

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TL-ALT MODÜLLER VE TL-LİNEER UZAYLAR İÇİN BAZI
TANIM VE TEOREMLER

DİLEK YAZGAN

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT DENİZ

TEZ JÜRİLERİ
DOÇ. DR. MÜCAHİDE NESİBE KESİCİOĞLU
DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT ERTUĞRUL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2019

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

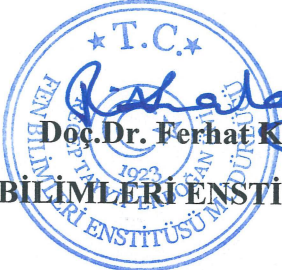
TL-ALT MODÜLLER VE TL-LİNEER UZAYLAR İÇİN BAZI TANIM VE
TEOREMLER

Dr. Öğr. Üyesi Ümit DENİZ danışmanlığında, Dilek YAZGAN tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 12/07/2019 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı Adı Soyadı
Başkan	: Dr. Öğr. Üyesi Ümit DENİZ
Üye	: Doç. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL

İmzası

(Handwritten signatures of the jury members)


Doç. Dr. Ferhat KALAYCI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Bu çalışma, TL -alt modüller ve TL -lineer uzaylar için bazı tanım ve teoremleri incelemek amacıyla Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak yapılmıştır.

Çalışma süresinin her aşamasında bilgilerini, tecrübelerini ve değerli zamanını esirgemeyerek bana her fırsatta yardımcı olan değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Ümit Deniz'e en içten dileklerimle teşekkürü bir borç bilirim.

Tezimi hazırlarken, çalışmam için elinden gelen fedakârlığı gösteren eşim Ali YAZGAN'a ve sevgili kızım Eylül YAZGAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan, varlığıyla bana güç veren, eğitim hayatım boyunca her zaman daha da başarılı olmam için desteklerini esirgemeyen babam Necmi TOPCU'ya ve annem Fatma TOPCU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Dilek YAZGAN

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “*TL*-Alt Modüller ve *TL*-Lineer Uzaylar için Bazı Tanım ve Teoremler” başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 18/06/2019


Dilek YAZGAN

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

TL-ALT MODÜLLER VE TL-LİNEER UZAYLAR İÇİN BAZI TANIM VE TEOREMLER

Dilek YAZGAN

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ümit DENİZ

Bu çalışmada fuzzy cebirin bir kolu olan fuzzy alt modüller ve fuzzy lineer uzayların tanım ve teoremlerinin verilmesi ve bu tanım ve teoremlerin L kafesi ve T üçgensel normları kullanarak genişletilmesi üzerine çalışıldı. İlk kısımda gruplar, halkalar, modüller, vektör uzayları, sıralı kümeler, kafesler, üçgensel normlar, L -alt kümeler, L -alt gruplar, L -alt halkalar, L -alt idealler incelendi. İkinci kısımda ise verilen bir modülün TL -alt modül tanımları ve bir lineer uzayın TL -lineer uzayları ve bunların bazı özellikleri üzerinde çalışmalar yapıldı.

2019, 39 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Alt Kümeler, Fuzzy Altmodüller, Fuzzy Lineer Uzaylar

ABSTRACT

SOME DEFINITIONS AND THEOREMS FOR TL -SUBMODULES AND TL -LINEAR SUBSPACES

Dilek YAZGAN

**Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ümit DENİZ**

In this study, we were worked on some definitions and theorems of fuzzy submodules and fuzzy linear spaces which is part of fuzzy algebra and this definitions and theorems were extended using lattice L and T -norms. In the first section, we were examined groups, rings, modules, vector spaces, ordered sets, lattices, triangular norms, fuzzy subsets, L -subsets, L -subgroups, L -subrings, L -ideals. In the second section, we studied on some definitions and theorems of TL -submodules are given a module and TL linear spaces of a linear space and we examined some properties of these.

2019, 39 pages

Keywords: Fuzzy Subsets, Fuzzy Submodules, Fuzzy Lineer Spaces

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	VI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Gruplar, Halkalar, Modüller ve Vektör Uzayları.....	2
1.3. Sıralı Kümeler ve Kafesler.....	5
1.4. Üçgensel Normlar (T -norm).....	9
1.5. Fuzzy Alt Kümeler ve L -Alt Kümeler.....	11
1.6. TL - Alt Gruplar, TL -Alt Halkalar ve TL -İdealler	13
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	16
2.1. TL -Alt Modüller ve TL -Alt Uzaylar.....	16
2.2. Bölüm Modüllerinin TL -Alt Modülleri.....	26
2.3. L - Alt Kümelerle Üretilen TL - Alt Modüller	28
3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR.....	35
4. ÖNERİLER.....	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\wedge$	Kafeste İnfimum
$\vee$	Kafeste Supremum
$\subseteq$	Kümeler Arasındaki Alt Küme Bağıntısı
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman Değil
$\geq$	Büyük veya Eşit
$\leq$	Küçük veya Eşit
$\cap$	Arakesit İşlemi
$\cup$	Birleşim İşlemi
t -norm	Üçgensel Norm
$\circ$	Bileşke İşlemi
$[a, b]$	Kapalı Aralık
(a, b)	Açık Aralık
L	Kafes
P	Kısmen Sıralı Küme
$\sup X$	X 'in Üst Sınırlarının En Küçüğü
$\inf X$	X 'in Alt Sınırlarının En Büyüğü
Alt B	B 'nin Bütün Alt Sınırlarının Kümesi
Üst B	B 'nin Bütün Üst Sınırlarının Kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Fuzzy kümeler kavramı Zadeh (1965) tarafından inşa edilmiştir. Rosenfeld (1971) bu gösterimi soyut cebire taşıdı ve fuzzy alt gruplarının kavramını tanımlamıştır. Ardından, Rosenfeld' in tanımı, $[0,1]$ kapalı aralığı için uygun kafes yapıları yerine koyularak Negoita ve Ralescu (1975) tarafından genişletildi ve ardından Anthony ve Sherwood (1979) tarafından $[0,1]$ üzerinde özel bir t -norm olan “min” yerine $[0,1]$ üzerinde herhangi bir t -norm T kullanılarak tekrar tanımlanmıştır. Fuzzy modüller, L -fuzzy modüller, fuzzy alt uzaylar ve T -fuzzy lineer uzaylar sırasıyla Negoita ve Ralescu (1975), Mashinchi ve Zadehi (1992), Katsaras ve Liu (1977) ve Yu (1984) tarafından tanımlanmıştır. Ardından, Abu Osman (1986), Das (1988), Golan (1989), Gu ve Lu (1992), Lowen (1980), Lubczonok (1990), Malik ve Mordeson (1991), Mordeson (1993), Muganda (1993), Pan (1987,1993), Yu (1989), Zahedi (1992,1993) tarafından daha ileri çalışmalara yer verilmiştir.

Bu çalışmada Wang ve Yu (1993,1994) tarafından sağlanmış fikirlerle bir modülün TL -alt modülleri, bir lineer uzayın TL -lineer uzayları ve onların bazı özellikleri incelenmiştir.

Bu tezde bir asal modülün TL -alt modüllerinin inşasının iki metodunu oluşturduk ve L -alt kümelerle genişletilmiş TL -alt modüller ve TL -lineer uzayları üzerine çalıştık. Gerekli kafes bilgileri Birkhoff (1967) dan alınmıştır ve modül ve lineer uzaylarla ilgili bilgiler için Jacobson (1974) dan yararlanılmıştır.

Bu tez boyunca tersi söylenmedikçe L maksimal elemanı 1, minimal elemanı 0 olan herhangi bir tam Brouwerian kafesi temsil eder ve X ve Y boştan farklı herhangi kümeler; R birimi e olan herhangi bir halka olarak gösterilir ve M , R üzerinde sıfır elemanı θ olan herhangi bir modülü temsil eder. N , bütün pozitif tam sayıların kümesini ve $|S|$, S kümesinin kardinalini gösterir.

1.2. Gruplar, Halkalar, Modüller ve Vektör Uzayları (Hungerford, 1974)

Tanım 1.2.1. G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

G1: " $*$ ", G de bir ikili işlemidir.

G2: " $*$ " işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir.

G3: " $*$ " işleminin G de birim elemanı vardır. Yani $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.

G4: " $*$ " işlemine göre, G deki her elemanın tersi vardır. Yani $\forall a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ bulunabilir.

Tanım 1.2.2. $(G, *)$ bir grup ve $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ değişme özelliği sağlanıyorsa gruba, değişmeli grup veya Abel grubu denir.

Tanım 1.2.3. $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem " $+$ " ve " $\cdot$ " olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

R1: $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.

R2: " $\cdot$ " işleminin R de birleşme özelliği vardır. $\forall a, b, c \in R$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir.

R3: " $\cdot$ " işleminin " $+$ " işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır: $\forall a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dir.

Halkanın " $+$ " işlemine göre etkisiz elemanına sıfır eleman denir ve 0_R ile gösterilir. Halkanın " $\cdot$ " işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer ikinci işleme göre de etkisiz eleman varsa böyle bir halkaya birimli halka denir ve bu etkisiz elemana da birim eleman denir ve 1_R gösterilir.

Halka, ikinci işleme göre değişme özelliğine sahip ise halkaya değişmeli halka denir.

Önerme 1.2.1 R bir halka olsun. $\forall a, b \in R$ için,

- i. $a0_R = 0_R a = 0_R$,
- ii. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$,

iii. $(-a)(-b) = ab$ dir.

Sonuç 1.2.1. R birimli bir halka ise $\forall a \in R$ için;

i. $(-1_R)a = -a$,

ii. $(-1_R)(-1_R) = 1_R$ dir.

Tanım 1.2.4. R birimli ve değişmeli bir halka ve $R - \{0_R\} = R^*$, ikinci işlem "." ya göre bir grup ise R ye bir cisim denir.

Tanım 1.2.5. R halkasında, $0_R \neq a \in R$ elemanı için; $ab = 0_R$ veya $ba = 0_R$ olacak şekilde $\exists 0_R \neq b \in R$ bulunabilirse a ya, halkanın bir sıfır böleni, böyle bir b yoksa sıfır böleni değildir denir.

Tanımdan 0_R , ne sıfır bölen, ne de sıfır bölen olmayan elemandır.

Tanım 1.2.6. $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. M 'deki elemanların R 'deki elemanlarla skaler çarpımı $\therefore R \times M \rightarrow M$ fonksiyonu aşığıdaki koşulları sağlıyorsa M ye R üzerinde bir modül yada R -modül denir.

1) $\forall r \in R, \forall m, m^* \in M$ için $r.(m + m^*) = r.m + r.m^*$,

2) $\forall r, r^* \in R, \forall m \in M$ için $(r + r^*).m = r.m + r^*.m$,

3) $\forall r, r^* \in R, \forall m \in M$ için $(rr^*).m = r(r^*.m)$ dir.

Eğer R birimli bir halka ve $\forall m \in M$ için $1_R m = m$ şartı sağlanıyorsa M ye üniter R -modül denir.

Önerme 1.2.2. R birimli halka ve M bir R -modül olsun. $\forall m \in M$ için,

1) $(0_R)m = 0_M$

2) $(1_R)m = m$ dir.

Tanım 1.2.7. R bir halka, M bir R -modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ küme olsun. N de kendi başına bir R -modül ise N ye, M nin bir alt modülü veya R -alt modül denir. M nin tüm alt modülleri ailesi S_M ile gösterilir.

Önerme 1.2.3. R -modül M nin, boş olmayan bir $N \subseteq M$ alt kümesinin alt modül olması için gerek ve yeter koşul,

$\forall r, r^* \in R$ ve $\forall m, m^* \in M$ için $rm + r^*m^* \in N$ olmasıdır.

Tanım 1.2.8. R bir halka M ve N , R -modül olsunlar. $f: M \rightarrow N$ fonksiyonu $\forall m, m^* \in M$ için $f(m + m^*) = f(m) + f(m^*)$,
 $\forall r \in R, \forall m \in M$ için $f(rm) = rf(m)$ koşullarını sağlıyorsa f ye bir modül homomorfizması veya R -homomorfizma denir.

Önerme 1.2.4. R bir halka ve $f: M \rightarrow N$ bir R -homomorfizma olsun.

- 1) $\forall m \in M$ için $f(0_M) = 0_N$, $f(-m) = -f(m)$ dir.
- 2) $\text{Çek}f = f^{-1}(0_N) = \{m \in M: f(m) = 0_N\}$, M nin bir alt modülüdür.
- 3) f nin birebir olması için gerek ve yeter koşul $\text{Çek}f = \{0_M\}$ olmasıdır.
- 4) $f(M) = \text{Im}(f) = \{f(m): m \in M\}$ N nin bir alt modülüdür. $N/\text{Im}(f)$ bölüm modülü de $\text{Coçek}f$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.9. F cisim olmak üzere F -vektör uzayı, V üzerinde tanımlı $+: V \times V \rightarrow V$ ve $.: F \times V \rightarrow V$ işlemleri ile birlikte aşağıdaki özellikleri sağlayan elemanların kümesidir.

- (a) Eğer u ve v V 'nin herhangi iki elemanı ise $u + v$ de V 'nin bir elemanıdır. ($V, +$ işlemi altında kapalıdır.)
- (1) V 'deki her u ve v için $u + v = v + u$.
- (2) V 'deki her u, v ve w için $u + (v + w) = (u + v) + w$.
- (3) V 'deki her u için $u + 0 = 0 + u = u$ olacak şekilde V 'de bir 0 elemanı bulunur.
- (4) V 'deki her u için $u + -u = -u + u = 0$ olacak şekilde V 'de bir $-u$ elemanı bulunur.
- (b) $c \in F$ ve u, V 'nin herhangi bir elemanı ise $c.u$ da V nin bir elemanıdır. (Yani $V, .$ işlemi altında kapalıdır.)
- (5) Herhangi bir $c \in F$ ve V 'deki her u ve v için $c.(u + v) = (c.u) + (c.v)$.
- (6) Herhangi bir $c, d \in F$ ve V 'deki her u için $(c + d).u = (c.u) + (d.u)$.
- (7) Herhangi bir $c, d \in F$ ve V 'deki her u için $c.(d.u) = (c.d).u$.
- (8) V 'deki her u için $1_F.u = u$.

V 'nin elemanlarına vektör; F cismindeki elemanlara skaler denir. "+" işlemi vektörel toplama, "." işlemi skaler çarpım adını alır. 3. Özellikteki 0 vektörüne sıfır vektör denir. 4. özellikteki $-u$ vektörüne u nun negatifi denir.

1.3. Sıralı Kümeler ve Kafesler (Birkhoff, 1948)

Tanım: 1.3.1. $L \neq \emptyset$ ve " $\leq$ " L de bir bağıntı olsun. Bu takdirde $(L, \leq)$ ikilisine sıralı küme denir. $\Leftrightarrow$

- i) $\forall a \in L$ için $a \leq a$.
- ii) $\forall a, b \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ dir.
- iii) $\forall a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ dir.

Tanım: 1.3.2. $(L, \leq)$ sıralı küme, $B \subseteq L$ olsun.

- i) $\forall b \in B$ için $a \leq b$ ise $a \in L$ elemanına B nin alt sınırı denir.
- ii) $\forall b \in B$ için $b \leq d$ ise $d \in L$ elemanına B nin üst sınırı denir.

Tanım: 1.3.3. $(L, \leq)$ sıralı küme $B \subseteq L$ ve $a_0 \in B$ olsun.

- i) $\forall b \in B$ için $a_0 \leq b$ ise a_0 elemanına B nin en küçük elemanı denir.
- ii) $\forall b \in B$ için $b \leq a_0$ ise a_0 elemanına B nin en büyük elemanı denir.

Tanım: 1.3.4. $(L, \leq)$ sıralı küme ve $x \in L$ olsun. L kümesinin x den kesinlikle daha büyük olan hiçbir elemanı yoksa, x 'e L 'nin maksimal elemanları denir ve L 'nin maksimal elemanların oluşturduğu küme $\max(L)$ ile gösterilir.

Tanım: 1.3.5. $(L, \leq)$ sıralı küme ve $x \in L$ olsun. L kümesinin x den kesinlikle daha küçük olan hiçbir elemanı yoksa, x 'e L 'nin minimal elemanları denir ve L 'nin minimal elemanların oluşturduğu küme $\min(L)$ ile gösterilir.

Tanım: 1.3.6. Alt B , Üst B sırasıyla B nin bütün alt sınırlarının ve üst sınırlarının kümesini göstermek üzere,

- i) Alt $B \neq \emptyset$ ve Alt B 'nin en büyük elemanı varsa buna B 'nin en büyük alt sınırı denir ve $\inf B = \bigwedge B = \bigwedge_{b \in B} b$ notasyonlarından biriyle gösterilir.

- ii) Üst $B \neq \emptyset$ ve Üst B 'nin en küçük elemanı varsa buna B 'nin en küçük üst sınırı denir ve $\sup B = \bigvee B = \bigvee_{b \in B} b$ notasyonlarından biriyle gösterilir.

Tanım 1.3.7. $(L, \leq)$ bir sıralı küme olsun. Her $x, y \in L$ için $\sup\{x, y\}$ ve $\inf\{x, y\}$ mevcut ise L ye kafes denir.

L kafesinde $x, y \in L$ için $x \vee y = \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ ile gösterilir.

Eğer $(L, \leq)$ bir kafes ise $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri L üzerinde ikili işlemlerdir. Dolayısıyla $(L, \vee, \wedge)$ bir cebirsel yapıdır.

Tanım 1.3.8. Bir L kafesine tam kafes denir: $\Leftrightarrow L$ nin her X alt kümesi L de bir en küçük üst sınıra ve bir en büyük alt sınıra sahiptir, yani her $X \subseteq L$ alt kümesi için $\sup X$ ve $\inf X$, L de mevcuttur.

Özel olarak Tanım 1.3.8 da $B = L$ alındığında boştan farklı her tam kafesin en küçük elemanının ve en büyük elemanının mevcut olduğu görülür. Bu nedenle tam kafes sınırlıdır. Her sonlu kafes tam kafestir. Keyfi bir zincir kafestir.

Tanım 1.3.9. L bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. X alt kümesine L kafesinin bir alt kafesidir denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ dir.

Bir kafeste boş küme ve tek elemanlı alt kümeler alt kafestir. Daha genel olarak, $(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise $[a, b] := \{x \in L : a \leq x \leq b\}$ ile tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığı bir alt kafestir.

Tanım 1.3.10. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. P ve Q kısmen sıralı kümelerinin $P \times Q = \{(x, y) : x \in P, y \in Q\}$ şeklinde tanımlanan $P \times Q$ kartezyen çarpım kümesi her $x_1, x_2 \in P$ ve $y_1, y_2 \in Q$, $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2$ ve $y_1 \leq_2 y_2$ bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(P \times Q, \leq)$ kısmen sıralı kümesine P ve Q kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

Teorem 1.3.1. L ve M iki kafes olsun. $L \times M$ direkt çarpımı da yine bir kafestir. Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \times M$ için $(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$, $(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$ dir.

Lemma 1.3.1. P kısmen sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer mevcutsa) her $x, y, z \in P$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- L1.** $x \wedge x = x, x \vee x = x$ (İdempotent)
- L2.** $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x,$ (Komütatif)
- L3.** $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$ (Birleşme)
- L4.** $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$

Üstelik $x \leq y$ ifadesi $x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ şartlarının her birine denktir.

Lemma 1.3.2. $P, 0$ en küçük elemanına sahip kısmen sıralı bir küme ise her $x \in P$ için $0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$ dir. Dual olarak $P, 1$ evrensel üst sınırına sahip ise her $x \in P$ için $x \wedge 1 = x$ ve $x \vee 1 = 1$ dir.

Lemma 1.3.3. Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sırayı korur, yani bir L kafesinde $x, y, z \in L$ için $y \leq z$ ise $x \wedge y \leq x \wedge z$ ve $x \vee y \leq x \vee z$ sağlanır.

Lemma 1.3.4. L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$
 $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 1.3.5. L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için modüler eşitsizlik olarak bilinen $x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.3.2. $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafestir. $\Leftrightarrow \wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri L1-L4 özelliklerini sağlar.

Teorem 1.3.3. Keyfi bir L kafesinde aşağıdaki ifadeler denktir:
L5'. Her $x, y, z \in L, x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$

L5''. Her $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Tanım 1.3.11. Keyfi bir L kafese dağılmalı kafes denir: $\Leftrightarrow L5'$ özelliği (böylece $L5''$) sağlanır.

Tanım 1.3.12. L bir kafes olsun. L kafesine modüler kafes denir ancak ve ancak her $x, y, z \in L$ için,

L6. $x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ özelliği sağlanır.

Tanım 1.3.13. L bir sınırlı kafes ve $x, y \in L$ olsun. y elemanına x elemanının komplementi denir: $\Leftrightarrow x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ dir. Bu durumda x elemanının komplementi x' ile gösterilir.

Eğer bir kafesin her elemanının komplementi mevcut ise böyle kafeslere komplementli kafes denir.

Tanım 1.3.14. $x \in L$ elemanına bir atom denir : $\Leftrightarrow x, L/\{0\}$ kümesinin bir minimal elemanıdır.

Tanım 1.3.15. $x \in L$ elemanına bir koatom denir : $\Leftrightarrow x, L/\{1\}$ kümesinin bir maksimal elemanıdır.

Tanım 1.3.16. L sınırlı bir kafes olsun. L kafesine Boole kafesi denir: $\Leftrightarrow L$ dağılmalı ve komplementli bir kafestir.

Teorem 1.3.4. L bir Boole kafesi olsun. Her $x \in L$ elemanının bir tek x' komplementi mevcuttur. Üstelik her $x, y \in L$,

L7. $x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$,

L8. $(x')' = x$,

L9. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ ve $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

özellikleri sağlanır.

Tanım 1.3.17. L bir tam kafes , $X \subseteq L$ olsun. X e L nin bir tam-alt kafesi denir ancak ve ancak her $A \subseteq L$ için $\vee A$ ve $\wedge A \in L$ de tanımlandıkları haliyle X te mevcuttur.

Uyarı 1.3.1. L bir tam kafes, X L nin herhangi bir tam alt-kafesi olsun. $\emptyset \subseteq X$ olduğundan, tam-alt kafesin tanımına göre $\wedge \emptyset = 1$, $\vee \emptyset = 0 \in X$ olup X L nin evrensel sınırlarını içermek zorundadır.

Tanım 1.3.18. L kafes ve $a, b \in L$ olsun. O halde $T(a, b) := \{c \in L : c \wedge a \leq b\}$ kümesinin maximal elemanı varsa a, b nin yarı komplementidir denir. $T(a, b)$ nin maximal elemanına b 'nin yarı komplementi denir ve $a \rightarrow b$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.19. L 'de ki her eleman yarı komplementli ise L kafesine Brouwerian kafes denir.

1.4. Üçgensel Normlar (T-norm) (Klement, 2000)

Tanım 1.4.1. L bir kafes olsun. $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağlarsa bir üçgensel norm (kısaca t -norm) denir:

- i. Birleşme : Her $x, y, z \in L$ için $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$.
- ii. Değişme : Her $x, y \in L$ için $T(x, y) = T(y, x)$.
- iii. Monotonluk : $x, y, z \in L$ ve $x \leq y$ ise her $z \in L$ için $T(x, z) \leq T(y, z)$.
- iv. Sınır şartı : Her $x \in L$ için $T(x, 1) = x$.

Örnek 1.4.1. $L = [0, 1]$ üzerinde bazı özel t -normlar ;

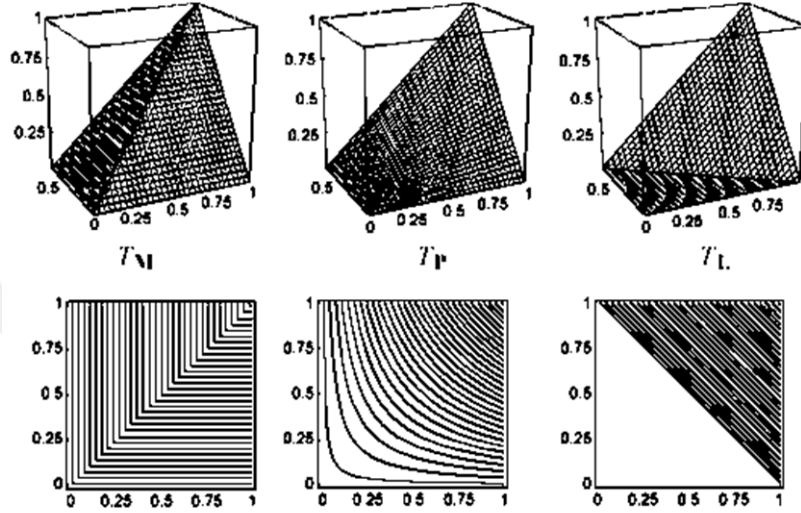
$$T_m(x, y) = \min(x, y),$$

$$T_p(x, y) = x \cdot y,$$

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0),$$

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \min(x, y), & A.T. \end{cases}$$

Bu t-normlar literatürde T_m (minimum), T_p (çarpım), T_L (Lukasiewicz) şeklinde adlandırılır. Bu t-normlara ait üç boyutlu ve kontur grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 1. T_m, T_p ve T_L temel t -normlarının üç boyutlu ve kontur grafikleri

Tanım 1.4.2. L üzerinde bir t -norm T , her $a, b, c \in L$ için

$T(a, b \vee c) = T(a, b) \vee T(a, c)$ özelliğini sağlıyorsa bu t -norm T ye $\vee$ –dağılımlıdır denir.

Tanım 1.4.3. L üzerinde bir t -norm T , $a, b_i \in L$ ve $i \in I, I$ herhangi boştan farklı index kümesi için $T(a, \vee_{i \in I} b_i) = \vee_{i \in I} T(a, b_i)$ özelliğini sağlıyorsa bu t -norm T ye sonsuz $\vee$ –dağılımlıdır denir.

Tanım 1.4.4. L üzerinde bir t -norm T , $a, b \in L/\{0\}$ için $T(a, b) \in L/\{0\}$ ise bu t -norm T ye pozitif tanımlıdır denir. Ayrıca L üzerinde bir t -norm T ye regüler denir ancak ve ancak bu t -norm T pozitif tanımlı ve sonsuz $\vee$ –dağılımlıdır.

Bu çalışmada aksi söylenmedikçe T her zaman L üzerinde sonsuz $\vee$ –dağılımlı t -norm olarak alınacaktır.

1.5. Fuzzy Alt Kümeler ve L -Alt Kümeler (Wang, 1994)

Tanım 1.5.1. X herhangi bir küme olmak üzere, $\mu: X \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonuna X 'in fuzzy alt kümesi denir.

X 'in bütün fuzzy alt kümelerinin oluşturduğu kümeye X 'in fuzzy kuvvet kümesi denir ve $[0,1]^X$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.5.2. X herhangi bir küme olmak üzere $\mu: X \rightarrow L$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonuna X in L -alt kümesi denir.

X in bütün L alt kümelerinin oluşturduğu kümeye X in L kuvvet kümesi denir ve L^X şeklinde gösterilir.

Tanım 1.5.3. $\mu \in L^X$ olmak üzere $\{\mu(x): x \in X\}$ ile tanımlanan kümeye μ nün görüntü kümesi denir ve $\mu(X)$ ya da $Im(X)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.5.4. $\mu \in L^X$ olmak üzere $\mu^* = \{x: \mu(x) > 0, x \in X\} \subseteq X$ kümesine μ nün destekleyicisi denir. Ayrıca μ^* , $supp(\mu)$ notasyonu ile da gösterilir.

Eğer μ^* sonlu küme ise μ ya sonlu L -alt küme, μ^* sonsuz küme ise μ ya sonsuz L -alt küme denir. Ayrıca $1 \in \mu(X)$ ise μ ye X in birimli L - alt kümesi denir.

Tanım 1.5.5. $Y \subset X$ ve $a \in L$ olmak üzere $a_Y \in L^X$ aşağıdaki gibi tanımlanır.
 $a_Y(x) = \begin{cases} a & ; x \in Y \\ 0 & ; x \notin Y \end{cases}$ özel olarak $Y = \{x\}$ ise a_Y kümesi $a_{\{x\}}$ şeklinde gösterilir ve L - nokta şeklinde isimlendirilir. Ayrıca $a_{\{x\}}$ L -alt kümesi x_a L -alt kümesi şeklinde de gösterilir.

Eğer $a = 1$ ise, $1_Y(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in Y \\ 0 & ; x \notin Y \end{cases}$ fonksiyonuna Y nin karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 1.5.7. $\mu, \nu \in L^X$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise $\mu \subseteq \nu$ dir.

Tanım 1.5.8. $\mu, \nu \in L^X$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ve $\nu(x) \leq \mu(x)$ ise $\mu = \nu$ dir denir.

Tanım 1.5.9. $\mu, \nu \in L^X$ olmak üzere $\mu \cap \nu, \mu \cup \nu \in L^X$ L -alt kümeleri $\forall x \in X$ için,
 $(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x),$
 $(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$
 şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.5.10. $\mu, \nu \in L^X$ olmak üzere $T(\mu, \nu) \in L^X$ L -alt kümesi $\forall x \in X$ için,
 $T(\mu, \nu)(x) = T(\mu(x), \nu(x))$ şeklinde tanımlanır ve $T(\mu, \nu)$ kümesine μ ve ν nin T -kesişimi denir.

Tanım 1.5.11. $\mu \in L^X$ olmak üzere $a \in L$ için $\mu_a = \{x: x \in X, \mu(x) \geq a\} \subseteq X$ kümesine μ nün seviye (kesiti) L - alt kümesi denir. Özel olarak $a = 1$ ise μ_a kümesi X_μ ile gösterilir.

Teorem 1.5.1. $\mu, \nu \in L^X$ olmak üzere,

- 1) $\mu \subseteq \nu, a \in L$ ise $\mu_a \subseteq \nu_a$,
- 2) $a \leq b, a, b \in L$ ise $\mu_b \subseteq \mu_a$,
- 3) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu_a = \nu_a, \forall a \in L$ dir.

Teorem 1.5.2. $\mu, \nu \in L^X$ için,

- 1) $\mu_a \cup \nu_a = (\mu \cup \nu)_a$,
- 2) $\mu_a \cap \nu_a = (\mu \cap \nu)_a$ dir.

Tanım 1.5.12. X ve Y herhangi iki küme olsun. $\mu \in L^X, \nu \in L^Y$ ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $f(\mu) \in L^Y$ ve $f^{-1}(\nu) \in L^X$ L -alt kümeler olmak üzere $\forall y \in Y$ için,

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \vee \{\mu(x): x \in X, f(x) = y\}; & f^{-1}(X) \neq \emptyset \\ 0 & ; f^{-1}(X) = \emptyset. \end{cases}$$

ve $\forall x \in X$ için $f^{-1}(v)(x) = v(f(x))$ şeklindeki fonksiyonlara sırasıyla f nin μ altındaki görüntüsü ve f nin v altındaki ters görüntüsü denir.

Teorem 1.5.3. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ ye birer fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki teoremler doğrudur.

- 1) $\forall i \in I, \mu_i \in L^X$ için $f(\bigcup_{i \in I} \mu_i) = \bigcup_{i \in I} f(\mu_i)$,
- 2) $\forall \mu_1, \mu_2 \in L^X$ için $\mu_1 \subseteq \mu_2$ ise $f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$,
- 3) $j \in J, v_j \in L^Y$ için $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} v_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(v_j)$,
- 4) $\forall v_1, v_2 \in L^Y$ için $v_1 \subseteq v_2$ ise $f^{-1}(v_1) \subseteq f^{-1}(v_2)$,
- 5) $\forall \mu \in L^X$ için $f^{-1}(f(\mu)) \supseteq \mu$, eğer f birebir ise $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$,
- 6) $\forall v \in L^Y$ için $f(f^{-1}(v)) \subseteq v$ eğer f örten ise $f(f^{-1}(v)) = v$,
- 7) $\forall \mu \in L^X, \forall v \in L^Y$ için $f(\mu) \subseteq v \Leftrightarrow \mu \in f^{-1}(v)$,
- 8) $\forall \mu \in L^X$ için $g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu)$.

1.6. TL - Alt Gruplar, TL -Alt Halkalar ve TL -İdealler (Wang ve Yu, 1994)

Tanım 1.6.1. G bir grup ve $\mu \in L^G$ olsun. Eğer μ aşağıdaki şartları sağlıyorsa μ ye G nin L -alt grubu denir.

- 1) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$,
- 2) $\forall x \in G$ için $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

Teorem 1.6.1. G bir grup olsun. μ, G nin L -alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olmasıdır.

Tanım 1.6.2. G bir grup, μ G nin L -alt grubu ve e, G nin etkisiz elemanı olmak üzere, $\mu_* = \{x \in G: \mu(x) = \mu(e)\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.6.3. μ sonlu bir G grubunun L -alt grubu olsun. Eğer μ_* , G nin değişmeli alt grubu ise μ ye L -değişmeli alt grup denir.

Tanım 1.6.4. G bir grup $\forall \mu, \nu \in L^G$ L -alt kümeleri olmak üzere $\forall x \in G$ için;
 $(\mu \circ \nu)(x) = \{\mu(y) \wedge \nu(z) : y, z \in G, yz = x\}$ şeklinde tanımlanır. $\forall x \in G$ için
 $\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$ olarak μ L -kümesinin tersi tanımlanır.

Teorem 1.6.2. G bir grup, $\mu, \nu, \mu_i \in L^G, i \in I, a = \bigvee \{\mu(x) : x \in G\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki teoremler doğrudur.

- 1) $\forall x \in G$ için $(\mu \circ \nu)(x) = \bigvee_{y \in G} \{\mu(y) \wedge \nu(y^{-1}(x))\}$
 $= \bigvee_{y \in G} (\mu(xy^{-1}) \wedge \nu(y)),$
- 2) $\forall x, y \in G$ için $(a_y \circ \mu)(x) = \mu(y^{-1}(x)),$
- 3) $\forall x, y \in G$ için $(\mu \circ a_y)(x) = \mu(xy^{-1}),$
- 4) $(\mu^{-1})^{-1} = \mu,$
- 5) $\mu \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu^{-1} \subseteq \nu^{-1},$
- 6) $(\bigcup_{i \in I} \mu_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} \mu_i^{-1},$
- 7) $(\bigcap_{i \in I} \mu_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} \mu_i^{-1},$
- 8) $(\mu \circ \nu)^{-1} = \nu^{-1} \circ \mu^{-1}$ dir.

Teorem 1.6.3. G bir grup ve μ , G nin L -alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için,

- 1) $\mu(e) \geq \mu(x)$
- 2) $\mu(x) = \mu(x^{-1})$ dir.

Tanım 1.6.5. G birimi e olan bir grup ve $\mu: G \rightarrow L, L$ -alt kümesi olsun. μ ye aşağıdaki şartları sağlarsa G nin TL -alt grubu denir.

- 1) $\mu(e) = 1,$
- 2) $\forall x \in G$ için $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x),$
- 3) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) \geq T(\mu(x), \mu(y)).$

Tanım 1.6.6. R bir halka ve $\mu: R \rightarrow L, L$ -alt kümesi için eğer μ aşağıdaki şartları sağlarsa μ ye R nin TL -alt halkası denir.

$$(R1) \mu(0) = 1,$$

$$(R2) \forall x \in R \text{ için } \mu(-x) \geq \mu(x),$$

$$(R3)_T \forall x, y \in R \text{ için } \mu(x + y) \geq T(\mu(x), \mu(y)),$$

$$(R4)_T \forall x, y \in R \text{ için } \mu(xy) \geq T(\mu(x), \mu(y)).$$

Tanım 1.6.7. $\mu \in L^R$ olsun. $\mu, (R1), (R2)$ ve $(R3)_T$ şartlarını sağlasın.

$(R5)_l : \forall x, y \in R \text{ için } \mu(xy) \geq \mu(y)$ ise μ ya R nin TL -sol ideali denir.

$(R5)_r : \forall x, y \in R \text{ için } \mu(xy) \geq \mu(x)$ ise μ ya R nin TL - sağ ideali denir.

$(R5) : \forall x, y \in R \text{ için } \mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$ ise μ ya R nin TL -ideali denir.

Sırasıyla $TLI_l(R), TLI_r(R)$ ve $TLI(R)$ kümeleri R nin bütün TL -sol ideallerinin, TL -sağ ideallerinin ve TL -ideallerinin kümesi şeklinde gösterilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümün hazırlanmasında (Yu, 1984) ve (Wang, and Yu, 1994) kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.1. TL -Alt Modüller ve TL -Alt Uzaylar

Tanım 2.1.1. M R -modül olmak üzere $\mu, \nu \in L^M$ olsun. x, M de sabit eleman olmak üzere;

$$(\mu +_T \nu)(x) = \bigvee \{T(\mu(y), \nu(z)) : y, z \in M, y + z = x\},$$

$(-\mu)(x) = \mu(-x)$ şeklinde tanımlanırlar. $\mu +_T \nu$ ya μ ve ν nin T -toplamı denir. $-\mu$ ya μ nun negatifi denir.

Tanım 2.1.2. R bir halka olmak üzere $r \in R$ ve $\mu \in L^M$ olsun. $r\mu \in L^M$ ve $\forall x \in M$ için $(r\mu)(x) = \bigvee \{\mu(y) : y \in M, ry = x\}$ şeklinde tanımlanır. $r\mu$ ifadesine r ve μ nin skaler çarpımı denir.

Teorem 2.1.1. R birimi e olan bir halka ve $r, s \in R$, $\mu, \nu, \xi, \mu_i \in L^M, i \in I$ öyle ki I herhangi boştan farklı index kümesi olsun. Bu taktirde aşağıdaki teoremler doğrudur.

- 1) $e\mu = \mu$, $(-e)\mu = -\mu$,
- 2) $\forall r \in R$ için $r1_{\{\emptyset\}} = 1_{\{\emptyset\}}$,
- 3) $\mu \subseteq \nu \Rightarrow r\mu \subseteq r\nu$,
- 4) $r(s\mu) = (rs)\mu$,
- 5) $r(\mu +_T \nu) = r\mu +_T r\nu$,
- 6) $r(\bigcup_{i \in I} \mu_i) = \bigcup_{i \in I} r\mu_i$,
- 7) $\forall x \in M$ için $(r\mu)(rx) \geq \mu(x)$,
- 8) $\forall x \in M$ için $\xi(rx) \geq \mu(x) \Leftrightarrow r\mu \subseteq \xi$,
- 9) $\forall x, y \in M$ için $(r\mu +_T s\nu)(rx + sy) \geq T(\mu(x), \nu(y))$,
- 10) $\forall x, y \in M$ için $\xi(rx + sy) \geq T(\mu(x), \nu(y)) \Leftrightarrow r\mu +_T s\nu \subseteq \xi$.

İspat:

$$\begin{aligned} 1) \quad \forall x \in M \text{ için } (e\mu)(x) &= \forall \{\mu(y): y \in M, ey = x\} \\ &= \forall \{\mu(x): x \in M\} = \mu(x). \end{aligned}$$

$\forall x \in M$ için $(e\mu)(x) = \mu(x)$ olduğundan $e\mu = \mu$ dir.

$$\begin{aligned} \forall x \in M \text{ için } ((-e)\mu)(x) &= \forall \{\mu(y): y \in M, (-e)y = x\} \\ &= \forall \{\mu(y): y \in M, ey = -x\} \\ &= \forall \{\mu(y): y \in M, y = -x\} \\ &= \mu(-x) = (-\mu)(x). \text{ O halde } (-e)\mu = -\mu \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$2) \quad x \neq \theta \text{ ise } 1_{\{\theta\}}(x) = 0.$$

$x \neq \theta$ ise $(r1_{\{\theta\}})(x) = \forall \{1_{\{\theta\}}(y): ry = x\} = 0$ [$y = \theta$ olamaz çünkü $x \neq \theta$ dir.]

$$x = \theta \text{ ise } 1_{\{\theta\}}(x) = 1.$$

$$x = \theta \text{ ise } (r1_{\{\theta\}})(\theta) = \forall \{1_{\{\theta\}}(y): ry = \theta\} = 1 \text{ olacak şekilde } y = \theta \text{ alınır.}$$

$$3) \quad \mu \subseteq \nu \text{ olsun. } \forall x \in M \text{ için } \mu(x) \leq \nu(x) \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} (r\mu)(x) &= \forall \{\mu(y): y \in M, ry = x\} \\ &\leq \forall \{\nu(y): y \in M, ry = x\} \\ &= (r\nu)(x) \text{ olduğundan } r\mu \leq r\nu \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$4) \quad r(s\mu) = (rs)(\mu)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in M \text{ için } (r(s\mu))(x) &= \forall \{(s\mu)(y): y \in M, ry = x\} \\ &= \forall \{\forall \{\mu(z): z \in M, sz = y\}: y \in M, ry = x\} \\ &= \forall \{\forall \mu(z): r(sz) = x\} \\ &= \forall \{\forall \mu(z): (rs)z = x, z \in M\} \\ &= \forall \{\mu(z): (rs)z = x\} \\ &= ((rs)\mu)(x). \end{aligned}$$

$$5) \quad r(\mu +_T \nu) = r\mu +_T r\nu$$

$$\begin{aligned} \forall x \in M \text{ için } (r(\mu +_T \nu))(x) &= \forall \{(\mu +_T \nu)(y): y \in M, ry = x\} \\ &= \forall \{\forall \{T(\mu(z), \nu(t)): z, t \in M, z + t = y\}: y \in M, ry = x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V\left\{V\left\{T(\mu(z), v(t)): z, t, y \in M, r(z+t) = x\right\}\right\} \\
&= V\left\{V\left\{T(\mu(z), v(t)): z, t, y \in M, rz + rt = x\right\}\right\} \\
&= V\left\{V\left\{T(\mu(z), v(t)): rz = x_1, rt = x_2, x_1 + x_2 = x\right\}\right\} \\
&= V\{T(V\{\mu(z): z \in M, rz = x_1\}, V\{v(t): t \in M, rt = x_2\}), x_1 + x_2 = x\} \\
&= V\{T((r\mu)(x_1), (rv)(x_2)): x_1, x_2 \in M, x_1 + x_2 = x\} \\
&= (r\mu +_T rv)(x) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{6)} \quad \forall x \in M \text{ için } (r(\bigcup_{i \in I} \mu_i))(x) &= V\left\{(\bigcup_{i \in I} \mu_i)(y): ry = x, y \in M\right\} \\
&= V\left\{V\left\{\mu_i(y): ry = x, y \in M\right\}\right\} = V\left\{(r\mu_i)(x)\right\} \\
&= (\bigcup_{i \in I} r\mu_i)(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{7)} \quad \forall x \in M \text{ için } (r\mu)(rx) &= V\{\mu(y): y \in M, ry = rx\}, \\
&= V\{\mu(y): y \in M, y = x\} \geq \mu(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{8)} \quad \forall x \in M \text{ için } \xi(rx) \geq \mu(x) \text{ olsun. O halde } (r\mu)(x) &= V\{\mu(y): y \in M, ry = x\} \\
&\leq V\{\xi(ry): y \in M, ry = x\} \\
&= \xi(x).
\end{aligned}$$

Şimdi, $r\mu \subseteq \xi$ olsun. O halde $\forall x \in M$ için $(r\mu)(x) \leq \xi(x)$ dir.

Buradan Teorem 2.1.1. 7'den $\xi(rx) \geq (r\mu)(rx) \geq \mu(x)$ elde edilir. O halde $\xi(rx) \geq \mu(x)$ dir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{9)} \quad \text{Teorem 2.1.1. 7'den ve } +_T \text{ tanımından } \forall x, y \in M \text{ için} \\
(r\mu +_T sv)(rx + sy) &\geq T((r\mu)(rx), (sv)(sy)) \geq T(\mu(x), v(y)) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{10)} \quad \forall x, y \in M \text{ için } \xi(rx + sy) \geq T(\mu(x), v(y)) \text{ olsun. O halde, } \forall z \in M \text{ için}$$

$$\begin{aligned}
(r\mu +_T sv)(z) &= \bigvee \{T((r\mu)(u), (sv)(v)): u, v \in M, u + v = z\} \\
&= \bigvee \left\{ T\left(\bigvee \{\mu(x): x \in M, rx = u\}, \bigvee \{v(y): y \in M, sy = v\} : u, v \in M, u + v = z \right) \right\} \\
&= \bigvee \{T(\mu(x), v(y)): x, y \in M, rx + sy = z\} \leq \xi(z). \text{ O halde } r\mu +_T sv \leq \xi \\
&\text{elde edilir.}
\end{aligned}$$

Tersine $r\mu +_T sv \leq \xi$ olduğunu kabul edelim. Teorem 2.1.1. 7'den ve $+_T$ tanımından, $\forall x, y \in M$ için, $\xi(rx + sy) \geq (r\mu +_T sv)(rx + sy)$
 $\geq T((r\mu)(rx), (sv)(sy)) \geq T(\mu(x), v(y))$ dir.

O halde ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.2. $r, s \in R$ ve $\mu \in L^M$ olsun. O halde,

- 1) $r\mu \subseteq \mu \Leftrightarrow \forall x \in M$ için $\mu(rx) \geq \mu(x)$,
- 2) $r\mu +_T s\mu \subseteq \mu \Leftrightarrow \forall x, y \in M$ için $\mu(rx + sy) \geq T(\mu(x), \mu(y))$.

İspat: Teorem 2.1.1. den ispatı açıktır.

Teorem 2.1.3. Farz edelim ki N, R üzerinde bir modül olsun. $f: M \rightarrow N$ homomorfizması olsun ve $r, s \in R$ ve $\mu, v \in L^M$ için,

- 1) $f(\mu +_T v) = f(\mu) +_T f(v)$,
- 2) $f(r\mu) = rf(\mu)$,
- 3) $f(r\mu +_T sv) = rf(\mu) +_T sf(v)$ dir.

İspat: $\forall y \in N$ için,

$$\begin{aligned}
1) \quad & f(\mu +_T v)(y) = \bigvee \{(\mu +_T v)(x): x \in M, f(x) = y\} \\
&= \bigvee \{ \bigvee \{T(\mu(y_1), v(y_2)): y_1, y_2 \in M, y_1 + y_2 = x\}: x \in M, f(x) = y \} \\
&= \bigvee \{T(\mu(y_1), v(y_2)): f(y_1 + y_2) = y: y_1, y_2 \in M\} \\
&= \bigvee \{T(\mu(y_1), v(y_2)): f(y_1) + f(y_2) = y: y_1, y_2 \in M\} \\
&= \bigvee \{T(\mu(y_1), v(y_2)): f(y_1) = x_1, f(y_2) = x_2, x_1 + x_2 = y\} \\
&= \bigvee \{T((\mu(y_1): y_1 \in M, f(y_1) = x_1), (v(y_2): y_2 \in M, f(y_2) = x_2)): x_1 + x_2 = y\} \\
&= \bigvee \{T(f(\mu(x_1)), f(v(x_2))): x_1, x_2 \in M, x_1 + x_2 = y\}
\end{aligned}$$

$$= (f(\mu) +_T f(v))(y).$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Herhangi bir } y \in N \text{ için } f(r\mu)(y) &= \bigvee \{(r\mu)(x): x \in M, f(x) = y\} \\ &= \bigvee \{\bigvee \{\mu(u): u \in M, ru = x\}: x \in M, f(x) = y\} \\ &= \bigvee \{\mu(u): u \in M, f(ru) = y\} \\ &= \bigvee \{\mu(u): u \in M, rf(u) = y\} \\ &= \bigvee \{\bigvee \{\mu(u): u \in M, f(u) = y_1\}: y_1 \in N, ry_1 = y\} = rf(\mu)(y) \end{aligned}$$

O halde, $f(r\mu) = rf(\mu)$ dir.

3) Teorem 2.1.3 ün maddelerinden ispatı açıktır.

Tanım 2.1.3. $\xi \in L^R$ ve $\mu \in L^M$ olsun. $\xi \cdot_T \mu$, $\xi \odot_T \mu \in L^M$ aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall x \in M$ için,

$$(\xi \cdot_T \mu)(x) = \bigvee \{T(\xi(r), \mu(y)): r \in R, y \in M, ry = x\},$$

$$(\xi \odot_T \mu)(x) = \bigvee \left\{ T_{i \in I}^n T(\xi(r_i), \mu(x_i)): r_i \in R, x_i \in M; 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n r_i x_i = x \right\}.$$

$T = \wedge$ olduğunda $\xi \cdot_T \mu$ ve $\xi \odot_T \mu$ kısaca sırasıyla $\xi \cdot \mu$ ve $\xi \odot \mu$ şeklinde gösterilir.

$r \in R$ için $1_{\{r\}} \cdot_T \mu = r\mu$ olduğunu ispatlamak zor değildir ve $1_{\{r\}} \odot_T \mu$ aşağıdaki gibi verilir.

$$(1_{\{r\}} \odot_T \mu)(x) = \bigvee \left\{ T_{i \in I}^n \mu(x_i): x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in N, r \sum_{i=1}^n x_i = x \right\}, \forall x \in M.$$

Tanım 2.1.4. M nin μ L -alt kümesine M nin bir TL -alt modülü denir ancak ve ancak μ aşağıdaki şartları sağlarsa:

(M1) $\mu(\theta) = 1$,

(M2) $\forall r \in R$ ve $x \in M$ için $\mu(rx) \geq \mu(x)$,

(M3) $\forall x, y \in M$ için $\mu(x + y) \geq T(\mu(x), \mu(y))$ şartlarını sağlar.

$T = \wedge$ olduğunda M nin TL -alt modülüne M nin bir L -alt modülü denir.

$L = [0, 1]$ ise bir TL -alt modül ve L -alt modüle sırasıyla bir T fuzzy alt modül ve bir fuzzy alt modül denir.

M nin bütün TL -alt modüllerinin kümesi ve M nin bütün L -alt modüllerinin kümesi sırasıyla $TL(M)$ ve $L(M)$ ile gösterilir.

Bilindiği gibi R halkası kendisi üzerinde bir modül olarak düşünülebilir. Bu durumda tanım 2.1.4 ü ile μ , modül R nin TL -alt modülüdür ancak ve ancak μ R halkasının TL -sol idealidir. Tanım 2.1.4 den $L(M) \subseteq TL(M)$ olduğunu görmek kolaydır. $\forall x \in M$ için $-ex = -x$ olduğundan (M2) şartı gösteriyor ki $\mu(-x) \geq \mu(x)$ dir. Sonuç olarak μ , (M2) şartını sağlayan bir toplamsal grubun TL -alt grubudur ve $\mu \in TL(M)$ dir.

Teorem 2.1.4. $\mu \in L^M$ olsun. $\mu \in TL(M)$ dir. $\Leftrightarrow \mu$, (M1) şartını ve aşağıdaki şartı sağlar.

$$(M4)_T \quad \forall r, s \in R \text{ ve } x, y \in M \text{ için } \mu(rx + sy) \geq T(\mu(x), \mu(y)).$$

İspat: " $\Rightarrow$ " $\mu \in TL(M)$ olsun. Tanımdan (M1) şartı sağlanır. μ , (M2) ve (M3) şartlarını sağladığından $\forall r, s \in R$ ve $x, y \in M$ için

$$\mu(rx + sy) \geq T(\mu(rx), \mu(sy)) \geq T(\mu(x), \mu(y)) \text{ dir. O halde (M4) şartını da sağlar.}$$

$$"\Leftarrow:" \mu(rx) = \mu(rx + r\theta) \geq T(\mu(x), \mu(\theta)) = \mu(x).$$

$[\mu(\theta) = 1 \text{ ve } T(x, 1) = x \text{ olduğundan}]$. $\forall r \in R$ ve $\forall x, y \in M$ için $\mu(x + y) = \mu(ex + ey) \geq T(\mu(x), \mu(y))$ dir. O halde (M2) ve (M3) şartları sağlanır. Dolayısıyla $\mu \in TL(M)$ dir.

Teorem 2.1.5. $\mu \in L^M$ olsun. $\mu \in TL(M)$ dir ancak ve ancak μ , M nin toplamalı TL -alt grubu ve aşağıdaki şartı sağlarsa:

$$(M2)' \quad \forall r \in R \text{ için } r\mu \subseteq \mu.$$

İspat: " $\Rightarrow$ " $\mu \in TL(M)$ olsun. $\mu \in TL(M)$ olduğundan toplamalı TL -alt grubun bütün şartları sağlanır.

$$\begin{aligned} \forall x \in M \text{ için } (r\mu)(x) &= \bigvee \{\mu(y) : y \in M, ry = x\} \\ &= \bigvee \{\mu(r^{-1}x) : x \in M\} \geq \bigvee \{\mu(x) : x \in M\} = \mu(x). \end{aligned}$$

O halde $r\mu \subseteq \mu$ dir.

" $\Leftarrow$:" $\forall r \in R$ için $r\mu \subseteq \mu$ olsun ve μ M nin toplamalı bir TL -alt grubu olsun. $\mu \in TL(M)$ olduğunu gösterelim. μ , TL - alt grup olduğundan $\mu(\theta) = 1$ dir.

Teorem 2.1.2 'den $r\mu \subseteq \mu$ olduğundan $\mu(rx) \geq \mu(x)$ dir. μ toplamalı TL -alt grup olduğundan $\mu(x + y) \geq T(\mu(x), \mu(y))$ dir. O halde $\mu \in TL(M)$ olur.

Teorem 2.1.6. $\mu \in L^M$ olsun. $\mu \in TL(M)$ dir ancak ve ancak μ aşağıdaki şartları sağlarsa:

$$(M1)' \quad 1_{\{\theta\}} \subseteq \mu,$$

$$(M2)' \quad \forall r \in R \text{ için } r\mu \subseteq \mu,$$

$$(M3)'_T \quad \mu +_T \mu \subseteq \mu.$$

İspat: " $\Rightarrow$ " $\mu \in TL(M)$ olsun. O halde, $1_{\{\theta\}}(x) = \begin{cases} 1, & x = \theta \\ 0, & x \neq \theta \end{cases}$

$$x = \theta \text{ ise } 1_{\{\theta\}}(x) = 1 \leq \mu(x) = \mu(\theta) = 1$$

$x \neq \theta$ ise $1_{\{\theta\}}(x) = 0 \leq \mu(x)$ dir. O halde $(M1)'$ şartı sağlanır. $(M2)'$ şartı Teorem 2.1.5.'de ispatlandı.

$$\begin{aligned} (\mu +_T \mu)(x) &= \bigvee \{T(\mu(y), \mu(z)), y, z \in M, y + z = x\} \\ &\leq \bigvee \{\mu(y + z) : y, z \in M, y + z = x\} = \mu(x) \end{aligned}$$

Şimdi, " $\Leftarrow$:" $(M1)', (M2)', (M3)'_T$ şartlarını doğru kabul edelim.

$1 = 1_{\{\theta\}}(\theta) \leq \mu(\theta) \leq 1$ olur. Buradan $\mu(\theta) = 1$ elde edilir. Teorem 2.1.2 den $r\mu \subseteq \mu$ olduğundan $\mu(rx) \geq \mu(x)$ dir.

Teorem 2.1.2. 2'den $\mu(x + y) \geq T(\mu(x), \mu(y))$ elde ederiz. O halde $\mu \in TL(M)$ dir.

Teorem 2.1.7. $\mu \in L^M$ olsun. $\mu \in TL(M)$ dir. $\Leftrightarrow \mu$, aşağıdaki şartları sağlar.

$$(M1)' \quad 1_{\{\theta\}} \subseteq \mu,$$

$$(M4)'_T \quad \forall r, s \in R \text{ için } r\mu +_T s\mu \subseteq \mu.$$

İspat: Teorem 2.1.6 ve Teorem 2.1.2 den ispatı açıktır.

Teorem 2.1.8. $\mu \in L^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ dir. $\Leftrightarrow$ Her μ_a ($a \in L$) M nin bir alt modülüdür.

İspat: $\mu \in L^M$, $a \in L$ olsun. Açıkca μ_a , M nin bir toplamı alt grubudur. Eğer $\forall r \in R$ için $x \in \mu_a$ ise $\mu(rx) \geq \mu(x) \geq a$ dir. O halde $rx \in \mu_a$ dir. Bu yüzden μ_a , M nin bir alt modülüdür.

Tersine her μ_a ($a \in L$) M nin bir alt modülü olsun. $\forall a \in L$ için $\mu(0) \geq a$ böylece $\mu(0) = 1$ dir. Açıkca $\mu, \forall x, y \in M$ için $\mu(x + y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ şartını sağlar.

$x \in M$ ve $a = \mu(x)$ olsun. O halde $x \in \mu_a$ dir. $\forall r \in R$ için $rx \in \mu_a$ dir. Böylece $\forall r \in R, x \in M$ için $\mu(rx) \geq a = \mu(x)$. Sonuç olarak $\mu \in L(M)$ dir.

Tanım 2.1.9. $\mu \in TL(M)$ olsun. O halde T regüler olduğunda M_μ , M nin bir alt modülü ve $supp(\mu)$, M nin bir alt modülüdür.

İspat: Teorem 2.1.8. den teoremin ispatı açıktır.

Teorem 2.1.10. $\leq$ bağıntısı içeren L -alt küme ile donatılmış $TL(M)$ kümesi, L -alt kümelerin kesişim kümeleri ile bir tam kafes oluşturur. Maksimal ve minimal elemanları sırasıyla 1_M ve $1_{\{\emptyset\}}$ dir. Dahası L alt küme T kesişim altında kapalıdır.

İspat: $\mu_i \in TL(M), i \in I, I$ boştan farklı index kümesi olsun. O halde;

$$(\bigcap_{i \in I} \mu_i)(\theta) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(\theta) = 1 \text{ dir.}$$

$\forall i \in I, \forall r, s \in R$ ve $x, y \in M$ için,

$$\mu_i(rx + sy) \geq T(\mu_i(x), \mu_i(y)) \geq T((\bigwedge_{i \in I} \mu_i)(x), (\bigwedge_{i \in I} \mu_i)(y)) \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
\forall r, s \in R \text{ ve } x, y \in M \text{ için } \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right) (rx + sy) &= \bigwedge_{i \in I} \mu_i (rx + sy) \\
&\geq \bigwedge_{i \in I} T(\mu_i(x), \mu_i(y)) \geq T \left(\bigwedge_{i \in I} \mu_i(x), \bigwedge_{i \in I} \mu_i(y) \right) \\
&\geq T \left(\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right) (x), \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right) (y) \right) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

O halde Teorem 2.1.4 den $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in TL(M)$ dir.

Böylece $1_M \in TL(M)$ olduğu gözlenir. $\leq$ sıralı $TL(M)$ kümesinin, L -alt küme kesişimlerine karşılık gelen bir tam kafes oluşturduğunu iddia edebiliriz.

Teorem 2.1.11. Farz edelim ki N, R üzerinde bir modül olsun, ve $f: M \rightarrow N$ ye bir homomorfizma olsun. O halde aşağıdaki teoremler doğrudur.

- 1) $\mu \in TL(M) \Rightarrow f(\mu) \in TL(N)$,
- 2) $\nu \in TL(N) \Rightarrow f^{-1}(\nu) \in TL(M)$.

İspat:

- 1) $\mu \in TL(M)$ olsun. Açıkca $f(\mu)$ N nin toplamalı TL -alt grubudur.

$\forall r \in R$ için $r(f(\mu)) = f(r\mu) \leq f(\mu)$. [Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.5 den]

O halde $f(\mu) \in TL(N)$ dir.

- 2) $\nu \in TL(N)$ olsun. $f^{-1}(\nu)$, M ' nin değişmeli TL alt grubudur.

$\forall r \in R$ ve $x \in M$ için $f^{-1}(\nu)(rx) = \nu(f(rx)) = \nu(rf(x)) \geq \nu(f(x)) = f^{-1}(\nu)(x)$.

O halde $f^{-1}(\nu) \in TL(M)$ dir.

Teorem 2.1.12. $\mu \in TL(M)$ ve $r \in C(R)$ olsun öyle ki $C(R)$, R nin merkezini gösterir. O halde $r\mu \in TL(M)$ dir.

İspat: $1_{\{\emptyset\}} \subseteq \mu$ olduğundan Teorem 2.1.2 (3) den $1_{\{\emptyset\}} \subseteq r\mu$ dir. Teorem 2.1.2 (3)-(5) ile beraber Teorem 2.1.7. den ve $r \in C(R)$ olduğundan,

$\forall s, t \in R$ için $s(r\mu) +_T t(r\mu) = r(s\mu +_T t\mu) \leq r\mu$. Sonuç olarak Teorem 2.1.7. den, $r\mu \in TL(M)$ olur.

Teorem 2.1.13. $\mu, \nu \in TL(M)$ olsun. O halde $\mu +_T \nu \in TL(M)$ dir.

İspat: $\mu +_T \nu, M$ nin değişmeli TL -alt grubudur. Teorem 2.1.1.(5) ve 2.1.5. den, $\forall r \in R$ için $r(\mu +_T \nu) = r\mu +_T r\nu \leq \mu +_T \nu$. Böylece $\mu +_T \nu \in TL(M)$ dir.

Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.13 ün sonucuna göre aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.1.14. Farz edelim ki R değişmeli halka olsun. $r_i \in R$ ve $\mu_i \in TL(M)$ olsun. $1 \leq i \leq n, n \in N$, o halde $\sum_{i=1}^n r_i \mu_i \in TL(M)$ dir.

Teorem 2.1.15. $\xi \in TLI_l(R)$ ve $\mu \in TL(M)$ olsun. O halde $\xi \odot_T \mu \in TL(M)$ dir.

İspat: Öncelikle $(\xi \odot_T \mu)(\theta) = 1$ olduğunu görmek kolaydır.
 $\forall r \in R, x \in M$ için,

$$\begin{aligned} (\xi \odot_T \mu)(rx) &= \bigvee \left\{ T_{i=1}^n (\xi(s_i), \mu(z_i)) : s_i \in R, z_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n s_i z_i = rx \right\} \\ &\geq \bigvee \left\{ T_{i=1}^n (\xi(rr_i), \mu(x_i)) : r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n (rr_i)x_i = rx \right\} \\ &\geq \bigvee \left\{ T_{i=1}^n (\xi(r_i), \mu(x_i)) : r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n r_i x_i = x \right\} \\ &= (\xi \odot_T \mu)(x). \text{ O halde } \xi \odot_T \mu \in TL(M) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Sonuç olarak T üzerinde sonsuz $\vee$ –dağılımı kullanıldığında kolayca görülür ki;
 $\forall x, y \in M$ için $(\xi \odot_T \mu)(x + y) \geq T((\xi \odot_T \mu)(x), (\xi \odot_T \mu)(y))$. O halde,
 $\xi \odot_T \mu \in TL(M)$ dir.

$M = R$ özel durumu Teorem 2.1.15'e uyum sağlar. Eğer $\xi, \mu \in TLI_1(R)$ ise $\xi \odot_T \mu \in TLI_1(R)$ dir.

Tanım 2.1.5. Eğer R cisim ise bir L -alt küme $\mu \in TL(M)$ ye M lineer uzayının TL -lineer alt uzayı denir. Bir TL -lineer uzayı $T = \wedge$ olduğunda L -lineer uzay diye isimlendirilir. Özel olarak $L = [0, 1]$ olduğunda, TL -lineer alt uzay ve L -lineer alt uzay sırasıyla T -fuzzy lineer alt uzay ve bir lineer alt uzay olarak isimlendirilir.

TL -lineer alt uzay aynı zamanda TL -alt modül olduğundan, TL -alt modülün genel özellikleri için TL -lineer alt uzaya başvurulabilir.

2.2. Bölüm Modüllerinin TL -Alt Modülleri

Bu bölümde bölüm modüllerinin TL -alt modüllerinin inşasının iki metodunu açıklayacağız.

Teorem 2.2.1. $\nu \in TL(M)$ ve A, M nin bir alt modülü olsun. $\xi \in L^{M/A}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\forall x \in M \text{ için } \xi([x]) = \vee\{\nu(u) : u \in [x]\}.$$

$M/A, A$ ya göre M nin bölüm modüllerinin gösterimidir ve $[x], x + A$ kosetini temsil eder. O halde $\xi \in TL(M/A)$ dir.

İspat: Açıkça ξ toplamsal M/A grubunun bir TL -alt grubudur. O halde $\forall x \in R, x \in M$ için,

$$\begin{aligned} \xi(r[x]) &= \xi([rx]) = \vee\{\nu(u) : u \in [rx]\} = \vee\{\nu(rx + y) : y \in A\} \\ &\geq \vee\{\nu(rx + rz) : z \in A\} = \vee\{\nu(r(x + z)) : z \in A\} \\ &\geq \vee\{\nu(x + z) : z \in A\} = \vee\{\nu(\vartheta) : \vartheta \in [x]\} = \xi([x]). \end{aligned}$$

O halde $\xi \in TL(M/A)$ dir.

Şimdi Teorem 2.2.1. in özel durumunu düşünelim. Mesela L bir zincir ve $\nu \in L(M)$ durumunda $a \in L, A = \nu_a$ olsun. O halde A, M nin bir alt modülü olur. Böylece Teorem 2.2.1., $\xi \in L(M/A)$, ξ teoremdeki gibi tanımlansın.

Şimdi herhangi bir $x \in M$ seçelim ve $\xi([x])$ düşünelim. Eğer $[x] = A$ ise $\xi([x]) = 1$ dir. Eğer $[x] \neq A$ ise $x \notin A$ ve bu yüzden $\nu(x) < a$ dır. Böylece herhangi $y \in [x], z \in A$ mevcut öyle ki $y = x + z$. Buradan, $\nu(y) = \nu(x + z) \geq \nu(x) \wedge \nu(z) =$

$v(x)$. Benzer şekilde , $v(x) = v(y + (-z)) \geq v(y) \wedge v(-z) = v(y)$. Sonuç olarak $v(x) = v(y)$ olur.

O halde $\xi([x])$ aşağıdaki gibi verilebilir. $\forall x \in M$ için,

$$\xi([x]) = \begin{cases} 1, & v(x) \geq a \\ v(x), & v(x) < a. \end{cases}$$

$\mu, v \in TL(M)$ olsun öyle ki $\mu \leq v$ ve T yi regüler kabul edelim. $Supp(\mu)$ ve $Supp(v)$ M nin alt modülleri olduğu biliniyor. Açıkça $Supp(\mu) \subseteq Supp(v)$ dir. Böylece $Supp(\mu)$, $Supp(v)$ nin bir alt modülüdür. Dahası $v/Supp(v) \in TL(Supp(v))$ olduğu açıktır. Bu yüzden Teorem 2.2.1. i takiben $\xi \in L^{Supp(v)/Supp(\mu)}$ yi aşağıdaki gibi tanımlarız.

$\xi([x]) = V\{v(z): z \in [x]\}, \forall x \in Supp(v)$. $[x], x + Supp(\mu)$ kosetini temsil eder. O halde $\xi \in TL(Supp(v)/Supp(\mu))$ dir. ξ TL -alt modülü, μ yü temsil eden v nin bölüm grubu diye adlandırılır ve v/μ ile yazılır.

Teorem 2.2.2. Farz edelim ki R bir tamlık bölgesi, M R üzerinde bölünebilir bir modül olsun. ($r \in R/\{0\}$ ve $x \in M$ ise $\exists y \in M$ öyle ki $ry = x$) A, M nin bir asal modülü olsun. (A, M nin bir alt modülü ve $rx \in A, r \in R, x \in M$ ise ya $r = 0$ yada $x \in A$ dir.) $v \in TL(M)$ olsun. $\eta \in L^{M/A}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\forall x \in M \text{ için } \eta([x]) = \begin{cases} 1, & [x] = A \\ T_{u \in [x]} v(u), & [x] \neq A. \end{cases}$$

O halde $\eta \in TL(M/A)$ dir.

İspat: Tanımdan $\eta(A) = 1$ olduğu açıktır. Şimdi $r \in R$ ve $x \in M$ olsun ve $\eta(r[x])$ i düşünelim. Açıkça $\eta(r[x]) = 1 \geq \eta([x])$ dir. Eğer $r[x] \neq A$ ise $r \neq 0$ ve $[x] \neq A$. Böylece M bir bölünebilir modül olduğundan ve A, M nin asal modülü olduğundan $A = \{rz: z \in A\}$ sonucuna varırız. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} \eta(r[x]) &= \eta([rx]) = T_{u \in [rx]} v(u) = T_{y \in A} v(rx + y) = T_{z \in A} v(rx + rz) \\ &= T_{z \in A} v(r(x + z)) \geq T_{z \in A} v(x + z) = T_{v \in [x]} v(v) = \eta([x]) \text{ dir.} \end{aligned}$$

$x, y \in M$ olsun. $\eta([x] + [y])$ i düşünelim. $[x] = A$ yada $[y] = A$ yada $[x] + [y] = A$ olduğunda $\eta([x] + [y]) \geq T(\eta([x]), \eta([y]))$ olduğunu görmek kolaydır.

Tersine,

$$\begin{aligned}
\eta([x] + [y]) &= T_{w \in [x] + [y]} \nu(w) = T_{u', v' \in A} \nu((x + u') + (y + v')) \\
&\geq T_{u', v' \in A} T(\nu(x + u'), (y + v')) \\
&\geq T(T_{u' \in A} \nu(x + u'), T_{v' \in A} \nu(y + v')) \\
&= T(T_{u \in [x]} \nu(u), T_{v \in [y]} \nu(v)) = T(\eta([x]), \eta([y])) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $\eta \in TL(M/A)$ dir.

Teorem 2.2.2. nin sonucuyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.2.3. $\nu \in TL(M)$ ve A, M nin bir alt modülü olsun. Farzedelim ki R bölme halkası olsun. (R bir cisim ve bu yüzden M, R üzerinde lineer uzay) O halde, bir önceki teoremde tanımlanan η TL -alt modülü, M/A bölüm grubunun bir TL -alt modülüdür.

Teorem 2.2.4. $\nu \in TL(M)$ olsun. Farz edelim ki R bir tamlık bölgesi, M, R üzerinde bölünebilir modül ve A, M nin bir torsion alt modülü olsun. ($A = Tor(M) = \{x: x \in M, \exists r \in R/\{0\}, rx = \theta\}$). O halde Teorem 2.2.2. de tanımlanan η TL -alt modülü, M/A bölüm modülünün bir TL -alt modülür.

İspat: İstenen sonuçlara Teorem 2.2.2. den varılır.

2.3. L - Alt Kümelerle Üretilen TL - Alt Modüller

$\mu \in L^M$ verilsin. Teorem 2.1.10 u takiben, $\cap^{(T)}\{\nu: \mu \subseteq \nu, \nu \in TL(M)\}$, M nin bir TL -alt modülüdür. Bu TL -alt modüle, L -alt küme μ ile üretilen, TL -alt modül denir ve $< \mu >_T$ ile gösterilir. $T = \Lambda$ olduğunda bu TL -alt modüle, L alt küme μ ile üretilen L -alt modül denir ve $< \mu >$ ile gösterilir.

Genel olarak, $\mu \in L^M$ ve $\xi \in TL(M)$ öyle ki $\xi = < \mu >_T$ ise μ ye ξ L -alt kümesinin genelleştirilmişidir denir. Özel olarak R bir cisim ve $\xi = < \mu >_T$ ise μ ye ξ TL -lineer alt uzayın L -alt kümesine genelleştirilmişidir denir.

Herhangi $\mu, \nu \in L^M$ için aşağıdaki verileri görmek kolaydır.

$$\forall a \in L \text{ için } < a_{\{\theta\}} \vee \mu >_T = < \mu >_T,$$

$$\mu \in TL(M) \Leftrightarrow < \mu >_T = \mu,$$

$$\mu \subseteq \nu \Rightarrow < \mu >_T \leq < \nu >_T,$$

$< \mu/N >_T \leq < \mu >_{T/N} \in TL(N)$, öyle ki N, M nin herhangi bir alt modülü ve μ/N ve $< \mu >_{T/N}$ ye sırasıyla μ nün kısıtlanması ve $< \mu >_T$ nin N ye kısıtlanmasıdır.

Ayrıca A, M nin boştan farklı alt kümesi olmak üzere $< 1_A >_T = 1_{<A>}$ ve $< A >$, A ile üretilen alt modülü gösterir.

Teorem 2.3.1. $\mu \in L^M$ olsun. $\xi \in L^M$ aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall x \in M$ için,

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x = \theta \\ \bigvee \left\{ T_{i=1}^n \mu(x_i) : r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n r_i x_i = x \right\}, & x \neq \theta. \end{cases}$$

Öyleyse;

$$\xi = 1_{\{\theta\}} \vee (1_R \odot_T \mu). \text{ O halde } < \mu >_T = \xi.$$

İspat: Açıkça $\mu \leq \xi$. Şimdi $\xi \in TL(M)$ olduğunu gösterelim. Tanımla $\xi(\theta) = 1$ dir. $r \in R, x \in M$ olsun.

$rx = \theta$ olduğunda $\xi(rx) = 1 \geq \xi(x)$ açıktır.

$rx \neq \theta$ olduğunda $x \neq \theta$ ve

$$\begin{aligned} \xi(rx) &= \bigvee \left\{ T_{i=1}^n \mu(x_i) : r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n r_i x_i = rx \right\} \\ &\geq \bigvee \left\{ T_{i=1}^n \mu(x_i) : r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n r r_i x_i = rx \right\} \\ &= \bigvee \left\{ T_{i=1}^n \mu(x_i) : r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in N, r \left(\sum_{i=1}^n r_i x_i \right) = rx \right\} \\ &\geq \bigvee \left\{ T_{i=1}^n \mu(x_i) : r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in N, \sum_{i=1}^n r_i x_i = x \right\} = \xi(x) \end{aligned}$$

Bu bize $\forall r \in R$ ve $x \in M$ için $\xi(rx) \geq \xi(x)$ olduğunu gösterir. Şimdi $x, y \in M$ olsun. $\xi(x + y)$ yi düşünelim. x ve y lerin herhangi biri veya $x + y = \theta$ olduğunda,

$\xi(x+y) \geq T(\xi(x), \xi(y))$ dir. x, y ve $x+y, \theta$ ya eşit değillerse, T nin sonsuz $\vee$ -dağılımını kullanarak, $\xi(x+y) \geq T(\xi(x), \xi(y))$ olduğunu görmek kolaydır. Bu $\forall x, y \in M$ için $\xi(x+y) \geq T(\xi(x), \xi(y))$ olduğunu ispatlar.

Sonuç olarak, $\xi \in TL(M)$ dir.

Herhangi $\eta \in TL(M)$, $\mu \leq \eta$ ve Teorem 2.1.4. ü takiben $\xi \leq \eta$ dir. Bu yüzden $\langle \mu \rangle_T = \xi$ olur.

Teorem 2.3.2. $x \in M$ ve $a \in L$ olsun. O halde,

$\langle x_a \rangle = 1_{\{\theta\}} \vee (\vee \{(rx)_a, r \in R\})$. Özel olarak $x = \theta$ veya $a = 0$ olduğunda, $\langle x_a \rangle_T = \langle x_a \rangle = 1_{\{\theta\}}$ dir.

İspat: Teorem 2.3.1. den açıktır.

Teorem 2.3.3. $\mu \in L^M$ olsun ve $Supp(\mu)/\{\theta\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ öyle ki $n \in N$, $a_i = \mu(x_i)$ ve $\mu_i = (x_i)_{a_i}$, $1 \leq i \leq n$ olsun. O halde $\langle \mu \rangle_T = 1_{\{\theta\}} \vee v$ dir öyle ki

$$v = \vee \left\{ \sum_{j=1}^m {}^{(T)}r_{ij} \mu_{ij} : r_{ij} \in R, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n \right\}.$$

İspat: Teorem 2.3.1. in sonucundan ispatı görmek kolaydır.

Tanım 2.3.1. M nin iki L -alt kümeleri μ ve ν ye $\langle \mu \rangle_T = \langle \nu \rangle_T$ ise μ ve ν ye T -denktir denir. Özel olarak $\langle \mu \rangle = \langle \nu \rangle$ ise μ ve ν denktir denir.

M nin L -alt kümeleri arasında T -denklik bağıntılarının yansıma, simetrik ve geçişken özelliklerine sahip olduğunu görmek kolaydır.

Teorem 2.3.4. $\mu, \nu \in L^M$ olsun. μ ve ν nin denk olması için yeter koşul, $\forall a \in L$ için μ_a ve ν_a nın M 'nin denk alt kümeleri olmasıdır.

İspat: Farz edelim ki $\forall a \in L$ için ve ν_a ve μ_a M nin denk alt kümeleri olsun. $x \in M$ için $\langle \mu \rangle(x)$ ve $\langle \nu \rangle(x)$ yi karşılaştıralım. $x = \theta$ ise $\langle \mu \rangle(x) = 1 = \langle \nu \rangle(x)$.

$x \neq \theta$ ise Teorem 2.3.1 i takiben,

$$\langle \mu \rangle (x) = \bigvee \left\{ \bigwedge_{i=1}^m \mu(x_i) : r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq m, m \in N, \sum_{i=1}^m r_i x_i = x \right\}.$$

$a = \bigwedge_{i=1}^m \mu(x_i)$ olsun. Böylece $x \in \langle \mu_a \rangle$ olur. $\langle \mu_a \rangle = \langle \nu_a \rangle$ olduğundan

$$s_j \in R, \quad y_j \in \nu_a, \quad 1 \leq j \leq n, \quad n \in N \text{ mevcuttur öyle ki } \sum_{j=1}^n s_j y_j = x.$$

Böylece $\bigwedge_{j=1}^n \nu(y_j) \geq a = \bigwedge_{i=1}^m \mu(x_i)$ dir.

Buradan Teorem 2.3.1. ile $\langle \mu \rangle (x) \leq \langle \nu \rangle (x)$ elde edilir.

Benzer şekilde $\langle \nu \rangle (x) \leq \langle \mu \rangle (x)$ gösterilir. Sonuç olarak $\langle \mu \rangle = \langle \nu \rangle$ dir.

Aşağıdaki örnek Teorem 2.3.4. de belirtilmiş olan M 'nin L -alt kümeleri μ ve ν nin T -denk olmaları için yeterli olmadığına bir örnektir.

Örnek 2.3.1. R , reel sayılar kümesinin cismi olsun ve V , R üzerinde iki boyutlu vektör uzay olsun. $\mu, \nu \in [0, 1]^V$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mu = (1, 0)_{1/2} \cup (0, 1)_{1/2} \text{ ve}$$

$$\nu = (1, 0)_{1/2} \cup (1, 1)_{1/2}.$$

μ ve ν Teorem 2.3.4. deki durumu sağlar ama $T = T_m$ yada $T = T_p$ olduğunda $\langle \mu \rangle_T \neq \langle \nu \rangle_T$ dir.

Teorem 2.3.5. $\mu, \nu \in L^M$ olsun. μ ve ν aşağıdaki şartları sağlıyorsa μ ve ν denktir denir,

- (1) Her $x \in \text{Supp}(\mu)/\{\theta\}$ elemanına karşılık gelen bir $s \in R, y \in \text{Supp}(\nu)$ ve $u \in \langle M_\nu \rangle$ elemanı vardır öyle ki $\exists x = sy + u$ ve $\nu(y) \geq \mu(x)$ dir.
- (2) Her $y \in \text{Supp}(\nu)/\{\theta\}$ elemanına karşılık gelen bir $r \in R, x \in \text{Supp}(\mu)$ ve $v \in \langle M_\mu \rangle$ elemanı vardır öyle ki $\exists y = rx + v$ ve $\mu(x) \geq \nu(y)$ dir.

İspat: Teorem 2.3.1 e başvurarak ve Teorem 2.3.4 ün ispatından gerekli sonuç çıkarılır.

Teorem 2.3.5 deki belirtilmiş koşul çiftleri, μ ve ν nin T -denk olması için yeterli koşullardır. Oysa, onlar gerekli koşullar değildir. Örneğin, ν örnek 2.3.1 deki gibi olsun, $\mu = (0, 1)_{2/3} \cup (0, 1)_{2/3}$ ve $\nu = \mu \cup (1, 1)_{1/3}$. O halde, $\langle \mu \rangle_{T_m} = \langle \nu \rangle_{T_m}$ dir. Fakat μ ve ν aynı zamanda iki şartı sağlamaz.

Teorem 2.3.5 in sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.3.6. V, R cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\mu, \nu \in L^V$ olsun. O halde, μ ve ν denktirler denir ancak ve ancak aşağıdaki şartları sağlarlar.

- (1) $\langle V_\mu \rangle = \langle V_\nu \rangle$.
- (2) $Supp(\mu)/V_\mu \neq \emptyset$ olduğunda her bir $x \in Supp(\mu)/V_\mu$ elemanına karşılık gelen bir $r_x \in R/\{0\}, y \in Supp(\nu)/V_\nu$ ve $u_x \in \langle V_\mu \rangle$ elemanları vardır öyle ki $x = r_x y + u_x$ ve $\nu(y) \geq \mu(x)$ dir.
- (3) $Supp(\nu)/V_\nu \neq \emptyset$ olduğunda her bir $y \in Supp(\nu)/V_\nu$ elemanına karşılık gelen bir $r_y \in R/\{0\}, x \in Supp(\mu)/V_\mu$ ve $u_y \in \langle V_\nu \rangle$ elemanları vardır öyle ki $y = r_y x + u_y$ ve $\mu(x) \geq \nu(y)$ dir.

Tanım 2.3.2. V, R cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer, ξ sonlu üretilen L -alt kümelerle sahip ve $\xi = \langle \mu \rangle_T$ olacak şekilde öyle bir μ sonlu bir L -alt küme için $\xi \in TL(V)$ ye V 'nin bir sonlu üretilen TL -lineer alt uzayı denir.

Özel olarak ξ nin μ , sonlu üretilen L -alt kümeleri var ve $Supp(\mu)/\{\theta\}, V$ nin lineer bağımsız alt kümesi ise ξ 'ye V 'nin bağımsız üretilen TL -lineer alt uzayı denir. $T = \Lambda$ olduğunda, V 'nin bir sonlu üretilmiş TL -lineer alt uzayı ve bağımsız üretilen TL -lineer alt uzayına sırasıyla, V 'nin sonlu üretilen L -lineer alt uzayı ve bağımsız üretilen L -lineer alt uzayı denir.

$dim V \leq 1$ olduğunda V 'nin bütün TL -lineer uzaylarının L -lineer alt uzay ve bağımsız üretilen L -lineer alt uzay olduğunu görmek kolaydır.

Sıradaki örnek, $V \geq 2$ olduğunda, V 'nin sonlu üretilen TL -lineer alt uzayı, sabit bir t -norm T göz önüne alındığında bağımsız üretilen TL -lineer alt uzayı olmayabilir.

Örnek 2.3.2. V , örnek 2.3.1 deki gibi tanımlansın ve $L = [0,1]$ olsun. Açıkça, $\mu = (1,0)_{1/2} \cup (0,1)_{1/2} \cup (1,1)_{1/2}$, V 'nin bağımsız genelleştirilmiş T_m -fuzzy lineer alt uzayı olmayan, V 'nin sonlu genelleştirilmiş T_m -fuzzy lineer alt uzay oluşturur.

Teorem 2.3.7. V, R cismi üzerinde bir lineer uzay olsun ve ξ , V 'nin bir sonlu üretilmiş TL -lineer alt uzayı olsun. O halde, ξ , V 'nin sonlu birçok bağımsız üretilen TL -lineer uzaylarının birleşim kümesi olarak ifade edilir. $p \in N$ ve $1 \leq k \leq p$ için ξ_k , V 'nin bağımsız üretilen TL -lineer alt uzayları mevcut ve $\xi = \bigvee_{k=1}^p \xi_k$ dır.

İspat: $\xi = 1_{\{\theta\}}$ olduğunda kendisi bağımsız üretilmiştir ve böylece istenen sonuç çıkar.

Şimdi, $\xi \neq 1_{\{\theta\}}$ ve μ , ξ nin sonlu üretilen L -alt kümesi olsun. $\xi \neq 1_{\{\theta\}}$ olduğundan $Supp(\mu)$ en az biri sıfır olmayan vektör içerir. Ayrıca, μ sonlu üretilen L -alt küme olduğundan, $Supp(\mu) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi için n pozitif tamsayı olduğunu kabul edelim. Böylece, $Supp(\mu)$ sadece sonlu birçok lineer bağımsız alt kümelere sahiptir. Bu lineer bağımsız alt kümeleri $\{x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kq_k}\}$, $1 \leq k \leq p$ şeklinde gösterelim. $1 \leq i \leq n$ için $a_i = \mu(x_i)$ ve $\mu_i = (x_i)_{a_i}$ olsun. O halde, $\mu = \bigvee_{i=1}^n \mu_i$ dir. Her $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ için $\xi_k = \langle v_k \rangle_T$ olsun ve $v_k = \bigvee_{l=1}^{q_k} \mu_{kl}$ ve $\mu_{kl} = (x_{kl})_{a_{kl}}$, $1 \leq l \leq q_k$ dır. O halde her ξ_k bağımsız üretilen TL -lineer alt uzaydır ve açıkça $\bigvee_{k=1}^p \xi_k \leq \xi$ dir.

Diğer taraftan, Teorem 2.3.3'e göre, $\xi = 1_{\{\theta\}} \vee v$ öyle ki,

$$v = \bigvee \left\{ \sum_{j=1}^m {}^{(T)}r_{ij} \mu_{ij} : r_{ij} \in R, 1 \leq j \leq m, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n \right\}.$$

μ_{ij} nin tanımından $a = T_{j=1}^m a_{ij}$ olduğunda $\sum_{j=1}^m {}^{(T)}r_{ij} \mu_{ij} = (\sum_{j=1}^m r_{ij} x_{ij})_a$ olduğu görülür. Ayrıca, $m = 1, x_{ij} = \theta$ olduğunda $\sum_{j=1}^m {}^{(T)}r_{ij} \mu_{ij} \leq 1_{\{\theta\}} \leq \bigvee_{k=1}^p \xi_k$ olduğu

açıktır. $m > 1$ veya $x_{i_j} \neq \theta$ olduğunda, $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ ve $\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kq_k} \in R$ mevcut olmalı öyle ki $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kq_k} \subseteq \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$ ve $\sum_{j=1}^m r_{i_j} x_{i_j} = \sum_{l=1}^{q_k} s_{kl} x_{kl}$ dir.

Ayrıca, $\sum_{l=1}^{q_k} s_{kl} \mu_{kl} = (\sum_{l=1}^{q_k} s_{kl} x_{kl})_b$ öyle ki $b = T_{l=1}^{q_k} a_{kl}$ dir. Açıkça, $a \leq b$ dir.

Buradan,

$$\sum_{l=1}^m {}^{(T)}r_{i_j} \mu_{i_j} = \left(\sum_{j=1}^m r_{i_j} \mu_{i_j} \right)_a = \left(\sum_{l=1}^{q_k} s_{kl} x_{kl} \right)_a \leq \left(\sum_{l=1}^{q_k} s_{kl} x_{kl} \right)_b = \sum_{l=1}^{q_k} {}^{(T)}s_{kl} \mu_{kl} \leq \xi_k.$$

Bu bize $v \leq \bigvee_{k=1}^p \xi_k$ olduğunu gösterir. Açıkça görülüyor ki, $1_{\{\theta\}} \leq \bigvee_{k=1}^p \xi_k$ dir. Bu yüzden $\xi \leq \bigvee_{k=1}^p \xi_k$ dir. Sonuç olarak, $\xi = \bigvee_{k=1}^p \xi_k$ ve ξ_k bağımsız üretilen TL -lineer alt uzaydır.

Teorem 2.3.8. V , bir sonsuz R cismi üzerinde n -boyutlu lineer uzay olsun, $n \geq 2$. Farz edelim ki $T \neq \Lambda$ olsun. O halde V , sonlu genelleştirilmiş olmayan bir TL -lineer alt uzaya sahiptir.

İspat: $T \neq \Lambda$ olduğundan $a \in L$ mevcuttur öyle ki $T(a, a) < a$ dir. $\xi = 1_{\{\theta\}} \vee a_V$ olsun. O halde $\xi \in TL(V)$ dir.

Farz edelim ki, ξ sonlu genelleştirilmiş olsun. O halde, V 'nin L -alt kümesi μ mevcuttur öyle ki $\langle \mu \rangle_T = \xi$ ve $|\mu(V)| < +\infty$ dir. Şimdi $\mu = (x_1)_{a_1} \vee \dots \vee (x_n)_{a_n}$ öyle ki $Supp(\mu) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $\mu(x_i) = a_i, i = 1, \dots, n$. Dahası, $\mu \leq \xi, a \geq a_i, i = 1, \dots, n$ dir. V 'nin boyutu ≥ 2 olduğundan ve R sonsuz olduğundan vardır $x \in V$ öyle ki $x \notin \langle x_i \rangle, i = 1, \dots, n$. Böylece, Teorem 2.3.1 den $\langle \mu \rangle_T(x) \leq T(a, a) < a$ dir. O halde, $\langle \mu \rangle_T \neq \xi$ dir ve bu bir çelişkidir. Böylece, ξ sonlu genelleştirilmiş değildir.

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Lütfi Zadeh'in 1965 yılında vermiş olduğu fuzzy alt küme tanımından sonra klasik cebirdeki küme kavramı, fuzzy alt küme tanımı ile birçok matematikçi tarafından fuzzy cebire uygulamaya çalışılmıştır. Klasik cebirdeki tanım ve teoremlere paralel fuzzy alt küme tanımı kullanılarak bu tanımları doğrulayacak teorem ve örnekler incelenmiştir. Bizde kendi çalışmamızda TL -alt modül ve TL -lineer alt uzay tanımını verdik ve bu tanımlarla klasik cebirde örtüşen teoremler ve örnekler yaptık.



4. ÖNERİLER

Klasik cebirdeki bir çok tanım fuzzy cebire aktarılmaktadır. Bu çalışmaların bir standardı olmadığı için bir çok farklı tanım verilebilmektedir. Bu anlamda fuzzy cebirin bir sonu yoktur. Verilebilecek tanımlar ve teoremlerle fuzzy cebiri çok geniş olarak incelenebilir.



KAYNAKLAR

- Abu Osman, M., 1986.** On fuzzy vector spaces via triangular norm. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 9, 33-42.
- Anthony, J.M. and Sherwood, H., 1979.** Fuzzy groups redefined. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 69, 124-130.
- Birkhoff, G., 1967.** Lattice theory. American Mathematical Society, 423 p., 7-20.
- Das, P., 1988.** Fuzzy vector spaces under triangular norms. Fuzzy Sets and Systems, 25, 73-85.
- Golan, J.S., 1989.** Making modules fuzzy. Fuzzy Sets and Systems, 32, 91-94.
- Gu, W.X. and Lu, T., 1992.** Fuzzy linear spaces. Fuzzy Sets and Systems, 46, 377-380.
- Hungerford, W.T., 1974.** Algebra. United States of America, 528 p., 23-64.
- Jacobson, N., 1994.** Basic Algebra I. W.H. Freeman and Company, 762 p., 117-141.
- Katsaras, A.K. and Liu, D.B., 1977.** Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 18, 135-146.
- Klement, E.P. Mesiar, R. and Pap, E., 2000.** Triangular Norms. Kluwer Academic Publishers, 500p., 399-403.
- Lowen, R., 1980.** Convex fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 3, 291-310.
- Lubczonok, P., 1990.** Fuzzy vector spaces. Fuzzy Sets and Systems, 38, 329-343.
- Malik, D.S. and Mordeson, J.N., 1991.** Fuzzy vector spaces. Information Science, 55, 271-281.
- Mashinchi, M. and Zahedi, M.M., 1992.** On L-fuzzy primary submodules. Fuzzy Sets and Systems, 51, 231-236.
- Mordeson, J.N., 1993.** Bases of fuzzy vector spaces. Information Sciences, 67, 87-92.
- Muganda, G.C., 1993.** Free fuzzy modules and their bases. Information Sciences, 55, 65-82.
- Negoita C.V. and Ralescu, D.A., 1975.** Applications of Fuzzy Sets and Systems Analysis. Springer, 192 p., 60-74.
- Pan, F.Z., 1987.** Fuzzy finitely generated modules. Fuzzy Sets and Systems, 51, 105-113.
- Pan, F.Z., 1988.** Fuzzy quotient modules. Fuzzy Sets and Systems, 90, 85-90.

- Pan, F.Z., 1992.** The various structures of fuzzy quotient modules. *Fuzzy Sets and Systems*, 50, 187-192.
- Pan, F.Z., 1993.** Finitely fuzzy value distribution of fuzzy vector spaces and fuzzy modules. *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 319-322.
- Rosenfeld, A., 1971.** Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35, 512-517.
- Wang, Z.D., 1994.** On L-subsets and TL-subalgebras. *Fuzzy Sets and Systems*, 68, 59-69.
- Wang, Z.D. and Yu, Y.D., 1993.** TL-subrings and TL-ideals. Part 2: Generated TL-ideals. *Fuzzy Sets and Systems*, to appear.
- Wang, Z.D. and Yu, Y.D., 1994.** TL-subrings and TL-ideals. Part 1: Basic concepts. *Fuzzy Sets and Systems*, 68, 93-103.
- Yu, Y.D., 1984a.** On the convex fuzzy sets. *Fuzzy Math*, 6, 29-40.
- Yu, Y.D., 1984b.** Fuzzy linear spaces redefined. *Fuzzy Math*, 39, 59-62.
- Yu, Y.D., 1989.** Finitely generated T-fuzzy linear spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 30, 69-81.
- Zadeh, L.A., 1965.** Fuzzy sets. *Inform and Control*, 8, 338-353.
- Zahedi, M.M., 1992.** On L-fuzzy residual quotient modules and p-primary submodules. *Fuzzy Sets and Systems*, 51, 333-344.
- Zahedi, M.M., 1993.** Some results on L-fuzzy modules. *Fuzzy Sets and Systems*, 55, 355-361.

ÖZGEÇMİŞ

Dilek YAZGAN, 15 Mayıs 1990 tarihinde Trabzon’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Trabzon’da tamamladı. 2008-2013 yıllarında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünü okudu. 2013 yılında Fatih Eğitim Fakültesinde formasyon eğitimi alarak, 2014 yılında atandığı Maçka Mehmet Akif Ersoy Anadolu Lisesinde halen matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Aynı zamanda 2014 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda başlayan tezli yüksek lisans programındaki öğrenciliği halen devam etmektedir.

