T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN YENİ DİZİ UZAYI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Birgül TORGUT

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Temmuz-2010

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN YENİ DİZİ UZAYI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Birgül TORGUT
(08121118)

Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Yavuz ALTIN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14 Temmuz 2010

Temmuz-2010

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN YENİ DİZİ UZAYI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Birgül TORGUT
(08121118)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14 Temmuz 2010
Tezin Savunulduğu Tarih: 27 Temmuz 2010

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Yavuz ALTIN.(F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Rifat ÇOLAK. (F.Ü)
Yrd.Doç.Dr. Mahmut IŞIK. (F.Ü)

Temmuz-2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Yrd.Doç.Dr. Hıfsı ALTINOK'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Birgül TORGUT

ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde modülüs fonksiyonunun bazı özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde $\ell(\Delta^m, f, p, q, s)$ dizi uzayının bazı topolojik özellikleri ve içerme bağıntıları verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise $v \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$ dizi uzayı üzerindeki bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark dizisi, Modülüs fonksiyonu, Seminorm

SUMMARY

A New Sequence Space Defined By A Modulus Function

In the first chapter of this thesis that consists of four chapters, we give some fundamental definitions and theorems.

In the second chapter, we examine some properties of modulus function.

In the third chapter, we give some topological properties and inclusion relations of the sequence space $\ell(\Delta^m, f, p, q, s)$.

In the last chapter, we examine some relations on the sequence space $\ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$ for $v \in \mathbb{N}$.

Keywords: Difference sequence, Modulus function, Seminorm

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\circ$	:	Bileşke fonksiyon
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
H	:	Tüm sonlu dizilerin kümesi
$\mathbb{K}$	:	Reel veya kompleks sayılar cismi

1. GİRİŞ

Son zamanlarda toplanabilme teorisinde modülüs fonksiyonu üzerine yapılan çalışmalar önemli bir yer tutmaktadır.

Modulus fonksiyonun tanımı ilk defa 1953 de Nakano [1] tarafından verilmiştir. Daha sonra Ruckle [2], Wilansky nin " $\{e_1, e_2, ...\}$ birim vektörlerinin sınırlı kümesini bulunduran en küçük $FK-$ uzayı varmıdır?" sorusuna cevap ararken

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\},$$

dizi uzayını f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlamış ve bu dizi uzayınının bazı özelliklerini incelemiştir. Maddox [3,4], f modülüs fonksiyonu ile kuvvetli toplanabilir dizilerin klasik uzaylarını genelleştirmiştir. Connor [5] çalışmasında A negatif olmayan regüler matris toplanabilme metodu olmak üzerebir modülüse göre kuvvetli Cesaro toplanabilme tanımını yine bir modülüse göre kuvvetli $A-$toplanabilme tanımına genişletmiştir. Ayrıca, keyfi bir modülüse göre kuvvetli $A-$toplanabilir bir dizinin $A-$istatistiksel yakınsak olduğunu ve $A-$istatistiksel yakınsaklık ve $A-$kuvvetli toplanabilmenin sınırlı diziler için denk olduğunu göstermiştir. Daha sonra Bhardwaj [6] tarafından kesin pozitif reel sayılar dizisi kullanılarak, Ruckle [2] tarafından tanımlanmış olan $L(f)$ dizi uzayı genelleştirilmiş, bazı topolojik özelliklerini incelemiş kapsama bağıntılarını vermiştir. Son olarak Altin [7], bir (X, q) seminormlu dizi uzayı üzerinde tanımlanmış olan $c(\Delta_v^m, f, p, q, s)$, $c_0(\Delta_v^m, f, p, q, s)$ ve $l_\infty(\Delta_v^m, f, p, q, s)$ paranormlu dizi uzaylarını tanımlamıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $X \neq \phi$ bir cümle ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

ve

$$. : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları $\forall\ x, y, z \in X$ ve $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir.

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) Her bir $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır

L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır

L5) $1.x = x$

L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

L7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

L8) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

dir [8].

Tanım 2.2. X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|.\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ çiftine de bir normlu uzay adı verilir.

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ (α skaler)

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir [9].

Tanım 2.3. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [9].

Tanım 2.4. Bir $x = (x_n)$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n > n_0$ için

$$\|x_m - s\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ varsa (x_n) dizisi s' ye yakınsaktır denir ve $\lim_{n \to \infty} x_n = s$ yazılır [9].

Tanım 2.5. $(X, \|.\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [9].

Tanım 2.6. Kompleks terimli bütün $x = (x_n)$, $(n = 1, 2, 3...)$ dizilerinin kümesini ω ile göstereceğiz.

$x = (x_n), y = (y_n)$ ve α bir skalar olmak üzere

$$\begin{aligned} x + y &= (x_n) + (y_n) \\ \alpha x &= (\alpha x_n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında ω bir lineer uzaydır. ω 'nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [11].

Tanım 2.7. X boş olmayan bir cümle olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ için,

a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

b) $d(x, y) = d(y, x)$,

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$

özelliklerini sağlarsa d ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ye de metrik uzay denir [10].

Tanım 2.8. $X = (X, d)$ uzayındaki her (x_n) Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [10].

Tanım 2.9. $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun X deki her bir dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X 'e kompakt denir [10].

Lemma 2.10. Bir metrik uzayın kompakt her alt cümlesi kapalı ve sınırlıdır [10].

Tanım 2.11. $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun . Her $\varepsilon > 0$ için bu uzay ε yarıçaplı sonlu sayıda açık yuvarlarla örtülebiliyorsa X total sınırlıdır denir. [3]

Tanım 2.12. X bir vektör uzayı ve $g : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

a) $g(0) = 0$,

b) $g(-x) = g(x)$,

c) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$,

d) (t_n) skalerlerin bir dizisi ve $t_n \to t$ olmak üzere $g(x_n - x) \to 0$ olan $(x_n) \subset X$ için, $g(t_n x_n - tx) \to 0$ (skalerle çarpımın sürekliliği),

şartları sağlanıyorsa g ye X üzerinde bir paranorm ve (X, g)' ye de paranormlu uzay denir. Ayrıca $g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ şartı da sağlanırsa paranorma totaldir denir [12].

Tanım 2.13. X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer,

$$q : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall\ x, y \in X$ ve $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa q 'ya bir yarınorm (X, q) 'ya da yarınormlu uzay denir [5].

(i) $q(x) \geq 0$

(ii) $q(\lambda x) = |\lambda|\, q(x)$

(iii) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$

Tanım 2.14. X bir dizi uzayı ve $(x_k) \in X$ olsun. Bu durumda $|\alpha_k| \leq 1$ şartını sağlayan tüm (α_k) skalerleri için $(\alpha_k x_k) \in X$ oluyorsa X uzayı normaldir [12].

Tanım 2.15. p ve q, bir X vektör uzayı üzerinde yarınorm olsun. Eğer $p(x_n) \to 0$ şartını sağlayan her (x_n) dizisi $q(x_n) \to 0$ oluyorrsa p ' ye q ' dan kuvvetlidir denir. Herbiri bir diğerinden kuvvetli ise p ve q ' ya denktir denir [12].

Lemma 2.16. p ve q, X lineer uzayı üzerinde yarınorm olsun. Bu takdirde p, q ' dan kuvvetlidir$\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $q(x) \leq Mp(x)$ olacak şekilde bir sabit $M > 0$ vardır [12].

Bu çalışmada kullanacağımız

$$l_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$$

sınırlı,

$$c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut}\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\}$$

sıfır diziler uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır [6]. Ayrıca

$$l_p = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty,\ 1 \leq p < \infty\}$$

uzayı

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Özel olarak l_p uzayında $p = 1$ alınırsa

$$l_1 = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$$

uzayı elde edilir [13].

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [7] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.16. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $l_\infty(\Delta), c(\Delta), c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in l_\infty\}, \\ c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}, \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Kızmaz [14] bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK uzayı olduğunu göstermiştir. 1995 yılında Et ve Çolak [8]

$$m \in \mathbb{N},\ \Delta^0 x = (x_k), \Delta x = (x_k - x_{k+1}), \Delta^m x_k = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}),$$
$$\Rightarrow \Delta^m x_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in l_\infty\}, \\ c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}, \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}, \end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_1| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer $BK-$uzayı olduğunu göstermiştir.

Daha sonra Et ve Nuray [9], X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını $X(\Delta^m)$ dizi uzaylarına genelleştirerek bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir.

Fark dizi uzayları ile ilgili bazı özellikleri şöyle sıralayabiliriz.

Teorem 2.17. Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [16].

Teorem 2.18. Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [16].

Teorem 2.19. Eğer $X, \|.\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta^m)$ uzayı da

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir Banach uzayıdır [16].

Tanım 2.20. (Minkowski eşitsizliği) $a_k, b_k \geq 0,\ k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere,

a) $0 < p \leq 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^p + \sum_{k=1}^{n} b_k^p$$

b) $p \geq 1$ ise

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

dir [8].

Tanım 2.21. L bir lineer uzay, $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : \ z = \alpha x + (1-\alpha)\, y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A cümlesine konveks denir [10].

Tanım 2.22. Bir Frechet uzayı bir tam metrik lineer uzay veya buna denk olarak bir tam total paranormlu uzaydır. X sürekli koordinat izdüşümlere sahip bir Frechet uzay olacak şekilde w nin lineer bir altuzayı olsun. Bu durumda X bir FK uzayı veya bir Frechet Koordinat uzayı adını alır [6].

3. MODÜLÜS FONKSİYONUNUN BAZI ÖZELLİKLERİ

Modülüs fonksiyonun tanımı ilk defa1953 de Nakano [1] tarafından verilmiştir.

Tanım 3.1. (Modülüs fonksiyonu) Eğer $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu

i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$,

iii) f artan,

iv) f sıfır noktasında sağdan sürekli,

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona modülüs fonksiyonu denir [2]. Herhangi bir f modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir.

Ruckle [2], Wilansky nin " $\{e_1, e_2, ...\}$ birim vektörlerinin sınırlı kümesini bulunduran en küçük $FK-$ uzayı var mıdır?" sorusuna cevap ararken

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\},$$

dizi uzayını f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlamış ve bu dizi uzayınının bazı özelliklerini incelemiştir.

Şimdi modülüs fonksiyonlarına örnekler verelim.

Örnek 3.2. (**a**) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sınırlı,

(**i**) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ şartını sağlayacağı fonksiyonun tanımından açıktır.

(**ii**) $f(x+y) = \frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} = f(x) + f(y)$ olduğu göz önüne alınırsa $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ eşitsizliği sağlanır.

(**iii**) f artandır. Gerçekten;

$f(x) = \frac{x}{x+1}$ den $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ olduğundan fonksiyon artandır.

(**iv**) f sıfırda sağdan süreklidir.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 = f(0)$$

dır. O halde f bir modülüs fonksiyonudur.

(**b**) $f(x) = \log(1+x)$ sınırsız,

(**i**) $log(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır. Çünkü $log(1+0) = log1 = 0$ dır. O halde $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ şartı sağlanır.

(**ii**) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ dir.

$1 + x + y \leq (1+x)(1+y)$ eşitsizliği ve logaritma özelliğinden $log(1+x+y) \leq log(1+x) + log(1+y)$

elde ederiz. Dolayısıyla $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ dir.

(**iii**) f artandır.

$f(x) = log(x+1)$ den $f'(x) = \frac{\log e}{1+x} > 0$ pozitif olduğundan fonksiyon artandır.

(**iv**) f sıfır noktasında sağdan süreklidir.

$$\lim_{x \to 0^+} \log(x+1) = 0 = f(0)$$

dır. O halde $f(x) = log(x+1)$ bir sınırsız modülüs fonksiyonudur.

Teorem 3.3. f bir modülüs fonksiyonu ise $f^v, (v \in \mathbb{N})$ fonksiyonları da birer modülüs fonksiyonudur. Burada $f^v = f \circ f \circ f \circ ... \circ f$ (f nin v defa bileşkesi) şeklindedir [2].

Lemma 3.4. f bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \delta < 1$ olsun. Bu takdirde $v \in N$ ve $t \in [0, \infty)$ için,

$$f^{v-1}(t) > \delta \text{ ise } f^v(t) \leq \frac{2f(1)}{\delta} f^{v-1}(t)$$

olur. Burada $f^0 = I$ özdeşlik dönüşümüdür [17].

Uyarı 3.5. f ve g herhangi iki modülüs fonksiyonu iken $f^{-1}, f.g, f-g$ ve f/g fonksiyonları modülüs fonksiyon olmayabilir [2].

Lemma 3.6. f ve g herhangi iki modülüs fonksiyonu ise $f \circ g, \alpha f (a \geq 0), \frac{f}{1+f}, f+g$ fonksiyonları da modülüs fonksiyonlarıdır [2].

Teorem 3.7. f bir modülüs fonksiyonu ve $|X|_f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(|x_n|)$ olsun. $d(X,Y) = |X-Y|_f$ olmak üzere $(L(f), d)$ bir tam metrik uzaydır [18].

İspat. $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ ve $Z = (z_n) \in L(f)$ olsun.

i) $d(X,Y) = 0$ olsun. Bu durumda $|X-Y|_f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(|x_n - y_n|) = 0$ yazılabilir ve buradan her bir n için $f(|x_n - y_n|) = 0$ olacağından ve modülüs fonksiyonun tanımından $|x_n - y_n| = 0$ ve böylece $x_n = y_n$, yani $X = Y$ elde edilir. Tersine $X = Y$ olması halinde $d(X,Y) = 0$ olacağı benzer şekilde kolayca elde edilir.

ii)

$$|X-Y|_f=\sum_{n=1}^{\infty} f\left(|x_n-y_n|\right)=\sum_{n=1}^{\infty} f\left(|y_n-x_n|\right)=|Y-X|_f$$

iii)

$$\begin{aligned} |X-Y|_f &= \sum_{n=1}^{\infty} f\left(|x_n-y_n|\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f\left(|x_n-z_n|+|z_n-y_n|\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} f\left(|x_n-z_n|\right)+f\left(|z_n-y_n|\right)=|X-Z|_f+|Y-Z|_f . \end{aligned}$$

$L(f)$ tamdır. Gerçekten $\left(X^{(n)}\right)$ dizisi $L(f)$ ' de bir Cauchy dizisi olsun . Her bir i için $\left(x_i^{(n)}: n=1,2,...\right)$ bir Cauchy dizisidir. X sayısı, $\left(X^{(n)}\right)$ nin noktasal limiti olsun. Eğer $m,n>K$ için K sayısı $\left|X^{(m)}-X^{(n)}\right|<\varepsilon$ sağlanıyorsa herbir N için

$$\sum_{n=1}^{N} f\left(\left|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\right|\right)<\varepsilon$$

olur. Bu nedenle her N için

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f\left|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\right|=\sum_{i=1}^{N} f\left|x_i^{(m)}-x_i\right|\leq\varepsilon$$

elde edilir. Buradan $X\in L(f)$ olduğunu ve $m>K$ için $\left|X-X^{(m)}\right|<\varepsilon$ olduğunu gösterir.

Lemma 3.8. Her f bir modülüs fonksiyonu için $H\subseteq L(f)$ dir [18].

İspat. $f\left(x_1\right)<\frac{1}{2}$ olacak şekilde $x_1\in(0,\infty)$ seçelim. Her $j<k$ ve $f\left(x_k\right)<\frac{1}{2^k}$ için $x_k\neq x_j$ olacak şekilde $x_k\in(0,\infty)$ seçelim. f modülüs fonksiyonu $0'$ da süreklidir ve f $(0)=0$ dır. $X=(x_n)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(|x_n|\right)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty,$$

ve böylece $X\in L(f)$ ve $X\notin H$ dır.

Teorem 3.9. f bir modülüs fonksiyonu, $A\subset L(f)$ olsun. A nın, $L(f)$ nin kompakt bir alt kümesi olması için gerek ve yeter şart

i) K kapalı ve sınırlı,

ii) $\varepsilon>0$ verilsin, her $n>n_0$ ve her $X=(x_n)\in A$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(|x_n|\right)<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0=n_0\left(\varepsilon\right)$ vardır,

iii) Eğer $p_k : L(f) \to \mathbb{R}$, her $X = (x_k) \in L(f)$ $için$ $p_k(X) = x_k$ şeklinde verilmiş ise her $k \geq 1$ için $p_k(A)$ kompakttır [18].

İspat. i) Kabul edelim ki ; $A \subseteq L(f)$ kompakt olsun bu taktirde i) açıktır.

ii) $\varepsilon > 0$ verilsin, her bir $a = (a_k) \in A$ için

$$U\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{X \in L(f) : \sum_{n=1}^{\infty} f(|x_n - a_n|) < \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

gözönüne alalım. Böylece $A \subseteq \bigcup_{a \in K} \left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ dir. Fakat A kompakttır. Bu yüzden $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \left(a^j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ olacak şekilde

$$a^1 = \left(a_k^1\right), a^2 = \left(a_k^2\right), ..., a^N = \left(a_k^N\right)$$

mevcuttur. Buradan eğer $a = (a_k) \in A$ ise

$$\left|a - a^i\right|_f = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\left|a_n - a_n^i\right|\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $a^i, 1 \leq i \leq N$ mevcuttur.

Her i için $\sum_{n=1}^{\infty} f(|a_n^i|) < \infty$ olduğundan $\sum_{n=n_i}^{\infty} f(|a_n^i|) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir n_i mevcuttur. Bu yüzden $a \in U\left(a^i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_i}^{\infty} f(|a_n|) &\leq \sum_{n=n_i}^{\infty} f\left(\left|a_n - a_n^i\right|\right) + \sum_{n=n_i}^{\infty} f\left(\left|a_n^i\right|\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

elde ederiz. $n_0 = \max\limits_{1 \leq i \leq N} n_i$ alırsak ve her $a \in A$, ve $n > n_0$ için

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} f(|a_i|) < \varepsilon$$

bulunur.

iii) p_k sürekli olduğundan $p_k(A)$ kompaktır.

Tersine, kabul edelim ki i), ii) ve iii) sağlansın. A kapalı olduğundan ve $L(f)$ tam olduğundan A nın total sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(|a_k|) < \varepsilon$$

her $a \in A$, $n > n_0$ için olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mevcuttur.

f modülüs fonksiyonu , 0 'da sürekli olduğundan ve $f(0) = 0$ olduğundan $f(\varepsilon^*) \leq \frac{\varepsilon}{2n_0}$ olacak şekilde bir $\varepsilon^* > 0$ sayısı seçebiliriz.

Her $k \geq 1$ için $p_k(A)$, $\mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi olduğundan total sınırlıdır. Bu yüzden herbir $k = 1, 2, ..., n_0$ için ve $i \in [1, n_k]$ için $a_k \in p_k(A)$ iken

$$\left|a_k - a_k^i\right| < \varepsilon^*$$

olacak şekilde $a_k^{(1)}, ..., a_k^{(n)} \in p_k(A)$ mevcuttur.

$$A_0 = \left\{b : b = \left(a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, ..., a_{n_0}^{i_{n_0}}, 0, 0, ..., 0, ...\ 1 \leq i_1 \leq n_1, 1 \leq i_2 \leq n_2, ..., 1 \leq i_{n_0} \leq n_{n_0}\right)\right\}$$

olsun. Eğer her $k \geq 1$ için $a = (a_k) \in A$ ise $a_k \in p_k(A)$ dır. $b \in A_0$,

$$b = \left(a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, ..., a_{n_0}^{i_{n_0}}, 0, 0, ..., 0, ...\right)$$

ile verilsin. Burada

$$\left|a_k - a_k^{i_k}\right| < \varepsilon^*,\ k = 0, 1, 2, ..., n_0.$$

dır. Buna göre

$$\begin{aligned} |a - b|_f &= \sum_{k=1}^{n_0} f\left(\left|a_k - a_k^{i_k}\right|\right) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} f(|a_k|) \\ &< n_0 f(\varepsilon^*) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$A \subseteq \bigcup_{b \in k_0} U(b, \varepsilon)$$

dır. Fakat A_0 sonludur, bu yüzden A total sınırlıdır.

Tanım 3.10. f bir modülüs fonksiyonu olmak üzere

$$B_a = \{X \in L(f) : |X|_f \leq a\}$$

dır [19].

Teorem 3.11 .Eğer bazı $a > 0$ 'lar için $B_{f(a)}$ konveks ise bu durumda $\sum c_i = 1$ olacak şekildeki $(c_1, ..., c_n)$ pozitif reel sayılarının herhangi sonlu koleksiyonu için $f(a) = \sum f(c_i a)$ elde edilir [19].

İspat. $X_m = ae_m, (m = 1, ..., n)$ olsun. Bu takdirde $B_{f(a)}$ konveks olduğundan her m için $X_m \in B_{f(a)}$ dır. $X = \sum c_i X_i$ dizisi $B_{f(a)}$ nın elemanıdır. Böylece

$$|X|_f = \sum f(c_i a) \leq f(a).$$

dir. Diğer yandan

$$f(a) = f(\sum c_i a) \leq \sum f(c_i a),$$

ve böylece

$$f(a) = \sum f(c_i a).$$

elde edilir.

Teorem 3.12 . f bir modülüs fonksiyonu olsun, $L(f) = l_1$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in [0, \varepsilon]$ için $f(x) \leq rx$ olacak şekilde r ve ε pozitif sayılarının mevcut olmasıdır [19].

İspat. Her pozitif r reel sayısı ve her ε pozitif reel sayısı için $f(x) > rx$ olacak şekildeki bir $x \in (0, \varepsilon]$ mevcut olduğunu farz edelim.

Bu yüzden her n pozitif tamsayısı için $f(x_n) > nx_n$ olacak şekilde $x_n \in (0, \frac{1}{n^2}]$ mevcuttur. f sürekli olduğu için her $x \in I_n$ için $f(x) > nx$ olacak şekildeki bir $I_n \subseteq (0, \frac{1}{n^2})$ aralığı mevcuttur. Herbir n için $\frac{1}{n^2} \leq \sum_{k=1}^{t(n)} x_{n_k} \leq 2/n^2$ olacak şekilde $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_{t(n)}}$ noktalarından oluşan sonlu bir sayı seçelim. Her $x \in I_n$, $x_n \leq \frac{1}{n^2}$ için herhangi bir $x_{n_1} \in I_n$ noktası alınabilir ve böylece

$$\sum_{k=1}^{t(n)-1} x_{n_k} \leq \frac{1}{n^2} \text{ ve } \sum_{k=1}^{t(n)} x_{n_k} \geq \frac{1}{n^2}$$

olacak şekilde $x_{n_2}, x_{n_3}, ..., x_{n_{t(n)}}$ seçebiliriz.

$$X = (x_{1_1}, x_{1_2}, ..., x_{1_{t(1)}}, x_{2_2}, ..., x_{2_{t(2)}}, ...)$$

olsun. Bu takdirde

$$|x|_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{t(n)} f(x_{n_k}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{t(n)} nx_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=1}^{t(n)} x_{n_k} \geq \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

olur. Böylece $X \notin L(f)$ dir. Buradan

$$\|X\| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{t(n)} x_{n_k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ve böylece $X \in l_1$ ve $L(f) \neq l_1$ olur.

Tersine, bazı pozitif r reel sayıları için $(0, \varepsilon]$ aralığında $f(x) \leq rx$ olduğunu farzedelim. Böylece $l_1 \subseteq L(f)$ dir.

Fakat her f için $L(f) \subseteq l_1$ 'dir. Böylece $L(f) = l_1$ dir.

Teorem 3.13. Bir f modülüs fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

i) En az bir $a > 0$ için $B_{f(a)}$ konvekstir.

ii) Her $x \in [0, a]$ için

$$f(x) = \frac{f(a)}{a} x,$$

olacak şekilde pozitif bir a reel sayısı mevcuttur.

iii) Her $r \leq b$ için $B_{f(r)}$ konveks olacak şekilde pozitif bir b reel sayısı mevcuttur [19].

İspat . (1)$\Rightarrow$ (2): n herhangi bir pozitif tamsayı olsun. Teorem 3.11'den

$$f(a) = nf(\frac{a}{n})$$

elde edilir.

$m < n$ olacak şekildeki bir pozitif m sayısını alalım. Bu takdirde Teorem 3.11'den

$$\begin{aligned} f(a) &= f(\frac{m}{n}a + \frac{n-m}{n}a) \\ &= f(\frac{m}{n}a + \frac{1}{n}a + \frac{1}{n}a + ... + \frac{1}{n}a) \\ &= f(\frac{m}{n}a) + (n-m)f(\frac{1}{n}a) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$f(a) = f(\frac{m}{n}a) + \frac{n-m}{n}f(a)$$

olur bundan dolayı

$$\frac{m}{n}f(a) = f(\frac{m}{n}a)$$

olur.

Herhangi $r < 1$ rasyonel sayısı için $f(ra) = rf(a)$ elde edilir. f 'nin sürekliliğinden

$$f(xa) = af(x) \ , \forall \ x \in [0,1]$$

elde edilir.

Herhangi bir $y \in (0,a]$ için $\frac{y}{a} \leq 1$ olur. Böylece $f(y) = \frac{y}{af(a)}$ olur.

(2)⇒ (3): $f(x) = \frac{f(a)}{a}x$, her $x \in [0,a]$ ve böylece $L(f) = l_1$ dir. Ayrıca $r \leq a$ için

$$\begin{aligned} B_r &= \{X \in L(f) : |X|_f \leqq r\} \\ &= \{X \in L(f) : \|X\|_1 = \frac{|X|_f}{\alpha} \leqq \frac{r}{\alpha}\}, \alpha = \frac{f(a)}{a} \\ &= \{X \in l_1 : \|X\|_1 \leq \frac{r}{\alpha}\}. \end{aligned}$$

dir. Böylece B_r, her $r \leq a$ için konveks kümedir.

(3)⇒ (1): Aşikardır.

Teorem 3.14 Eğer $L(f) \neq l_1$ ise ve f

$$f(xy) \leq f(x)f(y)$$

şartını sağlarsa $L(f)$, bir Banach uzayına izomorfik olan hiçbir sonsuz boyutlu alt uzayı içermez [19].

İspat. İlk olarak ; B, $L(f)$ 'nin kapalı sonsuz boyutlu alt uzayı ise B'nin $L(f)$ 'ye izomorfik bir alt uzay ihtiva ettiğini göstereceğiz.

Eğer B sonsuz boyutlu ise,

$$b_n = (0, ..., 0, b^n_{k_n}, b^n_{k_{n+1}}, 0, ...)$$

formunda ve $|b_n|_f = 1$ olacak şekilde bir (b_n) dizisi ihtiva eder. Burada k_n keyfi büyüklükte seçilmiştir. b_n 'i

$$\sum_{k=k_{n+1}}^{\infty} f\left|b^n_{k_n}\right| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

olarak seçelim.

$$C_n = (0, ..., 0, b^n_{k_n}, ..., b^n_{k_{n+1}-1}, 0, ...), \ n = 1, 2, ...$$

olsun. (C_n),

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n C_n\right|_f &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_n}^{k_{n+1}-1} f\left|b_k^n\lambda_n\right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\sum_{k_n}^{k_{n+1}-1}\left|\lambda_n b_k^n\right|\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\sum_{k_n}^{\infty}\left|\lambda_n b_k^n\right| - \sum_{k_{n+1}}^{\infty}\left|\lambda_n b_k^n\right|\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\left|\lambda_n\right|\left(\sum_{k_n}^{\infty}\left|b_k^n\right| - \sum_{k_{n+1}}^{\infty}\left|b_k^n\right|\right)\right) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\left|\lambda_n\right|\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{2}\left|\lambda_n\right|) \\
&\geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f(\left|\lambda_n\right|) \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

için $L(f)$ 'de (e_n) 'ye denk dizidir.

Diğer yandan,

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n C_n\right|_f &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_n}^{k_{n+1}-1} f\left|\lambda_n b_k^n\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} f\left|\lambda_n\right| \sum_{k_n}^{k_{n+1}-1} f\left|b_k^n\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} f\left|\lambda_n\right| . \left|b_n\right|_f \leq \left|\lambda\right|_f
\end{aligned}
$$

dir.

Ayrıca eğer $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n b_n$ yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n C_n$, (C_n) 'in tanımından dolayı yakınsak olur. Bu sebeple (C_n) 'in

(b_n) 'ye denk olduğunu elde ederiz. Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{m}\lambda_n(b_n - C_n)\right|_f &= \left|\sum_{n=1}^{m}\lambda_n(0,...,0,b_{k_{n+1}},...)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{m}\sum_{k_{n+1}}^{\infty} f\left|\lambda_n b_k^n\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{m} f\left|\lambda_n\right| \sum_{k_{n+1}}^{\infty} f\left|b_k^n\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{m} f\left|\lambda_n\right| . \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} f\left|\lambda_n\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{m} \lambda_n C_n\right|
\end{aligned}
$$

olur. Son eşitsizlik (3.1) ’den elde edilir. Böylece (b_n), $L(f)$ ’ye izomorfik olan B ’nin bir alt uzayı için bir bazdır.

4. BİR MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN YENİ DİZİ UZAYI

Bu bölümde $\ell(\Delta^m, f, p, q, s)$ dizi uzayının topolojik özellikleri ve içerme bağıntıları incelenmiştir.

$p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. X uzayı, q yarınormu ile $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde yarınormlu bir uzay olsun. f bir modülüs fonksiyonu olmak üzere

$$\ell(\Delta^m, f, p, q, s) = \{x = (x_k) : x_k \in X, \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} < \infty,\ s \geq 0\}$$

kümesini tanımlayalım.

Teorem 4.1. $\ell(\boldsymbol{\Delta}^m,f, p, q, s)$ dizi uzayı $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzaydır [20].

İspat. $x, y \in \ell(\boldsymbol{\Delta}^m,f, p, q, s)$ olsun. $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $|\lambda| \leq M_\lambda$ ve $|\mu| \leq N_\mu$ olacak şekilde M_λ ve N_μ pozitif tamsayıları mevcuttur. f 'in alt toplamsallığından , q 'nun yarınorm özelliğinden ve Δ^m'in lineerliğinden,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f(q(\Delta^m(\lambda x_k + \mu y_k)))]^{p_k} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f(|\lambda|\, q(\Delta^m x_k)) + f(|\mu|\, q(\Delta^m y_k))]^{p_k} \\ &\leq C(M_\lambda)^H \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f(q(\Delta^m x_k)]^{p_k} + C(N_\mu)^H \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} f[q(\Delta^m y_k)]^{p_k} < \infty.\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\ell(\boldsymbol{\Delta}^m,f, p, q, s)$ bir lineer uzaydır.

Teorem 4.2. $p = (p_k)$ sınırlı bir dizi, $H = \sup p_k < \infty$ ve $M = \max(1, H)$ olmak üzere $\ell(\boldsymbol{\Delta}^m,f, p, q, s)$ dizi uzayı

$$g_\Delta(x) = \{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f(q(\Delta^m x_k)]^{p_k}\}^{\frac{1}{M}}$$

paranormu ile bir paranormlu uzaydır [20].

İspat. $g_\Delta(\theta) = 0$ ve $g_\Delta(x) = g_\Delta(-x)$ olduğu açıktır. Burada $\theta = (\theta, \theta, \theta, ...)$ dır. $|a_k + b_k|^{p_k} \leq C\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\}$ eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği ve f ' nin tanımı göz önüne alınırsa g_Δ nın alt toplamsallığı elde edilir. λ kompleks sayısı için

$$|\lambda|^{p_k} \leq \max(1, |\lambda|^H)$$

eşitsizliğinden ve f ' nin tanımından

$$\begin{aligned} g_\Delta(\lambda x) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f(q(\lambda\Delta^m x_k))]^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \\ &\leq (1+\|\lambda\|)^{\frac{H}{M}}.g_\Delta(x) \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $\|\lambda\|$, λ 'nın tam kısmını göstermekte ve böylece $\lambda \to 0$, $x \to \theta$ olması $\lambda x \to \theta$ ve üstelik $x \to \theta$, λ 'nın sabit olması ise $\lambda x \to \theta$ olmasını gerektirir.

$\lambda_n \to 0$ olduğunu farzedelim ve x, $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s)$ ' de sabit bir nokta olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} k^{-s}[f(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} < (\frac{\varepsilon}{2})^M$$

olacak şekilde K 'yı alalım. Böylece

$$\left(\sum_{k=K+1}^{\infty} k^{-s}[f(q(\Delta^m x_k))]^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} < (\frac{\varepsilon}{2})$$

elde edilir. f, $[0, \infty)$ üzerinde sürekli olduğundan

$$h(t) = \sum_{k=1}^{K} k^{-s}[f(q((\Delta^m(tx_k))))]^{p_k}$$

fonksiyonu 0 ' da sürekli olur. Bu nedenle $|\lambda_n| < \delta$ olması $n > N$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{K} k^{-s}[f(q(\lambda_n\Delta^m x_k))]^{p_k}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olmasını gerektirecek şekilde $0 < \delta < 1$ mavcuttur. Böylece $n > N$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f(q(\lambda_n\Delta^m x_k))]^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} < \varepsilon$$

dir.Bu nedenle $\lambda \to 0$ iken $g_\Delta(\lambda x) \to 0$ dır.

Teorem 4.3. f, f_1 ve f_2 modülüs fonksiyonlar; q, q_1 ve q_2 yarınormlar ve s, s_1 ve $s_2 \geq 0$ reel sayılar olsun.

i) $s > 1$ ise $l(\mathbf{\Delta}^m, f_1, p, q, s) \subseteq l(\mathbf{\Delta}^m, f \circ f_1, p, q, s)$ dır.

ii) $l(\mathbf{\Delta}^m, f_1, p, q, s) \cap l(\mathbf{\Delta}^m, f_2, p, q, s) \subseteq l(\mathbf{\Delta}^m, f_1 + f_2, p, q, s)$,

iii) $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q_1, s) \cap \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q_2, s) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, \mathbf{f}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{s})$,

iv) Eğer q_1, q_2 ' den daha kuvvetli ise $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q_1, s) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q_2, s)$,

v) $s_1 \leq s_2$ ise $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s_1) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s_2)$ dir [20].

İspat. **i**) $(x_k) \in \ell(\mathbf{\Delta}^m, f_1, p, q, \mathbf{s})$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $0 \leq t \leq \delta$ için $f(t) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ şartını sağlayan

δ ' yı seçelim. $t_k = f_1(q(\Delta^m x_k))$ alalım ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f(t_k)]^{p_k} = \sum_{1} k^{-s}[f(t_k)]^{p_k} + \sum_{2} k^{-s}[f(t_k)]^{p_k}$$

gözönüne alalım. Burada ilk toplam $t_k \leq \delta$ ve ikincisi $t_k > \delta$ üzerindendir. f sürekli olduğundan

$$\sum_{1} k^{-s}[f(t_k)]^{p_k} < \max(1, \varepsilon^H) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \tag{4.1}$$

elde ederiz ve $t_k > \delta$ için

$$t_k < \frac{t_k}{\delta} < 1 + \left\| \frac{t_k}{\delta} \right\|$$

gerçeğini kullanalım.

f ' nin tanımından $t_k > \delta$ için

$$\begin{aligned} f(t_k) &\leq f(1)[1 + (\frac{t_k}{\delta})] \leq 2f(1)\frac{t_k}{\delta} \\ \sum_{2} k^{-s}[f(t_k)]^{p_k} &\leq \max\left(1, (\frac{2f(1)}{\delta})^H\right) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[t_k]^{p_k} < \infty \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde ederiz. (4.1) ve (4.2) ' den $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f_1, p, q, s) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f \circ f_1, p, q, s)$ bulunur.

ii) $x = (x_k) \in \ell(\mathbf{\Delta}^m, f_1, p, q, s) \cap \ell(\mathbf{\Delta}^m, f_2, p, q, s)$ olsun. $|a_k + b_k|^{p_k} \leq C\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\}$ eşitsizliği kullanılırsa $(x_k) \in \ell(\mathbf{\Delta}^m, f_1 + f_2, p, q, s)$ olduğu gösterilmiş olur. Böylece

$\ell(\mathbf{\Delta}^m, f_1, p, q, s) \cap \ell(\mathbf{\Delta}^m, f_2, p, q, s) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, \mathbf{f}_1 + f_2, p, q, s)$ dir.

iii) $C = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$k^{-s}[f(q_1 + q_2)(\Delta^m x_k)]^{p_k} \leq Ck^{-s}[f(q_1(\Delta^m x_k))]^{p_k} + Ck^{-s}[f(q_2(\Delta^m x_k))]^{p_k}$$

eşitsizliği kullanılırsa $ii)$ ' nin ispatına benzer şekilde yapılır.

iv) ve **v**) kolayca yapılır.

p, f ve s ' ye verilen özel değerler ile $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s)$ ' den aşağıdaki uzayları elde ederiz.

$f(x) = x$ için

$$\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s) = \left\{ x \in \omega(X) : \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[q(\Delta^m x_k)]^{p_k} < \infty, s \geq 0 \right\};$$

$p_k = 1$ 'i sağlayan her k için

$$\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q, s) = \left\{ x \in \omega(X) : \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f(q(\Delta^m x_k))] < \infty, s \geq 0 \right\};$$

$s = 0$ için

$$\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q) = \left\{ x \in \omega(X) : \sum_{k=1}^{\infty} [f(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} < \infty \right\};$$

$f(x) = x$ ve $s = 0$ için

$$\ell(\mathbf{\Delta}^m, p, q) = \left\{ x \in \omega(X) : \sum_{k=1}^{\infty} [q(\Delta^m x_k)]^{p_k} < \infty \right\};$$

$\forall k$ için $p_k = 1$ ve $s = 0$ için

$$\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q) = \left\{ x \in \omega(X) : \sum_{k=1}^{\infty} f(q(\Delta^m x_k)) < \infty \right\};$$

$f(x) = x$; $\forall$ k için $p_k = 1$ ve $s = 0$ için

$$\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q) = \left\{ x \in \omega(X) : \sum_{k=1}^{\infty} q(\Delta^m x_k) < \infty \right\}.$$

Sonuç 4.4.

i) $s > 1$ ise bu takdirde herhangi bir f modülüs fonksiyonu için

$$\ell(\mathbf{\Delta}^m, p, q, s) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s)$$

dir.

ii) q_1 ve q_2 denk yarınormlar ise bu takdirde

$$\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q_1, \mathbf{s}) = \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q_2, s)$$

dir [13].

iii) $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s)$,

iv) $\ell(\mathbf{\Delta}^m, p, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, p, q, s)$,

v) $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q, s)$.

İspat. **i**) Eğer Teorem 4.3 i) 'de $f_1(t) = t$ ise sonuç kolayca elde edilir.

ii) Teorem 4.3 iv) 'den elde edilir.

iii) Teorem 4.3 v) 'de $s_1 = 0$ ve $s_2 = s$ alınırsa, $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s)$ elde edilir.

iv) Teorem 4.3 v) 'de $s_1 = 0$, $s_2 = s$ ve $f(t) = t$ alınırsa $\ell(\mathbf{\Delta}^m, p, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, p, q, s)$ olur.

v) Teorem 4.3 v) 'de $\forall\, k$ için $s_1 = 0$, $s_2 = s$ ve $p_k = 1$ alınırsa $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q, s)$ olur.

Teorem 4.5. $m \geq 1$ için $\ell(\mathbf{\Delta}^{m-1}, f, q, s) \subset \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q, s)$ dir ve kapsama kesindir. Genelde her $i = 1, 2, 3, ..., m-1$ için $\ell(\mathbf{\Delta}^i, f, q, s) \subset \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q, s)$ dir ve kapsamalar kesindir [20].

İspat. $x \in \ell(\mathbf{\Delta}^{m-1}, f, q, s)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} f(q(\Delta^{m-1} x_k)) < \infty \tag{4.3}$$

elde edilir.

$\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $(k+1)^{-s} < k^{-s} \leq 2^s (k+1)^{-s}$ olduğundan

$$k^{-s} f(q(\Delta^{m-1} x_{k+1})) \leq 2^s (k+1)^{-s} f(q(\Delta^{m-1} x_{k+1})) \tag{4.4}$$

esitsizliği elde edilir.

(4.3) ve (4.4) den

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} f(q(\Delta^{m-1} x_{k+1})) < \infty \tag{4.5}$$

elde edilir.

f bir modülüs fonksiyon, q bir yarınorm olduğundan, (4.3) ve (4.5) den

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} f(q(\Delta^m x_k)) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} f(q(\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} f(q(\Delta^{m-1} x_k)) + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} f(q(\Delta^{m-1} x_{k+1})) < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\ell(\mathbf{\Delta}^{m-1}, f, q, s) \subset \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q, s)$ dir.

Genelde $\ell(\mathbf{\Delta}^i, f, q, s) \subset \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q, s)$ ($\forall\ i = 1, 2, 3, ..., m-1$ için) kapsamalar kesindir. Bunun için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 4.6. $X = \mathbb{C}$, $f(x) = x$, $q(x) = |x|$, $s = 0$ olsun. $(x_k) = (k^{m-1})$ dizisini göz önüne alalım.

Bu takdirde $\Delta^m x_k = 0$ olduğundan $(x_k) \in \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q, s)$ dir. $\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m-1}(m-1)!$ olduğundan $(x_k) \notin \ell(\mathbf{\Delta}^{m-1}, f, q, s)$ dir.

Teorem 4.7. $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s)$ normal değildir [20].

İspat. Uzayın genelde normal olmadığını göstermek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 4.8. $X = \mathbb{C}$, $f(x) = x$, $q(x) = |x|$, $m = 2, s = 0$ ve $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olsun. Bu takdirde $x = (x_k) = (k) \in \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s)$ dir. Fakat $\alpha x = (\alpha_k x_k) \notin \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s)$ dir.

Burada $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k = (-1)^k$ dır. Böylece $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s)$ normal değildir [20].

Teorem 4.9. Herbir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < t_k \leq r_k < \infty$ olsun. Bu takdirde $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, t, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, r, q)$ dir [20].

İspat. Eğer $x \in \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, t, q)$ ise yeterince büyük k 'lar için

$$[f(q(\Delta^m x_k))]^{t_k} \leq 1$$

ve böylece

$$[f(q(\Delta^m x_k))]^{r_k} \leq [f(q(\Delta^m x_k))]^{t_k}$$

dir.

Teorem 4.10. i) Eğer herbir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ ise $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q)$ dir.

ii) $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ ise $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q)$ dir [20].

İspat. i) Teorem 4.9 'da $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $p_k = t_k$ ve $r_k = 1$ alınırsa

$$\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q)$$

olur.

ii) Teorem 4.9 'da $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $p_k = r_k$ ve $t_k = 1$ alınırsa

$$\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, q) \subseteq \ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q)$$

elde edilir.

5. $\ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$ DİZİ UZAYI ÜZERİNDEKİ BAĞINTILAR

Bu bölümde $\ell(\boldsymbol{\Delta}^m,f^v, p, q, s)$ dizi uzayının topolojik özellikleri incelenmiştir ve bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Teorem 5.1. $\ell(\boldsymbol{\Delta}^m,f^v, p, q, s)$ dizi uzayı $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzaydır.

$x, y \in \ell(\boldsymbol{\Delta}^m, f^v, p, q, s)$ olsun. $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $|\lambda| \leq M_\lambda$ ve $|\mu| \leq N_\mu$ olacak şekilde M_λ ve N_μ pozitif tamsayıları mevcuttur. f 'in alt toplamsallığından , q 'nun yarınorm özelliğinden ve Δ^m'in lineerliğinden,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[\mathbf{f}^v(q(\Delta^m(\lambda x_k + \mu y_k)))]^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f^v(|\lambda|\, q(\Delta^m x_k)) + f^v(|\mu|\, q(\Delta^m y_k))]^{p_k}$$

$$\leq C(M_\lambda)^H \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f^v(q(\Delta^m x_k)]^{p_k} + C(N_\mu)^H \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} f^v[q(\Delta^m y_k)]^{p_k} < \infty.$$

elde edilir. O halde $\ell(\boldsymbol{\Delta}^m,f^v, p, q, s)$ bir lineer uzaydır.

Teorem 5.2. $p = (p_k)$ sınırlı bir dizi, $H = \sup p_k < \infty$ ve $M = \max(1, H)$ olmak üzere $\ell(\boldsymbol{\Delta}^m,f^v,p, q, s)$ dizi uzayı

$$g_\Delta(x) = \{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}[f^v(q(\Delta^m x_k)]^{p_k}\}^{\frac{1}{M}}$$

paranormu ile bir paranormlu uzaydır.

İspat Teorem 4.2 ispatına benzer olarak yapılır.

Teorem 5.3. $s > 1$ ve , $n, v \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n < v$ olsun. Bu taktirde,

$$\ell(\Delta^m, f^n, p, q, s) \subseteq \ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$$

dir. Fakat kapsama bağıntısının tersi genelde doğru değildir.

İspat. İspat için tümevarım metodu kullanılacaktır. $v - n = r$ olsun, $r \in \mathbb{N}$ ve $r \geq 1$ olur. Şimdi biz iddia ediyoruz ki; $r = 1$ için doğru olsun. Yani

$$\ell(\Delta^m, f^n, p, q, s) \subseteq \ell(\Delta^m, f^{n+1}, p, q, s)$$

olduğu gösterilmelidir. f 'nin sürekliliğinden $\varepsilon > 0$ için $0 \leq t \leq \delta$ iken $f\ (t) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ mevcuttur.

$$\begin{aligned} I_1 &= \{k \in \mathbb{N}\colon\ f^n\left(q\left(\Delta^m x_k\right)\right) \leq \delta\} \\ I_2 &= \{k \in \mathbb{N}\colon\ f^n\left(q\left(\Delta^m x_k\right)\right) > \delta\} \end{aligned}$$

denirse Lemma 3.4 den ve $s > 1$, $x \in \ell(\Delta^m, f^n, p, q, s)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[f^{n+1}\left(q\left(\Delta^m x_k\right)\right)\right]^{p_k} &= \sum_{k\in I_1}^{\infty} k^{-s}\left[f^{n+1}\left(q\left(\Delta^m x_k\right)\right)\right]^{p_k} + \sum_{k\in I_2}^{\infty} k^{-s}\left[f^{n+1}\left(q\left(\Delta^m x_k\right)\right)\right]^{p_k} \\ &\leq \sum_{k\in I_1}^{\infty} k^{-s}\left[\varepsilon\right]^{p_k} + \sum_{k\in I_2}^{\infty} k^{-s}\left[\left\{\frac{2f\left(1\right)}{\delta} f^n\left(q\left(\Delta^m x_k\right)\right)\right\}\right]^{p_k} \\ &\leq \max\left(\varepsilon^h, \varepsilon^H\right)\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} + \max\left(a^1, a^2\right)\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[f^{n+1}\left(q\left(\Delta^m x_k\right)\right)\right]^{p_k} \\ &< \infty \end{aligned}$$

burada $a^1 = \left\{\frac{2f(1)}{\delta}\right\}^h$, $a^2 = \left\{\frac{2f(1)}{\delta}\right\}^H$, $\left(0 < h = \inf p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k < \infty\right)$. Böylece $x \in \ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$ dir. Bu da $r = 1$ için teoremin doğru olduğunu gösterir. Şimdi teoremin r için doğru olduğu kabul edilirse, yani

$$\ell(\Delta^m, f^n, p, q, s) \subseteq \ell(\Delta^m, f^{n+r}, p, q, s) \tag{5.1}$$

olduğu kabul edilirse geriye $r + 1$ için doğru olduğunu göstermek kalır. Bunun için

$$\ell(\Delta^m, f^n, p, q, s) \subseteq \ell(\Delta^m, f^{n+r+1}, p, q, s)$$

olduğu gösterilmelidir. (5.1) den dolayı $r = 1$ için yapılan ispatta m yerine $m + r$ alınarak, kolayca gösterilebilir.

Sonuç 5.4. $s > 1$ ve $v \in \mathbb{N}$ olsun.Bu taktirde,

i) $\ell(\Delta^m, f, p, q, s) \subseteq \ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$

ii) $\ell(\Delta^m, p, q, s) \subseteq \ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$

dir.

İspat. : **i**) Teorem 5.3 de $n = 1$ alınırsa istenilen elde edilir.

ii) i) ve Sonuç 4.4 den kolayca elde edilir.

Teorem 5.5 $n < v$, $n, v \in \mathbb{N}$ olsun. Bu taktirde,

i) $f(t) < t$ ise $\ell(\Delta^m, p, q, s) \subseteq \ell(\Delta^m, f^n, p, q, s) \subseteq \ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$

ii) $f(t) \geq t$ ise $\ell(\Delta^m, p, q, s) \supseteq \ell(\Delta^m, f^n, p, q, s) \supseteq \ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$

dır.

İspat. i) $f(t) < t$ ise, f modülüs fonksiyonu olduğundan

$$f^v(t) \leq f^{v-1}(t) \leq .... \leq f^n(t) ... \leq f^2(t) \leq f(t) < t$$

her k ve $(x_k) \in X$ için $q(\Delta^m x_k) \geq 0$ olacağından,

$$\begin{aligned} f^v(q(\Delta^m x_k)) &\leq f^{v-1}(q(\Delta^m x_k)) \leq .... \leq f^n(q(\Delta^m x_k)) ... \leq f^2(q(\Delta^m x_k)) \\ &\leq f(q(\Delta^m x_k)) < q(\Delta^m x_k) \end{aligned}$$

elde edilir. Her k *için* $p_k > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} [f^v(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} &\leq \left[f^{v-1}(q(\Delta^m x_k))\right]^{p_k} \leq .... \leq [f^n(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} ... \\ &\leq \left[f^2(q(\Delta^m x_k))\right]^{p_k} \leq [f(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} < [q(\Delta^m x_k)]^{p_k} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $k^{-s} > 0$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$, $(x_k) \in X$ ve $p_k > 0$ için,

$$\begin{aligned} k^{-s}[f^v(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} &\leq k^{-s}\left[f^{v-1}(q(\Delta^m x_k))\right]^{p_k} \leq .... \leq k^{-s}[f^n(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} ... \\ &\leq k^{-s}\left[f^2(q(\Delta^m x_k))\right]^{p_k} \leq k^{-s}[f(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} < k^{-s}[q(\Delta^m x_k)]^{p_k} \end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir ve (5.2) den tüm ifadeler üzerinden toplam alınırsa,

$$\ell(\Delta^m, p, q, s) \subseteq \ell(\Delta^m, f^n, p, q, s) \subseteq \ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$$

elde edilir.

ii) $f(t) \geq t$ olsun. Her k ve $p_k > 0, (x_k) \in X$ için,

$$\begin{aligned} k^{-s}[f^v(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} &\geq k^{-s}\left[f^{v-1}(q(\Delta^m x_k))\right]^{p_k} \geq .... \geq k^{-s}[f^m(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} ... \\ &\geq k^{-s}\left[f^2(q(\Delta^m x_k))\right]^{p_k} \geq k^{-s}[f(q(\Delta^m x_k))]^{p_k} \geq k^{-s}[q(\Delta^m x_k)]^{p_k} \end{aligned} \tag{5.3}$$

elde edilir (5.3) den tüm ifadeler üzerinden toplam alınırsa,

$$\ell(\Delta^m, p, q, s) \supseteq \ell(\Delta^m, f^n, p, q, s) \supseteq \ell(\Delta^m, f^v, p, q, s)$$

elde edilir.

6. SONUÇ

Bhardwaj [6] tarafından $\ell(f,p)$ dizi uzayının normal olduğu gösterilmiştir. Bu çalışmada $\ell(f,p)$ dizi uzayının genelleştirilmişi olan $\ell(\mathbf{\Delta}^m, f, p, q, s)$ dizi uzayı tanımlanmış ve bu uzayın normal olmadığı gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Nakano,H.,**1953, Concave moduluars, J. Math.Soc. Japan 5(1), 29-49.

[2] **Ruckle,W.H.,**1973, FK Spaces in which The Sequence of Coordinate Vectors is Bounded, Canad.J.Math,25, 973-978.

[3] **Maddox, I.J.**,1986, Sequence spaces defined by a modulus. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 100, no. 1, 161–166.

[4] **Maddox, I.J**.,1987, Inclusions between FK spaces and Kuttner's theorem, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 101 , 523–527.

[5] **Connor, J**., 1989 On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canad. Math. Bull. 32 no. 2, 194–198.

[6] **Bhardwaj, V.K**., 2003, A generalization of a sequence space of Ruckle. Bull. Calcutta Math. Soc. 95 , no. 5, 411–420.

[7] **Altin, Y.,** 2009, Properties of some sets of sequences defined by a modulus function. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 29 , no. 2, 427–434.

[8] **Maddox, I.J.,** 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press,Cambridge, Second Edition.

[9] **Kreyszig, E.**, 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley Sons New York

[10] **Bayraktar, M.,** 1994, Fonksiyonel Analiz, Atatürk Üniversitesi Yayınları, No789, Erzurum

[11] **Goes, G. and Goes, S**.,1970, Sequence of Variation and Sequence of Fourier Coefficients 1, Math.Z.,118,93-102.

[12] **Wilansky.A. ,** 1978, Modern Methods in Topological Vector Spaces,McGraw Hill Inc.,New York.

[13] **Kamthan, P.K. and Gupta, M.**,1981 Sequence Spaces and Series,Marcel Dekker,Inc., New York

[14] **Kızmaz, H.**,1981, On Certain Sequence Spaces, Canad. Math. Bull.,24,169-176.

[15] **Et, M. and Çolak, R**.,1995,On Some Generalized Difference Sequence Spaces. Soochow J. Math. 21 no. 4, 377–386.

[16] **Et, M. and Nuray, F**., 2001, Δ^m -Statistical Convergence, Indian J.Pure

Appl.Math.,32 (6) 961-969

[17] Bilgin,T., 1992, $\ell(p, f, q, s)$ Dizi Uzayı ve Matris Dönüşümleri. Yayınlamış Doktora Tezi, Erciyes Üniv. Fen Bil.Enst. Kayseri

[18] Deeb, W. and Hussein, D., 1980, Results on $L(f)$ spaces. Arabian J. Sci. Engrg. 5 no. 2, 113–116.

[19] Deeb, W.,1982, Necessary and sufficient conditions for the equality of $L(f)$ and l_1,. Canad. J. Math. 34 , no. 2, 406–410.

[20] Altin, Y.; Işik, M.; Çolak, R.,2008, A new sequence space defined by a modulus. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 53 ,no. 2, 3–13.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2003 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümüne girdim ve 2007 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Tezli yüksek lisansa başladım.