $\{X^\mathcal{H}, Y^\mathcal{H}\}$ ortonormal çifti için, $X^\mathcal{H}$ time-like bir vektör olduğunda, $Y^\mathcal{H}$ space-

like olmak zorundadır. Böylece

$$G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) = -\frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\} = \frac{\varepsilon}{4},$$

$$K(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \frac{G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})}{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})} = -\frac{\varepsilon}{4}$$

elde edilir. Elde edilen son eşitlikte $\xi^{\mathcal{H}}$ time-like vektör olarak göz önüne alınırsa $K(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \frac{1}{4}$, $\xi^{\mathcal{H}}$ space-like vektör olarak düşünülürse $K(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = -\frac{1}{4}$ olur.

Diğer taraftan $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için,

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}} = -\frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}} - G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}\}$$

olur. Aynı anda iki vektör time-like ya da space-like olduğu zaman birbirine dik olamaz. Bu nedenle $\{X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}\}$ ortonormal çifti için, $X^{\mathcal{V}}$ time-like bir vektör olduğunda, $Y^{\mathcal{V}}$ space-like olmak zorundadır. Böylece

$$G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) = -\frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})\} = \frac{\varepsilon}{4},$$

$$K(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = \frac{G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})}{G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})} = -\frac{\varepsilon}{4}$$

olur.

$\{X, Y\}$ ortonormal çifti için,

$$K(X, Y) = \frac{G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})}{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})} = -\frac{\varepsilon}{4} \quad (6.34)$$

bulunur.

$(M')^h$ Kenmotsu yarı Finsler manifoldun $S^{\mathcal{H}}$ yatay Ricci tensörü, $\{E_1^{\mathcal{H}}, \dots, E_{2n}^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}\}$, $(TM')^{\mathcal{H}}$ nin lokal ortonormal çatısı olmak üzere

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}})E_i^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(R(E_i^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(R(\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) \end{aligned} \quad (6.35)$$

eşitliği ile verilir.

$(M')^v$ Kenmotsu yarı Finsler manifoldun $S^{\mathcal{V}}$ dikey Ricci tensörü ise $\{E_1^{\mathcal{V}}, \dots, E_{2n}^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}\}$,

$(TM')^\nu$ nin lokal ortonormal çatısı olmak üzere

$$\begin{aligned} S^\nu(X^\nu, Y^\nu) &= \sum_{i=1}^{2n} G^\nu(R(X^\nu, E_i^\nu)E_i^\nu, Y^\nu) + G^\nu(R(X^\nu, \xi^\nu)\xi^\nu, Y^\nu) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} G^\nu(R(E_i^\nu, X^\nu)Y^\nu, E_i^\nu) + G^\nu(R(\xi^\nu, X^\nu)Y^\nu, \xi^\nu) \end{aligned} \quad (6.36)$$

eşitliği ile verilir.

Önerme 6.4.6. q indeksli yarı Finsler manifoldunun $(M')^h$ vektör demeti üzerindeki $(\phi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}, \eta^\mathcal{H}, G^\mathcal{H})$ değme yarı metrik yapının Kenmotsu yarı metrik yapı olması için gerek ve yeter şart

$$S^\mathcal{H}(\xi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = \begin{cases} \left(\frac{q-2n}{4}\right), & \xi^\mathcal{H} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{q-2n-1}{4}\right), & \xi^\mathcal{H} \text{ time-like ise} \end{cases},$$

olmasıdır.

İspat. (6.23) ve (6.35) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} S^\mathcal{H}(\xi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) &= \sum_{i=1}^{2n} G^\mathcal{H}(R(E_i^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H})\xi^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2n} G^\mathcal{H}(\eta^\mathcal{H}(E_i^\mathcal{H})\xi^\mathcal{H} - \eta^\mathcal{H}(\xi^\mathcal{H})E_i^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2n} -G^\mathcal{H}(E_i^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) \\ &= -\frac{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{2n}}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ yapısı q indeksli yarı Finsler manifoldu olduğundan, $G(\xi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = \varepsilon = 1$, yani $\xi^\mathcal{H}$ space-like vektör ise,

$$S^\mathcal{H}(\xi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^q G^\mathcal{H}(E_i^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) - \frac{1}{4} \sum_{i=q+1}^{2n} G^\mathcal{H}(E_i^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) = \frac{q-2n}{4}$$

olur. $G^\mathcal{H}(\xi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = \varepsilon = -1$, yani $\xi^\mathcal{H}$ time-like vektör ise,

$$S^\mathcal{H}(\xi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{q-1} G^\mathcal{H}(E_i^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) - \frac{1}{4} \sum_{i=q}^{2n} G^\mathcal{H}(E_i^\mathcal{H}, E_i^\mathcal{H}) = \frac{q-2n-1}{4}$$

elde edilir.

Önerme 6.4.7. q indeksli yarı Finsler manifoldunun $(M')^v$ vektör demeti üzerinde $(\phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$ değme yarı metrik yapının Kenmotsu yarı metrik yapı olması için gerek ve yeter şart

$$S^\nu(\xi^\nu, \xi^\nu) = \begin{cases} \left(\frac{q-2n}{4}\right), & \xi^\nu \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{q-2n-1}{4}\right), & \xi^\nu \text{ time-like ise} \end{cases},$$

olmasıdır.

İspat. (6.24) ve (6.36) eşitliklerinden

$$S^\nu(\xi^\nu, \xi^\nu) = \sum_{i=1}^{2n} G^\nu(R(E_i^\nu, \xi^\nu)\xi^\nu, E_i^\nu) = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2n} G^\nu(E_i^\nu, E_i^\nu)$$

bulunur. $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ yapısı q indeksli yarı Finsler manifoldu olduğundan, $G(\xi^\nu, \xi^\nu) = \varepsilon = 1$, yani ξ^ν space-like vektör ise,

$$S^\nu(\xi^\nu, \xi^\nu) = \frac{q-2n}{4}$$

olur. Eğer $G^\nu(\xi^\nu, \xi^\nu) = \varepsilon = -1$, yani ξ^ν time-like vektör ise

$$S^\nu(\xi^\nu, \xi^\nu) = \frac{q-2n-1}{4}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 6.4.8. $(M')^h$ ve $(M')^v$ Kenmotsu yarı Finsler manifoldları üzerinde, sırasıyla, $S^{\mathcal{H}}$ yatay Ricci tensörü ve S^ν dikey Ricci tensörü aşağıda verilen eşitlikleri sağlar:

$$S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \begin{cases} \left(\frac{-2n+q}{4}\right) \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{-2n+q-1}{4}\right) \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ time-like ise} \end{cases}, \quad (6.37)$$

$$S^\nu(X^\nu, \xi^\nu) = \begin{cases} \left(\frac{-2n+q}{4}\right) \eta^\nu(X^\nu), & \xi^\nu \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{-2n+q-1}{4}\right) \eta^\nu(X^\nu), & \xi^\nu \text{ time-like ise} \end{cases} \quad (6.38)$$

$$S(X, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{-2n+q}{4}\right) \eta(X), & \xi \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{-2n+q-1}{4}\right) \eta(X), & \xi \text{ time-like ise.} \end{cases} \quad (6.39)$$

İspat. $\xi^{\mathcal{H}}$ space-like bir vektör olsun. (6.26) ve (6.35) eşitliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(R(E_i^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(R(\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})E_i^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) - \frac{1}{4} G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) \\
&= -\frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^{2n} \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}) \right\} - \frac{1}{4} \{ \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) - \varepsilon \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \} \\
&= -\frac{2n-q}{4} \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) = \frac{q-2n}{4} \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\xi^{\mathcal{H}}$ time-like vektör ise

$$S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \left(\frac{q-2n-1}{4} \right) \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})$$

olur. Benzer şekilde $\xi^{\mathcal{V}}$ space-like ise

$$S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \left(\frac{q-2n}{4} \right) \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})$$

ve $\xi^{\mathcal{V}}$ time-like ise

$$S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \left(\frac{q-2n-1}{4} \right) \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 6.4.9. $F^3 = (\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3)', F^*)$ bir Lorentz Finsler manifoldu olsun. Burada $(\mathbb{R}^3)' = \mathbb{R}^6 \setminus \theta$ nın 6-boyutlu bir C^∞ manifold olduğu açıktır. $\mathbb{R}^3$ deki $\{x_1, x_2, x_3\}$ koordinat sistemi sayesinde $(\mathbb{R}^3)'$ de $\{x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3\}$ koordinat sistemi elde edilir. $(T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ demetinin lokal bazı $\{\frac{\delta}{\delta x_1}, \frac{\delta}{\delta x_2}, \frac{\delta}{\delta x_3}\}$ ve $(T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ demetinin lokal bazıda $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\}$ dir. Her $X^{\mathcal{H}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ için $X^{\mathcal{H}} = X_1^{\mathcal{H}} \frac{\delta}{\delta x_1} + X_2^{\mathcal{H}} \frac{\delta}{\delta x_2} + X_3^{\mathcal{H}} \frac{\delta}{\delta x_3}$ ve her $X^{\mathcal{V}} \in (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ için $X^{\mathcal{V}} = X_1^{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial y_1} + X_2^{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial y_2} + X_3^{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial y_3}$ olsun. Böylece her $X \in (T(\mathbb{R}^3)')$ için $X = X_i^{\mathcal{H}} \frac{\delta}{\delta x_i} + X_i^{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial y_i}, 1 \leq i \leq 3$, şeklindedir. $\eta \in (T^*(\mathbb{R}^3)')$ 1-formu $\eta = \eta_i^{\mathcal{H}} dx^i + \eta_i^{\mathcal{V}} \delta y_i, 1 \leq i \leq 3$, olup $\eta^{\mathcal{H}} \in (T^*(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ ve $\eta^{\mathcal{V}} \in (T^*(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ için $\eta^{\mathcal{H}} = \eta_1^{\mathcal{H}} dx^1 + \eta_2^{\mathcal{H}} dx^2 + \eta_3^{\mathcal{H}} dx^3$ ve $\eta^{\mathcal{V}} = \eta_1^{\mathcal{V}} \delta y_1 + \eta_2^{\mathcal{V}} \delta y_2 + \eta_3^{\mathcal{V}} \delta y_3$ dir. Sasaki yarı-metrik Finsler tensör alanı $G = G^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{V}}$ olmak üzere $G = g_{ij}^{F^*} dx_i \otimes dx_j + g_{ij}^{F^*} \delta y_i \otimes \delta y_j, 1 \leq i \leq 3$ olup $g_{ij}^{F^*}, (T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ ve $(T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}$ demetleri üzerinde Lorentz metriğidir. $((\mathbb{R}^3)')^h$ manifoldunun her noktasında lineer bağımsız olan

$$E_1^{\mathcal{H}} = \frac{x_3}{2} \frac{\delta}{\delta x_1}, E_2^{\mathcal{H}} = \frac{x_3}{2} \frac{\delta}{\delta x_2}, E_3^{\mathcal{H}} = -\frac{x_3}{2} \frac{\delta}{\delta x_3} = \xi^{\mathcal{H}}$$

vektörleri ile $((\mathbb{R}^3)')^v$ manifoldunun her noktasında lineer bağımsız olan

$$E_1^\nu = \frac{y_3}{2} \frac{\partial}{\partial y_1}, E_2^\nu = \frac{y_3}{2} \frac{\partial}{\partial y_2}, E_3^\nu = -\frac{y_3}{2} \frac{\partial}{\partial y_3} = \xi^\nu$$

vektörlerini alalım. $G^\mathcal{H}$ ve G^ν Lorentz metrikleri

$$G^\mathcal{H} = \frac{4(dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2)}{x_3^2}, G^\nu = \frac{4(\delta y_1^2 + \delta y_2^2 - \delta y_3^2)}{y_3^2}$$

şeklinde tanımlı olup $G^\mathcal{H}(E_1^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = G^\mathcal{H}(E_2^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = G^\mathcal{H}(E_1^\mathcal{H}, E_2^\mathcal{H}) = 0$, $G^\mathcal{H}(E_1^\mathcal{H}, E_1^\mathcal{H}) = G^\mathcal{H}(E_2^\mathcal{H}, E_2^\mathcal{H}) = 1$, $G^\mathcal{H}(\xi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = -1$ ve $G^\nu(E_1^\nu, \xi^\nu) = G^\nu(E_2^\nu, \xi^\nu) = G^\nu(E_1^\nu, E_2^\nu) = 0$, $G^\nu(E_1^\nu, E_1^\nu) = G^\nu(E_2^\nu, E_2^\nu) = 1$, $G^\nu(\xi^\nu, \xi^\nu) = -1$ dir. Her $Z^\mathcal{H} \in (T(\mathbb{R}^3)')^\mathcal{H}$, $Z^\mathcal{H} = Z_i^\mathcal{H} E_i^\mathcal{H}$ ve her $Z^\nu \in (T(\mathbb{R}^3)')^\nu$, $Z^\nu = Z_i^\nu E_i^\nu$, $1 \leq i \leq 3$ için $\eta^\mathcal{H}(E_1^\mathcal{H}) = -G^\mathcal{H}(E_1^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = 0$, $\eta^\mathcal{H}(E_2^\mathcal{H}) = -G^\mathcal{H}(E_2^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = 0$, $\eta^\mathcal{H}(\xi^\mathcal{H}) = -G^\mathcal{H}(\xi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}) = 1$ ve $\eta^\nu(E_1^\nu) = -G^\nu(E_1^\nu, \xi^\nu) = 0$, $\eta^\nu(E_2^\nu) = -G^\nu(E_2^\nu, \xi^\nu) = 0$, $\eta^\nu(\xi^\nu) = -G^\nu(\xi^\nu, \xi^\nu) = 1$ olduğundan $\eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H}) = Z_3^\mathcal{H}$ ve $\eta^\nu(Z^\nu) = Z_3^\nu$ olur.

$\phi^\mathcal{H}$ ve ϕ^ν ; $(1, 1)$ tipinde yatay ve dikey tensör alanları aşağıdaki gibi tanımlı olsun.

$$\begin{aligned} \phi^\mathcal{H}(E_1^\mathcal{H}) &= -E_2^\mathcal{H}, \phi^\mathcal{H}(E_2^\mathcal{H}) = E_1^\mathcal{H}, \phi^\mathcal{H}(E_3^\mathcal{H}) = 0 = \phi^\mathcal{H}(\xi^\mathcal{H}), \\ \phi^\nu(E_1^\nu) &= -E_2^\nu, \phi^\nu(E_2^\nu) = E_1^\nu, \phi^\nu(E_3^\nu) = 0 = \phi^\nu(\xi^\nu). \end{aligned}$$

O halde her $Z^\mathcal{H} \in (T(\mathbb{R}^3)')^\mathcal{H}$ ve $Z^\nu \in (T(\mathbb{R}^3)')^\nu$ için

$$(\phi^\mathcal{H})^2(Z^\mathcal{H}) = -Z^\mathcal{H} + \eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H})\xi^\mathcal{H}, (\phi^\nu)^2(Z^\nu) = -Z^\nu + \eta^\nu(Z^\nu)\xi^\nu$$

dir. Ayrıca her $Z^\mathcal{H}, W^\mathcal{H} \in (T(\mathbb{R}^3)')^\mathcal{H}$ ve $Z^\nu, W^\nu \in (T(\mathbb{R}^3)')^\nu$ için

$$\begin{aligned} G^\mathcal{H}(\phi Z^\mathcal{H}, \phi W^\mathcal{H}) &= G^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H}, W^\mathcal{H}) + \eta^\mathcal{H}(Z^\mathcal{H})\eta^\mathcal{H}(W^\mathcal{H}), \\ G^\nu(\phi Z^\nu, \phi W^\nu) &= G^\nu(Z^\nu, W^\nu) + \eta^\nu(Z^\nu)\eta^\nu(W^\nu) \end{aligned}$$

olur. Böylece $(\phi^\mathcal{H}, \xi^\mathcal{H}, \eta^\mathcal{H}, G^\mathcal{H})$ ve $(\phi^\nu, \xi^\nu, \eta^\nu, G^\nu)$ yapıları, sırasıyla, $((\mathbb{R}^3)')^h$ ve $((\mathbb{R}^3)')^v$ manifoldları üzerinde birer hemen hemen değme Lorentz metrik Finsler yapılarıdır. Diğer

tarafından, Kozsul formülü kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}\nabla_{E_1}^{\mathcal{H}} E_1^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \xi^{\mathcal{H}}, \nabla_{E_2}^{\mathcal{H}} E_1^{\mathcal{H}} = 0, \nabla_{\xi}^{\mathcal{H}} E_1^{\mathcal{H}} = 0, \nabla_{E_1}^{\mathcal{H}} E_2^{\mathcal{H}} = 0, \nabla_{\xi}^{\mathcal{H}} E_2^{\mathcal{H}} = 0 \\ \nabla_{E_2}^{\mathcal{H}} E_2^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \xi^{\mathcal{H}}, \nabla_{E_1}^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} E_1^{\mathcal{H}}, \nabla_{E_2}^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} E_2^{\mathcal{H}}, \nabla_{\xi}^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}} = 0 \\ \nabla_{E_1}^{\mathcal{V}} E_1^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} \xi^{\mathcal{V}}, \nabla_{E_2}^{\mathcal{V}} E_1^{\mathcal{V}} = 0, \nabla_{\xi}^{\mathcal{V}} E_1^{\mathcal{V}} = 0, \nabla_{E_1}^{\mathcal{V}} E_2^{\mathcal{V}} = 0, \nabla_{\xi}^{\mathcal{V}} E_2^{\mathcal{V}} = 0 \\ \nabla_{E_2}^{\mathcal{V}} E_2^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} \xi^{\mathcal{V}}, \nabla_{E_1}^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} E_1^{\mathcal{V}}, \nabla_{E_2}^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} E_2^{\mathcal{V}}, \nabla_{\xi}^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}} = 0.\end{aligned}$$

Bu eşitlikler sayesinde $(T(\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}$ demetinde $X^{\mathcal{H}} = X_1^{\mathcal{H}} E_1^{\mathcal{H}} + X_2^{\mathcal{H}} E_2^{\mathcal{H}} + X_3^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}$ ve $Y^{\mathcal{H}} = Y_1^{\mathcal{H}} E_1^{\mathcal{H}} + Y_2^{\mathcal{H}} E_2^{\mathcal{H}} + Y_3^{\mathcal{H}} \xi^{\mathcal{H}}$ vektörleri için $\phi Y^{\mathcal{H}} = Y_2^{\mathcal{H}} E_1^{\mathcal{H}} - Y_1^{\mathcal{H}} E_2^{\mathcal{H}}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla_{X^{\mathcal{H}}} \phi^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} &= \nabla_{X^{\mathcal{H}}} (\phi^{\mathcal{H}} Y^{\mathcal{H}}) - \phi^{\mathcal{H}} (\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{H}}) \\ &= \frac{1}{2} \{-G^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}} X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \phi^{\mathcal{H}} X^{\mathcal{H}}\}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $((\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{H}}, \phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}}$ bir Kenmotsu Lorentz Finsler manifoldu olur. Benzer şekilde $(T(R^3)')^{\mathcal{V}}$ demetinde $X^{\mathcal{V}} = X_1^{\mathcal{V}} E_1^{\mathcal{V}} + X_2^{\mathcal{V}} E_2^{\mathcal{V}} + X_3^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}}$ ve $Y^{\mathcal{V}} = Y_1^{\mathcal{V}} E_1^{\mathcal{V}} + Y_2^{\mathcal{V}} E_2^{\mathcal{V}} + Y_3^{\mathcal{V}} \xi^{\mathcal{V}}$ vektörleri için $\phi Y^{\mathcal{V}} = Y_2^{\mathcal{V}} E_1^{\mathcal{V}} - Y_1^{\mathcal{V}} E_2^{\mathcal{V}}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla_{X^{\mathcal{V}}} \phi^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} &= \nabla_{X^{\mathcal{V}}} (\phi^{\mathcal{V}} Y^{\mathcal{V}}) - \phi^{\mathcal{V}} (\nabla_{X^{\mathcal{V}}} Y^{\mathcal{V}}) \\ &= \frac{1}{2} \{-G^{\mathcal{V}}(\phi^{\mathcal{V}} X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) \phi^{\mathcal{V}} X^{\mathcal{V}}\}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $((\mathbb{R}^3)')^{\mathcal{V}}, \phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}}$ bir Kenmotsu Lorentz Finsler manifoldu olur. Ayrıca aşağıdaki sonuçlar da elde edilebilir:

$$\begin{aligned}G^{\mathcal{H}}(R^{\mathcal{H}}(E_1^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}}, E_1^{\mathcal{H}}) &= -\frac{1}{4} (X_3^{\mathcal{H}} Y_3^{\mathcal{H}} - X_2^{\mathcal{H}} Y_2^{\mathcal{H}}) \\ G^{\mathcal{H}}(R^{\mathcal{H}}(E_2^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}}, E_2^{\mathcal{H}}) &= -\frac{1}{4} (X_3^{\mathcal{H}} Y_3^{\mathcal{H}} - X_1^{\mathcal{H}} Y_1^{\mathcal{H}}) \\ G^{\mathcal{H}}(R^{\mathcal{H}}(E_3^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}}, E_3^{\mathcal{H}}) &= -\frac{1}{4} (-X_1^{\mathcal{H}} Y_1^{\mathcal{H}} - X_2^{\mathcal{H}} Y_2^{\mathcal{H}}) \\ G^{\mathcal{V}}(R^{\mathcal{V}}(E_1^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}}, E_1^{\mathcal{V}}) &= -\frac{1}{4} (X_3^{\mathcal{V}} Y_3^{\mathcal{V}} - X_2^{\mathcal{V}} Y_2^{\mathcal{V}}) \\ G^{\mathcal{V}}(R^{\mathcal{V}}(E_2^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}}, E_2^{\mathcal{V}}) &= -\frac{1}{4} (X_3^{\mathcal{V}} Y_3^{\mathcal{V}} - X_1^{\mathcal{V}} Y_1^{\mathcal{V}}) \\ G^{\mathcal{V}}(R^{\mathcal{V}}(E_3^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}}, E_3^{\mathcal{V}}) &= -\frac{1}{4} (-X_1^{\mathcal{V}} Y_1^{\mathcal{V}} - X_2^{\mathcal{V}} Y_2^{\mathcal{V}})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau^{\mathcal{H}} &= G^{\mathcal{H}}(R^{\mathcal{H}}(E_1^{\mathcal{H}}, E_2^{\mathcal{H}})E_2^{\mathcal{H}}, E_1^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(R^{\mathcal{H}}(E_1^{\mathcal{H}}, E_3^{\mathcal{H}})E_3^{\mathcal{H}}, E_1^{\mathcal{H}}) \\
&+ G^{\mathcal{H}}(R^{\mathcal{H}}(E_2^{\mathcal{H}}, E_1^{\mathcal{H}})E_1^{\mathcal{H}}, E_2^{\mathcal{H}}) \\
&+ G^{\mathcal{H}}(R^{\mathcal{H}}(E_2^{\mathcal{H}}, E_3^{\mathcal{H}})E_3^{\mathcal{H}}, E_2^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(R^{\mathcal{H}}(E_3^{\mathcal{H}}, E_1^{\mathcal{H}})E_1^{\mathcal{H}}, E_3^{\mathcal{H}}) \\
&= \frac{1}{2} \\
\tau^{\mathcal{V}} &= G^{\mathcal{V}}(R^{\mathcal{V}}(E_1^{\mathcal{V}}, E_2^{\mathcal{V}})E_2^{\mathcal{V}}, E_1^{\mathcal{V}}) + G^{\mathcal{V}}(R^{\mathcal{V}}(E_1^{\mathcal{V}}, E_3^{\mathcal{V}})E_3^{\mathcal{V}}, E_1^{\mathcal{V}}) \\
&+ G^{\mathcal{V}}(R^{\mathcal{V}}(E_2^{\mathcal{V}}, E_1^{\mathcal{V}})E_1^{\mathcal{V}}, E_2^{\mathcal{V}}) \\
&+ G^{\mathcal{V}}(R^{\mathcal{V}}(E_2^{\mathcal{V}}, E_3^{\mathcal{V}})E_3^{\mathcal{V}}, E_2^{\mathcal{V}}) + G^{\mathcal{V}}(R^{\mathcal{V}}(E_3^{\mathcal{V}}, E_1^{\mathcal{V}})E_1^{\mathcal{V}}, E_3^{\mathcal{V}}) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Literatürde yer alan çalışmalar incelendiğinde Riemann ve yarı Riemann metrik kullanılarak $(2n+1)$ boyutlu bir M manifoldu üzerinde değme yapılar kurulmuştur. Ancak bu doktora tez çalışmasında diğer çalışmalardan farklı olarak tanjant demetleri üzerinde yarı Finsler metrik kullanılarak değme yapılar inşa edilmiştir. Tanjant demetleri üzerinde değme yapıları kurmak istediğimizde ise çift boyutlu bir yapı ile karşı karşıya kalırız. Elde edilen tanjant demeti çift boyutlu olduğundan bu yapı üzerinde değme yapının kurulması mümkün değildir. Ancak, Finsler uzayında M' tanjant demetini $M' = (M')^h \oplus (M')^v$ olmak üzere yatay ve dikey distrübüsyonlara ayırırsak tanjant demetleri üzerinde değme yapılar kurulabilir.

Böylece bu tez çalışmasında yarı Finsler manifoldları üzerinde yarı Finsler metrik kullanılarak değme yapılara ait sonuçlar elde edildi. Hemen hemen değme yapılar ele alınarak yapıların integrallenebilir olması için kayda değer sonuçlar elde edildi. Yarı Finsler manifoldları üzerinde ε -Sasakian yapılar tanıtıldı. Vektör demetleri üzerinde ε -Sasakian yapıların eğrilikleri için sonuçlar elde edildi. Ayrıca ε -Sasakian Finsler yapılar üzerinde yatay ve dikey Ricci tensörleri hesaplandı. $q = 1$ indekse sahip değme yapıların özel bir sınıfı olan Lorentz manifoldları yarı Finsler metrik tensör alanı ile birleştirilerek değme Lorentz Finsler yapılar tanıtıldı. Ayrıca bu yapıların integrallenebilir ya da normal olması için bazı önemli koşullar elde edildi. Yarı Finsler manifoldları üzerinde Sasakian Lorentz yapılar çalışılarak bu yapılara ait eğrilikler hesaplandı. Yarı Finsler manifoldları üzerinde hemen hemen Kenmotsu ve Kenmotsu yapılar kuruldu. Bu yapıların integrallenebilir olması için yeni şartlar elde edildi. Yarı Finsler metrikli Kenmotsu manifoldlarının eğrilikleri için önemli sonuçlar verildi. Tez çalışmamızda elde ettiğimiz bu sonuçlar, yarı Riemann geometri ile karşılaştırılarak aşağıda ifade edilmiştir:

M manifoldu üzerinde $\tilde{\phi}$; $(1, 1)$ tipinde tensör alanı, $\tilde{\xi}$; vektör alanı, $\tilde{\eta}$; 1-form, $\tilde{g}$; yarı Riemann metrik ve $(M, \tilde{\phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ yapısı yarı metrik manifold olsun. Böylece $(\tilde{\phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ yapısı

için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}(\tilde{\xi}) &= 1 \\
\tilde{\phi}^2 X &= -X + \tilde{\eta}(X)\tilde{\xi} \\
\tilde{\phi}\tilde{\xi} &= 0 \\
\tilde{\eta}(\tilde{\phi}X) &= 0 \\
rank\tilde{\phi} &= 2n \\
\tilde{g}(\tilde{\phi}X, \tilde{\phi}Y) &= \tilde{g}(X, Y) - \varepsilon\tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y) \\
\tilde{\eta}(X) &= \varepsilon\tilde{g}(X, \tilde{\xi}) \\
\tilde{g}(X, \tilde{\phi}Y) &= d\tilde{\eta}(X, Y) \\
(\nabla_X \tilde{\phi})Y &= \tilde{g}(X, Y)\tilde{\xi} - \varepsilon\tilde{\eta}(Y)X \\
R(X, Y)\tilde{\xi} &= -\tilde{\eta}(X)Y + \tilde{\eta}(Y)X \\
R(X, Y)Z &= \varepsilon\{\tilde{g}(Y, Z)X - \tilde{g}(X, Z)Y\} \\
S(\tilde{X}, \tilde{\xi}) &= \begin{cases} (q-2n)\eta(X), & \tilde{\xi} \text{ space-like ise} \\ (q-2n-1)\eta(X), & \tilde{\xi} \text{ time-like ise} \end{cases}, \\
S(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) &= \begin{cases} (q-2n), & \tilde{\xi} \text{ space-like ise} \\ (q-2n-1), & \tilde{\xi} \text{ time-like ise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$F^{2n+1} = (M, M', F)$ Finsler manifoldu olmak üzere $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ metrik Finsler yapıları için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\begin{aligned}
\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) &= 1, \eta^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 1 \\
(\phi^{\mathcal{H}})^2 X^{\mathcal{H}} &= -X^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, (\phi^{\mathcal{V}})^2 X^{\mathcal{V}} = -X^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} \\
\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) &= 0, \phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0, \\
\eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}}) &= 0, \eta^{\mathcal{V}}(\phi^{\mathcal{V}}X^{\mathcal{V}}) = 0 \\
G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \\
G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) &= G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) - \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}), \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) \\
d\eta(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}), d\eta(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) \\
(\nabla_{X^{\mathcal{H}}} \phi^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \{ G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}} \} \\
(\nabla_{X^{\mathcal{V}}} \phi^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} \{ G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}} \} \\
R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{4} \{ \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} \} \\
R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{4} \{ \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} \} \\
S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \frac{n}{2} \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), S(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \frac{n}{2} \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) \\
S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \frac{n}{2}, S(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \frac{n}{2} \\
\nabla_{X^{\mathcal{H}}} \xi^{\mathcal{H}} &= -\frac{1}{2} \phi X^{\mathcal{H}}, \nabla_{X^{\mathcal{V}}} \xi^{\mathcal{V}} = -\frac{1}{2} \phi X^{\mathcal{V}} \\
K^*(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= \frac{1}{4}, K^*(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = \frac{1}{4} \\
\nabla_{\xi^{\mathcal{H}}} \phi &= 0, \nabla_{\xi^{\mathcal{V}}} \phi = 0.
\end{aligned}$$

$F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ yarı Finsler manifoldu olmak üzere $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yarı metrik Finsler yapıları için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\begin{aligned}
\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) &= 1, \eta^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 1 \\
(\phi^{\mathcal{H}})^2 X^{\mathcal{H}} &= -X^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}}, (\phi^{\mathcal{V}})^2 X^{\mathcal{V}} = -X^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} \\
\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) &= 0, \phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0, \\
\eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}} X^{\mathcal{H}}) &= 0, \eta^{\mathcal{V}}(\phi^{\mathcal{V}} X^{\mathcal{V}}) = 0 \\
G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - \varepsilon \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \\
G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) &= G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) - \varepsilon \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) \\
\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) &= \varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}), \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) = \varepsilon G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) \\
d\eta(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}), d\eta(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) \\
(\nabla_{X^{\mathcal{H}}} \phi^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \{ G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} - \varepsilon \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}} \} \\
(\nabla_{X^{\mathcal{V}}} \phi^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} \{ G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} - \varepsilon \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}} \} \\
R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{4} \{ \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} \} \\
R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{4} \{ \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} \}
\end{aligned}$$

$$R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} = \frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}\}$$

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}} = \frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}} - G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}\}$$

$$\nabla_{X^{\mathcal{H}}}\xi^{\mathcal{H}} = -\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{H}}, \nabla_{X^{\mathcal{V}}}\xi^{\mathcal{V}} = -\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{V}}$$

$$K^*(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \frac{\varepsilon}{4}, K^*(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\nabla_{\xi^{\mathcal{H}}}\phi = 0, \nabla_{\xi^{\mathcal{V}}}\phi = 0$$

$$S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \begin{cases} \left(\frac{2n-q}{4}\right), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{2n-q+1}{4}\right), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ time-like ise} \end{cases},$$

$$S^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \begin{cases} \left(\frac{2n-q}{4}\right), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{2n-q+1}{4}\right), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ time-like ise} \end{cases}$$

$$S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \begin{cases} \left(\frac{2n-q}{4}\right)\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{2n-q+1}{4}\right)\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ time-like ise} \end{cases},$$

$$S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \begin{cases} \left(\frac{2n-q}{4}\right)\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{2n-q+1}{4}\right)\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ time-like ise.} \end{cases}$$

$(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yarı metrik Finsler Lorentz yapılar olmak üzere $X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = 1, \eta^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 1$$

$$(\phi^{\mathcal{H}})^2 X^{\mathcal{H}} = -X^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, (\phi^{\mathcal{V}})^2 X^{\mathcal{V}} = -X^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}$$

$$\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = 0, \phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0,$$

$$\eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}}) = 0, \eta^{\mathcal{V}}(\phi^{\mathcal{V}}X^{\mathcal{V}}) = 0$$

$$G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})$$

$$G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})$$

$$\begin{aligned}
\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) &= -G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}), \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) = -G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) \\
d\eta(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}), d\eta(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) \\
(\nabla_{X^{\mathcal{H}}} \phi^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}}\} \\
(\nabla_{X^{\mathcal{V}}} \phi^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} \{G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}}\} \\
R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{4} \{\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}}\} \\
R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{4} \{\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}}\} \\
R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) Z^{\mathcal{H}} &= -\frac{1}{4} \{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}}\} \\
R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) Z^{\mathcal{V}} &= -\frac{1}{4} \{G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}} - G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}}\} \\
\nabla_{X^{\mathcal{H}}} \xi^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \phi X^{\mathcal{H}}, \nabla_{X^{\mathcal{V}}} \xi^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \phi X^{\mathcal{V}} \\
K^*(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= -\frac{1}{4}, K^*(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = -\frac{1}{4} \\
\nabla_{\xi^{\mathcal{H}}} \phi &= 0, \nabla_{\xi^{\mathcal{V}}} \phi = 0 \\
S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \frac{n}{2}, S(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \frac{n}{2} \\
S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \frac{n}{2} \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \frac{n}{2} \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}).
\end{aligned}$$

$(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ Kenmotsu yarı metrik Finsler yapılar olmak üzere $X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\begin{aligned}
\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) &= 1, \eta^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 1 \\
(\phi^{\mathcal{H}})^2 X^{\mathcal{H}} &= -X^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}}, (\phi^{\mathcal{V}})^2 X^{\mathcal{V}} = -X^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} \\
\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) &= 0, \phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0, \\
\eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}} X^{\mathcal{H}}) &= 0, \eta^{\mathcal{V}}(\phi^{\mathcal{V}} X^{\mathcal{V}}) = 0 \\
G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) &= G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - \varepsilon \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \\
G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) &= G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) - \varepsilon \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) \\
\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) &= \varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}), \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) = \varepsilon G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) \\
(\nabla_{X^{\mathcal{H}}} \eta^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) \\
(\nabla_{X^{\mathcal{V}}} \eta^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}})
\end{aligned}$$

$$(\nabla_{X^{\mathcal{H}}} \phi^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \{ \varepsilon G^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}} X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \phi^{\mathcal{H}} X^{\mathcal{H}} \}$$

$$(\nabla_{X^{\mathcal{V}}} \phi^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \{ \varepsilon G^{\mathcal{V}}(\phi^{\mathcal{V}} X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) \phi^{\mathcal{V}} X^{\mathcal{V}} \}$$

$$R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \xi^{\mathcal{H}} = \frac{1}{4} \{ \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}} \}$$

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \xi^{\mathcal{V}} = \frac{1}{4} \{ \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} - \eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}} \}$$

$$R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) Z^{\mathcal{H}} = -\frac{\varepsilon}{4} \{ G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) Y^{\mathcal{H}} \}$$

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) Z^{\mathcal{V}} = -\frac{\varepsilon}{4} \{ G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) X^{\mathcal{V}} - G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) Y^{\mathcal{V}} \}$$

$$\nabla_{X^{\mathcal{H}}} \xi^{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \phi^2 X^{\mathcal{H}}, \nabla_{X^{\mathcal{V}}} \xi^{\mathcal{V}} = -\frac{1}{2} \phi^2 X^{\mathcal{V}}$$

$$K^*(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = -\frac{\varepsilon}{4}, K^*(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = -\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} \left(\frac{q-2n}{4} \right) \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{q-2n-1}{4} \right) \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ time-like ise} \end{cases}, \\ S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) &= \begin{cases} \left(\frac{q-2n}{4} \right) \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{q-2n-1}{4} \right) \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ time-like ise} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) &= \begin{cases} \left(\frac{q-2n}{4} \right), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{q-2n-1}{4} \right), & \xi^{\mathcal{H}} \text{ time-like ise} \end{cases}, \\ S^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) &= \begin{cases} \left(\frac{q-2n}{4} \right), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ space-like ise} \\ \left(\frac{q-2n-1}{4} \right), & \xi^{\mathcal{V}} \text{ time-like ise.} \end{cases} \end{aligned}$$

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aktan, N., (2008). On non-existence of lightlike hypersurfaces of indefinite Kenmotsu space form. *Turkish Journal of Mathematics*, 32(2), 127-139.
- Altunkaya, B., (2007). Finsler Geometride Eğriler Teorisi (Yüksek Lisans Tezi), Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Antonelli, P.L., (2003). Handbook of Finsler geometry, Vol. 2. *Springer Science Business Media*.
- Asanov, G.S.,(1985). Finsler Geometry, *Relativity and Gauge Theories*, Reidel Pub. Com., Dordrecht.
- Atanasiv, G.H., Sinha B.B., Singh, S.K., (1984). On Finsler Spaces, *Proc. Nat. Semi.*, 29-36.
- Beem, J.K., (1970) Indefinite Finsler spaces and timelike spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, 22(5), 1035-1039.
- Beem, J.K., Chern, S.S., (1971). Motions in two dimensional indefinite Finsler spaces. *Indiana University Mathematics Journal*, 21(6), 551-555.
- Beem, J., (1976). Characterizing Finsler spaces which are pseudo-Riemannian of constant curvature. *Pacific Journal of Mathematics*, 64(1), 67-77.
- Bejancu, A., (1996). Null hypersurfaces of Finsler spaces. *Houston Journal of Mathematics*, 22(3), 547-558.
- Bejancu, A., Deshmukh, S., (1997). The transversal vector bundle of a lightlike Finsler submanifold. *Arab. J. Math. Sci.*, 3, 37-51.
- Bejancu, A., Duggal, K.L., (1993). Real hypersurfaces of indefinite Kaehler manifolds. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 16(3), 545-556.
- Bejancu, A., Farran, H.R., (1999). On the vertical bundle of a pseudo-Finsler manifold. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 22(3), 637-642.
- Bejancu, A., Farran, H.R., (2000). Geometry of pseudo-Finsler submanifolds. Vol. 527. *Springer Science Business Media*.
- Blair, D.E., (1976). Contact manifolds. In *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1-16.
- Calvaruso, G., Perrone, D., (2010). Contact pseudo-metric manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, 28(5), 615-634.
- Calvaruso, G., (2011). Contact Lorentzian manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, 29, 41-51.
- Chern, S.S., (1996). On Finsler geometry. In *A Mathematician And His Mathematical Work: Selected Papers of SS Chern*, 603-607.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Duggal, K.L., (1990). Space time manifolds and contact structures. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 13(3), 545-553.
- Finsler, P., (2013). Ueber kurven und Flächen in allgemeinen Räumen (Vol. 11), *Springer-Verlag*.
- Hacısalıhoğlu, H. H., (2003). Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi.
- Kenmotsu, K., (1972). A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 24, 93-103.
- Konishi, M., (1975). On manifolds with Sasakian 3-structure over quaternion Kaehler manifolds. *In Kodai Mathematical Seminar Reports*, 26(2-3), 194-200.
- Kumar, R., Rani, R., Nagaich, R.K., (2007). On sectional curvatures of ε -Sasakian manifolds. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*.
- Massamba, F., (2009). On semi-parallel lightlike hypersurfaces of indefinite Kenmotsu manifolds. *Journal of Geometry*, 95(1-2), 73-89.
- Massamba, F., (2011). Lightlike geometry of leaves in indefinite Kenmotsu manifolds. *Cubo (Temuco)*, 13(3), 69-89.
- Matsumoto, M., (1986). Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces. *Kaiseisha press*.
- Miron, R., (1961) Sur les connexions pseudo-euclidiennes des espaces de Finsler a metrique indefinite (Romanian). *Acad. R. P. Romane Fil. Iasi. St. Mat.*, 12.
- Miron, R., (1982). On Finsler spaces, *Proc. Nat. Semi. 2-Brasov*, 147-188.
- Prasad, K.S., (2008). Kenmotsu and P-Kenmotsu Finsler structures and connections on vector bundle. *In International Mathematical Forum*. 3(17), 837-846.
- Prasad R., Pandey, S., (2017). An Indefinite Kenmotsu Manifold Endowed With Quarter Symmetric Metric Connection. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(7), 3477-3495.
- Sağlam, A.F., Kılıç, N., Caliskan, N., (2019). Kenmotsu Pseudo-Metric Finsler Manifolds. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 11(2), 12-31.
- Sasaki, S., (1958). On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 10(3), 338-354.
- Sinha, B.B., Yadav, R.K., (1988). On almost contact Finsler structures on vector bundle. *Indian J. pure appl. Math*, 19(1), 27-35.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Sinha, B.B., Yadav, R.K., (1991). Almost contact semi symmetric metric Finsler connections on vector bundle. *Indian J. pure appl. Math*, 22(1), 29-39.

Szilasi, J., Vincze, C., (2000). A new look at Finsler connections and special Finsler manifolds. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhzi. (NS)*, 16, 33-63.

Takahashi, T., (1969). Sasakian manifold with pseudo-Riemannian metric. *Tohoku Mathematical Journal*, Second Series, 21(2), 271-290.

Tanno, S., (1996). Remarks on a triple of K -contact structures. *Tohoku Mathematical Journal*, Second Series, 48(4), 519-531.

Teodorescu, N., (1941). Sur les geodesiques de longueur nulle de certain elements lineaires finsleriens. *Bull. Ecole Polytech. Bucharest*, 12, 9-16.

Xufeng, X.U., Xiaoli, C., (1998). Two theorems on (ε) -Sasakian manifolds. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21(2), 249-254.

Yılmaz, A.F., Caliskan, N., (2013). Sasakian Finsler manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 37(2), 319-339.

Yano, K., Masahiro, K., (1984). Structures on manifolds.

Wang, Y., Liu, X., (2004) Almost Kenmotsu pseudo-metric manifolds, *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : Kılıç, Nurten
Doğum Tarihi ve Yeri : 27.06.1990 Afyonkarahisar
e-mail : nurten.kilic@dpu.edu.tr

Eğitim

<u>Derece</u>	<u>Eğitim Birimi</u>	<u>Mezuniyet Tarihi</u>
Yüksek Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi	2014
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi.	2012
Lise	Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi	2008

Yabancı Dil İngilizce-88.75

Yayınlar

Sağlamer, A.F., Kılıç, N., Caliskan, N., (2019). Kenmotsu Pseudo-Metric Finsler Manifolds. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 11(2), 12-31.

Bildiriler

Kılıç, N., Sağlamer, A.F., Caliskan, N., (2018). ε -Almost Contact Metric Structures on Indefinite Finsler Manifolds, 7th International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications.

Kılıç, N., Sağlamer, A.F., Caliskan, N., (2018). Almost K -Contact Pseudo-metric Structures on Indefinite Finsler Manifolds, 7th International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications.

Kılıç, N., Sağlamer, A.F., Caliskan, N., (2018). Contact Pseudo-Metric Structures on Indefinite Finsler Manifolds, 16. International Geometry Symposium.

Kılıç, N., Sağlamer, A.F., Caliskan, N., (2018). ε -Sasakian Structures on Indefinite Finsler Manifolds, 16. International Geometry Symposium.

Sağlamer, A.F., Caliskan, N., Kılıç, N., (2018). Contact Lorentzian Structures on Indefinite Finsler Manifolds, 7th International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications.

Sağlamer, A.F., Caliskan, N., Kılıç, N., (2018). Almost Kenmotsu Pseudo Metric Structures on Indefinite Finsler Manifolds, 7th International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications.

Sağlamer, A.F., Caliskan, N., Kılıç, N., (2018). Sasakian Lorentzian Structures on Indefinite Finsler Manifolds, 16. International Geometry Symposium.

Sağlamer, A.F., Caliskan, N., Kılıç, N., (2018). On the Curvatures of Indefinite Kenmotsu Finsler Manifolds, 16. International Geometry Symposium.

Sağlamer, A.F., Kılıç, N., (2019). β -Kenmotsu Lorentzian Finsler Structures, 17. International Geometry Symposium.

Sağlamer, A.F., Kılıç, N., (2019). On ϕ -Recurrent Kenmotsu Finsler Manifolds, OMTSA-2019.