

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bahadır YÜZBAŞI

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

HAZİRAN - 2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bahadır YÜZBAŞI

(08121107)

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8 Haziran 2010

HAZİRAN - 2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bahadır YÜZBAŞI

(08121107)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8 Haziran 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 25 Haziran 2010

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü)

: Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

HAZİRAN - 2010

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımnda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarımı esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Rifat ÇOLAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Bahadır YÜZBAŞI

ELAZIĞ - 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	4
3.1. İstatistiksel Yakınsaklık	4
3.2. Kuvvetli p-Cesàro Toplanabilme	8
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	11
4.1. α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık	11
4.2. α . Dereceden Kuvvetli p-Cesàro Toplanabilme	13
5. α . DERECEDEN İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI	18
5.1. α . Dereceden İstatistiksel Değme Noktası ve Sınırlılık	18
5.2. α . Dereceden İstatistiksel Üst Limit ve Alt Limit	18
6. SONUÇ	22
KAYNAKLAR.....	23
ÖZGEÇMİŞ.....	25

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; konunun tarihi geçmişi verilmiştir.

İkinci bölümde; bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli p-Cesàro toplanabilme kavramları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ile α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilme kavramları verilmiş, bu kavramlar karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde; α . dereceden istatistiksel değme noktaları ve sınırlılık ile α . dereceden istatistiksel üst ve alt limit kavramları verilmiş olup, bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Anahtar Kelimeler : İstatistiksel Yakınsaklık, Kuvvetli p-Cesàro Toplanabilme, α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık.

SUMMARY

Generalized Statistical Convergence

This study is prepared as five chapter.

In the first chapter; historical background of the subject is given.

In the second chapter; some fundamental definitions and theorems are given.

In the third chapter; the concepts of statistically convergence and strong p-Cesàro convergence are examined.

In the fourth chapter; the ideas of statistical convergence and strong p-Cesàro convergence of order α are given and then this concepts are compared.

In the fifth chapter; the notions of statistical cluster points and boundedness of order α and the concepts of statistical limit superior and limit inferior of order α are given. This chapter is an original part of the thesis.

Key Words : Statistically Convergence, Strong p-Cesàro Convergence, Statistical Convergence of order α .

SEMBOLLER LİSTESİ

c	:	Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	:	Kompleks terimli sifıra yakınsak diziler uzayı
\mathbb{C}	:	Kompleks sayılar cümlesi
$\delta(K)$:	K nın doğal yoğunluğu
$\delta_\alpha(K)$:	K nın α – yoğunluğu
$h.h.k$:	hemen hemen her k
$h.h.k(\alpha)$:	α 'ya göre hemen hemen her k
ℓ_∞	:	Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
\mathbb{N}	:	Doğal sayılar cümlesi
\mathbb{R}	:	Reel sayılar cümlesi
S	:	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_0	:	İstatistiksel sifır dizilerin uzayı
S^α	:	α . Dereceden istatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_0^α	:	α . Dereceden sifıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$s - \lim x_k$:	$x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel limiti
$s^\alpha - \lim x_k$:	$x = (x_k)$ dizisinin α . dereceden istatistiksel limiti
w	:	Bütün reel ve kompleks terimli diziler uzayı
w_p	:	Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir diziler uzayı
w_p^α	:	α . Dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir diziler uzayı
w_{op}^α	:	Sifıra yakınsak α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir diziler uzayı

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık düşüncesi ilk kez 1935 yılında Zygmund'un [1] kendi monografisinin Varşovada basılan ilk baskısında verildi. İstatistiksel yakınsaklığın tanımı Steinhaus [2] ve Fast [3] tarafından verildi ve sonra bağımsız olarak Schoenberg [4] tarafından yenilendi. Yıllardır farklı isimler altında istatistiksel yakınsaklık Fourier Analiz teoresinde, ergodic teoride, sayılar teorisinde, ölçüm teorisinde, trigonometrik serilerde ve Banach uzaylarında kullanılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık daha sonraları dizi uzayı bakış açısından araştırıldı ve Fridy [5], Conner [6], Savaş [7], Mursaleen [8], Fridy ve Orhan [9], Móricz [10], Rath ve Tripathy [11], Salat [12], Bhardwaj [13], Çolak [14] ve daha birçok kişi tarafından çalışıldı. Derece dahil edilerek, bir dizinin α . dereceden istatistiksel yakınsaklığı Gadjiev ve Orhan [15] tarafından verildi. Daha sonra bir dizinin α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilirliği Çolak [14] tarafından tanımlandı ve α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ile birlikte çalışıldı.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $X \neq \phi$ bir cümle ve K kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzay (lineer uzay) adı verilir. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in K$ için

$$L1) x + y = y + x$$

$$L2) (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$L3) x + \theta = x \text{ olacak şekilde sıfır vektörü adı verilen bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$L4) \text{ Herbir } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \in X \text{ vardır.}$$

$$L5) 1 \cdot x = x$$

$$L6) \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$L7) (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$L8) \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \text{ dır [16].}$$

Tanım 2.2. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \text{ } (\alpha \text{ skaler})$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ dır [17].}$$

Tanım 2.3. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 2.4. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ da X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_o$ iken

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [17].

Tanım 2.5. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ da X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_o$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsak ise $\lim_n x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde ifade edilir [17].

Tanım 2.6. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı denir [17].

Tanım 2.7. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \rightarrow C, \quad \tau_k(x) = x_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X 'e bir BK (Banach Coordinatewise)-uzayı denir [18].

Tanım 2.8. Kompleks terimli tüm $x = (x_k)$, $(k = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin cümlesini ω ile göstereceğiz. ω , $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. ω 'nın her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir.

Bu çalışmamızda kullanacağımız

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_o = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır diziler uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk kez 1935 yılında Zygmund'un [1] kendi monografisinin Varşovada basılan ilk baskısında verildi. Daha sonra 1951 yılında H. Fast tarafından tanımlandı. Günümüze kadar bir çok matematikçi tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı çalışılmış ve halen de çalışmalar devam etmektedir.

Bu bölümde bir cümleinin doğal yoğunluğu kavramı açıklanıp, bu kavram yardımı ile istatistiksel yakınsaklık tanımlanacaktır. Aslında istatistiksel yakınsaklık adi yakınsaklığın bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Adi yakınsaklıkta bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisi ℓ 'ye yakınsak ise ℓ 'nin her bir ε komşuluğunun içinde dizinin sonsuz sayıda ancak komşuluğun dışında sonlu sayıda elemanı kalabilir. İstatistiksel yakınsaklıkta ise; ℓ noktasının her bir ε komşuluğunun dışında kalan terimlerin sayısı sonsuz çoklukta olabilir, ancak bu terimlerin sayılarının kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır.

3.1. İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1. \mathbb{N} doğal sayılar cümlesinin bir A alt cümlesinin doğal yoğunluğu, $|\{k \leq n : k \in A\}|$ ifadesi n den büyük olmayan $A \subseteq \mathbb{N}$ cümlesinin elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta(A) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

ile tanımlanır. \mathbb{N} doğal sayılar cümlesinin herhangi bir sonlu alt cümlesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu açıktır ve $A^c = \mathbb{N} - A$ olmak üzere $\delta(A^c) = 1 - \delta(A)$ dır [5].

Bir cümleinin doğal yoğunluğu daha kolay bir yolla şu şekilde bulunabilir. (a_n) pozitif tam sayıların artan bir dizisi olsun. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $A \subset \mathbb{N}$ alt cümlesinin doğal yoğunluğu mevcut ise

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n}$$

dir [19]. Örnek olarak $A = \{n^3 : n \in \mathbb{N}\}$ cümlesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3} = 0$$

olarak elde edilir.

$A_1 = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ cümlesi için $\delta(A_1) = \frac{1}{2}$ olduğu da aynı yolla hemen elde edilir.

Burada özellikle doğal yoğunluğu sıfır olan cümleler ile ilgileneceğiz. Ayrıca, eğer $x = (x_k)$, doğal yoğunluğu sıfır olan bir cümle hariç her k için P özelliğini sağlayacak şekilde olan bir dizi ise, x_k "hemen hemen her k " için P 'yi sağlar deriz, ve bunu kısaca "h.h.k" şeklinde yazarız.

Tanım 3.1.2. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise yani h.h.k için

$$|x_k - L| < \varepsilon$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $s - \lim x_k = L$ yazılır. Eğer $L = 0$ ise yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n; |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel sıfır dizisidir denir. Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S ile ve tüm istatistiksel sıfır dizilerinin cümlesi S_0 ile gösterilir [5].

Ayrıca Buck bir dizinin hemen hemen her n için yakınsak olması kavramını aşağıdaki gibi verdi:

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$, $n \notin A$ olduğunda $|x_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ var olmak üzere $\delta(A) = 0$ şartını sağlayan bir $A \subseteq \mathbb{N}$, cümlesi varsa, hemen hemen her n için $x = (x_n)$ dizisi L 'ye yakınsaktır denir.

Eğer bir dizi hemen hemen her n için L 'ye yakınsak ise o zaman dizi L 'ye istatistiksel yakınsaktır [20].

Örnek 3.1.3. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise } m = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise } m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

ile tanımlansın. $|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} = 0$$

elde edilir. Açıkça görüldüğü gibi $s - \lim x_k = 0$ olur.

Örnek 3.1.4. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise } m = 1, 2, 3, \dots \\ 4, & k \neq m^2 \text{ ise } m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

ile tanımlansın. Yukarıda Buck'ın yaptığı tanıma göre: $\delta(\{k \leq n : k = m^2\}) = 0$ olduğundan $x = (x_k)$ dizisi hemen hemen her n için 4'e yakınsaktır. Bu durumda $s - \lim x_k = 4$ olur.

Tanım 3.1.5. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani h.h.k için

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [5].

Teorem 3.1.6. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) $x = (x_k)$ istatistiksel yakınsak dizidir,
- ii) $x = (x_k)$ istatistiksel Cauchy dizisidir,
- iii) h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır [5].

İspat. (i)'nin (ii)'yi gerektirdiğini ispatlamak için aşına olduğumuz "yakınsak her dizi aynı zamanda bir Cauchy dizisidir" teoreminin ispat metodunu kullanabiliriz. $s - \lim x_k = L$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman h.h.k için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve eğer N , $|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse o zaman h.h.k için

$$\begin{aligned} |x_k - x_N| &\leq |x_k - L| + |L - x_N| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olduğunu verir.

(ii) sağlansın, yani $x = (x_k)$ bir istatistiksel Cauchy dizisi olsun. N doğal sayısını öyle seçelim ki $I = (x_N - 1, x_N + 1)$ aralığı h.h.k için x_k 'yi içersin. Aynı şekilde M doğal sayısını öyle seçelim ki $I' = (x_M - \frac{1}{2}, x_M + \frac{1}{2})$ aralığı h.h.k için x_k 'yi içersin. İddia ediyoruz ki

$$I_1 = I \cap I'$$

h.h.k için x_k 'yi içerir; çünkü,

$$\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\} = \{k \leq n : x_k \notin I\} \cup \{k \leq n : x_k \notin I'\}$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I'\}| = 0$$

dır.

Bu nedenle I_1 , uzunluğu küçük veya eşit 1 olan ve h.h.k. için x_k 'yi içeren kapalı bir aralıktır. Şimdi $I'' = (x_{N(2)} - \frac{1}{4}, x_{N(2)} + \frac{1}{4})$ aralığı h.h.k için x_k yi içerecek biçimde $N(2)$ 'yi seçerek devam edelim. Yukarıdaki tartışma $I_2 = I_1 \cap I''$ aralığının h.h.k için x_k yi içerdiğini ve I_2 aralığının uzunluğu küçük veya eşit $\frac{1}{2}$ olduğunu verir. Bu yolla devam ederek her m için, $I_m \supseteq I_{m+1}$, I_m 'nin uzunluğu 2^{1-m} 'den daha büyük olmayacak ve h.h.k için $x_k \in I_m$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini elde ederiz. İççe Aralıklar Teoremi gereğince $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\lambda\}$ olacak şekilde bir λ sayısı vardır. h.h.k için $x_k \in I_m$ gerçeğini kullanarak her $n > T_m$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m} \quad (3.1.6)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini seçebiliriz. Şimdi $x = (x_k)$ dizisinin, $k > T_1$ ve

$$T_m < k \leq T_{m+1} \text{ ise } x_k \notin I_m$$

olacak şekilde bütün x_k terimlerinden oluşan bir $z = (z_k)$ alt dizisini tanımlayalım.

Sonra $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} \lambda, & \text{eğer } x_k, z = (z_k) \text{ nin bir terimi ise,} \\ x_k, & \text{diğer hallerde,} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. O zaman $\lim y_k = \lambda$ dır; çünkü, eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise ya $x_k, y_k = \lambda$ demek olan z 'nin bir terimidir ya da $y_k = x_k \in I_m$ ve $|y_k - \lambda| \leq I_m$ nin uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ dir. Ayrıca h.h.k için $x_k = y_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için eğer $T_m < n < T_{m+1}$ ise o zaman $\{k \leq n : y_k \neq x_k\} \subset \{k \leq n : x_k \notin I_m\}$ dolayısıyla (3.1.6) gereğince

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : y_k \neq x_k\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$$

dir. Böylece $n \rightarrow \infty$ için limit 0 dır ve h.h.k için $x_k = y_k$ dır. Bu nedenle (ii), (iii)'ü gerektirir.

(iii) Son olarak, (iii)'ün sağlandığını, h.h.k için $x_k = y_k$ ve $\lim y_k = L$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ varsayalım. Bu durumda her n için

$$\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n : x_k \neq y_k\} \cup \{k \leq n : |y_k - L| > \varepsilon\}$$

dır. Çünkü $\lim y_k = L$ olduğundan, son cümle belli bir sabit sayıda doğal sayı içerir, bunu $l = l(\varepsilon)$ ile gösterelim. Bu nedenle

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq y_k\}| + \lim_n \frac{l}{n} = 0$$

dır. Çünkü h.h.k için $x_k = y_k$ dır. Böylece h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ elde edilir, dolayısıyla (i) sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

3.2. Kuvvetli p-Cesàro Toplanabilme

Bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli p-Cesàro toplanabilirliğinin tanımları literatürde birbirinden bağımsız olarak verilmiş ve onların ilk ifadelerinden beri birbirinden farklı gelişme yolu izlemiştir. Fakat yapılan araştırmalarda iki kavramın birbiriyle ilişkili olduğu ve sınırlı diziler için bu kavramların denk olduğu sonucu ortaya çıktı.

Tanım 3.2.1. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde kompleks bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L 'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir denir. Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi w_p ile gösterilir. O halde, $p > 0$ için

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

dır [6].

Teorem 3.2.2. $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir dizi L 'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilirse o zaman bu dizi L 'ye istatistiksel yakınsaktır. Eğer sınırlı bir dizi L 'ye istatistiksel yakınsak ise o zaman bu dizi L 'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir [6].

İspat. Herhangi bir $x = (x_k) \in w$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k=1}^n |x_k - L|^p \geq |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^p$$

yazılabilir. Buradan, eğer $x = (x_k)$ dizisi L 'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilirse o zaman $x = (x_k)$ dizisinin L 'ye istatistiksel yakınsak olduğu çıkar.

Şimdi $x = (x_k)$ dizisinin sınırlı ve L 'ye istatistiksel yakınsak olduğunu varsayalım ve $K = \|x\|_\infty + |L|$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım ve her $n > N_\varepsilon$ için

$$n^{-1} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq (\varepsilon/2)^{1/p}\}| < \varepsilon/2K^p$$

olacak şekilde N_ε doğal sayısını seçelim. $L_n = \{k \leq n : |x_k - L| \geq (\varepsilon/2)^{1/p}\}$ olsun. Şimdi, $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k \in L_n} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \notin L_n \\ k \leq n}} |x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(n \frac{\varepsilon}{2K^p} \right) K^p + \frac{1}{n} (n) \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $x = (x_k)$ dizisinin L 'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olduğu hemen çıkar.

Aşağıdaki sonuç Maddox'un bir sonucunun bir genelleştirmesidir.

Sonuç 3.2.3. $p, q \in \mathbb{R}, 0 \leq p < q < \infty$ olsun. O zaman $w_p \supseteq w_q$ ve $w_p \cap \ell_\infty = w_q \cap \ell_\infty$ dir [6].

p ve q 'nin pozitif değerleri için, hem $w_p \supseteq w_q$ kapsaması, (Hölder Eşitsizliğinin doğrudan bir sonucu olarak) hem de $w_p \cap \ell_\infty = w_q \cap \ell_\infty$ eşitliği zaten kanıtlanmıştır. Teorem 3.2.2 bu sonuçları $p = 0$ ve $q > 0$ olması durumunda genişletir.

Teorem 3.2.4. (Ayrışma Teoremi) Eğer $x = (x_k)$ dizisi L 'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir veya istatistiksel yakınsak ise o zaman $y = (y_k)$ nin limiti L , $x = y + z$ ve $\lim_n n^{-1} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| = 0$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi ve sıfıra istatistiksel yakınsak bir $z = (z_k)$ dizisi vardır. Dahası, eğer $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ise o zaman $z = (z_k)$ dizisi de sınırlıdır ve $\|z\|_\infty < \|x\|_\infty + |L|$ dir [6].

İspat. İlk olarak x 'in L 'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olması halinde x 'in L 'ye istatistiksel yakınsak olduğunu göstereceğiz. Şimdi $N_0 = 0$ olsun ve $N_1 < N_2 < N_3 < \dots$ tamsayıların pozitif artan bir dizisini seçelim öyle ki eğer $n > N_j$ ise

$$n^{-1} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq j^{-1}\}| < j^{-1}$$

elde ederiz. Aşağıdaki gibi y ve z 'yi tanımlayalım:

Eğer $N_0 < K \leq N_1$ ise $z_k = 0$ ve $y_k = x_k$ olsun. Şimdi $j \geq 1$ ve $N_j < k \leq N_{j+1}$ varsayalım. Eğer $|x_k - L| < j^{-1}$ ise $z_k = 0$ ve $y_k = x_k$ elde ederiz ve eğer $|x_k - L| \geq j^{-1}$ ise $y_k = L$ ve $z_k = x_k - L$ elde ederiz. Bu yapımızdan açıktır ki $x = y + z$ ve eğer x sınırlı ise $\|z\|_\infty < \|x\|_\infty + |L|$ olduğu açıktır.

İddia ediyoruz ki $\lim y_k = L$ dir. $\varepsilon > 0$ olsun ve $\varepsilon > j^{-1}$ olacak şekilde j 'yi seçelim. $k > N_j$ için incelersek eğer $|x_k - L| < j^{-1}$ ise $|y_k - L| = |x_k - L|$ olduğundan $|y_k - L| < \varepsilon$ elde ederiz

ve eğer $|x_k - L| > j^{-1}$ ise $|y_k - L| = |L - L| = 0$ elde ederiz. ε keyfi olduğundan iddiamız kanıtlanmış olur.

Sonra, z 'nin istatistiksel sıfır dizisi olduğunu iddia ediyoruz. İlk olarak belirtelim ki iddiamızı ispatlamak için $\lim_n n^{-1} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir n doğal sayısı ve $\varepsilon > 0$ için $|\{k \leq n : z_k \neq 0\}| \geq |\{k \leq n : |z_k| \geq \varepsilon\}|$ eşitsizliğinden istenilen sağlanır.

Şimdi eğer $j^{-1} < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ ise o zaman tüm $n > N_j$ ler için $|\{k \leq n : z_k \neq 0\}| < \delta$ olduğunu gösterelim. Yapıdan hatırlarsak, $N_j < k \leq N_{j+1}$ olması durumunda sadece eğer $|x_k - L| > j^{-1}$ ise $z_k \neq 0$ dir. Eğer $N_\ell < k \leq N_{\ell+1}$ ise o zaman $\{k \leq n : z_k \neq 0\} \subseteq \{k \leq n : |x_k - L| > \ell^{-1}\}$ sağlanır.

Sonuç olarak, eğer $N_\ell < n \leq N_{\ell+1}$ ve $\ell > j$ ise o zaman

$$n^{-1} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| \leq n^{-1} |\{k \leq n : |x_k - L| > \ell^{-1}\}| < \ell^{-1} < j^{-1} < \delta$$

olur ki bu da iddiamızı ve böylece teoremi ispatlar.

Aşağıdaki sonuç yukarıdaki teoremden hemen çıkar.

Sonuç 3.2.5. $x = (x_k) \in w$ olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi, L 'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir veya L 'ye istatistiksel yakınsak ise o zaman $x = (x_k)$ dizisinin L 'ye yakınsayan bir alt dizisi vardır [6].

Yukarıdaki sonuç istatistiksel yakınsak olmayan sınırlı Cesàro toplanabilir bir dizinin varlığını göstermek için kullanılabilir. Örneğin, $(0, 1, 0, 1, \dots)$ dizisi $1/2$ 'ye Cesàro toplanabilirdir, fakat bu dizinin $1/2$ 'ye yakınsayan herhangi bir alt dizisi yoktur ve böylece dizi istatistiksel yakınsak olamaz.

Önerme 3.2.6. $x = (x_k) \in w$ olsun. Eğer $\liminf x_n = L$ ve $x = (x_k)$ dizisi, L 'ye Cesàro toplanabilirse $x = (x_k)$ dizisi, L 'ye istatistiksel yakınsaktır [6].

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık tanımına, Çolak [14] tarafından çalışılan, derece dahil edilerek α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ve α . dereceden kuvvetli p-Cesáro kavramları ve ilişkili sonuçlar verilecektir.

4.1. α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.1.1. $E \subset \mathbb{N}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α olsun. Limit var olmak üzere ve $|\{k \leq n : k \in E\}|$, E kümesinin n 'den büyük olmayan bütün elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta_\alpha(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

sayısına E alt cümlesinin α – yoğunluğu denir [14].

Şimdi, aşağıdaki notasyonları tanımlayalım: eğer $x = (x_k)$, α – yoğunluğu sıfır olan cümle hariç her k için $P(k)$ özelliğini sağlayacak şekilde bir dizi ise o zaman x_k " α 'ya göre hemen hemen her k " için $P(k)$ özelliğini sağlar denir ve bunu kısaca " $h.h.k(\alpha)$ " yazarak göstereceğiz.

\mathbb{N} doğal sayılar kümesinin herhangi bir sonlu alt cümlesi sıfır α – yoğunluğa sahiptir. $\delta_\alpha(E^c) = 1 - \delta_\alpha(E)$ eşitliği genelde $0 < \alpha < 1$ için sağlanmaz, ancak eğer $\alpha = 1$ ise bu eşitlik sağlanır. Herhangi bir $E \subset \mathbb{N}$ cümlesinin α – yoğunluğu, $\alpha = 1$ durumunda cümlenin doğal yoğunluğuna indirgenir.

Lemma 4.1.2. $E \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise o zaman $\delta_\beta(E) \leq \delta_\alpha(E)$ dir [14].

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n^\alpha \leq n^\beta$ ve bu nedenle $\frac{1}{n^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ olduğundan,

$$\frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : k \in E\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikten $\delta_\beta(E) \leq \delta_\alpha(E)$ elde ederiz.

Şimdi $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. O zaman Lemma 4.1.2'den eğer E sıfır α – yoğunluğuna sahipse o zaman E sıfır β – yoğunluğuna sahiptir; ve eğer en az bir $0 < \alpha \leq 1$ için sıfır α – yoğunluğuna sahipse, o zaman sıfır doğal yoğunluğa sahiptir.

Tanım 4.1.3. $x = (x_k) \in w$ olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ verilsin. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde kompleks bir ℓ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi ℓ 'ye α . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bir başka ifadeyle her $\varepsilon > 0$ ve h.h.k(α) için $|x_k - \ell| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi ℓ 'ye α . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bunu $s^\alpha - \lim x_k = \ell$ şeklinde yazabiliriz [14].

α . dereceden tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S^α ile gösterilecektir. α . dereceden tüm istatistiksel sıfır dizilerin cümlesini göstermek için S_0^α yazacağız. Her $0 < \alpha \leq 1$ için $S_0^\alpha \subset S_0$ olduğu açıktır. α . dereceden istatistiksel yakınsaklık $\alpha = 1$ için istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır. $0 < \alpha \leq 1$ için α . dereceden istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlıdır. Fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunun için $x = (x_k)$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n, n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & k \neq 2n, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Bu durumda hem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

hem de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

dir. Buna göre $\alpha > 1$ için $x = (x_k)$ dizisi hem 0'a hem de 1'e α . dereceden istatistiksel yakınsak, yani $s^\alpha - \lim x_k = 1$ ve $s^\alpha - \lim x_k = 0$ dir. Fakat bu mümkün değildir.

Teorem 4.1.4. $0 < \alpha \leq 1$ ve $x = (x_k), y = (y_k)$ kompleks terimli iki sayı dizisi olsun.

i) Eğer $s^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise o zaman $s^\alpha - \lim cx_k = cx_0$ dir.

ii) Eğer $s^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $s^\alpha - \lim y_k = y_0$ ise o zaman $s^\alpha - \lim (x_k + y_k) = x_0 + y_0$ dir

[14].

İspat. $c = 0$ durumunda i) açıktır. Varsayalım ki $c \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |cx_k - cx_0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right|$$

eşitsizliğinden i)'nin ve

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k + y_k - (x_0 + y_0)| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ &+ \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |y_k - y_0| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden ii)'nin ispatı çıkar.

Her yakınsak dizinin α . dereceden istatistiksel yakınsak olduğunu göstermek kolaydır, yani her $0 < \alpha \leq 1$ için $c \in S^\alpha$ dır. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^3 \text{ ise} \\ 0, & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.1.4)$$

ile tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $\alpha > \frac{1}{3}$ iken $s^\alpha - \lim x_k = 0$ olduğundan α . dereceden istatistiksel yakınsaktır, fakat bu dizi yakınsak değildir.

Yukarıdaki teoremden S^α cümlesi bir vektör uzayıdır.

4.2. α . Dereceden Kuvvetli p-Cesàro Toplanabilme

Tanım 4.2.1. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p = 0$$

olacak şekilde kompleks bir ℓ sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisine α . dereceden kuvvetli p - Cesàro toplanabilir denir. Bu durumda $x = (x_k)$ dizisine, ℓ 'ye α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir denir. $\alpha = 1$ için α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik, kuvvetli p-Cesàro toplanabilirliğe indirgenir. α . dereceden tüm kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin cümlesi w_p^α ile göstereceğiz. $\ell = 0$ durumunda w_{op}^α yazacağız [14].

Şimdi, α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ve α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiyi verelim.

Teorem 4.2.2. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu taktirde $S^\alpha \subseteq S^\beta$ dır ve kapsama $\alpha < \beta$ olacak şekilde bazı α ve β lar için kesindir [14].

İspat. Eğer $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise o zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}|$$

sağlanır ve buradan $S^\alpha \subseteq S^\beta$ elde edilir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \text{ ise} \\ 0, & k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.2.2)$$

ile tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $s^\beta - \lim x_k = 0$, yani $x \in S^\beta$ dır, fakat $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $x \notin S^\alpha$ dır.

Eğer Teorem 4.2.2’de $\beta = 1$ alırsak o zaman aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2.3. Eğer bir dizi en az bir $0 < \alpha \leq 1$ için ℓ ’ye α . dereceden istatistiksel yakınsak ise o zaman bu dizi ℓ ’ye istatistiksel yakınsaktır, yani $S^\alpha \subseteq S$ dir ve kapsama kesindir [14].

Sonuç 4.2.4.

i) $S^\alpha = S^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \beta$ olmasıdır.

ii) $S^\alpha = S$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 1$ olmasıdır

[14].

Teorem 4.2.5. $0 < \alpha < 1$ olsun ve $x = (x_k)$, $s^\alpha - \lim x_k = \ell$ olacak şekilde α . dereceden istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Bu taktirde $\lim y_k = \ell$ olacak şekilde $x = (x_k)$ dizisinin bir $y = (y_k)$ alt dizisi vardır [14].

Teorem 4.2.6. $0 < \alpha \leq 1$ ve her $k \in K \subset \mathbb{N}$ için $x_k \leq y_k \leq z_k$ olsun. Eğer $\delta^\alpha(K) = 1$ ve $s^\alpha - \lim x_k = L = s^\alpha - \lim z_k$ ise bu taktirde $s^\alpha - \lim y_k = L$ dir.

İspat. Eğer

$$A = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

ve

$$B = \{k \in \mathbb{N} : |z_k - L| \geq \varepsilon\}$$

ise, o zaman

$$\{k \in \mathbb{N} : |y_k - L| \geq \varepsilon\} \subset A \cup B \cup K^c$$

elde edilir.

Teorem 4.2.7. Her $k \in K \subset \mathbb{N}$ için $x_k > 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_k \neq 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde $\delta^\alpha(K) = 1$ olsun. Bu taktirde

$$s^\alpha - \lim x_k = \infty \Leftrightarrow s^\alpha - \lim x_k^{-1} = 0$$

dır.

İspat. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : x_k \leq \varepsilon^{-1}\} = \{k \in \mathbb{N} : x_k^{-1} \geq \varepsilon\}$$

olduğundan istenilen elde edilir.

Teorem 4.2.8. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. Bu taktirde $w_p^\alpha \subseteq w_p^\beta$ dir ve $\alpha < \beta$ olacak şekilde bazı α ve β sayıları için kapsama kesindir [14].

İspat. $x = (x_k) \in w_p^\alpha$ herhangi bir dizi, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p \leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p$$

yazabiliriz ki bu eşitsizlikten $w_p^\alpha \subseteq w_p^\beta$ olduğu hemen çıkar.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için (4.2.2) ile tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım.

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n |x_k - 0|^p \leq \frac{\sqrt{n}}{n^\beta} = \frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}}$$

olduğunu göstermek kolaydır. $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $\frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ olduğundan $w_p^\beta - \lim x_k = 0$ dir, yani $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $x \in w_p^\beta$ dir, fakat

$$\frac{\sqrt{n}-1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - 0|^p$$

ve $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{\sqrt{n}-1}{n^\alpha} \rightarrow \infty$ olduğundan, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $x \notin w_p^\alpha$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.2.8'nin bir sonucudur.

Sonuç 4.2.9. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun ve p pozitif reel sayı olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $w_p^\alpha = w_p^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \beta$ olmasıdır.

ii) Her $\alpha \in (0, 1]$ ve $0 < p < \infty$ için $w_p^\alpha \subseteq w_p$ dir

[14].

Aşağıdaki teorem Hölder eşitsizliğinin, Maddox [21] tarafından verilen bir sonucun genelleştirilmesi olan, basit bir sonucudur.

Teorem 4.2.10. $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $w_q^\alpha \subseteq w_p^\alpha$ dir [14].

Teorem 4.2.10'da $\alpha = 1$ alarak Maddox tarafından verilen bir sonucu elde ederiz: eğer $0 < p < q < \infty$ ise $w_q \subset w_p$ dir [21].

Teorem 4.2.11. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ sabit birer reel sayı ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir dizi ℓ 'ye α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise o zaman bu dizi ℓ 'ye β . dereceden istatistiksel yakınsaktır [14].

İspat. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p \geq |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^p$$

yazabiliriz. Bu eşitsizlik ve $n^\alpha \leq n^\beta$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p \geq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^p \geq \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^p$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten, eğer $x = (x_k)$ dizisi ℓ 'ye α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise o zaman bu dizinin ℓ 'ye β . dereceden istatistiksel yakınsak olduğu sonucu hemen elde edilir.

Eğer Teorem 4.2.11'de $\beta = \alpha$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2.12. $0 < p < \infty$ ve α sayısı $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde sabit bir reel sayı olsun. Eğer bir dizi ℓ 'ye α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise o zaman bu dizi ℓ 'ye α . dereceden istatistiksel yakınsaktır [14].

Uyarı : Dikkat edelim ki Teorem 4.2.11'in tersi genelde geçerli değildir. Sınırlı ve α . derceden istatistiksel yakınsak bir dizinin $0 < \alpha < 1$ için genelde α . derceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olması gerekmez.

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & k \neq m^2 \text{ ise} \\ 1, & k = m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi bu duruma bir örnektir. Her α ($0 < \alpha \leq 1$) için $x \in \ell_\infty$ ve $x \in S^\alpha$ olduğu açıktır. İlk olarak her $n \geq 2$ pozitif tamsayısı için sağlanan

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. $H_n = \{k \leq n : k \neq m^2, m = 1, 2, 3, \dots\}$ tanımlayalım ve $p = 1$ olsun.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k|^p &= \sum_{k=1}^n |x_k| = \sum_{k \in H_n, 1 \leq k \leq n} |x_k| + \sum_{k \notin H_n, 1 \leq k \leq n} |x_k| \\ &= \sum_{k \in H_n, 1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k \notin H_n, 1 \leq k \leq n} 1 > \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n} \end{aligned}$$

olduğundan $p = 1$ için

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k|^p = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k| > \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{n^\alpha} \sqrt{n} = \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

yazılabilir. $n \rightarrow \infty$ iken $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}} \rightarrow \infty$ olacağından, yukarıdaki eşitsizlik de göz önüne alınırsa $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $x \in S^\alpha - w_p^\alpha$ elde edilir.

Sonuç 4.2.13. $0 < \alpha \leq 1$ ve pozitif bir reel sayı p olsun. O zaman $w_p^\alpha \subset S$ dir. Eğer $0 < \alpha < 1$ ise kapsama kesindir [14].

İspat. Sonuç 4.2.12 ve Sonuç 4.2.3'den $w_p^\alpha \subset S$ elde ederiz. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için (4.1.4)'de tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. O zaman $s - \lim x_k = 0$ olduğu açıktır, yani $x \in S$ fakat $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ ve $p = 1$ için $x \notin w_p^\alpha$ dir. Gerçekten

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - 0|^p = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k|^p \geq \frac{\sqrt[3]{n} - 1}{n^\alpha}$$

olduğunu görmek kolaydır. $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n^\alpha} \rightarrow \infty$ olduğundan o zaman $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ ve $p = 1$ için $x \notin w_p^\alpha$ dir. Sonuç olarak $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ ve $p = 1$ için $x \in S - w_p^\alpha$ dir. Bu ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2.3, Sonuç 4.2.13 ve Teorem 3.2.2'den her α için $S^\alpha \cap \ell_\infty \subset w_p \subset S$ elde ederiz, burada $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ dir.

5. α . DERECEDEN İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI

Bu bölümde Fridy and Orhan [22] tarafından yapılan istatistiksel üst limit ve alt limit kavramlarına derece dahil edilerek α . dereceden istatistiksel limit noktaları tanımlanacak ve bazı teoremler verilecektir.

5.1. α . Dereceden İstatistiksel Değme Noktası ve Sınırlılık

Tanım 5.1.1. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{k : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}$ cümlesinin α - yoğunluğu sıfırdan farklı ise γ sayısına $x = (x_k)$ dizisinin bir α . dereceden istatistiksel değme noktası diyeceğiz.

Tanım 5.1.2. Eğer $0 < \alpha \leq 1$ için $\delta_\alpha \{k : |x_k| > B\} = 0$ olacak şekilde pozitif bir B sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi α . dereceden istatistiksel sınırlıdır diyeceğiz.

$0 < \alpha \leq 1$ sabit bir reel sayı ve $x = (x_k)$ reel terimli bir sayı dizisi olmak üzere

$$B_x = \{b \in \mathbb{R} : \delta_\alpha \{k : x_k > b\} \neq 0\};$$

ve benzer olarak,

$$A_x = \{a \in \mathbb{R} : \delta_\alpha \{k : x_k < a\} \neq 0\}$$

cümlelerini tanımlayalım. Dikkat edelim ki $K \subset \mathbb{R}$ cümlesi için $\delta_\alpha \{K\} \neq 0$ olması ya $\delta_\alpha \{K\} > 0$ ya da K , α - yoğunluğa sahip değildir anlamına gelir.

5.2. α . Dereceden İstatistiksel Üst Limit ve Alt Limit

Tanım 5.2.1. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α olsun. Bu durumda reel terimli $x = (x_k)$ dizisinin α . dereceden istatistiksel üst limiti

$$s^\alpha - \lim \sup x = \begin{cases} \sup B_x, & B_x \neq \emptyset \\ -\infty & B_x = \emptyset \end{cases}$$

ve α . dereceden istatistiksel alt limiti

$$s^\alpha - \lim \inf x = \begin{cases} \inf A_x, & A_x \neq \emptyset \\ +\infty & A_x = \emptyset \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Burada reel terimli $x = (x_k)$ dizisinin $\alpha = 1$ için istatistiksel üst limiti

$$s - \lim \sup x = \begin{cases} \sup B_x, & B_x \neq \emptyset \\ -\infty, & B_x = \emptyset \end{cases}$$

ile ve alt limiti

$$s - \lim \inf x = \begin{cases} \inf A_x, & A_x \neq \emptyset \\ +\infty, & A_x = \emptyset \end{cases}$$

ile tanımlanır [22].

Örnek 5.2.2. $x = (x_k) \in w$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x_k = \begin{cases} 3, & k \text{ tek kare ise,} \\ -1, & k \text{ çift kare ise,} \\ 0, & k \text{ tek kare değilse,} \\ 1, & k \text{ çift kare değilse.} \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Kareler cümlesi $\alpha > \frac{1}{2}$ için α -yoğunluğu sıfır olduğu için $x = (x_k)$ dizisi α . dereceden istatistiksel sınırlıdır. Böylece $\alpha < \frac{1}{2}$ için $B_x = (-\infty, 1)$ ve $A_x = (0, +\infty)$ olup, $s^\alpha - \lim \sup x = 1$ ve $s^\alpha - \lim \inf x = 0$ olur. Ayrıca $x = (x_k)$ dizisi sırasıyla 1'e ve 0'a yakınsayan pozitif α -yoğunluğa sahip iki alt diziye sahip olduğundan α . dereceden istatistiksel yakınsak değildir. $\alpha < \frac{1}{2}$ için x dizisinin α . dereceden istatistiksel değme noktalarının cümlesi $\{0, 1\}$ dir ve $s^\alpha - \lim \sup x$ bu cümlenin en büyük elemanına eşitken, $s^\alpha - \lim \inf x$ bu cümlenin en küçük elemanına eşittir.

Teorem 5.2.3. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α olsun. Eğer $\beta = s^\alpha - \lim \sup x$ sonlu ise, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_\alpha \{k : x_k > \beta - \varepsilon\} \neq 0 \text{ ve } \delta_\alpha \{k : x_k > \beta + \varepsilon\} = 0 \quad (5.2.3)$$

dir. Tersine, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için (5.2.3) sağlanırsa $\beta = s^\alpha - \lim \sup x$ dir.

Teorem 5.2.4. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α olsun. Eğer $\eta = s^\alpha - \lim \inf x$ sonlu ise, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_\alpha \{k : x_k < \eta + \varepsilon\} \neq 0 \text{ ve } \delta_\alpha \{k : x_k < \eta - \varepsilon\} = 0 \quad (5.2.4)$$

dir. Tersine, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için (5.2.4) sağlanırsa $\eta = s^\alpha - \lim \inf x$ dir.

Teorem 5.2.5. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α olsun. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$s^\alpha - \lim \inf x \leq s^\alpha - \lim \sup x$$

dir.

İspat. İlk olarak $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $s^\alpha - \limsup x = -\infty$ olsun. Bu $B_x = \emptyset$ olmasını gerektirir. Böylece \mathbb{R} 'deki her b ve $0 < \alpha \leq 1$ için $\delta_\alpha \{k : x_k > b\} = 0$ olur. Bu $\delta_\alpha \{k : x_k \leq b\} = 1$ olmasını gerektirir, bu yüzden \mathbb{R} 'deki her a için $\delta_\alpha \{k : x_k < a\} \neq 0$ olur. Böylece $s^\alpha - \liminf x = -\infty$ olur.

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $s^\alpha - \limsup x = +\infty$ olduğu durumda ispata gerek yoktur. Bu nedenle $\beta = s^\alpha - \limsup x$ sayısını sonlu varsayalım ve $\eta = s^\alpha - \liminf x$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\eta \leq \beta + \varepsilon$ olacak şekilde $\beta + \varepsilon \in A_x$ olduğunu göstereceğiz. Teorem 5.2.3'ten $\beta = \sup B_x$ olduğundan $0 < \alpha \leq 1$ için $\delta_\alpha \{k : x_k > \beta + \varepsilon/2\} = 0$ dir. $\delta_\alpha \{k : x_k \leq \beta + \varepsilon/2\} = 1$ gerektirmesi $\delta_\alpha \{k : x_k < \beta + \varepsilon\} = 1$ 'i gerektirir. Böylece, $\beta + \varepsilon \in A_x$ olur. Tanım gereğince $\eta = \inf A_x$ olduğundan, $\eta \leq \beta + \varepsilon$ sonucuna varırız. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan bu bize $\eta \leq \beta$ sonucunu verir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.2.5 ve yukarıdaki tanımdan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.2.6. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α olsun. Sınırlı $x = (x_k) \in w$ dizisi için aşağıdaki önermeler sağlanır.

$$(i) \liminf x \leq s^\alpha - \liminf x \leq s - \liminf x$$

$$(ii) s - \limsup x \leq s^\alpha - \limsup x \leq \limsup x$$

Teorem 5.2.7. $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı olsun. α . dereceden istatistiksel sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisinin α . dereceden istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$s^\alpha - \liminf x = s^\alpha - \limsup x$$

dir.

Teorem 5.2.8. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu taktirde

$$s^\beta - \limsup x \leq s^\alpha - \limsup x$$

dir.

İspat. \mathbb{N} doğal sayılar kümesinin herhangi bir alt kümesi E olsun. Bu taktirde [14] de verilen Lemma 2.2 gereğince $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise $\delta_\beta(E) < \delta_\alpha(E)$ dir. Şimdi verilen bir $x = (x_k)$ dizisi için $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$B_x^\alpha = \{b \in \mathbb{R} : \delta_\alpha \{k : x_k > b\} \neq 0\}$$

tanımlayalım. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için $B_x^\beta \subset B_x^\alpha$ dir. Gerçekten, $b \in B_x^\beta$ olsun. $\alpha \leq \beta$ için

$$\lim_n \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : x_k > b\}| \leq \lim_n \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : x_k > b\}|$$

eşitsizliği sağlandığından, $\lim_n \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : x_k > b\}| \neq 0$ olması $\lim_n \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : x_k > b\}| \neq 0$ olmasını gerektirir ki buradan $b \in B_x^\alpha$ elde edilir. Yani $B_x^\beta \subset B_x^\alpha$ dir. Bu taktirde $\sup B_x^\beta \leq \sup B_x^\alpha$ olup $s^\beta - \limsup x \leq s^\alpha - \limsup x$ elde edilir.

Şimdi ispatı Teorem 5.2.8'in ispatına benzer olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.2.9. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu taktirde

$$s^\alpha - \liminf x \leq s^\beta - \liminf x$$

dir.

Teorem 5.2.10. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda α . dereceden istatistiksel sınırlı bir reel terimli $x = (x_k)$ dizisi aynı zamanda β . dereceden istatistiksel sınırlı bir dizidir.

İspat. $\alpha \leq \beta$ olması nedeniyle ispat

$$\frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |x_k| > B\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k| > B\}|$$

eşitsizliğinden hemen çıkar.

6. SONUÇ

Bu tezde, istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli p-Cesàro toplanabilme, α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ve α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilme kavramları verilmiş ve α . dereceden istatistiksel yakınsak diziler uzayı ile α . dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı karşılaştırılmıştır. Tezin orijinal kısmını oluşturan son bölümde; bir dizinin, α . dereceden istatistiksel değme noktaları, α . dereceden istatistiksel üst ve istatistiksel alt limitleri kavramları verilmiş ve α . dereceden istatistiksel sınırlı dizi tanımlanmıştır. Ayrıca α . dereceden istatistiksel limit noktaları arasındaki bazı bağıntılar elde edilmiştir.

KAYNAKÇA

- [1] **Zygmund, A.**, 1979. Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [2] **Steinhaus, H.**, 1951. Sur La Convergence Ordinaire Et La Convergence Asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, **2**, 73-74.
- [3] **Fast, H.**, 1951. Sur La Convergence Statistique, *Colloq. Math.*, **2**, 241-244.
- [4] **Schoenberg, I. J.**, 1959. The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, *Amer. Math. Monthly*, **66**, 361-375.
- [5] **Fridy, J.**, 1985. On Statistical Convergence, *Analysis* **5**, 301-313.
- [6] **Connor, J. S.**, 1988. The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences, *Analysis* **8**, 47-63.
- [7] **Savaş, E.**, 2000. Strong Almost Convergence and Almost λ -Statistically Convergence, *Hokkaido Math. Jour.*, **29**, 531-536.
- [8] **Mursaleen, 2000.** λ - Statistical Convergence, *Math. Slovaca*, **50**, No. **1**, 111 -115.
- [9] **Fridy, J. and Orhan, C.**, 1993. Lacunary Statistical Convergence, *Pacific J. Math.*, **160**, 43-51.
- [10] **Móricz, F.**, 2003. Statistical Convergence of Multiple Sequences, *Arch. Math.*, **81**, 82-89.
- [11] **Rath, D. and Tripathy, B. C.**, 1994. On Statistically Convergent and Statistically Cauchy Sequences, *Indian J. Pure. Appl. Math.*, **25(4)**, 381-386.
- [12] **Šalát, T.**, 1980. On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, *Math. Slovaca*, **30**, 139-150.
- [13] **Bhardwaj, V. K., Bala, I.**, 2007. On Weak Statistical Convergence, *Int. J. Math. and Math. Sci.* Vol. Article ID 38530.
- [14] **Çolak, R.**, 2010. Statistical Convergence of Order α , *Modern Methods in Analysis and its Applications*, Anamaya Publ. New Delhi, India, 121-129.
- [15] **Gadjiev, A. D. and Orhan, C.**, 2002. Some Approximation Theorems Via Statistical Convergence, *Rocky Mountain J. Math.*, **32(1)**, 129-138.
- [16] **Maddox, I. J.**, 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press.

- [17] **Kreyszig, E.**, 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York.
- [18] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970. Sequences of Bounded Variation and Sequences of Fourier Coefficients. *I. Math. Z.* **118**, 93–102.
- [19] **Niven, I., Zucherman, H. S. and Montgomery H. L.**, 1991. *An Introduction to The Theory of Numbers*. Fifth Ed., John Wiley, New York.
- [20] **Buck, R. C.**, 1953. Generalized Asymptotic Density. *American J. Math.*, **75**, 335-46.
- [21] **Maddox, I. J.**, 1967. Spaces of Strongly Summable Sequences, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **18**, 345-355.
- [22] **Fridy, J. and Orhan, C.**, 1997. Statistical Limit Superior and Limit Inferior, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125, Number 12**, 3625-3631.

ÖZGEÇMİŞ

1985 Elbistan/KAHRAMANMARAŞ doğumluyum. İlkokulu Yunus Emre İlköğretim ve İsmet Paşa İlköğretim okullarında, Orta öğrenimimi Atatürk İlköğretim okulunda ve Liseyi Gazi Mustafa Kemal Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesinde okudum. 2004-2008 yılları arasında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım. 2009 yılında İnönü Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Ekonometri Bölümünde Araştırma Görevlisi oldum. Halen aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.

Bahadır YÜZBAŞI