ANALİTİK FONKSİYONLAR UZAYINDA LİNEER k-POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİNİN YAKINSAKLIK KOŞULLARI

Selin Bilge KURT

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Eylül 2010

KABUL:

Selin Bilge KURT tarafından hazırlanan "ANALİTİK FONKSİYONLAR UZAYINDA LİNEER k- POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİNİN YAKINSAKLIK KOŞULLARI" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 17/09/2010

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Tülin COŞKUN (ZKÜ) ....

Üye : Prof. Dr. Ertan İBİKLİ (AÜ) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN (ZKÜ) ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. …/…/2010

Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Selin Bilge KURT

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ANALİTİK FONKSİYONLAR UZAYINDA LİNEER k-POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİNİN YAKINSAKLIK KOŞULLARI

Selin Bilge KURT

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Tülin COŞKUN
Eylül 2010, 73 sayfa

Bu tezde ilk olarak diğer bölümler için hazırlık olması bakımından karmaşık fonksiyonların genel özellikleri verilmiş olup analitik fonksiyonların serilerle gösteriminden faydalanarak bu fonksiyonların düzgün yakınsaklığını veren Taylor teoremi kanıtlanmıştır.Daha sonra operatör kavramı tanıtılarak (1.4) ve (1.5) kesimde operatörlerin lineerlik, pozitiflik, monotonluk özellikleri incelenmiştir.Daha sonra Lineer pozitif operatörler için norm kavramı tanımlanmış, özel olarak $C[a,b]$uzayı için norm kavramından ayrıntılı olarak bahsedilmiştir.İkinci bölümde karmaşık katsayılı seri yardımıyla tanımlanmış, birim dairede düzgün yakınsak olan analitik fonksiyonların uzayında çalışılmıştır. Bu fonksiyonlar için yarı norm tanımı verilmiş olup seri yardımıyla tanımlı analitik fonksiyonlar dizisinin katsayılarının genel özellikleri incelenmiştir. Bu fonksiyon dizilerinin yakınsaklığının katsayılarına bağlı olduğu kanıtlanmış, birim dairede analitik fonksiyonların bazı alt uzaylarında yakınsaklık koşulları araştırılmıştır. Üçüncü kesimde Taylor katsayılarından yararlanarak lineer k-pozitif operatör dizileri için Korovkin teoreminin geçerli olup olmadığı incelenerek, klasik koşullar ile geçerli olmayan yakınsaklık teoremleri özel koşullar ile kanıtlanacaktır.Daha sonra birim dairede analitik fonksiyonlar uzayının alt uzayı olan A_g uzayı tanımlanarak lineer k-pozitif operatör tanımı verilecek, A_a alt uzayı tanımlanarak bu uzay için yakınsaklık teoremi kanıtlanacaktır.

Anahtar Sözcükler: Lineer k-Pozitif Operatörler, Lineer k-Pozitif Operatör Dizisi, A, A_g ve A_a uzayları için operatör dizilerinin yakınsaklık koşulları

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M.Sc.Thesis

CONVERGENCE CONDITIONS OF LINEAR k- POSİTİVE OPERATOR SEQUENCES IN THE ANALYTİC FUNCTIONS SPACE

Selin Bilge KURT

Zonguldak Karaelmas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Tülin COŞKUN
September 2010, 73 pages

In this thesis, firstly the general properties of the complex functions have been given as a preperation for the other sections and by using the view of analytical functions with n series; Taylor theorem, which gives the uniform convergence to these functions, is proven. After that, the operator concept has been defined; and linearity, positivity and monotonity of the operators were examined in the sections (1.4) and (1.5). In the last part of this section, norm concept for the linear positive operators is defined, and the concept of norm is given in detail, for the space of $C[a,b]$ in particular.

In the second section it is defined with the help of complex coefficients series and the study is performed in the analytical functions space which show uniform convergence in the unit circle. Quasi-norm definition for these functions is given and the general properties of the analytical functions sequence are examined by using series. It is proven that the convergence of these function sequences depends on their coefficients. Next, the convergence conditions of some analytical functions are studied on the unit circle in some subspaces. In the third section, the validity of the Korovkin Theorem for Linear k-positive operator sequences is examined by using the Taylor coefficients and the convergence theorems which are not valid with the classical conditions, are proven with special conditions.

After that A_g space, which is a subspace of analytical functions space in the unit circle is defined and the definition of the linear k-positive operator is given. Lastly; after defining A_a subspace, convergence theorem for the this subspace is proven.

Key Words: Linear k-positive operators, linear k-positive operator sequence and the convergence conditions of operator sequences for A , A_g and A_a spaces.

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması ve yazılması konusunda görüş ve önerileriyle yol gösteren Değerli Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Tülin COŞKUN (ZKÜ)’ a, tezin hazırlanmasında büyük emeği geçen değerli vaktini bana ayıran araştırma görevlisi arkadaşım Nazmiye GÖNÜL (ZKÜ)’e, çalışmalarımı her konuda destekleyen, her zaman yanımda olan babam Yılmaz KURT’ a, annem Şengül KURT, kardeşim Sevda Özge KURT ve arkadaşım Sercan YILMAZ’ a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER(devam ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\rightrightarrows$	: Düzgün yakınsaklık
$C[a,b]$	: Her $x \in [a,b]$ için *a*'da soldan *b*'de sağdan sürekli fonksiyonlar uzayı
$\\|\cdot\\|_C$	: $C[a,b]$ uzayında norm
$L(f,x)$	: Operatör
$\\|L\\|_{X \to Y}$	: X den Y ye dönüşüm yapan operatör normu
$L_n(f,x)$	: Lineer pozitif operatör dizisi
A	: Analitik fonksiyonlar uzayı
$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$	: z_0 noktasındaki analitik fonksiyonun Taylor açılımı
$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$	: $f \in A$ olmak üzere karmaşık katsayılı fonksiyonlar
f_k	: Reel veya karmaşık değerli Taylor katsayısı
$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k} z^k$	: Birim dairede analitik fonksiyonlar dizisinin Taylor açılımı
A_g, A_a	: A nın alt uzayları
T	: A dan A ya tanımlı bir operatör
$T_{k,m}$	: Analitik fonksiyonlar için Taylor katsayıları
Tz^k	: $\sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m} z^m$ ye eşit olan fonksiyon
A^+	: $f \in A$ olmak üzere $f_k \geq 0$ olan fonksiyonlar uzayı
$T_n f(z)$	: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} f_m T_{k,m}^{(n)}$ şeklinde tanımlı operatör dizisi
$=:$	: eşitliğin tanım anlamında yapıldığı durum

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde tezde ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. İlk olarak karmaşık fonksiyonlar uzayında analitiklik kavramı, karmaşık fonksiyonların integralleri ve Cauchy teoremleri ile son olarak analitik fonksiyonların serilerle gösterimi konusuna değinilecektir.

1.1 KARMAŞIK FONKSİYONLARDA ANALİTİKLİK

Tanım 1.1.1

$\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi ve S de $\mathbb{C}$ nin herhangi bir alt kümesi olsun. Her $z \in S$ elemanına belli bir $f(z) \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısına karşılık getiren kurala bir karmaşık fonksiyon denir. $f(z)$ karmaşık fonksiyonu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ biçimindedir (Başkan 2005).

Tanım 1.1.2

Bir $z = x + iy$ sayısının belirttiği P noktası göz önüne alınsın. OP nin x −ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açıya θ ve OP nin uzunluğuna r denirse, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dönüşümleri dikkate alınarak

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

gösterimi elde edilir. Bu $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ifadesine $z = x + iy$ karmaşık sayısının kutupsal (polar) gösterimi denir.

Önerme 1.1.1

i)$|z_1 \mp z_2| = \sqrt{(x_1 \mp x_2)^2 + (y_1 \mp y_2)^2}$

ii)$|z|^2 = z.\overline{z}$

iii)$|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$

iv) $|z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$

v) $|z| = |\overline{z}|$

vi) $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$

vii) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ $(z_2 \neq 0)$

viii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ix) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$

Tanım 1.1.3

Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının $\varepsilon -$komşuluğu, $D(z_0, \varepsilon)$ olarak tanımlanan kümedir. Buradaki z_0 noktasına komşuluğun merkezi, ε sayısına ise komşuluğun yarı çapı denir. $D(z_0, \varepsilon)$ kümesine bazen açık disk de denir. $\overline{D}(z_0, \varepsilon) = \{z: |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ kümesine kapalı disk denir.

Tanım 1.1.4

Bir $z \in \mathbb{C}$ noktası için her $D(z_0, \varepsilon)$ komşuluğunda S nin z_0 dan farklı bir z noktası varsa z_0, S nin bir yığılma noktasıdır denir.

Tanım 1.1.5

a) z_n , $\mathbb{C}$ kümesinde bir dizi olsun ve bir $z_0 \in \mathbb{C}$ sayısı verilsin. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün n ler için $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyorsa, z_n dizisinin limiti z_0 dır denir. Bu durum,

$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ ya da $z_n \to z_0$

gösterimi ile belirtilir.

b) Belli bir z_0 limitine sahip olan z_n bir dizisine yakınsak dizi denir.

c) Yakınsak olmayan bir diziye ıraksak denir.

Tanım 1.1.6

Bir f fonksiyonu bir z_0 noktasının delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun ve bir A karmaşık sayısı verilsin. A nın herhangi bir $D(A, \varepsilon)$ komşuluğu için z_0 noktasının $f(N_0) \subset D(A, \varepsilon)$ olacak biçimde bir $N_0 = D(z_0, \delta) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğu varsa f nin z_0 daki limiti A dır denir.

Tanım 1.1.7

Bir f fonksiyonu bir S kümesi üzerinde tanımlı ve $z_0 \in S$ ($z_0 \in \mathbb{C}$ ya da $z_0 = \infty$) noktası S nin bir yığılma noktası olsun. Eğer $f(z_0) \neq \infty$ ve $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ise f, z_0 da süreklidir denir.

Tanım 1.1.8

Bir S kümesi üzerinde tanımlanmış bir f fonksiyonu verilsin. Eğer herhangi $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|z_1 - z_2| < \delta$ koşulunu gerçekleyen bütün $z_1, z_2 \in S$ nokta çiftleri için, $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse f, S üzerinde düzgün süreklidir, denir.

Önerme 1.1.2

Eğer bir f fonksiyonu, bir S kümesi üzerinde düzgün sürekli ise, S de süreklidir. Tersi doğru değildir.

Önerme 1.1.3

Bir f fonksiyonu kompakt (kapalı ve sınırlı) S kümesi üzerinde sürekli ise, S de düzgün süreklidir.

Tanım 1.1.9

f fonksiyonu bir z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına f nin z_0 noktasındaki türevi denir. Yani $f'(z_0)$ değeri,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Tanım 1.1.10

Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f fonksiyonu z_0 'da analitiktir denir (Hille 1959).

Tanım 1.1.11

Eğer bir f karmaşık fonksiyonu S kümesinin bütün noktalarında analitikse f, S üzerinde analitik bir fonksiyondur denir (Hille 1959).

Tanım 1.1.12

Bir f fonksiyonu $\mathbb{C}$ 'nin tüm noktalarında analitikse f fonksiyonuna tam fonksiyon denir (Ash 1971).

Uyarı 1.1.1

Bir z_0 noktasında analitik olan fonksiyon bu noktada diferansiyellenebilirdir. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 1.1.1

f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitikse z_0 ın bir komşuluğundaki tüm noktalarda analitiktir. Çünkü analitik fonksiyonun tanımından $D(z_0,\delta)$ komşuluğunda bulunan her z için $D(z,\delta_1)\subset D(z_0,\delta)$ özelliğinde bir δ_1 vardır ve Uyarı 1.1.1 gereği f fonksiyonu $D(z,\delta_1)$ de diferansiyellenebilir, yani f fonksiyonu z de analitiktir (Ahlfors 1996).

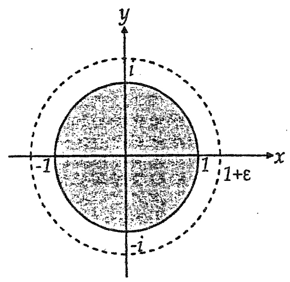
Uyarı 1.1.2

Bir f fonksiyonunun analitik olduğu noktaların kümesi açık bir kümedir, yani $A=\{z\in C \mid f, z \text{ de analitik}\}$ kümesi açıktır. Çünkü herhangi bir $z_0\in A$ noktası için analitik fonksiyon tanımından $D(z_0,\delta)\subset A$ olacak biçimde bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğu vardır. Bu nedenle çoğunlukla, bir f fonksiyonunun analitikliği bir z_0 noktasında değil de bir açık $A\subset\mathbb{C}$ kümesinde tanımlanır. Dolayısıyla bu tanım yerine bazen "$A\subset\mathbb{C}$ açık bir küme ve A dan $\mathbb{C}$ ye tanımlı olan f fonksiyonu A nın her noktasında diferansiyellenebiliyorsa, f fonksiyonu A kümesinde analitiktir" tanımı kullanılır.

Örnek 1.1.2

f fonksiyonunun $S = \{z : |z| \le 1\}$ kümesinde analitik olması S kümesini kapsayan herhangi bir açık A kümesinde analitik olması demektir.

$A = \{z : |z| \le 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ olarak seçilirse



Şekil 1.1

f fonksiyonu A kümesinde analitiktir. Çünkü tanım gereği $|z| = 1$ koşulunu sağlayan keyfi bir z noktasının bir δ_z − komşuluğunda f analitiktir. Böylece f fonksiyonu S kümesinin sınır noktalarını iç nokta kabul eden bir açık kümede de analitiktir.

Uyarı 1.1.3

Karmaşık fonksiyonların analitik olduğu küme belirtilmeden kısalık olması bakımından "f fonksiyonu analitik olsun." denilebilir. Bu söylemin anlamı f fonksiyonunun $\mathbb{C}$ kümesinde analitik olduğu noktaların var olması demektir.

Tanım 1.1.13

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırayla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir (Marsden 1973).

Tanım 1.1.14

Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise, γ ya kapalı eğridir denir (Ahlfors 1996).

Tanım 1.1.15

Bir γ eğrisinde $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ durumu yalnızca $t_1=t_2$ için sağlanıyorsa γ ya basit eğridir denir. Bazen basit eğrilere Jordan kapalı eğrisi de denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir.

Tanım 1.1.16

Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma^{'}$ türevi var ve sürekli ise γ diferansiyellenebilir eğri (yay) denir.

Tanım 1.1.17

γ diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer her t için $\gamma^{'}(t)\neq 0$ ise, γ ya düzgün eğri denir (Göğüş 1991).

Tanım 1.1.18

γ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer sonlu nokta dışındaki her $t\in[a,b]$ için $\gamma^{'}(t)\neq 0$ ise γ eğrisine parçalı düzgün eğridir denir (Marsden 1973).

Tanım 1.1.19

f ve F bir B bölgesinde analitik fonksiyonlar olsun. Eğer $F^{'}=f$ ise F fonksiyonuna f nin bir belirsiz integrali denir ve

$$F(z)=\int f(z)\,dz \tag{1.1}$$

ile gösterilir.

Sonuç 1.1.1

$c\in\mathbb{C}$ sabit olmak üzere F_1 ve F_2, f fonksiyonunun belirsiz integrali ise, $F_1=F_2+c$ olduğundan (1.1) deki ifade $F(z)=\int f(z)\,dz+c$ şeklinde yazılır (Ash 1971).

Tanım 1.1.20

A, $\mathbb{C}$ de bir açık küme $f : A \to \mathbb{C}$ sürekli ve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ise $\gamma([a,b]) \subset A$ özelliğinde diferansiyellenebilir bir eğri olsun. f fonksiyonunun γ eğrisi boyunca integrali

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz$$

simgesi ile gösterilir ve

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

olarak tanımlanır.

Eğer γ parçalı diferansiyellenebilirse

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_i+1} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

olarak tanımlanır (Duncan 1968).

Önerme 1.1.4

$\tilde{\gamma}$, γ nın değişik parametrik gösterimi ve f, $\tilde{\gamma}$ nın (γ nın) resmini bulunduran açık bir küme üzerinde sürekli ise,

$$\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f$$

olur.

Uyarı 1.1.4

Görülüyor ki integralin değeri eğrinin gösteriminden bağımsızdır.

Örnek 1.1.3

$f(x) = x^3$ fonksiyonunun,

$\gamma(t) = t + it$, $0 \le t \le 1$

eğrisi boyunca integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (t+it)^3(1+i)dt = (1+i)^4\int_0^1 t^3 dt = \frac{(1+i)^4}{4} = -1$$

Teorem 1.1.1

Bir $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. γ, A içindeki bir z_1 noktasını, gene A içindeki bir z_2 noktasına birleştiren bir eğri olsun. Eğer A da $F' = f$ olacak şekilde bir $f : A \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu varsa,

i) $\int_\gamma f = F(z_2) - F(z_1)$

ii) $z_1 = z_2$ ise $\int_\gamma f = 0$ dır.

Aşağıdaki teorem kanıtsız olarak verilecektir.

Teorem 1.1.2

f fonksiyonu bir B bölgesinin kapanışında analitik ise,

$$\int_{\partial B} f(z)\,dz = 0$$

dır (Marsden 1973).

Önerme 1.1.5

Eğer f fonksiyonu, basit bağlantılı bir bölge üzerinde analitik ise,

$$\int_a^b f(z)\,dz$$

integrali, a ve b' yi bu bölge içinde birleştiren yoldan bağımsızdır (Ash 1971).

Teorem 1.1.3 (Cauchy İntegral Formülü)

B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir basit kapalı eğri olsun. Eğer a,γ içinde bir nokta ve $f(z)$ fonksiyonu B bölgesinde analitik ise

$$f(a) =: \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

biçimindedir (Ahlfors 1996).

Kanıt:

γ kapalı eğrisinin içinde a merkezli ρ yarıçaplı bir γ_0 çemberi alınsın. O halde Cauchy integral teoremine göre, $\dfrac{f(z)}{z-a}$ fonksiyonu γ kapalı eğrisinin içinde γ_0 çemberi dışında analitik olduğundan

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

dir.

γ_0 üzerindeki $z-a=\beta e^{it} = \rho(\cos t + i\sin t)$ olduğundan $dz = i\rho e^{it} dt$ ve böylece

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = i\int_0^{2\pi} f\left(a+\rho e^{it}\right) dt + i\int_0^{2\pi} \left[f\left(a+\rho e^{it}\right) - f(a)\right] dt + i\int_0^{2\pi} f(a)\, dt$$

yazılabilir. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğinde ρ, öyle biçimde seçilebilir ki γ_0 üzerindeki bütün z noktaları için

$$\left| f(z) - f(a) \right| < \varepsilon$$

olur. Böylece

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) \right| = \left| \int_{\gamma_0} \left[f(z) - f(a) \right] dt \right| < 2\pi\varepsilon\rho$$

yazılabilir. Ancak ε keyfi olduğundan

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

yazılabilir. Yani,

$$f\left(a\right)=:\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-a}dz$$

bulunmuş olur.

Uyarı 1.1.5

Bu teorem gösteriyor ki, bir analitik fonksiyonun analitik olduğu herhangi bir noktadaki değeri bu noktayı çevreleyen bir kapalı eğri üzerindeki değeri yardımı ile hesaplanabilir.

Teorem 1.1.4 (Cauchy Türev Formülü)

$w=f\left(z\right)$ fonksiyonu bir γ kapalı eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Eğer a,γ 'nin içinde bir nokta ise

$$f^{(n)}\left(a\right)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{\left(z-a\right)^{n+1}}dz$$

dir (Spiegel 1964).

Kanıt:

$n=0$ için Cauchy İntegral Formülü'nün elde edileceği açıktır. $n=1$ için, h sayısı $a+h$ noktası γ nın içine düşecek şekilde $\left|h\right|<\delta$ olarak seçilsin. O halde Cauchy İntegral Formülü gereği

$$f\left(a+h\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-a-h}dz,\ f\left(a\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-a}dz$$

yazılabilir.Buradan da

$$\left|\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{\left(z-a\right)^{2}}dz\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\frac{1}{\left(z-a-h\right)\cdot\left(z-a\right)}-\frac{1}{\left(z-a\right)^{2}}\right]f\left(z\right)dz\right|$$

$$=\left|\frac{h}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{\left(z-a\right)^{2}\cdot\left(z-a-h\right)}dz\right|$$

$$\leq\frac{M\cdot L\cdot\delta}{2\pi\rho^{2}\left(\rho-\delta\right)}$$

eşitsizliği yazılabilir.Burada L γ nın uzunluğunu M ile $|f|$ nin γ üzerindeki üst sınırını, ρ ise z γ'yı tararken $|z-a|$ nın aldığı en küçük değer göstermektedir. Bu eşitsizlik yazılırken, ayrıca $|z-a-h| \geq |z-a| \geq \rho-\delta$ bağıntısından da yararlanılmaktadır. $\delta \to 0$ için

$\dfrac{ML\delta}{\rho^2(\rho-\delta)} \to 0$ olduğundan

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

olup

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

olarak bulunur. Aynı şekilde $f(a)$ yerine $f'(a)$ yazılacak olursa

$$f''(a) = \frac{2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

eşitliği geçerlidir. Nihayet n. adımda

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

bulunur.

Teorem 1.1.5 (Cauchy Eşitsizliği)

$w = f(z)$ fonksiyonu bir $|z-a| < r$ diskinin içinde ve sınırında analitik olsun. $|f(z)|$ nin bu diskin sınırındaki maksimum değeri M ise,

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

dir.

Kanıt:

Bu diskin sınırı γ ile gösterilsin . O halde

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

yazılabilir. Mutlak değer alınırsa,

$$\left|f^{(n)}(a)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|\leq\frac{n!M}{2\pi r^{n+1}}\int_{\gamma}|dz|=\frac{n!M}{2\pi r^{n+1}}2\pi r=\frac{n!M}{r^{n}}$$

olduğu görülür.

Teorem 1.1.6

$w=f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir B bölgesinde sürekli ve bu bölgede bulunan her basit kapalı γ çevresi için

$$\int_{\gamma}f(z)dz=0$$

ise f , B de analitiktir.

Teorem 1.1.7 (Maksimum Kuralı)

f fonksiyonu bir B bölgesinde analitik olsun. Eğer $|f|$, B de maksimum değer alıyorsa, f sabittir.

Teorem 1.1.8 (Minimum Kuralı)

f , $\overline{B}$ de sürekli ve B bölgesinde hiç bir yerde sıfır olmayan bir analitik fonksiyonsa, herhangi bir $z_0 \in B$ noktasında $|f|$ minimum olmaz. $|f|$ minimum değerini ∂B de alır.

1.2 ANALİTİK FONKSİYONLARIN SERİLERLE GÖSTERİMİ

Tanım 1.2.1

Her bir $a_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1.2}$$

karmaşık sayılar serisi göz önüne alınsın.

a) Bu serinin $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olarak tanımlanan s_n kısmi toplamlar dizisi bir s_0 değerine yakınsıyorsa (1.2) serisi s_0 a yakınsıyor denir. Bu yakınsama çoğu kez $s_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yazılarak belirtilir ve s_0 a serinin toplamı denir.

b) Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serisi yakınsak ise, (1.2) serisine mutlak yakınsak denir (Hille 1959).

Teorem 1.2.1

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ serisi verilsin. Eğer $|r|<1$ ise, bu seri $\frac{1}{1-r}$ değerine yakınsar. Eğer $|r| \geq 1$ ise seri yakınsamaz (ıraksar) (Marsden 1973).

Kanıt:

$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$ kısmi toplamlar dizisi alınırsa buradan,

$$rs_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1}$$

ve böylece taraf tarafa çıkartılırsa

$$(1-r)s_n = 1 - r^{n+1}, \text{ yani } s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

bulunur.

Eğer $|r|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ olacağından

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-r} = s_0$$

olur, yani verilen seri yakınsak ve toplamı $\dfrac{1}{1-r}$ dir.

Eğer $|r| \geq 1$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ yoktur ve dolayısıyla yakınsamaz (ıraksar).

Önerme 1.2.1

Bir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi verilsin ve

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda,

$r < 1$ ise seri mutlak yakınsak,

$r > 1$ ise seri ıraksak,

$r = 1$ ise kök testi sonuç vermez (Başkan 2005).

Kanıt:

1. Hal: $r < 1$ olsun ve $r < r' < 1$ olacak biçimde r' seçilsin. N doğal sayısı öyle olsun ki her $n \geq N$ için

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r', \text{ yani } |a_n| < (r')^n$$

olsun. Şimdi,

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N-1}| + (r')^N + (r')^{N+1} + \cdots$$

serisi göz önüne alınsın. Bu seri

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N-1}| + \left[\frac{(r')^N}{1-r'}\right]$$

değerine yakınsar. O halde $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsaktır.

2. Hal: $r > 1$ olsun ve r' sayısı $r > r' > 1$ olacak şekilde seçilsin. N öyle bir doğal sayı olsun ki her $n \geq N$ için

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r'$$

eşitsizliği geçerlidir. O halde $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ olacağından $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

3. Hal: $r = 1$ olsun. Bu halde kök testinin sonuç vermediği iki örnekle görülebilir.

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi alınırsa burada $r = 1$ dir. Bu seri ıraksaktır.

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi alınırsa bu seri için de $r = 1$ dir. Fakat verilen seri yakınsaktır.

Tanım 1.2.2

$f_n : A \to \mathbb{C}$ olarak tanımlanmış fonksiyonların (f_n) dizisi olsun.

a) Eğer her bir $z \in A$ için $f_n(z)$ karmaşık sayılar dizisi bir $f(z)$ karmaşık sayısına yakınsıyorsa, (f_n) fonksiyonlar dizisi noktasal olarak yakınsıyor, denir. $f_n(z)$ karmaşık sayılar dizisinin limiti $f(z)$ ile gösterilir ve bu şekilde belirtilen f fonksiyonuna (f_n) fonksiyonlar dizisinin limiti denir.

b) $f_n : A \to \mathbb{C}$ olarak tanımlanan (f_n) fonksiyonlar dizisi verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde bütün $z \in A$ noktaları ve her $n \ge n_0$ için $\left|f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı bulunabilirse (f_n) fonksiyonlar dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir. Bu düzgün yakınsama hali çok kez $f_n \to f$ gösterimi ile belirtilir.

c) g_k fonksiyonlarının bir $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ serisi verilsin. Eğer $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$ olarak tanımlanan (f_n) kısmi toplamlar dizisi noktasal (düzgün) yakınsıyorsa $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ serisi noktasal (düzgün) yakınsıyor denir (Ahlfors 1996).

Uyarı 1.2.1

a) Düzgün yakınsak bir dizinin noktasal yakınsak olduğu tanımdan görülebilir. Tersi genelde doğru değildir. Örneğin

$$f_n(x) = n^2 x\left(1 - x^2\right)^n, 0 \le x \le 1$$

dizisi alınırsa $A=[0,1]$ kümesi üzerinde, f_n fonksiyonlar dizisi noktasal olarak yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x)$ dir. Fakat yakınsama düzgün değildir.

b) Düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık arasında fark şudur. Bir $\varepsilon>0$ verildiğinde, düzgün yakınsaklıkta bütün z noktaları için geçerli olan bir $n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunur. Noktasal yakınsaklıkta ise, bu $n_0(\varepsilon)$ sayısı z noktalarına göre değişir.

c) Düzgün yakınsaklık bir noktada değil, bir kümede tanımlanır.

Teorem 1.2.2

$f_n \to f$, (A üzerinde düzgün) olması için gerekli ve yeterli koşul, herhangi bir $\varepsilon>0$ verildiğinde her $n \geq n_0$, bütün $z \in A$ noktaları ve bütün $p=1,2,...$ değerleri için

$$\left|f_n(z)-f_{n+p}(z)\right|<\varepsilon$$

olacak özellikte bir n_0 doğal sayısının bulunmasıdır.

Teorem 1.2.3

Bir $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ serisinin A kümesi üzerinde düzgün yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul herhangi bir $\varepsilon>0$ verildiğinde her $n \geq n_0$, bütün $z \in A$ noktaları ve bütün $p=1,2,3,...$ değerleri için

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)\right|<\varepsilon$$

olacak özellikte bir n_0 doğal sayısının bulunabilmesidir (Marsden 1973).

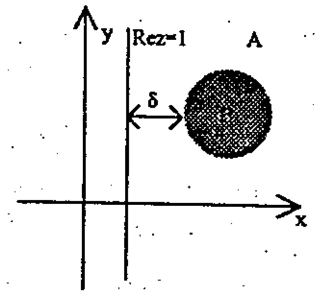
Teorem 1.2.4

$f_n=\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ kısmi toplamı alınırsa f_n, γ üzerinde tanımlı ve süreklidir. Üstelik $f_n=\sum_{k=1}^{\infty} g_k$, γ üzerinde düzgün yakınsak olarak verildiğine göre bu serinin f_n kısmi toplamlar dizisi de düzgün yakınsaktır. (γ üzerinde).

Teorem 1.2.5

A, $\mathbb{C}$' de bir bölge (f_n) ise A üzerinde analitik olan f fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer A da bulunan her kapalı disk üzerinde $f_n \to f$ yakınsaması düzgün ise, f fonksiyonu A da analitiktir. A daki kapalı diskler üzerinde $f_n' \to f'$ yakınsaması düzgün, A üzerinde ise $f_n' \to f'$ noktasaldır (Başkan 2005).

Örnek 1.2.1



Şekil 1.2

$f(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ fonksiyonunun $A = \{z : |z| < 1\}$ bölgesinde analitik olduğunu gösteriniz ve f' için bir seri yazınız.

Çözüm

Teorem 1.2.5 den yararlanılacaktır. $M_n = \frac{1}{n^2}$ olarak tanımlansın. p testi gereği $\sum M_n$ yakınsak bir seridir. Diğer yandan $z \in A$ için $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2} = M_n$ olur. Bu nedenle Weierstrass-M testi gereği $\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ serisi de A da mutlak ve düzgün yakınsaktır. A daki her kapalı diskin üzerinde öncelikle düzgün yakınsak olur. O halde Teorem 1.2.5 gereği f, A da analitik olur. Yakınsama düzgün olduğundan terim terime türev alınabilir ve

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

bulunur.

Örnek 1.2.2

$A=\{z:|z|<1\}$ bölgesi alınsın ve B tamamen A içinde kalan ve $|z|=1$ çemberine uzaklığı $\delta>0$ olan kapalı disk olsun. Herhangi $z\in B$ için

$|z^n|<(1-\delta)^n$ yazabiliriz. $1-\delta<1$ olduğundan $\sum(1-\delta)^n$ yakınsaktır. Weierstrass-M testi gereği ise, B de $\sum_0^\infty z^n$ serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır. O halde Teorem 1.2.5 e göre $\sum z^n$, A da bir analitik fonksiyondur. İntegralin değeri $z=re^{i\theta}$ dönüşümü ile hesaplanırsa,

$$\int_\gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)dz=\int_\gamma\frac{1}{z}dz+\int_\gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)dz=2\pi i$$

bulunur.

Tanım 1.2.3

$z_0,a_n\in\mathbb{C}$ sabitler olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$$

biçimindeki serilere kuvvet serisi denir.

Tanım 1.2.4

$z_0,a_n\in\mathbb{C}$ sabitler olmak üzere,

Bir $\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n$ kuvvet serisi verilsin. Eğer $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_kw_0^k$ kısmi toplamlar dizisi yakınsaksa seri w_0 noktasında yakınsaktır denir. Eğer $\sum_{k=0}^{n}|a_kw_0^n|$ serisi yakınsaksa, seri w_0 da mutlak yakınsaktır, denir.

Tanım 1.2.5

Eğer bir $f:S\to\mathbb{C}$ fonksiyonu ve her bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık tüm $n\geq n_0$ sayıları ve tüm $w\in S$ noktaları için

$$\left|\sum a_nw^n-f(w)\right|<\varepsilon$$

olacak biçimde bir n_0 sayısı bulunabilirse $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ serisi S üzerinde $f(w)$ ye düzgün yakınsıyor, denir (Ahlfors 1996).

Önerme 1.2.2

$a_1, a_2, a_3, ...$ negatif olmayan gerçel sayıların dizisi ve $R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ olsun. Eğer $R < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır. Eğer $R > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, serisi ıraksaktır (Başkan 2005).

Uyarı 1.2.2

Bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ kuvvet serisi kendi yakınsaklık çemberinin iç kısmı üzerinde bir analitik fonksiyon belirtir.

Teorem 1.2.6

Eğer $\sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ serisi $|z - z_0| = R$ özelliğindeki z noktalarında yakınsak ise, seri $D(z_0, R)$ üzerinde mutlak yakınsar, $D(z_0, R)$ nin her kapalı alt diski üzerinde düzgün yakınsar, ve bu nedenle de $D(z_0, R)$ nin her bir kompakt alt kümesi üzerinde düzgün yakınsar.

Örnek 1.2.3

$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ kuvvet serisi $0 < |\rho| < 1$ olmak üzere,

$$A_p = \{z : |z| \le \rho\}$$

üzerinde ve içinde $\frac{1}{1-z}$ ye düzgün yakınsar (Spiegel 1964).

Çözüm:

$0 < |\rho| < 1$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$ serisi yakınsak bir seridir (Geometrik seri). Diğer yandan $z \in A_p$ için $|z| \le p$ olduğundan Weierstrass M_testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, A üzerinde düzgün yakınsaktır ve serinin toplamı bulunabilir.

Gerçekten,

$$s_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$$

denirse,

$$zs_n = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + z^{n+1}$$

olup, buradan da

$$(1-z)s_n = 1 - z^{n+1}$$

yani

$$s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-z}$$

dir. Dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

elde edilir.

Taylor teoreminin kanıtında kullanılacak olan aşağıdaki teorem kanıtına değinilmeden verilecektir.

Teorem 1.2.7

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$ serisi $|z - z_o| = R$ eşitliğini sağlayan z noktalarında yakınsak ise seri $D(z_0, R)$ diski üzerinde mutlak yakınsar, $D(z_0, R)$ diskinin her kapalı alt diski üzerinde düzgün yakınsar ve bu nedenle de $D(z_0, R)$ diskinin her bir kompakt alt kümesi üzerinde düzgün yakınsar (Başkan 2005).

Teorem 1.2.8 (Taylor Teoremi)

f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitikse bu noktaların bir komşuluğundaki z ler için geçerli olmak üzere

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_o)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{1.3}$$

açılımı vardır. Bu kuvvet serisi bir $D(z_0,R)$ diski üzerinde mutlak yakınsar ve bu diskin kompakt alt kümeleri üzerinde yakınsama düzgündür (Marsden 1973).

Kanıt:

f fonksiyonu, z_0 noktasında analitik olduğuna göre bir $D(z_0,R)$ komşuluğunda da analitiktir. Bir $\gamma=\{z:|z-z_0|=r_0, r_0<r\}$ kümesi ele alınsın. O halde Cauchy integral formülü gereği γ içindeki bir z için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw$$

yazılabilir. Buradan da

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-w_0}}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\sum_{n=0}^{\infty}f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

elde edilir. Eğer $|z-z_0|\le r_1<r_0$ ve $M_f(\gamma), f$ nin γ üzerindeki maksimum değeri ise,

$$\frac{\left|f(w)(z-z_0)^n\right|}{|w-z_0|^{n+1}}\le\frac{M_f(\gamma)}{r_0}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n=M_n$$

olur. O halde,

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

serisi $w\in\gamma$ için düzgün yakınsar ve dolayısıyla terim terime integral alınabilir. Böylece yukarıdaki açılımdan ve Cauchy türev formülünden yararlanarak,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

elde edilir.

Tanım 1.2.6

Burada, (1.3) ile belirtilen kuvvet serisine f fonksiyonunun $z=z_0$ komşuluğundaki Taylor açılımı denir.

Taylor teoreminden anlaşılıyor ki bir analitik fonksiyon analitik olduğu noktanın bir komşuluğunda bir kuvvet serisi ile gösterilebilir (Başkan 2005).

Tanım 1.2.7

Bir $w=f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $D(z_0,r)-\{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 da analitik değilse f, z_0 da ayrık aykırı (singular) noktaya sahiptir denir. Eğer $w=f(z)$ bir $D=\{z:|z|>r\}$ kümesi üzerinde analitik, fakat $g(z)=\frac{1}{z}$, $z=0$ da ayrık aykırılığa sahipse f nin $z=\infty$ da bir ayrık aykırılığı vardır denir.

Önerme 1.2.3

A, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $f:A\to\mathbb{C}$ tanımlı olsun. f fonksiyonunun A da analitik olması için gerekli ve yeterli koşul, her bir $z_0\in A$ noktası için f fonksiyonunun üzerinde yakınsak bir kuvvet serisine eşit olabileceği bir $D(z_0,R)$ diskinin bulunabilmesidir (Hille 1959).

Teorem 1.2.9 (Laurent Teorem)

Eğer $w=f(z)$ fonksiyonunun bir z_0 noktasında ayrık aykırılığı varsa, bu noktanın delinmiş bir $A=\{z:s_1<|z-z_0|<s_2\}$ komşuluğunda f fonksiyonunun

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

açılımı vardır. Burada,

$$\gamma=\{z:|z-z_0|=r,s_1<r<s_2\}$$

olmak üzere,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

dir. Burada (1.3) deki kuvvet serisi f fonksiyonuna, A üzerinde mutlak ve bunun kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsar.

Örnek 1.2.4

Bir kuvvet serisi, yakınsaklık çemberinin üzerinde ya her yerde mutlak yakınsaktır ya da hiçbir yerde mutlak yakınsak değildir (Marsden 1973).

Çözüm:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ serisi alınsın ve yakınsaklık çemberinin yarıçapı R olsun. Bu yakınsaklık çemberi γ ile gösterilsin ve verilen kuvvet serisi bir $z_1 \in \gamma$ noktasında mutlak yakınsak olsun. Bu şu demektir: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$ serisi yakınsaktır. Herhangi bir $z \in \gamma$ noktası için de $|z - z_0| = R$ dir ve $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$ yakınsak olduğundan, γ üzerinde her yerde mutlak yakınsar. Bu çözümle "ya da hiçbir yerde mutlak yakınsak değildir" önermesi de cevaplanmış olmaktadır. Bu durum bir örnekle aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ serisi $|z| = 1$ yakınsaklık çemberinin üzerinde hiçbir yerde mutlak yakınsak değildir. Halbuki, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ serisinin yakınsaklık çemberi $|z| = 1$ dir ve bu seri çemberin üzerindeki her noktada mutlak yakınsar.

1.3 OPERATÖRLERİN GENEL ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda lineer pozitif operatör kavramı verilecektir.

Tanım 1.3.1

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Her $f \in X$ için,

$$L(f, x) = g(x)$$

olacak şekilde bir $g \in Y$ bulunuyorsa L'ye operatördür denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Örnek 1.3.1

Aşağıda verilen dört örnek birer operatördür.

a) $L_1(f,x) = f(x)$

b) $L_2(f,\ x) = f(x) + 1$

c) $L_3(f,x) = \int_a^x f(t)\ dt$

d) $L_4(f,x) = \int_a^b f(t)\ e^{-tx} dt$

Tanım 1.3.2

X , Y lineer uzaylar $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) = \alpha_1 L(f_1, x) + \alpha_2 L(f_2, x)$$

eşitliğini sağlayan L operatörüne lineerdir denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.3.3

$X^+ = \{f \mid f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$, $Y^+ = \{g \mid g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$

şeklinde iki fonksiyon uzayı olsun. $L : X \to Y$ operatörü için, $L(X^+) \subset Y^+$ oluyorsa L' ye pozitif operatördür denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.3.1

L lineer pozitif operatörü negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür. Şöyle ki $f(x) \leq 0$ olsun.Her $x \in \mathbb{R}$ için $-f(x) \geq 0$ olur. L operatörü pozitif olduğundan $L(-f,x) \geq 0$ olur. O halde $L(f,x) \leq 0$ dır.

Uyarı 1.3.2

Fonksiyon ile operatör arasındaki fark; farklı tanım kümelerine sahip olmalarıdır. Çünkü fonksiyonların tanım kümesi sayı kümeleri; operatörlerin tanım kümesi fonksiyon uzaylarıdır.

1.4 LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN NORMU

Bu kısımda lineer pozitif operatörlerin normu tanımlanarak bu normun genel özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 1.4.1

X boştan farklı herhangi bir fonksiyon uzayı olsun. Her $f \in X$ için

$i)$ $\|f\| = 0$ ise $f = 0$
$ii)$ $\|\alpha f\| = |\alpha| . \|f\|$
$iii)$ $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

özellikleri sağlanıyorsa $\| \, . \, \| : X \to X$ dönüşümüne X üzerinde tanımlı yarı norm denir (Kantorovich 1959).

Bu çalışmada yarı norm yine $\| \, . \, \|$ sembolü ile gösterilecektir.

Tanım 1.4.2

X ve Y normlu uzaylar ve $L : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Her $f \in X$ için $\|L(f, x)\|_Y \leq C\|f\|_X$ oluyorsa L'ye sınırlı operatör denir. Bu C sabitlerinin en büyük alt sınırına L operatörünün normu denir. Operatör normu

$\|L\| = \inf\{C : \|L(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X\}$

şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 1.4.1

$\|f\|_X \neq 0$ olmak üzere, L'nin normu:

$$\|L\|_{X \to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

biçiminde de tanımlanabilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.4.1

$\|g\|_X = 1$ olmak üzere,

$\|L\| = \sup\limits_{\|g\|_X = 1} \|L(g, x)\|_Y$

eşitliği geçerlidir. Gerçekten de

$$\|L\| = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

$$= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \left\| \frac{1}{\|f\|_X} . L(f,x) \right\|_Y \qquad = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \left\| L(\frac{f}{\|f\|_X}, x) \right\|_Y$$

$\dfrac{f}{\|f\|_X} = g$ olarak alınırsa,

$\|L\| = \sup_{\|g\|_X = 1} \|L(g,x)\|_Y$ olur.

Önerme 1.4.2

$L : X \to Y$ tanımlı, lineer pozitif bir operatör olsun. Bu durumda

$|L(f,x)| \leq L(|f|, x)$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt:

L lineer pozitif bir operatör olsun.

$-|f| \leq f \leq |f|$

eşitsizliğine L operatörü uygulanır ve monotonluk özelliği kullanılırsa;

$L(-|f|, x) \leq L(f,x) \leq L(|f|, x)$

olur. L lineer olduğundan,

$-L(|f|, x) \leq L(f,x) \leq L(|f|, x)$

olur. Böylece

$|L(f,x)| \leq L(|f|, x)$

bulunur (Coşkun 1997).

Tanım 1.4.3

$D \subset \mathbb{R}^n$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_k : D \to \mathbb{R}^m$ ve $f : D \to \mathbb{R}^m$ dönüşümleri verilmiş olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $k_0 := k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var ve $k \geq k_0$, her $x \in D$ için

$$\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

oluyor ise, (f_k) fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

1.5 C[a,b] UZAYINDA KOROVKIN TEOREMLERİ

Bu kısımda $C\left[a,b\right]$uzayı tanımlanarak bu uzayda tanımlı lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklık koşulları araştırılacaktır.

Tanım 1.5.1

$\mathbb{R}$ de tanımlanmış ve $\left[a,b\right]$ aralığının tüm noktalarında sürekli olan fonksiyonlar uzayına sonlu aralıkta sürekli fonksiyonlar uzayı denir. $C\left[a,b\right]$ ile gösterilir ve kısaca

$C\left[a,b\right]=\left\{f : f, \text{her } x\in\left[a,b\right] \text{ için sürekli ve } a\text{'da soldan } b\text{'de sağdan sürekli}\right\}$

şeklinde ifade edilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.5.2

$C\left[a,b\right]$uzayında norm;

$\|f\|_C=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f\left(x\right)\right|$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 1.5.1 (Korovkin Teoremi)

$f\in C\left[a,b\right]$ ve f $\mathbb{R}$ de tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. L_n lineer pozitif operatör dizisi aşağıdaki I_1, I_2, I_3 koşullarını sağlıyorsa $L_n\left(f,x\right)$ operatör dizisi $f\left(x\right)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır ve $L_n\left(f,x\right)\rightrightarrows f\left(x\right)$ şeklinde gösterilir.

$$I_1 : L_n\left(1,x\right)\rightrightarrows 1 \tag{1.4}$$

$$I_2 : L_n\left(t,x\right)\rightrightarrows x \tag{1.5}$$

$$I_3 : L_n\left(t^2,x\right)\rightrightarrows x^2 \tag{1.6}$$

Kanıt:

f , $\mathbb{R}$ ’de sınırlı olduğundan bir $M>0$ vardır, öyle ki her $x\in\mathbb{R}$ için

$$\left|f\left(x\right)\right|\leq M \tag{1.7}$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|<\left|f\left(t\right)\right|+\left|f\left(x\right)\right|<2M \tag{1.8}$$

eşitsizliği elde edilir. $f\in C\left[a,b\right]$ olduğundan her $\varepsilon>0$ için en az bir $\delta>0$ vardır, öyle ki $t\in\left(-\infty,\infty\right)$ ve $x\in\left[a,b\right]$ için $\left|t-x\right|<\delta$ iken

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon \tag{1.9}$$

olur.Gerçekten $x,t\in\left[a,b\right]$ f fonksiyonu $\left[a,b\right]$ de sürekli olduğundan $\left|t-x\right|<\delta$ iken (1.9) eşitsizliği doğrudur. $t\notin\left[a,b\right]$ ve $x\in\left[a,b\right]$ olduğunda ise; $\left|t-x\right|<\delta$ iken (1.9) eşitsizliği f fonksiyonu a ’da soldan, b ’de sağdan sürekli olduğu için doğrudur. Burada

$\left|t-x\right|\geq\delta$ için $\dfrac{\left|t-x\right|}{\delta}\geq 1$ olacağından;

$$\frac{\left(t-x\right)^2}{\delta^2}\geq 1$$

olup bir $M>0$ için,

$$\frac{2M\left(t-x\right)^2}{\delta^2}\geq 2M$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca (1.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right| &\leq\left|f\left(t\right)\right|+\left|f\left(x\right)\right|\\ &\leq 2M\\ &\leq\frac{2M}{\delta^2}\left(t-x\right)^2\\ &<\frac{2M}{\delta^2}\left(t-x\right)^2\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (1.9) eşitsizliği $\forall t\in\left(-\infty,\infty\right)$ ve $\forall x\in\left[a,b\right]$ için sağlanır. Şimdi aşağıdaki eşitsizlik araştırılırsa

$$\left\|L_n\left(f,x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[a,b]}=\left\|L_n\left(f\left(t\right)-f\left(x\right)+f\left(x\right),x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[a,b]}$$

$$=\left\| L_n\left(f(t)-f(x),x\right)+L_n\left(f(x),x\right)-f(x)\ \right\|_{C[a,b]}$$

$$=\left\| L_n\left(f(t)-f(x),x\right)+f(x)L_n(1,x)-f(x)\right\|_{C[a,b]}$$

$$=\left\| L_n\left(f(t)-f(x),x\right)+f(x)\left[L_n(1,x)-1\right]\ \right\|_{C[a,b]}$$

$$\le\left\| L_n\left(f(t)-f(x),x\right)\ \right\|_{C[a,b]}+\left\| f(x)\left[L_n(1,x)-1\right]\ \right\|_{C[a,b]}$$

$$\le\left\| L_n\left(f(t)-f(x),x\right)\ \right\|_{C[a,b]}+\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|\ \left\|\ \left[L_n(1,x)-1\right]\ \right\|_{C[a,b]} \quad (1.10)$$

eşitsizliği elde edilir. Açıkça I_1 gereği $\varepsilon_n \to 0$ dizisi için

$$\left\| L_n(1,x)-1\right\|_{C[a,b]}\le\varepsilon_n$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (1.10) eşitsizliğinden

$$\left\| L_n(f,x)-f(x)\right\|_{C[a,b]}\le\left\| L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,x\right)\right\|_{C[a,b]}+\left\|f\right\|_{C[a,b]}\varepsilon_n$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi

$$\left\| L_n\left(f(t)-f(x),x\right)\right\|_{C[a,b]}$$

normu için ihtiyaç duyulan bir eşitsizlik kanıtlanacaktır.

$$\left|f(t)-f(x)\right|<\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2+\varepsilon \quad (1.11)$$

olduğundan L_n operatörünün monotonluğundan

$$L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,x\right)\le L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2+\varepsilon,x\right)$$

$$=L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2,x\right)+L_n(\varepsilon,x)$$

$$=\varepsilon\cdot L_n(1,x)+L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}\left(t^2-2tx+x^2,x\right)\right)$$

$$=\varepsilon\cdot L_n(1,x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left(t^2-2tx+x^2,x\right)$$

$$=\varepsilon\cdot L_n(1,x)+\frac{2M}{\delta^2}\left(L_n\left(t^2,x\right)-L_n(2tx,x)+L_n\left(x^2,x\right)\right)$$

$$=\varepsilon\cdot\left(L_n(1,x)-1\right)+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2,x\right)-x^2+x^2-2x\left(L_n(t,x)-x\right)-2x^2+x^2\left(L_n(1,x)-1+x^2\right)\right]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Şimdi de $C[a,b]$ uzayında tanımlı olan maksimum normu dikkate alınırsa,

$$\left\|L_n\left(f(t)-f(x),x\right)\right\|_{C[a,b]}=\max_{x\in(a,b)}\left|L_n\left(f(t)-f(x),x\right)\right|$$
$$\leq \max_{x\in(a,b)} L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,x\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik yardımıyla

$$\left\|L_n\left(f(t)-f(x),x\right)\right\|$$
$$\leq \max_{x\in[a,b]}\left\{\varepsilon\left(L_n(1,x)-1\right)+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left[\ \left|L_n\left(t^2,x\right)-x^2\right|+2x\left(L_n(t,x)-x\right)+x^2\left(L_n(1,x)-1\right)\right]\ \right\}$$
$$\leq \max_{x\in[a,b]}\left\{\varepsilon\left(L_n(1,x)-1\right)+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left[\left|L_n\left(t^2,x\right)-x^2\right|+2x\left(\left|L_n(t,x)-x\right|\right)+x^2\left(\left|L_n(1,x)-1\right|\right)\right]\right\}$$
$$\leq \varepsilon\left\|L_n(1,x)-1\right\|_{C[a,b]}+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left[\left\|L_n\left(t^2,x\right)-x^2\right\|_{C[a,b]}-2x\left\|L_n(t,x)-x\right\|_{C[a,b]}+x^2\left\|L_n(1,x)-1\right\|_{C[a,b]}\right]$$
$$\leq \varepsilon\left\|L_n(1,x)-1\right\|_{C[a,b]}+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left\|L_n\left(t^2,x\right)-x^2\right\|_{C[a,b]}-2a\left\|L_n(t,x)-x\right\|_{C[a,b]}+b^2\left\|L_n(1,x)-1\right\|_{C[a,b]}$$

(1.4), (1.5) ve (1.6) den

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f,x)-f(x)\ \right\|_{C[a,b]}\leq \lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f(t)-f(x),x\right)\ \right\|\leq 0$$

olup

$$0\leq \lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f(t)-f(x),x\right)\ \right\|\leq 0$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f,x)-f(x)\ \right\|_{C[a,b]}=0$$

kanıtlanmış olur. $C[a,b]$ normu anlamında yakınsama ile düzgün yakınsama denk olduğundan

$L_n(f,x)\rightrightarrows f(x)$ olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 1.5.1

$\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ kapalı aralığında,

$$L_n(1,x)\rightrightarrows 1$$
$$L_n\left((t-x)^2,x\right)\rightrightarrows 0$$

koşullarını sağlıyorsa $C[a,b]$ uzayındaki herhangi bir f fonksiyonu için $L_n(f,x)\rightrightarrows f(x)$ sağlanır.

Kanıt:

(1.11) eşitsizliğine monoton olan L_n operatörü uygulanırsa

$$L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,x\right)\leq \varepsilon L_n(1,x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((t-x)^2,x\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Korovkin teoreminin kanıtından ε_n sıfır dizisi olmak üzere her $f\in C[a,b]$ için

$$\| L_n(f,x)-f(x)\|_{C[a,b]}\leq \left\|L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,x\right)\right\|_{C[a,b]}+\varepsilon_n$$

olur. Buradan

$$0\leq \| L_n(f,x)-f(x)\|_{C[a,b]}\leq \varepsilon\varepsilon_n+\frac{2M}{\delta^2}\varepsilon_n+\varepsilon_n$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\| L_n(f,x)-f(x)\|_{C[a,b]}=0$$

olduğu gösterilmiş olur.

BÖLÜM 2

ANALİTİK FONKSİYONLAR UZAYINDA POZİTİF TİPLİ OPERATÖRLER

İkinci bölümde analitik fonksiyonlar uzayı ve bu uzayda tanımlı lineer k-pozitif operatör kavramı tanıtılarak A ile gösterilen birim dairede analitik fonksiyonlar uzayında tanımlı lineer k-pozitif operatörlerin yakınsaklık koşulları araştırılacaktır.

Bu uzayda fonksiyon dizilerinin Taylor katsayılarından yararlanarak bu dizilerin yakınsaklık koşulları araştırılacaktır. Daha sonra birim dairede analitik fonksiyonlar uzayının alt uzayı olan A_g uzayı tanımlanarak lineer k-pozitif operatör tanımı verilecektir.

2.1 ANALİTİK FONKSİYONLAR VE TAYLOR KATSAYILARININ ÖZELLİKLERİ

$f \in A$ fonksiyonunun Taylor serisine açılımı $k = 0,1,2,...$ için f_k karmaşık sayılar olmak üzere $|z| < 1$ bölgesinde düzgün yakınsak olan

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{2.1}$$

serisi ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.1

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ serisinde f_k karmaşık sayılarına $f(z)$ fonksiyonunun Taylor katsayıları denir (Başkan 2005).

Uyarı 2.1.1

Taylor katsayıları Bölüm I de verilen yakınsaklık testlerinden kök kriteri nedeniyle

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|f_k|} < 1 \tag{2.2}$$

koşulunu sağlar.

Tanım 2.1.2

Birim dairede analitik fonksiyonlar uzayında

$$\|f\|_A = \max_{|z| \le r<1} |f(z)| \tag{2.3}$$

dönüşümü bir yarı norm tanımlar (Taylor 1967).

Uyarı 2.1.2

Tanım 2.1.2 den görülüyor ki A uzayında $(f_n(z))$ analitik fonksiyonlar dizisinin bir analitik $f(z)$ fonksiyonuna yakınsaklığı keyfi $|z| \le r$ alt dairesinde düzgün yakınsaklığa karşılık gelir. Dolayısıyla A uzayında $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(z)| = 0$ olacağından

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max|f_n(z)|\right) = 0$$

eşitliği geçerlidir. Böylece

$$\|f_n\|_A = \lim_{n\to\infty}\left(\max|f_n(z)|\right) = 0 \tag{2.4}$$

olup $(f_n(z))$ dizisi sıfır fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Tanım 2.1.3

Birim dairede analitik fonksiyonlar uzayında bir $(f_n(z))$ analitik fonksiyonlar dizisinin Taylor serisine açılımı

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k} z^k \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır (Başkan 2005).

Önerme 2.1.1

$(f_n(z))$ analitik fonksiyonlar dizisinin $f_{n,k}$ katsayıları için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

$a)$ Yakınsaklık testlerinden kök kriteri nedeniyle açıkça $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_{n,k}|} < 1$ eşitsizliği geçerlidir.

$b)$ $f_{n,k}$ katsayıları için $f_{n,k} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=\rho} \dfrac{f_n(z)}{z^{k+1}}dz$

eşitliği doğrudur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

Taylor teoreminin kanıtından ve Cauchy Türev formülünden herhangi bir $\rho < 1$ ve z_0 karmaşık sayısı için

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

yazılabileceğinden $z_0 = 0$ için (2.5) eşitliğinden

$$f_{n,k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f_n(z)}{z^{k+1}} dz$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.1.1

Birim dairede analitik fonksiyonlar uzayında (2.5) de tanımlanan $f_n(z)$ analitik fonksiyonlar dizisi için $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olmak üzere

$$|z| := \frac{1}{1+\delta_n} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_n : \; = \max_{|z| \le r < 1} |f_n(z)|$$

şeklinde tanımlansın. $f_n(z)$ dizisinin sıfıra yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $f_{n,k}$ katsayıları için

$$|f_{n,k}| \le \varepsilon_n (1 + \delta_n)^k \tag{2.6}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995). .

Kanıt:

Yeterlilik için $|z| := \dfrac{1}{1+\delta_n}$ ve $\varepsilon_n := \max_{|z| \le r < 1} |f_n(z)|$ olmak üzere

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olsun. $(f_n(z))$ dizisinin sıfıra yakınsadığı kabul edilsin. Bu durumda $|z| < 1$ olacağından δ_n dizisinin sıfıra yakınsama hızı çok küçüktür.

$|z| = \rho = \dfrac{1}{1+\delta_k}$ için $|i| = 1$ olduğundan

$$f_{n,k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{1+\delta_k}} \frac{f_n(z)}{z^{k+1}} dz$$

eşitliğinde her iki tarafın modülü alınırsa

$$\left|f_{n,k}\right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{1+\delta_n}} \frac{f_n(z)}{z^{k+1}} dz \right|$$

$$\leq \frac{1}{|2\pi i|} \int_{|z|=\frac{1}{1+\delta_n}} \frac{|f_n(z)|}{|z|^{k+1}} |dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\frac{1}{1+\delta_n}} \frac{|f_n(z)|}{|z|^{k+1}} |dz|$$

$$\leq \int_{|z|=\frac{1}{1+\delta_n}} \frac{\max\limits_{|z|\,\leq\, r<\,1} |f_n(z)|}{\left(\frac{1}{1+\delta_n}\right)^{k+1}} |dz|$$

$$= \int_{|z|=\frac{1}{1+\delta_n}} \varepsilon_n (1+\delta_n)^{k+1} |dz|$$

$$= \varepsilon_n (1+\delta_n)^{k+1} \int_{|z|=\frac{1}{1+\delta_n}} |dz|$$

$$= \varepsilon_n (1+\delta_n)^{k+1} |z|$$

$$= \varepsilon_n (1+\delta_n)^{k} (1+\delta_n) \frac{1}{(1+\delta_n)}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece istenen

$$\left|f_{n,k}\right| \leq \varepsilon_n (1+\delta_n)^k$$

şeklindeki sonuca ulaşılır.

Kanıtın gereklilik kısmı için $\left|f_{n,k}\right| \leq \varepsilon_n (1+\delta_n)^k$ eşitsizliği ve $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ ifadeleri doğru olsun. Bu durumda

$$\max_{|z|\le r<1}|f_n(z)| < \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty}(1+\delta_n)^k r^k = \frac{\varepsilon_n}{1-r(1+\delta_n)}$$

olur ve

$$0 \le \max_{|z|\le r<1}|f_n(z)| < \lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_n}{1-r(1+\delta_n)} = 0$$

eşitsizliğinden dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{|z|\le r<1}|f_n(z)|\right) = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu ise kanıtı tamamlar.

Uyarı 2.1.3

$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f_k|} < 1$ ve $|f_{n,k}| \le \varepsilon_n (1+\delta_k)^k$ eşitsizlikleri A uzayında sıfıra yakınsayan analitik fonksiyonlar dizisinin katsayılarının önemli özellikleridir. $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f_k|} < 1$ eşitsizliği bu katsayıların her bir sabit n için $k\to\infty$ olması durumundaki özelliklerini gösterir. $|f_{n,k}| \le \varepsilon_n (1+\delta_k)^k$ eşitsizliği ise bu katsayıların k sabit olması halinde özelliklerini araştırır.

Bu açıklamalar doğrultusunda sıfıra yakınsayan analitik fonksiyonlar dizisinin katsayılarının özellikleri aşağıdaki lemma ile verilecektir.

Lemma 2.1.1

Birim dairede analitik olan

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k} z^k$$

analitik fonksiyonlar dizisinin A uzayında $n\to\infty$ iken sıfıra yaklaşması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki a) ve b) özelliklerinin sağlanmasıdır.

a) $n = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere sabit her k sayısı için $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon'_{n,k} = 0$ olan ve $|f_{n,k}| \le \varepsilon'_{n,k}$ eşitsizliğini sağlayan bir $\varepsilon'_{n,k}$ pozitif sayılar dizisi vardır.

b) $k = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere sabit her n doğal sayısı için $|f_{n,k}| \le \varepsilon''_{n,k}$ eşitsizliğini sağlayan bir $\varepsilon''_{n,k}$ pozitif sayılar dizisi vardır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

$a)$ Gerçekten (2.6) formülünden $\varepsilon^{'}_{n,k}$ pozitif sayılar dizisi $\varepsilon^{'}_{n,k} = \varepsilon_n \left(1+\delta_n\right)^k$ olarak seçilirse

$$\left|f_{n,k}\right| \le \varepsilon^{''}_{n,k}$$

eşitsizliği elde edilir.

$b)$ $\left(f_n\left(z\right)\right)$birim dairede analitik fonksiyonlar dizisi olduğundan

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[k]{\left|f_{n,k}\right|} < 1$ eşitsizliği sağlanır. Böylece $\varepsilon^{''}_{n,k}$ dizisi $\varepsilon^{''}_{n,k} := \left|f_{n,k}\right|$

olarak seçilebilir.

Uyarı 2.1.4

Bundan sonraki bölümlerde Lemma 2.1.2 in $a)$ ve $b)$ şartlarını sağlayan $\varepsilon_{n,k}$ diziler kümesi $E_{n,k}$ ile gösterilecektir.

Sonuç 2.1.1

Lemma 2.1.2 den görülüyor ki A uzayındaki fonksiyonlar dizisinin özellikleri Taylor katsayıları ile bağımlıdır. Bu nedenle A uzayındaki fonksiyonları katsayılarının özelliklerine göre alt uzaylara ayırmak gerekir.

Tanım 2.1.4

$g:\left[0,\infty\right) \to \left[0,\infty\right)$ve $g\left(0\right)=1$ olmak üzere g monoton artan bir fonksiyon olsun.

$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{g\left(k\right)} < 1$ koşulu sağlayan her bir g fonksiyonu, $f \in A$ ve M_f, f fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabit olmak üzere f_k katsayıları için

$$\left|f_k\right| \le M_f g\left(k\right),\ k = 0,1,2,... \qquad (2.7)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayına A_g uzayı denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

2.1.5 Uyarı

$k \in \mathbb{N}$ ve C, pozitif bir sabit olmak üzere $g_1\left(k\right) \le C\, g_2\left(k\right)$ koşulunu sağlayan Tanım 2.1.4 deki gibi g_1 ve g_2 fonksiyonları için $A_{g_1} \subset A_{g_2}$ ifadesi geçerlidir.

Kanıt:

$f \in A_{g_1}$ olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ ve bir C sabiti için

$$\begin{aligned} |f_k| &\leq M_f g_1(k) \\ &\leq C\, M_f g_2(k) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. $CM_f = M'_f$ olarak alınırsa $f \in A_{g_2}$ olur. Böylece $A_{g_1} \subset A_{g_2}$ ifadesi gösterilmiş olur.

2.2 ANALİTİK FONKSİYONLAR UZAYINDA LİNEER k-POZİTİF OPERATÖRLER

Tanım 2.2.1

A uzayındaki her f fonksiyonunu

$$g(z) = Tf(z)$$

olacak şekilde yine A'da bir g fonksiyonuna dönüştüren T'ye A uzayından A uzayına bir operatör denir.

Önerme 2.2.1

$k = 0,1,2,...$ olmak üzere A daki z^k fonksiyonu A daki fonksiyonlara dönüştüren T operatörü için $T_{k,m}$ Taylor katsayıları olmak üzere,

$$Tz^k = \sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m} z^m \tag{2.8}$$

eşitliği yazılabilir ve her bir k için

$\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|T_{k,m}|} < 1$ eşitsizliği sağlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

$Tz^k = g(z)$ ve $g(z) \in A$ olduğundan (2.1) ve (2.2) eşitliklerinden kanıt açıktır.

Önerme 2.2.2

$T : A \to A$ bir operatör ve $f \in A$ keyfi olsun. Bu durumda $Tf(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \sum\limits_{m=0}^{\infty} T_{k,m} f_m$ eşitliği geçerlidir.

Kanıt:

A uzayındaki fonksiyonların Taylor serileri düzgün yakınsak olduğundan keyfi $f \in A$ fonksiyonu için (2.1) ve (2.8) den

$$Tf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k T(z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sum_{k=0}^{\infty} T_{m,k} z^m = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m} f_m$$

elde edilir. Yani lineer $T : A \to A$ operatörü (2.1) fonksiyonuna

$$Tf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m} z^m$$

şeklinde uygulanır.

Tanım 2.2.2

A analitik fonksiyonlar uzayında reel veya karmaşık Taylor katsayılı fonksiyonlar bulunur. Bu fonksiyonlar içinden Taylor katsayıları negatif olmayan fonksiyonlar kümesi

$$A^+ = \{ f \in A : k = 0,1,2,... \text{ için } f_k \geq 0 \}$$

şeklinde gösterilsin (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.2.3

Lineer $T : A \to A$ operatörü için $TA^+ \subset A^+$ oluyorsa A operatörüne $k-$pozitif ya da katsayılarına göre pozitif operatör denir.

Bu tanıma göre lineer $k-$pozitif operatörler, katsayıları negatif olmayan fonksiyonları aynı tür fonksiyonlara dönüştürür.

(Bu tanım ilk olarak Akif Hacıyev tarafından verilmiştir.)

Teorem 2.2.1

$$Tf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m} f_m$$

ile tanımlanan $T : A \to A$ operatörünün $k-$pozitif olması için gerekli ve yeterli koşul her $k, m \in \mathbb{N}$ için $T_{k,m} \geq 0$ olmasıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

Yeterlilik için her $k,m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $T_{k,m} \geq 0$ ise pozitif katsayılı her bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m T_{k,m} \geq 0$$

olur. Bu ise $Tf(z)$ görüntü fonksiyonunun Önerme 2.2.2 den dolayı Taylor katsayısı pozitif olan bir fonksiyona dönüşmesi demektir. Böylece $T : A \to A$ operatörü $k-$pozitif olur.

Gerekliliği kanıtlamak için $m = m_0$ alındığında $T_{k,m_0} < 0$ olarak kabul edilsin. Katsayıları

$$f^*{}_m = \begin{cases} 0, & m \neq m_0 \text{ için} \\ 1, & m = m_0 \text{ için} \end{cases}$$

şekilde bir f^* fonksiyonu tanımlanırsa, açıkça $f^* \in A^+$ olur. Fakat

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m^* T_{k,m} = T_{k,m_0} < 0$$

olduğundan T operatörü $f^*(z)$ fonksiyonunu

$$Tf^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m} f_m^* = \sum_{k=0}^{\infty} T_{k,m_0} z^k$$

fonksiyonuna dönüştürür. Bu ise T operatörünün A^+ dan olan fonksiyonu negatif katsayılı fonksiyona dönüştürmesi demektir. Bu durum T operatörünün $k-$pozitif olması kabulü ile çelişir. O halde $T_{k,m_0} < 0$ olacak şekilde hiçbir m_0 sayısı yoktur. Yani her k, m için $T_{k,m} \geq 0$ olmalıdır. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.4

$T_n : A \to A$ tanımlı operatör dizisi $k,m = 0,1,2,\ldots$ ve $n = 1,2,\ldots$ olmak üzere

$\left\{T_{k,m}^{(n)}\right\}$; T_n operatörlerinin matrisi olsun. Bu durumda

$$T_n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} f_m T_{k,m}^{(n)} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlı diziye $k-$pozitif operatörler dizisi denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 2.2.1

(2.9) eşitliğiyle tanımlanan T_n operatörler dizisinin $k-$pozitif olması için gerekli ve yeterli koşul her $k,\ m$ için $T_{k,m}^{(n)} \geq 0$ olmasıdır.

Kanıt:

İlk olarak yeterlilik kanıtlansın. Yani her $k,\ m$ için $T_{k,m}^{(n)} \geq 0$ olsun. Pozitif katsayılı her $f(z)$ için

$$T_n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} f_m T_{k,m}^{(n)} \quad \text{ve} \quad \sum_{m=0}^{\infty} f_m T_{k,m}^{(n)} \geq 0$$

olduğundan $T_n f(z) \geq 0$ dır. Böylece T_n operatörler dizisi $k-$pozitiftir.

Kanıtın gereklilik kısmı için T_n operatörler dizisi $k-$pozitif alınsın.En az bir m_0 için $T_{k,m_0}^{(n)} < 0$ olsun. Bu durumda katsayıları

$$f^*{}_m = \begin{cases} 0, & m \neq m_0 \text{ için} \\ 1, & m = m_0 \text{ için} \end{cases}$$

olan bir $f^* \in A^+$ fonksiyonu için

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m^* T_{k,m}^{(n)} = T_{k,m_0}^{(n)} < 0$$

olur. T_n operatör dizisi $f^*(z)$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$T_n f^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} f_m^* T_{k,m}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k T_{k,m}^{(n)} < 0$$

eşitsizliği geçerlidir. O halde T_n operatör dizisi A^+ dan olan bir fonksiyonu negatif katsayılı bir fonksiyona dönüştürmüş oldu. Bu ise T_n operatör dizisinin $k-$pozitif olması ile çelişir. O halde $T_{k,m_0}^{(n)} < 0$ olacak hiçbir m_0 sayısı yoktur. Yani her $k,\ m$ için $T_{k,m}^{(n)} \geq 0$ olmalıdır.

BÖLÜM 3

k-POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN KOROVKIN TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde lineer k-pozitif operatör dizileri için Korovkin teoreminin geçerli olup olmadığı araştırılacaktır. Korovkin teoreminin klasik koşulları ile geçerli olmayan yakınsaklık teoremleri özel koşullar ile kanıtlanacaktır.

3.1 YAKINSAKLIK KOŞULLARININ ARAŞTIRILMASI

Korovkin teoremine göre sonlu aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayındaki Lineer pozitif operatörler dizisi altında $1, x, x^2$ fonksiyonları kendilerine yakınsıyorsa bu uzaydaki sürekli her fonksiyon lineer pozitif operatörler dizisi altında yine kendisine yakınsar. Yakınsaklık koşullarını A uzayında araştırmak için z^k şeklindeki fonksiyonların lineer $k-$ pozitif operatör dizilerinin görüntüsü altında elde edilen dizinin yakınsamasını araştırmak gereklidir. Fakat $k = 0,1,2,...$ için z^k fonksiyonlarının lineer $k-$pozitif operatör dizileri altında görüntü dizileri A dan alınan herhangi bir fonksiyon için sağlamayabilir. Bu duruma ilk olarak aşağıdaki teoremde değinilecektir.

Teorem 3.1.1

Her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n : A \to A$ lineer $k-$pozitif operatör dizileri $\nu = 0,1,2,...$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_n z^\nu - z^\nu \right\| = 0 \tag{3.1}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda A dan alınan $\frac{1}{1-z}$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_n \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right\| \neq 0$$

olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

İlk olarak

$$T_n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left[z^k + \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k \right] \tag{3.2}$$

şeklinde T_n operatörleri tanımlansın. Bu operatörün teoremin koşullarını sağlayan operatör olduğunu göstermek için lineer ve $k-$pozitif olduğunun gösterilmesi gereklidir.

α, β keyfi karmaşık sayılar olmak üzere

$$T_n(\alpha f + \beta g) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha f_k + \beta g_k)\left[z^k + \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha f_k \left[z^k + \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \beta g_k \left[z^k + \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k \right]$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left[z^k + \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k \right] + \beta \sum_{k=0}^{\infty} g_k \left[z^k + \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k \right]$$

$$= \alpha T_n f(z) + \beta T_n g(z)$$

olduğundan T_n operatörler dizisi lineerdir.

T_n operatör dizisinin $k-$pozitif olduğunu göstermek için Binom açılımından yararlanarak

$$T_n f(z) = f(z) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=k}^{\infty} f_m \frac{1}{(1+n)^m} C_m^k n^{m-k}$$

eşitliği sağlanır. Gerçekten

$$T_n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left[z^k + \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k$$

olduğundan serinin kısmi toplamlar dizisi yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{N} (n+z)^k = (n+z)^0 + (n+z)^1 + (n+z)^2 + \ldots + (n+z)^N$$

$$=\binom{0}{0}n^0z^0+\binom{1}{0}n^1z^0+\binom{1}{1}n^0z^1+\binom{2}{0}n^2z^0+\binom{2}{1}n^1z^1+\binom{2}{2}n^0z^2+...$$

$$+\binom{N}{0}n^Nz^0+\binom{N}{1}n^{N-1}z^1+\binom{N}{2}n^{N-2}z^2+...+\binom{N}{N}n^0z^N$$

olup ve

$$\sum_{k=0}^{N}(n+z)^k=\sum_{k=0}^{N}z^k\sum_{m=k}^{N}C_m^k n^{m-k}$$

eşitliğinde $N\to\infty$ için limit alınarak

$$\sum_{k=0}^{\infty}(n+z)^k=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=k}^{\infty}C_m^k n^{m-k}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $\left(T_nf(z)\right)$ operatörler dizisi için

$$T_nf(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kz^k+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=k}^{\infty}f_m\frac{1}{(1+n)^m}C_m^k n^{m-k}$$

olduğundan

$$T_nf(z)=f(z)+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=k}^{\infty}f_m\frac{1}{(1+n)^m}C_m^k n^{m-k}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $\left(T_nf(z)\right)$ fonksiyonlarının katsayıları

$$T_{k,m}^{(n)}=\begin{cases}0 & m<k \text{ için}\\ \dfrac{n^{m-k-1}}{(n+1)^m}C_m^k & m\ge k \text{ için}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$T_nf(z)=f(z)+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{\infty}f_mT_{k,m}^{(n)}$$

olur böylece $T_{k,m}^{(n)}\ge 0$ dır. Dolayısıyla $\left(T_nf(z)\right)$ dizisi $k-$pozitif bir operatörler dizisidir.

Şimdi

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n z^{\nu} - z^{\nu}\right\| = 0$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

Tanım 2.1.1 de $f(z) = z^{\nu}$ alınırsa, z^{ν} fonksiyonun katsayıları

$$\delta_{k,\nu} = \begin{cases} 0; & k \neq \nu \text{ için} \\ 1; & k = \nu \text{ için} \end{cases}$$

olacağından $\nu = 0,1,2,...$ için

$$T_n z^{\nu} = z^{\nu} + \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^{\nu}$$

bulunur. $|z| \leq r < 1$ için $|n+z| < |n+1|$ olacağından

$$\max_{|z|\leq r<1}\left|T_n z^{\nu} - z^{\nu}\right| < \frac{1}{n}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n z^{\nu} - z^{\nu}\right\| = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Son olarak $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{1-z}\right\| \neq 0$$

olduğu gösterilmelidir. Geometrik seri formülünden $\dfrac{1}{1-z}$ fonksiyonunun katsayıları 1 olduğundan $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ fonksiyonuna T_n operatör dizisi uygulanırsa

$$T_n \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^{k}$$

eşitliği elde edilir. $|z| \le r < 1$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayıları için $\left|\dfrac{n+z}{n+1}\right| < 1$ olur ve bu nedenle $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{n+z}{n+1}\right)^k$ serisi yakınsak olduğundan

$$T_n \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{1-z}$$

olur. Norm tanımından

$$\left\|T_n\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{1-z}\right\| = \max_{|z| \le r < 1}\left|T_n\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{1-z}\right| = \max_{|z| \le r < 1}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(1-z)}\right|$$

eşitliği elde edilir. $\dfrac{(n+1)}{n}$ ifadesi z den bağımsız ve $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(n+1) = 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{1-z}\right\| = \lim_{n\to\infty}\max_{|z| \le r < 1}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1-z}\right| = \max_{|z| \le r < 1}\left|\frac{1}{1-z}\right| = 1 \ne 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise teoremin kanıtıdır.

Bu teoremden sonra (3.2) koşulunu gerçekleyen herhangi bir A_g uzayında yakınsaklığın olumlu sonuç vermesi beklenebilir. Fakat aşağıdaki teoremde görüldüğü gibi beklentiler olumlu sonuçlanmamıştır.

Teorem 3.1.2

g fonksiyonu Tanım 2.1.4 de verildiği gibi olmak üzere $T_n : A_g \to A_g$ lineer $k-$pozitif operatör dizileri verilsin. Ayrıca $\nu = 0,1,2,\ldots$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n z^{\nu} - z^{\nu}\right\| = 0$$

koşulları sağlansın. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n f^*(z) - f^*(z)\right\| = 1$$

olacak şekilde A_g uzayında tanımlı bir f^* fonksiyonu vardır. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

Her $n \in N$ için bir

$$T_n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left[z^k + \frac{1}{n} \left(\frac{n+z}{n+1} \right)^k \cdot \frac{1}{g(k)} \right]$$

operatörler dizisi tanımlansın. Bu operatörler dizisinin teoremin ifadesine uygun olabilmesi için ilk olarak $k-$pozitif ve lineer olduğunu göstermek gereklidir. Operatörün lineer olduğu açıktır.

$T_n f(z)$ nin $k-$pozitif olduğunu göstermek için operatör dizisi Teorem 3.1.1 in kanıtına benzer yöntemle

$$T_n f(z) = f(z) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=k}^{\infty} f_m \frac{1}{(1+n)^m} C_m^k n^{m-k} \frac{1}{g(k)}$$

şeklinde yazılırsa, fonksiyonun katsayıları

$$T_{k,m}^{(n)} = \begin{cases} 0 & m < k \text{ için} \\ \dfrac{n^{m-k-1}}{(n+1)^m g(k)} C_m^k & m \geq k \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde olur. $g(k)$, $[0,\infty)$ aralığında monoton artan bir fonksiyon ve $g(0)=1$ olduğundan g fonksiyonu pozitiftir. Dolayısıyla $T_{k,m}^{(n)} \geq 0$ olur.

Şimdi $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| T_n z^v - z^v \right\|_A = 0$ olduğu gösterilmelidir.

$$T_n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left[z^k + \frac{1}{n} \left(\frac{n+z}{n+1} \right)^k \cdot \frac{1}{g(k)} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\frac{n+z}{n+1} \right)^k \cdot \frac{1}{g(k)}$$

$$= f(z) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\frac{n+z}{n+1} \right)^k \cdot \frac{1}{g(k)}$$

olduğundan , $\nu = 0,1,2,...$ için

$f(z) = z^v$ olarak seçilirse, bu fonksiyonun f_k Taylor katsayıları 1 olduğundan

$$T_n z^\nu = z^\nu + \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^\nu \frac{1}{g(\nu)}$$

olur. Bu eşitlikte her iki taraftan z^ν çıkartılıp modül alınırsa

$$\left|T_n z^\nu - z^\nu\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^\nu \frac{1}{g(\nu)}\right|$$

olacağından her iki tarafın maksimumu alınıp $\left|\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^\nu\right| \leq 1$ olduğu düşünülürse

$$\max_{|z|\leq r<1}\left|T_n z^\nu - z^\nu\right| \leq \frac{1}{n}\frac{1}{g(\nu)} < \frac{1}{n}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\nu = 0,1,2,...$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n z^\nu - z^\nu\right\|_A = 0$$

bulunur.

Şimdi de A_g uzayından aşağıdaki şekilde tanımlı bir f^* fonksiyonu alınarak $\lim_{n\to\infty}\left\|T_n f^* - f^*\right\|_A = 0$

olmadığı gösterilecektir.

$$f^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^k$$

olsun. Bu fonksiyon için Taylor katsayıları $f_k = g(k)$ olduğundan

$$T_n f^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left[z^k + \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k \cdot \frac{1}{g(k)}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{1}{n}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k \cdot \frac{1}{g(k)}$$

$$= f^*(z) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^k$$

$$= f^*(z) + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1 - \frac{n+z}{n+1}}\right)$$

$$= f^*(z) + \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{1-z}\right)$$

eşitlikleri geçerlidir. Buradan

$$\max_{|z| \le r < 1} \left| T_n f^*(z) - f^*(z) \right| \le \max_{|z| \le r < 1} \left| \frac{n+1}{n} \right| \cdot \left| \frac{1}{1-z} \right|$$

olacağından

$$\lim_{n \to \infty} \left\| T_n f^*(z) - f^*(z) \right\| = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \max_{|z| \le r < 1} \left| \frac{1}{1-z} \right| = 1 \ne 0$$

gösterilmiş olur. Böylece teoremin kanıtı tamamlanmış olur.

3.2 A_g UZAYINDA YAKINSAKLIK TEOREMİ

Burada verilecek teorem A uzayında geçerli olmayan yakınsaklık durumunun A_g uzayında geçerli olduğunu yani yakınsaklık koşullarını sağlayan üç fonksiyon bulunabileceğini göstermektedir.

Teorem 3.2.1

$T_n : A \to A$ lineer $k-$ pozitif operatör dizisi verilsin. $\nu = 0,1,2$ için

$$g_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{\nu/z}(k) z^k$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $\nu = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_n g_\nu(z) - g_\nu(z) \right\|_A = 0$$

olması için gerekli ve yeterli koşul her $f \in A_g$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_n f(z) - f(z) \right\|_A = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

İlk olarak yeterlilik kısmı kanıtlansın. Her $f \in A_g$ fonksiyonu için $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| T_n f(z) - f(z) \right\|_A = 0$ olduğu kabul edilsin.

$\nu = 0$ için $\quad g_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$

$\nu = 1$ için $\quad g_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{g(k)} z^k$

$\nu = 2$ için $\quad g_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^k$

şeklindeki fonksiyonların katsayıları g fonksiyonunun tanımından dolayı

$1 \leq g(k)$, $\sqrt{\mathrm{g}(\mathrm{k})} \leq g(k)$ ve $g(k) \leq g(k)$

eşitsizliklerini $M_g = 1$ olarak sağlar. Bu ise $\nu = 0,1,2$ için $\mathrm{g}_\nu \in A_g$ olması demektir.

Dolayısıyla kabulden

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_n g_\nu(z) - g_\nu(z) \right\|_A = 0$$

eşitliği sağlanır.

Gerekliliğin kanıtından önce $\nu = 0,1,2$ için $\lim_{n\to\infty} \left\| T_n g_\nu(z) - g_\nu(z) \right\|_A = 0$ kabul edilsin.

g_ν fonksiyonunun Taylor katsayıları $g^{\nu/2}(m)$ olduğundan

$$T_n g_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} g^{\nu/2}(m)$$

şeklindedir. Buradan

$$T_n g_\nu(z) - g_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \left(T_{k,m}^{(n)} g^{\nu/2}(m) - g^{\nu/2}(m) \right)$$

eşitliği sağlandığından ve Lemma 2.1.1 den $\nu = 0,1,2$ için $\varepsilon_{n,k} \in E_{n,k}$ olmak üzere

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} g^{\nu/2}(m) - g^{\nu/2}(k) \right| < \varepsilon_{n,k}$$

eşitsizliği sağlanır. Her bir ν için bu eşitsizlikler ayrı ayrı yazılırsa

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} - 1 \right| < \varepsilon_{n,k}$$

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{g(m)} T_{k,m}^{(n)} - \sqrt{g(k)} \right| < \varepsilon_{n,k}$$

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} g(m) T_{k,m}^{(n)} - g(k) \right| < \varepsilon_{n,k}$$

şeklinde üç eşitsizlik elde edilir. Buradan

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} - 1 < \varepsilon_{n,k}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{g(m)} T_{k,m}^{(n)} - \sqrt{g(k)} < \varepsilon_{n,k}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} g(m) T_{k,m}^{(n)} - g(k) < \varepsilon_{n,k}$$

eşitsizlikleri bulunur. Birinci eşitsizliği $g(k)$ ikinci eşitsizliği $2\sqrt{g(k)}$ ile çarpıp birinci eşitsizlikten ikinci eşitsizliği çıkartarak üçüncü eşitsizlikle toplanırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} g(k) T_{k,m}^{(n)} - g(k) < \varepsilon_{n,k} g(k)$$

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{g(m) g(k)} T_{k,m}^{(n)} - 2g(k) < \varepsilon_{n,k} 2\sqrt{g(k)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} g(m) T_{k,m}^{(n)} - g(k) < \varepsilon_{n,k}$$

olur ve böylece

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)} \right)^2 T_{k,m}^{(n)} < \varepsilon_{n,k} \left(1 - \sqrt{g(k)} \right)^2$$

$$< \varepsilon_{n,k} \left(1 + \sqrt{g(k)} \right)^2$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\gamma_{n,k} =: \varepsilon_{n,k} \left(1 + \sqrt{g(k)} \right)^2$$

seçilirse açıkça $\gamma_{n,k} \in E_{n,k}$ olup son eşitsizlik

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)} \right)^2 T_{k,m}^{(n)} < \gamma_{n,k}$$

şeklinde yazılabilir.

$f \in A_g$ keyfi fonksiyon olsun. A_g uzayının tanımına göre f fonksiyonunun Taylor katsayıları olan f_k katsayıları her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|f_k| \le M_f g(k)$$

eşitsizliğini sağlar. $m \in \mathbb{N}$ ve g fonksiyonunun tanımından $g(m) \geq 1$, $\mathrm{g}(\mathrm{k}) \geq 1$ olduğundan

$$|f_m| \leq M_f g(m) \leq M_f g(m) g(k)$$

ve

$$|f_k| \leq M_f g(k) \leq M_f g(m) g(k)$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Böylece üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |f_m - f_k| &\leq |f_m| + |f_k| \\ &\leq 2M_f g(m) g(k) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} |f_m - f_k| &\leq 2M_f g(m) g(k) \\ &= 2M_f g(k)\left(\sqrt{g(m)}\right)^2 \\ &= 2M_f g(k)\left(\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)} + \sqrt{g(k)}\right)^2 \\ &= 2M_f g(k)\left[\left(\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)}\right)^2 + 2\sqrt{g(k)}\left(\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)}\right) + g(k)\right] \\ &\leq 2M_f g(k)\left[\left(\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)}\right)^2 + 2\sqrt{g(k)}\left|\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)}\right| + g(k)\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği

$$\Delta_g(k) = \min\left\{\sqrt{g(k+1)} - \sqrt{g(k)}; \sqrt{g(k)} - \sqrt{g(k-1)}\right\}$$

olarak tanımlanırsa $g(m)$ dizisinin monoton artanlığını kullanarak herhangi k , $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)}\right| \geq \Delta_g(k)$$

olacağı açıktır. Buna göre;

$$|f_m - f_k| \leq 2M_f g(k)\left(\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)}\right)^2 \left[1 + \frac{2\sqrt{g(k)}\left|\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)}\right| + \sqrt{g(k)}}{\left(\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)}\right)^2}\right]$$

$$=2M_f g^2(k)\left(\sqrt{g(m)}-\sqrt{g(k)}\right)^2\left[\frac{1}{g(k)}+\frac{2\sqrt{g(k)}\left|\sqrt{g(m)}-\sqrt{g(k)}\right|+g(k)}{g(k)\left(\sqrt{g(m)}-\sqrt{g(k)}\right)^2}\right]$$

$$=2M_f g^2(k)\left(\sqrt{g(m)}-\sqrt{g(k)}\right)^2\left[\frac{1}{g(k)}+\frac{2}{\sqrt{g(k)}\left|\sqrt{g(m)}-\sqrt{g(k)}\right|}+\frac{1}{\left(\sqrt{g(m)}-\sqrt{g(k)}\right)^2}\right]$$

$$<2M_f g^2(k)\left(\sqrt{g(m)}-\sqrt{g(k)}\right)^2\left[1+\frac{2}{\Delta_g(k)}+\frac{1}{\Delta_g^2(k)}\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\gamma'_{n,k}=M_f g^2(k)\left(1+\frac{2}{\Delta_g(k)}+\frac{1}{\Delta_g^2(k)}\right) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$|f_m-f_k|<\gamma'_{n,k}\left(\sqrt{g(m)}-\sqrt{g(k)}\right)^2$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $\gamma'_{n,k}$ dizisi, $\gamma_{n,k}$ dizisine benzer bir dizidir. 2.1.1 Lemma b) den $\gamma'_{n,k}\in E_{n,k}$ olur.

$f\in A_g$ olmak üzere

$$\varphi_n(z)=:T_nf(z)-f(z)$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyon açıkça birim dairede analitiktir.

$$\varphi_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{\infty}f_mT_{k,m}^{(n)}-\sum_{k=0}^{\infty}f_kz^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}f_mT_{k,m}^{(n)}-f_k\right)z^k$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $\varphi_{n,k}$ katsayıları

$$\varphi_{n,k}=\sum_{m=0}^{\infty}f_mT_{k,m}^{(n)}-f_k=\sum_{m=0}^{\infty}(f_m-f_k)T_{k,m}^{(n)}+f_k\left(\sum_{m=0}^{\infty}T_{k,m}^{(n)}-1\right)$$

şeklindedir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\left|\varphi_{n,k}\right| \le \sum_{m=0}^{\infty}\left|f_m - f_k\right| T_{k,m}^{(n)} + \left|f_k\right| \left|\sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} - 1\right|$$

olacağından ve

$$\left|f_m - f_k\right| < \gamma_{n,k}^{'} \left(\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)}\right)^2,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sqrt{g(m)} - \sqrt{g(k)}\right)^2 T_{k,m}^{(n)} < \gamma_{n,k}$$

eşitsizliklerinden

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left|f_m - f_k\right| T_{k,m}^{(n)} < \gamma_{n,k}^{'}\gamma_{n,k}$$

olur ve ayrıca

$$\left|f_k\right| \le M_f g(k) \text{ ve } \left|\sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} - 1\right| < \varepsilon_{n,k}$$

eşitsizliklerinden

$$\left|\varphi_{n,k}\right| < \gamma_{n,k}^{'}\gamma_{n,k} + M_f g(k)\varepsilon_{n,k}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\alpha_{n,k} =: \gamma_{n,k}^{'}\gamma_{n,k} + M_f g(k)\varepsilon_{n,k}$$

olarak tanımlanırsa $\alpha_{n,k} \in E_{n,k}$ olup Lemma 2.1.1 in tüm koşullarını sağlar. Dolayısıyla yine Lemma 2.1.1 den

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\varphi(z)\right\|_A = \lim_{n\to\infty}\left\|T_n f(z) - f(z)\right\|_A = 0$$

olur ve bu ise teoremin kanıtıdır.

Tezin III. bölümün I.kesiminde k-pozitif operatör dizileri için Korovkin teoremlerin klasik koşullarla sağlanmadığı Teorem 3.1.1 de ve Teorem 3.1.2 de gösterilmiştir. Analitik fonksiyon uzaylarının A_g ile gösterilen bir alt uzayında Korovkin tipli teoremin sağlandığı Teorem 3.2.1 de kanıtlanmıştır. (Teorem 3.2.4 te ise A_a dan olan f fonksiyonu için yakınsaklık koşulları gösterilecektir.)

$g(k)=1+k^2$ olsun. A_g uzayında yakınsaklık koşulu aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 3.2.2

$\tilde{g}_v(z)=\sum_{k=0}^{\infty}k^v z^k$ olduğu kabul edilsin. $v=0,1,2$

$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\tilde{g}_v(z)-\tilde{g}_v(z)\right\|_{A_g}=0$ olması için gerek ve yeterli koşul $\forall f\in A_g$ için $\lim_{n\to\infty}\left\|T_n f-f\right\|_{A_g}=0$ olmasıdır.

Kanıt

$$\begin{aligned}
T_n f(z)-f(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{\infty}f_m T_{k,m}^{(n)}-\sum_{k=0}^{\infty}f_k z^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{\infty}f_m T_{k,m}^{(n)}-\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{\infty}f_k T_{k,m}^{(n)}+\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{\infty}f_k T_{k,m}^{(n)}-\sum_{k=0}^{\infty}f_k z^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{\infty}\left[f_m-f_k\right]T_{k,m}^{(n)}+\sum_{k=0}^{\infty}f_k z^k\sum_{m=0}^{\infty}\left[T_{k,m}^{(n)}-1\right]
\end{aligned}$$

olur. $f\in A_g$ olduğundan

$f_k\le M_f\left(1+k^2\right)$ olur. $m,k\in\mathbb{N}, m-k<k$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left|f_m-f_k\right|&\le\left|f_m\right|+\left|f_k\right|\\
&\le M_f\left(1+m^2+1+k^2\right)\\
&=M_f\left(2+\left(m-k^2+k^2\right)+k^2\right)\\
&=M_f\left(2+\left(m-k\right)^2+2\left(m-k\right)\cdot k+k^2+k^2\right)\\
&<M_f\left(2+\left(m-k\right)^2+2k^2+2k^2\right)\\
&<M_f\left(4+4\left(m-k\right)^2+4k^2\right)\\
&<4M_f\left(1+\left(m-k\right)^2+k^2\right)
\end{aligned}$$

$m\neq k$ olmak üzere, $\left(m-k\right)^2\ge 1$ olduğundan

$$\left|f_m - f_k\right| \le 4M_f\left(\left(m-k\right)^2 + \left(m-k\right)^2 + k^2\left(m-k\right)^2\right)$$

$$= 4M_f\left(m-k\right)^2\left(2+k^2\right)$$

$$< 4M_f\left(m-k\right)^2\left(2+2k^2\right)$$

$$= 8M_f\left(m-k\right)^2\left(1+k^2\right)$$

bulunur. Ayrıca

$$T_n\tilde{g}_v\left(z\right) - \tilde{g}_v\left(z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} m^v - \sum_{k=0}^{\infty} k^v z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$\left[\sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} m^v - k^v\right]$ analitik olduğundan Lemma 2.1.1 den $\varepsilon_{n,k} \in E_{n,k}$ olmak üzere $v = 0,1,2$ için

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} m^v - k^v\right| < \varepsilon_{n,k}$$

olur. Yani,

$$\left.\begin{array}{ll} v=0 \text{ için} & \left|\sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} - 1\right| < \varepsilon_{n,k} \\ v=1 \text{ için} & \left|\sum_{m=0}^{\infty} mT_{k,m}^{(n)} - k\right| < \varepsilon_{n,k} \\ v=2 \text{ için} & \left|\sum_{m=0}^{\infty} m^2T_{k,m}^{(n)} - k^2\right| < \varepsilon_{n,k} \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

olur. Dolayısıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} - 1 < \varepsilon_{n,k}$$

$$k - \sum_{m=0}^{\infty} mT_{k,m}^{(n)} < \varepsilon_{n,k}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2T_{k,m}^{(n)} - k^2 < \varepsilon_{n,k}$$

olup, birinci denklem k^2 ile, ikinci denklem $2k$ ile, üçüncü denklem 1 ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$k^2\sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} - k^2 + 2k^2 - 2k\sum_{m=0}^{\infty} mT_{k,m}^{(n)} + \sum_{m=0}^{\infty} m^2T_{k,m}^{(n)} - k^2 < \left(1+k\right)^2 \varepsilon_{n,k}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(m-k\right)^2 T_{k,m}^{(n)} < \left(1+k\right)^2 \varepsilon_{n,k} < 3\left(1+k\right)^2 \varepsilon_{n,k}$$

bulunur. Böylece

$$\sum_{k=0}^{\infty}|z|^k\sum_{m=0}^{\infty}|f_m-f_k|T_{k,m}^{(n)}<\sum_{k=0}^{\infty}|z|^k\sum_{m=0}^{\infty}8M_f\left(m-k\right)^2\left(1+k^2\right)T_{k,m}^{(n)}$$

$$=8M_f\sum_{k=0}^{\infty}|z|^k\left(1+k^2\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left(m-k\right)^2T_{k,m}^{(n)}$$

$$<24M_f\sum_{k=0}^{\infty}|z|^k\left(1+k^2\right)^2\varepsilon_{n,k}$$

$$\sqrt[k]{\left(1+k^2\right)^2}<1 \text{ ise } \sum_{k=0}^{\infty}|z|^k\left(1+k^2\right)$$

yakınsak seridir. Ayrıca (3.4) denklemlerinden

$$\left\|T_nf\left(z\right)-f\left(z\right)\right\|\to 0$$

olur.

Sonuç 3.2.1

$g\left(k\right)=1+k^2$ olmak üzere $v=0,1,2$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\tilde{g}_v\left(z\right)-\tilde{g}_v\left(z\right)\right\|_{A_g}=0 \text{ ise}$$

$$T_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^k\right)\rightrightarrows\sum_{k=0}^{\infty}z^k \tag{3.5}$$

$$T_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}kz^k\right)\rightrightarrows\sum_{k=0}^{\infty}kz^k \tag{3.6}$$

$$T_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}k^2z^k\right)\rightrightarrows\sum_{k=0}^{\infty}k^2z^k \tag{3.7}$$

olur.

Kanıt

$v=0,1,2$ için

$$\left\|T_n\tilde{g}_0\left(z\right)-\tilde{g}_0\left(z\right)\right\|_{A_g}=0 \quad \left(n\to\infty\right)$$

eşitliğini açık yazılacak olursa,

$v=0$ için, $\left\|T_n\tilde{g}_0\left(z\right)-\tilde{g}_0\left(z\right)\right\|_{A_g}=0 \quad \left(n\to\infty\right)$

Yani

$$\left\| T_n \sum_{k=0}^{\infty} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} z^k \right\|_{A_g} \longrightarrow 0$$

olur. $v = 1$ için,

$$\left\| T_n \tilde{g}_1(z) - \tilde{g}_1(z) \right\|_{A_g} = 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\left\| T_n \sum_{k=0}^{\infty} kz^k - \sum_{k=0}^{\infty} z^k \right\|_{A_g} \longrightarrow 0$$

ve $v = 2$ için

$$\left\| T_n \tilde{g}_2(z) - \tilde{g}_2(z) \right\|_{A_g} = 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\left\| T_n \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k - \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k \right\|_{A_g} \to 0$$

bulunur. Ayrıca karmaşık analizden bilindiği üzere

$|z| < 1$ için,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

eşitliği vardır. Bu seri yakınsak olduğundan

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} \tag{3.8}$$

serisi elde edilir ve buradan

$$z\left(\frac{1}{1-z} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k$$

eşitliğine ulaşılır. İkinci kez türev alınarak,

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k^2 z^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-k) z^{k-2} \tag{3.9}$$

eşitliği elde edilir. $k = 1$ için $1^2 z - z = 0$ olduğundan

$$z^2 \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k^2 z^k + \sum_{k=2}^{\infty} (-k) z^k$$

$$z^2 \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)'' = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k - \sum_{k=1}^{\infty} k z^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k = z^2 \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)'' + \sum_{k=1}^{\infty} k z^k$$

sonucu bulunur. Bu eşitliğe lineer T_n operatörü uygulanarak,

$$\left(T_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k\right)\right) = T_n\left(z^2 \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)'' + \sum_{k=1}^{\infty} k z^k\right)$$

$$= T_n\left(z^2 \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)''\right) + T_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} k z^k\right)$$

ise $T_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k\right) \to z^2 \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)'' + \sum_{k=1}^{\infty} k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k$

sonucu bulunur. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.3

$T_n : A \to A$ lineer $k-$pozitif operatörler olsun. $n \to \infty$ için,

$$T_n\left(\frac{1}{1-z}\right) \to \frac{1}{1-z}$$

$$T_n\left(z \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)'\right) \to z \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)'$$

$$T_n\left(z^2 \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)''\right) \to z^2 \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)''$$

koşulları sağlanıyorsa katsayıları $k = 1, 2, ...$ için $|f_k| \le M_f\left(1 + k^2\right)$ koşulunu sağlayan A uzayındaki fonksiyonlar için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_n f(z) - f(z) \right\|_A = 0$$

olur.

Genel Koşullar:

$k=0,1,2,\ldots\ a_k \geq 0$, $a_k \in \mathbb{R}$ ve $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt{a_k}=1$ olsun.

$$A_a=\left\{f\in A:\left|f_k\right|\leq M_f a_k\right\} \tag{3.10}$$

alt uzayı tanımlansın. A_g ile A_a arasındaki fark $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinde monotonluk koşulunun olmamasıdır.

$\forall f\in A_g$ için $\left|f_k\right|\leq M_f g\left(k\right)$ $k=0,1,2,\ldots$ olacak şekilde f ye bağlı bir M_f sabiti ve $g:\left[0,\infty\right]\to\mathbb{R}$ monoton artan, $g\left(0\right)=1$ ve $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt{g_k}<1$ şeklinde en az bir g fonksiyonu vardır.

$a_k\geq 0$ ve $a_k\in\mathbb{R}$ ve $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt{a_k}=1$ olduğundan aynı f fonksiyonu için

$\left|f_k\right|\leq M_f a\left(k\right)$

olur.

Böylece

$f\in A_a$ olur. Yani $A_g\subset A_a$ olur.

Ayrıca b_k, negatif olmayan ve monoton artan sayılar dizisi olsun.

$$b_v\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k^v}{1+b_k^2}a_k z^k \ \ ,\ v=0,1,2 \tag{3.11}$$

fonksiyonları göz önüne alınsın. $b_v\left(z\right)$ fonksiyonunun Taylor katsayısı, $v=0,1,2$ için

$$\left|\frac{b_k^v}{1+b_k^2}a_k\right|=\frac{b_k^v}{1+b_k^2}a_k\leq a_k$$

$b_v\left(z\right)\in A_a$ olduğu açıktır.

Eğer $a_k=1+b_k^2$ şeklinde olursa

$b_v\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k^v z^v$ olur ve $b_k=g\left(k\right)$ olarak düşünülürse $b_v\left(z\right)=g_v\left(z\right)$ olur.

Teorem 3.2.4

$T_n : A \to A$ lineer $k-$pozitif operatör dizisi olsun. Eğer $v = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_n b_v\left(z\right) - b_v\left(z\right) \right\|_A = 0 \tag{3.12}$$

oluyorsa her $f \in A_a$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_n f\left(z\right) - f\left(z\right) \right\|_A = 0$$

olur.

Kanıt

$f \in A_a$ olsun. f analitik fonksiyon olduğundan

$$\varphi_n\left(z\right) = T_n f\left(z\right) - f\left(z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \left[f_m T_{k,m}^{(n)} f_k \right]$$

fonksiyonu da analitik fonksiyondur.

$$\sum_{m=0}^{\infty} k_m T_{k,m}^{(n)} - f_k = \varphi_{n,k}$$

olarak tanımlanırsa, Lemma 2.1.1 gereği $\varphi_{n,k}$ katsayıları araştırılmalıdır.

Açıkça,

$$\left|\varphi_{n,k}\right| \le \sum_{m=0}^{\infty} \left\| f_m - f_k \right\| T_{k,m}^{(n)} + \left| f_k \right| \left| \sum_{m=0}^{\infty} T_{k,m}^{(n)} - 1 \right|$$

eşitsizliği sağlanır.

$$S_{n,k}{}' = \sum_{m=0}^{\infty} \left| f_m - f_k \right| T_{k,m}^{(n)} \tag{3.13}$$

ve

$$S_{n,k}{}'' = \left| f_k \right| \sum_{m=0}^{\infty} \left| T_{k,m}^{(n)} - 1 \right| \tag{3.14}$$

oldukları kabul edilirse,

$$\left|\varphi_{n,k}\right| \le S_{n,k}{}' + S_{n,k}{}''$$

olur. Burada $S_{n,k}{}'$ ve $S_{n,k}{}''$ dizilerinin $E_{n,k}$ uzayında olduğunu göstermek yeterlidir.

$f \in A_a$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|f_m - f_k| &\le |f_m| + |f_k| \\
&\le 2M_f a_m a_k \\
&= 2M_f a_k \frac{1+b_m^2}{1+b_m^2} a_m \\
&= 2M_f a_k \frac{1+(b_m - b_k + b_k)^2}{1+b_m^2} a_m \\
&\le 2M_f a_k \frac{2+2(b_m-b_k)^2 + 2b_k^2}{1+b_m^2} a_m \\
&= 4M_f a_k \frac{1+(b_m-b_k)^2 + b_k^2}{1+b_m^2} a_m
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

$m > k$ ise $m, k \in \mathbb{N}$ olduğundan $m \ge k+1$ olur. Bu yüzden

$$b_m - b_k \ge b_{k+1} - b_k$$

olur.

Eğer $m < k$ ise $m \le k-1$ ve $b_m \le b_{k-1}$ olduğundan $-b_m \ge -b_{k+1}$

olur. Böylece

$$b_k - b_m \ge b_k - b_{k-1}$$

eşitsizliği elde edilir. Yani $m \ne k$ için

$$|b_m - b_k| \ge \min\{b_{k+1} - b_k, b_{k-1} - b_k\} = \beta_k$$

olur. Dolayısıyla

$$(b_m - b_k)^2 \ge \beta_k^2$$

bulunur. Böylece $m \ne k$ için $\dfrac{(b_m - b_k)^2}{\beta_k^2} \ge 1$ olduğundan

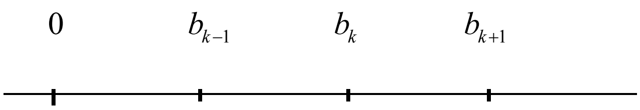
$$|f_m - f_k| \le 4M_f a_k \frac{1+\beta_k^2 + b_k^2}{1+b_k^2} a_m$$

$$\leq 4M_f a_k \frac{1+\beta_k^2+b_k^2}{1+b_k^2} \cdot \frac{\left(b_m-b_k\right)^2}{\beta_k^2} a_m$$

olur.

$$= 4M_f g_k \left(\frac{1}{\beta_k^2} + 1 + \frac{b_k^2}{\beta_k^2} \right) \frac{\left(b_m-b_k\right)^2}{1+b_k^2} a_m$$

eşitsizliği bulunur.



$k = 0,1,2,...$ için b_k sayıları pozitif olduğundan

$\beta_k < b_k$ dır. $\dfrac{b_k}{\beta_k} > 1$ olduğundan

$$\frac{1}{\beta_k^2} + 1 + \frac{b_k^2}{\beta_k^2} < \frac{1+b_k^2}{\beta_k^2} + \frac{2b_k}{\beta_k^2} = \frac{\left(1+b_k\right)^2}{\beta_k^2}$$

olur.

Eğer $4M_f a_k \dfrac{\left(1+b_k\right)^2}{\beta_k^2} = P_k$ denilirse

her k,m için

$$\left|f_m - f_k\right| < P_k \frac{\left(b_m-b_k\right)^2}{1+b_k^{\;2}} a_m \tag{3.15}$$

olur.

(3.11) de verilen $b_v\left(z\right)$ fonksiyonu için

(3.12) de verilen koşullar uygulanırsa $v=0$ ve $n \to \infty$ için

$$\left\| T_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{1+b_k^2} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{1+b_k^2} z^k \right\| \to 0$$

$v=1$ ve $n \to \infty$ için

$$\left\| T_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{1+b_k^2} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{1+b_k^2} a_k z^k \right\| \to 0$$

$v=2$ ve $n \to \infty$ için

$$\left\| T_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k^2}{1+b_k^2} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k^2}{1+b_k^2} a_k z^k \right\| \to 0$$

olur. Böylece $n \to \infty$ için

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} - \frac{1}{1+b_k^2} a_k \right\} \right\| \to 0$$

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} - \frac{b_k}{1+b_k^2} a_k \right\} \right\| \to 0$$

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m^2}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} - \frac{b_k^2}{1+b_k^2} a_k \right\} \right\| \to 0$$

olur. Buradan Lemma 2.1.1 kullanılırsa

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} - \frac{1}{1+b_k^2} a_k \right| < \varepsilon_{n,k}$$

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} - \frac{b_k}{1+b_k^2} a_k \right| < \varepsilon_{n,k}$$

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m^2}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} - \frac{b_k^2}{1+b_k^2} a_k \right| < \varepsilon_{n,k}$$

eşitsizlikleri bulunur.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} - \frac{1}{1+b_k^2} a_k < \varepsilon_{n,k} \\ &-\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} + \frac{b_k}{1+b_k^2} a_k < \varepsilon_{n,k} \\ &+\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m^2}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} - \frac{b_k^2}{1+b_k^2} a_k < \varepsilon_{n,k} \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

(3.16) da birinci eşitsizlik $\frac{b_k}{1+b_k^2}$, ikinci eşitsizlik $\frac{2b_k}{1+b_k^2}$, üçüncü eşitsizlik $\frac{1}{1+b_k^2}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} \frac{b_k^2}{1+b_k^2} - \frac{b_m}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} \frac{2b_k}{1+b_k^2} + \frac{1}{1+b_k^2} \frac{b_m^2}{1+b_m^2} a_m T_{k,m}^{(n)} \right\}$$

$$-\frac{1}{1+b_k^2}a_k\frac{b_k^2}{1+b_k^2}+\frac{b_k}{1+b_k^2}a_k\frac{2b_k}{1+b_k^2}-\frac{b_k^2}{1+b_k^2}a_k\frac{1}{1+b_k^2}$$

$$<\varepsilon_{n,k}\left[\frac{b_k^2}{1+b_k^2}+\frac{2b}{1+b_k^2}+\frac{1}{1+b_k^2}\right]$$

eşitsizliği doğru olduğundan

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{1+b_m^2}\frac{T_{k,m}^{(n)}}{1+b_m^2}\left(b_k^2-2b_mb_k+b_m^2\right)+\frac{a_k}{1+b_k^2}\left(-b_k^2+2b_k^2+b_k^2\right)<\varepsilon_{n,k}\frac{\left(1+b_k\right)^2}{1+b_k^2}$$

olup

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(b_m-b_k\right)^2}{1+b_m^2}a_mT_{k,m}^{(n)}<\varepsilon_{n,k}\frac{\left(1+b_k\right)^2}{1+b_k^2}$$

eşitsizliği bulunur.

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\left(1+b_k\right)^2}{1+b_k^2}=1$ olduğundan $\frac{\left(1+b_k\right)^2}{1+b_k^2}$ sınırlıdır. Dolayısıyla

$$\varepsilon_{n,k}\frac{\left(1+b_k\right)^2}{1+b_k^2}=\varepsilon_{n,k}{}' \tag{3.17}$$

olur. Burada $\varepsilon_{n,k}{}'$ de bir sıfır dizisidir.

(3.13) de bu sonuçlar yerine yazılırsa

$$S_{n,k}{}'=\sum_{m=0}^{\infty}\left|f_m-f_k\right|T_{k,m}^{(n)}$$

$$\leq\sum_{m=0}^{\infty}P_k\frac{\left(b_m-b_k\right)^2}{1+b_m^2}a_mT_{k,m}^{(n)}$$

$$\leq P_k\varepsilon_{n,k}{}'$$

$$P_k=4M_fa_k\frac{\left(1+b_k\right)^2}{\beta_k^2}$$

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\left(1+b_k\right)^2}{\beta_k^2}=1$ ve $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt{a_k}=1$ olduğundan P_k sınırlıdır. Dolayısıyla

$\varepsilon_{n,k}{}''$ sıfır dizisi olmak üzere $P_k\varepsilon_{n,k}{}'=\varepsilon_{n,k}{}''$ olur.Şimdi de $S_{n,k}{}''$ ifadesini elde etmek için, (3.16) da birinci eşitsizlikte

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{1+b_m^2}T_{k,m}^{(n)}-\frac{1}{1+b_k^2}a_k\right|<\varepsilon_{n,k}$$

ifadesine $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_k}{1+b_k^2}T_{k,m}^{(n)}$ analitik fonksiyonu eklenip çıkartılırsa;

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a_m}{1+b_m^2}-\frac{a_k}{1+b_k^2}\right)T_{k,m}^{(n)}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_k}{1+b_k^2}T_{k,m}^{(n)}-\frac{a_k}{1+b_k^2}<\varepsilon_{n,k}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a_m}{1+b_m^2}-\frac{a_k}{1+b_k^2}\right)T_{k,m}^{(n)}+\frac{a_k}{1+b_k^2}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}T_{k,m}^{(n)}-1\right\}<\varepsilon_{n,k}$$

olup buradan

$$\frac{a_k}{1+b_k^2}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}T_{k,m}^{(n)}-1\right\}<\varepsilon_{n,k}-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a_m}{1+b_m^2}-\frac{a_k}{1+b_k^2}\right)T_{k,m}^{(n)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}T_{k,m}^{(n)}-1<\frac{1+b_k^2}{a_k}\left\{\varepsilon_{n,k}-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a_m}{1+b_m^2}-\frac{a_k}{1+b_k^2}\right)T_{k,m}^{(n)}\right\}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Mutlak değere geçilirse

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}T_{k,m}^{(n)}-1\right|<\frac{1+b_k^2}{a_k}\left\{\varepsilon_{n,k}+\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{a_m}{1+b_m^2}-\frac{a_k}{1+b_k^2}\right|T_{k,m}^{(n)}\right\}$$

eşitsizliği bulunur.

Açık olarak katsayıları $\frac{a_k}{1+b_k^2}$ şeklinde olan fonksiyon A_a uzayına aittir. Çünkü $\left|\frac{a_k}{1+b_k^2}\right|\le Ma_k$ eşitsizliği sağlanır. Bu teoremin ispatındaki (3.15) eşitsizliği A_a ya ait olan fonksiyonlar için geçerlidir. Dolayısıyla,

$$\left|\frac{a_m}{1+b_m^2}-\frac{a_k}{1+b_k^2}\right|<P_k\frac{\left(b_m-b_k\right)^2}{1+b_m^2}a_m$$

eşitsizliği vardır. Bu sonucu (3.18) da kullanırsak,

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}T_{k,m}^{(n)}-1\right|<\frac{1+b_k^2}{a_k}\left\{\varepsilon_{n,k}+\sum_{m=0}^{\infty}P_k\frac{\left(b_m-b_k\right)^2}{1+b_m^2}a_mT_{k,m}^{(n)}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir (3.17) den ise

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}T_{k,m}^{(n)}-1\right|<\frac{1+b_k^2}{a_k}\left\{\varepsilon_{n,k}+P_k\varepsilon_{n,k}{}'\right\}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca $f\in A_a$ olduğundan

$$\begin{aligned}S_{n,k}{}''&=\left|f_k\right|\sum_{m=0}^{\infty}\left|T_{k,m}^{(n)}-1\right|\\&<M_f a_k\frac{1+b_k^2}{a_k}\left\{\varepsilon_{n,k}+P_k\varepsilon_{n,k}{}'\right\}\\&=M_f\left(1+b_k\right)^2\left\{\varepsilon_{n,k}+P_k\varepsilon_{n,k}{}'\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu ise $S_{n,k}{}''\in E_{n,k}$ olması demektir. Sonuç olarak

$$T_n\left(f,z\right)-f\left(z\right)=\sum_{m=0}^{\infty}z^k\,\left(S_{n,k}{}'+S_{n,k}{}''\right)$$

ve

$$\left(S_{n,k}{}'+S_{n,k}{}''\right)\in E_{n,k}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\left(f,z\right)-f\left(z\right)\right\|_A=0$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.4 genel durumda olup, Teorem 3.2.5, bunun özel bir halidir. Özel olarak yakınsama koşulları araştırılırsa aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.2.5

$T_n : A \to A$ lineer $k-$pozitif operatörler dizisi ve $n \to \infty$ iken $v = 0,1,2$ için

$$\left(T_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k^v}{1+b_k^2} z^k \right) \to \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{b_k^v}{1+b_k^2}$$

şeklinde üç koşul gerçekleniyorsa Taylor katsayıları sınırlı olan her $f \in A$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_n f - f \right\|_A = 0$$

olur.

Kanıt

Teorem 3.2.4 te $a_k = 1$ sabit dizisi alınırsa Teorem 3.2.5 ve Teorem 3.2.4 birbirine denk olurlar.

KAYNAKLAR

Hacıyev A (1974) *The Convergence Problem For A Sequence Of Positive Linear Operators On Unbounded Sets and Theorems Analogous To That Of P.P. Korovkin. English Translated Sov.* Math. Dokl. Vol 15:5, p.1-100

Taylor A (1967) *Introduction To Functional Analysis*, John Wiley, New York, p.65-73

Hacıyev A ve Hacısalihoğlu H (1995) *Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı,* 1.Basım A.Ü.F.F Döner Sermaye İşletmesi Yayınları:31, Ankara, s.1–72

Duncan C (1968) *The Elements Of Complex Analysis*, John Wiley-Sons, p.70-150

Kantorovich A E (1959) *Functional Analysis ,Pergamon Press*, New York, p.82-90

Coşkun E (2002) *Analiz I*, Alp Yayınları, Ankara, s.1-100

Hille E (1959) *Analytic Function Theory Ginn And Company*, Boston ,Vol. 1, p.1-82

Marsden J E (1973) *Basic Complex Analysis*, W.H.F And Company, p.20-78

Treves F (1967) *Topological Vector Spaces Distributions And Kernels*, Academic Press, London, p.85-90

Göğüş M (1991) *Kompleks Analiz*, A.Ü Açıköğretim Fakültesi, p.1-150

Al Tomare F and Campiti M (1994) *Korovkin Type Approximation Theory And Its Applications.De Gruyter,* p.1-100

Korovkin P P (1960) *Linear Operators And Approximation Theory*, Hindustan Publishing Corp. Delhi, p.1-200

Ash B R (1971**)** *Complex Variables*, Acedemic Press, Inc, p.1-50

Spiegel M R (1964) *Theory And Problems Of Complex Variables*, Schaum Publishing, p.35-80

Coşkun T (1997) Sürekli Fonksiyonlara Sınırsız Bölgelerde Lineer Pozitif Operatörlerle Yaklaşım, *Doktora Tezi*, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Ankara, s.1–55

Başkan T (2005) *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, 5.Basım Nobel Yayınları, Ankara, s.26-200

Ahlfors L V (1996) *Complex Analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, p.1-50

ÖZGEÇMİŞ

Selin Bilge KURT 1986'da İstanbul/Bakırköy'de doğdu; İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2003 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü' nde başladığı lisans eğitimini 2007 yılında tamamladı. Aynı yıl ZKÜ Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda başladığı yüksek lisans eğitimine devam etmekte olup, özel bir şirkette İş Analisti olarak çalışmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Yıldıztepe Mah 34 Sok No:15 Bilge Apt
34200 Bağcılar/İstanbul

Tel: (212) 4358551

E-posta: selinbilgekurt@gmail.com

Selin Bilge KURT