



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE LAMBERT W FONKSİYONU UYGULAMALARI

VOLKAN YAMAN



YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Bülent YILMAZ

İSTANBUL, 2019



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GEÇİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE LAMBERT W FONKSİYONU UYGULAMALARI

VOLKAN YAMAN

(520915003)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Bülent YILMAZ

İSTANBUL, 2019

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans öğrencisi Volkan Yaman'ın "Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerde Lambert W Fonksiyonu Uygulamaları" başlıklı tez çalışması, 28 Haziran 2019 tarihinde savunulmuş ve jüri üyeleri tarafından başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

Doç.Dr. Bülent YILMAZ (Danışman)

Marmara Üniversitesi (IMZA) 

Prof. Dr. A. Neşe Dernek (Üye)

Marmara Üniversitesi (IMZA) 

Prof. Dr. Mansur İsgenderoğlu (Üye)

Gebze Teknik Üniversitesi (IMZA) 

ONAY

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 24.03.2019. ..tarih ve 2019/Ş.02... sayılı kararı ile Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Adı SOYADI




ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR

Bu tez için yapılan çalışmaların bir bölümü “International Conference on Mathematics and Mathematics Education” isimli uluslararası konferansta “Solutions of Nonlinear Delay Differential Equations by Daftardar-Jafari Method” isimli bildiriyle sunulmuş ve Turkish Journal of Mathematics and Computer Science (Vol: 10, yıl:2018) dergisinde yayınlanmış, yine çalışmaların bir bölümü “International Conference on Applied Mathematics, Modeling and Life Sciences” isimli uluslararası konferansta “Application of Adomian Decomposition Method to Predator-Prey Model With Time Delay” isimli bildiriyle sunulmuştur.

Yüksek lisans süresince gösterdiği anlayış ve yönlendirmeleri için değerli hocam Doç. Dr. Bülent Yılmaz’a ve verdikleri destek ve motivasyon için aileme teşekkür ederim.

Haziran, 2019

Volkan Yaman

İÇİNDEKİLER

| | |
|---|-----------|
| ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR | i |
| İÇİNDEKİLER | ii |
| ÖZET | iv |
| ABSTRACT | v |
| SEMBOLLER | vi |
| KISALTMALAR | vii |
| ŞEKİL LİSTESİ | viii |
| TABLO LİSTESİ | x |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 1.1. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlere Giriş | 1 |
| 1.2. Tanımlamalar ve Sınıflandırmalar | 3 |
| 1.3. Gecikmeli Diferansiyel Denklem Probleminin Tanımı | 5 |
| 1.3.1. Adımlar yöntemi | 6 |
| 2. MATERYAL VE YÖNTEM | 9 |
| 2.1. Lambert W Fonksiyonu | 9 |
| 2.2. Adi Diferansiyel Denklemlerden Bazı Tanımlar | 14 |
| 2.3. Diferansiyel Denklemlerde Üstel Matris Yöntemi | 16 |
| 2.4. Matris Fonksiyonları | 19 |
| 3. BULGULAR VE TARTIŞMA | 23 |
| 3.1. Belirli Sınıf Gecikmeli Diferansiyel Denklemin Çözümünde | |

| | |
|---|-----------|
| Lambert W Fonksiyonu Kullanımı | 23 |
| 3.1.1. Lambert W fonksiyonunun skaler kullanımı | 23 |
| 3.1.2. Matris Lambert W fonksiyonunun kullanımı | 39 |
| 4. SONUÇLAR | 57 |
| KAYNAKLAR | 59 |
| ÖZGEÇMİŞ | |



ÖZET

Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerde Lambert W Fonksiyonu Uygulamaları

Gecikmeli diferansiyel denklemler, sistemlerin davranışlarındaki değişim karakterinin sadece şimdiki durumlarına değil aynı zamanda geçmişteki durumlarına da bağlı olabileceği yaklaşımının matematiksel olarak modellenmesine olanak sağlayan bir denklem grubudur. Bu denklem grubunun çözüm metotları ve çözümlerin kalitatif özellikleri adi diferansiyel denklemlerdekinden farklıdır.

Tezin ilk bölümünde gecikmeli diferansiyel denklemlerin örnek modellerle tanıtılması, sınıflandırılması ve temel çözüm metotlarından olan adımlar yönteminin bir uygulamayla açıklanması yapılacaktır.

Tezin ikinci bölümünde Lambert W fonksiyonu ve bu fonksiyonun gecikmeli diferansiyel denklemlerdeki uygulamalarında kullanılacak olan üstel matris yöntemi ve matris fonksiyonları kavramları tanıtılacaktır. Yine bu bölümde adi diferansiyel denklemlerde de kullanılan, gecikmeli diferansiyel problemlerinin çözümlerinin kalitatif değerlendirmesini yapabilmek için gereken kararlılık ve salınımlılık tanımları verilecektir.

Tezin üçüncü bölümünde Lambert W fonksiyonunun belirli sınıf bir gecikmeli diferansiyel denklem problemine uygulanması incelenecektir. Örnek skaler ve sistem gecikmeli diferansiyel denklem problemleri üzerinde farklı parametrelerle Lambert W fonksiyonunun uygulanma adımları ve çözümleri incelenecektir. Çözümleri daha anlaşılır şekilde ortaya koyabilmek için sadece sembolik gösterim değil problemin çözüm adımlarındaki nümerik değerler de bazı problemlerde verilecektir. Skaler problem ve sistem problem için Lambert W fonksiyonu dallarına ait çözümlerinin başlangıç değer fonksiyonuyla denkleştirme metodu anlatılacak ve örnek uygulama gösterilecektir.

Sonuç bölümünde tezin kritik tespitleri tekrar ifade edilecek, tezin sunduğu yeniliğin anlamı, önemi ve kısıtları tekrar belirtilecektir.

ABSTRACT

Applications of Lambert W Function In Delay Differential Equations

Delay differential equations are class of equations that can be considered as a tool for the mathematical modelling of the approach of not admitting the present state of the system as the sole criteria but presuming the historical states of the systems to have effect on the instantaneous character of change of the system as well. The solution methods and qualitative properties of delay differential equations are different from the ordinary differential equations.

In the 1st chapter of the thesis delay differential equations will be introduced through some sample models. Its classification will be given and one of its main solution methods – method of steps – will be explained on an application.

In the 2nd chapter of the thesis Lambert W function will be introduced together with the matrix exponential method and functions of matrices concepts which will have part on the application steps of Lambert W function on delay differential equations. Also in this chapter stability and oscillation concepts of ordinary differential equations will be reviewed for being a basis for the qualitative analysis of the solutions of the delay differential problems.

In chapter 3 it will be reviewed how Lambert W function is applied to a specific class of delay differential equations. It will be analyzed the steps of applying the Lambert W function on scalar and system delay differential equations through examples and solutions derived by the method. To make the solutions of the method more apparent not only the symbolic results will be shown but also the numerical values of the application steps will be given in some examples. For both scalar and system problems, the method of equating the Lambert W function branches to the initial function will be explained and applied on a sample problem.

In the results section key findings of the thesis will be rephrased and the importance, meaning and constraints of the original output of the thesis will be restated.

SEMBOLLER

$W_k(z)$: Lambert W fonksiyonun k. dalı.

\dot{y} : y nin 1. türevi.

\ddot{y} : y nin 2. türevi.

$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$: $f(x)$ in x' e göre n. mertebeden türevi.

$\text{diag}[\mathbf{J}_k]$: Bir köşegen matrisin köşegen elemanlarının \mathbf{J}_k blokları olması.

$f^{(h)}(u)$: f in h. mertebeden türevinin u noktasındaki değeri

i : İmajiner birim

KISALTMALAR

GDD : Gecikmeli Diferansiyel Denklem

Cos : Kosinüs fonksiyonu

Sin : Sinüs fonksiyonu



ŞEKİL LİSTESİ

| | | |
|------------|---|----|
| Şekil 2.1 | Sıvı karışım modeli – tuzlu su tankı | 1 |
| Şekil 2.2 | $f(a)$ 'nın yerel minimum ve büküm noktaları | 10 |
| Şekil 2.3 | $f(a)$ 'nın tersi olarak $W(z)$ | 10 |
| Şekil 2.4 | W fonksiyonun bazı dallarının değer kümesi | 13 |
| Şekil 2.5 | $\text{Re}[W_k]$ | 14 |
| Şekil 2.6 | İşaret değiştirmeyen salınım örneği | 16 |
| Şekil 3.1 | (3.10) un $N=2$ için Lambert çözümü ve NDSolve çözümü | 32 |
| Şekil 3.2 | (3.10) un $N=5$ için Lambert çözümü ve NDSolve çözümü | 33 |
| Şekil 3.3 | (3.10) un $N=2$ için Lambert çözümü ve NDSolve çözümü arasındaki fark..... | 33 |
| Şekil 3.4 | (3.10) un $N=20$ için Lambert çözümü ve NDSolve çözümü arasındaki fark | 34 |
| Şekil 3.5 | (3.10) un $N=200$ için Lambert çözümü ve NDSolve çözümü arasındaki fark | 34 |
| Şekil 3.6 | (3.10) un $r = \frac{\pi}{2} + 0.1$ için Lambert ve NDSolve çözümleri..... | 35 |
| Şekil 3.7 | (3.10) un $r = \frac{\pi}{2} - 0.1$ için Lambert ve NDSolve çözümleri | 35 |
| Şekil 3.8 | (3.1) de $r = 1$ için salınımsız çözüm alanı | 37 |
| Şekil 3.9 | (3.1) de $r = 1$, $a_d = -1$, $a = 2$ için salınımsız çözüm alanı | 37 |
| Şekil 3.10 | (3.12) de $a_d = -1.1$ | 38 |
| Şekil 3.11 | (3.12) de $a_d = -0.9$ | 39 |
| Şekil 3.12 | (3.17) de $N=1$ için Lambert $y_1(t)$ ve NDSolve 1. Komponent | 48 |
| Şekil 3.13 | (3.17) de $N=1$ için Lambert $y_2(t)$ ve NDSolve 2. Komponent | 48 |
| Şekil 3.14 | (3.17) de $N=10$ için Lambert $y_1(t)$ ve NDSolve 1. Komponent | 49 |
| Şekil 3.15 | (3.17) de $N=10$ için Lambert $y_2(t)$ ve NDSolve 2. Komponent | 49 |
| Şekil 3.16 | (3.17) Lambert $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin $t = 20$ için parametrik grafiği | 50 |
| Şekil 3.17 | (3.17) Lambert $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin $t = 60$ için parametrik grafiği | 50 |
| Şekil 3.18 | (3.17) de $r = 0.5$ için Lambert $y_1(t)$ ve NDSolve 1. Komponent | 51 |

| | | |
|------------|--|----|
| Şekil 3.19 | (3.17) de $r = 0.5$ için Lambert $y_2(t)$ ve NDSolve 2. Komponent | 51 |
| Şekil 3.20 | (3.17) $r = 0.5$ için Lambert $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin parametrik grafiği | 52 |
| Şekil 3.21 | (3.17) de $r = 2$ için Lambert $y_1(t)$ ve NDSolve 1. Komponent | 52 |
| Şekil 3.22 | (3.17) de $r = 2$ için Lambert $y_2(t)$ ve NDSolve 2. Komponent | 53 |
| Şekil 3.23 | (3.17) $r = 2$ için Lambert $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin parametrik grafiği | 53 |
| Şekil 3.24 | (3.24) de Lambert $y_1(t)$ ve NDSolve 1. Komponent | 55 |
| Şekil 3.25 | (3.24) de Lambert $y_2(t)$ ve NDSolve 2. Komponent | 55 |



TABLO LİSTESİ

| | | |
|-----------|---|----|
| Tablo 3.1 | (3.10) da $N=2$ için \mathbf{Y} | 28 |
| Tablo 3.2 | (3.10) da $N=2$ için Φ | 29 |
| Tablo 3.3 | (3.10) da $N=2$ için \mathbf{C} | 29 |
| Tablo 3.4 | (3.17) nin \mathbf{S}_k değerleri | 41 |
| Tablo 3.5 | (3.10) da $N=1$ için \mathbf{T}' | 44 |



1. GİRİŞ

1.1. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlere Giriş

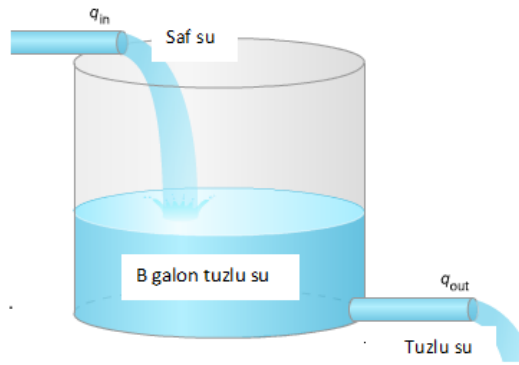
Bir çok çalışma alanında, incelenen sistemlerin nedensellik ilkesine göre hareket ettiği yani sistemlerin gelecekteki durumlarının geçmiş durumlarından bağımsız olduğu ve sadece şimdiki durumlarıyla belirlendiği kabul edilir. Sistemlerin çoğunlukla, şimdiki durum ve değişim hızlarını baz alan denklemlere göre hareket ettiği düşünülür. Bu denklemler adi ve parçalı diferansiyel denklemler olmaktadır. Sistemlerin işleyişleri daha yakından incelendiğinde gelecekteki davranışlarla ilgili olarak sadece şimdiki zamanı baz alan nedensellik ilkesi yaklaşımının aslında gerçek duruma sadece yaklaşık bir izahat getirdiği farkedilir [1].

Doğada kendiliğinden var olan ve insanlar tarafından biyoloji, tıp, kimya, fizik, mühendislik, ekonomi vb. alanlarda geliştirilmiş bir çok proseste geçmiş durumlara bağımlılık yani zaman gecikmesi kavramı bulunmaktadır [2].

Zaman gecikmesi kavramının belirgin olarak görüldüğü 2 örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 1:

Basit bir sıvı karışım modeli oluşturalım [3].



Şekil 1.1 Sıvı karışım modeli – tuzlu su tankı

Bir tankta B galon tuzlu su bulunsun. Bu tankta Şekil 1.1 de görüldüğü gibi üstteki bir musluktan q galon /dk hızında saf su ekleniyor, alttaki musluktan da yine q galon /dk hızında tuzlu su tahliye ediliyor olsun. Tanktaki suyun, tuzun homojen dağılımını

sağlamak için sürekli karıştırıldığı varsayalım. Tanktaki tuz miktarının değişim hızı şu şekilde modellenebilir;

$y(t)$: t anında tanktaki tuzlu sudaki tuz miktarı (galon cinsinden),

olmak üzere

$$\dot{y}(t) = -q \frac{y(t)}{B}$$

yazılır. Tanktaki tuz miktarı sürekli azalacağından denklemde (-) bulunmaktadır. $\frac{y(t)}{B}$ tuzlu sudaki tuz oranı, q ile çarpıldığında dakikada tanktan tahliye olan tuz miktarını vermektedir.

Bu denklemde t anındaki tanktan atılan tuz miktarı t anında tanka eklenen saf suyun *aynı anda* homojen olarak tüm tanka karıştığı varsayımına dayanır. Oysa gerçek durumda tanka eklenen saf suyun tuzlu suyla homojen karışımı için belirli bir sürenin geçmesi gerekecektir. Bu süre göz önüne alındığında tahliye edilen tuzlu su içindeki tuz oranı $\frac{y(t-r)}{B}$ olur. Burada $r > 0$ tanka eklenen saf suyun tuzlu suyla karışımı için gerekli süredir. Yani tanktan ayrılan sudaki tuz oranı r dakika öncesinin tuzlu su oranı olur. Bu durumda tanktaki tuz değişim miktarı şu şekilde modellenir;

$$\dot{y}(t) = -q \frac{y(t-r)}{B}$$

Bu denklemde $\frac{q}{B}$ sabittir. Yani denklem $\dot{y}(t) = -c y(t-r)$ şeklinde yazılır. Bu yapıdaki lineer, skaler gecikmeli diferansiyel denklemlerin örnek problemleri 1.3.1 de ve 3. bölümde incelenecektir.

Örnek 2:

Duş alan bir kişinin suyun sıcaklığını istediği seviyeye getirme sürecini modelleyelim.

T_d : istenen su sıcaklığı,

ΔT : suyun sıcaklık değişimi,

Δa : musluğun sıcak / soğuk su vanasının çevrim açısı,

k : musluğun vanasının çevrim açısının suyun sıcaklığında yaptığı değişimin katsayısı,

$T_v(t)$: vana çıkışındaki suyun sıcaklığı,

r : suyun vana çıkışından duş alan kişiye temas ettiği ana kadar geçen süre,

β : duş alan kişinin hissettiği su sıcaklığıyla istediği su sıcaklığının arasındaki farka göre suyun sıcaklığını değiştirmek için vanayı ne kadar çevireceğinin katsayısı.

Heyecanlı tepkiler veren kişilerin hissettiği su sıcaklığının istediği sıcaklıktan farklı olduğunda vanayı daha çok çevirmeye, yani daha yüksek β değerine sahip olmaya, daha soğuk kanlı kişilerinse sıcaklık farkından dolayı vanayı daha az çevirmeye, yani daha düşük β değerine sahip olmaya meyilli oldukları düşünülür.

Bu parametrelerle ilk olarak vananın çevrim açısındaki değişim

$$\Delta \dot{a} = -\beta (T_v(t-r) - T_d)$$

denklemleriyle ifade edilir. Buradan, vana çıkışındaki suyun sıcaklığının değişimi de

$$\dot{T}_v(t) = k \Delta \dot{a} = -k \beta (T_v(t-r) - T_d)$$

denklemleriyle verilir [4]. Bu denklemlerde t anında vanadan çıkacak suyun sıcaklığındaki değişimin vanadan $(t-r)$ anında çıkan suyun sıcaklığına göre belirlendiğini görüyoruz. Yani bu denklemle suyun gelecekteki durumunun (sıcaklığının), suyun şimdiki durumuna değil r süre önceki durumuna bağlı olması modellenmiş olmaktadır.

1.2. Tanımlamalar ve Sınıflandırmalar

Adi diferansiyel denklemler bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin sadece aynı t anı için değerlendirildiği diferansiyel denklem sınıfıdır. $F(t, y, \dot{y}, \ddot{y})=0$ şeklindeki denklemler adi diferansiyel denklemlerdendir.

Fonksiyonel denklemler bilinmeyen fonksiyonun farklı argümanlarla denklemde yer aldığı denklem sınıfıdır.

$y(2t) + y(3t) = 1$, $y(t) = t^2 y(t+1) - y(t-2)$ şeklindeki denklemler fonksiyonel denklemler olarak adlandırılır. Fonksiyonel denklemlerdeki bilinmeyen fonksiyonun argümanlarındaki farklılıkların sabit sayılar oldukları durumda (yani $y(t) = t^2 y(t+1) - y(t-2)$ örneğinde olduğu gibi) bu alt denklem grubuna *fark denklemleri* adı verilir.

Fonksiyonel diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemlerle fonksiyonel denklemler kavramlarının birleştirilmesiyle oluşan diferansiyel denklem sınıfıdır [3].

Fonksiyonel diferansiyel denklemlerdeki bilinmeyen fonksiyonun farklı argümanları normal argümanı küçültecek şekildeyse bu denklemlere gecikmeli diferansiyel denklemler (Delay differential equations) adı verilir. Gecikmeli diferansiyel denklemler 3 sınıfa ayrılır:

1. Zaman gecikmeli diferansiyel denklemler

Bilinmeyen fonksiyonun t anındaki bir türevinin, bilinmeyen fonksiyonun ve onun daha düşük mertebeden türevlerinin t den farklı argümanlarıyla ifade edildiği denklemlerdir.

$$\dot{y}(t) = -y(t-1)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{y}\left(\frac{t}{2}\right) + \dot{y}(t) - y(t-1)$$

denklemleri bu sınıfın örnekleridir. Görüleceği üzere denklemlerin sol tarafındaki terim farklı argümanı olmayan en yüksek dereceden türevli terimdir.

2. Nötral (yansız) tip gecikmeli diferansiyel denklemler

Bilinmeyen fonksiyonun t anındaki bir türevinin, fonksiyonun farklı argümanlı fakat onunla aynı ve daha düşük mertebedeki türevleri cinsinden ifade edildiği denklemlerdir.

$$\dot{y}(t) = -\dot{y}(t-1)$$

$$\dot{y}(t) = y(t) - y\left(\frac{t}{2}\right) + \dot{y}(t-1)$$

denklemleri bu sınıfın örnekleridir.

3. İleri tip gecikmeli diferansiyel denklemler

Denklemdaki en yüksek mertebeden türevin, denklemdaki bilinmeyen fonksiyonun farklı argümanlı teriminin olduğu denklemlerdir.

$$\dot{y}(t-1) = 2y(t) - y(t-2)$$

[4,5]

Gecikmeli diferansiyel denklemler *gecikme tipine* göre de 2 sınıfa ayrılır;

1. Ayrık gecikmeli (discrete delay) diferansiyel denklemler

$r > 0$ olmak üzere $y(t - r)$ tipindeki gecikmelere ayrık gecikme denir.

2. Dağılımlı gecikmeli (distributed delay) diferansiyel denklemler

$0 \leq r \leq \infty$ olmak üzere

$$\int_{t-r}^t k(t-s) y(s) ds = \int_0^r k(z) y(t-z) dz$$

tipindeki gecikmelere dağılımlı gecikme denir. Bu gecikme aslında $y(t-z)$ gecikmelerinin k fonksiyonuyla ağırlıklandırılmış ortalamasıdır.

Dağılımlı gecikmelerin daha gerçekçi olduğu fakat dağılım kerneli olarak adlandırılan k nin pratikte tespitinin çok zor olduğu belirtilmiştir [6].

Biz bu çalışmamızda ayrık gecikmeli - zaman gecikmeli diferansiyel denklemler üzerinde çalışacağız. İleride gecikmeli diferansiyel denklem (GDD) ifadesi kullanıldığında ayrık gecikmeli - zaman gecikmeli diferansiyel denklem sınıfı anlaşılmalıdır.

1.3. Gecikmeli Diferansiyel Denklem Probleminin Tanımı

Bir GDD genel olarak şu şekilde ifade edilebilir;

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t-r_1), y(t-r_2)\dots) \quad , \quad t > t_0 \quad 1.1$$

$$y(t) = \theta(t) \quad , \quad t_0 - r \leq t \leq t_0$$

Burada $r_j > 0$ gecikme terimleri olarak adlandırılır ve sabit sayılardır. $\theta(t)$ başlangıç fonksiyonu olarak adlandırılır ve $[t_0 - r, t_0]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. Burada $r = \text{Maks}[r_j]$ dir.

GDD nin çözümü (1.1) ve başlangıç koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olacaktır. Genelde $y(t_0+) = \theta(t_0)$ olarak kabul edilir [7].

1.3.1. Adımlar yöntemi

Bu yöntemde (1.1) deki GDD problemi $Min[r_i]$ aralığında art arda integraller alınarak çözülür. Bu durumda denklemde gecikme terimi yokmuş gibi integraller alınmış olur.

Basit bir problemde adımlar yönteminin uygulamasını inceleyelim:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t-r_1), y(t-r_2), \dots) = -y(t-1) \quad , \quad t > 0 \quad 1.2$$

$$y(t) = \theta(t) = 1 \quad , \quad -1 \leq t \leq 0$$

verilmiş olsun.

$t \in (0, 1]$ için

(1.2) denkleminin iki tarafının $(0,1)$ aralığında integrali alınır;

$$\int_0^t \dot{y}(s) \, ds = \int_0^t -y(s-1) \, ds$$

$t \in (0, 1]$ iken $y(t-1) = \theta(t) = 1$ ve $y(0) = 1$ olacaktır. Buna göre

$$\int_0^t \dot{y}(s) \, ds = y(t) - y(0) = - \int_0^t \theta(s) \, ds = - \int_0^t 1 \, ds$$

$$y(t) = -t + 1$$

elde edilir. Bunun anlamı $t \in (0, 1]$ aralığında çözüm fonksiyonu $y(t) = -t + 1$ dir.

$t \in (0, 1]$ aralığı için bulunan çözüm kullanılarak bir sonraki aralık için aynı işlem tekrarlanır.

$t \in (1, 2]$ için

$$\int_1^t \dot{y}(s) \, ds = \int_1^t -y(s-1) \, ds$$

$t \in (1, 2]$ iken $y(t-1) = -(t-1) + 1 = -t + 2$ dir. Bir önceki aralığın çözümünden $y(1) = 0$ bulunur. Değerler yerine konduğunda;

$$y(t) - 0 = \frac{t^2}{2} - 2t - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}$$

elde edilir. Yani $t \in (1, 2]$ aralığında çözüm fonksiyonu $y(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}$ dir.

Aynı işlem bir sonraki adım için devam eder;

$t \in (2, 3]$ için

$$\int_2^t \dot{y}(s) \, ds = \int_2^t -y(s-1) \, ds$$

$t \in (2, 3]$ iken $y(t-1) = \frac{(t-1)^2}{2} - 2(t-1) + \frac{3}{2}$ ve $y(2) = -\frac{1}{2}$ dir. Buna göre;

$$y(t) + \frac{1}{2} = - \int_2^t \left(\frac{(s-1)^2}{2} - 2(s-1) + \frac{3}{2} \right) \, ds$$

$$y(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} - 4t + \frac{17}{6}$$

bulunur. İşlem 1 aralıklı olarak bu şekilde devam ettirilebilir. Çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibi parçalı bir fonksiyon olarak yazılır;

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-1, 0] \\ -t + 1, & t \in (0, 1] \\ \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}, & t \in (1, 2] \\ -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} - 4t + \frac{17}{6}, & t \in (2, 3] \\ \vdots & \end{cases}$$

$y(t)$ çözüm fonksiyonunun kesim noktaları olan $t = 0, 1, 2, \dots$ de sürekli olduğu fakat bu noktalarda, k , adımlar yönteminin kaçınıcı adımı olduğunu göstermek üzere, sırasıyla $k = 1, 2, 3, \dots$ seviyelerinden türevlerinin süreksiz olduğu fakat daha düşük seviyelerdeki türevlerinin sürekli olduğu görülür. Yani 1. kesim noktası olan $t = 0$ da 1. seviyeden türev süreksiz, 2. kesim noktası $t = 1$ de 2. seviyeden türev süreksiz fakat 1. seviyeden türev sürekli, $t = 2$ de 3. seviyeden türev süreksiz fakat 1. ve 2. seviyelerden türevler

sürekli. Bu durum başlangıç fonksiyonu $\theta(t)$ ve f sürekli olsalar da bu şekilde devam eder. Yani t büyüdükçe çözüm fonksiyonu kesme noktalarında daha pürüzsüz olacaktır.

Adımlar yöntemiyle her türlü GDD problemi için art arda integraller almak suretiyle çözüm oluşturulabilir. Bazı durumlarda problemin içerdiği fonksiyona ve başlangıç fonksiyonuna bağlı olarak integralinin alınması çok zor olan veya mümkün olmayan durumlara denk gelinebilir. Gecikme terimi çok küçük olan GDD lerde art arda alınması gereken integral sayısı çok fazla olacağından bu tip problemler için de adımlar yöntemi efektif bir metot olmayabilir.

Tez çalışmamızda, bir çok alanda kaşımıza çıkan belirli bir GDD sınıfının skaler ve sistem problemlerinin Lambert W fonksiyonuyla çözüm metotları tanıtılacak, örnek problemlerin çözüm adımları incelenecek ve çözümlerin kalitatif değerlendirmeleri yapılacaktır. Lambert W fonksiyonunun bu sınıf problemler için efektif bir çözüm metodu sunduğu gösterilecektir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Lambert W Fonksiyonu

a ve z kompleks sayılar olmak üzere

$$f(a) = a e^a = z \quad 2.1$$

denkleminde $a = W(z)$ çözümünü veren W fonksiyonuna **Lambert W** fonksiyonu adı verilir. W fonksiyonu transandantal bir fonksiyondur. (2.1) denklemi

$$W(z) e^{W(z)} = z$$

şeklinde de yazılabilir. Bu denklemin her biri W fonksiyonunun bir dalını (branch) oluşturan sonsuz sayıda çözümü vardır. Çözümlerin büyük çoğunluğu da kompleks değerlidir. Yani W fonksiyonu çoğul değerli kompleks bir fonksiyondur.

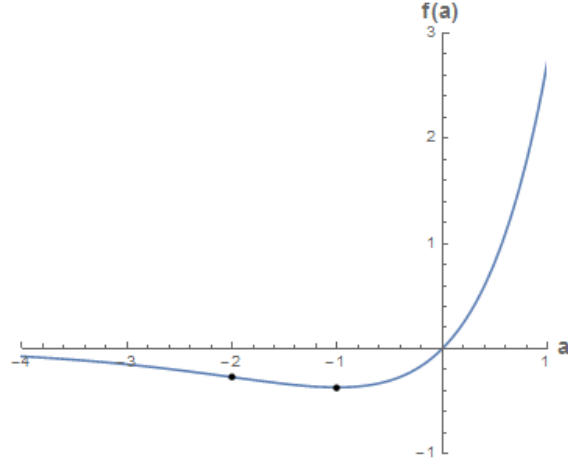
$W(z)$ fonksiyonu $f(a) = a e^a$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olarak da değerlendirilebilir. $f(a) = a e^a$ fonksiyonunun a ya göre 1. türevi alınıp 0 a eşitlendiğinde yerel minimum noktası

$$\dot{f}(a) = e^a + a e^a = e^a (1 + a) = 0 \rightarrow a = -1$$

ve 2. türev alınıp sıfıra eşitlendiğinde büküm noktası

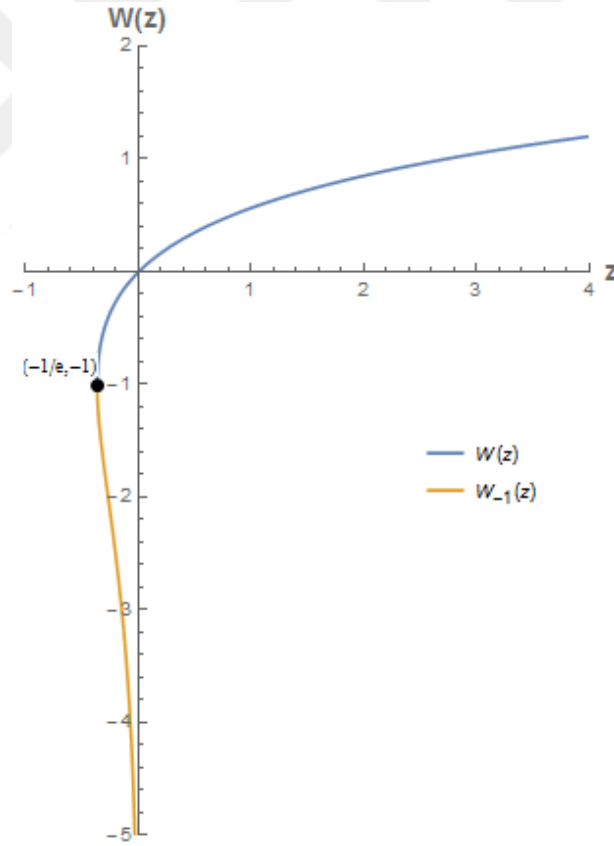
$$\ddot{f}(a) = e^a + e^a + a e^a = e^a (2 + a) = 0 \rightarrow a = -2$$

olarak bulunur. $f(a) = a e^a$ fonksiyonunun reel tanım kümesindeki grafiği şu şekildedir;



Şekil 2.2 $f(a)$ 'nın yerel minimum ve büküm noktaları

$f(a)$ fonksiyonunun reel tanım kümesinde, yani z reel eksen üzerinde olduğunda, $f(a)$ 'nın tersi olarak $W(z)$ fonksiyonunun grafiği şu şekildedir;



Şekil 2.3 $f(a)$ 'nin tersi olarak $W(z)$

Burada $-1/e \leq z \leq 0$ olduğunda $W(z)$ ' nin iki farklı değer alabildiği görülmektedir. $-1 \leq W(z)$ olan dal $W_0(z)$, $-1 \geq W(z)$ olan dal da $W_{-1}(z)$ olarak adlandırılır. $z = -1/e$ dallanma noktasıdır.

$W_0(z)$ dalına ana dal (principle branch) ismi de verilir. Karışıklık olmayacak durumlarda ana dal indissiz şekilde yani $W(z)$ olarak da gösterilebilir [8].

Şekil 2.3 de ana dal $W_0(z)$ ve $W_{-1}(z)$ dalı görülmektedir.

W fonksiyonunun sonsuz sayıda dalı vardır. Bu dallar tamsayılarla indislenir. W fonksiyonu cinsinden (2.1) denkleminin sonsuz sayıdaki çözümü

$$a = W_k(z)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

ile gösterilir.

W fonksiyonunun ana dalını Lagrange – Bürmann serisi olarak ifade etmek mümkündür.

Lagrange – Bürmann Tersini Alma Formülü

$y = h(x)$, h fonksiyonu x_0 da analitik ve $\frac{dh}{dx}(x_0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $y = h(x_0)$ komşuluğunda $h(x)$ in tersi ve $g(h(x_0)) = x_0$ olan $g(y) = x$ fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon $x = x_0$ da Lagrange – Bürmann serisi olarak şu şekilde açılır ;

$$x = g(y) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y - h(x_0))^n}{n!} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{x - x_0}{h(x) - h(x_0)} \right)^n \right] \right]$$

Lambert W fonksiyonunun ana dalını Lagrange – Bürmann serisi olarak ifade edebilmek için tersi alınacak $z = f(a) = a e^a$ fonksiyonunda yukarıdaki tanıma göre $z \equiv y$, $f \equiv h$, $a \equiv x$ ve ters fonksiyon Lambert $W \equiv g$ olduğu görülür. $a_0 = 0$ da $f(a) = a e^a$ analitik ve $\dot{f}(a) = e^a + a e^a \Rightarrow \dot{f}(0) = 1 \neq 0$ olduğundan $W(z) = a$ fonksiyonu $a_0 = 0$ noktasında Lagrange – Bürmann serisi olarak açılabilir.

$$a = W(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - f(a_0))^n}{n!} \left[\lim_{a \rightarrow a_0} \left[\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left(\frac{a - a_0}{f(a) - f(a_0)} \right)^n \right] \right]$$

$a_0 = 0$ ve $f(0) = 0$ ve $f(a) = a e^a$ yerine konduğunda

$$a = W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} e^{-a n} \right] \right]$$

elde edilir.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} e^{-a n} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} [(-n)^{n-1} e^{-a n}] = (-n)^{n-1}$$

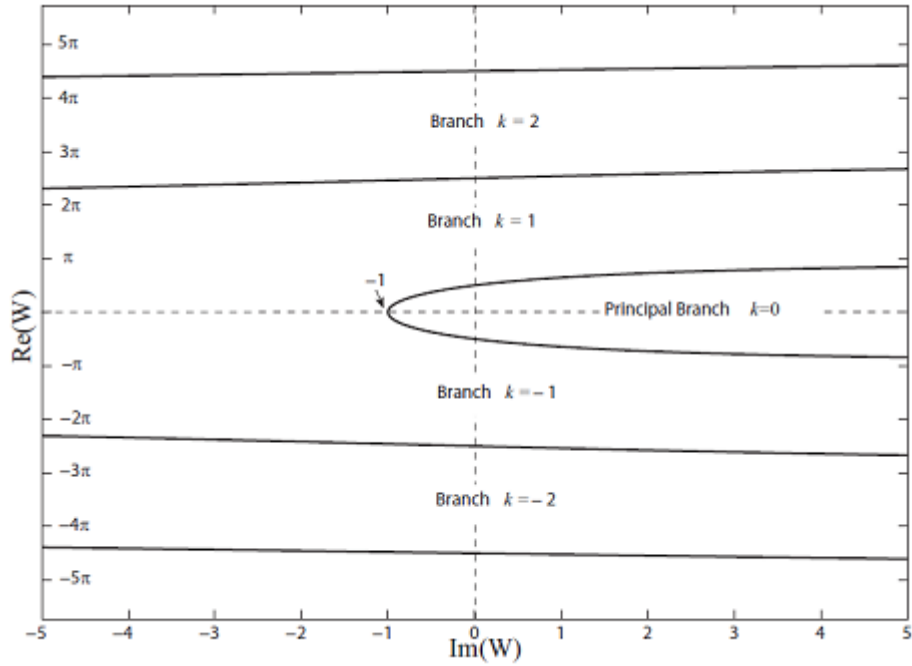
olduğundan;

$$a = W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} z^n}{n!}$$
$$a = W(z) = z - z^2 + \frac{3}{2} z^3 - \frac{8}{3} z^4 + \dots$$

olarak bulunur.

Lambert W fonksiyonunun diğer dallarının hesaplanması [9] da gösterilmiştir.

W fonksiyonunun sadece ana dal ve W_{-1} dalı reel değerler alır. Diğer dalları kompleks değerlerlidir. W fonksiyonunun tanım kümesi tüm kompleks düzlemdir. W fonksiyonunun her bir dalının reel tanım kümesine ait değer kümesi de aşağıdaki grafikte gözükür.

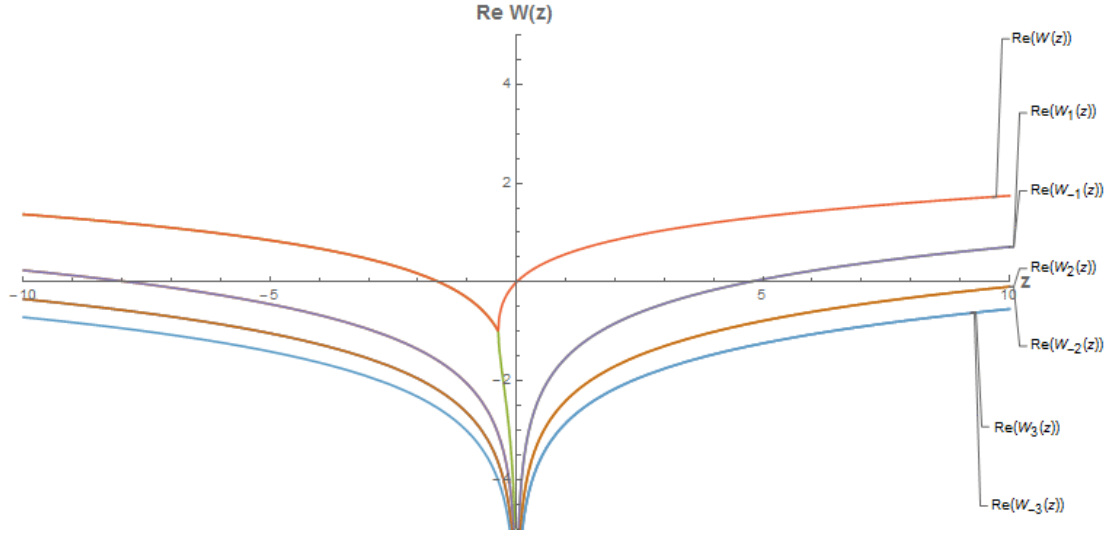


Şekil 2.4 W fonksiyonun bazı dallarının değer kümesi [10]

Görüldüğü gibi W fonksiyonun değer kümesi reel eksene göre simetriktir.

W fonksiyonunun dallarının reel kısımları kararlılık analizleri açısından önemlidir.

Aşağıdaki Şekil 2.5 de görüldüğü üzere ana dalın aldığı değerlerin reel kısmı diğer dalların değerlerinin reel kısmından her zaman daha büyüktür. Sadece W_0 ana dalını W_{-1} dalından ayıran kesim şeritinde (branch cut) $\text{Re}[W_0]$ ile $\text{Re}[W_{-1}]$ eşit olup diğer dallardan daha büyüktür [11].



Şekil 2.5 $Re[W_k]$, $k=0, \pm 1, \pm 2, -3$

W fonksiyonunun z ye göre türevi $W(z) e^{W(z)} = z$ eşitliğinin iki tarafının zincir kuralına göre türevinin alınmasıyla bulunur;

$$\dot{W}(z) e^{W(z)} + W(z) \dot{W}(z) e^{W(z)} = 1$$

$$\dot{W}(z) = \frac{1}{e^{W(z)} (1 + W(z))}$$

2.2. Adi Diferansiyel Denklemlerden Bazı Tanımlar

Adi diferansiyel denklemlerde de kullanılan çözümün kararlılığı ve salınımlılığı kavramları GDD lerde de benzer şekilde kullanılacağından bu bölümde bu kavramlar açıklanacaktır.

Çözümün Kararlılığı:

λ bir sabit olmak üzere

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t)$$

$$y(0) = y_0$$

verilmiş olsun. Bu adi diferansiyel denklemin çözümü

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

olur. Bu çözümde

1. λ reel ve $\lambda > 0$ ise çözüm kararsız,
2. λ reel ve $\lambda = 0$ ise çözüm kararlı,
3. λ reel ve $\lambda < 0$ ise çözüm asimptotik kararlı,
4. λ kompleks ve $Re[\lambda] > 0$ ise çözüm kararsız salınımlı (sönümsüz),
5. λ kompleks ve $Re[\lambda] = 0$ ise çözüm periyodik salınımlı,
6. λ kompleks ve $Re[\lambda] < 0$ ise çözüm asimptotik kararlı salınımlı (sönümlü),

olarak tanımlanır.

Çözümün Salınımlılığı (Osilasyonu):

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

şeklinde verilmiş bir çözüm olsun. $\lambda = a + i b$ şeklinde kompleks değerli olduğunda

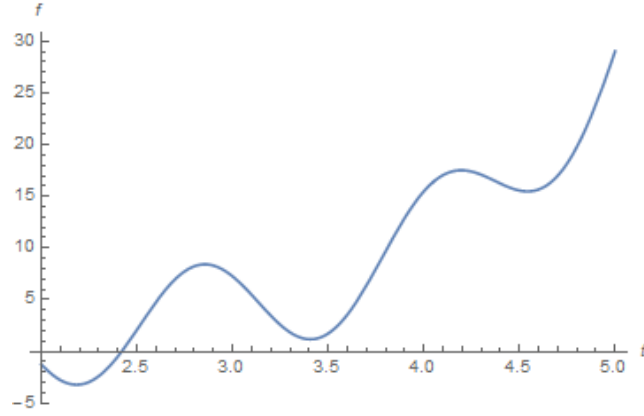
Euler' in $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ açılımına göre

$$y(t) = e^{(a+ib)t} = e^{at} e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \quad 2.2$$

olur. \cos ve / veya \sin fonksiyonlarını içeren fonksiyonlar salınımlı fonksiyonlardır.

(2.2) de $a < 0$ olduğunda çözüm sönümlü salınımlı, $a > 0$ olduğunda sönümsüz salınımlı olarak tanımlanır.

Biz bu çalışmada salınımlı (osilasyonlu) çözüm tanımını sadece periyodik ve belirli aralıklarla pozitif ve negatif değerler alan (işaret değiştiren) fonksiyonlar için değil aynı zamanda periyodik ve işaret değiştiren fonksiyon olmasa da 1. türevi işaret değiştiren fonksiyonlar için de kullanacağız. Bu şekilde salınımlı olarak tanımladığımız örnek bir fonksiyon grafiği şu şekildedir;



Şekil 2.6 İşaret değiştirmeyen salınım örneği

2.3. Diferansiyel Denklemlerde Üstel Matris Yöntemi

Bu ve bundan sonraki bölümlerde vektör ve matrisler kalın harflerle gösterilecektir.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y}$$

2.3

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

\mathbf{y} bir vektör, \mathbf{A} bir kare matris olmak üzere (2.3) diferansiyel denklem sisteminin çözümü skaler durumdakine benzer şekilde

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0$$

olarak ifade edilebilir. Burada $e^{\mathbf{A}t}$ matrisi ayrıca sütunları (2.3) ün lineer bağımsız çözümleri olan *temel matrise* (*fundamental matrix*) eşittir.

$e^{\mathbf{A}t}$ kare matrisi, skaler e^{at} tanımına da uygun olarak

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!} \quad 2.4$$

şekilde tanımlanır. Bu serideki her bir terim \mathbf{A} matrisiyle aynı boyuttadır.

$e^{\mathbf{A}t}$ nin türevi;

$$\frac{d e^{A t}}{d t} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3 t^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^4 t^3}{3!} + \dots = \mathbf{A} \left(\mathbf{I} + \mathbf{A} t + \frac{(\mathbf{A} t)^2}{2} + \dots \right) = \mathbf{A} e^{A t}$$

şeklindedir. Dolayısıyla $e^{A t}$ nin (2.3) denkleminin çözümü olduğu görülür.

Başlangıç koşullarına göre çözüm $e^{A t} \mathbf{y}_0$ olarak ifade edilir. \mathbf{y}_0 başlangıç değer vektörüdür. \mathbf{A} matrisi $n \times n$ boyutlu olarak düşünülürse \mathbf{y}_0 $n \times 1$ boyutludur. Burada matris çarpımı olduğundan çarpımdaki terimlerin sıralaması farketmektedir. Yani

$\mathbf{y}_0 e^{A t}$ tanımlı değildir.

Üstel matris fonksiyonun bazı özellikleri şunlardır;

1. \mathbf{A} ve \mathbf{B} komütatif matrisler olduğunda $(\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A})$, $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}}$ dır.
 $\mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \mathbf{A}$ olduğunda $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}}$ dır.
2. $e^{\mathbf{A}}$ nin her zaman tersi vardır ve $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$ dır. $e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ olur.
3. \mathbf{A} reel bir matris olduğunda $e^{\mathbf{A}}$ da reel bir matristir.

Diferansiyel denklem sistemlerinin üstel matris yöntemiyle çözümündeki zorluk

$$e^{A t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A} t)^n}{n!}$$

serisinin hesaplanmasından gelmektedir.

\mathbf{A} $n \times n$ matrisinin n adet lineer bağımsız özvektörünün olduğu durumda \mathbf{A} köşegenleştirilebilir bir matris olur.

$n \times n$ boyutlu \mathbf{K} matrisinin sütunları \mathbf{A} nın lineer bağımsız özvektörlerinden oluşmuş olsun. Bu durumda \mathbf{K} tersi alınabilir bir matristir. \mathbf{D} matrisi, \mathbf{K} nın sütunlarını oluşturan özvektörlerin sırasına uygun olarak \mathbf{A} nın özdeğerlerinden oluşmuş bir köşegen matris olmak üzere, \mathbf{A} matrisi

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} \quad 2.5$$

şeklinde yazılabilir. Matris köşegenleştirme, matrisin kuvvetinin alınmasında kolaylaştırıcı bir yöntemdir. Örneğin

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K} \mathbf{D}^2 \mathbf{K}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{K} \mathbf{D}^3 \mathbf{K}^{-1}$$

olur. Buna göre $e^{\mathbf{A}t}$ şu şekilde yazılabilir;

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} t + \frac{1}{2} (\mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} t)^2 + \frac{1}{3!} (\mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} t)^3 + \dots$$

$$= \mathbf{K} \left(\mathbf{I} + \mathbf{D} t + \frac{1}{2} \mathbf{D}^2 t^2 + \dots \right) \mathbf{K}^{-1}$$

$$= \mathbf{K} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{K}^{-1}$$

\mathbf{D} , \mathbf{A} nın özdeğerlerinden oluşan köşegen bir matris olduğundan, λ_k ($k = 1 \dots n$) \mathbf{A} matrisinin özdeğerleri olmak üzere, $e^{\mathbf{D}t}$ şu şekilde yazılır;

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Bu durumda

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{K}^{-1}$$

elde edilir.

\mathbf{A} matrisi her zaman köşegenleştirilebilir bir matris olmayabilir.

Teorem 2.1

\mathbf{A} matrisinin her bir özdeğerinin, o özdeğerin matrisin karakteristik polinomundaki kuvveti olan, yani o özdeğerin matris için kaç kere tekrar ettiğini gösteren cebrik katlılığının, o özdeğerin uzayının boyutu olan geometrik katlılığına eşit olduğu durumlarda \mathbf{A} matrisi köşegenleştirilebilir. Eğer \mathbf{A} ' nın herhangi bir özdeğerinin cebrik katlılığı geometrik katlılığından büyükse \mathbf{A} matrisi köşegenleştirilemez.

A matrisinin köşegenleştirilemediği durumda izlenecek yöntem Matris Fonksiyonları bölümünde açıklanacaktır.

2.4. Matris Fonksiyonları

Her $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi Jordan kanonik yapısında ifade edilebilir [12].

Z tersi alınabilir bir matris ve **J** Jordan formda bir matris olmak üzere

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z} \mathbf{J} \mathbf{Z}^{-1} \quad 2.6$$

her zaman yazılabilir.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_p \end{bmatrix}$$

Buradaki \mathbf{J}_k , ($k = 1 \dots p$) Jordan blokları olarak adlandırılır. **J** matrisi, köşegenlerine bu \mathbf{J}_k blokları yerleştirilerek oluşturulur.

A matrisinin her bir özdeğeri için bir Jordan bloku oluşturulur.

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{J}_k(\lambda_k) = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda_k & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$$

\mathbf{J}_k blokları ana köşegeninde ilgili özdeğer bulunan (λ_k), bir üst köşegeninde 1 olan ve diğer terimleri 0 olan kare matrislerdir.

$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ olduğu görülür.

Eğer **A** matrisinin tüm özdeğerleri birbirinden farklıysa yani tekrar eden özdeğer yoksa her bir \mathbf{J}_k bloğu 1×1 boyuttadır. Bu durumda **J** matrisinin ana köşegenin her bir terimi **A**'nın farklı bir özdeğeri olur ve **J** matrisinin ana köşegen dışındaki terimleri 0 olur. Bu durum aslında **A**'nın köşegenleştirilebilir olduğu duruma denk gelir.

(2.6) daki \mathbf{Z} dönüşüm matrisinin sütunları, \mathbf{A} nın genelleştirilmiş özvektörleridir ve tersi alınabilir bir matristir. Biz bu çalışmada genelleştirilmiş özvektörlerin ve \mathbf{J}_k bloklarının hesaplanması konularına girmeyeceğiz. İlerki bölümlerdeki örnek çözümlerinde ihtiyaç olduğunda Mathematica JordanDecomposition fonksiyonundan yararlanılacaktır.

Tanım 1:

f fonksiyonun \mathbf{A} matrisinin spektrumunda (tüm farklı özdeğerleri üzerinde $(\lambda_k, k = 1 \dots s)$) tanımlı olması demek

$j = 1 \dots n - 1$, ve $i = 1 \dots s$ olmak üzere

$f^{(j)}(\lambda_k)$ nın (f fonksiyonunun j . türevinin λ_k de) tanımlı olması demektir.

Tanım 2:

Matris fonksiyonu, Jordan kanonik yapı üzerinden şu şekilde tanımlanır;

\mathbf{A} ve \mathbf{J} (2.6) da tanımlandığı gibi olmak üzere

$$f(\mathbf{A}) := \mathbf{Z} f(\mathbf{J}) \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z} \text{diag} (f (\mathbf{J}_k)) \mathbf{Z}^{-1}$$

$$f(\mathbf{J}_k) := \begin{bmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \frac{1}{2} f''(\lambda_k) & \dots & \frac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ 0 & f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda_k) \end{bmatrix} \quad 2.7$$

Bu tanımdan görülebileceği gibi \mathbf{A} nın köşgenleştirilebilir olduğu durumda

$$f(\mathbf{A}) := \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

olur.

Bu matris fonksiyonu tanımının ispatı Taylor seri açılımı cinsinden verilebilir. f bir analitik fonksiyon olduğunda

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{f^{(h)}(u)}{h!} (z - u)^h$$

olarak yazılabilir. Bu tanıma uygun olarak z nin yerine \mathbf{J}_k ve u ' nun yerine λ_k konduğunda;

$$f(\mathbf{J}_k) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{f^{(h)}(\lambda_k)}{h!} (\mathbf{J}_k - \lambda_k \mathbf{I})^h$$

elde edilir.

$$(\mathbf{J}_k - \lambda_k \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Bu $(\mathbf{J}_k - \lambda_k \mathbf{I})$ matrisinin her kuvveti alındığında üst köşegendeki 1 ler bir üst köşegene gider. Sonuç olarak $(\mathbf{J}_k - \lambda_k \mathbf{I})$ nın m_k . dereceden nilpotent bir matris olduğu görülür. Yani $h \geq m_k$ için $(\mathbf{J}_k - \lambda_k \mathbf{I})^h = 0$ dir.

Buna göre

$$f(\mathbf{J}_k) = f(\lambda_k) \mathbf{I} + f'(\lambda_k) (\mathbf{J}_k - \lambda_k \mathbf{I}) + \frac{f''(\lambda_k)}{2!} (\mathbf{J}_k - \lambda_k \mathbf{I})^2 + \dots + \frac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} (\mathbf{J}_k - \lambda_k \mathbf{I})^{m_k-1}$$

olarak yazılır ve bu ifadedeki m_k adet terimin toplamının (2.7) ye eşit olduğu görülür.



3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde Lambert W fonksiyonunun belirli bir sınıf GDD nin çözümü için nasıl kullanılacağı anlatılacak, sonuçlar analiz edilecektir. Bu bölümde kullanılacak fonksiyon, metot ve kavramlar 2. bölümde açıklanmıştı.

3.1. Belirli Sınıf Gecikmeli Diferansiyel Denklemin Çözümünde Lambert W Fonksiyonu Kullanımı

Lambert W fonksiyonunun en önemli uygulama alanlarından birisi Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerdir [8]. Lambert W fonksiyonuyla bazı sınıf GDD yi analitik olarak çözmek mümkün olmaktadır. Bu bölümde Lambert W fonksiyonunun skaler ve matris formuna genelleştirilmiş kullanımı açıklanacaktır. Bu konudaki ilk çalışma [14] de sunulmuştu. Daha sonra [15] de matris uygulama örneği verilmişti.

3.1.1. Lambert W fonksiyonunun skaler kullanımı

Homojen, sabit katsayılı, lineer bir GDD sınıfı genel olarak şu yapıda verilir;

$$\dot{y}(t) = \alpha y(t) + \alpha_d y(t-r) \quad 3.1$$

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0]$$

Burada $r \geq 0$, α ve α_d sabit skaler katsayılar.

(3.1) de katsayılar sabit olduğundan olası çözüm e^{st} olarak alınıp [13], (3.1) de yerine koyulur.

$$s e^{st} = \alpha e^{st} + \alpha_d e^{st} e^{-sr}$$

Eşitliğin iki tarafındaki e^{st} ler (sıfırdan büyük) birbirini götürür. α ve e^{-sr} terimleri sol tarafa alındığında

$$(s - \alpha) e^{sr} = \alpha_d \quad 3.2$$

elde edilir. Buradan Lambert W fonksiyonunu kullanacak forma gelebilmek için (3.2) eşitliğinin iki tarafı $r e^{-r\alpha}$ ile çarpılır;

$$r(s-\alpha) e^{r(s-\alpha)} = r\alpha_d e^{-r\alpha}$$

elde edilir. Buradan s bilinmeyeni Lambert W fonksiyonu cinsinden

$$s = \frac{1}{r} W(r\alpha_d e^{-r\alpha}) + \alpha \quad 3.3$$

olarak ifade edilir. Burada s , sonsuz sayıdaki Lambert fonksiyonunun dallarının her biri için ayrıca elde edilir (bunlar aşağıda s_k olarak gösterilecektir).

Bu durumda, lineerlikten süper pozisyon ilkesi geçerli olur ve (3.1) denkleminin genel çözümü c_k katsayılarıyla;

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{s_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\left(\frac{1}{r} W_k(r\alpha_d e^{-r\alpha}) + \alpha\right) t} \quad 3.4$$

olarak yazılır.

Adi Diferansiyel Denklemlerdeki gibi (3.1) deki katsayılar ve başlangıç fonksiyonu reel değerli olduğunda genel çözümdeki her bir s_k için oluşan $y_k(t) = e^{s_k t}$ çözümlerinin reel ve imajiner kısımları da ($\text{Re}[y_k(t)]$ ve $\text{Im}[y_k(t)]$) (3.1) denkleminin reel çözümleridir.

c_k katsayıları başlangıç fonksiyonu $\varphi(t)$ ye göre hesaplanıp problemin özel çözümü bulunur.

Özel Çözümün Katsayılarının Bulunması:

Adi diferansiyel denklemlerdeki başlangıç değer problemlerinden farklı olarak çözüm uzayının boyutu kadarki başlangıç noktası yerine GDD lerde sonsuz boyutlu başlangıç fonksiyonu baz alınır.

Pratik uygulamalarda GDD nin çözümünün c_k katsayılarının tespiti için farklı metotlar önerilmiştir. Laplace Dönüşümü ve Residue yöntemi, En Küçük Kareler yöntemi [16],

Lambert Fonksiyonunun dallarının belirli noktalarda başlangıç fonksiyonu $\varphi(t)$ ile eşleştirilmesi yöntemi [14] bunların bazılarıdır. Biz daha sonraki örnek problemlerde de kullanmak üzere [14] de tanıtılmış Lambert fonksiyonunun dallarının belirli noktalarda başlangıç fonksiyonuyla eşleştirilmesi yöntemiyle c_k katsayılarının bulunması metodunu inceleyeceğiz.

(3.4) çözümündeki c_k ' lar, genel çözümün $t \in [-r, 0]$ aralığında başlangıç fonksiyonuna eşit olmasını sağlayacak katsayılardır. Yani $e^{\frac{1}{r} W_k(r \alpha_d e^{-r \alpha} + \alpha) t} = \gamma(k, t)$ olmak üzere (3.4) deki genel çözümde $t \in [-r, 0]$ iken

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \gamma(k, t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0]$$

eşitliğini sağlayacak c_k katsayıları aranmaktadır. $\varphi(t)$ nin değerine bağlı olacak şekilde bu durum sonsuz seri toplamının alınmasını gerektirebilir.

Pratik uygulamada (3.4) özel çözümünde $k = N$ sonlu sayısı olacaktır yani $2N + 1$ adet ($k = -n, \dots, n$) Lambert fonksiyonu (dalı) kullanılacaktır.

c_k katsayıları, özel çözümdeki $2N + 1$ adet Lambert dalına ait çözümün lineer kombinasyonunun, $[-r, 0]$ aralığını $2N$ eşit parçaya ayıran $2N+1$ adet t değerinde başlangıç fonksiyonuna eşit olmasını sağlayacak kompleks değerli skalerlerdir.

$$\sum_{k=-N}^N c_k \gamma(k, t) = \varphi(t), \quad t \in \left\{ -r, \frac{-r(2N-1)}{2N}, \dots, \frac{-r}{2N}, 0 \right\}$$

Bu ifade

$$\mathbf{Y}_{2N+1 \times 2N+1} = [\gamma_{k_i t_i}]$$

$$\mathbf{C}_{2N+1 \times 1} = [c_{k_i}]$$

$$\mathbf{\Phi}_{2N+1 \times 1} = [\varphi_{t_i}]$$

olmak üzere matris çarpımı olarak

$$\mathbf{Y} \mathbf{C} = \Phi$$

3.5

yazılır. Matris formunda görüntü şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} \gamma(-N, t_1) & \cdots & \gamma(N, t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(-N, t_{2N+1}) & \cdots & \gamma(N, t_{2N+1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{-N} \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{t_1} \\ \vdots \\ \varphi_{t_{2N+1}} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Y}_{2N+1 \times 2N+1}$ matrisi lineer bağımsız (birbirinin sabit bir katsayısı olarak ifade edilemeyen) fonksiyonların farklı t lerdeki değerleriyle oluşturulduğu için her zaman tersi alınabilir bir matristir. Dolayısıyla (3.5) lineer denklem sisteminden $\mathbf{C}_{2N+1 \times 1}$ tekil (unique) olarak bulunabilir.

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y}^{-1} \Phi$$

3.6

Bu yöntemin iki konuda sorunu vardır. Birincisi; tespit edilen c_k ler aslında (3.4) çözümünün sadece belirli t anları için, $t \in \left\{ -r, \frac{-r(2N-1)}{2N}, \dots, \frac{-r}{2N}, 0 \right\}$, başlangıç fonksiyonuna uyumlu olmasını garanti eder. Bu uyumluluk seviyesini artırmak için N olabildiğince büyük seçilmelidir. $N \rightarrow \infty$ giderken c_k ' ler (3.4) çözümünün başlangıç fonksiyonuna sonsuz noktada yaklaşmasını sağlar.

Bu yöntemle ilgili ikinci sorun da bu noktada ortaya çıkmaktadır. N büyüdükçe c_k ' leri tespit etmek için gerekli olan $\mathbf{Y}_{2N+1 \times 2N+1}$ in tersini alma işlemi zorlaşmaktadır.

Pratik uygulamada N in büyüklüğüne ve başlangıç fonksiyonuna göre, özel çözümde, başlangıç fonksiyonuyla $[-r, 0]$ aralığında c_k lerin tespit edildiği belirli t noktaları haricinde sapmalar olabileceği kabul edilir. Başlangıç fonksiyonundan bu sapmanın $[0, \infty]$ aralığında da bir miktar saptmaya neden olabileceği görülür. Bu durum ileride nümerik problemler üzerinden detaylı incelenecektir.

Lambert fonksiyonu dalları cinsinden bulunan özel çözüm $[-r, \infty]$ aralığında sürekli türevlenebilir olur.

(3.4) deki çözümün kararlılığı $\text{Re}[s_k]$ ların pozitif veya negatif olmasına bağlıdır.

$$\text{Re}[s_k] = \text{Re} \left[\frac{1}{r} W_k(r \alpha_d e^{-r \alpha}) + \alpha \right]$$

Tüm z ler için $W(z)$ nin reel kısmı en büyük olan dalının ana dal olduğu bilinmekteydi. Bu durumda $\text{Re} \left[\frac{1}{r} W_0(r \alpha_d e^{-r \alpha}) + \alpha \right] < 0$ olduğunda (3.4) çözümünün asimptotik kararlı olduğu görülür.

(3.3) de s in, W nin her bir dalı için olmak üzere sonsuz sayıda çözümü olduğunu görmüştük. W nin $k \neq 0, -1$ olduğu durumlarda $\alpha_d \neq 0$ iken a ve α_d reel olsa da s in her zaman kompleks değerli olduğu yani $\dot{y}'(t) = \alpha y(t) + \alpha_d y(t-r)$ denkleminin sonsuz sayıda salınımlı çözümü olduğu ve (3.4) e göre bunların lineer kombinasyonu ile oluşan özel çözümün de salınımlı (sönümlü veya sönümsüz) olduğu görülür.

Skaler Probleminin Analizi

Bu bölümde (3.1) probleminin farklı parametrelerle analizi yapılacaktır. Örnek bir problem Lambert fonksiyonu metoduyla nümerik olarak çözülecek, özel çözümün hesaplanma adımları anlatılacak ve farklı parametrelere göre Lambert fonksiyonu metoduyla bulunmuş özel çözümler Mathematica NDSolve fonksiyonu çözümüyle karşılaştırılacaktır.

Örnek 1:

(3.1) probleminde $a = 0$ olsun.

Bu durumda denklem

$$\dot{y}(t) = \alpha_d y(t-r) \quad 3.7$$

halini alır. Denklemin olası çözümünü $e^{s t}$ olarak aldığımızda

(3.3) e göre

$$s = \frac{1}{r} W_k(\alpha_d r)$$

elde edilir ve buradan çözüm fonksiyonları, her bir Lambert dalı için

$$y_k(t) = e^{\frac{1}{r} W_k(\alpha_d r) t} \quad 3.8$$

olarak yazılır. (3.7) nin genel çözümü (3.4) e uygun olarak

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{1}{r} W_k(\alpha_d r) t} \quad 3.9$$

şeklinde yazılır.

c_k katsayıları başlangıç fonksiyonuna göre önerilen metot işletilerek bulunur ve özel çözüm elde edilir.

(3.9) genel çözümünün kararlılığı ve salınımlı için aşağıdaki tespitler yapılır;

1. $a_d r < -\frac{\pi}{2}$ olduğunda $W_{0,-1}(a_d r)$ dalları kompleks değerli ve $\text{Re} [W_{0,-1}(\alpha_d r)] > 0$ olduğundan ve diğer dalların reel kısmı sıfırdan küçük değerli olanlarının salınımlı çözümleri sönümlü olacağından başlangıç fonksiyonuna göre W_0 veya W_{-1} dallarının özel çözümdeki c_k katsayılarının 0 olmadığı durumlarda, özel çözüm salınımlı kararsızdır.
2. $a_d r = -\frac{\pi}{2}$ olduğunda $W_{0,-1}$ dalları kompleks değerli ve $\text{Re} [W_{0,-1}] = 0$ olduğundan ve diğer dallar için $\text{Re} [W_{k \neq 0,-1}(\alpha_d r)] < 0$ olduğundan bunların sönümlü salınımlı çözümleri t büyüdükçe sıfıra yaklaşacağından, W_0 veya W_{-1} dallarının özel çözümdeki c_k katsayılarının 0 olmadığı durumlarda, özel çözüm t büyüdükçe *periyodik* salınımlı olacaktır.
3. $-\frac{\pi}{2} < a_d r < -\frac{1}{e}$ olduğunda tüm dallar kompleks değerli ve $\text{Re} [W_k] < 0$ olduğundan çözüm salınımlı asimptotik kararlıdır.
4. $-\frac{1}{e} \leq a_d r < 0$ olduğunda $W_{0,-1}(a_d r) < 0$ olduğundan ve diğer dalların reel kısımları yine sıfırdan küçük olduğundan bu dalların salınımlı çözümleri t büyüdükçe sıfıra yaklaşacağından W_0 veya W_{-1} dallarının özel çözümdeki c_k katsayılarının 0 olmadığı durumlarda, özel çözüm t büyüdükçe salınımsız asimptotik kararlıdır.
5. $a_d r = 0$ olduğunda $W_0(a_d r) = 0$ olduğundan ve diğer dallar 0 noktasında $-\infty$ değerini aldığından özel çözüm sabit bir fonksiyondur.
6. $a_d r > 0$ olduğunda $W_0(a_d r) > 0$ olduğundan ve diğer dalların asimptotik kararlı salınımlı çözümleri t büyüdükçe sıfıra yaklaşacağından ve kararsız salınımlı çözümleri t büyüdükçe ana dalın kararsız salınımsız çözümüne göre gittikçe daha

küçük kalacağından, W_0 dalının özel çözümdeki c_k katsayısının 0 olmadığı durumda özel çözüm, t büyüdükçe salınımsız kararsızdır.

(3.7) denklemini $a_d = -1$, $r = \frac{\pi}{2}$ ve başlangıç fonksiyonu $\varphi(t) = 1$ olarak inceleyelim;

$$\dot{y}(t) = -y(t - \frac{\pi}{2})$$

$$\varphi(t) = 1, t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$$

3.10

Bu parametreler yukarıdaki 2. duruma karşılık gelmektedir. Parametreler yerine konduğunda çözüm fonksiyonunun her bir dalı (3.8) den

$$y_k(t) = e^{\frac{2}{\pi} W_k \left(\frac{\pi}{2}\right) t}$$

olarak yazılır. 2. durumun açıklamasına göre t büyüdükçe özel çözüm $W_{0, -1} \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ dallarına ait çözümlere yaklaşacaktır.

Bu problemdeki W_0 çözümünün detayı şu şekildedir;

$$W_0 \left(-\frac{\pi}{2}\right) = i \frac{\pi}{2} \text{ olduğundan ana dala } (W_0) \text{ ait çözüm}$$

$$y_0(t) = e^{\frac{2}{\pi} i \frac{\pi}{2} t} = e^{i t}$$

olur. Çözümün sağlanmasını yapmak için bu çözüm (3.10) da yerine konduğunda denklemin tüm t ler için tam olarak sağlandığı görülür;

$$\dot{y}(t) = i e^{i t} = -e^{i(t - \frac{\pi}{2})}$$

$$i e^{i t} = -e^{i t} e^{-i \frac{\pi}{2}}$$

$$i = -e^{-i \frac{\pi}{2}}$$

$$i = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$i = i$$

Lambert W fonksiyonunun diğer dalları için de ($k \neq 0$) aynı sağlama yapılabilir.

(3.10) da $\alpha_d = -1$ reel sayı olduğundan $\text{Re}[y(t)]$ ve $\text{Im}[y(t)]$ (3.10) in ayrı ayrı reel çözümleri olur.

(3.10) un genel çözümü

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2}{\pi} W_k\left(\frac{\pi}{2}\right) t}$$

olarak yazılır. $\varphi(t)=1$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ başlangıç fonksiyonuna göre c_k lar bulunup özel çözüme ulaşılır.

$N = 2$ için c_k lar ve özel çözüm şu şekilde bulunur;

$$y_{-2}(t) = e^{\frac{2}{\pi} W_{-2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) t} = e^{(-1.02132 - 4.86835 i) t}$$

$$y_{-1}(t) = e^{\frac{2}{\pi} W_{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) t} = e^{-i t}$$

$$y_0(t) = e^{\frac{2}{\pi} W_0\left(-\frac{\pi}{2}\right) t} = e^{i t}$$

$$y_1(t) = e^{\frac{2}{\pi} W_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) t} = e^{(-1.02132 + 4.86835 i) t}$$

$$y_2(t) = e^{\frac{2}{\pi} W_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) t} = e^{(-1.39951 + 8.90071 i) t}$$

$t = -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{8}, 0$ noktalarında $\mathbf{Y}_{5 \times 5}$ matrisi oluşturulur;

Tablo 3.1 (3.10) da $N=2$ için \mathbf{Y}

| \mathbf{Y} | $y_{-2}(t)$ | $y_{-1}(t)$ | $y_0(t)$ | $y_1(t)$ | $y_2(t)$ |
|----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $t = 0$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t = -\frac{\pi}{8}$ | -0.499448 + 1.40743 i | 0.92388 + 0.382683 i | 0.92388 – 0.382683 i | -0.499448 – 1.40743 i | -1.62528 + 0.600115 i |
| $t = -\frac{\pi}{4}$ | -1.73142 – 1.40588 i | 0.707107 + 0.707107 i | 0.707107 – 0.707107 i | -1.73142 + 1.40588 i | 2.2814 – 1.95071 i |

| | | | | | |
|-----------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| $t = -\frac{3\pi}{8}$ | 2.84344 – 1.7347 <i>i</i> | 0.382683 + 0.92388 <i>i</i> | 0.382683 – 0.92388 <i>i</i> | 2.84344 + 1.7347 <i>i</i> | -2.53726 + 4.53956 <i>i</i> |
| $t = -\frac{\pi}{2}$ | 1.02132 + 4.86835 <i>i</i> | <i>i</i> | - <i>i</i> | 1.02132 – 4.86835 <i>i</i> | 1.39951 – -8.90071 <i>i</i> |

\mathbf{Y} nin determinanı $-485.844 + 600.639 i$ olduğu görölür, yani \mathbf{Y} tersi alınabilir bir matristir.

$\Phi_{5 \times 1}$ vektörü başlangıç fonksiyonu $\varphi(t) = 1$ olduğundan dolayı her t için 1 değerini alır;

Tablo 3.2 (3.10) da $N=2$ için Φ

| Φ | $\varphi(t)$ |
|-----------------------|--------------|
| $t = 0$ | 1 |
| $t = -\frac{\pi}{8}$ | 1 |
| $t = -\frac{\pi}{4}$ | 1 |
| $t = -\frac{3\pi}{8}$ | 1 |
| $t = -\frac{\pi}{2}$ | 1 |

\mathbf{Y} matrisinin tersi \mathbf{Y}^{-1} elde edilip (3.6) da yerine konduğunda c_k katsayıları bulunur;

Tablo 3.3 (3.10) da $N=2$ için \mathbf{C}

| \mathbf{C} | c_k |
|--------------|---------------------------------|
| $k = -2$ | 0.0533695 – 0.00756565 <i>i</i> |
| $k = -1$ | 0.46342 – 0.324608 <i>i</i> |
| $k = 0$ | 0.432868 + 0.305541 <i>i</i> |
| $k = 1$ | 0.0321746 + 0.00417241 <i>i</i> |
| $k = 2$ | 0.0181675 + 0.0224602 <i>i</i> |

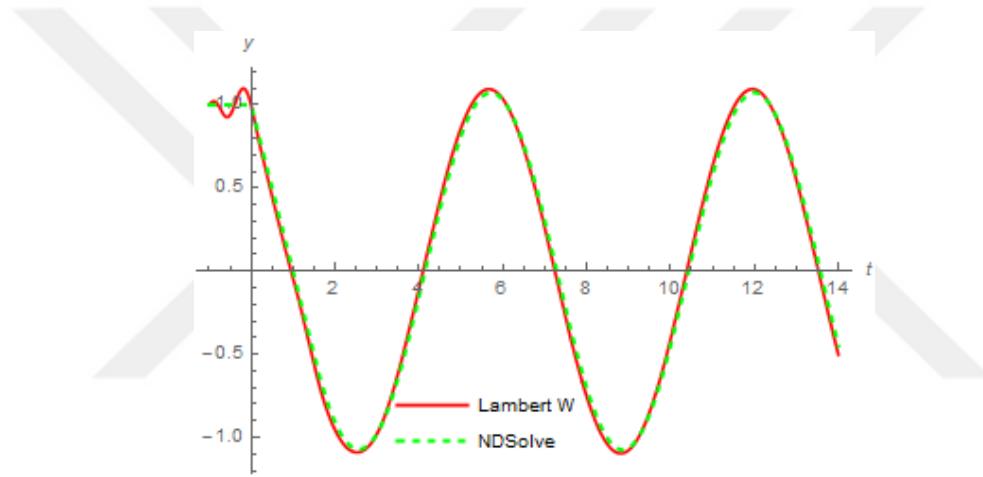
Buna göre $N = 2$ için denklemin özel çözümü

$$y(t) = (0.0533695 - 0.00756565 i) e^{(-1.02132 - 4.86835 i) t} + (0.46342 - 0.324608 i) e^{-i t} + (0.432868 + 0.305541 i) e^{i t} + (0.0321746 + 0.00417241 i) e^{(-1.02132 + 4.86835 i) t} + (0.0181675 + 0.0224602 i) e^{(-1.39951 + 8.90071 i) t}$$

olarak elde edilir.

Hesaplanan özel çözümün kompleks değerli olduğu görülür. Başlangıç fonksiyonu reel değerli olduğu için (3.10) un özel çözümü $\text{Re}[y(t)]$ olur. Çözüm trigonometrik bir polinomdur.

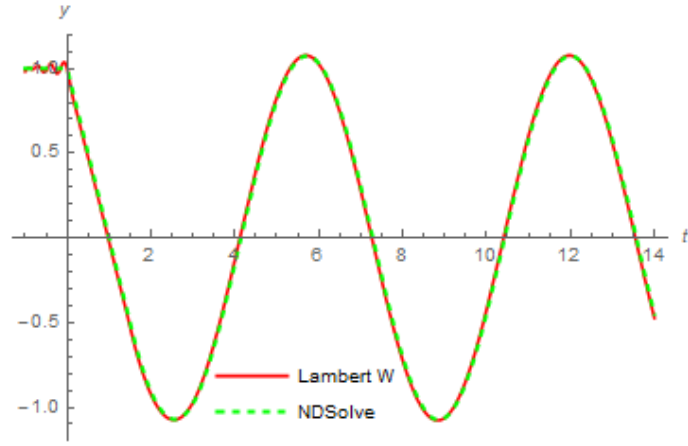
$\text{Re}[y(t)]$ ve Mathematica NDSolve fonksiyonuyla bulunan çözümlerin grafiği aşağıdadır;



Şekil 3.1 (3.10) un $N=2$ için Lambert çözümü ve NDSolve çözümü

Grafikte Lambert çözümünün $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ aralığında sadece belirli bir kaç noktada başlangıç fonksiyonu değeri olan sabit 1 değerini aldığı görülür.

$N = 5$ için bulunan $\text{Re}[y(t)]$ çözümü ile Mathematica NDSolve fonksiyonunun çözümü de aşağıdaki grafiktedir;

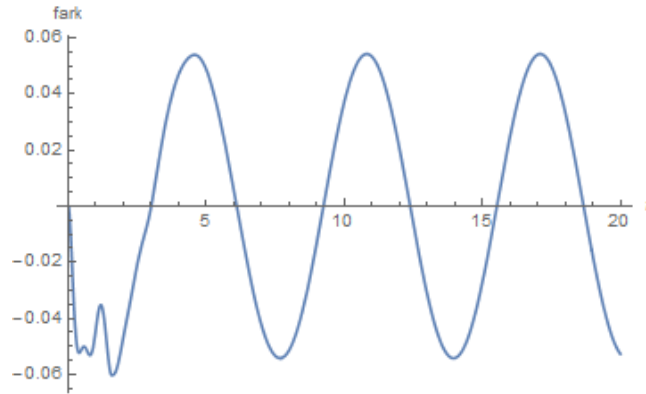


Şekil 3.2 (3.10) un $N=5$ için Lambert çözümü ve NDSolve çözümü

Burada çözüme dahil edilen Lambert fonksiyonu dal sayısı arttıkça $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ aralığında Lambert çözüm fonksiyonunun başlangıç fonksiyonuna daha fazla yaklaşmakta olduğu görülür. Burada $t = 0$ anında Lambert çözümünün türevlenebilir olduğu da görülmelidir.

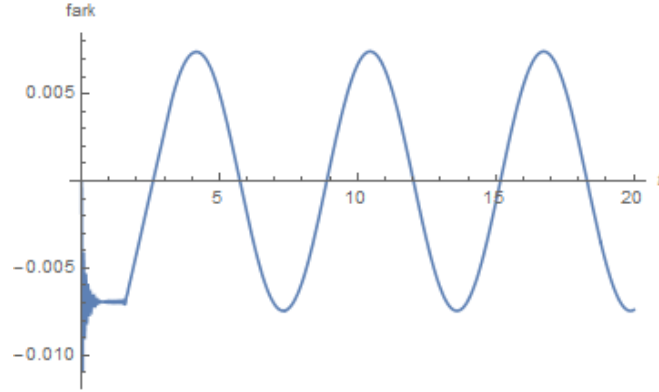
Farklı sayılarda Lambert fonksiyonlarıyla hesaplanan özel çözümler ile Mathematica NDSolve fonksiyonu çözümü arasındaki *farklar* aşağıdaki grafiklerde gösterilmiştir.

$N = 2$ için;



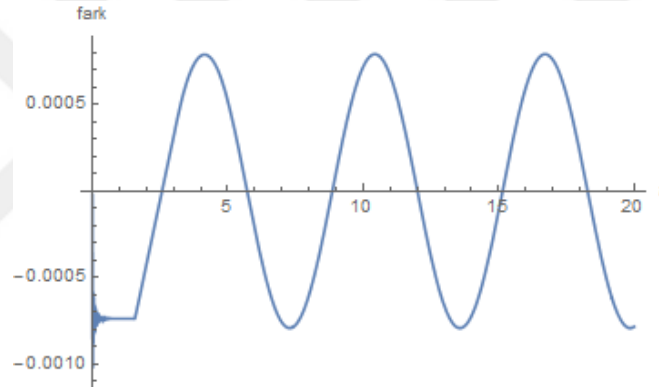
Şekil 3.3 (3.10) un $N=2$ için Lambert çözümü ve NDSolve çözümü arasındaki fark

$N = 20$ için;



Şekil 3.4 (3.10) un $N=20$ için Lambert çözümü ve NDSolve çözümü arasındaki fark

$N = 200$ için;



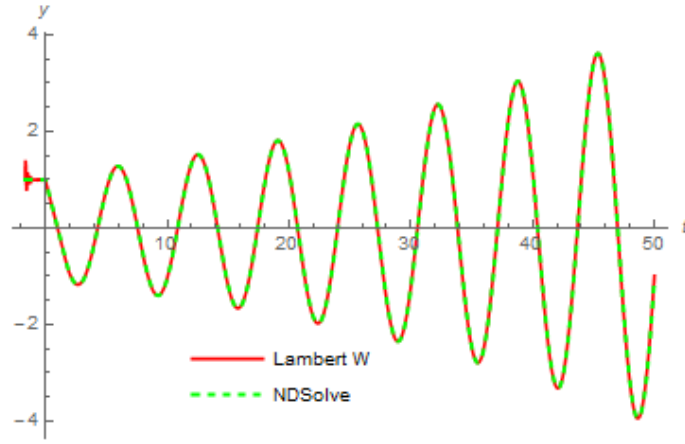
Şekil 3.5 (3.10) un $N=200$ için Lambert çözümü ve NDSolve çözümü arasındaki fark

Çözüm fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığında değerler aldığı göz önüne alındığında $N = 2$ için hesaplanan Lambert çözümünün Mathematica NDSolve fonksiyonundan farklılığının mutlak olarak %5, $N = 20$ de %0.6, $N = 200$ de %0.07 civarı olduğu grafiklerden görülür.

Lambert çözümünde N büyüdükçe başlangıç fonksiyonuna uyumun artacağı, dolayısıyla da Lambert çözümünün gerçek çözüme daha fazla yaklaşacağı görülmektedir.

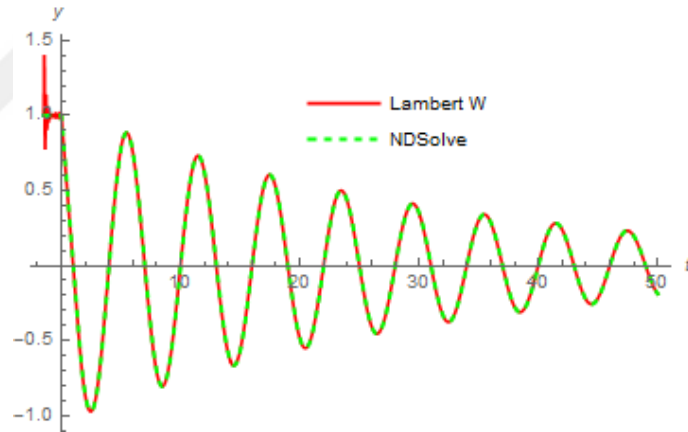
(3.10) probleminde r gecikme terimindeki küçük değişiklikler çözümün karakterini değiştirecektir.

Gecikme terimi $r > \frac{\pi}{2}$ olduğu durumda $\text{Re} [W_0(-r)] > 0$, yani çözüm salınımlı kararsız olmaktadır. $r = \frac{\pi}{2} + 0.1$ için çözüm grafiği şu şekildedir;



Şekil 3.6 (3.10) un $r = \frac{\pi}{2} + 0.1$ için Lambert ve NDSolve çözümleri

$r = \frac{\pi}{2} - 0.1$ için çözüm grafiği aşağıdadır. Burada $\text{Re} [W_0(-r)] < 0$ olduğundan çözümün salınımlı asimptotik kararlı olduğu görülür.



Şekil 3.7 (3.10) un $r = \frac{\pi}{2} - 0.1$ için Lambert ve NDSolve çözümleri

Örnek 2:

(3.1) probleminde, h herhangi bir reel sayı olmak üzere $\alpha = h$, $a_d = -h$ ve r herhangi bir $r_0 > 0$ reel sayısı olsun.

$$\dot{y}(t) = h y(t) - h y(t - r_0) \quad 3.11$$

$$y(t) = \varphi(t) = 1, \quad t \in [-r_0, 0]$$

olur. (3.3) e göre ve problem parametreleri yerine konduğunda

$$s_k = \frac{1}{r_0} W_k(r_0 (-h) e^{-r_0 h}) + h$$

elde edilir.

$W_k(r_0 (-h) e^{-r_0 h})$ tanım gereği $-r_0 h$ dir. Bu durumda $s = \frac{1}{r_0} (-r_0 h) + h = 0$ olmaktadır.

Yani $\alpha_d = -a$ olduğu durumda (3.1) in çözümü sabit bir fonksiyondur.

Örnek 3:

(3.1) probleminde $r = 1$ olsun

$$\dot{y}(t) = \alpha y(t) + \alpha_d y(t-1)$$

$$y(t) = \varphi(t) = 1, \quad t \in [-1, 0]$$

olarak yazılır. (3.3) e göre

$$s_k = W_k(\alpha_d e^{-\alpha}) + \alpha$$

olur. Salınımsız çözümün varlığı için $W_0(\alpha_d e^{-\alpha})$ 'ın reel değerli olması gerekir.

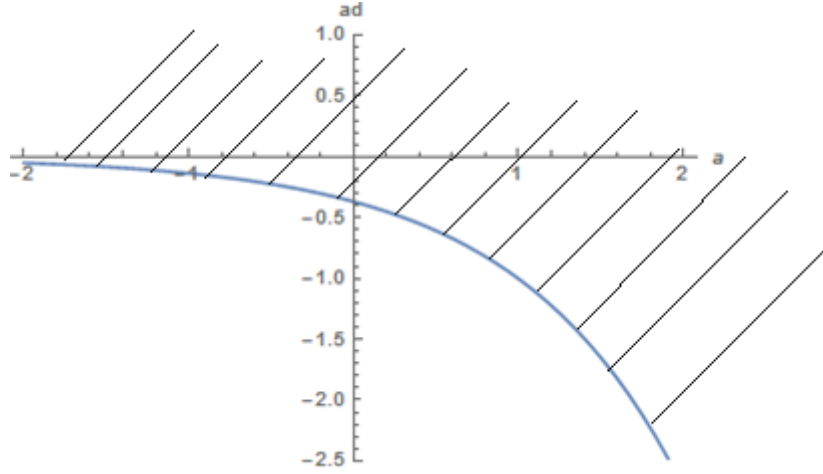
$z > -e^{-1}$ iken $W_0(z)$ reel değerlidir. Buna göre salınımsız çözüm için denklem katsayılarının

$$\alpha_d e^{-\alpha} > -e^{-1}$$

eşitsizliğini sağlaması gerekir. Buradan

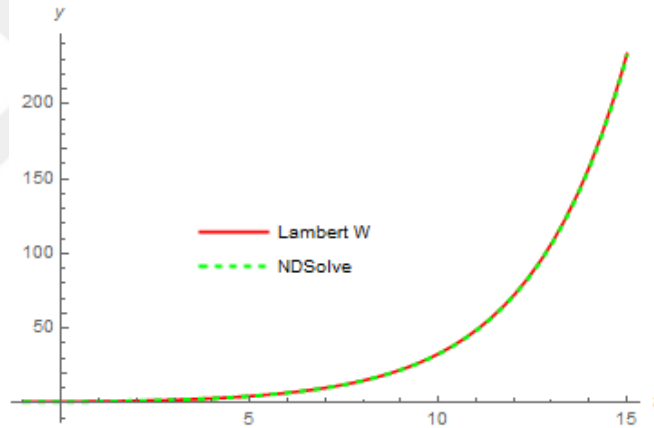
$$\alpha_d > -e^{\alpha-1}$$

ilişkisi bulunur. Bu ilişki aşağıdaki taralı alan olarak gösterilebilir.



Şekil 3.8 (3.1) de $r = 1$ için salınımsız çözüm alanı

Salınımsız çözüme örnek olarak Şekil 3.7 deki taralı alandan $a_d = -1$, $a = 2$ parametreleri için problemin çözümünün grafiği şu şekildedir.



Şekil 3.9 (3.1) de $r = 1$, $a_d = -1$, $a = 2$ için salınımsız çözüm alanı

Örnek 4:

(3.1) probleminde $\alpha = 1$, $r = 1$ olsun.

$$\dot{y}(t) = y(t) - \alpha_d y(t - 1) \quad 3.12$$

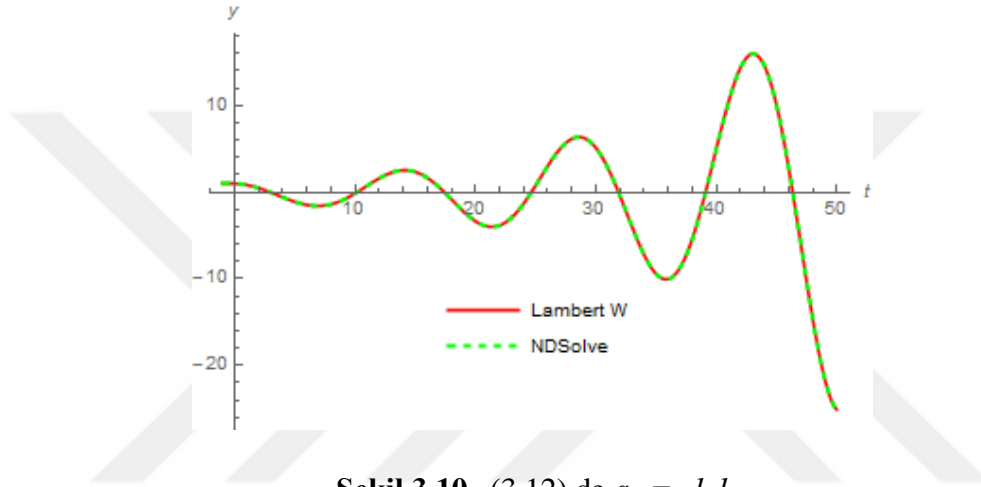
$$y(t) = \varphi(t) = 1, \quad t \in [-1, 0]$$

$\alpha_d < -1$ için $W_k\left(\frac{\alpha_d}{e}\right)$ tüm k lar için kompleks değerlidir, dolayısıyla (3.3) e göre bulunan s_k ler de kompleks değerli olacaktır.

$$s_k = W_k\left(\frac{\alpha_d}{e}\right) + 1 \quad 3.13$$

$\text{Re}\left[W_0\left(\frac{\alpha_d}{e}\right)\right] > -1$ dir. Bu durumda (3.13) den $\text{Re}[s_0] > 0$ olacağı, yani ana dal için çözümünün salınımlı kararsız olacağı görülür. Diğer dallar için salınımlı asimptotik kararlı çözümler vardır fakat başlangıç fonksiyonuna göre belirlenen katsayılar c_0 ın sıfır olmaması durumunda özel çözümün salınımlı kararsız olduğu görülür.

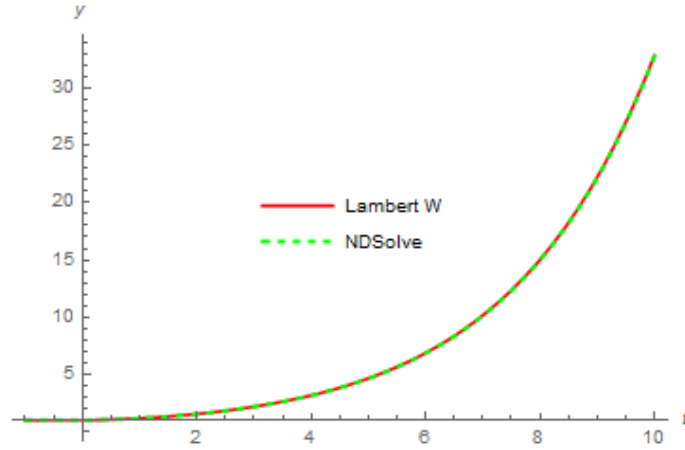
$\alpha_d = -1.1$ için çözüm grafiği şu şekildedir;



Şekil 3.10 (3.12) de $\alpha_d = -1.1$

$\alpha_d > -1$ için $W_0\left(\frac{\alpha_d}{e}\right)$ reel değerlidir. (3.13) den $s_0 > 0$ olacağı görülür. Bu durumda c_0 ın sıfır olmadığı her türlü c_k kombinasyonunda özel çözüm t büyüdükçe salınımsız ve kararsız olacaktır.

$\alpha_d = -0.9$ için çözüm grafiği şu şekildedir;



Şekil 3.11 (3.12) de $a_d = -0.9$

3.1.2. Matris Lambert W fonksiyonunun kullanımı

Homojen, sabit katsayılı, lineer bir GDD sistemi skaler yapıdakine benzer olarak şu şekilde verilmiş olsun;

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_d \mathbf{y}(t-r) \quad 3.14$$

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t), \quad t \in [-r, 0]$$

$r \geq 0$, \mathbf{A} ve \mathbf{A}_d $n \times n$ boyutta sabit kare matrisler, $\mathbf{y}(t)$ $n \times 1$ vektördür.

Skaler yapıdakine benzer olarak \mathbf{A} ve \mathbf{A}_d matris katsayıları sabit olduğundan olası çözüm $e^{\mathbf{S}t}$ üstel matrisi olarak alınabilir. $e^{\mathbf{S}t}$ sistemin temel matrisine eşittir.

Burada \mathbf{S} , \mathbf{A} ve \mathbf{A}_d ile aynı boyutta bir matristir. $e^{\mathbf{S}t}$ (3.14) de yerine konduğunda

$$\mathbf{S} e^{\mathbf{S}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{S}t} + \mathbf{A}_d e^{\mathbf{S}t - \mathbf{S}r}$$

olur. $e^{\mathbf{S}t - \mathbf{S}r}$ terimindeki $\mathbf{S}t$ ve $\mathbf{S}r$ matrisleri komütatif matrisler olduğundan

$$\mathbf{S} e^{\mathbf{S}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{S}t} + \mathbf{A}_d e^{\mathbf{S}t} e^{-\mathbf{S}r}$$

elde edilir. Yine aynı şekilde $e^{\mathbf{S}t}$ ve $e^{-\mathbf{S}r}$ üstel matrisleri de komütatif olduğundan

$$\mathbf{S} e^{\mathbf{S}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{S}t + \mathbf{A}_d} e^{-\mathbf{S}r} e^{\mathbf{S}t}$$

yazılabilir. Eşitliğin iki tarafı sağdan $e^{-S t}$ üstel matrisiyle çarpıldığında

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{A}_d e^{-S r}$$

bulunur. Burada skaler yöntemdekine benzer düzenleme yapıldığında

$$(\mathbf{S} - \mathbf{A}) e^{S r} = \mathbf{A}_d$$

elde edilir. Eşitliği Lambert W fonksiyonuna uygun forma sokmak için eşitliğin iki tarafı sağdan $r e^{-A r}$ ile çarpılır

$$r (\mathbf{S} - \mathbf{A}) e^{S r} e^{-A r} = r \mathbf{A}_d e^{-A r}$$

Burada $e^{S r} e^{-A r} = e^{S r - A r}$ yazabilmek için \mathbf{S} ve \mathbf{A} nin komütatif matrisler olması gerekir. \mathbf{S} , \mathbf{A} ve \mathbf{A}_d nin bir fonksiyonu olduğundan \mathbf{A} ile \mathbf{A}_d komütatif matrisler olduğunda \mathbf{S} de \mathbf{A} ile komütatif olacaktır [10].

Biz bu çalışmada \mathbf{A} ve \mathbf{A}_d nin komütatif matrisler olduğu haller üzerine inceleme yapacağız. Buna göre

$$r (\mathbf{S} - \mathbf{A}) e^{r(\mathbf{S} - \mathbf{A})} = r \mathbf{A}_d e^{-A r}$$

yazılabilir. Lambert W fonksiyonuyla her bir dal için

$$\mathbf{S}_k = \frac{1}{r} W_k(r \mathbf{A}_d e^{-A r}) + \mathbf{A} \quad 3.15$$

olarak bulunur.

Buradan (3.14) ün genel çözümü

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k t} \mathbf{C}_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{r} W_k(r \mathbf{A}_d e^{-A r}) + \mathbf{A}\right) t} \mathbf{C}_k \quad 3.16$$

şeklinde yazılır. Başlangıç fonksiyonuna göre \mathbf{C}_k bulunarak özel çözüme ulaşılır.

Bu çözümdeki $e^{\mathbf{S}_k t}$, sistemin temel matrisine de eşit olduğundan $e^{\mathbf{S}_k t}$ nin sütunları (3.14) denklemini çözmektedir. Başlangıç fonksiyonuna uyum için \mathbf{C}_k tespit edilip $e^{\mathbf{S}_k t} \mathbf{C}_k$ çarpımıyla elde edilen çözümler (3.14) ün başlangıç değerlerini de sağlayacaktır.

(3.16) daki

$$e^{S_k t} = e^{\left(\frac{1}{r} W_k(r \mathbf{A}_d e^{-A r}) + \mathbf{A}\right) t}$$

ifadesindeki $e^{-A r}$ terimi argümanı $(-A r)$ olan bir üstel matris fonksiyonu, $W_k(r \mathbf{A}_d e^{-A r})$ terimi argümanı $(r \mathbf{A}_d e^{-A r})$ olan matris Lambert fonksiyonu ve $e^{\left(\frac{1}{r} W_k(r \mathbf{A}_d e^{-A r}) + \mathbf{A}\right) t}$ terimi argümanı $\left(\frac{1}{r} W_k(r \mathbf{A}_d e^{-A r}) + \mathbf{A}\right) t$ olan yine bir üstel matris fonksiyonudur. Buradan matris Lambert fonksiyonunun GDD lere uygulanması konusunun matris fonksiyonu kavramıyla yakından ilişkili olduğu görülür.

Lambert W fonksiyonunun matris kullanımı örnek bir soruyla açıklanacaktır.

Örnek 5:

(3.14) deki GDD sistem problemini

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

3.17

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r = 1$$

parametreleriyle inceleyelim.

Burada ilk olarak $\mathbf{A} \mathbf{A}_d - \mathbf{A}_d \mathbf{A} = \mathbf{0}$, yani \mathbf{A} ile \mathbf{A}_d nin komütatif olduğu görülür. Problemin çözüm metodu takip edildiğinde (3.15) de $r = 1$ yerine konduğunda

$$S_k = W_k(\mathbf{A}_d e^{-A}) + \mathbf{A} \quad 3.18$$

olarak yazılır. Burada Lambert Fonksiyonunun argümanı olarak $\mathbf{A}_d e^{-A}$ matrisi olduğu görülmektedir. $\mathbf{A}_d e^{-A}$ matrisini belirleyebilmek için ilk olarak e^{-A} matrisi hesaplanacaktır.

$-\mathbf{A}$ nın özdeğerleri $\frac{1}{2} + i$, $\frac{1}{2} - i$ olarak bulunur. Özdeğerleri birbirinden farklı olduğu için $-\mathbf{A}$ nın köşegenleştirilebilir olduğu görülür.

(2.5) e göre $-\mathbf{A}$ köşegen bir matris cinsinden yazılır.

$-\mathbf{A}$ nın özvektörleri (özdeğerlerinin sırasına göre) $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ dir. Bu özvektörlerin

sutunlarını oluşturduğu $\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi $\begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ olur. Buna göre

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan üstel matris

$$e^{-\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}+i} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$e^{-\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sqrt{e} \cos 1 & -\sqrt{e} \sin 1 \\ \sqrt{e} \sin 1 & \sqrt{e} \cos 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (3.15) e göre \mathbf{S}_k matrisine aşağıdaki adımlarla ulaşılır;

$$\mathbf{A}_d e^{-\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{e} \cos 1 & -\sqrt{e} \sin 1 \\ \sqrt{e} \sin 1 & \sqrt{e} \cos 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_d e^{-\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{e} \cos 1 - 2\sqrt{e} \sin 1 & -2\sqrt{e} \cos 1 + \frac{3}{2}\sqrt{e} \sin 1 \\ 2\sqrt{e} \cos 1 - \frac{3}{2}\sqrt{e} \sin 1 & -\frac{3}{2}\sqrt{e} \cos 1 - 2\sqrt{e} \sin 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$S_k = W_k \left(\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{e} \cos 1 - 2\sqrt{e} \sin 1 & -2\sqrt{e} \cos 1 + \frac{3}{2}\sqrt{e} \sin 1 \\ 2\sqrt{e} \cos 1 - \frac{3}{2}\sqrt{e} \sin 1 & -\frac{3}{2}\sqrt{e} \cos 1 - 2\sqrt{e} \sin 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada W_k nin argümanı olan $A_d e^{-A}$ nümerik olarak yazıldığında S_k şu şekilde ifade edilir;

$$S_k = W_k \left(\begin{bmatrix} -4.11091 & 0.299411 \\ -0.299411 & -4.11091 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

S_k nin hesaplanabilmesi için, Lambert fonksiyonunun, argümanı olan $A_d e^{-A}$ matrisine uygulanması gerekmektedir. Burada da üstel fonksiyonunun matrisine uygulanmasında olduğu gibi öncelikle mümkünse matrisin köşegenleştirme işlemi yapılır. Matris köşegenleştirilemiyorsa Jordan formunda ifade edilir.

$A_d e^{-A} = \begin{bmatrix} -4.11091 & 0.299411 \\ -0.299411 & -4.11091 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinin $-4.11091+0.299411 i$ ve $-4.11091-0.299411 i$ olduğu görülür. İki farklı özdeğerin olması matrisin iki lineer bağımsız özvektörünün olacağı, yani matrisin köşegenleştirilebileceği anlamına gelir. Buradan

$$W_k(A_d e^{-A}) = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_k(-4.11091+0.299411 i) & 0 \\ 0 & W_k(-4.11091-0.299411 i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

yazılır. Bu matriste çözümde kullanılacak dallara ait Lambert fonksiyonu değerleri yerine koyularak S_k matrisleri tespit edilir. Tabloda $k = -1, 0, 1$ dalları için S_k lar gösterilmiştir.

Tablo 3.4 (3.17) nin S_k değerleri

| | S_k |
|----------|---|
| $k = -1$ | $\begin{bmatrix} -0.474238 - 4.83743 i & 3.86244 - 0.653992 i \\ -3.86244 + 0.653992 i & -0.474238 - 4.83743 i \end{bmatrix}$ |
| $k = 0$ | $\begin{bmatrix} 0.222173 & 2.86715 \\ -2.86715 & 0.222173 \end{bmatrix}$ |
| $k = 1$ | $\begin{bmatrix} -0.474238 + 4.83743 i & 3.86244+0.653992 i \\ -3.86244 - 0.653992 i & -0.474238 + 4.83743 i \end{bmatrix}$ |

Buradan üstel matris yöntemiyle $e^{S_k t}$ matrisleri hesaplanır. $e^{S_k t}$ matrislerini sembolik olarak şu şekilde tanımlayalım;

$$e^{S_k t} = \begin{bmatrix} y_{1,1}^k t & y_{2,1}^k t \\ y_{1,2}^k t & y_{2,2}^k t \end{bmatrix}$$

$y_{1,1}^k$: Lambert fonksiyonunun k . dalıyla bulunmuş 1. çözümün 1. komponenti

$y_{1,2}^k$: Lambert fonksiyonunun k . dalıyla bulunmuş 1. çözümün 2. komponenti

$y_{2,1}^k$: Lambert fonksiyonunun k . dalıyla bulunmuş 2. çözümün 1. komponenti

$y_{2,2}^k$: Lambert fonksiyonunun k . dalıyla bulunmuş 2. çözümün 2. komponenti

$e^{S_k t}$, temel matrise eşit olduğundan $\begin{bmatrix} y_{1,1}^k t \\ y_{1,2}^k t \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} y_{2,1}^k t \\ y_{2,2}^k t \end{bmatrix}$ çözümleri lineer bağımsızdır.

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$C_k = \begin{bmatrix} c_{k,1} \\ c_{k,2} \end{bmatrix}$$

olmak üzere (3.16) ya uygun olarak çözüm

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=-1}^1 \begin{bmatrix} y_{1,1}^k t & y_{2,1}^k t \\ y_{1,2}^k t & y_{2,2}^k t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{k,1} \\ c_{k,2} \end{bmatrix} = \sum_{k=-1}^1 \left(c_{k,1} \begin{bmatrix} y_{1,1}^k t \\ y_{1,2}^k t \end{bmatrix} + c_{k,2} \begin{bmatrix} y_{2,1}^k t \\ y_{2,2}^k t \end{bmatrix} \right) \quad 3.19$$

şeklinde ifade edilir;

Başlangıç fonksiyonuna göre belirlenmiş özel çözümü bulabilmek için C_k nın hesaplanması gerekmektedir. Bunun için Lambert fonksiyonunun skaler kullanımında uygulanan metota benzer bir metot kullanılacaktır.

Çözüme girecek $2N+1$ adet $e^{S_k t}$ matrisini yan yana toplu olarak içerecek yeni bir T matrisi oluşturalım;

$$\mathbf{T}(t) = [e^{S_N t} \quad e^{S_{N+1} t} \dots e^{S_{N-1} t} \quad e^{S_N t}] = \begin{bmatrix} y_{1,1}^{-N} t & y_{2,1}^{-N} t & y_{1,1}^{-N+1} t & y_{2,1}^{-N+1} t & y_{1,1}^N t & y_{2,1}^N t \\ y_{1,2}^{-N} t & y_{2,2}^{-N} t & y_{1,2}^{-N+1} t & y_{2,2}^{-N+1} t & y_{1,2}^N t & y_{2,2}^N t \end{bmatrix}$$

\mathbf{T} $2 \times 4N+2$ boyutunda bir matristir. Ardından

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t_{2N+1}) \end{bmatrix}$$

şeklinde, \mathbf{T} matrisinin (3.19) daki genel çözümün $[-1, 0]$ aralığında başlangıç fonksiyonuna eşitleneceği $2N+1$ adet t noktasındaki değerlerinin alt alta yazılarak oluşturulduğu yeni bir \mathbf{T}' matrisi tanımlanır.

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} y_{1,1}^{-N} t_1 & y_{2,1}^{-N} t_1 & y_{1,1}^{-N+1} t_1 & y_{2,1}^{-N+1} t_1 & \dots & y_{1,1}^N t_1 & y_{2,1}^N t_1 \\ y_{1,2}^{-N} t_1 & y_{2,2}^{-N} t_1 & y_{1,2}^{-N+1} t_1 & y_{2,2}^{-N+1} t_1 & \dots & y_{1,2}^N t_1 & y_{2,2}^N t_1 \\ y_{1,1}^{-N} t_2 & y_{2,1}^{-N} t_2 & y_{1,1}^{-N+1} t_2 & y_{2,1}^{-N+1} t_2 & \dots & y_{1,1}^N t_2 & y_{2,1}^N t_2 \\ y_{1,2}^{-N} t_2 & y_{2,2}^{-N} t_2 & y_{1,2}^{-N+1} t_2 & y_{2,2}^{-N+1} t_2 & \dots & y_{1,2}^N t_2 & y_{2,2}^N t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{1,1}^{-N} t_{2N+1} & y_{2,1}^{-N} t_{2N+1} & y_{1,1}^{-N+1} t_{2N+1} & y_{2,1}^{-N+1} t_{2N+1} & \dots & y_{1,1}^N t_{2N+1} & y_{2,1}^N t_{2N+1} \\ y_{1,2}^{-N} t_{2N+1} & y_{2,2}^{-N} t_{2N+1} & y_{1,2}^{-N+1} t_{2N+1} & y_{2,2}^{-N+1} t_{2N+1} & \dots & y_{1,2}^N t_{2N+1} & y_{2,2}^N t_{2N+1} \end{bmatrix} \quad 3.20$$

\mathbf{T}' $4N+2 \times 4N+2$ boyutunda tersi alınabilir bir matristir.

Benzer şekilde başlangıç fonksiyonu vektörü 2×1 boyutlu $\Phi(t)$ vektörünün $2N+1$ adet t noktasındaki değerlerinin alt alta yazılmasıyla Φ' $4N+2 \times 1$ boyutlu vektörü aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$\Phi' = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) \\ \varphi_2(t_1) \\ \varphi_1(t_2) \\ \varphi_2(t_2) \\ \vdots \\ \varphi_1(t_{2N+1}) \\ \varphi_2(t_{2N+1}) \end{bmatrix}$$

Burada $\begin{bmatrix} \varphi_1(t_i) \\ \varphi_2(t_i) \end{bmatrix}$ başlangıç fonksiyonunun t_i anında aldığı değerlerdir. Bunlar özel çözüm fonksiyonunun $\begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix}$ değerlerine eşittir.

Benzer şekilde çözüme girecek $2N+1$ adet Lambert fonksiyonu dalları çözümlerinin, yani her bir $e^{S_k t}$ nin her iki sütununun katsayıları olacak şekilde $4N+2 \times 1$ boyutlu \mathbf{C}' vektörü

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ \vdots \\ c_{2N+1,1} \\ c_{2N+1,2} \end{bmatrix}$$

Burada $c_{k,1}$ ve $c_{k,2}$ sırasıyla problemin özel çözümünde $\begin{bmatrix} y_{1,1}^k t \\ y_{1,2}^k t \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} y_{2,1}^k t \\ y_{2,2}^k t \end{bmatrix}$ çözümlerinin katsayıları olacaktır.

(3.5) e paralel olarak yazılan

$$\sum_{k=-N}^N e^{S_k t} \mathbf{C}_k = \Phi(t), \quad t \in \left\{ -r, \frac{-r(2N-1)}{2N}, \dots, \frac{-r}{2N}, 0 \right\} \quad 3.21$$

$4N+2$ bilinmeyenli ve $4N+2$ denklemden oluşan sistem \mathbf{C}_k için çözülecektir. (3.21) sisteminin matris çarpımı olarak gösterimi

$$\mathbf{T}'_{4N+2 \times 4N+2} \mathbf{C}'_{4N+2 \times 1} = \Phi'_{4N+2 \times 1} \quad 3.22$$

şeklindedir. Buradan \mathbf{T}' nin tersi alınabilirliğinden \mathbf{C}' şu şekilde çözülür;

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}'^{-1} \Phi' \quad 3.23$$

Mevcut örnekte $N = 1$ olduğunda çözüm için $[-1, 0]$ aralığını 3 eşit parçaya ayıran $t = \left\{ 0, -\frac{1}{2}, -1 \right\}$ noktaları için \mathbf{C}' bulunacaktır. Buna göre t değerleri (3.20) deki \mathbf{T}' matrisinde yerine konduğunda aşağıdaki matris oluşur;

Tablo 3.5 (3.10) da $N=1$ için T'

| T' | $k = -1$ | | $k = 0$ | | $k = 1$ | |
|-------------|----------------------------|--------------------------|---------|---------------|----------------------------|----------------------------|
| $y_1(0)$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $y_2(0)$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $y_1(-0.5)$ | 0.092135 - 0.607765 i | 1.0359 - 0.71543 i | 0.12241 | -0.88645 | 0.092135 + 0.607765 i | 1.03591 + 0.715432 i |
| $y_2(-0.5)$ | -1.03591 + 0.715432 i | 0.09213 - 0.60776 i | 0.88645 | 0.12241 | -1.03591 - 0.715432 i | 0.09213 + 0.60776 i |
| $y_1(-1)$ | -0.922164 + 1.37026 i | -0.67874 - 1.391 i | -0.7708 | -0.21702 | -0.922164 - 1.37026 i | -0.678742 + 1.3910 i |
| $y_2(-1)$ | -0.678742 + 1.39102 i | -0.92216 + 1.370 i | 0.21702 | - 0.770809 | 0.678742 - 1.39102 i | -0.922164 - 1.37026 i |

Bu matrisin tersi alınıp (3.23) de yerine konarak C' aşağıdaki gibi bulunur;

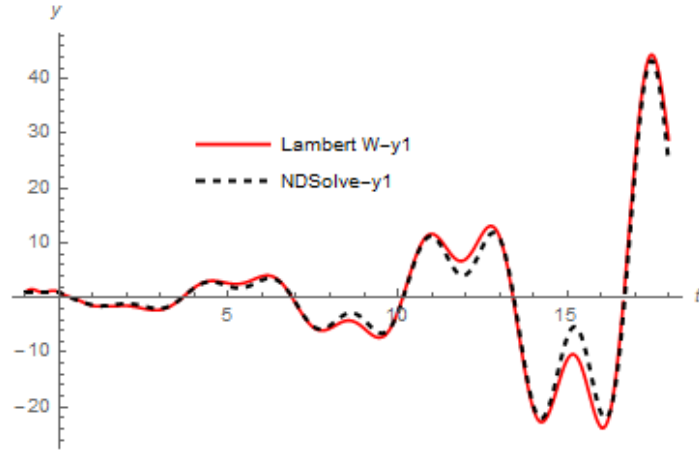
$$C' = \begin{bmatrix} 0.339271 - 0.737405 i \\ 0.612337 + 0.228291 i \\ 0.321457 \\ -0.224673 \\ 0.339271 + 0.737405 i \\ 0.612337 - 0.228291 i \end{bmatrix}$$

Buna göre (3.17) probleminin $N = 1$ için özel çözümü (3.19) dan şu şekilde elde edilir;

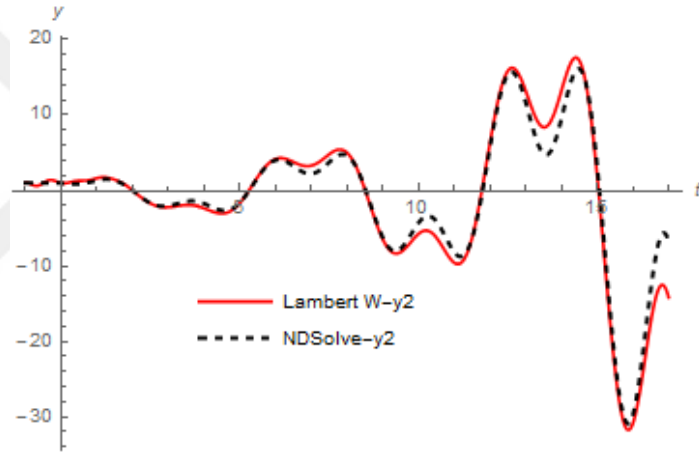
$$y_1(t) = e^{-1.2823 t} (0.567563 e^{1.30798 t} \text{Cos}[0.974983 t] + 0.321457 e^{1.3504 t} \text{Cos}[2.86715 t] + 0.11098 \text{Cos}[8.69987 t] - 1.34974 e^{1.30798 t} \text{Sin}[0.974983 t] - 0.224673 e^{1.3504 t} \text{Sin}[2.86715 t] - 0.125069 \text{Sin}[8.69987 t])$$

$$y_2(t) = e^{-1.2823 t} (1.34974 e^{1.30798 t} \text{Cos}[0.974983 t] - 0.224673 e^{1.3504 t} \text{Cos}[2.86715 t] - 0.125069 \text{Cos}[8.69987 t] + 0.567563 e^{1.30798 t} \text{Sin}[0.974983 t] - 0.321457 e^{1.3504 t} \text{Sin}[2.86715 t] - 0.11098 \text{Sin}[8.69987 t])$$

$N=1$ için Lambert fonksiyonuyla bulunan bu çözümün $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ komponentlerinin Mathematica NDSolve fonksiyonu çözümleriyle beraber grafikleri şu şekildedir;



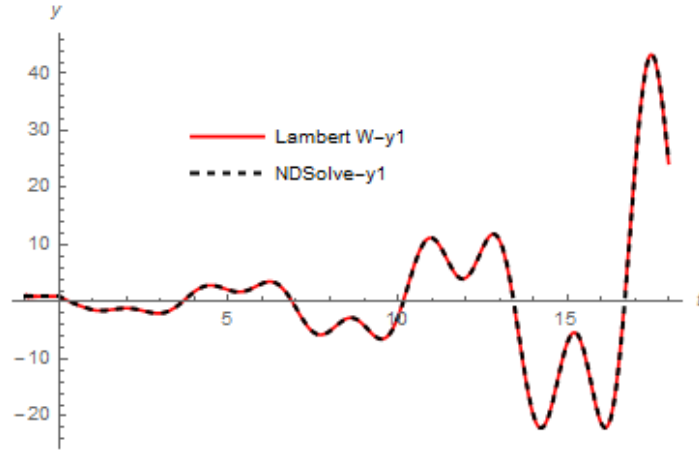
Şekil 3.12 (3.17) de $N=1$ için Lambert $y_1(t)$ ve NDSolve 1. komponent



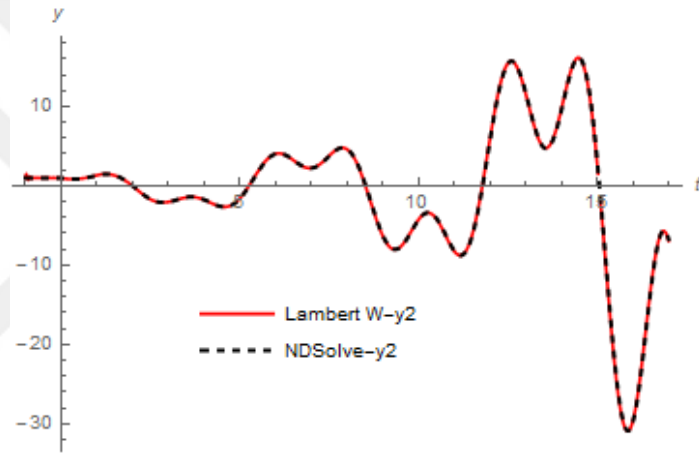
Şekil 3.13 (3.17) de $N=1$ için Lambert $y_2(t)$ ve NDSolve 2. komponent

Bu grafiklerden Lambert çözümlerin NDSolve çözümlerinden önemli miktarda saptığı görülmektedir.

Problem $N = 10$ alınarak çözüldüğündeki grafikler şu şekildedir;



Şekil 3.14 (3.17) de $N=10$ için Lambert $y_1(t)$ ve NDSolve 1. komponent



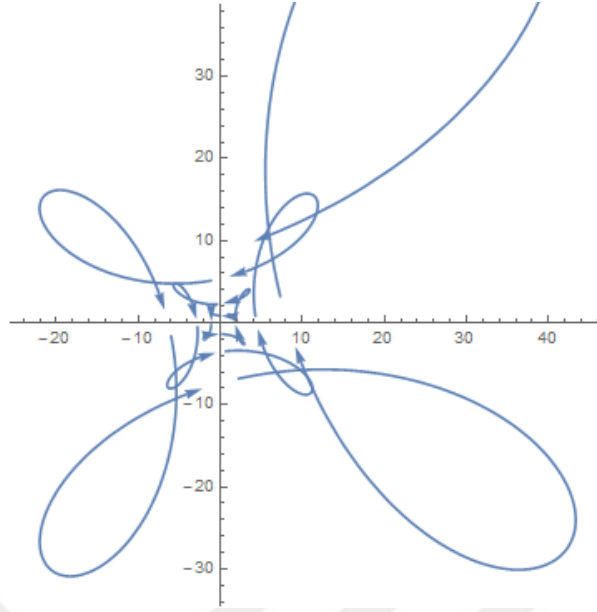
Şekil 3.15 (3.17) de $N=10$ için Lambert $y_2(t)$ ve NDSolve 2. komponent

Burada Lambert fonksiyonu çözümlerinin NDSolve çözümleriyle çok iyi şekilde örtüştüğü görülmektedir.

Bunun nedeni, skaler örneklerde de bahsedildiği üzere N in, yani çözüme giren Lambert fonksiyon dallarının sayısı büyüdükçe başlangıç fonksiyonuna daha fazla (daha sık noktalarda) yaklaşabilmenin mümkün olmasıdır.

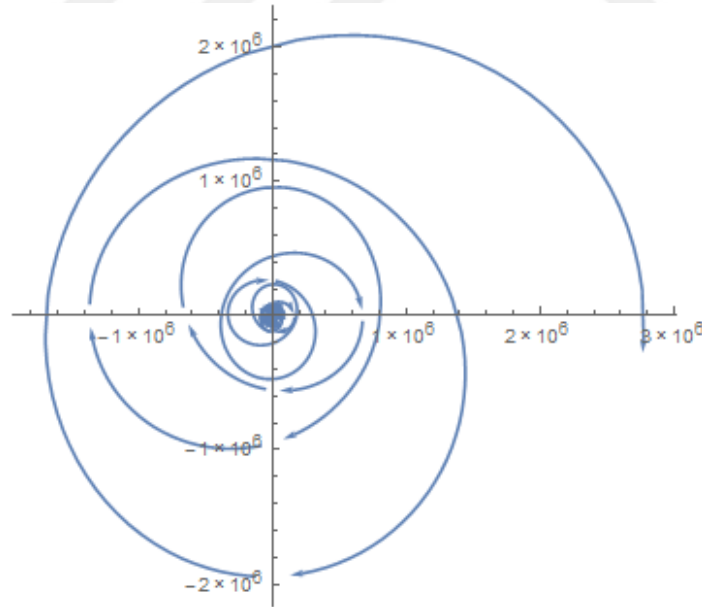
Şekil 3.13 ve Şekil 3.14 grafiklerinden $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ nin düzensiz salınımları olduğu görülmektedir. Bu grafikler $t = 20$ ye kadarki değerleri göstermektedir.

Bu $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ komponentlerinin parametrik grafiği de $t = 20$ için şu şekildedir;



Şekil 3.16 (3.17) Lambert $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin $t = 20$ için parametrik grafiği

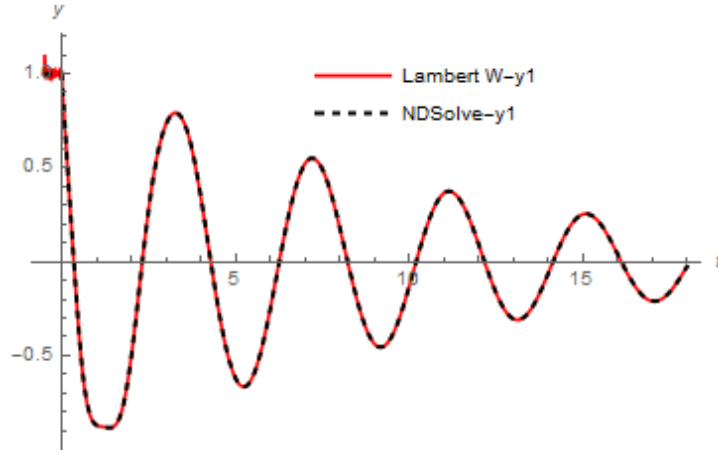
$y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin grafiklerini $t = 60$ a kadar incelediğimizde $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ nin düzenli artan salınımlı yani kararsız çözümler oldukları görülür. Bu durumdaki parametrik grafik şu şekilde oluşur;



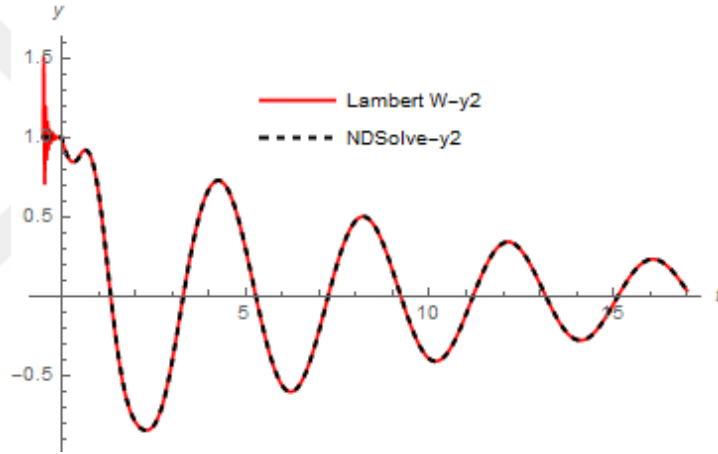
Şekil 3.17 (3.17) Lambert $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin $t = 60$ için parametrik grafiği

3.17 probleminde gecikme terimi $r = 1$ idi. Bu r değerinden daha küçük ve büyük değerler için ortaya çıkan bazı sonuçlar aşağıdaki grafiklerde gösterilmiştir;

$r = 0.5$ olduğu durumda

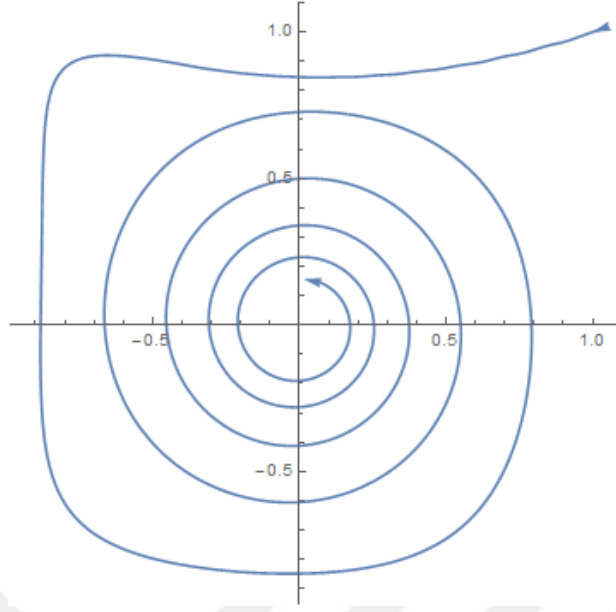


Şekil 3.18 (3.17) de $r = 0.5$ için Lambert $y_1(t)$ ve NDSolve 1. komponent



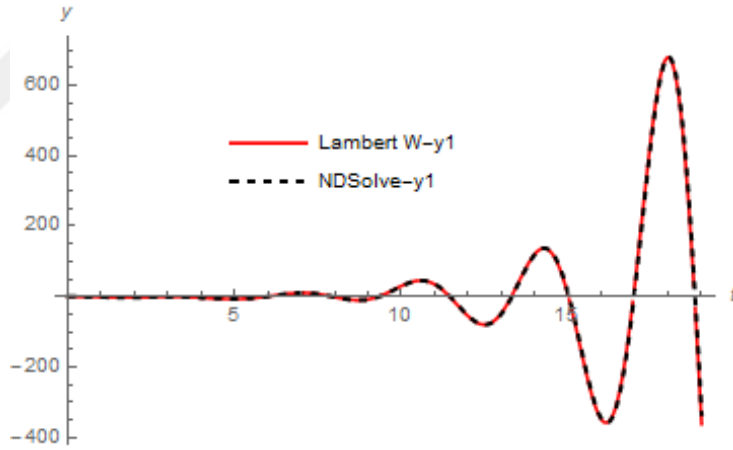
Şekil 3.19 (3.17) de $r = 0.5$ için Lambert $y_2(t)$ ve NDSolve 2. komponent

Bu grafiklerde $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ nin düzenli sönümlü salınımlı olduğu ve sifıra yaklaştıkları yani asimptotik kararlı oldukları görülür. Bu durumdaki parametrik grafik şu şekilde oluşur;

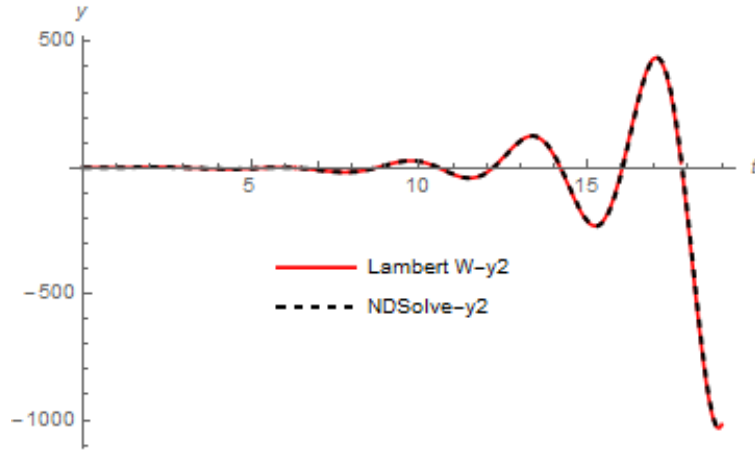


Şekil 3.20 (3.17) $r = 0.5$ için Lambert $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin parametrik grafiği

Gecikme terimi büyüdüğünde, $r = 2$, olduğu durumda grafikler şu şekilde oluşur;;

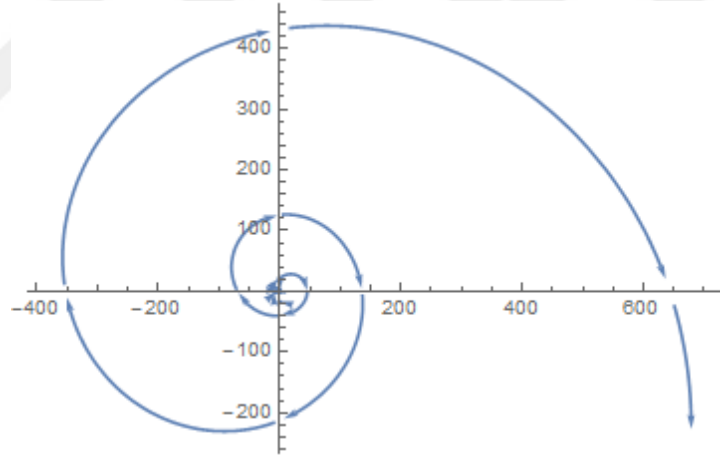


Şekil 3.21 (3.17) de $r = 2$ için Lambert $y_1(t)$ ve NDSolve 1. komponent



Şekil 3.22 (3.17) de $r = 2$ için Lambert $y_2(t)$ ve NDSolve 2. komponent

Bu grafiklerde $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ nin artan salınımlı (kararsız) olduğu görülür. $r = 1$ durumunda da çözümler yine artan salınımlıydı fakat orada salınının düzenli bir şekilde artması için $t > 40$ olması gerekiyordu. Burada $t > 5$ den itibaren düzenli artan salınım gerçekleşmektedir. Bu çözümün parametrik grafiği de şu şekildedir;



Şekil 3.23 (3.17) $r = 2$ için Lambert $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin parametrik grafiği

Örnek 6:

(3.14) deki GDD sistem problemini

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad 3.24$$

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r = 1$$

parametreleriyle inceleyelim.

\mathbf{A} ile \mathbf{A}_d nin komütatif olduğu görülür. (3.15) de $r = 1$ yerine konduğunda

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{W}_k(\mathbf{A}_d e^{-\mathbf{A}}) + \mathbf{A} \quad 3.25$$

olarak yazılır. Burada $-\mathbf{A}$ nın tek özdeğeri çift katlı olarak $\{-1\}$, özvektörü de $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak bulunur. Yani $-\mathbf{A}$ matrisinin cebrik katlılığının 2, geometrik katlılığının 1 olduğu, dolayısıyla $-\mathbf{A}$ nın köşegenleştirilemeyen bir matris olduğu görünür. $e^{-\mathbf{A}}$ teriminin hesaplanması için $-\mathbf{A}$ matrisinin (3.25) deki Jordan normal forma getirilmesi gerekmektedir. Bu konu bir sonraki terim olan Lambert fonksiyonu için detaylandırılacaktır.

(3.25) de Lambert fonksiyonunun argümanı olan

$$\mathbf{A}_d e^{-\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{6}{e^3} & 0 \\ \frac{3}{e^3} & \frac{6}{e^3} \end{bmatrix}$$

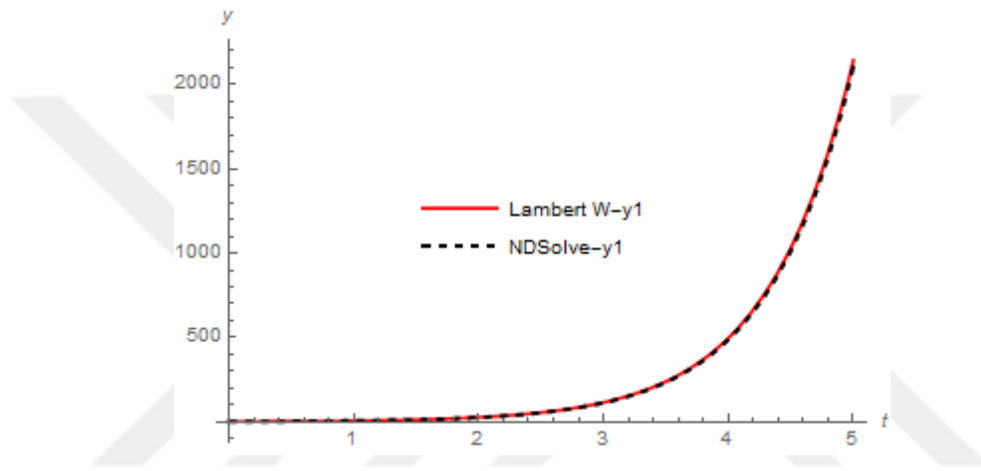
matrisinin de köşegenleştirilemediği (özdeğerin çift katlı olarak $\{\frac{6}{e^3}\}$ olduğu, özvektörününse $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olduğu yani cebrik katlılığın geometrik katlılığından küçük olduğu) görülür. Genelleştirilmiş özvektör matrisi, Jordan form matrisi ve genelleştirilmiş özvektör matrisinin tersi bulunarak

$$\mathbf{W}_k(\mathbf{A}_d e^{-\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^3}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W}_k \left(\begin{bmatrix} \frac{6}{e^3} & 1 \\ 0 & \frac{6}{e^3} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{e^3} & 0 \end{bmatrix}$$

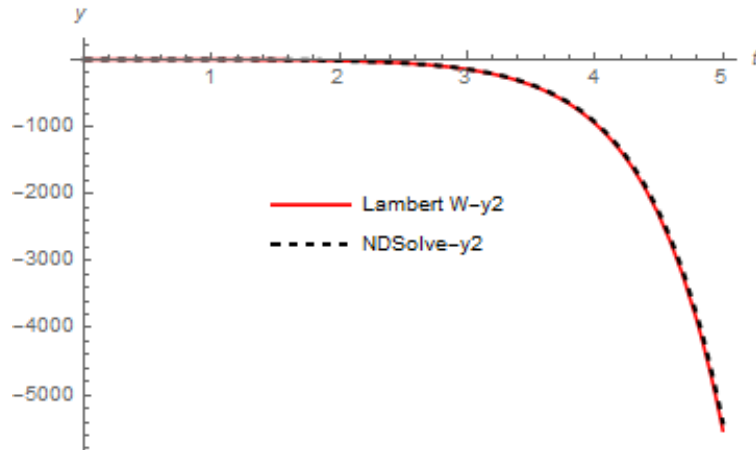
$$W_k(\mathbf{A}_d e^{-\mathbf{A}t}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^{-3}}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_k\left(\frac{6}{e^3}\right) & \dot{W}_k\left(\frac{6}{e^3}\right) \\ 0 & W_k\left(\frac{6}{e^3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{e^3} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan istenen N sayısına göre \mathbf{S}_k lar hesaplanır. (3.16) ya uygun olarak genel çözüm ve başlangıç fonksiyonuna göre özel çözüm oluşturulur.

Buna göre Lambert fonksiyonuyla bulunan çözümün $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ komponentlerinin Mathematica NDSolve fonksiyonu çözümleriyle beraber grafikleri şu şekildedir;



Şekil 3.24 (3.24) de Lambert $y_1(t)$ ve NDSolve 1. komponent



Şekil 3.25 (3.24) de Lambert $y_2(t)$ ve NDSolve 2. komponent



4. SONUÇLAR

GDD nin modelleme anlamındaki katkısı genel kabul görmüş durumdadır. Çoğu durumda GDD nin çözümü adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinden daha zordur. Adımlar yöntemiyle her başlangıç değerli GDD nin çözülebildiği fakat art arda alınması gereken integrallerin kısa sürede çok zorlu hale gelebileceği belirtilmişti. Ayrıca bu integrallerin alındığı aralığın gecikme teriminin değerinden dolayı çok küçük olabileceği, böyle bir durumda çok fazla sayıda integral alma zorunluluğunun olacağı ve bulunacak çözümün büyük ihtimalle sistemin uzun dönem davranışı hakkında bilgi veremeyecek kadar kısa bir süreyi kapsayacağı ifade edilmişti.

Lambert W fonksiyonu kompleks düzlemde tanımlı, kompleks değerler alan çoğul değerli bir fonksiyondur. Çoğul değerli olmasından dolayı farklı dallar cinsinden tanımlanmıştır. Böylece her bir dalın iyi tanımlanmış fonksiyonlar olması temin edilmiştir.

Lambert W fonksiyonu bu çalışmada

$$\dot{y}(t) = \alpha y(t) + \alpha_d y(t - r)$$

skaler GDD sınıfına ve

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_d \mathbf{y}(t - r)$$

aynı sınıf GDD sistemine uygulanmıştır. GDD sistemine Lambert W fonksiyonu uygulanırken \mathbf{A} ve \mathbf{A}_d nin komütatif olma zorunluğu vardı. Biz örnek problemimizde bu özelliğe uygun \mathbf{A} ve \mathbf{A}_d kullanmıştık. \mathbf{A} ve \mathbf{A}_d nin komütatif olma zorunluluğunun bir çok uygulama için Lambert W fonksiyonunun kullanılabilirliği açısından önemli bir kısıt olduğu açıktır.

Bu belirli sınıf GDD lerde skaler ve matris Lambert W fonksiyonu uygulamalarıyla çözümler analitik olarak elde edilebilmiştir. Lambert W fonksiyonu dallarıyla sonsuz sayıda bulunan çözümlerin başlangıç değer fonksiyonuyla uyumlu hale getirilmesi için uygulanan metoda odaklanıldığında bu metodun ne kadar fazla sayıda Lambert fonksiyon dalı çözüme alınırsa özel çözümün başlangıç fonksiyonuna o kadar yakın olacağını temin ettiği görülür. Başlangıç fonksiyonunun tam olarak, genel çözüme dahil olan Lambert dalları çözümlerinin lineer kombinasyonu olduğu durumda Lambert fonksiyonu

yöntemiyle bulunan özel çözüm $t \in [-r, \infty]$ aralığında tam doğru olacaktır. Aksi takdirde başlangıç fonksiyonuyla $t \in [-r, 0]$ aralığındaki sapma $t \in [0, \infty]$ aralığına da etkiyecek ve sapmanın miktarına ve denklemin artan veya sönümlenen karakterine göre denklemin gerçek çözümüyle hesaplanan Lambert özel çözümü arasındaki hata farkı artabilecektir. Adi diferansiyel denklemlerde başlangıç bilgisi belirli noktalar olarak verildiği için sayılamayan sonsuz noktada yani $[-r, 0]$ aralığında uyum aranmamaktaydı. Bu durum GDD lerin sonsuz, adi diferansiyel denklemlerin ise sonlu boyutlu olmalarıyla da açıklanır.

İncelenen sınıftaki skaler ve sistem GDD lerin Lambert dalları cinsinden ifade edilen genel çözümlerinden görülmektedir ki her durumda sönümlü veya sönümsüz salınımlı çözümler bulunmaktadır. Bilindiği üzere skaler (tek boyutlu) adi diferansiyel denklemlerde çözüm salınımlı olamamaktaydı. İncelenen sınıftaki GDD lerde skaler durumda da her biri ayrı bir Lambert dalına ait olmak üzere sonsuz sayıda lineer bağımsız salınımlı çözüm olduğu gözükmemektedir.

Lambert W fonksiyonuyla analitik olarak ifade edilebilmiş çözümlerin nümerik değerleri Mathematica' da *ProductLog* fonksiyonu üzerinden alınmıştır.

Bu çalışmada ancak bazı bilgisayar programlarıyla nümerik olarak çözülebilen (Mathematica'da *NDSolve* fonksiyonu vb) veya Laplace dönüşümü yöntemiyle çözülsede ters Laplace dönüşümü çok zorlu olabilen belirli sınıf GDD lerin analitik olarak Lambert W fonksiyonu cinsinden çözümlerinin nasıl elde edilebileceği açıklanmıştır. Çözüm fonksiyonlarını denklemin parametreleri cinsinden yazabilmek mümkün olmuştur. Lambert W fonksiyonunun tüm dalları için nümerik değerlerini Mathematica' da *ProductLog* fonksiyonundan aldık. *ProductLog* fonksiyonu reel ve kompleks *skaler* girdiler için doğru değerler vermekte fakat mevcut haliyle direk kullanımda *matris* girdi için doğru sonuç vermemektedir. Tezdeki 2.4. bölümünde açıklanan *matris* fonksiyonları metoduyla, köşegenleştirme veya Jordan forma getirme adımlarından sonra, *ProductLog* fonksiyonunu kullanarak *matris* girdilerin Lambert W değerlerini hesaplamak mümkün olmaktadır.

Bu çalışmada yer almamakla birlikte GDD lerin çatallaşma analizlerinde de Lambert W fonksiyonunun uygulama alanları vardır. En azından sabit noktalarda lineerleştirilmiş sistemlerin karakteri hakkında Lambert W fonksiyonundan faydalanılabilir.

KAYNAKLAR

1. Hale, J., (1977). Theory of Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, Volume 3, Springer Verlag, New York.
2. Kuang, Y., (1993). Delay Differential Equations With Applications In Population Dynamics, Mathematics In Science And Engineering, Volume 191, Academic Press, San Diago.
3. Driver, R. D., (1977). Ordinary And Delay Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, Volume 20, Springer Verlag, New York.
4. Kolmanovskii, V., Myshkis, A., (1999). Introduction To The Theory And Applications Of Functional Differential Equations, Mathematics And Its Applications, Volume 463, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
5. Bellman, R., Kenneth, L. C., (1963). Differential – Difference Equations, Mathematics In Science And Engineering, Volume 6, Academic Press, New York.
6. Smith, H., (2011). An Introduction To Delay Differential Equations With Applications To Life Sciences, Texts In Applied Mathematics, Volume 57, Springer, New York.
7. El'sgol'ts, L. E., Norkin, S.B., (1973). Introduction To The Theory And Application Of Differential Equations With Deviating Arguments, Mathematics In Science And Engineering, Volume 105, Academic Press, New York.
8. Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J., Knuth, D.E., (1996). On The Lambert W Function. Advances In Computational Mathematics, Volume 5 (1), 329-359.
9. Corless, R.M., Jeffrey, D.J., Knuth, D.E., (1997). A Sequence of Series For The Lambert Function. Proceedings of the 1997 International Symposium On Symbolic And Algebraic Computation, 197-204.
10. Yi, S., Nelson, P.W., Ulsoy, G., (2010). Time-Delay Systems Analysis And Control Using The Lambert W Function, World Scientific, Singapore.
11. Shinozaki, H., (2007), Lambert W Function Approach To Stability And Stabilization Problems For Linear Time-Delay Systems, Phd thesis, Kyoto Institute of Technology, Kyoto, Japan, 15-17.
12. Higham, N. J., (2008). Functions of Matrices – Theory And Computation, Society For Industrial and Applied Mathematics, Philedelphia.

13. Kolmanovskii, V., Myshkis, A., (1992). Applied Theory Of Functional Differential Equations, Mathematics And Its Applications, Volume 85, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
14. Ulsoy, G., Asl, F.M., (2003). Analysis Of a System Of Linear Delay Differential Equations. Journal of Dynamic System Measurement And Control, Volume 125 (2), 215-223.
15. Yi, S., Nelson, P.W., Ulsoy, G., (2008). Controllability And Observability Of Systems Of Linear Delay Differential Equations Via The Matrix Lambert W Function. IEEE Transactions On Automatic Control, Volume 53 (3), 854-860.
16. Heffernan, J.M., Corless, R.M., (2006). Solving Some Delay Differential Equations With Computer Algebra. Mathematical Scientist, Volume 31 (1), 21-34.

ÖZGEÇMİŞ

Volkan Yaman 1980 yılında İstanbul'da doğdu. 2002'de İstanbul Teknik Üniversitesi Endüstri Mühendisliği bölümünde lisans, 2006'da Galatasaray Üniversitesi Endüstri Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2015-2016 Bahar döneminde Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.

