



**QUASI-GEOMETRİK KONVEKS
FONKSİYONLAR İÇİN UYUMLU KESİRLİ
İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER**

Didare Şeyma KARAMAN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ
2019
Her hakkı saklıdır**

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**QUASI-GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN UYUMLU
KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER**

Didare Şeyma KARAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞRI
2019

Her hakkı saklıdır



T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü



TEZ ONAY FORMU

QUASI-GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN UYUMLU KESİRLİ
İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ danışmanlığında, Didare Şeyma KARAMAN tarafından hazırlanan bu çalışma, 21/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Furkan YILDIRIM

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../201.. tarih ve / nolu karar ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim HAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

QUASI-GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Didare Şeyma KARAMAN

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ

Bu tezde öncelikle konveks fonksiyon kavramı ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Konvekslik türlerinin yanı sıra konveks fonksiyonlar ile ortalamalar arasındaki ilişki ortaya konmuştur. Ardından kesirli türev ve integral kavramları tanıtılmıştır. Kesirli türevler içerisinde önemli bir yere sahip olan uyumlu kesirli türev ve integrallerin tanımı verilmiştir. Uyumlu kesirli integral operatörü kullanılarak elde edilmiş ve literatürde mevcut olan bazı eşitsizlikler sunulmuştur. Araştırma bulgularında ise quasi-geometrik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

2019, 57 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hadamard tipli eşitsizlikler, Hölder eşitsizliği, Power-mean eşitsizliği, m –konveks fonksiyonlar, uyumlu kesirli integraller.

ABSTRACT

Master Thesis

INTEGRAL INEQUALITIES FOR QUASI- GEOMETRIC CONVEX FUNCTIONS VIA CONFORMABLE FRACTIONAL INTEGRALS

Didare Şeyma KARAMAN

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

In this thesis, firstly the concept of convex function and various properties of convex function are examined. In addition to the convexity types, the relationship between the convex functions and the special means has been demonstrated. Then the concepts of fractional derivative and integral are introduced. The definition of conformable fractional derivatives and integrals which have an important place in fractional derivatives are given. Some inequalities which are obtained by using conformable fractional integral are presented in the literature. In research findings, Hermite-Hadamard type inequalities for quasi-geometric convex functions were obtained.

2019, 57 pages

Keywords: Hadamard type inequalities, Hölder inequality, Power-mean inequality, m –convex functions, conformable fractional integrals.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans çalışmam boyunca, çalışmalarına yardımcı olan, bana rehberlik eden, engin tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmalarımnda etkin katkısı bulunan, beni her zaman destekleyen ve yönlendiren saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ'e;

ve Matematik Bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Didare Şeyma KARAMAN

2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler	4
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları	11
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	21
3.1. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller.....	21
3.1.1. Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integralleri	21
3.1.2. Caputo kesirli türevleri.....	23
3.1.3. Uyumlu Kesirli Türevin Analizi	24
3.2. Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	32
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	44
4.1. Quasi-geometrik Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikler	44
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	53
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
$^{(k)}D_{\alpha}^a$	$k\alpha$ mertebeli dizisel Riemann-Liouville kesirli türev
$^{(n)}T_{\alpha}^a$	n . mertebeden sol dizisel uyumlu kesirli türev
${}^bT_{\alpha}^{(n)}$	n . mertebeden sağ dizisel uyumlu kesirli türev
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	Kapsar veya Eşit
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\in$	Elemanıdır
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Euclidean Uzay
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	I 'nın İçi
$L_1([a, b])$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$SX(h, I)$	h –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$SV(h, I)$	h –konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m(b)$	m –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	(α, m) –konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum

$X_c^p(a,b)$	$[a,b]$ aralığında kompleks değerli Lebesgue anlamında ölçülebilir fonksiyonların kümesi
$D_\alpha^a f(t)$	Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev
$J_{a+}^\alpha f(t)$	Sol Riemann-Liouville kesirli integral
$J_{b-}^\alpha f(t)$	Sağ Riemann-Liouville kesirli integral
${}^C D_\alpha^a f(t)$	Caputo kesirli mertebeden türev
$T_\alpha(f)(t)$	Uyumlu kesirli türev
$T_\alpha^a f(t)$	Sol Uyumlu kesirli türev
${}^b T_\alpha f$	Sağ Uyumlu kesirli türev
$I_\alpha^a f(t)$	Sol Uyumlu kesirli integral
${}^b I_\alpha f(t)$	Sağ Uyumlu kesirli integral
$D^\alpha f(t)$	Katugampola kesirli mertebeden türev
$I_{a+}^\alpha f(x)$	Sol Hadamard kesirli integral
$\left(I_{a+;\rho,\eta}^\alpha\right) f(t)$	Sol Erdelyi-Kober kesirli integral
${}^\rho I_{a+}^\alpha f(t)$	Sol Katugampola kesirli integrali
${}^\rho I_{b-}^\alpha f(t)$	Sağ Katugampola kesirli integrali
$L_\alpha[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında α mertebeden integrallenebilen fonksiyonların kümesi

${}^{\rho}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha} f(t)$	Genelleştirilmiş Sol Katugampola kesirli türevi
${}^{\rho}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha} f(t)$	Genelleştirilmiş Sağ Katugampola kesirli türevi
$D_t^{\alpha} f(t)$	Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türev
$I_a^t f(t)$	Caputo-Fabrizio kesirli integrali
$D_t^{\alpha} f(t)$	Genelleştirilmiş Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türev
$E_{\alpha}(z)$	Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
${}^{ABC}_b D_t^{\alpha} f(t)$	Caputo anlamında Atangana-Balenau kesirli türevi
${}^{ABR}_b D_t^{\alpha} f(t)$	Riemann anlamında Atangana-Balenau kesirli türevi
${}^{AB}_a I_t^{\alpha} \{f(t)\}$	Atangana-Balenau kesirli integrali
$H(a,b)$	Sobolev uzayı
$AC[a,b]$	$[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonların kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks küme	4
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	4
Şekil 2.3. Konveks fonksiyon.....	6
Şekil 2.4. Aralık Üzerinde Konveks fonksiyon.....	8
Şekil 2.5. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon	12
Şekil 2.6. Quasi-konveks olmayan fonksiyon.....	13
Şekil 3.1. $f(x) = x$ fonksiyonu Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri.....	22
Şekil 3.2. $f(x) = 1$ fonksiyonu Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri.....	23

1. GİRİŞ

Kesirli analizin tarihi, diferansiyellenme teorisinin ortaya çıkışına kadar dayanmaktadır. Tarihi çok eskilere dayanmasına rağmen, fiziksel yapısındaki karmaşıklıklardan dolayı klasik analiz gibi yorumlanmaması bu konuyla ilgili çalışmaları ertelemiş ve bilim, mühendislikte çok popüler olmamıştır. Ancak kesirli türev ve integrallerin yerel veya noktasal bir büyüklük olmamaları, doğanın gerçekliğini daha iyi ifade etmesi açısından kesirli analiz konusunu dikkat çekici hale getirmiştir. Bu yüzden, bu konunun bilim ve mühendislik alanında daha yaygın hale getirilmesi, doğanın daha iyi yorumlanması ve ifade edilmesinde önemli bir rol oynayacaktır.

1695 yılında ilk kez kesirli türev ve integral kavramları L'Hospital tarafından Leibnitz'e gönderilen bir mektupta türev mertebesi $1/2$ olması durumunda anlamlı olup olmayacağını sormasıyla ortaya atılmıştır. Böylece kesirli analizin doğuşu L'Hospital'in sorusuyla başlamıştır.

Leibnitz ve L'Hospital'den sonra 1730 yılında kesirli analiz konusu Euler'in de dikkatini çekmiştir. 1772 yılında J.L. Lagrange ise diferansiyel operatörler için kuvvet alma kanunundan bahsettiği çalışmasında dolaylı olarak kesirli analize katkıda bulunmuştur. 1812 yılında P. S. Laplace, integraller yoluyla kesirli türevi tanımlamış ve 1819 yılında S.F. Lacroix 700 sayfalık çalışmasında keyfi mertebeden türevden bahsetmiştir. Bunun ardından 1822 yılında J. B. J. Fourier keyfi mertebeden türevleri çalışma konusu yapmıştır.

Kesirli operatörler ilk kez N. H. Abel tarafından 1823 yılında tautochrane probleminin çözümünde kullanılmıştır. 1832 yılında J. Liouville, kesirli analiz tanımlarını teorik problemlere uygulayarak ilk önemli çalışmayı yapmıştır. 1892 yılında G. F. B. Riemann, yayımladığı çalışmasında üzerinde uzun yıllar çalıştığı kesirli integrasyon teorisini geliştirmiştir. 1868 ile 1872 yılları arasında A. V. Letnikov, bu konu üzerine pek çok makale yayınlamıştır. 1900 ile 1970 yılları arasında kesirli analiz konusuna önemli katkıları bulunan bilim adamları ise H. H. Hardy, S. Samko, H. Weyl, M. Riesz, S. Blair'dir. 1970 yılından günümüze kadar

olan zamanda J. Spanier, K. B. Oldham, B. Ross, A. Kılbaş, M. Caputo, I. Podlubny, M. Fabrizio, T. Abdeljawad, R. Khalil, A. Atangana, D. Balenau, J. Losada, J.J. Nieto gibi birçok bilim adamı bu konu üzerinde ciddi çalışmalar ortaya koymaktadırlar.

Yukarıda adı geçen kesirli türev tanımları da dahil literatürdeki bütün kesirli türev tanımlarının klasik türev tanımından aldıkları tek ortak özellik lineer olma özelliğidir (Khalil *et al.* 2014). Bunun dışındaki özelliklerle alakalı olarak bir uyum genellikle söz konusu değildir. Mesela sabitin kesirli türevi Riemann-Liouville kesirli türev tanımı için sıfır olmamaktadır. Yine klasik türevdeki iki fonksiyonun çarpımının ve bölümünün türevi formülü bütün kesirli türevler için geçerli değildir. Buna benzer olarak yine bütün kesirli türev tanımları klasik türevdeki zincir kuralını sağlamaz.

Son zamanlarda klasik türevin doğal genişletilmesi olarak görülen kesirli türevin yeni bir tanımı verildi (Khalil *et al.* 2014). Bu yeni tanım klasik türeve uyumuyla dikkat çekmektedir. Yukarıda sayılan ve diğer kesirli türevler için sağlanmayan, çarpım kuralı ve bölüm kuralı bu yeni kesirli türev tanımı için sağlanmaktadır. Zincir kuralı ise klasik türevdeki kurala çok yakın olarak yazılabilmektedir. Uyumlu kesirli türev (conformable fractional derivative) olarak adlandırılan bu yeni kesirli türev tanımı, sağladığı bu özelliklerden dolayı büyük bir ilgiyi üzerine çekmiş ve kısa zamanda bu yeni tanımla alakalı birçok çalışma yapılmıştır.

Khalil *et al.* (2014) tarafından ortaya atılan bu yeni tanım klasik türevdekine benzer bir limit formuna sahiptir. Khalil ve arkadaşları yaptıkları çalışmada bu yeni kesirli türev tanımının (ya da dönüşümünün) çarpım kuralını ve bölüm kuralını sağladığını ispat ettiler. Ayrıca onlar yaptıkları çalışmada uyumlu kesirli mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlar için Rolle teoremi ve ortalama değer teoremini ifade ettiler. Uyumlu kesirli türev analizi, Abdeljawad (2015) tarafından geliştirildi. Abdeljawad yapmış olduğu çalışmada bu yeni tanım için sol ve sağ uyumlu kesirli türev kavramlarını, kesirsel zincir kuralını ve Gronwall eşitsizliğini sundu. Ayrıca

uyumlu kesir mertebeden dizisel türev kavramını, $0 < \alpha \leq 1$ için iki tür kesirsel kısmi integrasyon formüllerini, uyumlu kesirsel kuvvet seri açılımını, kesirsel Taylor eşitsizliğini ve son olarak kesirsel Laplace dönüşümünü verdi.



2. KURAMSAL TEMELLER

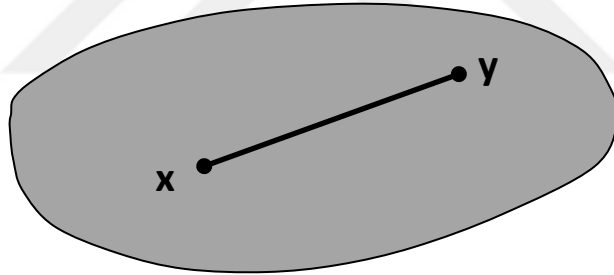
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Çalışmamız için önemli olan bazı temel tanımlar şu şekilde sıralanmıştır.

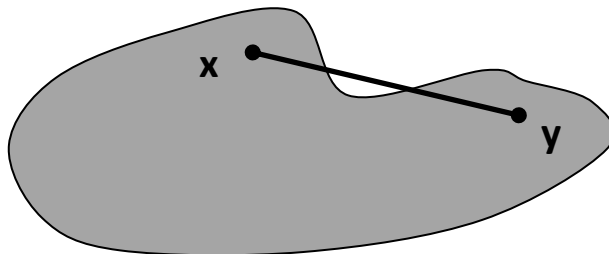
Tanım 2.1.1. Konveks Küme: L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = tx + (1 - t)y, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = tx + (1 - t)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $t + (1 - t) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $t, 1 - t$ yerine $t + k = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan t, k reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir” (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. (J –Konveks Fonksiyon) $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir” (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Kesin J –Konveks Fonksiyon) Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir” (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

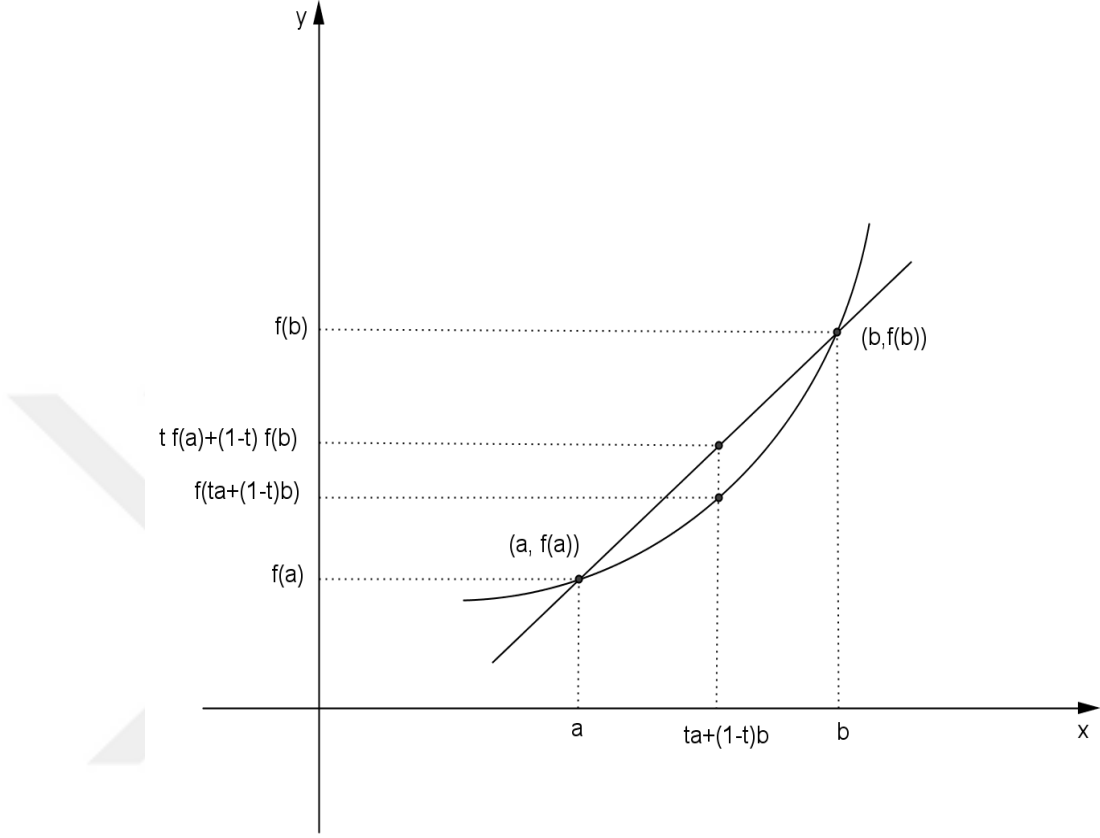
şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.” (Pečarić *et al.* 1992).

Eğer $\alpha \in (0,1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da strictly konveks fonksiyon denir. “ $-f$ ” konveks (strictly konveks) ise o zaman f' ye konkav (strictly konkav) denir.

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak $ta + (1 - t)b$ noktasında; f 'nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.

Şekil 2.3. den de görüldüğü gibi $t \in [0, 1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1 - t)f(b) \leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$ 'nın $(1 - t)f(b)$ de $f(b)$ 'nin altındadır.

Dolayısıyla $tf(a) + (1 - t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için f' nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Teorem 2.1.1. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n| \quad (x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Örnek 2.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

Çözüm: f 'nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = |\alpha x + (1 - \alpha)y|$$

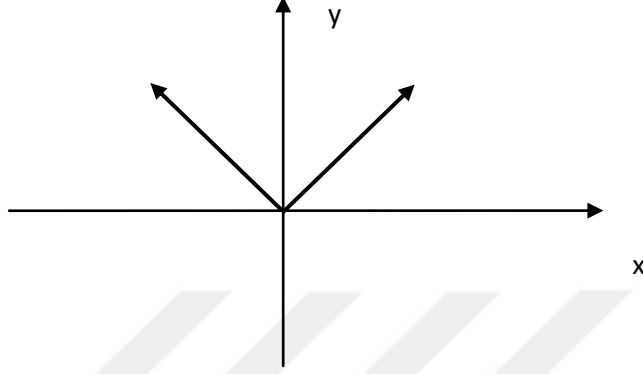
$$\leq \alpha + |(1 - \alpha)y| \quad (\text{üçgen eşitsizliğinden})$$

$$= \alpha|x| + (1 - \alpha)|y|$$

$$= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur.

$f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ da türeve sahip olmamasına rağmen konveks fonksiyondur.



Şekil 2.4 Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Sonuç 2.1.1. “ $x, y \in \mathbb{R}$ ve $p + q > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

eşitsizliği (2.1) eşitsizliğine denktir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.3. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.4. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović et al. 1993)

Tanım 2.1.5. (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , x_0 ’da süreklidir denir” (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.6. (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in S$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , S ’de düzgün süreklidir denir” (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.7. (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f , S 'de Lipschitz şartını sağlıyor denir” (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.2. “ f , S 'de Lipschitz şartını sağlıyorsa f , S 'de düzgün süreklidir” (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1.5. $[a, b] \subseteq I$ olsun. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak f , $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I° 'de süreklidir (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.6. “ f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. f , (a, b) aralığında süreklidir ve

b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır” (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.8. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I 'da iki nokta olsun. Bu durumda

(a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

(b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

(c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

(d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

Denir” (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.7. “ J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f , I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

(b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

(c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

(d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.” (Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.3. “ f, g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvektir” (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.8. “Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I° ’de artandır (kesin artandır)” (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.9. “ f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' ’nin artan (kesin artan) olmasıdır” (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.10. “ f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq (>)0$$

olmasıdır” (Pečarić *et al.* 1992).

2.2 Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuda çalışanlar tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.2.1. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ’ye *quasi* –konveks fonksiyon denir” (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ’ye *strictly quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f' 'ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(ax + (1 - \alpha)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f' 'ye strictly *quasi* –konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

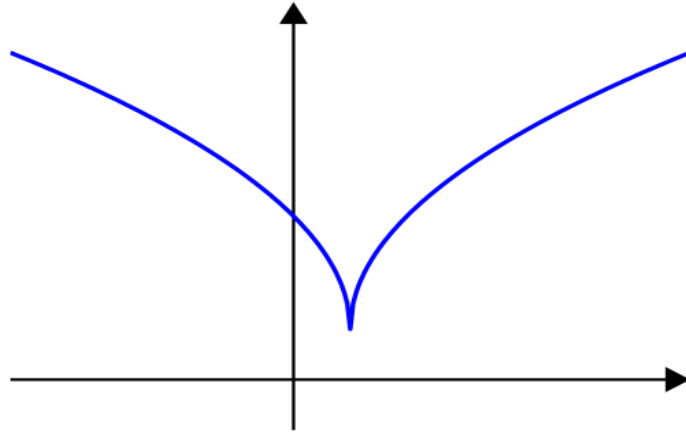
Tanım 2.2.2. “ f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f' 'ye *quasi* –monotonik denir” (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 2.2.1. “Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır.

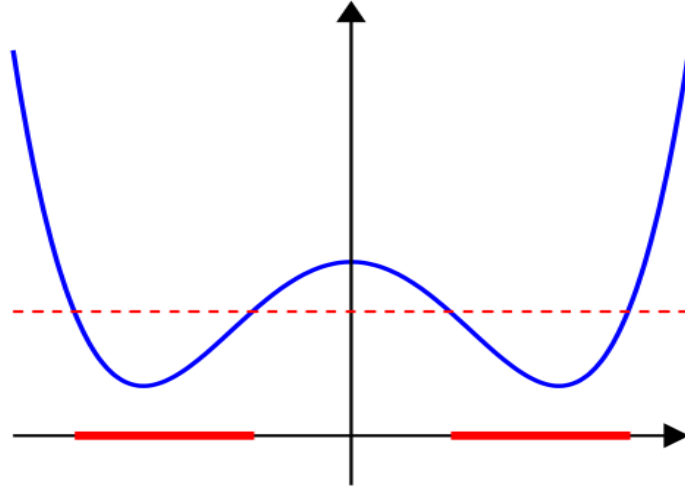
Örneğin $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1] \\ t^2, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur” (Ion 2007).



Şekil 2.5. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon



Şekil 2.6. Quasi-konveks olmayan fonksiyon

Quasi-konveks olmayan bir fonksiyon: Fonksiyonun tanım kümesinde, değerleri kırmızı kesik çizginin altında kalan noktalar, iki kırmızı aralığın birleşimidir ve fonksiyon bu noktaların birleşiminde konveks değildir.

Tanım 2.2.3. (Wright-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \alpha > 0$ şartları altında her bir $y + \alpha, x \in I$ için

$$f(x + \alpha) - f(x) \leq f(y + \alpha) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-konveks fonksiyon denir" (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.4. (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x, \alpha > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \alpha \in I$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x + \alpha)] \leq \max\{f(x), f(y + t)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir" (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.5. (J –Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna J – *quasi* –konvektir denir” (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.2.6. (Log-Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ ’de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f^t(x)f^{1-t}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konvektir denir” (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.2.7 (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I, t \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak;

$$f \in Q(I) \text{ ve } x, y, z \in I \text{ ise bu takdirde}$$

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır” (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.2.8. (P –Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in I, t \in [0,1]$ olmak üzere;

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P –fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir” (Dragomir *et al.* 1995).

Tanım 2.2.9. (m –Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $\alpha \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + m(1 - \alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m –konvektir denir” (Toader 1984).

– f fonksiyonu m –konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m –konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde m –konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.10. (Birinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}^+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir” (Orlicz 1961).

Tanım 2.2.11. (İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}^+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir” (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki s –konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.2.1. “ $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

- (i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.
- (ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir” (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.2.12. (h –Konveks Fonksiyon): $h: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y) \quad (2.3)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir” (Varošanec 2007).

“(2.3) eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$ ’dır” (Varošanec 2007).

“Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha) = \alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = 1$ ise $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ’dır; $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(\alpha) = \alpha^s$ ise $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ ’dir” (Varošanec 2007).

Tanım 2.2.13. (Starshaped Fonksiyon): $b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her

$x \in [0, b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona starshaped fonksiyon denir” (Toader 1984).

Tanım 2.2.14. (Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir” (Zhang *et al.* 2012).

Tanım 2.2.15. (s –Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(x^\alpha y^{1-\alpha}) \leq [f(x)]^{\alpha^s} [f(y)]^{(1-\alpha)^s}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s –geometrik konveks fonksiyon denir” (Zhang *et al.* 2012).

$s = 1$ için, s –geometrik konveks fonksiyon tanımının geometrik konveks fonksiyon tanımına dönüşeceği açıktır.

Tanım 2.2.16. (Harmonik Konveks Fonksiyon) $I \subset \mathbb{R}/\{0\}$ bir açık aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{\alpha x + (1-\alpha)y}\right) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.2.17. (Ortalama Fonksiyonu) M fonksiyonu $M: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

$$(1) M(x, y) = M(y, x)$$

$$(2) M(x, x) = x$$

$$(3) x < M(x, y) < y, x < y$$

$$(4) M(ax, ay) = aM(x, y), a > 0$$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir” (Anderson *et al.* 2007).

Örnek 2.2.2

“(1) $M(x, y) = A(x, y) = \frac{x+y}{2}$ Aritmetik ortalama

(2) $M(x, y) = G(x, y) = \sqrt{xy}$ Geometrik ortalama

(3) $M(x, y) = H(x, y) = 1/A(1/x, 1/y)$ Harmonik ortalama

(4) $M(x, y) = L(x, y) = \frac{x-y}{\log x - \log y}, x \neq y$ için ve $L(x, x) = x$ Logaritmik ortalama

(5) $M(x, y) = I(x, y) = \left(\frac{1}{e}\right) \left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}}, x \neq y$ ve $I(x, x) = x$ İdentrik ortalama”

(Anderson *et al.* 2007).

Tanım 2.2.18. (MN- Konveks (Konkav) fonksiyon): $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $I \subseteq (0, \infty)$ ve M, N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ için

$$f(M(x, y)) \leq (\geq) N(f(x), f(y))$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna MN –konveks(konkav) fonksiyonu denir” (Anderson 2007).

Teorem 2.2.1. “ $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b)$, $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart f nin konveks (konkav) olmasıdır.

(2) f nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(3) f nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(4) f nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(5) f nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(6) f nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(7) f nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(8) f nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(9) f nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır” (Anderson 2007).

Teorem 2.2.2. “ $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b)$, $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(2) f nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(3) f nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(4) f nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(5) f nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(6) f nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(7) f nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(8) f nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(9) f nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır” (Anderson 2007).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller

Kesirli analiz, klasik analizin bir genişlemesi olarak kabul edilebilir. Kesirli analizde klasik analizde olduğu gibi tek bir türev tanımı olmayıp birden fazla türev tanımının varlığı, problemin en iyi çözümünün elde edilmesi fırsatını verir.

Kesirli analiz birçok bilim adamı tarafından çalışılmış ve farklı gösterimlerle kesirli türev ve integrali değişik şekillerde ifade etmişlerdir. Fakat bu ifadelerin birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları açısından farklılıklar gösterir.

3.1.1. Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integralleri

Tanım 3.1.1.1. $\alpha > 0$ olmak üzere α mertebeden Riemann-Liouville integral operatörü J

$$(J_{\alpha}^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a \quad (3.1)$$

$$(J_0^a f)(t) = f(t) \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanır (Ross 1977; Samko 2009).

f , $t \geq a$ için sürekli olsun. $\alpha, \beta > 0$, ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$\text{a. } (J_{\alpha}^a J_{\beta}^a f)(t) = (J_{\alpha+\beta}^a f)(t) \quad (3.3)$$

$$\text{b. } (J_{\alpha}^a J_{\beta}^a f)(t) = (J_{\beta}^a J_{\alpha}^a f)(t) \quad (3.4)$$

$$c. J_{\alpha}^a t^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma} \quad (3.5)$$

Tanım 3.1.1.2. Riemann-Liouville kesirli türev operatörü, $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $t > a$ ve $m - 1 < \alpha \leq m$ için,

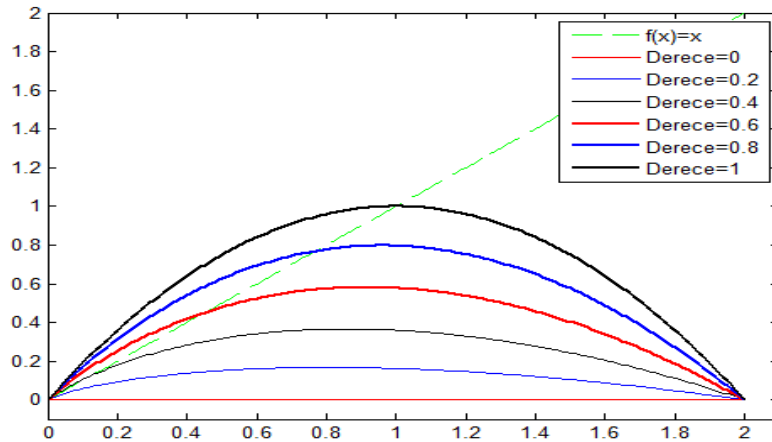
$$(D_{\alpha}^a f)(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t - x)^{\alpha - m + 1}} dx \right]$$

olarak tanımlanır (Ross 1977; Samko 2009).

Riemann-Liouville kesirli türev tanımı, kesirli türev ve integral teorisinin gelişmesinde ve bunların matematikteki uygulamalarında önemli bir rol oynamasına rağmen Riemann-Liouville yaklaşımının problemlerin yorumlanmasında yetersiz kaldığı ortaya konmuştur.

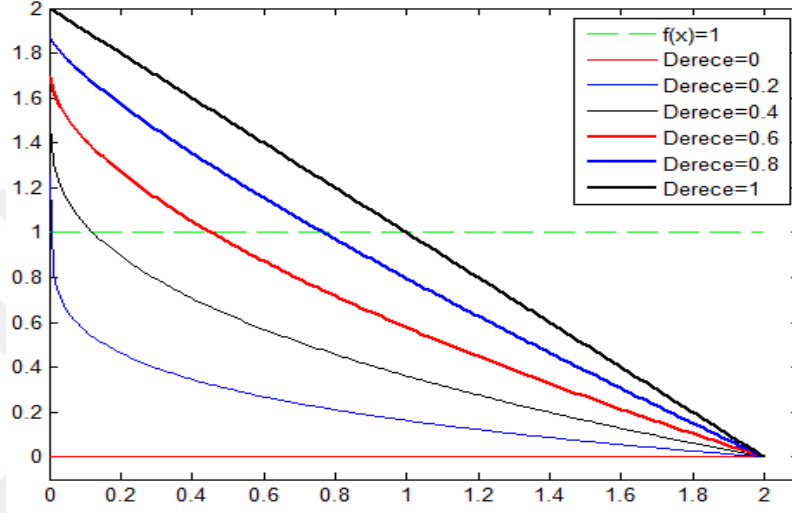
Riemann-Liouville kesirli türev tanımının diğer bir eksikliği ise sabit fonksiyon ve birim fonksiyon incelenerek doğrudan gösterilebilir.

Bir birim fonksiyonun, kesirli mertebeden türevi ne olursa olsun türev sonucu 1 olmalıdır. Fakat Şekil 3.1’de Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevleri incelendiğinde bu durumun geçerli olmadığı görülmektedir.



Şekil 3.1 $f(x)=x$ fonksiyonu Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri

Şekil 3.2’de ise $f(x)=1$ fonksiyonunun Riemann-Liouville yöntemine göre kesir mertebeli türevleri görülmektedir. Şekilde de görüleceği gibi sabit fonksiyonun türevleri değişkene bağlı çıkmaktadır.



Şekil 3.2 $f(x)=1$ fonksiyonu Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri

3.1.2. Caputo kesirli türevleri

Caputo türev tanımı detaylı bir şekilde M. Caputo tarafından ve bazı kaynaklarda verilmiştir (Caputo 1967; Kılbas vd. 2006).

Tanım 3.1.2.1. “ $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $x > a$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo türev tanımı,

$$({}^C D_{\alpha}^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(x) dx \quad (3.6)$$

biçiminde tanımlanır (Caputo 1967; Kılbas vd. 2006).”

“Ayrıca $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $t > a$ ve $f \in C^{m-1}$, $\alpha \geq -1$ olmak üzere Caputo türev tanımına ait,

$$a. ({}^C D_\alpha^\alpha J_\alpha^\alpha f)(t) = f(t) \quad (3.7)$$

$$b. (J_\alpha^\alpha {}^C D_\alpha^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)} \frac{(t-a)^k}{k!} \quad (3.8)$$

özellikleri de verilebilir.”

3.1.3. Uyumlu Kesirli Türevin Analizi

Caputo kesirli türevinin diğer bir özelliği ise sabitin Caputo türevinin sıfır olmasıdır. Bu nedenle de Caputo tanımı, Riemann-Liouville tanımına göre bir problemin fiziksel olarak yorumunun daha rahat yapılmasına olanak sağlar.

Uyumlu kesirli türev, klasik türeve uyumuyla dikkat çekmektedir. Khalil *et al.* tarafından tanımlanan uyumlu kesirli türev, klasik türevdekine benzer bir limit formuna sahiptir. Khalil ve arkadaşları yaptıkları çalışmada bu tanımın çarpım kuralını ve bölüm kuralını sağladığını ispat ettiler. Ayrıca yaptıkları çalışmada uyumlu kesir mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlar için Rolle teoremi ve ortalama değer teoremini ifade ettiler.

Uyumlu kesirli türev analizi, Abdeljawad tarafından geliştirildi. Abdeljawad yapmış olduğu çalışmada uyumlu kesirli türev için sol ve sağ uyumlu kesirli türev kavramlarını, kesirsel zincir kuralını ve Gronwall eşitsizliğini sundu. Ayrıca uyumlu kesir mertebeden dizisel türev kavramını, $0 < \alpha \leq 1$ için iki tür kesirsel kısmi integrasyon formüllerini, uyumlu kesirsel kuvvet seri açılımını, kesirsel Taylor eşitsizliğini ve son olarak kesirsel Laplace dönüşümünü verdi.

Bu bölümde uyumlu kesirli türevin analiziyle alakalı bazı temel kavramlar verilecektir. (Khalil *et al.* 2014; Abdeljawad 2015).

Tanım 3.1.3.1. “ $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bütün $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun “uyumlu kesirli türev” diye adlandırılan α mertebeli kesirli türevi,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere bazı $(0, a)$ aralığında α diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ oluşursa o zaman,

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olur. f nin α mertebeden uyumlu kesirli türevini göstermek için bazen $T_\alpha(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ yazılacaktır. Ayrıca, α mertebeden uyumlu kesirli türev mevcutsa bu durum için f , α diferansiyellenebilirdir denilecektir. Bu tanımın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.”

Teorem 3.1.3.1. “Bir $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ da $\alpha \in (0,1)$ için α diferansiyellenebilirse, f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.”

İspat:

$$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon$$

tanımından

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon$$

yazılır. $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ alınırsa

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0$$

olur. Böylece

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

olur. Bu ise f fonksiyonunun t_0 noktasında sürekli olduğunu ifade eder.

Teorem 3.1.3.2. “ $\alpha \in (0, 1]$ için f ve g , $t > 0$ noktasında α diferansiyellenebilir olsun. O halde

1. $\forall a, b \in R$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dir.
2. $\forall p \in R$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dir.
3. Tüm $f(t) = \lambda$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dir.
4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.
5. $T_\alpha(f/g) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$.
6. Ek olarak eğer f diferansiyellenebilirse $T_\alpha(f) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ dir.”

İspat: (1), (2) ve (3) ün ispatları direkt tanımdan görülebilir. Burada (4), (5) ve (6) nın ispatları verilecektir.

(4) $t > 0$ için

$$T_\alpha(fg)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= T_\alpha f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) T_\alpha g(t)
\end{aligned}$$

yazılabilir. g fonksiyonu t de sürekli olduğu için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ dir.

(5) $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
T_\alpha \left(\frac{f}{g} \right) (t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})} - \frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t) - f(t)g(t) + f(t)g(t) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]g(t) - [g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]f(t)}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]}{\varepsilon} g(t) - \frac{[g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]}{\varepsilon} f(t)}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)} \\
&= \frac{T_\alpha f(t)g(t) - T_\alpha g(t)f(t)}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)}
\end{aligned}$$

yazılabilir. g fonksiyonu t de sürekli olduğu için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ dir.

(6) Bu özelliğin ispatı için Tanım 3.1 de $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ dönüşümü yapalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
T_\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
&= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.1.3.3. “(Uyumlu Kesirli Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar İçin Rolle Teoremi):

$a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- i. $[a, b]$ aralığında sürekli,
- ii. $\alpha \in (0,1)$ için α diferansiyellenebilir,
- iii. $f(a) = f(b)$

koşullarını sağlasın. Bu taktirde $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.”

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $f(a) = f(b)$ olduğu için bir $c \in (a, b)$ yerel ekstremum noktasına sahiptir. Genelliği bozmaksızın c noktasının bir yerel minimum nokta olduğunu kabul edelim. Böylece

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Fakat, ilk limit negatif, ikinci limit ise pozitif değildir. O halde, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ dır.

Teorem 3.1.3.4. “(Uyumlu Kesirli Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar İçin Ortalama Değer Teoremi): $a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve bazı $\alpha \in (0,1)$ için α diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda

$$f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.”

İspat: k bir sabit sayı olmak üzere $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) + k\frac{1}{\alpha}t^\alpha$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon da $[a, b]$ aralığında sürekli ve her $t \in (a, b)$ için α diferansiyellenebilirdir. Şimdi k sabiti $g(a) = g(b)$ olacak şekilde seçilirse $f(a) + k\frac{1}{\alpha}a^\alpha = f(b) + k\frac{1}{\alpha}b^\alpha$ olup

$$k = -\frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$$

yazılabilir. O halde $g(t) = f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)$ olur. Bu fonksiyon Rolle teoreminin bütün şartlarını sağlar. Dolayısıyla (a, b) aralığında öyle bir c sayısı vardır ki $g^{(\alpha)}(c) = 0$ dır. Buradan

$$f^{(\alpha)}(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} = 0 \Rightarrow f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$$

elde edilir. Burada $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$ özelliği kullanılmıştır.

Tanım 3.1.3.2. “ $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t - a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $(T_\alpha^a f)(t)$ mevcutsa $(T_\alpha^a f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^a f)(t)$ olur.”

Tanım 3.1.3.3. “ $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sağ uyumlu kesirli türevi

$$({}^bT_\alpha f)(t) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $({}^bT_\alpha f)(t)$ mevcutsa $({}^bT_\alpha f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}^bT_\alpha f)(t)$ olur.”

Eğer f fonksiyonu diferansiyellenebilir ise $(T_\alpha^a f)(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t)$ ve $({}^bT_\alpha f)(t) = -(b-t)^{1-\alpha} f'(t)$ dir.

Tanım 3.1.3.4. “ $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = (T_\beta^a f^{(n)})(t)$$

olarak tanımlanır. Böylece α mertebeli sol uyumlu kesirli türevin var olabilmesi için f fonksiyonunun n kez türevlenebilir olması gerekir.”

Benzer olarak $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeli sağ uyumlu kesirli türevi

$$({}^bT_\alpha f)(t) = (-1)^{n+1} ({}^bT_\beta f^{(n)})(t)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.3.5. “ $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeli sol uyumlu kesirli integral

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = \int_a^t f(x) d_{\alpha}(x, a) = \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır. Benzer olarak $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeden sağ uyumlu kesirli integral,

$$({}^b I_{\alpha} f)(t) = \int_t^b f(x) d_{\alpha}(b, x) = \int_t^b (b - x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır.”

Lemma 3.1.3.1. “ $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t > a$ için

$$T_{\alpha}^a I_{\alpha}^a f(t) = f(t)$$

olur. Sağ durumda benzer olarak verilebilir.”

Lemma 3.1.3.2. “ $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t < b$ için

$${}^b T_{\alpha} {}^b I_{\alpha} f(t) = f(t)$$

olur.”

Tanım 3.1.3.6. “ $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. Bu takdirde $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli integrali

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = I_{n+1}^a((t-a)^{\beta-1}f) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır.”

Eğer $\alpha = n + 1$ ise bu takdirde $\beta = \alpha - n = n + 1 - n = 1$ olur. Böylece

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = (I_{n+1}^a f)(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n f(x) dx$$

olur. Bu ise $(a, t]$ aralığında $n + 1$ kez f fonksiyonunun tekrarlı integralinin Cauchy formülü ile yazılımıdır.

$\alpha > 0$ mertebeli sol Riemann-Liouville kesirli integralinin

$$(J_{\alpha}^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlandığı biliniyor. $\alpha = n + 1, n = 0, 1, 2 \dots$ için

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = (J_{\alpha}^a f)(t)$$

3.2. Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen, analizin temel eşitsizliklerinden birisi olan bu eşitsizlik 1893 yılında ilk kez J. Hadamard tarafından verildi.

Konveks terimine ilk olarak, 1881 yılında Hermite’in Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı aşağıdaki ifadeyi bir mektup ile sundu. Bu mektup Mathesis 3’te şu şekilde basıldı.

“*Sur deux limites d’une integrale definie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le meme sens de $x = a, x = b$. On aura les relations*

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexit’e o usa concavit’e vers l’axe des abcisses.”

Hermite’in yazdığı bu eşitsizliklerin,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği için bir ara değer olduğu açıktı. Hermite’in çalışmasının yayınlanmasından sonra, 1893 yılında J. Hadamard konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

olarak ifade etti (Hadamard 1893).

M. Z. Sarıkaya *et al.* Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini Teorem 3.1.1’de, A. O. Akdemir *et al.* Uyumlu kesirli integraller içeren Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini Teorem 3.1.2’de, H. Chen ve U. N. Katugampola, Katugampola kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini ise Teorem 3.1.3’te vermişlerdir.

Teorem 3.2.1: $0 \leq a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer f , $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise, kesirli integraller için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Sarıkaya vd. 2013).

Teorem 3.2.2: $0 \leq a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise, uyumlu kesirli integraller için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha \Gamma(\alpha-n)} [I_{a+}^\alpha f(b) + I_{b-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği vardır (Set vd. 2017).

Teorem 3.2.3: $\alpha > 0, \rho > 0$ ve $0 \leq a < b$ olmak üzere f fonksiyonu $f: [a^\rho, b^\rho] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in X_c^\rho(a^\rho, b^\rho)$ olsun. Eğer f , $[a, b]$ aralığında konveks ise,

$$f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \leq \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2(b^\rho - a^\rho)^\alpha} [\rho I_{a+}^\alpha f(b^\rho) + \rho I_{b-}^\alpha f(a^\rho)] \leq \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Chen and Katugampola 2017)

3.3. Lemmalar

Tez çalışmasında quasi-geometrik konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilirken aşağıdaki lemmalardan faydalanılmıştır.

Lemma 3.3.1. $f: I \subset \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I nın iç kısmında ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer $a, b \in I, a < b$ ve $f'' \in L_\alpha[a, b]$ ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} Y_f(a, b; \alpha; n) &= \frac{\ln b - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} f''(a^t x^{1-t}) dt \\ &+ \frac{\ln a - \ln b}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} f''(b^{1-t} x^t) dt \end{aligned}$$

ve $x \in [a, b]$ için, $n \geq 1$ için

$$Y_f(a, b; \alpha; n) = \frac{a^{(n+1)\alpha} f'(a) - b^{(n+1)\alpha} f'(b)}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} - \frac{a^{(n+1)\alpha-1} f(a) - b^{(n+1)\alpha-1} f(b)}{(n+1)\alpha} \\ - \int_a^b u^{(n+1)\alpha-2} f(u) du$$

şeklinde tanımlıdır. (Akdemir and Rashid 2019)

Lemma 3.3.2. $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+, \alpha \in (0, 1]$ ve $h: [K_1, K_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (K_1, K_2) üzerinde kesirli diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. Bu durumda eğer $D_\alpha(h) \in L_\alpha([K_1, K_2])$ ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \\ = (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{2\alpha} D_\alpha(h) (K_2^t K_1^{1-t}) t^{1-\alpha} d_\alpha t$$

(Khurshid et al. 2019).

İspat:

$$I = \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{2\alpha} D_\alpha(h) (K_2^t K_1^{1-t}) dt \\ = \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} h'(K_2^t K_1^{1-t}) dt$$

$x = K_2^t K_1^{1-t}$ değişken değiştirmesi ve integral ile

$$I = \frac{1}{\log K_2 - \log K_1} \int_{K_1}^{K_2} x^\alpha h'(x) dx \\ = \frac{1}{\log K_2 - \log K_1} \left[K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right]$$

elde edilir.

3.4. GG -Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler

Bu bölümde GG –konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan eşitsizliklerden bahsedilecektir.

Teorem 3.4.1. h fonksiyonu Lemma 3.3.2 deki şartları sağlıyor olsun. Ek olarak eğer $|h'(x)|$ GG –konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \leq (\log K_2 - \log K_1) L(K_2^{\alpha+1} |h'(K_2)|, K_1^{\alpha+1} |h'(K_1)|)$$

(Khurshid *et al.* 2019).

İspat: Lemma 3.3.2 ve quasi-geometrik konvekslik kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} |h'(K_2^t K_1^{1-t})| dt \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} |h'(K_2)|^t |h'(K_1)|^{1-t} dt \end{aligned}$$

Yukarıdaki integraller hesaplanarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.2. h fonksiyonu Lemma 3.3.2 deki şartları sağlıyor olsun ve $\vartheta, \gamma > 1, \vartheta^{-1} + \gamma^{-1} = 1$ olsun. Ek olarak eğer $|h'|^\gamma$ GG -konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) L\left(K_2^{(\alpha+1)\vartheta}, K_1^{(\alpha+1)\vartheta}\right)^{\frac{1}{\vartheta}} L(|h'(K_2)|^\gamma, |h'(K_1)|^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

(Khurshid *et al.* 2019).

İspat: Lemma 3.3.2 deki şartlar sağlansın. $|h'|^\gamma$ GG- konveks fonksiyon olduğundan ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} |h'(K_2^t K_1^{1-t})| dt \\
& \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{(\alpha+1)\vartheta} dt \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 |h'(K_2^t K_1^{1-t})|^\gamma dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
& \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{(\alpha+1)\vartheta} dt \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 |h'(K_2)|^{\gamma t} |h'(K_1)|^{\gamma(1-t)} dt \right)^{\frac{1}{\gamma}}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki integraller hesaplanırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.3. h fonksiyonu Lemma 3.3.2 deki şartları sağlıyor olsun. Ek olarak eğer $|h'(x)|^\gamma$ ($\gamma > 1$) GG- konveks ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq (\log K_2 - \log K_1) L \left(K_2^{(\alpha+1)\gamma} |h'(K_2)|^\gamma, K_1^{(\alpha+1)\gamma} |h'(K_1)|^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}}
\end{aligned}$$

(Khurshid *et al.* 2019).

İspat: Lemma 3.3.2 yi kullanarak açıkça görülür ki

$$\begin{aligned}
& \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} |h'(K_2^t K_1^{1-t})| dt
\end{aligned}$$

$\gamma > 1, \vartheta > 1$ olarak seçelim öyle ki $\vartheta^{-1} + \gamma^{-1} = 1$ olsun. Hölder integral eşitsizliğini uygulayarak ve $|h'(x)|^\gamma$ fonksiyonunun GG- konveks fonksiyon olmasından aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\int_0^1 dt \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{(\alpha+1)\gamma} |h'(K_2^t K_1^{1-t})|^\gamma dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\int_0^1 dt \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{(\alpha+1)\gamma} |h'(K_2)|^{\gamma t} |h'(K_1)|^{\gamma(1-t)} dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.4. h fonksiyonu Lemma 3.3.2 deki şartları sağlıyor olsun. Ek olarak eğer $|h'(x)|^\gamma$ ($\gamma > 1$) GG- konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(L(K_2^{(\alpha+1)}, K_1^{(\alpha+1)}) \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(L(K_2^{(\alpha+1)} |h'(K_2)|^\gamma, K_1^{(\alpha+1)} |h'(K_1)|^\gamma) \right)^{\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

(Khurshid *et al.* 2019).

İspat: $|h'(x)|^\gamma$ fonksiyonunu GG- konveks olduğundan ve lemma 3.3.2 deki eşitlikten yola çıkarak:

$$\begin{aligned} & \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} |h'(K_2^t K_1^{1-t})| dt \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} dt \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{(\alpha+1)} |h'(K_2^t K_1^{1-t})|^\gamma dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} dt \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

$$\times \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{(\alpha+1)} |h'(K_2)|^{\gamma t} |h'(K_1)|^{\gamma(1-t)} dt \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

yazılır ve gerekli hesaplamalar yapıldığında istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.5. $f: I \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I nın içinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b, f'' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|$ I üzerinde GG- konveks fonksiyon ise $x \in [a, b]$ ve $n \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} |Y_f(a, b; \alpha; n)| &\leq \frac{1}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \\ &\times [(\ln x - \ln a)L(x^{(n+1)\alpha+1}|f''(x)|, a^{(n+1)\alpha+1}|f''(a)|) \\ &\quad + (\ln b - \ln x)L(b^{(n+1)\alpha+1}|f''(b)|, x^{(n+1)\alpha+1}|f''(x)|)] \end{aligned}$$

(Akdemir and Rashid 2019).

İspat: Lemma 3.3.1 ve GG konvekslik tanımını kullanarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\begin{aligned} |Y_f(a, b; \alpha; n)| &\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} |f''(a^t x^{1-t})| dt \\ &\quad + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} |f''(x^t b^{1-t})| dt \\ &\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} |f''(a)|^t |f''(x)|^{1-t} dt \\ &\quad + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} |f''(b)|^{1-t} |f''(x)|^t dt \end{aligned}$$

Yukarıdaki integralleri hesaplayarak ve sadeleştirerek

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)| \leq \frac{1}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]}$$

$$\begin{aligned} & \times [(\ln x - \ln a)L(x^{(n+1)\alpha+1}|f''(x)|, a^{(n+1)\alpha+1}|f''(a)|) \\ & + (\ln b - \ln x)L(b^{(n+1)\alpha+1}|f''(b)|, x^{(n+1)\alpha+1}|f''(x)|)] \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.4.6. $f: I \subset \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I nın içinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b, f'' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|^q, q \geq 1, I$ üzerinde GG- konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik $x \in [a, b]$ ve $n \geq 1$ için sağlanır (Akdemir and Rashid 2019).

$$\begin{aligned} & |Y_f(a, b; \alpha; n)| \\ & \leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} L^{1-\frac{1}{q}}(x^{(n+1)\alpha+1}, a^{(n+1)\alpha+1}) \\ & \quad \times L^{\frac{1}{q}}(x^{(n+1)\alpha+1}|f''(x)|^q, a^{(n+1)\alpha+1}|f''(a)|^q) + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \\ & \quad \times L^{1-\frac{1}{q}}(b^{(n+1)\alpha+1}, x^{(n+1)\alpha+1}) L^{\frac{1}{q}}(b^{(n+1)\alpha+1}|f''(b)|^q, x^{(n+1)\alpha+1}|f''(x)|^q) \end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.3.1, GG – konvekslik ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)|$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} |f''(a^t x^{1-t})| dt \\ & \quad + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} |f''(x^t b^{1-t})| dt \\ & \leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(\int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} |f''(a^t x^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(\int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\times \left(\int_0^1 (b^{1-t}x^t)^{(n+1)\alpha+1} |f''(x^tb^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Buradan,

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(\int_0^1 (a^tx^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 (a^tx^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} |f''(a)|^{qt} |f''(x)|^{q(1-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(\int_0^1 (b^{1-t}x^t)^{(n+1)\alpha+1} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 (b^{1-t}x^t)^{(n+1)\alpha+1} |f''(x)|^{qt} |f''(b)|^{q(1-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Basit bir hesaplama ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} L^{1-\frac{1}{q}}(x^{(n+1)\alpha+1}, a^{(n+1)\alpha+1}) \\ &\quad \times L^{\frac{1}{q}}(x^{(n+1)\alpha+1} |f''(x)|^q, a^{(n+1)\alpha+1} |f''(a)|^q) + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \\ &\quad \times L^{1-\frac{1}{q}}(b^{(n+1)\alpha+1}, x^{(n+1)\alpha+1}) L^{\frac{1}{q}}(b^{(n+1)\alpha+1} |f''(b)|^q, x^{(n+1)\alpha+1} |f''(x)|^q). \end{aligned}$$

Teorem 3.4.7. $f: I \subset \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I nın iç kısmında ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b, f'' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|^q, q \geq 1$ I üzerinde GG- konveks fonksiyon ise $x \in [a, b]$ ve $n \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\ln x - \ln a \left[L^{\frac{1}{q}}(|f''(x)|^q, |f''(a)|^q) \right]}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \left(L^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}}, a^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}} \right) \right) \\ &+ \frac{\ln b - \ln x \left[L^{\frac{1}{q}}(|f''(b)|^q, |f''(x)|^q) \right]}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \left(L^{1-\frac{1}{q}} \left(b^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}}, x^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}} \right) \right) \end{aligned}$$

(Akdemir and Rashid 2019).

İspat: Lemma 3.3.1, GG – konvekslik ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} |f''(a^t x^{1-t})| dt \\ &+ \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} |f''(x^t b^{1-t})| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(\ln x - \ln a) x^{(n+1)\alpha+1}}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{x} \right)^{[(n+1)\alpha+1]\frac{qt}{q-1}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times \left(\int_0^1 |f''(a)|^{qt} |f''(x)|^{q(1-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \frac{(\ln b - \ln x) b^{(n+1)\alpha+1}}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{b} \right)^{[(n+1)\alpha+1]\frac{qt}{q-1}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times \left(\int_0^1 |f''(x)|^{qt} |f''(b)|^{q(1-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
& |Y_f(a, b; \alpha; n)| \\
& \leq \frac{\ln x - \ln a \left[L^{\frac{1}{q}}(|f''(x)|^q, |f''(a)|^q) \right]}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(L^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}}, a^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}} \right) \right) \\
& + \frac{\ln b - \ln x \left[L^{\frac{1}{q}}(|f''(b)|^q, |f''(x)|^q) \right]}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(L^{1-\frac{1}{q}} \left(b^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}}, x^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}} \right) \right)
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.



4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde Lemma 3.3.2'deki eşitliği kullanarak quasi-geometrik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1. $f: I \subset \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b, f'' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|$ I üzerinde quasi-geometrik konveks fonksiyon ise $x \in [a, b]$ ve $n \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)| \leq \frac{1}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \\ \times \left[(\ln x - \ln a) L(x^{(n+1)\alpha+1}, a^{(n+1)\alpha+1}) \cdot \max\{f''(a), f''(x)\} + \right. \\ \left. (\ln b - \ln x) L(f''(b^{(n+1)\alpha+1}), f''(x^{(n+1)\alpha+1})) \cdot \max\{f''(b), f''(x)\} \right]$$

İspat: Lemma 3.3.1 den, üçgen eşitsizliğinden ve $|f''|$ fonksiyonunun quasi-geometrik konveks fonksiyon olmasından

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)| \\ \leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} |f''(a^t x^{1-t})| dt \\ + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} |f''(x^t b^{1-t})| dt \\ \leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} \max\{f''(a), f''(x)\} dt \\ + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha-1]} \int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} \max\{f''(x), f''(b)\} dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \max\{f''(a)f''(x)\} x^{(n+1)\alpha+1} \int_0^1 \left(\frac{a^{(n+1)\alpha+1}}{x^{(n+1)\alpha+1}}\right)^t dt \\
&+ \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \max\{f''(b)f''(x)\} b^{(n+1)\alpha+1} \int_0^1 \left(\frac{x^{(n+1)\alpha+1}}{b^{(n+1)\alpha+1}}\right)^t dt \\
&\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \max\{f''(a)f''(x)\} x^{(n+1)\alpha+1} \left(\frac{\left(\frac{a}{x}\right)^{(n+1)\alpha+1} - 1}{\ln \frac{a^{(n+1)\alpha+1}}{x^{(n+1)\alpha+1}}} \right) \\
&+ \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \max\{f''(b)f''(x)\} b^{(n+1)\alpha+1} \left(\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{(n+1)\alpha+1} - 1}{\ln \frac{x^{(n+1)\alpha+1}}{b^{(n+1)\alpha+1}}} \right) \\
&= \frac{1}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \\
&\quad \times [(\ln x - \ln a)L(x^{(n+1)\alpha+1}, a^{(n+1)\alpha+1}) \max\{f''(a), f''(x)\} \\
&\quad + (\ln b - \ln x)L(b^{(n+1)\alpha+1}, x^{(n+1)\alpha+1})] \max\{f''(b), f''(x)\}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 4.1.2. $f: I \subset \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I nın içinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b, f'' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$ ($q \geq 1, n \geq 1$), I üzerinde quasi-geometrik konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} L^{1-\frac{1}{q}}(x^{(n+1)\alpha+1}, a^{(n+1)\alpha+1}) \\
&\quad \times L^{\frac{1}{q}}(x^{(n+1)\alpha+1}, a^{(n+1)\alpha+1}) (\max\{|f''(a)|^q, |f''(x)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \\
&\quad L^{1-\frac{1}{q}}(b^{(n+1)\alpha+1}, x^{(n+1)\alpha+1}) \\
&\quad \times L^{\frac{1}{q}}(b^{(n+1)\alpha+1}, x^{(n+1)\alpha+1}) (\max\{|f''(b)|^q, |f''(x)|^q\})^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.3.1, quasi –geometrik konvekslik tanımı ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)|$$

$$\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} |f''(a^t x^{1-t})| dt$$

$$+ \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} |f''(x^t b^{1-t})| dt$$

$$\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(\int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} dt \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} |f''(a^t x^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(\int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} dt \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} |f''(x^t b^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır ve buradan

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(x^{(n+1)\alpha+1} \int_0^1 \left(\frac{a^{(n+1)\alpha+1}}{x^{(n+1)\alpha+1}} \right)^t dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(x^{(n+1)\alpha+1} \int_0^1 \left(\frac{a^{(n+1)\alpha+1}}{x^{(n+1)\alpha+1}} \right)^t \max \{ |f''(a)|^q, |f''(x)|^q \} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \times + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(b^{(n+1)\alpha+1} \int_0^1 \left(\frac{x^{(n+1)\alpha+1}}{b^{(n+1)\alpha+1}} \right)^t dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(b^{(n+1)\alpha+1} \int_0^1 \left(\frac{x^{(n+1)\alpha+1}}{b^{(n+1)\alpha+1}} \right)^t \max \{ |f''(b)|^q, |f''(x)|^q \} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(x^{(n+1)\alpha+1} \left(\frac{\left(\frac{a}{x} \right)^{(n+1)\alpha+1} - 1}{\ln \frac{a^{(n+1)\alpha+1}}{x^{(n+1)\alpha+1}}} \right) \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(x^{(n+1)\alpha+1} \left(\frac{\left(\frac{a}{x} \right)^{(n+1)\alpha+1} - 1}{\ln \frac{a^{(n+1)\alpha+1}}{x^{(n+1)\alpha+1}}} \right) \max \{ |f''(a)|^q, |f''(x)|^q \} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(b^{(n+1)\alpha+1} \left(\frac{\left(\frac{x}{b} \right)^{(n+1)\alpha+1} - 1}{\ln \frac{x^{(n+1)\alpha+1}}{b^{(n+1)\alpha+1}}} \right) \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(b^{(n+1)\alpha+1} \left(\frac{\left(\frac{x}{b} \right)^{(n+1)\alpha+1} - 1}{\ln \frac{x^{(n+1)\alpha+1}}{b^{(n+1)\alpha+1}}} \right) \max \{ |f''(b)|^q, |f''(x)|^q \} dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)|$$

$$\leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} L^{1-\frac{1}{q}}(x^{(n+1)\alpha+1}, a^{(n+1)\alpha+1})$$

$$\times L^{\frac{1}{q}}(x^{(n+1)\alpha+1}, a^{(n+1)\alpha+1})(\max\{|f''(a)|^q, |f''(x)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\ + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]}$$

$$L^{1-\frac{1}{q}}(b^{(n+1)\alpha+1}, x^{(n+1)\alpha+1}) \times \\ L^{\frac{1}{q}}(b^{(n+1)\alpha+1}, x^{(n+1)\alpha+1})(\max\{|f''(b)|^q, |f''(x)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

Teorem 4.1.3. $f: I \subset \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I nın içinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b, f'' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|^q, q \geq 1, I$ üzerinde quasi- geometrik konveks fonksiyon ise $x \in [a, b]$ ve $n \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)| \\ \leq \frac{\ln x - \ln a (\max\{|f''(a)|, |f''(x)|\})^{\frac{1}{q}}}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(L^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}}, a^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}} \right) \right) \\ + \frac{\ln b - \ln x (\max\{|f''(x)|, |f''(b)|\})^{\frac{1}{q}}}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(L^{1-\frac{1}{q}} \left(b^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}}, x^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}} \right) \right)$$

İspat : Lemma 3.3.1, quasi -geometrik konvekslik ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$|Y_f(a, b; \alpha; n)| \\ \leq \frac{\ln x - \ln a}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \int_0^1 (a^t x^{1-t})^{(n+1)\alpha+1} |f''(a^t x^{1-t})| dt \\ + \frac{\ln b - \ln x}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \int_0^1 (b^{1-t} x^t)^{(n+1)\alpha+1} |f''(x^t b^{1-t})| dt \\ \leq \frac{(\ln x - \ln a) x^{(n+1)\alpha+1}}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{x} \right)^{[(n+1)\alpha+1]\frac{qt}{q-1}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times (\max\{|f''(a)|, |f''(x)|\})^{\frac{1}{q}} + \frac{(\ln b - \ln x) b^{(n+1)\alpha+1}}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{b} \right)^{[(n+1)\alpha+1]\frac{qt}{q-1}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times (\max \{|f''(x)|, |f''(b)|\})^{\frac{1}{q}}$$

buradan

$$\begin{aligned} & |Y_f(a, b; \alpha; n)| \\ & \leq \frac{\ln x - \ln a (\max \{|f''(a)|, |f''(x)|\})^{\frac{1}{q}}}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(L^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}}, a^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}} \right) \right) \\ & + \frac{\ln b - \ln x (\max \{|f''(x)|, |f''(b)|\})^{\frac{1}{q}}}{[(n+1)\alpha][(n+1)\alpha - 1]} \left(L^{1-\frac{1}{q}} \left(b^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}}, x^{[(n+1)\alpha+1]\frac{q}{q-1}} \right) \right) \end{aligned}$$

Sonucu elde edilir.

Teorem 4.1.4. h fonksiyonu Lemma 3.3.2 deki şartları sağlıyor olsun. Ek olarak eğer $|h'(x)|$ quasi-geometrik konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) L(K_1, K_2) \max\{h'(K_1), h'(K_2)\} \end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.3.2 ve quasi-geometrik konvekslik tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} |h'(K_2^t K_1^{1-t})| dt \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} \max\{h'(K_1), h'(K_2)\} dt \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) (\max\{h'(K_1), h'(K_2)\}) \left(K_1^{(\alpha+1)} \int_0^1 \frac{K_2^{t(\alpha+1)}}{K_1^{(\alpha+1)t}} dt \right) \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) (\max\{h'(K_1), h'(K_2)\}) \left(K_1^{(\alpha+1)} \frac{\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^{\alpha+1} - 1}{\ln \frac{K_2^{\alpha+1}}{K_1^{\alpha+1}}} \right) \end{aligned}$$

$$\leq (\log K_2 - \log K_1) (\max\{h'(K_1), h'(K_2)\}) L(K_1^{\alpha+1}, K_2^{\alpha+1})$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5. h fonksiyonu Lemma 3.3.2 deki şartları sağlıyor olsun ve $\vartheta, \gamma > 1, \vartheta^{-1} + \gamma^{-1} = 1$ olsun. Ek olarak eğer $|h'|^\gamma$ quasi-geometrik konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) (\max\{|h'(K_1)|^\gamma, |h'(K_2)|^\gamma\})^{\frac{1}{\gamma}} \left(L(K_1^{(\alpha+1)\vartheta}, K_2^{(\alpha+1)\vartheta}) \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.3.2 deki şartlar sağlansın . $|h'|^\gamma$ quasi-geometrik konveks fonksiyon olsun ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} |h'(K_2^t K_1^{1-t})| dt \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{(\alpha+1)\vartheta} dt \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 |h'(K_2^t K_1^{1-t})|^\gamma dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(K_1^{(\alpha+1)\vartheta} \int_0^1 \left(\frac{K_2^{(\alpha+1)\vartheta}}{K_1^{(\alpha+1)\vartheta}} \right)^t dt \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 \max\{|h'(K_1)|^\gamma, |h'(K_2)|^\gamma\} dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ & \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(K_1^{(\alpha+1)\vartheta} \frac{\left(\frac{K_2}{K_1} \right)^{(\alpha+1)\vartheta} - 1}{\ln \frac{K_2^{(\alpha+1)\vartheta}}{K_1^{(\alpha+1)\vartheta}}} \right)^{\frac{1}{\vartheta}} (\max\{|h'(K_1)|^\gamma, |h'(K_2)|^\gamma\})^{\frac{1}{\gamma}} \\ & = (\log K_2 - \log K_1) (\max\{|h'(K_1)|^\gamma, |h'(K_2)|^\gamma\})^{\frac{1}{\gamma}} \left(L(K_1^{(\alpha+1)\vartheta}, K_2^{(\alpha+1)\vartheta}) \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \end{aligned}$$

Yukarıdaki integraller hesaplanarak sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.6. h fonksiyonu Lemma 3.3.2 deki şartları sağlıyor olsun. Ek olarak eğer $|h'(x)|^\gamma$ ($\gamma > 1$) quasi-geometrik konveks ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\max\{|h'(K_2)|^\gamma, |h'(K_1)|^\gamma\} L \left(K_1^{(\alpha+1)\gamma}, K_2^{(\alpha+1)\gamma} \right) \right)^{\frac{1}{\gamma}}
\end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.3.2 yi kullanarak açıkça görülür ki

$$\begin{aligned}
& \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} |h'(K_2^t K_1^{1-t})| dt
\end{aligned}$$

$\gamma > 1, \vartheta > 1$ olarak seçelim öyle ki $\vartheta^{-1} + \gamma^{-1} = 1$ olsun. Hölder integral eşitsizliğini uygulayarak ve $|h'(x)|^\gamma$ fonksiyonunun quasi-geometrik konveks fonksiyon olmasından aşağıdaki sonuç açıkça ortaya çıkar:

$$\begin{aligned}
& \left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\int_0^1 dt \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{(\alpha+1)\gamma} |h'(K_2^t K_1^{1-t})|^\gamma dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
& \quad (\log K_2 - \log K_1) \left(\max\{|h'(K_2)|^\gamma, |h'(K_1)|^\gamma\} K_1^{(\alpha+1)\gamma} \int_0^1 \left(\frac{K_2^{(\alpha+1)\gamma}}{K_1^{(\alpha+1)\gamma}} \right)^t dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
& \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\max\{|h'(K_2)|^\gamma, |h'(K_1)|^\gamma\} \cdot K_1^{(\alpha+1)\gamma} \frac{\left(\frac{K_2}{K_1} \right)^{(\alpha+1)\gamma} - 1}{\ln \frac{K_2^{(\alpha+1)\gamma}}{K_1^{(\alpha+1)\gamma}}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
& \leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\max\{|h'(K_2)|^\gamma, |h'(K_1)|^\gamma\} \cdot L \left(K_1^{(\alpha+1)\gamma}, K_2^{(\alpha+1)\gamma} \right) \right)^{\frac{1}{\gamma}}
\end{aligned}$$

ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.7. h fonksiyonu Lemma 3.3.2 deki şartları sağlıyor olsun. Ek olarak eğer $|h'(x)|^\gamma$ ($\gamma > 1$) quasi-geometrik konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right|$$

$$\leq (\log K_2 - \log K_1) (\max\{|h'(K_2)|^\gamma, |h'(K_1)|^\gamma\})^{\frac{1}{\gamma}} L(K_1^{(\alpha+1)}, K_2^{(\alpha+1)})$$

İspat: $|h'(x)|^\gamma$ fonksiyonu quasi-geometrik konveks olduğundan ve lemma 3.3.2 deki eşitlikten

$$\left| K_2^\alpha h(K_2) - K_1^\alpha h(K_1) - \alpha \int_{K_1}^{K_2} h(x) d_\alpha x \right|$$

$$\leq (\log K_2 - \log K_1) \int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} |h'(K_2^t K_1^{1-t})| dt$$

$$\leq (\log K_2 - \log K_1) \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{\alpha+1} dt \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(\int_0^1 (K_2^t K_1^{1-t})^{(\alpha+1)} |h'(K_2^t K_1^{1-t})|^\gamma dt \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\leq (\log K_2 - \log K_1) \left(K_1^{(\alpha+1)} \int_0^1 \frac{K_2^{t(\alpha+1)}}{K_1^{(\alpha+1)t}} dt \right) (\max\{|h'(K_2)|^\gamma, |h'(K_1)|^\gamma\})^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\leq (\log K_2 - \log K_1) (\max\{|h'(K_2)|^\gamma, |h'(K_1)|^\gamma\})^{\frac{1}{\gamma}} \left(K_1^{(\alpha+1)} \frac{\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^{\alpha+1} - 1}{\ln \frac{K_2^{\alpha+1}}{K_1^{\alpha+1}}} \right)$$

$$\leq (\log K_2 - \log K_1) (\max\{|h'(K_2)|^\gamma, |h'(K_1)|^\gamma\})^{\frac{1}{\gamma}} L(K_1^{\alpha+1}, K_2^{\alpha+1})$$

olur ve istenen sonuç elde edilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, integraller için geçerli olan yöntemler uyumlu kesirli integrallerin analizine uygun olarak uyumlu kesirli integraller için de yazılmış ve konveks fonksiyon türleri için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra bazı lemmalar kullanılarak Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikler ispat edilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, konveks fonksiyonların çeşitli sınıfları için farklı türden kesirli integral operatörleri içeren yeni eşitsizlikler elde edebilirler.



KAYNAKÇA

- Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. *Calculus A Complete Course*. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., Generalized convexity and Inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* 335 (2007) 1294-1308
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. *Rev. Colombiana Mat.*, 28, 7-12.
- Akdemir, A.O. and Rashid, S., (2019). New Integral Inequalities For Geometrically Convex Function Via Comfortable Fractional Integral Operators, submitted.
- Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse aller allgemeineren konvexer funktionen in topologisch linearen Räumen, *Publ. Inst. Math.*, 23, 13–20.
- Bayraktar, M., 2000. *Fonksiyonel Analiz*, ISBN 975-442-035-1.
- Bayraktar, M., 2010. *Analiz*, ISBN 978-605-395-412-5.
- Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13, 529–539.
- Chen, H., Katugampola, U.N., (2017). Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for generalized fractional integrals. *J. Math. Anal. Appl.* 446 1274–1291.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. *Soochow Journal of Mathematics*, 21(3), 335-341.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. *Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications*, RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html> (10.10.2010).

- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, *Bull. Austral.Math. Soc.*, 57, 377-385.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1971. A review of quasi convex functions. Reprinted from *Operations Research*, 19, 7.
- Godunova, E.K. and Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkci širokogo klassa, soderžaščego vypuklye, monotonnnye i nekotorye drugie vidy funkci, *Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov*, MGPI, Moskva, 138-142.
- Hadamard, J., (1893). Etude sur les propri'et'es des fonctions enti`eres et en particulier d'une fonction consider par Riemann. *J. Math. Pures Appl.*, .58, 171-215.
- Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on s -convex functions. *Aequationes Math.*, 48, 100-111.
- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, 34, 82-87.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Khalil, R. and Abu Hammad, M., 2014. Legendre fractional differential equation and Legendre fractional polynomials. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 3 (3), 214-219.
- Khursid, Y., Khan, M.A. and Chu, Y.,(2019). Hermitte-Hadamard Type Inequalities For GG- and GA-Convex Functions Via Conformable Fractional Integrals, *Journal Function Spaces*, volume 2019, article ID 6926107
- Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier Science Limited, 204, 523 p, Amsterdam.
- Mitrinović, D.S., 1970. *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.

- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 9, 157-162.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions ,Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 300 pp, New York.
- Ross, B., 1977. The Development of Fractional Calculus 1695-1900. Historia Mathematica, 4 (1), 75-89.
- Samko, S. G. *et al.*, (2009). Fractional Integral and Derivatives, Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon et alibi.
- Sarikaya, M.Z., Set, E., Yaldiz, H. and Basak, N., (2013). Hermite -Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematical and Computer Modelling, vol. 57, pp. 2403–2407.
- Set, E., Akdemir, A.O., and Mumcu, İ., 2017. The Hermite-Hadamard's inequality and its extensions for conformable fractional integrals of any order $\alpha > 0$, Creative Mathematics and Informatics, Accepted.
- Toader, G.H., 1984. Some Generalisations of the Convexity, Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj-Napoca, 329-338, Romania.
- Varošanec, S., 2007. On h –convexity, J. Math. Anal. and Appl., 326, 303-311.
- Zhang, T.Y., Ji, A. P., & Qi, F. (2012). On integral inequalities of Hermite-Hadamard type for s -geometrically convex functions. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2012). Hindawi.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Doğubayazıt'ta doğdu. İlk, orta öğrenimini Doğubayazıt'ta, lise öğrenimini Ağrı 'da tamamladı. 2008 yılında Atatürk üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı ve 2012 yılında mezun oldu. 2013 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.

