T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ERGODİK TİPİ TEOREMLERDE TOPLANABİLME METODLARI

SEZER ERDEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Haziran 2010

T.C.
İNÖNÜ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL
AND APPLIED SCIENCES

SUMMABILITY METHOD IN SOME ERGODIC TYPE THEOREMS

SEZER ERDEM

MSC THESIS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MALATYA
June 2010

Tezin Başlığı : Bazı Ergodik Tipi Teoremlerde Toplanabilme Metodları

Tezi Hazırlayan : Sezer ERDEM

Sınav Tarihi : 28/06/2010

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Hüsamettin COŞKUN

Başkan

Doç.Dr.Yılmaz YILMAZ

Üye

Doç.Dr.Celal ÇAKAN

Üye (Danışman)

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..... / ..... / ....

Prof.Dr.Asım KÜNKÜL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum " Bazı Ergodik Tipi Teoremlerde Toplanabilme Metodları " başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Sezer ERDEM

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI ERGODİK TİPİ TEOREMLERDE
TOPLANABİLME METODLARI

Sezer ERDEM

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

40 + v sayfa

2010

Danışman : Doç. Dr. Celal ÇAKAN

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde; diğer bölümlerde geçen temel tanım, kavram ve teoremler ile Banach limitleri ve hemen hemen yakınsaklık kavramları verildi.

İkinci bölümde $\sigma-$cebiri, ölçü, ölçü fonksiyonu, ölçülebilir fonksiyon, Borel ölçüsü ve integrallenebilir fonksiyon kavramlarının yanında sonsuz matris dönüşümleri ile kuvvetli regüler matrislerle ilgili tanım ve teoremler yer aldı.

Üçüncü ve son bölümde, ergodik teoride bilinen teoremler ile bunların kuvvetli regüler matrisler kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş halleri bir araya getirildi.

ANAHTAR KELİMELER : Banach limiti, hemen hemen yakınsaklık, sigma-cebiri, ölçü, ölçü fonksiyonu, ölçülebilir fonksiyon, Borel ölçüsü, integrallenebilir fonksiyon, sonsuz matris dönüşümü, kuvvetli regüler matris, ergodik dönüşüm.

ABSTRACT

MSc Thesis

SUMMABILITY METHOD IN SOME
ERGODIC TYPE THEOREMS

Sezer ERDEM

İnönü University
Graduate School Of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

40 + v pages

2010

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Celal ÇAKAN

This thesis has three chapters. In the first chapter the basic definitions, concepts and theorems which have been used in the next chapters and the concepts related to the Banach limits and almost convergence have been given.

In the second chapter the concepts that $\sigma-$algebra, measure, measure function, measurable function, Borel measure and integrable function have been given. Also; the concepts and theorems related to the infinite matrix transformations and strong regular matrices have been stated.

The third and final chapter has been devoted to the known theorems in the ergodic theory and their generalizations by using the strong regular matrices.

KEYWORDS : Banach limits, almost convergence, sigma-algebra, measure, measure function, measurable function, Borel measure, integrable function, infinite matrix transformation, strong regular matrix, ergodic transformation.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında değerli görüş ve katkılarıyla beni yönlendiren, hiçbir zaman yakın ilgi ve alakalarını esirgemeyen tez danışmanım değerli hocam Sayın Doç.Dr. Celal ÇAKAN' a ve her zaman maddi manevi desteklerini hissettiğim aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

$\mathbb{R}$	:	Reel sayıların cümlesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayıların cümlesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayıların cümlesi
ω	:	Reel terimli bütün dizilerin uzayı
ℓ_∞	:	Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
c	:	Reel terimli yakınsak dizilerin uzayı
c_0	:	Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
cs	:	Yakınsak seri oluşturan reel terimli dizilerin uzayı
ℓ_1	:	Mutlak yakınsak seri oluşturan reel terimli dizilerin uzayı
L_p	:	p. kuvvetten integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
f	:	Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$B = (b_{nk})$	:	Reel terimli sonsuz bir matris
(E, F)	:	E' den F' ye tanımlı matrislerin cümlesi
$\lim_n$	:	$\lim_{n\to\infty}$
$\sum_k$	:	$\sum_{k=0}^{\infty}$
$R(T)$	:	T dönüşümünün görüntü cümlesi
$N(T)$	:	T dönüşümünün sıfır uzayı
I	:	Vektör uzayı üzerindeki birim dönüşüm
$w - \lim_n$	:	Zayıf limit
A'	:	A kümesinin limit noktalarının kümesi
$\overline{A}$	:	A kümesinin kapanışı
$\mathring{B}$	:	B kümesinin içi

GİRİŞ

Topoloji çalışmalarının Koenigsberg' in yedi köprüsü ile ilgili teoremle başladığı kabul edilmektedir. Ergodik teori çalışmaları ise istatistiksel mekanikle ilgili birtakım düşüncelerden doğmuştur. Köprü probleminin matematiksel gelişimi grafikteki tek ve çift düğümlerle ilgili bir teoremdir. Gaz probleminin matematiksel gelişimi ise, ölçü koruyan dönüşümlerin asimptotik davranışı ile ilgili teoremdir. Her iki durumda da orjinal düşüncenin doğrudan gelişimi, çok geniş teorinin sadece küçük bir parçasıdır. Her ne kadar bir teorinin tarihsel geçmişini anlamak için bazı temel bilgiler gerekli olsa da, istatistiksel mekaniğin konuyla ilgili kısmının kabaca bir tarifini yapalım.

$n-$dereceli serbest bir mekanik sistem düşünülsün. Daha özele indirgenecek olursa $n = 3k$ olduğu ve sistemin 3 boyutlu uzaydaki bir tüp içerisinde bulunan k parçacıktan oluştuğu varsayılsın. Bu parçacıkların (mesela gaz moleküllerinin) kütlelerinin ve bunların uyguladıkları kuvvetin tümüyle bilindiği kabul edilsin. Sistemin bir anlık durumu, konumun n koordinatına karşılık gelen n hızıyla birlikte verilmesiyle açıklanabilir. Kullanılması mümkün olan koordinatlar yalnızca bu $2n$ koordinatlar değildir, bazı durumlarda konum ve momentumun kullanılması, konum ve hızın kullanılmasından çok daha uygundur.

Bu açıdan bakıldığında sistemin bu durumu, $2n-$boyutlu Öklid uzayında bir nokta halini alır ki buna faz uzay denir. Zaman geçtikçe fizik kurallarına (diferansiyel denklemler) paralel olarak sistemin durumu da değişir: Sistemin geçmişi, bugünü ve geleceğinden oluşan tüm tarihi, faz uzayındaki belirli bir yörüngeyle temsil edilebilir. Prensip olarak eğrinin bir noktası (anlık durumu) verildiğinde bütün eğri (tüm yörünge) belirlenebilir. Uygulamada tam bir tanımlama yapabilmek için yeterli bilgimiz neredeyse olmaz. İlk kez Gibbs tarafından ortaya atılan istatistiksel mekaniğin temel düşüncesi, bir duruma ait (faz uzayındaki bir nokta) belirleyici çalışmayı bırakıp, durumlar topluluğunun (faz uzayındaki bir alt küme) istatistiki çalışmasına yönelmektir. “ t anında sistemin durumu ne olacak? ” sorusunu sormak yerine “ t anında sistemin durumunun faz uzayındaki belirli bir alt kümeye ait olma olasılığı nedir? ” sorusu sorulmalıdır. En çok ilgi gören sorular asimptotik olanlardır: “ t sonsuza giderken sistem muhtemelen ne hal alır? ”

Eğer x_t, belirli bir sistemin t anındaki durumunu temsil eden faz uzayındaki bir nokta ve T_t, sabit her t için x_0' ı x_t' ye götüren bir dönüşüm ise, bu durumda $x_t = T_t x_0$ dır. Aşikar olarak $T_{s+t} = T_s T_t$ olduğu için $\{T_t\}$' nin dönüşümlerin bir parametreli grubu olduğu görülür. (Böyle gruplar genelde debi olarak adlandırılırlar.) İstatistiksel mekaniğin temel sonuçlarından biri Liouville teoremidir. Bu teorem, faz uzayı tanımında kullanılan koordinatların uygun olarak seçilmesi durumunda, faz uzayındaki debinin bütün hacimleri (yani $2n-$boyutlu hacimleri) sabit bırakacağını söyler. Başka bir değişle, debiyi oluşturan dönüşümler ölçü koruyan dönüşümlerdir. İstatistiksel mekaniğin temel problemi, ölçü koruyan dönüşümlerin belirli ailelerinin asimptotik özelliklerini çalışmaktır.

Somut, üç boyutlu, fiziksel bir kurulumdan başlanırsa ilerleyen tartışma daha soyut, çok boyutlu bir matematiksel idealleştirme doğurur ki bu da önemli bir özelliğe dönüşür (Debinin ölçü koruma özelliği). Bu özellik, ilk yerde soyutlamaya yol gösterenler kadar somut diğer modellere sahiptirler. Örneğin; bir sopa ile dikkatlice karıştırılan, içine bir kaç damla vermut damlatılmış buz-içki karışımından oluşan kokteylden elde edilen akım düşünülebilir. İlginçliği açık olan böyle örnekler, başlangıçtaki çeşitli düşüncelerin aydınlanmasına yardımcı olacaktır.

Ergodik teori, tasarlanmış olunan fiziksel düşüncelerin matematiksel gelişimidir. Konu, ilginç ve aşikar olmayan teoremler içermektedir ve olasılık, topolojik gruplar ve Hilbert uzayı gibi matematiğin diğer çeşitli branşları ile ilişkilidir. Bir ya da iki limit teoreminin ünü, bu teoremlerin modern ergodik teoride çok büyük öneme sahip öğeler oldukları hakkında popüler bir görüş oluşturdu. Öğrenilecek çok sayıda topolojik ve cebirsel durumlar söz konusudur; daha muğlak analitik durumlar, sadece genel topolojik-cebirsel yapı içinde tartışıldıkları zaman uygun şartları elde eder.

Ölçü uzayının ana fikri, X kümesi ile birlikte X' in alt kümelerinin belli bir $\sigma-$cebiri ve bu cebir üzerinde tanımlı bir ölçüdür. Bir $\sigma-$cebiri, sayılabilir birleşimler ve tümleyenler altında kapalı olan kümelerin bir sınıfı ve ölçü, non-negatif (belki

sonsuz) ve sayılabilir toplamsal küme fonksiyonudur. Ölçünün tanımındaki kümeler X' in ölçülebilir alt kümeleri olarak adlandırılır. Alınacak bütün ölçü uzaylarının $\sigma-$sonlu olduğu kabul edilebilir. Yani X, sonlu ölçülü sayılabilir birçok kümenin birleşimidir. Bu kabulün amacı , Fubini Teoremi ve Radon-Nikodym Teoremi ile ilgili bazı zorluklardan kaçınmaktır. Çünkü $\sigma-$ sonluluğun varlığı bu teoremleri pürüzsüzce uygulanabilir kılmaktadır. Kullanılan tipik ölçü uzayı örnekleri şunlardır:
1) Lebesque ölçüsü ve Borel ölçülebilirlik ile sonlu boyutlu bir Öklidyen uzay.
2) Borel ölçülebilirlik ve Lebesque ölçüsü ile birim aralık.
3) 0 ve 1' lerden oluşan bütün $x = (x_n), n \in \mathbb{N}$ dizilerinin cümlesi. Burada ölçülebilir cümleler $\{x : x_n = 1\}$ şeklindeki cümleler tarafından üretilen $\sigma-$cebirinin elemanları, ölçü de; ayrık k aralıklarının üzerinde daima $\frac{1}{2^k}$ dır.
4) Borel ölçülebilirlik ve Haar ölçüsü ile sayılabilir baza sahip lokal kompakt bir topolojik grup.

Ölçülebilir dönüşüm; her ölçülebilir kümenin ters görüntüsü ölçülebilir olacak şekilde, ölçü uzayından ölçü uzayına bir eşlemedir. Eğer ST ve TS' nin her ikisi de birim dönüşüme eşit olacak şekilde Y' den X' e bir S dönüşümü varsa, X' ten Y' ye T ölçülebilir dönüşümünün tersi vardır denir. S dönüşümü T tarafından tek olarak belirlenir. Bu durumda S dönüşümüne T dönüşümünün tersi denir ve T^{-1} ile gösterilir. Kullanılan ölçülebilir dönüşümlerin pek çoğu ölçü-koruyan dönüşümlerdir. Yani ölçülebilir kümenin ters görüntüsü orjinal küme ile aynı ölçüye sahip olacak şekildeki dönüşümlerdir. Eğer iki dönüşüm sadece sıfır ölçülü küme üzerinde farklı ise, bu iki dönüşüm denktir denir. Ergodik teoride çalışılan dönüşümlerin çoğu, ölçü uzayından kendisine giden, tersi olan ve ölçü-koruyan dönüşümlerdir.

Ölçülebilir olan fakat ölçü-koruyan olmayan dönüşüme tipik bir örnek reel eksen üzerinde $Tx = 2x$ ile verilen dönüşümdür. Her E Borel kümesi için $m(T^{-1}E) = m(E)/2$ olduğunu doğrulamak kolaydır (m Lebesque ölçüsü). Bununla yakından ilgili bir dönüşüm yarı-açık $[0, 1)$ birim aralığı üzerinde $0 \leq x < \frac{1}{2}$ olduğunda $Tx = 2x$ ve $\frac{1}{2} \leq x < 1$ olduğunda $Tx = 2x - 1$ şeklinde tanımlanan T dönüşümür. Eğer $E = [\frac{2}{8}, \frac{5}{8})$ alınırsa, bu taktirde $T^{-1}E$, $[\frac{2}{16}, \frac{5}{16})$ ve $[\frac{1}{2}(\frac{2}{8} + 1), \frac{1}{2}(\frac{5}{8} + 1))$ aralıklarının birleşimidir ve dolayısıyla $m(T^{-1}E) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{8} = m(E)$ olur. Benzer düşüncelerle uç noktaları birbirinin iki katı olan her E yarı-açık aralığı için $m(T^{-1}E) = m(E)$

olduğu gösterilebilir ve buradan T' nin ölçü-koruyan olduğu kolayca görülür. T, birebir olmadığından ve sıfır ölçülü küme üzerinde herhangi bir düzeltme ile de birebir yapılamadığından, T nin tersi olmayan bir ölçü-koruyan dönüşüm örneği olduğu anlaşılır. Aynı dönüşümün izometrik temsili şöyle bulunur: Mutlak değeri 1 olan bütün kompleks sayılardan oluşan ölçü uzayı; Borel ölçülebilirlik ve ölçüsü ile öyle standarttır ki bir yayın ölçüsü onun uzunluğunun $\frac{1}{2\pi}$' si olmak üzere T de $Tz = z^2$ olarak tanımlanır. Reel eksendeki tersi olan ve ölçü-koruyan dönüşüme basit bir örnek $Tx = x + 1$ ile tanımlanır. Genellersek, sonlu boyutlu Öklidyen Uzayda c keyfi bir vektör olmak üzere $Tx = x + c$ ile tanımlanan T dönüşümü de tersi olan ve ölçü-koruyan dönüşüme örnek olarak verilebilir. Diğer bir örnek demeti de 2-boyutlu Öklidyen Uzay üzerinde $T(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$ şeklinde tanımlı dönüşüm tarafından belirlenir. Birim karenin ters görüntüsü, genişliği $\frac{1}{2}$ ve yüksekliği 2 birim olan bir dikdörtgendir. Benzer şekilde, her dikdörtgenin ters görüntüsü aynı alanın dikdörtgeni olduğundan T' nin ölçü-koruyan dönüşüm olduğu anlaşılır ve açık olarak T' nin tersi vardır. Sonuç olarak T nin ölçü-koruyan bir dönüşüm olması için $m(E) = m(T^{-1}E)$ eşitliği sağlanmalıdır.

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

1.1 Lineer Uzay ve Lineer Fonksiyoneller

Bu bölümde; daha sonraki bölümlere hazırlık olması için gerekli görülen temel tanım ve kavramlara yer verildi.

Tanım 1.1.1. [19] $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı her fonksiyona **dizi** denir ve (x_n) şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.2. [18, s.69] L boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. Eğer $x, y \in L$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ için

$$+ : L \times L \to L$$

$$(x, y) \to x + y$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times L \to L$$

$$(\lambda, y) \to \lambda y$$

ile tanımlanan fonksiyonlar her $x, y, z \in L$ ve $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ için,

$(L1)$ $x + y = y + x$,

$(L2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,

$(L3)$ Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in L$ vardır,

$(L4)$ Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in L$ vardır,

$(L5)$ $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$,

$(L6)$ $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

$(L7)$ $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$,

$(L8)$ $1x = x$,

eşitliklerini sağlar ise L cümlesine, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir **lineer uzay** denir.

Lineer uzay tanımında geçen bu $\mathbb{K}$ cismine lineer uzayın skaler cismi, $\mathbb{K}$ 'nın elemanlarına ise skaler denir. Lineer uzaya vektör uzayı da denir. Bu durumda L' nin elemanları vektör olarak adlandırılır. θ bazen 0 ile de gösterilir. $+$ ve $\cdot$ işlemlerine kısaca lineer uzay işlemleri denir. Burada $(L5)$ şartındaki $+$ sembolünün iki anlamda kullanıldığına dikkat edilmelidir. Birinci taraftaki $+$ işareti $\mathbb{K}$' daki toplamayı; ikinci taraftaki ise L' deki toplamayı belirtmektedir. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ olması halinde L' ye reel lineer uzay, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olması halinde ise L' ye kompleks lineer uzay denir. Burada θ ve $(-x) \in L$ elemanlarına sırasıyla L' nin birim elemanı ve $x \in L$ nin toplamaya göre tersi denir. $(L8)$' deki " 1 " ise $\mathbb{K}$ cisminin çarpma işlemine göre birim elemanıdır.

Reel terimli bütün dizilerin uzayı ω, yani;

$$\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

cümlesi dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemi olarak bilinen, $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \omega$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$+ : (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), \quad \cdot : \lambda.(x_n) = (\lambda x_n)$$

işlemleriyle bir lineer uzay teşkil eder.

Tanım 1.1.3. [18, s.73] L, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve M, L' nin bir alt cümlesi olsun. Eğer her x, $y \in M$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için $\alpha x + y \in M$ ise, M' ye L' nin bir **lineer altuzayı** veya sadece **altuzayı** denir.

Tanım 1.1.4. [5, s.243] Reel terimli bütün dizilerin ω uzayının boş olmayan her altuzayına **dizi uzayı** denir.

Önemli bazı dizi uzayları; ℓ_∞, c, c_0, cs, ℓ_1 ile gösterilen; sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak, yakınsak seri oluşturan ve mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayıdır.

Bu uzaylar aşağıdaki şekilde karakterize edilebilir ve bu uzaylar arasında $\ell_1 \subset cs \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ şeklinde bir kapsama bağıntısı mevcuttur.

$$
\begin{aligned}
\ell_\infty &= \Big\{x = (x_k) \in \omega : \sup_k |x_k| < \infty\Big\} \\
c &= \Big\{x = (x_k) \in \omega : \lim_k x_k \text{ mevcut}\Big\} \\
c_0 &= \Big\{x = (x_k) \in \omega : \lim_k x_k = 0\Big\} \\
cs &= \Big\{x = (x_k) \in \omega : \sum_k x_k \text{ yakınsak}\Big\} \\
\ell_1 &= \Big\{x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k| \text{ yakınsak}\Big\}
\end{aligned}
$$

Tanım 1.1.5. [18, s.109] L ve M aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. Her x, $y \in L$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için,

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

eşitliği sağlanır ise, $T : L \to M$ fonksiyonuna bir **lineer dönüşüm** adı verilir.

Tanım 1.1.6. [18, s.109] L bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde lineer uzay olmak üzere $f : L \to \mathbb{K}$ lineer dönüşümüne bir **lineer fonksiyonel** denir.

Burada görüldüğü üzere lineer fonksiyonel, reel veya kompleks değerli lineer bir dönüşümdür.

$$L^* = \{f : L \to \mathbb{R} : f \text{ lineer ve sürekli}\}$$

cümlesine L' nin **sürekli duali** denir.

Örnek 1.1.1. Yakınsak dizilerin uzayı üzerinde $\ell(x) = \lim_n x_n$ ile tanımlanan $\ell : c \to \mathbb{R}$ bir lineer fonksiyoneldir.

Tanım 1.1.7. [20, s.55] $f : L \to \mathbb{K}$ fonksiyoneli verildiğinde, her x, $y \in L$ için

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

ise f' ye **alttoplamsaldır** denir. Eğer her $x \in L$ ve negatif olmayan α reel sayısı için,

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

ise f' ye **homojendir** denir.

Hem alttoplamsal hem de homojen olan bir f fonksiyoneline, **altlineer fonksiyonel** denir.

Örnek 1.1.2. Sınırlı dizilerin uzayı üzerinde $f(x) = \limsup_n x_n$ ile tanımlanan $f : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ bir altlineer fonksiyoneldir.

Tanım 1.1.8. [18, s.103] L, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}^+$$

fonksiyonu her x, $y \in L$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için,

$$\begin{array}{ll} (N1) & \|x\| \geq 0, \\ (N2) & \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta, \\ (N3) & \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \\ (N4) & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \end{array}$$

şartlarını sağlarsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna L üzerinde bir norm ve $(L, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu lineer uzay** veya kısaca **normlu uzay** denir.

Tanım 1.1.9. [19, s.75] $(L, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı, bir $x_0 \in L$ noktası ve pozitif bir r sayısı verilsin. Bu taktirde;

$$D_r(x_0) = D(x_0, r) = \{x \in L \ : \ \|x - x_0\| < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı **açık yuvar**,

$$\overline{D_r}(x_0) = \overline{D}(x_0, r) = \{x \in L \ : \ \|x - x_0\| \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı **kapalı yuvar** ve

$$S_r(x_0) = S(x_0, r) = \{x \in L \ : \ \|x - x_0\| = r\}$$

kümesine de x_0 merkezli r yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir.

$$\overline{D_r}(x_0) = D_r(x_0) \cup S_r(x_0)$$

olduğu açıktır. $D_r(x_0)$ açık yuvarına $x_0 \in L$ noktasının bir **komşuluğu** (r-komşuluğu), $\overset{\circ}{D}(x_0) = D_r(x_0) - \{x_0\}$ kümesine de x_0 noktasının bir **delinmiş komşuluğu** (delinmiş r-komşuluğu) denir.

Tanım 1.1.10. [19, s.89] $(L, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı, $A \subset L$ alt kümesi ve $x \in L$ noktası verilmiş olsun. Herbir $r > 0$ için $\mathring{D}_r(x) \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A nın bir **limit noktası** denir. $A \subset L$ alt kümesinin bütün limit noktalarından oluşan A' kümesi ile A nın noktalarından oluşan kümeye A nın **kapanışı** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. $A = \overline{A}$ ise A kümesine L' de **kapalı küme** adı verilir.

Tanım 1.1.11. [19, s.89] $(L, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay, $B \subset L$ ve $x \in B$ olsun. $D_r(x) \subset B$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa x' e B' nin **iç noktası** denir. B' nin iç noktalarının kümesine B' nin **içi** denir ve $\mathring{B}$ ile gösterilir. $B = \mathring{B}$ ise B kümesine L' de **açık küme** denir.

Tanım 1.1.12. [19, 98] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olmak üzere L, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\langle .,. \rangle \ : \ L \times L \to \mathbb{K}$$

fonksiyonu,

(i_1) Her $x \in L$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$,

(i_2) Her $x,\ y \in L$ için $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

(i_3) Her $x,\ y \in L$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

(i_4) Her $x,\ y,\ z \in L$ için $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

şartlarını sağlıyor ise $\langle .,. \rangle$ fonksiyonuna L üzerinde bir **iç çarpım**, $(L, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de **iç çarpım uzayı** (veya ön Hilbert uzayı) denir.

Tanım 1.1.13. [5, s.66] L boş olmayan bir cümle ve L' nin altcümlelerinin boş olmayan bir sınıfı τ olsun. τ sınıfı,

$(T1)$ $L \in \tau,\ \emptyset \in \tau$,

$(T2)$ $\forall i \in I$ için $A_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$,

$(T3)$ $i = 1, 2, ..., n$ için $A_i \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,

özelliklerini sağlıyorsa τ' ya L üzerinde bir **topoloji** ve (L, τ) ikilisine de **topolojik uzay** denir.

Tanım 1.1.14. [7, s.174] (L, τ), (H, τ') iki topolojik uzay, $f : L \to H$ bir fonksiyon ve $x_0 \in L$ olsun. $f(x_0)$' ın her N komşuluğu için $f^{-1}(N)$ de x_0' ın bir komşuluğu ise, f fonksiyonuna x_0 noktasında **süreklidir** denir.

Tanım 1.1.15. [18, s.93] (L,$\mathbb{K}$), üzerinde topolojik yapı bulunan bir lineer uzay olsun. Eğer lineer uzayın toplama ve skalerle çarpma işlemleri bu topolojiye göre sürekli ise, L uzayına **topolojik lineer uzay** denir.

Tanım 1.1.16. [18, s.79] L lineer uzayının boş olmayan bir altcümlesi E olsun. Eğer $\lambda \geq 0$ ve $\mu \geq 0$ olmak üzere $x,\ y \in E$ ve $\lambda + \mu = 1$ için $\lambda x + \mu y \in E$ ise, E ye **konveks cümle** denir.

Tanım 1.1.17. [21] Bir L topolojik lineer uzayında, 0' ın her komşuluğu 0' ın konveks bir komşuluğunu kapsıyorsa, L' ye **lokal konveks uzay** denir.

Tanım 1.1.18. [16, s.67] L normlu uzay ve (x_n), L' de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (x_n) dizisine L' de **yakınsak dizi** denir ve $x_n \to x \ \ (n \to \infty)$ veya $\lim_n x_n = x$ yazılır.

Tanım 1.1.19. [16, s.67] (x_n), $(L, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Tanım 1.1.20. [18, s.95] Eğer L normlu uzayındaki her Cauchy dizisi L' deki bir noktaya yakınsak ise, L' ye **tam uzay** denir.

Tanım 1.1.21. [18, s.95] $(L, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı tam ise bu uzaya **Banach Uzayı** denir.

Örnek 1.1.3. c *ve* ℓ_∞ dizi uzayları, $\|x\| = \sup_n |x_n|$ normu ile birer Banach uzayıdırlar.

Tanım 1.1.22. [3, s.150] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, L normlu bir uzay olmak üzere, $f : L \to \mathbb{K}$ lineer fonksiyoneli ve her $x \in L$ için,

$$|f(x)| \leq c\|x\| \tag{1.1.1}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa, f' ye bir **sınırlı lineer fonksiyonel** denir. Bu durumda f' nin $\|f\|$ ile gösterilen normu,

$$\|f\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

ile verilir. Eğer (1.1.1) de $c = \|f\|$ alınırsa,

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$$

olur. Ayrıca bir $f : L \to \mathbb{K}$ fonksiyonelinin normu,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

ile de verilebilir.

Tanım 1.1.23. [19, s.178] L, bir $\mathbb{K}$ sayı cismi ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) üzerinde bir normlu uzay olsun. L üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(L, \mathbb{K})$ Banach uzayına, L nin **normlu duali** denir ve L' ile gösterilir.

Tanım 1.1.24. [19, s.188] L' Banach uzayının normlu duali $L'' = (L')'$ uzayına, L uzayının **ikinci duali** denir.

$L'' = B(L', \mathbb{K})$ ikinci dual uzay da bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.1.25. [19, s.190] L normlu bir uzay ve $L = L''$ ise, L uzayına **yansımalı** (veya refleksif) bir uzay adı verilir.

Tanım 1.1.26. [5, s.23] L Banach uzayı, H normlu uzay ve $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq B(L, H)$ olsun. Eğer verilen $\varepsilon > 0$ ve $\forall \alpha \in I$ için $\|x\| < \delta$ olduğunda $\|T_\alpha x\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı var ise, $\{T_\alpha\}$ operatörler ailesi **eşsüreklidir** denir.

Tanım 1.1.27. [9, s.67] $(L, \|\cdot\|)$ uzayında bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer her $f \in L'$ için

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_o)$$

olacak biçimde bir x_0 elemanı varsa, (x_n) dizisi x_0' a **zayıf yakınsaktır** denir ve $w - \lim x_n = x_0$ şeklinde gösterilir. Burada x_0 noktasına da (x_n) dizisinin **zayıf limiti** denir.

Tanım 1.1.28. [19, s.236] $(L, \|\cdot\|)$, bir normlu uzay ve $A \subset L$ bir cümle olsun. A cümlesindeki her (x_n) dizisinin L' deki bir noktaya zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa, A cümlesine **zayıf dizisel kompakttır** denir.

Tanım 1.1.29. [19, s.213] L Banach uzayı ve $M \subset L$ kümesi verilsin. Eğer $(x_n) \in M$ ve $w - \lim x_n = x$ olduğunda $x \in M$ ise, M kümesi L' de **zayıf kapalıdır** denir.

Teorem 1.1.1. [18, s.133] L bir lineer uzay, M, L' nin bir özalt uzayı ve $p : L \to \mathbb{R}$ bir altlineer fonksiyonel olsun. Eğer f, M üzerinde her $x \in M$ için $f(x) \leq p(x)$ olacak şekilde bir lineer fonksiyonel ise, bu taktirde her $x \in L$ için $g(x) \leq p(x)$ ve her $x \in M$ için $f(x) = g(x)$ olacak şekilde f' nin L' ye bir g genişletmesi vardır.

1.2 Banach Limitleri ve Hemen Hemen Yakınsaklık

Hahn-Banach teoreminin reel değerli bütün sınırlı dizilerin lineer uzayına uygulanması, Banach limit kavramının doğmasına neden olmuştur. Lorentz tarafından Banach limitlerinden yola çıkarak hemen hemen yakınsak dizi kavramı tanımlandı. Kaydırma operatörü altında değişmez kalan ve c üzerindeki $\ell(x) = \lim_n x_n$ lineer fonksiyonelinin ℓ_∞ uzayına genişletmesi olan ve negatif olmayan bazı lineer fonksiyoneller ilk defa Banach tarafından tanıtıldı. Bu tip fonksiyoneller daha sonradan Banach limiti olarak adlandırıldı.

Tanım 1.2.1. Banach Limiti [5] Bir $\phi : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli,

(i) Her $n = 0, 1, 2, ...$ için $x_n \geq 0$ ise $\phi(x_n) \geq 0$,

(ii) $\phi(e) = 1$; $e = (1, 1, 1, ...)$,

(iii) $\phi(x) = \phi(Sx)$, $Sx = S(x_n) = x_{n+1}$,

şartlarını sağlıyor ise ϕ' ye bir **Banach limiti** denir.

Bütün Banach limitlerinin cümlesi β ile gösterilir.

Teorem 1.2.1. [5, s.261] $\beta \neq \emptyset$ ve
$q : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ için

$$q(x) = \limsup_n \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

olsun. Bu taktirde q bir altlineer fonksiyonel ve

$$-q(-x) = \liminf_n \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

dir. Eğer $x \in c$ ise

$$f(x) = \lim_n x_n = \lim_n \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = q(x)$$

olur.

Hahn-Banach Teoremine göre her $x \in \ell_\infty$ için

$$-q(-x) \leq \phi(x) \leq q(x)$$

olacak şekilde f' nin c' den ℓ_∞' a bir ϕ genişletmesi vardır. $x \in \ell_\infty$ için

$$q(x - Sx) = \limsup_n \frac{x_{n+1} - x_1}{n} = 0$$

olduğundan, ϕ bir Banach limitidir.

Teorem 1.2.2. [5, s.262] $\phi \in \beta$ ise $x = (x_n) \in \ell_\infty$ için

$$\liminf_n x_n \leq \phi(x) \leq \limsup_n x_n$$

sağlanır.

İspat. Sınırlı bir $x = (x_n)$ dizisi için $\liminf_n x_n$ ve $\limsup_n x_n$ sırasıyla $\lim_k \inf_{n \geq k} x_n$ ve $\lim_k \sup_{n \geq k} x_n$ ile tanımlıdır. ϕ Banach limiti olduğundan $\phi(x) = \phi(S(x))$ dir ve

$$\inf x_n \leq \phi(x_{n_0}) \leq \inf x_n + \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 seçilebilir. O halde her n için

$$x_n + \varepsilon - x_{n_0} > 0$$

dır. ϕ Banach limitinin özelliklerinden

$$\phi(x) + \varepsilon \geq x_{n_0} \geq \inf x_n$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan $\phi(x) \geq \inf x_n$ dir.
Supremum özelliği kullanılarak benzer şekilde $\phi(x) \leq \sup x_n$ olduğu gösterilir. $\square$

Bütün Banach limitleri eşit olan dizileri kararterize etmek için diğer bir altlineer fonksiyonel tanımlanabilir.

$$p : \ell_\infty \to \mathbb{R},\ p(x) = \inf \lim_j \sup \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_{n_i+j}$$

olsun. Burada infimum $n_1, n_2, ..., n_k$ tamsayılarının cümlesi üzerinden alınmaktadır. Açık olarak

$$-p(-x) = \sup \lim_j \inf \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_{n_i+j}$$

dir ve p için aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

Teorem 1.2.3. [5, s.262] $\phi \in \beta$ ve $x \in \ell_\infty$ ise, bu taktirde

$$\liminf x_n \leq -p(-x) \leq \phi(x) \leq p(x) \leq \limsup x_n$$

dir.

Teorem 1.2.4. [5, s.262] $p,\ \ell_\infty$ üzerinde bir altlineer fonksiyoneldir.

ℓ_∞ üzerindeki bu p altlineer fonksiyoneli c üzerinde ℓ lineer fonksiyoneline baskın; yani, her $x \in c$ için $\ell(x) \leq p(x)$ olduğundan; Teorem 1.2.1, p altlineer fonksiyoneli kullanılarak da ispatlanabilir.

Gerçekten Hahn-Banach teoremi gereğince $\forall x \in \ell_\infty$ için

$$-p(x) \leq \phi(x) \leq p(x)$$

olacak şekilde ℓ' nin ℓ_∞' a bir genişletmesi vardır ki bu da Banach limitidir.
x bir yakınsak dizi ise her $\phi \in \beta$ için

$$\phi(x) = \ell(x) = \lim_n x_n$$

olduğundan, yakınsak bir dizinin bütün Banach limitleri eşittir. Bununla beraber, bütün Banach limitleri çakışık olan fakat yakınsak olmayan diziler de vardır. Örneğin, $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ ise, her $\phi \in \beta$ için

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2}\left[\phi(x) + \phi(Sx)\right] \\ &= \frac{1}{2}\phi\left(x + Sx\right) \\ &= \frac{1}{2}\phi(e) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğundan, bu dizinin Banach limiti $\frac{1}{2}$ dir. Banach limitlerinin tekliği hakkında aşağıdaki sonuç bilinir.

Teorem 1.2.5. [5] Sınırlı bir x dizisinin bütün Banach limitlerinin çakışık olması için gerek ve yeter şart $p(x) = -p(-x)$ olmasıdır.

Tanım 1.2.2. [17] Sınırlı bir x dizisinin bütün Banach limitleri sabit bir s sayısı ise, x dizisi s' ye **hemen hemen yakınsak**tır denir ve $f - \lim x = s$ ile gösterilir. Hemen hemen yakınsak bütün dizilerin cümlesi f ile gösterilir.

Lorentz hemen hemen yakınsak dizileri aşağıdaki teoremle karakterize etti.

Teorem 1.2.6. [17] Sınırlı bir x dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart, n' ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{p \to \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + ... + x_{n+p-1}}{p} = s$$

olacak şekilde bir s sayısının bulunmasıdır.

BÖLÜM 2

ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

2.1 Ölçü ve Ölçülebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1. [2, s.15] X boş olmayan bir cümle ve $\mathcal{A}$, X' in boş olmayan altcümlelerinin bir sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{A}$,

$$(i) \qquad X \in \mathcal{A},$$

$$(ii) \qquad \text{Her } A \in \mathcal{A} \text{ için } A^c = X \backslash A \in \mathcal{A},$$

$$(iii) \qquad \text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

özelliklerini sağlıyor ise $\mathcal{A}$' ya X üzerinde bir **σ-cebir** denir.

Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathcal{A}$' daki her bir cümleye de **$\mathcal{A}$-ölçülebilir cümle** denir.

Tanım 2.1.2. [2] X bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{A}$, X' in tüm açık (kapalı) cümlelerini kapsayan en küçük σ-cebir ise $\mathcal{A}$' ya **Borel cebiri** denir. Böylece elde edilen $(X, \mathcal{A})$ ikilisine **Borel uzayı** ve $\mathcal{A}$' nın elemanlarına da **Borel ölçülebilir cümleler** denir.

Teorem 2.1.1. [2] $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve Y, X' in boş olmayan bir altcümlesi olsun. Bu durumda $\mathcal{A}_Y = \{Y \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ sınıfı Y üzerinde bir σ-cebirdir.

Bu durumda $(Y, \mathcal{A}_Y)$ ikilisine $(X, \mathcal{A})$ uzayının **altölçülebilir uzayı** denir.

Tanım 2.1.3. [2] $(X_1, \mathcal{A}_1)$ ve $(X_2, \mathcal{A}_2)$ ölçülebilir iki uzay olmak üzere, $f : X_1 \to X_2$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $A_2 \in \mathcal{A}_2$ için $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1$ ise, f' ye **ölçülebilir fonksiyon** denir.

Teorem 2.1.2. [2] $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir bir uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{array}{ll} i) & \{x \in X : f(x) > \alpha\} \ \textit{ölçülebilirdir.} \\ ii) & \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \ \textit{ölçülebilirdir.} \\ iii) & \{x \in X : f(x) < \alpha\} \ \textit{ölçülebilirdir.} \\ iv) & \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \ \textit{ölçülebilirdir.} \end{array}$$

Bütün $f : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların cümlesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. [2, s.22] $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu,

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$,

(iii) $\mathcal{A}$ sınıfındaki her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,

özelliklerini sağlıyor ise μ' ye X üzerinde bir **ölçü fonksiyonu** veya kısaca **ölçü** adı verilir. Böylece elde edilen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlü sistemine de **ölçü uzayı** denir.

Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise, μ'ye **sonlu ölçü**; $\mu(X) = 1$ ise, **olasılık ölçüsü** denir. Bu çalışma boyunca aldığımız ölçülerin sonlu olduğunu kabul edeceğiz.

Teorem 2.1.3. [6] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı olmak üzere $(A, \mathcal{A}_A)$, $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzayının altölçülebilir uzayı olsun. $\mu(A) > 0$ olmak üzere, her $B \in \mathcal{A}$ için $\mu_A(B) = \mu(B \cap A)/\mu(A)$ ile tanımlı $\mu_A : (A, \mathcal{A}_A) \to [0, \infty]$ fonksiyonu bir ölçüdür. Böylece elde edilen $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ üçlüsüne, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayının **altölçü uzayı** denir.

Tanım 2.1.5. [2, s.69] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Eğer $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise, f fonksiyonu X üzerinde μ'ye göre integrallenebilirdir denir ve bu integral

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır.

Bu tanımda f^+ ve f^- ler, f nin pozitif ve negatif kısmını göstermektedir. X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir. $0 < p < \infty$ olmak üzere,

$$L_p = \{f \in M(X, \mathcal{A}) : |f|^p \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)\}$$

cümlesine p. kuvvetten integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir.

2.2 Matris Dönüşümleri

Bu kısımda matris dönüşümleri tanıtılarak; bir matrisin regüler ve kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şartlar verildi.

$B = (b_{nk}),\ (n, k = 1, 2, ...)$ reel terimli sonsuz bir matris olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise,

$$Bx = (B_n(x))$$

dizisine $x = (x_k)$ reel dizisinin $B = (b_{nk})$ matrisi ile elde edilen dönüşümü denir. Eğer Bx dizisi mevcut ve

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = a$$

ise, (x_k) dizisi $a-$ya $B-$toplanabilirdir veya $B-$limitlenebilirdir denir ve $B - \lim x = a$ şeklinde yazılır.

E ve F iki dizi uzayı olsun. Eğer her $x \in E$ için Bx dizisi mevcut ve $Bx \in F$ ise, B matrisi E' den F' ye tanımlıdır denir ve böyle matrislerin sınıfı (E, F) ile gösterilir. Bir matrisin (E, F) sınıfında olması için gerek ve yeter şartların belirlenmesine (E, F) matris sınıfının karakterizasyonu denir. Örneğin, $B \in (\ell_\infty, \omega)$ olması için gerek ve yeter şart, her n için

$$\sum_k |b_{nk}| < \infty$$

dır [18]. ℓ_∞' dan, ℓ_∞ ve c' ye tanımlı matrisler aşağıdaki teoremle karakterize edildi.

Teorem 2.2.1. [18] $B \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 2.2.2. [18] $B \in (\ell_\infty, c)$ olması için gerek ve yeter şart

(*i*) *n' ye göre düzgün olarak $\sum_k |b_{nk}|$ yakınsak,*

(*ii*) *Her bir k için $\lim_n b_{nk} = b_k$,* olmasıdır.

Tanım 2.2.1. [18] Bir $B = (b_{nk})$ sonsuz matrisi yakınsak dizileri yine yakınsak dizilere limiti koruyarak dönüştürüyor ise, B' ye regüler matris denir. Regüler matrislerin sınıfı $(c, c)_{reg}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.3. [18] $B \in (c, c)_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{array}{ll} (i) & \sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty, \\ (ii) & \textit{Her } k \textit{ için}, \ \lim_n b_{nk} = 0, \\ (iii) & \lim_n \sum_k b_{nk} = 1 \end{array}$$

olmasıdır.

Tanım 2.2.2. B matrisi regüler bir matris olsun. Eğer B matrisinin hiç negatif terimi yoksa ve her satırındaki terimlerin toplamı 1 ise, B matrisine **olasılıksal regüler matris** denir.

Olasılıksal regüler matrisin iyi bir örneği 1. mertebeden Cesàro matrisidir. $(C, 1) = (C, 1_k)$ Cesàro matrisinin

$$C^1_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & , \quad k \leq n, \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

ile tanımlandığı biliniyor.

Tanım 2.2.3. Regüler bir B matrisi hemen hemen yakınsak her diziyi yakınsak bir diziye limitini koruyarak dönüştürüyor ise, B ye kuvvetli regüler matris denir. Bu durumda $B \in (f, c)_{reg}$ yazılır.

Kuvvetli regüler matrislerin sınıfı aşağıdaki teoremle karakterize edildi.

Teorem 2.2.4. [17] Regüler bir $B = (b_{nk})$ matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart B nin translatif, yani

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k |b_{nk} - b_{n,k+1}| = 0$$

olmasıdır.

BÖLÜM 3

ERGODİK DÖNÜŞÜMLER VE KUVVETLİ REGÜLER MATRİSLER

3.1 Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1. [14] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve T de $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L_p üzerinde lineer bir operatör olsun. Eğer;
(a) Her $f \in L_p$ için $\|Tf\|_p \leq \|f\|_p$ ise T' ye **büzülme dönüşümü**,
(b) Her $f \geq 0$ için $Tf \geq 0$ ise T' ye **pozitif dönüşüm** denir.

Tanım 3.1.2. [14] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $T^{-1}A = A$ ise, $A \in \mathcal{A}$ cümlesine **invaryant cümle** denir.

Tanım 3.1.3. [14] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ ise, T ye **ölçü koruyan dönüşüm** denir.

Tanım 3.1.4. [14] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçü koruyan bir dönüşüm olsun. Eğer $A \in \mathcal{A}$ invaryant cümlesi için $T^{-1}A = A$ olduğunda $\mu(A) = 0$ ya da $\mu(A^c) = 0$ ise, T dönüşümüne **ergodiktir** (veya μ ölçüsüne göre ergodiktir) denir.

Tanım 3.1.5. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(T^{-1}A) = 0$ ise, μ ölçüsüne **sıfır invaryanttır** denir.

Tanım 3.1.6. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $A \cap T^{-n}A = \emptyset$ olacak şekilde $A \in \mathcal{A}$ alındığında $\mu(A) = 0$ ise, μ ye **koruyandır** (veya konzervatiftir) denir.

Tanım 3.1.7. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $A \in \mathcal{A}$ için $m(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$ ise, μ ölçüsü m ölçüsüne **denktir** denir.

Tanım 3.1.8. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $A \in \mathcal{A}$ için $A, T^{-1}A, T^{-2}A, ...$ kümeleri karşılıklı ayrık ise; A cümlesine, **mükemmel cümle** denir.

Tanım 3.1.9. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer pozitif tamsayıların artan bir (r_k) dizisi için $A, T^{-r_1}A, T^{-r_2}A, ...$ kümeleri karşılıklı ayrık ise A cümlesine, **zayıf mükemmel cümle** denir.

Tanım 3.1.10. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\mu(A) < \delta$ iken $q(A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise, q ölçüsüne $\mu-$süreklidir denir. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $\varepsilon > 0$ için, $\mu(A) < \delta$ iken $q_n(A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise, $\{q_n\}$ ölçülerin dizisine **düzgün $\mu-$ süreklidir** denir.

3.2 Teoremler

Lemma 3.2.1. [4] Z bir Banach uzayı ve T ile L_n $(n = 1, 2, ...)$ Z' den Z' ye lineer dönüşümler olsun. Eğer $TL_n = L_nT$, bazı z' ler için $\lim L_n(z - Tz) = 0$ ve $L_n(z)$, z_0 noktasına zayıf yakınsak ise, $Tz_0 = z_0$ dır.

İspat. $\overline{z}$, Z üzerindeki lineer bir fonksiyonel olsun. Bu taktirde zayıf yakınsaklığın tanımından;

$$\lim_n \overline{z}(L_n z - z_0) = 0 \tag{3.2.1}$$

olur. $T : Z \to Z$ lineer bir dönüşüm olduğundan

$$\lim_n \overline{z}(TL_n z - Tz_0) = 0 \tag{3.2.2}$$

bulunur. $\lim_n L_n(z - Tz) = 0$ olduğu bilindiğinden ve $\overline{z}$ nin sürekliliğinden

$$\lim_n \overline{z}(L_n z - L_n Tz) = 0 \tag{3.2.3}$$

olur. T ve L_n değişmeli olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\overline{z}(z_0 - Tz_0) = \overline{z}(z_0 - L_n z) + \overline{z}(L_n z - L_n Tz) + \overline{z}(TL_n z - Tz_0)$$

yazılabilir. Böylece Z üzerindeki bütün lineer fonksiyoneller için (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3)' ten $\overline{z}(z_0 - Tz_0) = 0$ olur. Buradan da,

$$Tz_0 = z_0$$

bulunur. □

Teorem 3.2.1. [22, s.213] Z; lokal konveks, lineer topolojik uzay olsun. $T : Z \to Z$, $\{T^n : \forall n \in \mathbb{N}\}$ operatörler ailesi herbir q yarınormu için eşsürekli olacak şekilde sürekli bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde $\forall z \in Z$ için,

$$\sup_{n \geq 1} q(T^n z) \leq q'(z) \tag{3.2.4}$$

olacak şekilde Z üzerinde sürekli bir q' yarınormu vardır. $\overline{R(I-T)}$, $R(I-T)$ görüntü kümesinin kapanışı olmak üzere;

$$\overline{R(I-T)} = \left\{ z \in Z : \lim_{n\to\infty} T_n z = 0, \quad T_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m \right\}$$

eşitliği sağlanır ve

$$\overline{R(I-T)} \cap N(I-T) = \{0\}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} T_n(I-T) &= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m(I-T) \\ &= \frac{1}{n}(\sum_{m=1}^{n} T^m - \sum_{m=1}^{n} T^{m+1}) \\ &= \frac{1}{n}(T - T^{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $w \in R(I-T)$ ise, bu taktirde $w = (I-T)z$ olacak şekilde bir $z \in Z$ vardır. Böylece (3.2.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} T_n w &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m(I-T)z \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(T^m - T^{m+1})z \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Şimdi bir $u \in \overline{R(I-T)}$ alınsın. Bu taktirde Z üzerindeki sürekli bir q' yarınormu ve $\varepsilon > 0$ için,

$$q'(u-w) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $w \in R(I-T)$ vardır. Böylece (3.2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} q(T_n(u-w)) &= q\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m(u-w)\right) \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} q(T^m(u-w)) \\ &\leq q'(u-w) < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned} q(T_n u) &\leq q(T_n w) + q(T_n(u-w)) \\ &\leq q(T_n w) + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ve bu son eşitsizliğin her iki yanında limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} T_n u = 0$$

olur. O halde;

$$\overline{R(I-T)} \subseteq \left\{ z \in Z : \lim_{n\to\infty} T_n z = 0, \quad T_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m \right\}$$

dir. Tersine; $\lim T_n z = 0$ olsun. Buradan; Z üzerindeki sürekli bir q yarınormu ve her $\varepsilon > 0$ için

$$q(z-(z-T_n z)) = q(T_n z) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n vardır. Böylece;

$$\begin{aligned} z - T_n z &= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(I-T^m)z \\ &= \frac{1}{n}(nz - Tz - T^2 z - T^3 z - \ldots - T^n z) \\ &= \frac{1}{n}((z-Tz) + (z-T^2 z) + (z-T^3 z) + \ldots + (z-T^n z)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(I-T)(I+T+T^2+T^3+\ldots+T^{m-1})z \end{aligned}$$

dan $(z-T_n z) \in R(I-T)$ olduğu anlaşılır. Bu da $z \in \overline{R(I-T)}$ olması demektir. □

Teorem 3.2.2. [22, s.213] Z, Teorem 3.2.1' in şartlarını sağlayan bir uzay olsun ve (3.2.4) eşitsizliği sağlansın. Ayrıca bir $z \in Z$ için, $\{n\}$ dizisinin

$$w - \lim_{n' \to \infty} T_{n'} z = z_0$$

olacak şekilde bir $\{n'\}$ alt dizisi bulunsun. Bu taktirde; $Tz_0 = z_0$ ve $\lim_{n\to\infty} T_n z = z_0$ dır.

İspat.

$$\begin{aligned} TT_n - T_n &= T\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{n} T^{m+1} - \sum_{m=1}^{n} T^m\right) \\ &= \frac{1}{n}(T^{n+1} - T) \end{aligned}$$

olduğundan (3.2.4) kullanılarak;

$$\lim_{n\to\infty}(TT_n z - T_n z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(T^{n+1} - T)z = 0$$

bulunur. Böylece herhangi bir $f \in Z'$ için

$$\lim_{n\to\infty}\langle TT_{n'} z, f\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T_{n'} z, T' f\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T_{n'} z, f\rangle = \langle z_0, f\rangle$$

olur. Bu yüzden $\langle z_0, f\rangle = \langle Tz_0, f\rangle$ ve $f \in Z'$ nün keyfi seçilişinden $Tz_0 = z_0$ elde edilir.

$$\begin{aligned} T^m z &= T^m z - T^m z_0 + T^m z_0 \\ &= T^m z_0 + T^m(z - z_0) \\ &= z_0 + T^m(z - z_0) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$T_n z = z_0 + T_n(z - z_0) \tag{3.2.5}$$

bulunur. $(z - z_0) = w - \lim_{n\to\infty}(z - T_{n'} z)$ ve Teorem 3.2.1' de gösterildiği üzere $(z - T_{n'} z) \in R(I - T)$ olduğundan, $(z - z_0)$, $R(I - T)$'nin zayıf kapanışına aittir.

Fakat lokal konveks vektör uzaylarında, bir konveks altkümenin zayıf kapanışı bu altkümenin orjinal kapanışına eşit olduğundan

$$(z - z_0) \in \overline{R(I - T)}$$

ve buradan da

$$\lim_{n\to\infty} T_n(z - z_0) = 0$$

olur. (3.2.5) eşitliğinin her iki yanında $(n \to \infty)$ için limit alındığında

$$\lim_{n\to\infty} T_n z = z_0$$

bulunur. □

Sonuç 3.2.1. [22, s.214] Z lokal konveks dizisel zayıf kompakt vektör uzayı olmak üzere (3.2.4) eşitsizliği geçerli olsun. Bu durumda; bir $z \in Z$ ve $\lim_{n\to\infty} T_n z = z_0$ olacak şekildeki bir $z_0 \in Z$ için

$$T_0 = {T_0}^2 = TT_0 = T_0T \tag{3.2.6}$$

$$R(T_0) = N(I - T) \tag{3.2.7}$$

$$N(T_0) = \overline{R(I - T)} = R(I - T_0) \tag{3.2.8}$$

eşitliklerini sağlayan ve z' yi z_0' a taşıyan sürekli lineer bir T_0 operatörü vardır. Ayrıca,

$$Z = \overline{R(I - T)} \oplus N(I - T) \tag{3.2.9}$$

dir. (Yani; herhangi bir $z \in Z$, $\overline{R(I - T)}$ kümesinin ve $N(I - T)$ kümesinin birer elemanının toplamı olarak bir tek şekilde temsil edilir.)

İspat.

$$z_0 = T_0 z = \lim_{n\to\infty} T_n z = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} T^m z$$

yazılırsa T_0'ın lineerliği açıktır. (3.2.4) kullanılarak herbir $z \in Z$, $n \in \mathbb{N}$ ve q sürekli yarınormu için

$$q(T_n z) = q\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} T^m z\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} q(T^m z) \leq q'(z)$$

elde edilir. Böylece $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ operatörler ailesi (3.2.4) anlamında eşsüreklidir. Buradan kolayca görülebilir ki T_0, sürekli bir operatördür. Şimdi $Tz_0 = z_0$ ve $z_0 = T_0 z$ eşitlikleri kullanılarak

$$Tz_0 = TT_0 z = z_0 = T_0 z$$

eşitliği bulunur ki; buradan da, her bir $m \in \mathbb{N}$ için $TT_0 = T_0 \Rightarrow T^m T_0 = T_0$ elde edilir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$T_n T_0 = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} T^m T_0$$

eşitliği ${T_0}^2 = T_0$ olmasını gerektirir. Diğer taraftan,

$$T_n - T_n T = \frac{1}{n}(T - T^{n+1})$$

ve (3.2.4)' ten $T_0 = T_0 T$ bulunur. Böylece (3.2.6) ispatlanmış olur. Şimdi $Tz = z$ olsun. Böylece $T^n z = z$, $T_n z = z$ ve buradan da, $T_0 z = z$ olur ki bu da $z \in R(T_0)$ olması demektir. Tersine $z \in R(T_0)$ olsun. ${T_0}^2 = T_0$' dan, $T_0 z = z$ ve $TT_0 = T_0$ dan da $Tz = TT_0 z = T_0 z = z$ elde edilir. Buradan $z \in N(I - T)$ olduğu görülür. Böylece (3.2.7) gösterilmiş olur. Teorem 3.2.1' den $N(T_0) = \overline{R(I - T)}$ dir. $T_0^2 = T_0$ yardımıyla $R(I - T_0) \subseteq N(T_0)$ ve eğer $z \in N(T_0)$ alınırsa bu taktirde $z = z - T_0 z \in R(I - T_0)$ bulunur. Böylece $N(T_0) = R(I - T_0)$ olduğu görülür. $I = (I - T_0) + T_0$ olduğu dikkate alınıp (3.2.7) ve (3.2.8) kullanılırsa (3.2.9) elde edilir. □

Teorem 3.2.3. [12] Z, üzerindeki yarınormların W ailesi tarafından indirgenmiş topoloji ile dizisel tam, zayıf dizisel kompakt lokal konveks bir vektör uzayı olsun. $T : Z \to Z$, $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ operatörlerin ailesi her bir $q \in W$ için eşsürekli olacak şekilde sürekli lineer bir dönüşüm olsun. Bu taktirde her bir $z \in Z$ için

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} q(T^n z) \leq q'(z) \tag{3.2.10}$$

olacak şekilde Z üzerinde bir q' sürekli yarı normu vardır.

Ayrıca $B = (b_{nj})$ $(n, j \in \mathbb{N})$ kuvvetli regüler bir matris ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$T_n = \sum_{j=0}^{\infty} b_{nj} T^j$$

olsun. Bu taktirde T_n $(n \in \mathbb{N})$, Z üzerinde iyi tanımlıdır ve her bir $z \in Z$ için $\lim_n T_n z$ mevcuttur. Eğer $z \in Z$ için $T_0 z = \lim_n T_n z$ yazılırsa, bu taktirde T_0, B ye bağlı olmaksızın sürekli lineer bir dönüşümdür ve

$$T_0 = T_0^2 = TT_0 = T_0 T \tag{3.2.11}$$

$$R(T_0) = N(I - T) \tag{3.2.12}$$

$$N(T_0) = \overline{R(I - T)} = R(I - T_0) \tag{3.2.13}$$

$$Z = \overline{R(I - T)} \oplus N(I - T) \tag{3.2.14}$$

sağlanır.

İspat. (3.2.10) kullanılarak $q \in W$, her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $t, s \to \infty$ için

$$q\left(\sum_{j=s}^{t} b_{nj} T^j z\right) \leq \sum_{j=s}^{t} |b_{nj}| q(T^j z) \leq q'(z) \sum_{j=s}^{t} |b_{nj}| \longrightarrow 0$$

yazılabilir. Z dizisel tam olduğundan, T_n $(n = 1, 2, 3, ...)$, Z üzerinde tanımlıdır. T_n $(n \in \mathbb{N})$'in lineer ve sürekli olduğu açıkça görülebilir. $n \in \mathbb{N}$ için

$$T_n(I - T) = b_{n1} T_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (b_{n,j+1} - b_{nj}) T^{j+1}$$

dir. Eğer $w \in R(I - T)$ ise bu taktirde $w = (I - T)z$ olacak şekilde bir $z \in Z$ vardır. Böylece (3.2.10) kullanılarak her $q \in W$ için

$$q(T_n w) = q(T_n(I - T)z) \leq q'(z) \left(|b_{n1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |b_{n,j+1} + b_{nj}|\right)$$

elde edilir. B, kuvvetli regüler bir matris olduğundan her $w \in R(I - T)$ için

$$\lim_n T_n w = 0 \tag{3.2.15}$$

bulunur. Bundan sonra

$$\overline{R(I - T)} \subset \{z \in Z : \lim_n T_n z = 0\} \tag{3.2.16}$$

olduğunu ispatlayalım.

Bir $u \in \overline{R(I-T)}$ alınsın. q', Z üzerinde sürekli bir yarınorm olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $q'(u-w) < \frac{\varepsilon}{M}$ olacak şekilde $w \in R(I-T)$ vardır. (3.2.10) dikkate alınarak

$$q(T_n(u-w)) \leq q'(u-w)\sum_{j=1}^{\infty}|b_{nj}| < \varepsilon$$

elde edilir ki, buradan da $q \in W$ için

$$q(T_n u) \leq q(T_n w) + q(T_n(u-w)) \leq q(T_n w) + \varepsilon$$

olduğu görülür. Böylece (3.2.15) kullanılarak (3.2.16) nın geçerliliği elde edilir. Keyfi bir $z \in Z$ alınsın. Z, zayıf dizisel kompakt olduğundan $w - \lim_n T_{n_k} z = z_0$ olacak şekilde $(T_n z)$ dizisinin bir $(T_{n_k} z)$ alt dizisi vardır. (3.2.16) dan

$$\lim_n T_n(z - Tz) = 0 \tag{3.2.17}$$

olduğu görülür. T ve T_n değişmeli olduğundan T_{n_k} ve T, Lemma 3.2.1 in şartlarını sağlar. Bu yüzden $n \in \mathbb{N}$ için

$$T_n z = (\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}) z_0 + T_n(z - z_0) \tag{3.2.18}$$

eşitliğine sahip olunur. T'nin sürekliliğinden $k \in \mathbb{N}$ için

$$u_{n_k} = \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_k j}(I + T + T^2 + ... + T^{j-1})z$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} z - T_{n_k} z &= (1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_k j})z \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_k j}(I-T)(I + T + T^2 + ... + T^{j-1})z \\ &= (1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_k j})z + (I-T)u_{n_k} \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan (3.2.19) da k üzerinden zayıf limit alınırsa $z - z_0 = w - \lim_k (I-T)u_{n_k}$ elde edilir. $(I-T)u_{n_k} \in R(I-T)$ olduğunda $z - z_0$, $R(I-T)$ nin zayıf kapanışına aittir. Fakat lokal konveks vektör uzaylarında, bir konveks altkümenin zayıf kapanışı bu altkümenin orjinal kapanışına eşit olduğundan $z - z_0 \in \overline{R(I-T)}$ dir. O halde (3.2.16) dan $\lim_n T_n(z - z_0) = 0$ dır. Böylece (3.2.18) den $\lim_n T_n z = z_0$ elde edilir. $z \in Z$ için

$$z_0 = T_0 z = \lim_n T_n z = \lim_n \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j z$$

yazılırsa T_0' ın lineerliği açıktır. (3.2.10) kullanılarak $q \in W$, her bir $z \in Z$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$q(T_n z) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |b_{nj}| q(T^j z) \leq M q'(z)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bundan dolayı $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ operatörler ailesi (3.2.10) anlamında eşsüreklidir. Buradan kolayca görülür ki T_0, sürekli bir operatördür. Şimdi $Tz_0 = z_0$ ve $z_0 = T_0 z$ dan her bir $z \in Z$ için

$$Tz_0 = TT_0 z = z_0 = T_0 z$$

eşitliği ve buradan da her bir $j \in \mathbb{N}$ için $TT_0 = T_0 \Longrightarrow T^j T_0 = T_0$ elde edilir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n T_0 = (\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}) T_0$ eşitliğine sahip olunur ki bu da $T_0^2 = T_0$ eşitliğini gerektirir. Diğer taraftan

$$T_n - T_n T = b_{n1} T + \sum_{j=1}^{\infty} (b_{n,j+1} - b_{nj}) T^{j+1}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.2.10) ve B'nin kuvvetli regülerliği kullanılarak $T_0 = T_0 T$ elde edilir ki, bu da (3.2.11) dir. Şimdi T_0 limit dönüşümünün kuvvetli regüler B matrisine bağlı olmadığını ispatlayalım. Bunun için başka bir kuvvetli regüler matris $C = (c_{nj})$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $w_n = \sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} T^j$ olsun. Önceki tartışmadan $z \in Z$ için

$$T_1 z = \lim_n w_n z \tag{3.2.20}$$

ve

$$T_1 = T_1^2 = TT_1 = T_1 T \tag{3.2.21}$$

olacak şekilde Z üzerinde sürekli lineer bir T dönüşümü vardır. (3.2.21) den her bir $j \in \mathbb{N}$ için

$$T_1 = T_1^2 = T^j T_1 = T_1 T^j \tag{3.2.22}$$

elde edilir. (3.2.22) deki ifade b_{nj} ile çarpılıp daha sonra j üzerinden toplam alınırsa, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}\right) T_1 = T_n T_1 = T_1 T_n \tag{3.2.23}$$

elde ederiz. $n \to \infty$ için limit alınırsa $T_1 = T_0 T_1 = T_1 T_0$ elde edilir. Benzer yolla $T_0 = T_1 T_0 = T_0 T_1$ bulunur. Dolayısıyla $T_0 = T_1$ dir. Son olarak (3.2.12), (3.2.13) ve (3.2.14) bağıntıları Sonuç 3.2.1' den elde edilir. □

Teorem 3.2.4. [14] $1 < p < \infty$ olmak üzere T, L_p' de pozitif bir büzülme dönüşümü ve $B = [b_{nj}](n, j \in \mathbb{N})$ de kuvvetli regüler bir matris olsun. Bu taktirde L_p' de

$$P = P^2 = TP = PT \tag{3.2.24}$$

ve $\forall f \in L_p$ ve $n \to \infty$ için

$$\lim_n \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j f = Pf \tag{3.2.25}$$

olacak şekilde B' den bağımsız pozitif bir P büzülme dönüşümü vardır.

İspat. L_p nin Banach uzayı olmasından dolayı Teorem 3.2.3' ün sonuçlarını kullanılabilir. T büzülme dönüşümü olduğundan (3.2.4) sağlanır. Teorem 3.2.3' ün ispatından (3.2.25) i ispatlamak için

$$K = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j f \;\; : \;\; n \in \mathbb{N} \right\} \tag{3.2.26}$$

kümesinin her $f \in L_p$ için zayıf dizisel kompakt olduğu gösterilmelidir. [9, s.289] dan bu, K nın sınırlılığı ile eşdeğerdir. Böylece $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j f \right\|_p \leq M \|f\|_p$$

olur ve buradan da (3.2.25) sağlanır. (3.2.24) eşitliği (3.2.6) eşitliğinin bir sonucudur. Üstelik Teorem 3.2.3' ten P sınırlı lineer operatörünün B kuvvetli regüler matrisine bağlı olmadığı görülür. Bu nedenle eğer $(T^n, n \in \mathbb{N})$ dizisinin *Cesàro* toplamı alınırsa aynı P limiti elde edilir. Böylece her $f \in L_p$ için L_p' de

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} T^j f = Pf$$

bulunur. [11, s.19]' daki Teorem 2.1.1' den T nin pozitif büzülme olması durumunda aynısı P için de doğrudur. P' nin büzülme ve aynı zamanda idempotent olduğuna dikkat edilirse $\|P\| = 1$ ya da $P = 0$ olduğu sonucuna varılır. $\square$

Not 3.2.1. [14] T operatörünün büzülme olmadığı fakat $(T^n, n \in \mathbb{N})$ dizisinin $M_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$ olacak şekilde düzgün sınırlı olduğu düşünülsün.(Bu durumda T operatörüne kuvvetli sınırlıdır denir.) Böylece Teorem 3.2.4 doğru kalır. P limitleme operatörü sınırlıdır (ki P nin büzülme olmasına gerek yoktur) ve $\|P\| \leq MM_1$ sonucu elde edilir.

Aşağıda L_1 uzayında ortalama ergodik teoremi verildi.

Teorem 3.2.5. [14] T, L_1' de bir büzülme olsun. Şimdi $f \in L_1$ için L_1'de

$$|f| \leq g \Longrightarrow |Tf| \leq g \tag{3.2.27}$$

olacak şekilde kesin pozitif bir $g \in L_1$ alınsın. Ayrıca $B = [b_{nj}](n, j \in \mathbb{N})$ kuvvetli regüler bir matris olsun. Bu taktirde her $f \in L_1$ ve $n \to \infty$ için L_1' de

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j f \longrightarrow Pf \tag{3.2.28}$$

olacak şekilde (3.2.24)' ü sağlayan bir $P \in L_1$ büzülmesi vardır. Dahası P büzülmesi B kuvvetli regüler matrisine bağlı değildir.

İspat. Teorem 3.2.4' ün ispatında olduğu gibi (3.2.28)' i göstermek için (3.2.26) daki K kümesinin her $f \in L_1$ için zayıf dizisel kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. [9, s.292]' den bu K nın sınırlılığı ile eşdeğerdir ve herbir ayrık azalan $(E_k, k \in \mathbb{N}) \subset A$ dizisi için $h \in K$ ya göre düzgün olarak,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} h d\mu = 0$$

olur. K' nın sınırlılığını göstermek Teorem 3.2.4' teki ile aynıdır. Bu yüzden (3.2.28)' i ispatlamak için her $f \in L_1$ için $n \in \mathbb{N}$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} T^j f \right) d\mu = 0 \tag{3.2.29}$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\left|\int_{E_k}\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}T^j f\right)d\mu\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty}|b_{nj}|\int_{E_k}|T^j f|d\mu \tag{3.2.30}$$

elde edilir. $g \in L_1$ fonksiyonu kesin pozitif olduğundan her $f \in L_1$, herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve sabit bir $c > 0$ için $|f_c| \leq cg$ ve $\|\tilde{f}_c\|_1 < \varepsilon$ olacak şekilde bir $f = f_c + \tilde{f}_c$ bölünmesi vardır [1, s.88]. T büzülme olduğundan (3.2.27) nin kullanılmasıyla

$$\int_{E_k}|T^j f|d\mu \;\leq\; c\int_{E_k} gd\mu + \int_X |T^j \tilde{f}_c|d\mu \leq c\int_{E_k} gd\mu + \varepsilon \tag{3.2.31}$$

elde edilir. (3.2.29) eşitliği; (3.2.30) ile (3.2.31) eşitsizlikleri, $B = [b_{nj}](n, j \in \mathbb{N})$ matrisinin kuvvetli regüler olması ve $\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} gd\mu = 0$ olmasından elde edilir. Bu yüzden (3.2.27) doğru olur. P' nin L_1' de kuvvetli regüler B matrisine bağlı olmayan sınırlı lineer bir operatör olduğu Teorem 3.2.3' ten görülür. Bu yüzden B, *Cesàro*, $(C, 1)$ matrisi olarak alınırsa aynı P limiti elde edilir. [15]' deki Teorem 1.1 yardımıyla P nin bir büzülme dönüşümü olduğu anlaşılır. Teorem 3.2.4' tekine benzer yolla $\|P\| = 1$ ya da $P = 0$ olduğu sonucuna varılır. □

Lemma 3.2.2. [14] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir $\sigma-$sonlu ölçü uzayı ve T de L_1'de $\|T\|_\infty \leq 1$ ve $\|T\|_1 \leq 1$ olacak şekilde bir lineer operatör olsun. Eğer $B = [b_{nj}](n, j \in \mathbb{N})$ olasılıksal kuvvetli regüler matris ise bu taktirde $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}(T^j f)(x)\right| < \infty,\ \mu - h.\ \textit{her yerde}$$

olur.

İspat. $T_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}T^j$ $(n \in \mathbb{N})$ alınsın. L_1 tam uzay ve B olasılıksal kuvvetli regüler bir matris olduğundan $f \in L_1$ için,

$$\left\|\sum_{j=k}^{r} b_{nj}T^j f\right\|_1 \leq \|f\|_1\sum_{j=k}^{r} b_{nj}$$

eşitsizliği T_n' in L_1 üzerinde tanımlı olması anlamına gelir. Dahası $\|T_n\|_1 \leq 1(n \in \mathbb{N})$ dir. g, L_p' deki sınırlı bir fonksiyon ise $\|T\|_\infty \leq 1$ olduğundan

$$\|T_n g\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}\|g\|_\infty = \|g\|_\infty$$

elde edilir.

Böylece bu lemmanın ispatında [9, s.675] Lemma VIII 6.5' teki gibi $f \in L_1$, $f \geq 0$ ve T'nin pozitif bir operatör olduğu düşünülebilir. Bu taktirde bu lemmanın ispatı, [9, s.675] Lemma VIII 6.5' in ispatı ile aynı olur. □

Teorem 3.2.6. [14] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir $\sigma-$sonlu ölçü uzayı ve T de L_1'de $\|T\|_\infty \leq 1$ ve $\|T\|_1 \leq 1$ olacak şekilde bir lineer operatör olsun. Eğer $B = [b_{nj}](n, j \in \mathbb{N})$ bir olasılıksal kuvvetli regüler matris ise bu taktirde $1 < p < \infty$ şartını sağlayan her p ve her $f \in L_p$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}(T^j(x)) \tag{3.2.32}$$

limiti hemen hemen her $x \in X$ için mevcuttur ve limit fonksiyonu B matrisine ($\mu-$h. her yerde) bağlı değildir.

İspat. $\|T\|_\infty \leq 1$ ve $\|T\|_1 \leq 1$ olduğundan Riesz'in konvekslik teoreminin [9, s.526] sonucuna göre $1 < p < \infty$ şartını sağlayan her p için $\|T\|_p \leq 1$ olur. $1 < p < \infty$ şartını sağlayan her p için L_p uzayı yansımalıdır [9, s.288]. Böylece B matrisi bir olasılıksal matris olduğundan

$$\| \; T_n f\|_p = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j f \right\|_p \leq \|f\|_p$$

elde edilir. Her $f \in L_p$ için $\{T_n f : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi L_p' de sınırlı olduğundan ve [9, s.68] den bu kümenin zayıf dizisel kompakt olduğu görülür. B kuvvetli regüler bir matris olduğundan Teorem 3.2.3 ve [14]' deki Sonuç 1' den $(T_n, n \in \mathbb{N})$ operatörler dizisinin B' ye bağlı olmayan $T_0 : L_p \to L_p$ sınırlı lineer operatörüne kuvvetli yakınsadığı sonucuna ulaşılır. T' nin bütün sabit noktaları $\{f \in L_p : Tf = f\}$ alt uzayı üzerinde bir izdüşümdür. [14]' deki Sonuç 1' den f^*, $g \in L_p$, $Tf^* = f^*$ ve g sınırlı olmak üzere $h = f^* + (I - Tg)$ vektörleri L_p de yoğundur. Dahası f^* vektörü h ile tek olarak tanımlıdır. Böyle h gibi vektörler için

$$T_n h = f^* + b_{n1} T g + \sum_{j=1}^{\infty} (b_{n,j+1} - b_{nj}) T^{j+1} g$$

ve bundan dolayı da

$$\|T_n h - f^*\|_\infty \leq \left(b_{n1} + \sum_{j=1}^{\infty} |b_{n,j+1} - b_{nj}| \right) \|g\|_\infty$$

yazılabilir. B kuvvetli regüler matris olduğundan L_p' deki yoğun kümelerdeki bütün h' ler için

$$\|T_n h - f^*\|_\infty \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$$

ve buradan da μ ye göre düzgün olarak

$$T_n h \longrightarrow f^* \ (n \to \infty)$$

olduğu görülür. Lemma 3.2.2' den her $f \in L_p$ için

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |(T_n f)(x)| < \infty \text{ , h. her yerde}$$

olur. Böylece [9, s.332] Teorem IV.112' den her $f \in L_p$ için $\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j f$ hemen her yerde yakınsaktır. $f^* \in N(I-T)$ için $Tf^* = f^*$ buluruz ve buradan da

$$T^j f^* = f^* \ (j \in \mathbb{N}) \Longrightarrow T_n f^* = \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} \right) f^* = f^* \ (n \in \mathbb{N})$$

ve L_p' de, $T_n f^* \longrightarrow T_0 f^*$ $(n \to \infty)$ sonucu elde edilir. Diğer taraftan $T_0 = T_0 T$ ve 3.2.6'dan

$$T_n h = T_n f^* + T_n(g - Tg) \longrightarrow^{L_p \ de} T_0 f^* + T_0 g - T_0 T g = T_0 f^* = f^*$$

bulunur. Buradan 3.2.32' deki limit fonksiyonunun olasılıksal kuvvetli regüler B matrisine (μ-h. her yerde) bağlı olmadığı görülür. L_p, L_1' de yoğun olduğundan her $f \in L_1$ için $\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j f$ dizisinin (μ-h. her yerde) yakınsadığı Lemma 3.2.2 ve [9] daki Teorem IV.11.2 den anlaşılır. □

Sonuç 3.2.2. [14] T, bir $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-sonlu ölçü uzayının herhangi bir ölçü koruyan bir dönüşümü ve $B = [b_{nj}]$ $(n, j \in \mathbb{N})$ de olasılıksal kuvvetli regüler bir matris olsun. Bu taktirde her $f \in L_1$ için

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} f \circ T^{j-1} = f^* \quad \mu - \text{h. her yerde} \tag{3.2.33}$$

olacak şekilde bir $f^* \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ vardır. Dahası f^* fonksiyonu B matrisine (μ-h. her yerde) bağlı değildir ve buradan $\|f^*\|_1 \leq \|f\|_1$ olur. Eğer T ergodik ise bu taktirde f^*, bazı sabit c sayılarına (μ-h. her yerde) eşit olur.

İspat. $f \in L_1$ için $Uf := f \circ T$ alalım. Bu taktirde $U : L_1 \to L_1$, L_1 üzerinde pozitif bir büzülmedir. Görüntü koruyan teoremi yardımıyla $f \in L_1$ için

$$\|Uf\|_1 = \int_X |f \circ T| d\mu = \int_X |f| d(\mu \circ T^{-1}) = \int_X |f| d\mu = \|f\|_1$$

elde edilir. Buradan da $f \in L_1$ ve $j \in \mathbb{N}$ için $U^j f = f \circ T^j$ bulunur. T, bir ölçü koruyan dönüşüm olduğundan $\|U\|_\infty \leq 1$ eşitsizliğine ulaşılır. Teorem 3.2.6' yı gözönünde bulundurarak hemen hemen her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}(U^{j-1}f)(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} f(T^{j-1}x) = f^*(x)$$

limitinin mevcut olduğu görülür. Üstelik bu f^* limitleme fonksiyonu B matrisine (μ-h. her yerde) bağlı değildir. Bundan dolayı eğer $(f \circ T^{n-1}, n \in \mathbb{N})$ dizisinin bilinen Cesàro (C,1) toplamı alınırsa aynı f^* limiti elde edilir. Kalan kısım Bikhoff'un Noktasal Ergodik Teoreminden anlaşılır [8]. □

Teorem 3.2.7. Z, reel ya da kompleks Banach uzayı, T, Z üzerinde bir kuvvetli sınırlı lineer operatör ve $B = [b_{nj}](n, j \in \mathbb{N})$ kuvvetli regüler bir matris olsun. Bu taktirde aşağıdaki şartlar denktir:

(i) Düzgün operatör topolojisinde $n \to \infty$ için,

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j - R \right\| \longrightarrow 0$$

olacak şekilde bir R sınırlı lineer operatörü vardır.

(ii) $(I - T)Z$ kapalı ve $Z = \{z : Tz = z\} \oplus (I - T)Z$ dir.

(iii) $(I - T)^2 Z$ kapalıdır.

(iv) $(I - T)Z$ kapalıdır.

İspat. (i)⇒(ii): $Y = \overline{((I - T)Z)}$ olsun. Bu teoremin şartlarından ve [13]' deki Teorem 5' ten R operatörünün B kuvvetli regüler matrisine bağlı olmadığı görülür. Bu taktirde Sonuç 3.2.1 deki (3.2.6), (3.2.7) ve (3.2.8) den $R^2 = R = RT = TR$, $RZ = \{z : Tz = z\}$ ve $Z = Y \oplus RZ$ elde edilir. Y, T altında invaryanttır ve [13]' deki Teorem 3' ten $S = T|Y$ kısıtlaması için

$$\lim_n \left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} S^j \right\| = 0$$

bulunur ve $\left\|\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} S^j\right\| < 1$ olur. $I - \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} S^j$ ve $I - S$ dönüşümlerinin tersleri mevcut olduğundan,

$$Y = (I - S)Y = (I - T)Y \subset (I - T)Z$$

olduğu görülür ki bu da $Y = (I - T)Z$ olması demektir.

(ii)⇒(iii) : $Y = (I - T)Z$ ve $(I - T)^2 Z \subset Y$ olduğu biliniyor. Şimdi bir $y \in Y$ alınsın. Bu taktirde $y = (I - T)z$ olur. $Tz_0 = z_0$ ve $z_1 \in Y$ için $z = z_0 + z_1$ olduğundan

$$y = (I - T)z = (I - T)z_1 \in (I - T)Y = (I - T)^2 Z$$

bulunur ve böylece $(I - T)^2 Z = Y$ kapalıdır.

(iii)⇒(iv) : (iii)' den $(I - T)Y = (I - T)^2 Z$ olduğu kolayca görülebilir. $S = T|Y$ kısıtlaması ve $y \in (I - T)Z$ için

$$\lim_n \left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} S^j y \right\| = 0$$

eşitliği sağlanır ve buradan

$$(I - T)Z \subset \overline{((I - S)Y)} = (I - S)Y = (I - T)^2 Z$$

olduğu sonucuna varılır.

(iv)⇒(i) : Açık dönüşüm teoreminden $y \in (I - T)Z = Y$ için $(I - T)z = y$ ve $\|z\| \leq K\|y\|$ olacak şekilde bir $z \in Z$ ve $K > 0$ sabiti vardır [9, s.487]. Böylece, $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$ olmak üzere $y \in Y$ için

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} T^j y \right\| &= \left\| b_{n1} T z + \sum_{j=1}^{\infty} |b_{n,j+1} - b_{nj}| \right\| \\
&\leq KM\|y\| \left(|b_{n1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |b_{n,j+1} - b_{nj}| \right)
\end{aligned}$$

bulunur. B, kuvvetli regüler matris olduğundan $n \to \infty$ ve T' nin Y' ye kısıtlaması olan S için

$$\lim_n \left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} S^j \right\| = 0$$

olduğu kolayca görülür. (i)$\Rightarrow$(ii) ispatından $(I-T)$, Y üzerinde terse sahiptir ve $(I-T)Z = Y = (I-S)Y = (I-T)Y = (I-T)^2 Z$ olur. Böylece $z \in Z$ için $(I-T)z = (I-T)y$ olacak şekilde $y \in Y$ vardır. Bu yüzden $z = (z-y)+y$ ve $Z = \{z : Tz = z\} \oplus (I-T)Z$ olur. Bu da bize $\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}T^j, n \in \mathbb{N}\right)$ dizisinin kuvvetli yakınsak olduğunu gösterir. $E = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}T^j$, $\{z : Tz = z\}$ alt uzayı üzerinde bir sınırlı izdüşümdür ve onun kapalı olan sıfır uzayı $(I-T)$ dir. $(I-T)$ nin, Y üzerinde tersi olduğundan (i) sağlanır. $\square$

KAYNAKLAR

[1] R. B. ASH, *Real Analysis and Probability*, Academic Press, New York (1972).

[2] M. BALCI, *Reel Analiz*, Ankara (1998).

[3] M. BAYRAKTAR, *Fonksiyonel Analiz*, Erzurum (1994).

[4] L. W. COHEN, *On the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. **(3)**(1940), 41, 505-509.

[5] B. CHOUDHARY, S. NANDA, *Functional Analysis with Applications*, John wiley-Sons, New York (1989).

[6] D. COHN, *Measure Theory*, Birkhöuser, Boston (1980).

[7] H. ÇAKALLI, *Genel Topolojiye Giris*, İstanbul (1997).

[8] R. M. DUDLEY, *Real Analysis and Probability*, Wadsword. Inc. Belmont. California (1989).

[9] N. DUNFORD, J. SCHWARTZ, *Linear Operators. Part I*, Intersc. Publish. Inc. Newyork (1958).

[10] P. R. HALMOS, *Lectures on Ergodic Theory*, Chelsea, Publishing, (1953).

[11] A. M. GARCİA, *Topics in Almost Ewerywhere Convergence*, Lectures in Advanced Mathematics 4, Markham publishing Company. (1970).

[12] C. JARDAS, N. SARAPA, *A Summability Method in Some Strong Laws of Large Numbers*, Mathematical Communications, **2**(1997),107-124.

[13] C. JARDAS, N. SARAPA, *On some generalizations of classical ergodic type theorems*, Grazer Mathematische Berichte. 323 (1994), 51-62.

[14] C. JARDAS, N. SARAPA, *On Summability method in some ergodic type theorems*, Exploring Stochastic Laws. (1995), 153-165.

[15] U. KRENGEL, *Ergodic Theorems*, Walter de Gruyter & Co. Berlin, (1985).

[16] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley-Sons, New York, (1978).

[17] G. G. LORENTZ, *A Contribution to the Theory of Divergent Sequences*, Acta Mathematica, **80**(1948),167-190.

[18] I. J. MADDOX, *Elements of Functional Analysis* Cambridge Univercity Press, Cambridge, 1970.

[19] B. MUSAYEV, M. ALP, *Fonksiyonel Analiz*, Kütahya (2000).

[20] G. M. PETERSON, *Regular Matrix Transformations*, Mc.Graw-hill. London, 1966.

[21] A. P. ROBERTSON, W. J. ROBERTSON, *Topological Vektor Spaces*, Cambridge Univ. Press, New York, 1964.

[22] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. **9**(3)(2004), 409-416.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Malatya' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya' da tamamladı. 2002 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı ve 2007 yılında bu bölümden mezun oldu. 2007-2008 Eğitim-Öğretim yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2008 yılından bu yana Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir orta öğretim kurumunda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.