

**BAZI DOĞRUSAL OLMAYAN PARABOLİK
PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜNÜN PATLAMASI
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

**A STUDY ON BLOW UP OF SOLUTIONS OF
SOME NON-LINEAR PARABOLIC PROBLEMS**

Nedim UÇAR

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2010

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :.....
Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ

Üye (Danışman) :.....
Doç. Dr. Emil NOVRUZOV

Üye :.....
Prof. Dr. Azer KHANMAMMADOV

Üye :.....
Prof. Dr. Mustafa TÜRKYILMAZOĞLU

Üye :.....
Doç. Dr. Mansur İSMAİLOV

ONAY

Bu tez ... /... / tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

..../..../2010

Prof. Dr. Erdem YAZGAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

BAZI DOĞRUSAL OLMAYAN PARABOLİK PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜNÜN PATLAMASI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Nedim UÇAR

ÖZ

Bu çalışmada, bazı doğrusal olmayan parabolik denklemler için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin patlaması incelenmiştir. Birinci bölümde, incelediğimiz problemler tanıtılmış ve benzer tipteki problemler üzerine yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılan genel ve özel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, $a(x, t)u_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i}) = f(u)$ denklemi için bir başlangıç sınır değer problemi ele alınmış ve çözümün patlaması, başlangıç enerjisinin durumuna göre iki alt bölümde incelenmiştir. Dördüncü bölümde, $u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy$ nonlocal sınır değerine sahip $u_t = \Delta u + c(x, t) u^p$ denklemi için başlangıç sınır değer problemi ele alınmış ve $p > 0$, $l > 0$ sayılarının durumuna global çözümün varlığı ve çözümün patlaması üç ayrı alt bölümde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Çözümün Patlaması , Konkavlık Yöntemi, Karşılaştırma Prensipleri, Parabolik Denklem

Danışman : Doç. Dr. Emil NOVRUZOV, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

A STUDY ON BLOW UP OF SOLUTIONS OF SOME NON-LINEAR PARABOLIC PROBLEMS

Nedim UÇAR

ABSTRACT

This work is devoted to the blow up of solutions of the initial-boundary value problems for some nonlinear parabolic equations. In the first chapter, our problems are defined and some studies done on the type of similar problems are mentioned. In the second, general and specific informations for this work are given. In the third, an initial boundary value problem for the equation $a(x, t)u_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i}) = f(u)$ is considered and blow up of solution is analysed in two sections according to the initial energy of the problem. In the forth, an initial boundary value problem for the equation $u_t = \Delta u + c(x, t) u^p$ with nonlocal initial data $u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy$ is considered, and global solution and blow up of solution are analysed in three sections with respect to the conditions of $p > 0, l > 0$.

Keywords: Blow up of Solution, Concavity Method, Comparison Principle, Parabolic Equation

Advisor : Doç. Dr. Emil NOVRUZOV, Hacettepe University, Faculty of Science, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında bana yol gösterip destek olan değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Emil NOVRUZOV'a teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca yanımda olan, her türlü sıkıntıma katlanan, canımdan çok sevdiğim anneme, babama, ablama ve bana her zaman destek olan Esra'ma teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince yardımlarını esirgemeyen araştırma görevlisi arkadaşlarım Uğur SERT, H. Melis TEKİN, Berke KURU, Zümra KAVAFOĞLU ve Pınar AYDOĞDU'ya teşekkür ederim.

Ayrıca yüksek lisans programım boyunca her türlü sorumu içtenlikle cevaplayan araştırma görevlisi arkadaşlarım M. Özlem TUZCUOĞLU, Pelin G. GEREDELİ, Kerime KALLI, Eylem ÖZTÜRK ve F. Gamze DÜZGÜN'e teşekkür ederim.

İçindekiler

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
1 GİRİŞ	1
2 ÖNBİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR	5
3 BİR QUASİLİNEER KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİ	12
3.1 BAŞLANGIÇ ENERJİSİ POZİTİF OLDUĞU DURUMDA PROBLEMİN İNCELENMESİ	12
3.2 BAŞLANGIÇ ENERJİSİ POZİTİF OLMADIĞI DURUMDA PROB- LEMİN İNCELENMESİ	26
4 NONLİNEER VE NONLOCAL SINIR KOŞULUNA SAHİP BİR YARI LİNEER KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİ	30
4.1 $\max(p, l) < 1$ DURUMUNDA PROBLEMİN İNCELENMESİ	32
4.2 $\max(p, l) > 1$ DURUMUNDA PROBLEMİN İNCELENMESİ	34
4.3 $p = 1$ VEYA $l = 1$ DURUMUNDA PROBLEMİN İNCELENMESİ	44
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	59

1 GİRİŞ

Lineer olmayan parabolik denklemleri içeren başlangıç sınır değer problemlerinin global çözümlerinin var olmaması konusu üzerine geçmişte pek çok çalışma yapılmıştır ve günümüzde de bu konu üzerinde etkin olarak çalışılmaktadır.

Kabaca, zaman sonlu bir $T > 0$ limitine yaklaştığında çözümün sonsuza gitmesi olayı "blow up" olarak adlandırılır.

Blow up konusu 1940'larda ve 1950'lerde Semenov'un "zincir reaksiyon teorisi" ile ortaya çıkmıştır.

1960'larda özellikle S.Kaplan, H.Fujita ve A.Friedman tarafından bu konuda daha kapsamlı çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda temel olarak, f lineer olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$u_t - \Delta u = f(u)$$

yarı lineer parabolik denklemi için başlangıç sınır değer problemi ele alınmış ve bu problemin global çözümlerinin var olmadığı durumlar için yeter koşullar elde edilmiştir. Sonuçlar elde edilirken Karşılaştırma Tekniği (Comparison Principle), özdeğerlerin pozitifliği, enerjetik yöntem ve diferansiyel eşitsizlikler kullanılmıştır.

1970'lerde ise H.A.Levine Konkavlık Yöntemi (Concavity Method) adı ile bilinen bir yöntem geliştirmiş ve bu yöntem geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Levine bu yöntem ile ilk olarak

$$Pu_t = -Au + f(u)$$

denklemini incelemiş ve çözümün patlaması için yeter koşullar elde etmiştir. Burada P ve A reel ya da kompleks Hilbert uzayının yoğun alt bölgesinde tanımlı pozitif, lineer simetrik operatör ve f belirli koşulları sağlayan lineer olmayan bir operatördür.

1980'lerden itibaren "self-similar" çözümler, incelenmesine önem verilen dallardan biridir. Bazı hallerde problemin daha iyi incelenmesi için pozitif çözümlere bakılmış, "localization" ve "positivity" özellikleri ayrıca incelenmiştir.

Yine 80'li yıllardan sonra birçok fiziksel olay non-local matematiksel model olarak formüle edilmiştir. İlk kez Bitsadze ve Samarskii tarafından önemine dikkat çekilen non-local tipli problemler bu yıllardan sonra sıkça incelenmiştir.

Bu tez çalışması iki ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Y.Zhou'nun [44] makalesi incelenmiştir. Bu makalede Zhou, $a(x, t) > 0$ belirli koşulları sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} au_t - \operatorname{div} (|\nabla u|^{m-2} \nabla u) = f(u) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

problemini ele almıştır. Burada, $m \geq 2$ ve f sürekli bir fonksiyondur. [28]'den, (1.1) problemi $L^\infty(0, T; W_0^{1,m}(\Omega))$ uzayında local çözüme sahiptir ve $p \leq nm/(n-m)$ olmak üzere $\|u(x, t)\|_{L^p}$ normu t değişkenine göre sürekli olur. Daha önce, Z.Tan [37], (1.1) problemini $m = 2$, $a(x, t) = a(x) \geq 0$ ve $f(u) = |u|^p$ için ele almış ve

$$\begin{cases} au_t - \Delta u = u^p & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

problemini incelemiştir. Burada, $p = \frac{n+2}{n-2}$ dir. Tan bu makalesinde $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ başlangıç değeri

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u_0|^{p+1} dx < \frac{1}{n} S^{n/2} \\ \int_{\Omega} |u_0|^{p+1} dx > S^{n/2} \end{cases} \quad (1.3)$$

koşullarını sağlıyorsa (1.2) probleminin çözümünün sonlu bir zamanda blow up olduğunu göstermiştir. Burada

$$S = \inf_{u \in H_0^1} \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{p+1}}^2}$$

dir. Zhou ise Tan'ın elde ettiği bu sonuçları genelleştirmiştir. Birincisi, $m \geq 2$ ve $a(x, t) > 0$ almış; ikincisi ise (1.3)'de " $<$ " yerine " \leq " almıştır ve çözümün yaşam süresinin (lifespan) bir üst sınırını vermiştir. Zhou, blow up sonuçların elde ederken Konkavlık Yöntemini kullanmıştır.

İkinci bölümde A.Gladkov ve K.I.Kim'in [19] makalesi ele alınmıştır. Bu makalede Gladkov ve Kim, nonlinear ve non-local sınır koşuluna sahip bir yarı lineer ısı denklemi için başlangıç sınır değer probleminin pozitif çözümlerini incelemişlerdir. Daha önceleri, A.Friedman [15]'de, A düzgün eliptik bir operatör ve f sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} u_t - Au = 0 & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = \int_{\Omega} f(x, y) u(y, t) dy & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

problemini; K.Deng [10]'da, $g(x, u)$ x 'e göre C^0 , u 'ya göre C^1 'den ve f sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g(x, u) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = \int_{\Omega} f(x, y) u(y, t) dy & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

problemini ve Y.Yin [42]'de, A düzgün eliptik bir operatör ve g, f sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} u_t - Au = g(x, t, u) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = \int_{\Omega} f(x, y) u(y, t) dy & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

problemini incelemişler ve Karşılaştırma tekniğini de kullanarak çözümün local ve global varlığı üzerine çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir. Galaktionov ve Levine [17] ile Laptev [26]'in ise non-local non-lineerliğe sahip bir reaksiyon-difüzyon denklemi için Cauchy probleminin çözümünün patlaması üzerine çalışmaları vardır. Galaktionov ve Levine, $k(y)$ bazı eşitsizlikleri sağlayan, \mathbb{R}^N 'de ölçülebilir bir fonksiyon ve $p \geq 1$, $r \geq 0$, $p + r > 1$, $1 \leq q < \infty$ olmak üzere [17]'de

$$u_t = \Delta u + u^{r+1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} k(y) u^q(y, t) dy \right)^{(p-1)/q}$$

denklemini; Laptev ise $k(y)$ bazı eşitsizlikleri sağlayan, \mathbb{R}^N 'de ölçülebilir bir fonksiyon ve $p \geq 0$, $q \geq 1$ olmak üzere [26]'da

$$u_t = \Delta u + u \left(\int_{\mathbb{R}^N} k(y) u^q(y, t) dy \right)^{p/q}$$

denklemini incelemişler ve bazı blow up sonuçları elde etmişlerdir. Gladkov ve Kim [19]'da

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c(x, t) u^p & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

problemini incelemişlerdir. Bu problemin local çözümünün varlığını [20] makalesinde ispat eden Gladkov ve Kim; [19]'da, karşılaştırma tekniğini kullanarak $c(x, t)$ ve $k(x, y, t)$

fonksiyonları ile p ve l katsayıları üzerine konulacak bazı koşullar altında çözümün global varlığı ve blow up ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, ele alınan [44] ve [19] makaleleri gerekli açıklamalar yapılarak incelenmiştir.

2 ÖNBİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak bazı tanımlar, teoremler, gösterimler, eşitsizlikler ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bir küme ve $k \in \{1, 2, \dots\}$ olsun. Eğer her bir $x_0 \in \partial\Omega$ için, (gerektiğinde koordinat sistemi değiştirilerek)

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_n > g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$$

olacak şekilde $r > 0$ sayısı ve $g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^k$ fonksiyonu varsa $\partial\Omega$ sınırı C^k sınıfındandır denir. Eğer her bir $k = 1, 2, \dots$ için $\partial\Omega \in C^k$ sınıfından ise $\partial\Omega$ sınırı C^∞ sınıfındandır denir.[14]

Not 2.2 Eğer $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfından ise, $\partial\Omega$ boyunca dış yönlü birim normal vektörü $\eta = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)$ tanımlıdır.[14]

Tanım 2.3 $u \in C^1(\overline{\Omega})$ olsun. O zaman, $\eta \cdot Du$ ifadesine u 'nun (dış yönlü) normal türevi denir ve

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} := \eta \cdot Du$$

ile işaret edilir.[14]

Teorem 2.4 (Gauss-Green Teoremi) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bir küme ve $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfından olmak üzere $u \in C^1(\overline{\Omega})$ olsun. O zaman, $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \eta^i dS$$

eşitliği sağlanır. Burada η^i , $\partial\Omega$ sınırının dış yönlü normal vektörünün i . bileşenidir.[14]

Teorem 2.5 (Kısmi İntegrasyon Formülü) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bir küme ve $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfından olmak üzere $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ olsun. O zaman, $i = 1, \dots, n$ için

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \eta^i dS$$

eşitliği sağlanır. Burada η^i , $\partial\Omega$ sınırının dış yönlü normal vektörünün i . bileşenidir.[14]

Teorem 2.6 (Green Formülü) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı ve $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfından olmak üzere $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ olsun. O zaman, aşağıdaki eşitlikler sağlanır.[14]

$$(i) \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS$$

$$(ii) \int_{\Omega} Dv \cdot Dudx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} u dS$$

$$(iii) \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) dS$$

Tanım 2.7 $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve her bir $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ϕ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.[41]

Teorem 2.8 (Jensen Eşitsizliği¹) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sonlu ölçümlü, ölçülebilir bir küme olmak üzere $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir ve integrallenebilir ($u \in L_1(\Omega)$) bir fonksiyon olsun ve $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks olsun. Bu durumda,

$$\phi \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \phi(u) dx$$

eşitsizliği sağlanır.[41]

Teorem 2.9 (Jensen Eşitsizliği²) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir küme olmak üzere $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir fonksiyonu $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ koşulunu sağlasın ve $f(x) \neq \alpha, \beta$ hhy Ω 'da olsun ($\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$). $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ise sınırlı, pozitif ve $p(x) > 0$ hhy Ω 'da olsun. Ayrıca $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ve $\alpha < t < \beta$ için $\phi''(t) < \infty$ olsun. O zaman,

$$\phi \left(\frac{\int_{\Omega} f p dx}{\int_{\Omega} p dx} \right) \leq \frac{\int_{\Omega} \phi(f) p dx}{\int_{\Omega} p dx}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin sınırlı olduğunu varsayıyoruz.[21]

Tanım 2.10 X ve Y normlu lineer uzaylar olsun. Bu durumda,

$$(i) X \subset Y$$

$$(ii) Her $f \in X$ için $\|f\|_Y \leq c \|f\|_X$ olacak şekilde $c > 0$ vardır.$$

koşulları sağlanıyorsa X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile işaret edilir.[1]

Tanım 2.11 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $p > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Ω üzerinde

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan u ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan uzaya $L^p(\Omega)$ uzayı adı verilir.

$L^p(\Omega)$ bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanır.[1]

Tanım 2.12 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge olmak üzere, Ω üzerinde ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzaya $L^\infty(\Omega)$ uzayı adı verilir. $L^\infty(\Omega)$ bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

biçiminde tanımlanır.[1]

Not 2.13 Yukarıda verilen tanımlarda, fonksiyon ile kastedilen sıfır ölçümlü küme dışında eşit olan fonksiyonlardan oluşan denklik sınıfıdır.

Teorem 2.14 $p \in [1, \infty]$ için $L^p(\Omega)$ Banach uzaydır.[1]

Teorem 2.15 $L^2(\Omega)$ Hilbert uzaydır ve bu uzay üzerindeki iç çarpım, $f, g \in L^2(\Omega)$ olmak üzere

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} fg dx$$

biçiminde tanımlıdır.[1]

Teorem 2.16 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun. O zaman, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ için

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

olur . Ayrıca $u \in L^q(\Omega)$ için

$$|\Omega|^{-1/p} \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{-1/q} \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömülmesi geçerlidir.[1]

Tanım 2.17 $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α bir multiindeks olsun. Eğer her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, v fonksiyonuna u 'nun α 'ncı zayıf türevi denir ve $D^\alpha u = v$ ile işaret edilir.[14]

Tanım 2.18 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. $W^{k,p}(\Omega)$ bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & ; 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha f| & ; p = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır.[14]

Teorem 2.19 $W^{k,p}(\Omega)$ Banach uzayıdır.[14]

Teorem 2.20 $W^{k,2}(\Omega)$ Hilbert uzayıdır ve bu uzay üzerindeki iç çarpım $f, g \in W^{k,2}(\Omega)$ olmak üzere

$$(f, g)_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha f D^\alpha g dx$$

biçiminde tanımlıdır.[14]

Tanım 2.21 $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{k,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{k,p}(\Omega)$ ile işaret edilir. Dolayısıyla, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0$$

olacak şekilde $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ dizisinin var olmasıdır.[14]

Not 2.22 $W_0^{k,p}(\Omega)$ uzayı, her $|\alpha| \leq k - 1$ için

$$D^\alpha u = 0 \quad (\partial\Omega \text{ 'da})$$

koşulunu sağlayan $u \in W^{k,p}(\Omega)$ fonksiyonlarından oluşan uzay olarak düşünülebilir.[14]

Teorem 2.23 $W_0^{k,p}(\Omega)$ uzayı $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ normu ile bir Banach uzayıdır.[14]

Teorem 2.24 $W_0^{k,2}(\Omega)$ uzayı $(\cdot, \cdot)_{W^{k,2}(\Omega)}$ iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır.[14]

Not 2.25 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı olmak üzere, $W_0^{k,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) uzayındaki norm

$$\|f\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde verilebilir ve bu norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ normuna denktir.[18]

Teorem 2.26 $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ ya da C^1 sınıfına ait açık sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda, aşağıdaki sürekli gömülmeler geçerlidir.[24]

(i) Eğer $1 \leq p < n$ ise, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{np/(n-p)}(\Omega)$

(ii) Eğer $p = n$ ise, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [n, \infty)$

(iii) Eğer $p > n$ ise, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$.

Tanım 2.27 X bir Banach uzayı, $1 \leq p < \infty$ ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere

$$\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt < \infty$$

koşulunu sağlayan $u : (a, b) \rightarrow X$ ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan uzaya $L^p(a, b; X)$ uzayı denir. $L^p(a, b; X)$ bir normlu lineer uzayıdır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlıdır.[38]

Tanım 2.28 X bir Banach uzayı, $p = \infty$ ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı $u : (a, b) \rightarrow X$ fonksiyonlarından oluşan uzaya $L^{\infty}(a, b; X)$ uzayı denir. $L^{\infty}(a, b; X)$ bir normlu lineer uzayıdır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^{\infty}(a,b;X)} = \text{ess sup}_{t \in (a,b)} \|u(t)\|_X$$

biçiminde tanımlıdır.[38]

Teorem 2.29 $p \in [1, \infty]$ için $L^p(a, b; X)$ Banach uzayıdır.[38]

Tanım 2.30 X bir Banach uzayı, $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere $u : [a, b] \rightarrow X$ biçimindeki sürekli fonksiyonlardan oluşan uzaya $C([a, b]; X)$ uzayı denir. $C([a, b]; X)$ bir normlu lineer uzayıdır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{C([a,b];X)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X$$

biçiminde tanımlıdır.[38]

Teorem 2.31 $C([a, b]; X)$ Banach uzayıdır.[38]

Tanım 2.32 X bir Banach uzayı, $1 \leq p \leq \infty$ ve $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ olmak üzere

$$W^{1,p}(a, b; X) = \{u \in L^p(a, b; X) \mid u' \in L^p(a, b; X)\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya $W^{1,p}(a, b; X)$ uzayı denir. Bu uzay bir normlu lineer uzayıdır ve bu üzerindeki norm

$$\|f\|_{W^{1,p}(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & ; 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in \Omega} (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X) & ; p = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır.[38]

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bir küme olmak üzere

$$\begin{cases} -\Delta \omega = \lambda \omega & \Omega \text{ 'da} \\ \omega|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

özdeğer problemini göz önüne alalım.

Teorem 2.33 $L^2(\Omega)$ uzayının ortonormal bir tabanı olan öyle $\{\omega_m\}$ fonksiyonları ile $m \rightarrow \infty$ iken $\lambda_m \rightarrow \infty$ koşulunu sağlayan ve

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots$$

biçiminde olan öyle $\{\lambda_m\}$ sayıları vardır ki

$$\begin{cases} -\Delta \omega_m = \lambda \omega_m & \Omega \text{ 'da} \\ \omega_m \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \end{cases}$$

sağlanır.[24]

Not 2.34 Eğer $\partial\Omega$ sınırı C^∞ sınıfından ise $\omega_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ olur.[24]

Teorem 2.35 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \neq 0$ için

$$R(v) = \frac{\int_{\Omega} Dv Dv}{\int_{\Omega} v^2}$$

ile işaret edelim. O zaman, $m \geq 2$ için

$$\lambda_1 = \min_{\substack{v \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ v \neq 0}} R(v) = R(\omega_1)$$

$$\lambda_m = R(\omega_m) = \max_{\substack{v \in \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_m\} \\ v \neq 0}} R(v)$$

$$\lambda_m = \min_{v \perp \{\omega_1, \dots, \omega_m\}} R(v)$$

$$\lambda_m = \min_{\substack{W \subset W_0^{1,2}(\Omega) \\ \dim W = m}} \max_{v \in W} R(v)$$

eşitlikleri sağlanır.[24]

Lemma 2.36 $\omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\omega \neq 0$ fonksiyonu $R(\omega) = \lambda_1$ koşulunu sağlıyorsa, ω fonksiyonu λ_1 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.[24]

Teorem 2.37 (2.1) probleminin ilk özdeğeri λ_1 'e karşılık gelen özfonksiyonlar bir sabit çarpımı ile ayrılırlar ve bu özfonksiyonlar Ω 'da işaret değiştirmezler. Dolayısıyla, Ω bağlantılı olmak üzere ω_1 fonksiyonu $\omega_1 > 0$ (Ω 'da) biçiminde seçilebilir.[24]

3 BİR QUASİLİNEER KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde, aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi incelenmiştir:

$$\begin{cases} a(x, t)u_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i}) = f(u) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

Burada $m \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) sınırı düzgün, sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$, Ω bölgesinin sınırıdır. $a(x, t) \in W^{1,\infty}(0, \infty; L^\infty(\Omega))$ pozitif bir fonksiyon, f ise sürekli bir fonksiyondur.

3.1 BAŞLANGIÇ ENERJİSİ POZİTİF OLDUĞU DURUMDA PROBLEMİN İNCELENMESİ

Bu alt bölümde, (3.1) probleminin çözümünün sonlu bir zamanda patlaması ile ilgili aşağıdaki teorem incelenecektir.

Aşağıdaki teoremden, $a_t(x, t) \leq 0$ ve başlangıç enerjisi $E(0)$ pozitif olduğu durumda çözümün patladığını görelecek ve özel bir halde çözümün mevcut olduğu süre (lifespan) yukarıdan sınırlanacaktır.

Teorem 3.1 $a(x, t) \in W^{1,\infty}(0, \infty; L^\infty(\Omega))$ fonksiyonu hemen hemen her $t \geq 0$ için $a_t(x, t) \leq 0$ biçiminde pozitif bir fonksiyon olsun. $C_0 > 0$, $p > m \geq 2$ ve

$$F(u) = \int_0^u f(s) ds, \quad n > m \quad \text{için} \quad p \leq \frac{nm}{n-m}$$

olmak üzere

$$|f(u)| \leq C_0 |u|^{p-1}, \quad pF(u) \leq uf(u) \quad (3.1.1)$$

koşulları sağlansın. B_0 sabiti

$$\|v\|_{L^p} \leq B_0 \|v\|_{W_0^{1,m}}, \quad v \in W_0^{1,m}(\Omega) \quad (3.1.2)$$

Sobolev gömülmesinin en küçük sabiti olmak üzere $u_0 \in W_0^{1,m}(\Omega)$ fonksiyonu

$$\|u_0\|_{L^p} > \lambda_0 \equiv (C_0 B_0^m)^{\frac{-1}{p-m}} \quad (3.1.3)$$

ve

$$\begin{aligned} 0 < E(0) &= \frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^m dx - \int_{\Omega} F(u_0(x)) dx \\ &\leq E_0 \equiv \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) (C_0 B_0^p)^{\frac{-m}{p-m}} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

koşulunu sağlasın. O zaman, $u_0 \not\equiv 0$ için (3.1) probleminin global çözümü mevcut değildir. Ayrıca, eğer $E(0) < E_0$ ise, (3.1) probleminin çözümünün mevcut olduğu T^* süresi (lifespan)

$$T^* \leq \frac{8 \left\| \sqrt{a_0(x)} u_0(x) \right\|_{L^2}^2}{(p-2)^2 (E_0 - E(0))}$$

biçiminde üstten sınırlandırılabilir. Burada $a(x, 0)$ fonksiyonu $a_0(x)$ ile işaret edilmiştir.

Not 3.2 Aşağıdaki koşulları sağlayan $u_0 \in W_0^{1,m}(\Omega)$ fonksiyonlarından oluşan kümenin boş küme olduğu gösterilebilir.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^m dx - \int_{\Omega} F(u_0(x)) dx < \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) (C_0 B_0^m)^{\frac{-m}{p-m}} \\ \|u_0\|_{L^p} = (C_0 B_0^m)^{\frac{-1}{p-m}} \end{array} \right.$$

Gerçekten, aşağıda Lemma 3.4'ün ispatında doğrudan görüleceği üzere $\|u_0\|_{L^p} = (C_0 B_0^m)^{\frac{-1}{p-m}}$ için

$$\frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^m dx - \int_{\Omega} F(u_0(x)) dx \geq \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) (C_0 B_0^m)^{\frac{-m}{p-m}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.1'i ispat etmek için aşağıdaki lemmadan yararlanılacaktır.

Lemma 3.3 $\psi(t)$ iki kez türevlenebilen ve $\alpha > 0$ olmak üzere $t > 0$ için

$$\psi''\psi - (1 + \alpha) (\psi')^2 \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $\psi(0) > 0$ ve $\psi'(0) > 0$ ise öyle bir

$$t_1 \leq \frac{\psi(0)}{\alpha \psi'(0)}$$

vardır ki $t \rightarrow t_1$ için

$$\psi \rightarrow \infty.$$

İspat. $\varphi(t) = \psi^{-\alpha}(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda,

$$\varphi'(t) = -\alpha\psi^{-\alpha-1}(t)\psi'(t)$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= -\alpha(-\alpha-1)\psi^{-\alpha-2}(t)\psi'(t)\psi'(t) - \alpha\psi^{-\alpha-1}(t)\psi''(t) \\ &= -\alpha\psi^{-\alpha-2}(t) [\psi(t)\psi''(t) - (\alpha+1)(\psi'(t))^2]\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Varsayımdan, $\psi(t)$ pozitif bir fonksiyon olduğuna göre $\psi^{-\alpha-2}(t) > 0$ yazabiliriz. Bunu yukarıdaki son eşitlikte göz önüne alırsak $t > 0$ için

$$\varphi''(t) \leq 0$$

bulunur, çünkü varsayımdan $t > 0$ için $\psi''\psi - (1+\alpha)(\psi')^2 \geq 0$. Böylece, $\varphi(t)$ konkav fonksiyondur. Ayrıca $\varphi(t)$ kesin azalandır, çünkü $t > 0$ için $\psi''\psi - (1+\alpha)(\psi')^2 \geq 0$ olduğuna göre

$$\psi''\psi \geq 0$$

olur ve ψ pozitif fonksiyon olduğundan

$$\psi'' \geq 0$$

bulunur, yani ψ' artan fonksiyon olur. Dolayısıyla

$$\psi'(t) \geq \psi'(0) > 0$$

olacağından $t > 0$ için

$$\varphi'(t) = -\alpha\psi^{-\alpha-1}(t)\psi'(t) < 0$$

elde edilmiş olur.

$\varphi(t)$ nin $(0, \varphi(0))$ noktasından geçen teğet denklemi

$$y(t) - \varphi(0) = \varphi'(0)(t - 0)$$

veya

$$y(t) = \psi^{-\alpha}(0) - \alpha\psi^{-\alpha-1}(0)\psi'(0)t$$

biçimindedir. Bu teğet doğrusunun t eksenini kestiği nokta

$$t_0 = \frac{\psi^{-\alpha}(0)}{\alpha\psi^{-\alpha-1}(0)\psi'(0)} = \frac{\psi(0)}{\alpha\psi'(0)}$$

dır. $\varphi(t)$ konkav ve kesin azalan olduğuna göre $\varphi(t)$ eğrisinin $t = 0$ daki teğet doğrusu $y(t)$, her zaman $\varphi(t)$ eğrisinin üstünde kalır (veya $\varphi(t)$ ile çakışır). O halde, $y(t)$ doğrusu $t = t_0$ noktasında t eksenini kestiğine göre $\varphi(t)$ fonksiyonunun grafiği de bir $t_1 \leq t_0 = \frac{\psi(0)}{\alpha\psi'(0)}$ noktasında t eksenini kesecektir. Böylece,

$$t \rightarrow t_1 \quad \text{iken} \quad \varphi(t) \rightarrow 0$$

ve dolayısıyla

$$t \rightarrow t_1 \leq \frac{\psi(0)}{\alpha\psi'(0)} \quad \text{iken} \quad \psi \rightarrow \infty$$

elde edilmiş olur. ■

(3.1) problemine karşılık gelen enerji

$$E(t) = \frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx \quad (3.1.5)$$

biçimindedir ve

$$E(t) \leq E(0) \quad (3.1.6)$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten, (3.1)'deki ilk denklem u_t ile çarpılıp Ω üzerinden integrali alınırsa

$$\int_{\Omega} au_t^2 dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i})_{x_i} u_t dx = \int_{\Omega} f(u) u_t dx$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin sol tarafındaki ikinci terimde kısmi integrasyon formülü kullanılırsa

$$\int_{\Omega} au_t^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i} u_{x_i t} dx = \int_{\Omega} f(u) u_t dx$$

veya

$$\int_{\Omega} au_t^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial t} |u_{x_i}|^m dx = \int_{\Omega} f(u) u_t dx$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafındaki ifade, $F(u)$ 'nin tanımından

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u) dx = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\int_0^u f(s) ds \right) dx = \int_{\Omega} f(u) u_t dx$$

olacağından

$$\int_{\Omega} au_t^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial t} |u_{x_i}|^m dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u) dx$$

veya

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - \int_{\Omega} F(u) dx \right) = - \int_{\Omega} au_t^2 dx \quad (3.1.7)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$$

elde edilmiş olur.

Aşağıdaki lemma, (3.1) probleminin çözümü için bir değerlendirme vermektedir.

Lemma 3.4 (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) koşulları sağlanıyor olmak üzere $E(0) < E_0$ olsun. O zaman, her bir $t \geq 0$ için

$$\|u(x, t)\|_{L^p} > \lambda_0 \quad \text{ve} \quad \|u(x, t)\|_{W_0^{1,m}} > (C_0 B_0^p)^{\frac{-1}{p-m}} \quad (3.1.8)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Herhangi bir $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx \\ &= \frac{1}{m} \|u(\cdot, t)\|_{W_0^{1,m}}^m - \int_{\Omega} F(u(\cdot, t)) dx \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

(3.1.9)'un sağ tarafındaki ikinci ifadeyi göz önüne alırsak, (3.1.1)'den

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(u) dx &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} u f(u) dx \leq \frac{C_0}{p} \int_{\Omega} u |u|^{p-1} dx \\ &\leq \frac{C_0}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx = \frac{C_0}{p} \|u(\cdot, t)\|_{L^p}^p \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

yazılabilir. Buradan, (3.1.10) ifadesini (3.1.9)'da yerine yazarsak

$$E(t) \geq \frac{1}{m} \|u(\cdot, t)\|_{W_0^{1,m}}^m - \frac{C_0}{p} \|u(\cdot, t)\|_{L^p}^p$$

bulunur ve burada da (3.1.2) göz önüne alınarak

$$E(t) \geq \frac{1}{m B_0^m} \|u(\cdot, t)\|_{L^p}^m - \frac{C_0}{p} \|u(\cdot, t)\|_{L^p}^p \quad (3.1.11)$$

elde edilir. Şimdi,

$$g(s) = \frac{1}{m B_0^m} s^m - \frac{C_0}{p} s^p, \quad s \geq 0$$

diyelim. O zaman, aşağıdakiler doğrudur:

- (i) $g(s)$ fonksiyonu $[0, \lambda_0)$ aralığında kesin artandır.
- (ii) $g(s)$ fonksiyonu (λ_0, ∞) aralığında kesin azalandır.

(iii) $g(s)$ fonksiyonu $s = \lambda_0$ noktasında E_0 maksimum değerini alır.

Bunları göstermek için önce

$$g'(s) = \frac{s^{m-1} - C_0 B_0^m s^{p-1}}{B_0^m}$$

türevini hesaplayalım.

(i) $(0, \lambda_0)$ aralığında $g'(s) > 0$ olduğunu görmeliyiz: Herhangi bir $s \in (0, \lambda_0)$ alalım.

O zaman, λ_0 'ın değerini dikkate alarak

$$0 < s < (C_0 B_0^m)^{\frac{-1}{p-m}}$$

yazabiliriz. Buradan, $m - p < 0$ olduğundan

$$s^{m-p} > C_0 B_0^m$$

eşitsizliğini ve $s > 0$ olduğunu göz önüne alarak

$$s^{m-1} > C_0 B_0^m s^{p-1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Dolayısıyla

$$g'(s) = \frac{s^{m-1} - C_0 B_0^m s^{p-1}}{B_0^m} > 0$$

elde etmiş oluruz.

(ii) (λ_0, ∞) aralığında $g'(s) < 0$ olduğunu görmeliyiz: Herhangi bir $s \in (\lambda_0, \infty)$ alalım. O zaman, λ_0 'ın değerini dikkate alıp

$$s > (C_0 B_0^m)^{\frac{-1}{p-m}}$$

yazarsak (i)'dekine benzer şekilde

$$s^{m-1} < C_0 B_0^m s^{p-1}$$

ve dolayısıyla

$$g'(s) = \frac{s^{m-1} - C_0 B_0^m s^{p-1}}{B_0^m} < 0$$

elde ederiz.

(iii) $g(s)$ fonksiyonu $[0, \lambda_0)$ aralığında kesin artan, (λ_0, ∞) aralığında kesin azalan olduğuna göre $s = \lambda_0$ noktasında maksimum değerini alır ve bu değer

$$\begin{aligned}
g(\lambda_0) &= \frac{1}{mB_0^m} \lambda_0^m - \frac{C_0}{p} \lambda_0^p \\
&= \frac{(C_0 B_0^m)^{\frac{-m}{p-m}}}{mB_0^m} - \frac{C_0 (C_0 B_0^m)^{\frac{-p}{p-m}}}{p} \\
&= \frac{C_0^{\frac{-m}{p-m}} B_0^{\frac{-m^2}{p-m} - m}}{m} - \frac{C_0^{\frac{-p}{p-m} + 1} B_0^{\frac{-mp}{p-m}}}{p} \\
&= \frac{C_0^{\frac{-m}{p-m}} B_0^{\frac{-mp}{p-m}}}{m} - \frac{C_0^{\frac{-m}{p-m}} B_0^{\frac{-mp}{p-m}}}{p} \\
&= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) (C_0 B_0^p)^{\frac{-m}{p-m}} = E_0
\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan, önce $E_0 > E(0)$ varsayımı, sonra da sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.11)'i göz önüne alınırsa her bir $t \geq 0$ için

$$E_0 > E(0) \geq E(t) \geq g(\|u(\cdot, t)\|_{L^p})$$

ve dolayısıyla

$$E_0 > g(\|u(\cdot, t)\|_{L^p})$$

elde edilmiş olur. O zaman, hiçbir $t \geq 0$ zamanı için $g(\|u(\cdot, t)\|_{L^p})$ fonksiyonu E_0 değerini alamaz. Ancak $g(s)$ fonksiyonu $s = \lambda_0$ noktasında $g(\lambda_0) = E_0$ maksimum değerini aldığına göre $\|u(\cdot, t^*)\|_{L^p} = \lambda_0$ olacak şekilde t^* zamanı yoktur. Buradan $\|u(\cdot, t)\|_{L^p}$ normu t değişkenine göre sürekli olduğuna göre her bir $t \geq 0$ için

$$\|u(x, t)\|_{L^p} > \lambda_0 \quad \text{ya da} \quad \|u(x, t)\|_{L^p} < \lambda_0$$

olur. Ancak, varsayımdan $\|u(x, 0)\|_{L^p} = \|u_0\|_{L^p} > \lambda_0$ olduğuna göre her bir $t \geq 0$ için

$$\|u(x, t)\|_{L^p} > \lambda_0 = (C_0 B_0^m)^{\frac{-1}{p-m}}$$

dır. Böylece

$$\|u(\cdot, t)\|_{W_0^{1,m}} \geq \frac{1}{B_0} \|u(\cdot, t)\|_{L^p} > \frac{\lambda_0}{B_0} = (C_0 B_0^p)^{\frac{-1}{p-m}}$$

elde edilir. ■

Yukarıda yapılan hazırlıklardan sonra, artık Teorem 3.1'in ispatını verebiliriz.

İspat (Teorem 3.1). İki durumda inceleyeceğiz.

1.Durum: $E(0) < E_0$. Lemma 3.3'ün koşullarını sağlayan uygun ψ fonksiyonu bulacağız. [32] ve [45] dikkate alınırsa uygun ψ fonksiyonunun

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) u^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} (\tau - t) a_t(x, \tau) u^2(x, \tau) dx d\tau \\ &\quad + (T_0 - t) \int_{\Omega} a_0(x) u_0^2(x) dx + \beta(t + \varepsilon)^2, \quad t < T_0 \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

biçiminde olacağı görülür. Burada ε, T_0 ve β daha sonra belirleyeceğimiz pozitif sabitlerdir.

O zaman, t 'ye bağlı kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \int_{\Omega} a(x, t) u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\tau - t) a_t(x, \tau) u^2(x, \tau) dx d\tau + \\ &\quad + \left(\int_{\Omega} (t - t) a_t(x, \tau) u^2(x, \tau) dx \right) \frac{d}{dt} t - \left(\int_{\Omega} (0 - t) a_t(x, \tau) u^2(x, \tau) dx \right) \frac{d}{dt} 0 \\ &\quad - \int_{\Omega} a_0(x) u_0^2(x) dx + 2\beta(t + \varepsilon) \\ &= \int_{\Omega} a(x, t) u^2(x, t) dx - \int_0^t \int_{\Omega} a_t(x, \tau) u^2(x, \tau) dx d\tau - \int_{\Omega} a_0(x) u_0^2(x) dx + \\ &\quad + 2\beta(t + \varepsilon) \\ &= \int_{\Omega} \left(a(x, t) u^2(x, t) - a_0(x) u_0^2(x) - \int_0^t a_t(x, \tau) u^2(x, \tau) d\tau \right) dx + 2\beta(t + \varepsilon) \\ &= \int_{\Omega} \left(a(x, \tau) u^2(x, \tau) \Big|_0^t - \int_0^t a_t(x, \tau) u^2(x, \tau) d\tau \right) d\tau + 2\beta(t + \varepsilon) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_0^t 2a(x, \tau) u(x, \tau) u_t(x, \tau) d\tau \right) dx + 2\beta(t + \varepsilon) \\ &= 2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) u(x, \tau) u_t(x, \tau) dx d\tau + 2\beta(t + \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

elde edilir. Son eşitliğin t 'ye göre türevi alınıp, (3.1)'deki ilk denklem göz önünde bulundurulursa

$$\psi''(t) = 2 \int_{\Omega} a(x, t) u(x, t) u_t(x, t) dt + 2\beta$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i})_{x_i} + f(u) \right) u dx + 2\beta \\
&= 2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i})_{x_i} u dx + 2 \int_{\Omega} f(u) u dx + 2\beta
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitliğin sağ tarafında önce kısmi integrasyon formülü sonra (3.1.1) koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\psi''(t) &= -2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i} u_{x_i} dx + 2 \int_{\Omega} f(u) u dx + 2\beta \\
&= -2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx + 2 \int_{\Omega} f(u) u dx + 2\beta \\
&\geq -2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx + 2p \int_{\Omega} F(u) dx + 2\beta
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsiliğin sağ tarafına $\frac{2p}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx$ ifadesi eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
\psi''(t) &\geq -2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx + 2p \int_{\Omega} F(u) dx + 2\beta + \\
&\quad + \frac{2p}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - \frac{2p}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx \\
&= -2p \left(\frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - \int_{\Omega} F(u) dx \right) - \\
&\quad -2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx + \frac{2p}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx + 2\beta
\end{aligned}$$

veya

$$\psi''(t) \geq -2pE(t) + 2 \left(\frac{p}{m} - 1 \right) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx + 2\beta$$

elde edilir. Şimdi, (3.1.7) eşitliğinin her iki tarafının 0'dan t 'ye integralini alarak elde edeceğimiz

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \frac{d}{d\tau} E(\tau) d\tau = - \int_0^t \int_{\Omega} a u_t^2 dx d\tau$$

eşitliğinden $E(t)$ çekilip en son eşitsizlikte yerine yazılırsa ve $W_0^{1,m}(\Omega)$ uzayının normu dikkate alınır

$$\psi''(t) \geq -2p \left(E(0) - \int_0^t \int_{\Omega} a u_t^2 dx d\tau \right) + 2 \left(\frac{p}{m} - 1 \right) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx + 2\beta$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\frac{p}{m} - 1 \right) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - 2pE(0) + 2p \int_0^t \int_{\Omega} au_t^2 dx d\tau + 2\beta \\
&= 2 \left(\frac{p}{m} - 1 \right) \|u(\cdot, t)\|_{W_0^{1,m}}^m - 2pE(0) + 2p \int_0^t \int_{\Omega} au_t^2 dx d\tau + 2\beta
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece, son eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk ifadede önce Lemma 3.4 kullanılıp sonra (3.1.4) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\psi''(t) &\geq 2 \left(\frac{p}{m} - 1 \right) (C_0 B_0^p)^{\frac{-m}{p-m}} - 2pE(0) + 2p \int_0^t \int_{\Omega} au_t^2 dx d\tau + 2\beta \\
&= 2p(E_0 - E(0)) + 2p \int_0^t \int_{\Omega} au_t^2 dx d\tau + 2\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, $\beta = 2(E_0 - E(0)) > 0$ diyelim. O zaman,

$$\begin{aligned}
\psi''(t) &\geq p\beta + 2p \int_0^t \int_{\Omega} au_t^2 dx d\tau + 2\beta \\
&\geq (p+2)\beta + (p+2) \int_0^t \int_{\Omega} au_t^2 dx d\tau
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

yazabiliriz. Sonuç olarak (3.1.12)'den

$$\psi(0) = T_0 \int_{\Omega} a_0(x) u_0^2(x) dx + \beta \varepsilon^2 > 0$$

(3.1.13)'den

$$\psi'(0) = 2\beta\varepsilon > 0$$

(3.1.14)'den her bir $t \geq 0$ için

$$\psi''(t) \geq (p+2)\beta > 0$$

elde edilir. Böylece, ψ ve ψ' pozitiftir diyebiliriz. Gerçekten, $\psi''(t) > 0$ olduğundan $\psi'(t)$ artandır. Buradan, $t > 0$ için

$$\psi'(t) > \psi'(0) > 0$$

bulunur. $\psi'(t) > 0$ olduğundan $\psi(t)$ artandır. Buradan da, $t > 0$ için

$$\psi(t) > \psi(0) > 0$$

elde edilir. Varsayımdan, her bir $x \in \Omega$ ve $t \geq 0$ için $a_t(x, t) \leq 0$ olduğundan $\psi(t)$ 'nin tanımından

$$\psi(t) \geq \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) u^2(x, \tau) dx d\tau + \beta(t + \varepsilon)^2 \quad (3.1.15)$$

yazabiliriz. O halde (3.1.12), (3.1.13), (3.1.14) ve (3.1.15)'i göz önüne alırsak, herhangi $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} & \psi(t)\xi^2 + \psi'(t)\xi\eta + \frac{\psi''(t)}{p+2}\eta^2 \geq \\ & \geq \left(\int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) u^2(x, \tau) dx d\tau + \beta(t + \varepsilon)^2 \right) \xi^2 + \\ & + \left(2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) u(x, \tau) u_t(x, \tau) d\tau dx + 2\beta(t + \varepsilon) \right) \xi\eta + \\ & + \left(\beta + \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) u_t^2(x, \tau) dx d\tau \right) \eta^2 \\ & = \xi^2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) u^2(x, \tau) dx d\tau + 2\xi\eta \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) u(x, \tau) u_t(x, \tau) dx d\tau + \\ & + \eta^2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) u_t^2(x, \tau) dx d\tau + \xi^2 \beta(t + \varepsilon)^2 + 2\xi\eta\beta(t + \varepsilon) + \eta^2 \beta \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) [(\xi u(x, \tau))^2 + 2\xi u(x, \tau) \eta u_t(x, \tau) + (\eta u_t(x, \tau))^2] dx d\tau \\ & \quad + \beta [(\xi(t + \varepsilon))^2 + 2\xi\eta(t + \varepsilon) + \eta^2] \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) (\xi u(x, \tau) + \eta u_t(x, \tau))^2 dx d\tau + \beta (\xi(t + \varepsilon) + \eta)^2 \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

yani

$$\psi(t)\xi^2 + \psi'(t)\xi\eta + \frac{\psi''(t)}{p+2}\eta^2 \geq 0$$

bulunmuş olur. η sabit tutularak, eşitsizliğin sol tarafı ξ değişkenine göre ikinci dereceden bir denklem gibi düşünülürse

$$\Delta = (\psi'(t)\eta)^2 - 4\psi(t)\frac{\psi''(t)}{p+2}\eta^2$$

$$\begin{aligned}
&= \eta^2 \left((\psi'(t))^2 - 4\psi(t) \frac{\psi''(t)}{p+2} \right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

olacağından

$$\psi(t) \frac{\psi''(t)}{p+2} - \left(\frac{\psi'(t)}{2} \right)^2 \geq 0$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki yanını $p+2 > 0$ ile çarpılarak

$$\psi(t)\psi''(t) - \frac{p+2}{4} (\psi'(t))^2 \geq 0$$

bulunur ve böylece

$$1 + \alpha = \frac{p+2}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{p-2}{4}$$

olmak üzere $\psi(t)$ fonksiyonu Lemma 3.3'ün koşullarını sağlar. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
t_2 &= \frac{\psi(0)}{\alpha\psi'(0)} = \frac{T_0 \int_{\Omega} a_0(x)u_0^2(x)dx + \beta\varepsilon^2}{\left(\frac{p-2}{4}\right)2\beta\varepsilon} \\
&= \frac{2T_0 \int_{\Omega} a_0(x)u_0^2(x)dx + 2\beta\varepsilon^2}{(p-2)\beta\varepsilon} \\
&= \frac{2 \left(T_0 \|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2}^2 + \beta\varepsilon^2 \right)}{(p-2)\beta\varepsilon}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$t \rightarrow t_1 \leq t_2 \text{ iken } \psi \rightarrow \infty$$

elde edilmiş olur. Şimdi, $\psi(t)$ fonksiyonunu tanımlarken kullandığımız uygun ε ve T_0 sabitlerini belirleyelim. ε sayısı

$$\varepsilon > \frac{\|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2}^2}{(p-2)(E_0 - E(0))}$$

biçiminde herhangi bir sayı olsun. ε sayısını sabit tutalım ve T_0 sayısını

$$T_0 = \frac{2 \left(T_0 \|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2}^2 + \beta\varepsilon^2 \right)}{(p-2)\beta\varepsilon}$$

biçiminde seçelim. O zaman,

$$T_0(p-2)\beta\varepsilon = 2 \left(T_0 \|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2}^2 + \beta\varepsilon^2 \right)$$

veya

$$T_0 \left((p-2)\beta\varepsilon - 2 \|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2}^2 \right) = 2\beta\varepsilon^2$$

olacağından

$$T_0 = \frac{2\beta\varepsilon^2}{(p-2)\beta\varepsilon - 2\|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2}^2} = \frac{2(E_0 - E(0))\varepsilon^2}{(p-2)(E_0 - E(0))\varepsilon - \|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2}^2}$$

biçiminde olur. Böylece, $u(x, t)$ çözümünün mevcut olduğu süre (lifespan)

$$T^* \leq \inf_{t \geq \varepsilon} \frac{2(E_0 - E(0))\varepsilon^2}{(p-2)(E_0 - E(0))\varepsilon - \|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2}^2} = \frac{8\|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2}^2}{(p-2)^2(E_0 - E(0))}$$

biçiminde sınırlandırılabilir.

2. Durum: $E(0) = E_0$. Bu durum için aşağıdaki iddiayı göz önüne alacağız.

İddia: $E(\bar{t}) < E_0$ olacak şekilde $\bar{t} > 0$ vardır.

Farzedelim ki iddia yanlıştır, yani her $t > 0$ için $E(t) \geq E(0) = E_0$ olsun.

O zaman, (3.1.5)'den

$$E(t) = E_0 \quad (t \geq 0) \quad (3.1.16)$$

elde edilir. Ayrıca, $\|u(\cdot, t)\|_{L^p}$ normu t değişkenine göre sürekli olduğuna göre, (3.1.3) göz önüne alınırsa, her bir $t \in [0, t_\epsilon]$ için

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} > \lambda_0 \quad (3.1.17)$$

olacak şekilde yeterince küçük bir t_ϵ vardır. Şimdi, (3.1) probleminin $[0, t_\epsilon]$ aralığındaki $u(x, t)$ çözümünü düşünelim. O zaman, (3.1.16) ve (3.1.7)'den

$$\begin{aligned} 0 &= E(t_\epsilon) - E_0 = E(t_\epsilon) - E(0) = \int_0^{t_\epsilon} \frac{d}{d\tau} E(\tau) d\tau \\ &= - \int_0^{t_\epsilon} \int_{\Omega} a(x, \tau) u_t^2(x, \tau) dx d\tau \end{aligned}$$

bulunur ve buradan h.h. her $t \in [0, t_\epsilon]$ için

$$\int_{\Omega} a(x, t) u(x, t) u_t(x, t) dx = 0$$

elde edilir. Son eşitlikte, (3.1)'deki ilk denklem göz önüne alınırsa ve kısmi integrasyon formülünü kullanılırsa, h.h. her $t \in [0, t_\epsilon]$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} a(x, t) u(x, t) u_t(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i})_{x_i} + f(u) \right) u(x, t) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i})_{x_i} u(x, t) dx + \int_{\Omega} f(u) u(x, t) dx \\
&= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx + \int_{\Omega} u f(u) dx
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

bulunur. Böylece, sırasıyla (3.1.5), (3.1.1) ve (3.1.18) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
E(0) = E(t) &= \frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - \int_{\Omega} F(u) dx \\
&\geq \frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} u f(u) dx \\
&= \frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx \\
&= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx \\
&= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) \|u(x, t)\|_{W_0^{1,m}}^m
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

elde edilir. (3.1.19) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadede (3.1.2), (3.1.3) ve (3.1.17) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) \|u(x, t)\|_{W_0^{1,m}}^m &\geq \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) B_0^{-m} \|u(x, t)\|_{L^p}^m \\
&> \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) B_0^{-m} \lambda_0^m \\
&= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) B_0^{-m} (C_0 B_0^m)^{\frac{-m}{p-m}} \\
&= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) (C_0 B_0^p)^{\frac{-m}{p-m}} \\
&= E_0
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

bulunur ve (3.1.20) eşitsizliği (3.1.19)'da yerine yazılırsa

$$E(0) > E_0 = E(0)$$

çelişkisi elde edilir. Böylece, iddia doğrudur. Şimdi, 1. durumda yaptığımız işlemleri, t 'nin orijini \bar{t} olarak tekrar edersek Teorem 3.1'i ispatlamış oluruz. ■

3.2 BAŞLANGIÇ ENERJİSİ POZİTİF OLMADIĞI DURUMDA PROBLEMİN İNCELENMESİ

Eğer $a_t(x, t) \geq 0$ ise ve (3.1) probleminin başlangıç enerjisi pozitif değilse, (3.1.3) kısıtlaması olmadan problemin çözümü sonlu bir zamanda patlar. Bununla ilgili aşağıdaki teoremin doğru olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.5 $a(x, t) \in W^{1,\infty}(0, \infty; L^\infty(\Omega))$ fonksiyonu hemen hemen her $t \geq 0$ için $a_t(x, t) \geq 0$ biçiminde pozitif bir fonksiyon olsun. $p > m > 2$ için

$$F(u) = \int_0^u f(s) ds, \quad n > m \quad \text{için} \quad p \leq \frac{nm}{n-m}$$

olmak üzere

$$pF(u) \leq uf(u)$$

koşulu sağlansın. O zaman, sıfırdan farklı $u_0 \in W_0^{1,m}(\Omega)$ başlangıç değeri için

$$E(0) \leq 0$$

sağlanıyorsa, bu koşullara uygun (3.1) probleminin çözümü sonlu bir zamanda patlar.

İspat. D_0 sayısı

$$\|v\|_{L^m} \leq D_0 \|v\|_{W_0^{1,m}} \quad (v \in W_0^{1,m}(\Omega)) \quad (3.2.1)$$

eşitsizliğinin en küçük sabiti olsun. Herhangi bir $u(x, t)$ çözümü için

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, t) u^2(x, t) dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu eşitliğin her iki yanının t 'ye göre türevi alınıp (3.1)'deki ilk denklem dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} a(x, t) u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} a(x, t) u^2(x, t) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_t u^2 + 2auu_t) dx = \int_{\Omega} auu_t dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_t u^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i})_{x_i} + f(u) \right) u dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_t u^2 dx \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Varsayımdan h.h. her $t \geq 0$ için $a_t \geq 0$ olduğuna göre yukarıdaki eşitlikten

$$\varphi'(t) \geq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i})_{x_i} u dx + \int_{\Omega} u f(u) dx$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk ifadede kısmi integrasyon formülü, ikinci ifadede ise (3.1.1) kullanılırsa

$$\varphi'(t) \geq - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx + p \int_{\Omega} F(u) dx$$

bulunur ve bu eşitsizliğin sağ tarafına $\frac{p}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^m dx$ ifadesi eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\geq - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx + p \int_{\Omega} F(u) dx + \frac{p}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - \frac{p}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx \\ &= -p \left[\frac{1}{m} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx - \int_{\Omega} F(u) dx \right] + \left(\frac{p}{m} - 1 \right) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx \\ &= -pE(t) + \left(\frac{p}{m} - 1 \right) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Burada (3.1.6) ve (3.1.7) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\geq -pE(0) + \left(\frac{p}{m} - 1 \right) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx \\ &\geq \left(\frac{p}{m} - 1 \right) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m dx \end{aligned}$$

veya

$$\varphi'(t) \geq \left(\frac{p}{m} - 1 \right) \|u(\cdot, t)\|_{W_0^{1,m}}^m$$

bulunur ve burada da (3.2.1) kullanılırsa

$$\varphi'(t) \geq \left(\frac{p}{m} - 1 \right) D_0^{-m} \|u(\cdot, t)\|_{L^m}^m \quad (3.2.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, $m > 2$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sonlu ölçümlü olduğuna göre $u \in L^m(\Omega)$ için

$$|\Omega|^{\frac{-1}{2}} \|u\|_{L^2} \leq |\Omega|^{\frac{-1}{m}} \|u\|_{L^m}$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla, M sayısı $M \geq a(x, t)$ olacak şekilde pozitif bir sabit olmak üzere

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^m}^m \geq |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^m = |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{m}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&\geq |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\int_{\Omega} \frac{a}{M} u^2 dx \right)^{\frac{m}{2}} = |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \frac{1}{2} \int_{\Omega} a u^2 dx \right)^{\frac{m}{2}} \\
&= |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}} \varphi^{\frac{m}{2}}(t)
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

yazabiliriz ve (3.2.3) eşitsizliği (3.2.2)'de yerine yazılırsa

$$\varphi'(t) \geq \left(\frac{p}{m} - 1 \right) D_0^{-m} |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}} \varphi^{\frac{m}{2}}(t)$$

veya

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi^{\frac{m}{2}}(t)} \geq \left(\frac{p}{m} - 1 \right) D_0^{-m} |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}}$$

bulunur ve bu eşitsizliğin sol tarafı düzenlenirse

$$\left(\frac{2}{2-m} \right) \frac{d}{dt} \varphi^{1-\frac{m}{2}}(t) \geq \left(\frac{p}{m} - 1 \right) D_0^{-m} |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki yanının 0'dan t 'ye integrali alınırsa

$$\left(\frac{2}{2-m} \right) \left(\varphi^{1-\frac{m}{2}}(t) - \varphi^{1-\frac{m}{2}}(0) \right) \geq \left(\frac{p}{m} - 1 \right) D_0^{-m} |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}} t$$

bulunur ve bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\varphi^{1-\frac{m}{2}}(t) &\leq \left(\frac{2-m}{2} \right) \left(\frac{p}{m} - 1 \right) D_0^{-m} |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}} t + \varphi^{1-\frac{m}{2}}(0) \\
&= \left(\frac{2-m}{2} \right) \left(\frac{p-m}{m} \right) D_0^{-m} |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}} t + \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} a_0 u_0^2 dx \right)^{1-\frac{m}{2}} \\
&= \left(\frac{2-m}{2} \right) \left(\frac{p-m}{m} \right) D_0^{-m} |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}} t + 2^{\frac{m-2}{2}} \|\sqrt{a_0} u_0\|_{L^2}^{2-m}
\end{aligned}$$

veya

$$\varphi^{\frac{m}{2}-1}(t) \geq \frac{1}{\left(\frac{2-m}{2} \right) \left(\frac{p-m}{m} \right) D_0^{-m} |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}} t + 2^{\frac{m-2}{2}} \|\sqrt{a_0} u_0\|_{L^2}^{2-m}}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left(\frac{2-m}{2} \right) \left(\frac{p-m}{m} \right) D_0^{-m} |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}} t \rightarrow -2^{\frac{m-2}{2}} \|\sqrt{a_0} u_0\|_{L^2}^{2-m}$$

veya

$$t \rightarrow \frac{-2^{\frac{m-2}{2}} \|\sqrt{a_0} u_0\|_{L^2}^{2-m}}{\left(\frac{2-m}{2} \right) \left(\frac{p-m}{m} \right) D_0^{-m} |\Omega|^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{M} \right)^{\frac{m}{2}}} = \frac{m D_0^m |\Omega|^{\frac{m}{2}-1} M^{\frac{m}{2}}}{(m-2)(p-m) \|\sqrt{a_0} u_0\|_{L^2}^{m-2}}$$

iken

$$\varphi^{\frac{m}{2}-1}(t) \rightarrow \infty$$

elde edilmiş olur. Burada

$$\varphi^{\frac{m}{2}-1}(t) \leq \left(\frac{M}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{m-2}{2}} = \left(\frac{M}{2} \right)^{\frac{m-2}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^{m-2}$$

olduğundan

$$t \rightarrow \frac{mD_0^m |\Omega|^{\frac{m}{2}-1} M^{\frac{m}{2}}}{(m-2)(p-m) \|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2}^{m-2}}$$

iken

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \rightarrow \infty$$

elde edilmiş olur. ■

4 NONLİNEER VE NONLOCAL SINIR KOŞULUNA SAHİP BİR YARI LİNEER KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde, nonlinear ve nonlocal sınır koşulu ile verilen aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi incelenmiştir:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c(x, t) u^p & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) sınırı düzgün, sınırlı bir bölge ve $p > 0$, $l > 0$ 'dır. $c(x, t)$ ($x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$) negatif olmayan local Hölder sürekli bir fonksiyon ve $k(x, y, t)$ ($x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$) negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur. $u_0(x)$ ise sınır koşulunu sağlayan, negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur.

$Q_T = \Omega \times (0, T)$ ile işaret ederek, altçözüm (subsolution) ve üstçözüm (supersolution) kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlayacağız.

Tanım 4.1 (i) *Negatif olmayan bir $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ fonksiyonu*

$$\begin{cases} u_t \leq \Delta u + c(x, t) u^p & x \in \Omega, 0 < t < T \\ u(x, t) \leq \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy & x \in \partial\Omega, 0 < t < T \\ u(x, 0) \leq u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (4.2)$$

koşullarını sağlıyorsa u fonksiyonuna Q_T 'de (4.1) probleminin altçözümü; eğer negatif olmayan $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ fonksiyonu (4.2)'deki eşitsizlikleri ters yönden sağlıyorsa u fonksiyonuna Q_T 'de (4.1) probleminin üstçözümü denir.

(ii) *Eğer u fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin hem altçözümü hem de üstçözümü ise u fonksiyonuna Q_T 'de (4.1) probleminin çözümü denir.*

(iii) *Eğer herhangi bir $T > 0$ için u fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin bir çözümü ise u fonksiyonuna (4.1) probleminin global çözümü denir.*

Tanım 4.2 (i) u fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin bir altçözümü ise ve (4.2)'deki ikinci eşitsizlik

$$u(x, t) < \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy$$

biçiminde sağlanıyorsa u fonksiyonuna Q_T 'de (4.1) probleminin mutlak altçözümü denir.

(ii) Eğer u fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin bir üstçözümü ise ve (4.2)'deki ikinci eşitsizlik

$$u(x, t) > \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy$$

biçiminde sağlanıyorsa u fonksiyonuna Q_T 'de (4.1) probleminin mutlak üstçözümü denir.

Global çözümün varlığı ve çözümün sonlu zamanda patlaması (blow up) ile ilgili sonuçlar elde ederken, çözümün pozitif olması özelliği ve karşılaştırma tekniği kullanılacaktır.

Lemma 4.3 u_0 fonksiyonu Ω 'da trivial olmayan bir fonksiyon ve herhangi bir $x \in \partial\Omega$ ve $0 < t \leq T$ için

$$k(x, \cdot, t) \not\equiv 0 \tag{4.3}$$

olsun. Bu durumda, eğer u fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin bir çözümü ise $x \in \bar{\Omega}$, $0 < t \leq T$ için

$$u(x, t) > 0$$

sağlanır.

Teorem 4.4 Negatif olmayan v ve u fonksiyonları Q_T 'de (4.1) probleminin sırasıyla bir üstçözümü ve bir altçözümü olsun ve $x \in \bar{\Omega}$ için

$$v(x, 0) > u(x, 0)$$

sağlansın. Bu durumda, eğer (4.3) sağlanıyorsa veya v bir mutlak üstçözüm ise $(x, t) \in \bar{Q}_T$ için

$$v(x, t) > u(x, t)$$

sağlanır.

4.1 $\max(p, l) < 1$ DURUMUNDA PROBLEMİN İNCELENMESİ

Bu alt bölümde, (4.1) probleminin global çözümünün varlığı, problemin üstçözümü oluşturulup karşılaştırma tekniği kullanılarak gösterilecektir.

Teorem 4.5 $\max(p, l) < 1$ ise herhangi bir başlangıç değeri için (4.1) probleminin global çözümü mevcuttur.

İspat. T herhangi bir pozitif sayı olsun. Q_T 'de (4.1) probleminin bir mutlak üstçözümünü oluşturacağız. $c(x, t)$ ve $k(x, y, t)$ fonksiyonları üzerine konulan koşullardan, Q_T 'de

$$c(x, t) \leq M \quad (4.1.1)$$

ve $\partial\Omega \times Q_T$ 'de

$$k(x, y, t) \leq M \quad (4.1.2)$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısını bulabiliriz. Şimdi,

$$\beta \geq M \quad \text{ve} \quad C > \max \left\{ \sup_{\bar{\Omega}} u_0(x), (M|\Omega|)^{1/(1-l)}, 1 \right\} \quad (4.1.3)$$

olmak üzere

$$v(t) = Ce^{\beta t} \quad (4.1.4)$$

biçiminde tanımlanan $v(t)$ fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin bir mutlak üstçözümü olur.

Gerçekten; herhangi $x \in \Omega$ ve $0 < t < T$ için (4.1.1), (4.1.3) ve (4.1.4) göz önüne alınırsa

$$\Delta v + c(x, t) v^p = 0 + c(x, t) (Ce^{\beta t})^p \leq \beta C^p e^{p\beta t} \quad (4.1.5)$$

elde edilir. $C > 1$ ve $0 < p < 1$ olduğundan $C^p < C$ geçerlidir. O zaman, yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafını

$$\beta C^p e^{p\beta t} \leq \beta C e^{p\beta t} = (\beta C e^{\beta t}) e^{(p-1)\beta t}$$

biçiminde büyütebiliriz. Burada $(p-1)\beta t < 0$ ve dolayısıyla $e^{(p-1)\beta t} < 1$ olacağından

$$\beta C^p e^{p\beta t} < \beta C e^{\beta t} \quad (4.1.6)$$

bulunur. Böylece, (4.1.6) ifadesi (4.1.5)'de göz önüne alınırsa

$$\Delta v + c(x, t) v^p \leq \beta C e^{\beta t} = v_t$$

elde edilmiş olur. Herhangi $x \in \partial\Omega$ ve $0 < t < T$ için, (4.1.2) ve (4.1.4)'den

$$\int_{\Omega} k(x, y, t) v^l(t) dy = (C e^{\beta t})^l \int_{\Omega} k(x, y, t) dy \leq C^l e^{\beta l t} M |\Omega| \quad (4.1.7)$$

yazılabilir. Varsayımdan, $0 < l < 1$ ve $C > (M |\Omega|)^{1/(1-l)}$ olduğundan $C^{1-l} > M |\Omega|$ olur ve bunu (4.1.7) eşitsizliğinin sağ tarafında göz önüne alırsak

$$C^l e^{\beta l t} M |\Omega| < C^l e^{\beta l t} C^{1-l} = C e^{\beta l t} < C e^{\beta t} \quad (4.1.8)$$

eşitsizliği bulunur. O halde, (4.1.8) ifadesi (4.1.7)'de yerine yazılırsa

$$\int_{\Omega} k(x, y, t) v^l(t) dy < v(t)$$

elde edilir. Son olarak, herhangi $x \in \Omega$ için, (4.1.3) ve (4.1.4)'den

$$u_0(x) \leq \sup_{\bar{\Omega}} u_0(x) < C = v(0)$$

bulunur. Sonuç olarak, $v(t)$ fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin bir mutlak üstçözümüdür.

Ayrıca, $x \in \partial\Omega$ için

$$\begin{aligned} v(0) &\geq \int_{\Omega} k(x, y, 0) v^l(0) dy > \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy \\ &= \int_{\Omega} k(x, y, 0) u^l(y, 0) dy = u(x, 0) \end{aligned}$$

yazılabilir ve dolayısıyla $x \in \bar{\Omega}$ için

$$v(0) > u(x, 0)$$

elde edilmiş olur. Böylece, Teorem 4.4'den, \bar{Q}_T 'de

$$v(t) > u(x, t)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik herhangi bir $T > 0$ için geçerli olup, T keyfi büyük seçilebilir. Yine de $v(t) < \infty$ olacağından, herhangi bir $T > 0$ için $u(x, t) < \infty$ olur. Yani, (4.1) probleminin global çözümü mevcuttur. ■

4.2 $\max(p, l) > 1$ DURUMUNDA PROBLEMİN İNCELENMESİ

Bu alt bölümde, (4.1) problemin çözümünün sonlu zamanda patlaması ile ilgili bazı sonuçlar elde edilecektir. Ayrıca, yeterince küçük başlangıç değerine sahip (4.1) probleminin global çözümünün var olduğunu gösterilecektir.

φ fonksiyonu

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -\lambda\varphi & \Omega\text{'da} \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

probleminin ilk özdeğeri λ_1 'e karşılık gelen özfonksiyon olsun ve $\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 1$ koşulunu sağlayacak şekilde seçilsin. Şimdi,

$$\varphi_s = \sup_{\overline{\Omega}} \varphi(x) \quad (4.2.2)$$

diyelim ve

$$\omega(t) = \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x) dx \quad (4.2.3)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Ek olarak,

$$\begin{cases} v'(t) = -\lambda_1 v + c_0(t) v^p & p > 1, 0 < l < 1 \\ v'(t) = -\lambda_1 v + k_0(t) v^l & 0 < p < 1, l > 1 \\ v'(t) = -\lambda_1 v + c_0(t) v^p + k_0(t) v & p > 1, l = 1 \\ v'(t) = -\lambda_1 v + c_0(t) v + k_0(t) v^l & p = 1, l > 1 \\ v'(t) = -\lambda_1 v + c_0(t) v^p + k_0(t) v^l & p > 1, l > 1 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

denklemlerinden birisi ve

$$v(0) = \omega(0) = \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x) dx \quad (4.2.5)$$

başlangıç değeri ile verilen Cauchy problemini göz önüne alalım. Burada

$$c_0(t) = \inf_{\overline{\Omega}} c(x, t) \quad (4.2.6)$$

ve

$$k_0(t) = \frac{\lambda_1}{\varphi_s} \inf_{\partial\Omega \times \overline{\Omega}} k(x, y, t) \quad (4.2.7)$$

ile işaret edilmiştir.

Teorem 4.6 $\max(p, l) > 1$ olsun ve (4.2.4), (4.2.5) Cauchy problemi global çözüme sahip olmasın. O zaman, (4.1) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat. $p > 1$ ve $0 < l < 1$ olsun. (Diğer durumlarda da ispat benzer şekildedir) u fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin çözümü olsun. (4.1)'deki ilk eşitliğin her iki yanını $\varphi(x)$ ile çarpıp Ω üzerinden integralini alalım. O zaman, (4.2.3)'den, $0 < t < T$ için

$$\omega'(t) = \int_{\Omega} (\Delta u + c(x, t) u^p) \varphi(x) dx$$

elde edilir. Bu eşitlikte Green formülü, (4.2.1) ve (4.1)'deki ikinci eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} \omega'(t) &= \int_{\Omega} \varphi(x) \Delta u dx + \int_{\Omega} c(x, t) u^p \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} u \Delta \varphi(x) dx - \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) ds + \int_{\Omega} c(x, t) u^p \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} (-\lambda_1 u + c(x, t) u^p) \varphi(x) dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} ds \\ &= \int_{\Omega} (-\lambda_1 u + c(x, t) u^p) \varphi(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \left(\int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy \right) ds \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (4.2.6), (4.2.7) ve $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} ds = -\lambda_1$ göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \omega'(t) &\geq \int_{\Omega} (-\lambda_1 u + u^p \inf_{\bar{\Omega}} c(x, t)) \varphi(x) dx \\ &\quad - \inf_{\partial\Omega \times \bar{\Omega}} k(x, y, t) \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} ds \right) \left(\int_{\Omega} u^l(y, t) dy \right) \\ &= \int_{\Omega} (-\lambda_1 u + c_0(t) u^p) \varphi(x) dx + \varphi_s k_0(t) \int_{\Omega} u^l(y, t) dy \\ &\geq \int_{\Omega} (-\lambda_1 u + c_0(t) u^p + k_0(t) u^l) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

veya

$$\omega'(t) \geq -\lambda_1 \int_{\Omega} u \varphi(x) dx + c_0(t) \int_{\Omega} u^p \varphi(x) dx + k_0(t) \int_{\Omega} u^l \varphi(x) dx \quad (4.2.8)$$

bulunur. $p > 1$ olduğuna göre (4.2.8)'in sağ tarafında Jensen eşitsizliği kullanılır ve (4.2.3) göz önüne alınırsa

$$\omega'(t) \geq -\lambda_1 \omega + c_0(t) \omega^p$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} \omega'(t) \geq -\lambda_1 \omega + c_0(t) \omega^p \\ \omega(0) = \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x) dx \end{cases} \quad (4.2.9)$$

elde edilmiş olur. Diğer yandan, (4.2.4), (4.2.5) Cauchy probleminin çözümü v ile işaret edilirse

$$\begin{cases} v'(t) = -\lambda_1 v + c_0(t) v^p \\ v(0) = \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x) dx \end{cases} \quad (4.2.10)$$

yazılabilir. Böylece, adi diferansiyel denklemler için karşılaştırma prensibini göz önüne alınırsa, (4.2.9) ve (4.2.10)'dan

$$\omega(t) \geq v(t)$$

elde edilir. Varsayımdan $v(t)$ sonlu zamanda patladığına göre $\omega(t)$ ve dolayısıyla $u(x, t)$ sonlu zamanda patlar. ■

Not 4.7 (i) Teorem 4.6 göz önüne alınır, yeterince büyük başlangıç değeri için (4.1) probleminin global çözümünün mevcut olmadığı söylenebilir. Örneğin, $p > 1$ için

$$\omega(0) > \left[(p-1) \int_0^{\infty} c_0(t) e^{(1-p)\lambda_1 t} dt \right]^{\frac{-1}{p-1}} \quad (4.2.11)$$

koşulu sağlanıyorsa; $l > 1$ için

$$\omega(0) > \left[(l-1) \int_0^{\infty} k_0(t) e^{(1-p)\lambda_1 t} dt \right]^{\frac{-1}{l-1}} \quad (4.2.12)$$

koşulu sağlanıyorsa (4.1) probleminin global çözümü yoktur. Gerçekten; $p > 1$ için

$$v'(t) = -\lambda_1 v(t) + c_0(t) v^p(t)$$

denkleminin her iki tarafı $e^{\lambda_1 t}$ ile çarpılırsa

$$\frac{d}{dt} (v(t) e^{\lambda_1 t}) = c_0(t) v^p(t) e^{\lambda_1 t}$$

veya

$$\frac{d}{dt} (v(t) e^{\lambda_1 t})^{1-p} = (1-p) c_0(t) e^{(1-p)\lambda_1 t}$$

bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının 0'dan t 'ye integrali alınır

$$(v(t) e^{\lambda_1 t})^{1-p} = v^{1-p}(0) - (p-1) \int_0^t c_0(\tau) e^{(1-p)\lambda_1 \tau} d\tau$$

elde edilir. Şimdi, sadelik için

$$\psi(t) = (p-1) \int_0^t c_0(\tau) e^{(1-p)\lambda_1\tau} d\tau$$

ile işaret edilirse, son eşitlik

$$v(t) e^{\lambda_1 t} = [v^{1-p}(0) - \psi(t)]^{\frac{1}{1-p}} \quad (4.2.13)$$

biçiminde olur. $\psi(t)$ sürekli, $\psi(0) = 0$ ve $v(0) > 0$ olduğuna göre, öyle bir $T^* > 0$ vardır ki $t \in (0, T^*)$ için

$$\psi(t) < v^{1-p}(0)$$

sağlanır. Ancak, (4.2.11)'den $t \rightarrow \infty$ iken $\psi(t) > v^{1-p}(0)$ olduğuna göre, $t \rightarrow T^*$ iken

$$\psi(t) \rightarrow v^{1-p}(0)$$

yakınsaması geçerlidir. Böylece, $1-p < 0$ göz önüne alınırsa, (4.2.13)'den

$$\lim_{t \rightarrow T^*} v(t) e^{\lambda_1 t} = \infty$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $t \rightarrow T^*$ için

$$v(t) \rightarrow \infty$$

elde edilmiş olur. Yani, başlangıç değeri yeterince büyük seçilirse (4.2.4), (4.2.5) Cauchy problemi global çözüme sahip değildir. Dolayısıyla, Teorem 4.6'dan, (4.1) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar. ($l > 1$ için de benzer işlemler yapılır)

(ii) Özel olarak; $p > 1$ için

$$\int_0^{\infty} c_0(t) e^{(1-p)\lambda_1 t} dt = \infty \quad (4.2.14)$$

koşulu altında ve $l > 1$ için

$$\int_0^{\infty} k_0(t) e^{(1-p)\lambda_1 t} dt = \infty \quad (4.2.15)$$

koşulu altında (4.1) probleminin trivial olmayan global çözümü yoktur. Gerçekten; $p > 1$ için (i)'de yapılan işlemlerin aynısı yapılarak (4.2.13) ifadesi elde edilir. Böylece, (4.2.14)'den, öyle bir $T^* > 0$ vardır ki $t \rightarrow T^*$ için

$$v^{1-p}(0) - (p-1) \int_0^t c_0(\tau) e^{(1-p)\lambda_1\tau} d\tau \rightarrow 0$$

yazılabilir ve dolayısıyla $t \rightarrow T^*$ için

$$v(t) \rightarrow \infty$$

elde edilmiş olur. Sonuç olarak, Teorem 4.6'dan, (4.1) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar. ($l > 1$ için de benzer işlemler yapılır) Teorem 4.9'da görüleceği gibi, bazı durumlarda (4.2.14) ve (4.2.15) 'kesin' koşullardır.

Aşağıdaki teorem, $c(x, t)$ ve $k(x, y, t)$ katsayıları üzerine konulacak bazı koşullar altında trivial olmayan her bir başlangıç değeri için (4.1) probleminin global çözümünün mevcut olmadığını ifade etmektedir. Sadelik için,

$$P(u, t) \equiv -\lambda_1 u + c_0(t) u^p + k_0(t) u^l \quad (4.2.16)$$

ile işaret edeceğiz. $\delta(t)$ fonksiyonu ise

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = \infty \quad (4.2.17)$$

koşulunu sağlayan ve negatif olmayan herhangi bir fonksiyonu işaret etmektedir.

Teorem 4.8 $\max(p, l) > 1$ ve her bir $u \geq 0$ ve $t \geq 0$ için $P(u, t) \geq \delta(t) u^{\max(p, l)}$ olsun. Bu durumda, trivial olmayan başlangıç koşulu ile verilen (4.1) probleminin her bir çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat. u fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin çözümü olsun. (4.1)'deki ilk eşitliğin her iki yanını $\varphi(x)$ ile çarpıp Ω üzerinden integralini alalım. O zaman, Teorem 4.6'nın ispatında olduğu gibi, $0 < t < T$ için

$$\omega'(t) \geq \int_{\Omega} P(u, t) \varphi(x) dx \quad (4.2.18)$$

elde edilir ($\omega(t)$ (4.2.3)'deki gibi tanımlı bir fonksiyondur). Şimdi, $\max(p, l) = p$ olduğunu farzedelim (Aksi halde p yerine l alınarak benzer işlemler yapılır). Bu durumda, varsayımdan

$$P(u, t) \geq \delta(t) u^p$$

bulunur. Bu eşitsizlik (4.2.18)'de yerine yazılırsa ve Jensen Eşitsizliği kullanılırsa

$$\omega'(t) \geq \delta(t) \omega^p$$

veya

$$\frac{d}{dt} (\omega^{1-p}(t)) \geq (1-p) \delta(t)$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki yanının 0'dan t 'ye integrali alınarak

$$\omega(t) \geq \left[\omega^{1-p}(0) - (p-1) \int_0^t \delta(\tau) d\tau \right]^{\frac{-1}{p-1}}$$

bulunur. Buradan, (4.2.17) ifadesi göz önüne alınırsa, $\omega(0) > 0$ için $\omega(t)$ sonlu bir zamanda patlar diyebiliriz. Gerçekten, sadelik için

$$\psi(t) = (p-1) \int_0^t \delta(\tau) d\tau$$

ile işaret edilirse, son eşitsizlik

$$\omega(t) \geq [\omega^{1-p}(0) - \psi(t)]^{\frac{-1}{p-1}}$$

biçiminde olur. $\psi(t)$ sürekli, $\psi(0) = 0$ ve $\omega(0) > 0$ olduğuna göre öyle bir $T^* > 0$ vardır ki $t \in (0, T^*)$ için

$$\psi(t) < \omega^{1-p}(0)$$

sağlanır. Ancak, (4.2.17)'den, $t \rightarrow \infty$ iken $\psi(t) \rightarrow \infty$ olduğuna göre $t \rightarrow T^*$ iken

$$\psi(t) \rightarrow \omega^{1-p}(0)$$

veya $t \rightarrow T^*$ iken

$$\omega^{1-p}(0) - \psi(t) \rightarrow 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, $p-1 > 0$ olduğundan

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \omega(t) = \infty$$

elde edilmiş olur ve buradan $u(x, t)$ sonlu bir zamanda patlar diyebiliriz. ■

Şimdi, yeterince küçük başlangıç değeri için (4.1) probleminin global çözümlerinin mevcut olduğu gösterilecektir. Bunun için

$$c_1(t) = \sup_{\overline{Q}} c(x, t) \tag{4.2.19}$$

ile işaret edelim. Ayrıca, $\gamma < (p-1) \lambda_1$ biçimindeki bazı γ sayıları için

$$\int_0^\infty c_1(t) e^{-\gamma t} dt < \infty \tag{4.2.20}$$

olduğunu ve $x \in \partial\Omega$, $t \geq 0$ olmak üzere $A > 0$ ve $\sigma < (l-1)\lambda_1$ biçimindeki bazı A ve σ sayıları için

$$\int_{\Omega} k(x, y, t) dy \leq Ae^{\sigma t} \quad (4.2.21)$$

olduğunu varsayalım. Burada λ_1 sayısı (4.2.1) probleminin ilk özdeğerini işaret etmektedir.

Teorem 4.9 $\min(p, l) > 1$ olsun ve (4.2.20), (4.2.21) koşulları sağlansın. Bu durumda, yeterince küçük başlangıç değeri ile verilen (4.1) probleminin global sınırlı çözümü vardır.

İspat. $\tilde{\Omega}$ bölgesi $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$ koşulunu sağlayan \mathbb{R}^n 'de sınırlı bir bölge olsun ve

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -\lambda\varphi & \tilde{\Omega}'\text{da} \\ \varphi|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0 \end{cases} \quad (4.2.22)$$

probleminin ilk özdeğeri $\tilde{\lambda}$,

$$\max\left(\frac{\sigma}{l-1}, \frac{\gamma}{p-1}\right) \leq \tilde{\lambda} < \lambda_1 \quad (4.2.23)$$

koşulunu sağlasın. $\varphi(x)$ ise $\tilde{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. O zaman,

$$\frac{\sup_{\tilde{\Omega}} \varphi(x)}{\inf_{\tilde{\Omega}} \varphi(x)} < a \quad (4.2.24)$$

olacak şekilde $a > 1$ sayısı bulunabilir. Şimdi,

$$0 < \epsilon \leq (Aa^l)^{\frac{-1}{l-1}} \quad (4.2.25)$$

koşulunu sağlayan herhangi bir ϵ sayısını seçelim. Ayrıca, $\tilde{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen $\varphi(x)$ özfonksiyonunu

$$\sup_{\tilde{\Omega}} \varphi(x) = a\epsilon \quad (4.2.26)$$

olacak şekilde alalım. Bu durumda

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi(x) > \epsilon \quad (4.2.27)$$

yazılabilir. Şimdi,

$$B = 1 + (p-1)(a\epsilon)^{p-1} \int_0^{\infty} c_1(\tau) e^{-(p-1)\tilde{\lambda}\tau} d\tau \quad (4.2.28)$$

olmak üzere

$$f(t) = e^{-\tilde{\lambda}t} \left[B - (p-1)(a\epsilon)^{p-1} \int_0^t c_1(\tau) e^{-(p-1)\tilde{\lambda}\tau} d\tau \right]^{\frac{-1}{p-1}} \quad (4.2.29)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda, yukarıdaki gibi belirlediğimiz $\varphi(x)$ ve $f(t)$ fonksiyonları aracılığıyla oluşturulan

$$v(x, t) = \varphi(x) f(t) \quad (4.2.30)$$

fonksiyonu, herhangi bir $T > 0$ için Q_T 'de (4.1) probleminin bir mutlak üstçözümü olur. Gerçekten; herhangi $x \in \Omega$ ve $0 < t < T$ için, (4.2.30) ve (4.2.22) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \Delta v + c(x, t) v^p &= f \Delta \varphi + c(x, t) \varphi^p f^p \\ &= -\tilde{\lambda} \varphi f + c(x, t) \varphi^p f^p \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

bulunur. (4.2.19) ve (4.2.26) kullanılarak, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned} -\tilde{\lambda} \varphi f + c(x, t) \varphi^p f^p &= \varphi \left(-\tilde{\lambda} f + c(x, t) \varphi^{p-1} f^p \right) \\ &\leq \varphi \left(-\tilde{\lambda} f + c_1(t) (a\epsilon)^{p-1} f^p \right) \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

biçiminde büyütülebilir. Diğer yandan, (4.2.28) ve (4.2.29) biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun

$$f' + \tilde{\lambda} f - (a\epsilon)^{p-1} c_1(t) f^p = 0 \quad (4.2.33)$$

denkleminin bir çözümü olduğu görülebilir. Böylece, (4.2.32) ve (4.2.33) ifadeleri (4.2.31)'de yerlerine yazılırsa

$$\Delta v + c(x, t) v^p \leq \varphi f' = v_t$$

bulunur. Herhangi $x \in \partial\Omega$, $0 < t < T$ için, (4.2.30), (4.2.26) ve (4.2.21) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k(x, y, t) v^l(y, t) dy &\leq (a\epsilon)^l f^l(t) \int_{\Omega} k(x, y, t) dy \\ &\leq (a\epsilon)^l f^l(t) A e^{\sigma t} \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

bulunur. (4.2.25) ifadesinden $A(a\epsilon)^l \leq \epsilon$ yazılabileceğinden, bunu (4.2.34) eşitsizliğinde kullanırsak, eşitsizliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned}
(a\epsilon)^l f^l(t) A e^{\sigma t} &\leq \epsilon f^l(t) e^{\sigma t} \\
&= \epsilon e^{\sigma t} e^{-\tilde{\lambda} l t} \left[1 + (p-1) (a\epsilon)^{p-1} \int_0^\infty c_1(\tau) e^{-(p-1)\tilde{\lambda}\tau} d\tau \right. \\
&\quad \left. - (p-1) (a\epsilon)^{p-1} \int_0^t c_1(\tau) e^{-(p-1)\tilde{\lambda}\tau} d\tau \right]^{\frac{-l}{p-1}}
\end{aligned} \tag{4.2.35}$$

biçiminde büyütülebilir. (4.2.20) varsayımı göz önüne alınırsa

$$\int_{\Omega} c_1(t) e^{-(p-1)\tilde{\lambda}t} dt < \infty$$

olacağından (4.2.35) eşitsizliğinin sağ tarafında parantez içindeki ifade 1'den büyük olur. O zaman, sadelik için

$$\kappa = (p-1) (a\epsilon)^{p-1} \int_0^\infty c_1(\tau) e^{-(p-1)\tilde{\lambda}\tau} d\tau - (p-1) (a\epsilon)^{p-1} \int_0^t c_1(\tau) e^{-(p-1)\tilde{\lambda}\tau} d\tau$$

dersek

$$(1 + \kappa)^{\frac{-l}{p-1}} \leq (1 + \kappa)^{\frac{-1}{p-1}} \tag{4.2.36}$$

eşitsizliği geçerli olur. Ayrıca (4.2.23)'den, $\sigma \leq \tilde{\lambda}(l-1)$ olacağından

$$e^{\sigma t} e^{-\tilde{\lambda} l t} \leq e^{-\tilde{\lambda} t} \tag{4.2.37}$$

bulunur. Böylece (4.2.35), (4.2.36) ve (4.2.37) ifadeleri (4.2.34)'de yerlerine yazılırsa ve sonra (4.2.27) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} k(x, y, t) v^l(y, t) dy &\leq \epsilon e^{-\tilde{\lambda} l t} (1 + \kappa)^{\frac{-1}{p-1}} = \epsilon f(t) \\
&< \varphi(x) f(t) = v(x, t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, herhangi $x \in \Omega$ için, v ve f fonksiyonlarının tanımından

$$v(x, 0) = \varphi(x) f(0) = \varphi(x) B^{\frac{-1}{p-1}}$$

elde edilir. Böylece, başlangıç değeri

$$u_0 < B^{\frac{-1}{p-1}} \varphi(x)$$

biçiminde yeterince küçük seçilirse

$$u_0(x) < v(x, 0)$$

bulunur. Sonuç olarak, $v(x, t)$ fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin bir mutlak üstçözümü olur. Ayrıca, $x \in \partial\Omega$ için

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_{\Omega} k(x, y, 0) u^l(y, 0) dy = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy \\ &< \int_{\Omega} k(x, y, 0) v^l(y, 0) dy \leq v(x, 0) \end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla $x \in \bar{\Omega}$ için

$$u(x, 0) < v(x, 0)$$

elde edilmiş olur. Böylece, Teorem 4.4'den, \bar{Q}_T 'de

$$u(x, t) < v(x, t)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik herhangi bir $T > 0$ için geçerli olup, T keyfi büyük seçilebilir. Yine de $v(x, t) < \infty$ olacağından, herhangi bir $T > 0$ için $u(x, t) < \infty$ olur. Yani, (4.1) probleminin global çözümü mevcuttur. ■

4.3 $p = 1$ VEYA $l = 1$ DURUMUNDA PROBLEMİN İNCELENMESİ

Sıradaki teorem $p = 1$ ve $l > 1$ durumu ile ilgilidir ve $\beta \geq 0$, $M > 0$ ve $\gamma > 0$ olmak üzere

$$\int_0^{\infty} k_0(t) e^{(l-1)(\beta-\lambda_1)t} dt = \infty \quad (4.3.1)$$

ve $x \in \partial\Omega$, $t \geq 0$ için

$$\int_{\Omega} k(x, y, t) dy \leq M e^{-(l-1)(\gamma-\lambda_1)t} \quad (4.3.2)$$

varsayımlarına ihtiyaç duyulmaktadır.

Teorem 4.10 $p = 1$ ve $l > 1$ olsun.

(i) $c(x, t) \geq \beta$ ise ve $k(x, y, t)$ (4.3.1) koşulunu sağlıyor ise trivial olmayan başlangıç değeri ile verilen (4.1) probleminin her çözümü sonlu bir zamanda patlar.

(ii) Bazı c sabitleri için

$$c(x, t) \leq c < \gamma \quad (4.3.3)$$

ve (4.3.2) koşulu sağlanıyor ise yeterince küçük başlangıç değerine sahip (4.1) probleminin global sınırlı çözümü vardır.

İspat. (i) u fonksiyonu Q_T 'de (4.1) probleminin çözümü olsun. (4.1)'deki ilk eşitliğin her iki yanını $\varphi(x)$ ile çarpıp Ω üzerinden integralini alalım. O zaman, Teorem 4.6'nın ispatında olduğu gibi, $0 < t < T$ için

$$\begin{aligned} \omega'(t) &\geq \int_{\Omega} (-\lambda_1 u + c_0(t) u + k_0(t) u^l) \varphi(x) dx \\ &= -\lambda_1 \omega(t) + c_0(t) \omega(t) + k_0(t) \int_{\Omega} u^l \varphi(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir ($\omega(t)$ (4.2.3)'deki gibi tanımlı bir fonksiyondur). Buradan, $c(x, t) \geq \beta$ ve Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$\omega'(t) \geq (\beta - \lambda_1) \omega + k_0(t) \omega^l \quad (4.3.4)$$

bulunur. Şimdi,

$$v(t) = e^{-(\beta-\lambda_1)t} \omega(t) \quad (4.3.5)$$

diyelim. Bu durumda, (4.3.4) eşitsizliğinden

$$v'(t) \geq k_0(t) v^l(t) e^{(l-1)(\beta-\lambda_1)t}$$

veya

$$\frac{d}{dt} (v^{1-l}(t)) \geq (1-l) k_0(t) e^{(l-1)(\beta-\lambda_1)t}$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki yanının 0'dan t 'ye integrali alınarak

$$v(t) \geq \left[v^{1-l}(0) - (l-1) \int_0^t k_0(\tau) e^{(l-1)(\beta-\lambda_1)\tau} d\tau \right]^{\frac{-1}{l-1}}$$

bulunur. Böylece, $\delta(t)$ olarak $k_0(t) e^{(l-1)(\beta-\lambda_1)t}$ fonksiyonu alınır ve (4.3.1) ifadesi de göz önüne bulundurulursa Teorem 4.8'in ispatındaki işlemlerin aynısı yapılarak $v(t)$ fonksiyonunun sonlu bir zamanda patladığı elde edilir. Buradan, $\omega(t)$ ve dolayısıyla $u(x, t)$ fonksiyonu sonlu zamanda patlar diyebiliriz.

(ii) $\tilde{\Omega}$ bölgesi $\Omega \subset \subset \tilde{\Omega}$ koşulunu sağlayan \mathbb{R}^n 'de sınırlı bir bölge olsun ve (4.2.22) probleminin ilk özdeğeri $\tilde{\lambda}$

$$\lambda_1 - (\gamma - c) < \tilde{\lambda} < \lambda_1 \quad (4.3.6)$$

koşulunu sağlasın. $\varphi(x)$ ise $\tilde{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. O zaman, (4.2.24) geçerli olacak şekilde $a > 1$ sayısı vardır. Şimdi,

$$0 < \epsilon \leq \left(\frac{1}{a^l M} \right)^{\frac{1}{l-1}} \quad (4.3.7)$$

koşulunu sağlayan herhangi bir ϵ sayısını seçelim. Ayrıca, (4.2.26) ve (4.2.27) koşulları sağlansın. Bu durumda, yukarıdaki gibi belirlediğimiz $\varphi(x)$ fonksiyonu ve $c, \tilde{\lambda}$ sayıları aracılığıyla oluşturulan

$$\bar{u}(x, t) = \varphi(x) e^{(c-\tilde{\lambda})t} \quad (4.3.8)$$

fonksiyonu herhangi bir $T > 0$ için Q_T 'de (4.1) probleminin bir mutlak üstçözümü olur. Gerçekten; herhangi $x \in \Omega$ ve $0 < t < T$ için (4.3.8), (4.3.3) ve (4.2.22) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u} + c(x, t) \bar{u} &= e^{(c-\tilde{\lambda})t} \Delta \varphi + c(x, t) \varphi e^{(c-\tilde{\lambda})t} \\ &\leq -\tilde{\lambda} \varphi e^{(c-\tilde{\lambda})t} + c \varphi e^{(c-\tilde{\lambda})t} \end{aligned}$$

veya

$$\Delta \bar{u} + c(x, t) \bar{u} \leq (c - \tilde{\lambda}) \varphi e^{(c-\tilde{\lambda})t} = \bar{u}_t$$

elde edilir. Herhangi $x \in \partial\Omega$, $0 < t < T$ için, (4.3.8) ve (4.2.26) göz önüne alınırsa

$$\int_{\Omega} k(x, y, t) \bar{u}^l(y, t) dy = e^{l(c-\tilde{\lambda})t} \int_{\Omega} k(x, y, t) \varphi^l(y) dy$$

$$\leq (a\epsilon)^l e^{l(c-\tilde{\lambda})t} \int_{\Omega} k(x, y, t) dy \quad (4.3.9)$$

yazılabilir. Şimdi, (4.3.5) ifadesi düzenlenirse

$$(a\epsilon)^l \leq \frac{\epsilon}{M} \quad (4.3.10)$$

bulunur ve (4.3.2), (4.3.6) ve (4.3.10) ifadeleri (4.3.9) ifadesinin sağ tarafında göz önüne alınırsa

$$(a\epsilon)^l e^{l(c-\tilde{\lambda})t} \int_{\Omega} k(x, y, t) dy \leq \epsilon e^{l(c-\tilde{\lambda})t} e^{(1-l)(\gamma-\lambda_1)t} = \epsilon e^{(c-\tilde{\lambda})t} \quad (4.3.11)$$

elde edilir. Böylece (4.3.11) ifadesi (4.3.9)'da yerine yazılır ve sonra (4.2.27) göz önüne alınırsa

$$\int_{\Omega} k(x, y, t) \bar{u}^l(y, t) dy < \varphi(x) e^{l(c-\tilde{\lambda})t} = \bar{u}(x, t)$$

bulunur. Son olarak, herhangi $x \in \Omega$ için, $\bar{u}(x, t)$ nin tanımından

$$\bar{u}(x, 0) = \varphi(x)$$

bulunur. Böylece başlangıç değeri

$$u_0(x) < \varphi(x)$$

biçiminde yeterince küçük seçilirse

$$u_0(x) < \bar{u}(x, 0)$$

elde edilir. Ayrıca, $x \in \partial\Omega$ için

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_{\Omega} k(x, y, 0) u^l(y, 0) dy = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy \\ &< \int_{\Omega} k(x, y, 0) \bar{u}^l(y, 0) dy \leq \bar{u}(x, 0) \end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla $x \in \bar{\Omega}$ için

$$u(x, 0) < \bar{u}(x, 0)$$

elde edilmiş olur. Böylece, Teorem 4.4'den, \bar{Q}_T 'de

$$u(x, t) < \bar{u}(x, t)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik herhangi bir $T > 0$ için geçerli olup, T keyfi büyük seçilebilir. Yine de $\bar{u}(x, t) < \infty$ olacağından, herhangi bir $T > 0$ için $u(x, t) < \infty$ olur. Yani, (4.1) probleminin global çözümü mevcuttur. ■

Not 4.11 *Teorem 4.10'un ikinci kısmında, (4.3.3)'deki c sayısının varlığı önemli bir koşuldur. Gerçekten, $\delta(t)$ fonksiyonu $0 \leq \delta(t) \leq \lambda_1$ ve $\int_0^\infty \delta(t) dt < \infty$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere*

$$k(x, y, t) \equiv M_0 > 0, \quad c(x, t) = \lambda_1 - \delta(t)$$

olduğunu farzedelim ve $\gamma = \lambda_1$, $M \geq M_0 |\Omega|$ olarak alalım. u fonksiyonu (4.1) probleminin herhangi bir çözümü ve $\varphi(x)$ (4.2.1) probleminden elde edilen ilk özdeğer λ_1 'e karşılık gelen özfonksiyon olsun. O zaman, (4.1)'deki ilk eşitliğin her iki yanını $\varphi(x)$ ile çarpıp Ω üzerinden integralini alırsak, Teorem 4.6'nın ispatındaki işlemlerin benzeri yapılarak

$$\omega'(t) \geq -\delta(t)\omega(t) + M_1\omega^l(t)$$

elde edilir. Burada, $M_1 = \lambda_1 M_0 / \varphi_s$ ve $\omega(t)$ fonksiyonu (4.2.3)'deki gibi tanımlıdır. Şimdi

$$\begin{cases} g'(t) = -\delta(t)g(t) + M_1g^l(t) \\ g(0) = \alpha > 0 \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Cauchy problemini göz önüne alalım. Bu problemin çözümü

$$g(t) = \left[\alpha^{1-l} e^{(l-1) \int_0^t \delta(\tau) d\tau} - (l-1) M_1 \int_0^t e^{(l-1) \int_\tau^t \delta(s) ds} d\tau \right]^{\frac{-1}{l-1}}$$

biçiminde yazulabilir ve buradan, herhangi bir $\alpha > 0$ için $g(t)$ fonksiyonunun sonlu zamanda patladığı görülebilir. Böylece, $\omega(0) \geq \alpha$ ise, (4.3.12) problemi göz önüne alınır ve adi diferansiyel denklemler için karşılaştırma problemi kullanılırsa

$$\omega(t) \geq g(t)$$

elde edilir. Dolayısıyla, her bir $\omega(0) > 0$ için $\omega(t)$ sonlu zamanda patlar ve buradan, trivial olmayan başlangıç değerine sahip (4.1) probleminin her çözümü sonlu zamanda patlar. Böylece, (4.3.2) koşulu ve $c(x, t) < \gamma$ eşitsizliği sağlanıyorsa (4.1) probleminin trivial olmayan global çözümü mevcut değildir.

Aşağıdaki teorem $p > 1$ ve $l = 1$ durumu ile ilgilidir ve

$$\int_0^\infty c_0(t) dt = \infty, \quad \int_\Omega k(x, y, t) dy \geq 1 \quad (x \in \partial\Omega, t \geq 0) \quad (4.3.13)$$

koşulları altında (4.1) probleminin çözümünün blow up olacağını; tersine yeterince küçük başlangıç koşulu ve

$$\begin{cases} c(x, t) \leq M & x \in \bar{\Omega}, t \geq 0 \\ \int_{\Omega} k(x, y, t) dy \leq K < 1 & x \in \partial\Omega, t \geq 0 \end{cases} \quad (4.3.14)$$

koşulları altında (4.1) probleminin global çözümünün mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 4.12 $p > 1$ ve $l = 1$ olsun.

(i) $c(x, t)$ ve $k(x, y, t)$ fonksiyonları (4.3.13) koşullarını sağlıyorsa trivial olmayan başlangıç değeri ile verilen (4.1) probleminin her çözümü sonlu zamanda patlar.

(ii) (4.3.14) koşulları sağlanıyor ise yeterince küçük başlangıç koşuluna sahip (4.1) probleminin global sınırlı çözümü vardır.

İspat. (i) u fonksiyonu (4.1) probleminin bir çözümü ise, Lemma 4.3'den her bir $t_0 > 0$ için

$$u(x, t_0) > \epsilon \quad (x \in \bar{\Omega}) \quad (4.3.15)$$

olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır. Şimdi, $T_* < \infty$ sayısı

$$\int_{t_0}^{T_*} c_0(\tau) d\tau = \frac{1}{(p-1)\epsilon^{p-1}} \quad (4.3.16)$$

eşitliği ile belirli bir sayı olmak üzere

$$h(t) = \left[\epsilon^{-(p-1)} - (p-1) \int_{t_0}^t c_0(\tau) d\tau \right]^{\frac{-1}{p-1}} \quad (4.3.17)$$

biçiminde oluşturulan $h(t)$ fonksiyonu $t_0 < T < T_*$ olacak şekilde her t_0 ve T için $Q_T \cap \{t > t_0\}$ 'da (4.1) probleminin bir altçözümü olur. Gerçekten, herhangi $x \in \Omega$ ve $t_0 < t < T$ için, (4.3.17)'den

$$\Delta h + c(x, t) h^p = c(x, t) \left[\epsilon^{-(p-1)} - (p-1) \int_{t_0}^t c_0(\tau) d\tau \right]^{\frac{-p}{p-1}} \quad (4.3.18)$$

yazılabilir. Son eşitlikte parantez içindeki ifade göz önüne alınırsa

$$\int_{t_0}^t c_0(\tau) d\tau \leq \int_{t_0}^T c_0(\tau) d\tau \leq \int_{t_0}^{T_*} c_0(\tau) d\tau = \frac{1}{(p-1)\epsilon^{p-1}}$$

veya

$$(p-1) \int_{t_0}^t c_0(\tau) d\tau \leq \epsilon^{-(p-1)}$$

olacağından

$$\epsilon^{-(p-1)} - (p-1) \int_{t_0}^t c_0(\tau) d\tau \geq 0$$

bulunur. Yani, (4.3.18)'de parantez içindeki ifade negatif olamaz ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \Delta h + c(x, t) h^p &= c(x, t) \left[\epsilon^{-(p-1)} - (p-1) \int_{t_0}^t c_0(\tau) d\tau \right]^{\frac{-p}{p-1}} \\ &\geq c_0(t) \left[\epsilon^{-(p-1)} - (p-1) \int_{t_0}^t c_0(\tau) d\tau \right]^{\frac{-p}{p-1}} \\ &= h'(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Herhangi $x \in \partial\Omega$ ve $t_0 < t < T$ için, (4.3.13) göz önüne alınırsa

$$\int_{\Omega} k(x, y, t) h(t) dy = h(t) \int_{\Omega} k(x, y, t) dy \geq h(t)$$

bulunur. Son olarak, herhangi $x \in \Omega$ için, (4.3.15) ve (4.3.17) kullanılırsa

$$h(t_0) = \epsilon < u(x, t_0)$$

elde edilir. Sonuç olarak, $h(t)$ fonksiyonu $Q_T \cap \{t > t_0\}$ 'da (4.1) probleminin bir altçözümüdür.

Ayrıca, $x \in \partial\Omega$ için

$$h(t_0) \leq \int_{\Omega} k(x, y, t_0) h(t_0) dy < \int_{\Omega} k(x, y, t_0) u(y, t_0) dy = u(x, t_0)$$

bulunur ve dolayısıyla $x \in \bar{\Omega}$ için

$$h(t_0) < u(x, t_0)$$

elde edilmiş olur. Böylece, Teorem 4.4'den, $\overline{Q_T \cap \{t > t_0\}}$ 'da

$$h(t) < u(x, t)$$

elde edilir. Diğer yandan, $t \rightarrow T_*$ için $h(t) \rightarrow \infty$ olacağından, yani $h(t)$ sonlu zamanda patlayacağından, $u(x, t)$ fonksiyonu da sonlu zamanda patlar.

(ii) $\tilde{\Omega}$ bölgesi $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$ koşulunu sağlayan \mathbb{R}^n 'de sınırlı bir bölge olsun ve (4.2.22) probleminin ilk özdeğerini $\tilde{\lambda}$ ile işaret edelim. $\varphi(x)$ ise $\tilde{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. O zaman, (4.2.24) geçerli olacak şekilde $a > 1$ sayısı vardır. $\tilde{\Omega}$ bölgesi, $a < 1/K$ olacak şekilde seçilmiş olsun. Şimdi,

$$0 < \epsilon \leq \frac{1}{a} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{M} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (4.3.19)$$

koşulunu sağlayan herhangi bir ϵ sayısı seçelim. Ayrıca, (4.2.26) ve (4.2.27) koşulları sağlansın. Bu durumda,

$$v(x, t) = \varphi(x) e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \quad (4.3.20)$$

fonksiyonu herhangi $T > 0$ için Q_T 'de (4.1) probleminin mutlak üstçözümü olur. Gerçekten; herhangi $x \in \Omega$ ve $0 < t < T$ için, (4.3.20), (4.2.22) ve (4.3.14)'den

$$\begin{aligned} \Delta v + c(x, t)v^p &= e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \Delta \varphi + c(x, t) \varphi^p e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \\ &\leq -\tilde{\lambda} \varphi e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} + M \varphi^p e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \\ &= \varphi e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \left(-\tilde{\lambda} + M \varphi^{p-1} e^{(p-1)(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \right) \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

elde edilir. (4.2.26) kullanılarak, yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafında parantez içindeki ifade

$$M \varphi^{p-1} e^{(p-1)(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \leq M (a\epsilon)^{p-1} e^{(p-1)(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \quad (4.3.22)$$

biçiminde büyütülebilir. Ayrıca, (4.3.19) ifadesi düzenlenirse $M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda} \leq 0$ bulunur ve buradan $e^{(p-1)(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \leq 1$ yazılabilir. Dolayısıyla, (4.3.21) eşitsizliğinden

$$\Delta v + c(x, t)v^p \leq \varphi e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \left(-\tilde{\lambda} + M(a\epsilon)^{p-1} \right) = v_t$$

elde edilmiş olur. Herhangi $x \in \partial\Omega$ ve $0 < t < T$ için sırasıyla (4.3.20), (4.2.26) ve (4.3.14)'den

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k(x, y, t)v(y, t)dy &= \int_{\Omega} k(x, y, t)\varphi(y) e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} dy \\ &\leq (a\epsilon) e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} \int_{\Omega} k(x, y, t)dy \\ &\leq (a\epsilon) e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} K \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

bulunur. Burada, $a \leq 1/K$ eşitsizliği göz önüne alınırsa (4.3.23) eşitsizliğinin sağ tarafı

$$(a\epsilon) e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} K \leq \epsilon e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t}$$

biçiminde büyütülebilir. Böylece, son eşitsizlik (4.3.23)'de yerine yazılır ve (4.2.27) göz önüne alınır

$$\int_{\Omega} k(x, y, t) u(y, t) dy < \varphi(x) e^{(M(a\epsilon)^{p-1} - \tilde{\lambda})t} = v(x, t)$$

elde edilmiş olur. Son olarak herhangi $x \in \Omega$ için (4.3.20)'den

$$v(x, 0) = \varphi(x)$$

yazılabilir ve başlangıç değeri $u_0(x) \leq \varphi(x)$ biçiminde yeterince küçük seçilirse

$$u_0(x) \leq v(x, 0)$$

elde edilir. Ayrıca, $x \in \partial\Omega$ için

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_{\Omega} k(x, y, 0) u(y, 0) dy = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0(y) dy \\ &< \int_{\Omega} k(x, y, 0) v(y, 0) dy \leq v(x, 0) \end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla $x \in \bar{\Omega}$ için

$$u(x, 0) < v(x, 0)$$

elde edilmiş olur. Böylece, Teorem 4.4'den, \bar{Q}_T 'de

$$u(x, t) < v(x, t)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik herhangi bir $T > 0$ için geçerli olup, T keyfi büyük seçilebilir. Yine de $v(x, t) < \infty$ olacağından, herhangi bir $T > 0$ için $u(x, t) < \infty$ olur. Yani, (4.1) probleminin global çözümü mevcuttur. ■

Not 4.13 *Teorem 4.12'nin ilk kısmında, (4.3.13)'deki integralin iraksak olması önemli bir koşuldur. Gerçekten*

$$\begin{cases} c(x, t) = c_0(t), & \int_0^{\infty} c_0(t) dt < \infty \\ \int_{\Omega} k(x, y, t) dy = 1 & (x \in \partial\Omega, t \geq 0) \end{cases} \quad (4.3.24)$$

olacak şekilde $c(x, t)$ ve $k(x, y, t)$ fonksiyonlarını alırsak, yeterince küçük başlangıç değeri ile verilen (4.1) probleminin global çözümü vardır. Bunu görmek için

$$u_0(x) < \beta \text{ ve } 0 < \beta < \left[(p-1) \int_0^{\infty} c_0(t) dt \right]^{\frac{-1}{p-1}} \quad (4.3.25)$$

olmak üzere

$$y(t) = \left[\beta^{-(p-1)} - (p-1) \int_0^t c_0(\tau) d\tau \right]^{\frac{-1}{p-1}} \quad (4.3.26)$$

fonksiyonunu tanımlarsak, $y(t)$ fonksiyonu (4.1) probleminin üstçözümü olur. Ayrıca (4.3.24), (4.3.25) ve (4.3.26) göz önüne alınırsa keyfi $t > 0$ için $y(t) < \infty$ olur. Dolayısıyla, Teorem 4.4'den, (4.1) probleminin global çözümü mevcuttur.

Aşağıdaki teorem de $p > 1$ ve $l = 1$ durumu ile ilgilidir ve

$$\int_0^\infty c_0(t) dt = \infty \quad \text{ve} \quad 0 < \int_\Omega k(x, y, t) dy < 1 \quad (x \in \partial\Omega, t \geq 0) \quad (4.3.27)$$

koşullarını sağlayan bazı $c(x, t)$ ve $k(x, y, t)$ fonksiyonları için trivial olmayan başlangıç koşulu ile verilen (4.1) probleminin her bir çözümünün sonlu zamanda patladığı ifade edilmektedir.

Teorem 4.14 $p > 1$ ve $l = 1$ olsun. O zaman, (4.3.27) koşulunu sağlayan öyle $c(x, t)$ ve $k(x, y, t)$ fonksiyonları vardır ki trivial olmayan başlangıç koşulu ile verilen (4.1) probleminin her çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat. Teoremi ispatlamak için (4.1) probleminin sonlu zamanda patlayan bir altçözümünü oluşturacağız. $u(x, t)$ fonksiyonu (4.1) probleminin bir çözümü ise, Lemma 4.3'den, her bir $t_0 > 0$ için

$$u(x, t_0) > \epsilon \quad (x \in \bar{\Omega}) \quad (4.3.28)$$

olacak şekilde $\epsilon > 0$ sayısı vardır. Şimdi, φ_s (4.2.2)'deki gibi tanımlı olmak üzere, $\alpha(t)$ fonksiyonu

$$\alpha(0) = \frac{1}{\varphi_s}, \quad \alpha(t) > 0, \quad \alpha'(t) \leq 0 \quad \text{ve} \quad \int_0^\infty \alpha(t) dt < \infty \quad (4.3.29)$$

koşullarını sağlayan yeterince düzgün bir fonksiyon olsun. Ayrıca,

$$k(x, y, t) \equiv k(t) = \frac{1}{\alpha(t) + |\Omega|} \quad (4.3.30)$$

diyelim. O zaman,

$$\int_\Omega k(x, y, t) dy < 1 \quad \text{ve} \quad t \rightarrow \infty \text{ iken} \quad \int_\Omega k(x, y, t) dy \rightarrow 1 \quad (4.3.31)$$

bulunur. $f(t)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} f'(t) = -\lambda_1 \varphi_s \alpha(t) f(t) + c_0(t) f^p(t) & t > t_0 \\ f(t_0) = \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \quad (4.3.32)$$

probleminin çözümü olsun. Bu durumda, $f(t)$ fonksiyonu açık olarak

$$f(t) = \left\{ (2/\epsilon)^{p-1} e^{(p-1)\lambda_1 \varphi_s \int_{t_0}^t \alpha(t) dt} - (p-1) \int_{t_0}^t c_0(\tau) e^{(p-1)\lambda_1 \varphi_s \int_{\tau}^t \alpha(s) ds} d\tau \right\}^{\frac{-1}{p-1}}$$

biçiminde yazılabilir ve buradan öyle bir $T_\epsilon < \infty$ sayısı vardır ki $t \rightarrow T_\epsilon$ için

$$f(t) \rightarrow \infty$$

olur. Böylece, (4.2.1)'deki koşulları sağlayan, $\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 1$ biçimindeki $\varphi(x)$ fonksiyonu ile yukarıdaki gibi belirlediğimiz $\alpha(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları aracılığıyla oluşturulan

$$v(x, t) = f(t) (\alpha(t) \varphi(x) + 1) \quad (4.3.33)$$

fonksiyonu $t_0 < T < T_\epsilon$ olacak şekilde her t_0 ve T için $Q_T \cap \{t > t_0\}$ 'da (4.1) probleminin bir altçözümüdür. Gerçekten; herhangi $x \in \Omega$ ve $t_0 < t < T$ için (4.3.33), (4.2.1) ve (4.2.6)'dan

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v - c(x, t) v^p &\leq f'(\alpha \varphi + 1) + f \alpha' \varphi + \\ &+ \lambda_1 \varphi f \alpha - c_0(t) f^p (\alpha \varphi + 1)^p \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

bulunur. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadeleri ayrı ayrı değerlendirelim. O zaman, (4.3.32) ve (4.2.2)'den

$$\begin{aligned} f'(\alpha \varphi + 1) &\leq (-\lambda_1 \varphi_s \alpha f + c_0(t) f^p) (\alpha \varphi + 1) \\ &= -\lambda_1 \varphi \varphi_s \alpha f - \lambda_1 \varphi_s \alpha f + c_0(t) \varphi \alpha f^p + c_0(t) f^p \\ &\leq -\lambda_1 \varphi \varphi_s \alpha f - \lambda_1 \varphi_s \alpha f + c_0(t) \varphi_s \alpha f^p + c_0(t) f^p \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

(4.3.29)'den

$$f \alpha' \varphi \leq 0 \quad (4.3.36)$$

(4.2.2)'den

$$\lambda_1 \varphi \alpha f - c_0(t) f^p (\alpha \varphi + 1)^p \leq \lambda_1 \varphi_s \alpha f - c_0(t) f^p (\alpha \varphi_s + 1)^p \quad (4.3.37)$$

elde edilir. Böylece (4.3.35), (4.3.36), (4.3.37) ifadeleri (4.3.34)'de göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
v_t - \Delta v - c(x, t) v^p &\leq -\lambda_1 \varphi \varphi_s \alpha f - \lambda_1 \varphi_s \alpha f + c_0(t) \varphi_s \alpha f^p + c_0(t) f^p + \\
&\quad + \lambda_1 \varphi_s \alpha f - c_0(t) f^p (\alpha \varphi_s + 1)^p \\
&\leq -\lambda_1 \varphi \varphi_s \alpha f + c_0(t) f^p [\alpha \varphi_s + 1 - (\alpha \varphi_s + 1)^p] \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Herhangi $x \in \partial\Omega$ ve $t_0 < t < T$ için, (4.3.33) ve (4.3.30) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} k(x, y, t) v(y, t) dy &= \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha(t) + |\Omega|} f(t) [\alpha(t) \varphi(y) + 1] dy \\
&= \frac{f(t) \alpha(t)}{\alpha(t) + |\Omega|} \int_{\Omega} \varphi(y) dy + \frac{f(t)}{\alpha(t) + |\Omega|} \int_{\Omega} dy \\
&= \frac{f(t) (\alpha(t) + |\Omega|)}{\alpha(t) + |\Omega|} = f(t)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikten, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ olduğu göz önüne alınarak

$$\int_{\Omega} k(x, y, t) v(y, t) dy = f(t) (\alpha(t) \varphi(x) + 1) = v(x, t)$$

yazılabilir. Son olarak, herhangi $x \in \Omega$ için, sırasıyla (4.3.33), (4.3.32) ve (4.2.2)'den

$$\begin{aligned}
v(x, t_0) &= f(t_0) [\alpha(t_0) \varphi(x) + 1] \\
&= \frac{\epsilon}{2} [\alpha(t_0) \varphi(x) + 1] \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} [\alpha(t_0) \varphi_s + 1]
\end{aligned} \tag{4.3.38}$$

bulunur. Burada, $\alpha'(t) \leq 0$ olduğuna göre $\alpha(t)$ azalandır ve dolayısıyla

$$\alpha(t_0) \leq \alpha(0) = \frac{1}{\varphi_s}$$

yazılabilir. Bu ifade (4.3.38)'de yerine yazılır ve (4.3.28) göz önüne alınırsa

$$v(x, t_0) \leq \epsilon < u(x, t_0) \tag{4.3.39}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $v(x, t)$ fonksiyonu $Q_T \cap \{t > t_0\}$ 'da (4.1) probleminin bir alt çözümüdür. Ayrıca $x \in \partial\Omega$ için, (4.3.39) göz önüne alınarak

$$v(x, t_0) = \int_{\Omega} k(x, y, t_0) v(y, t_0) dy < \int_{\Omega} k(x, y, t_0) u(y, t_0) dy = u(x, t_0)$$

bulunur ve dolayısıyla, $x \in \overline{\Omega}$ için

$$v(x, t_0) < u(x, t_0)$$

elde edilmiş olur. Böylece, Teorem 4.4'den $\overline{Q_T \cap \{t > t_0\}}$ 'da

$$u(x, t) > v(x, t)$$

elde edilir. Sonuç olarak, $v(x, t)$ fonksiyonu $T_\epsilon < \infty$ zamanında patladığına göre $u(x, t)$ fonksiyonu da sonlu bir zamanda patlar diyebiliriz. ■

KAYNAKLAR

- [1] R.A. Adams; Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] J.R. Anderson, K. Deng; Global existence for degenerate parabolic equations with a non-local forcing, *Math. Methods Appl. Sci.* 20 (1997) 1069-1087.
- [3] J.W. Bebernes, A. Bressan; Thermal behaviour for a confined reactive gas, *J. Differential Equations* 44 (1982) 118-133.
- [4] J.W. Bebernes, P. Talaga; Nonlocal problems modelling shear banding, *Nonlinear Anal.* 3 (1996) 79-103.
- [5] N.W. Bazley, J. Weyer; Explicitly resolvable equations with functional nonlinearities, *Math. Methods Appl. Sci.* 10 (1988) 477-485.
- [6] C.Y. Chan, J.K. Zhu; Blow-up of solutions of semilinear Euler–Poisson–Darboux equations with nonlocal boundary conditions, *Appl. Math. Comput.* 99 (1999) 17-28.
- [7] W.A. Day; Extensions of property of solutions of heat equation to linear thermoelasticity and other theories, *Quart. Appl. Math.* 40 (1982) 319-330.
- [8] K. Deng, M.K. Kwang, H.A. Levine; The influence of nonlocal nonlinearities on the long time behavior of solutions of Burgers' equation, *Quart. Appl. Math.* 50 (1992) 173-200.
- [9] K. Deng, H.A. Levine; The role of critical exponents in blow-up theorems: The sequel, *J. Math. Anal. Appl.* 243 (2000) 85-126.
- [10] K. Deng; Comparison principle for some nonlocal problems, *Quart. Appl. Math.* 50 (1992) 517-522.
- [11] K. Deng; Behavior solutions of Burgers' equation with nonlocal boundary conditions, *J. Differential Equations* 113 (1994) 394-417.
- [12] K. Deng; Behavior solutions of Burgers' equation with nonlocal boundary conditions II, *Quart. Appl. Math.* 52 (1994) 553-567.
- [13] W. Deng, Z. Duan, C. Xie; The blow-up rate for a degenerate parabolic equation with a non-local source, *J. Math. Anal. Appl.* 264 (2001) 577-597.
- [14] L.C. Evans; *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, Rhode Island, 1998.
- [15] A. Friedman; Monotone decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions, *Quart. Appl. Math.* 44 (1986) 401-407.

- [16] J. Furter, M. Grinfeld; Local vs. nonlocal interactions in population dynamics, *J. Math. Biol.* 27 (1989) 65-80.
- [17] V.A. Galaktionov, H.A. Levine; A general approach to critical Fujita exponents in nonlinear parabolic problems, *Nonlinear Anal.* 34 (1998) 1005-1027.
- [18] D. Gilbarg, N.S. Trudinger; *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 2001
- [19] A.L. Gladkov, K.I. Kim; Blow up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition, *J. Math. Anal. Appl.* 338 (2008) 264-273.
- [20] A.L. Gladkov, K.I. Kim; Uniqueness and nonuniqueness for reaction–diffusion equation with nonlocal boundary condition, in press.
- [21] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya; *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [22] V. Kalantarov, and O. A. Ladyzhenskaya: The occurrence of collapse for quasilinear equation of parabolic and hyperbolic types. *J. Sov. Math.* 10 (1978), 53-70.
- [23] A.A. Kerefov; Non-local boundary value problems for parabolic equation, *Differ. Uravn.* 15 (1979) 74-78 (in Russian).
- [24] S. Kesavan; *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley and Sons, India, 1989.
- [25] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'tseva; *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Providence AMS, 1968.
- [26] G.I. Laptev; Conditions of nonexistence of global solutions of the Cauchy problem for a parabolic equation with an integral nonlinear perturbation, *Differ. Uravn.* 38 (2002) 547-554 (in Russian).
- [27] H. A. Levine; Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Put = -Au + F(u)$. *Arch. Rational Mech. Anal.* 51 (1973), 371-386.
- [28] J. L. Lions; *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969
- [29] L. E. Payne; *Improperly posed problems in partial differential equations*. Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 22. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics 1975.

- [30] L. E. Payne and D. H. Sattinger; Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. *Israel J. Math.* 22 (1975)(3-4), 273-303.
- [31] M.H. Protter, H.F. Weinberger; *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.
- [32] P. Pucci and J. Serrin; Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy. *J. Differential Equations* 150 (1998)(1), 203-214.
- [33] A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov, A.P. Mikhailov; *Blow up in Quasilinear Parabolic Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, 1995.
- [34] B. Straughan, R.E. Ewing, P.G. Jacobs, M.J. Djomehri; Nonlinear instability of a modified form of Burgers' equation, *Numer. Methods Partial Differential Equations* 3 (1987) 51-64.
- [35] P. Souplet; Blow-up in nonlocal reaction–diffusion equations, *SIAM J. Math. Anal.* 29 (1998) 1301-1334.
- [36] P. Souplet; Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source, *J. Differential Equations* 153 (1999) 374-406.
- [37] Z. Tan; The reaction-diffusion equation with Lewis function and critical Sobolev exponent. *J. Math. Anal. Appl.* 272 (2002)(2), 480-495.
- [38] R. Temam; *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag New York, 1988
- [39] P.N. Vabishchevich; Non-local parabolic problems and the inverse heat-conduction problem, *Differ. Uravn.* 17 (1981) 1193-1199 (in Russian).
- [40] E. Vitillaro; Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 149 (1999)(2), 155-182.
- [41] J. Yeh; *Real analysis: Theory of Measure and Integration*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd, Singapore, 2006.
- [42] Y. Yin; On nonlinear parabolic equations with nonlocal boundary condition, *J. Math. Anal. Appl.* 185 (1994) 161-174.
- [43] S. Zheng; *Nonlinear Evolution Equations*, Chapman and Hall/CRC, 2004
- [44] Y. Zhou; Global nonexistence for a quasilinear evolution equation with a generalized Lewis function, *Z. Anal. Anwendungen* 24 (2005), no. 1, 179-187.
- [45] Y. Zhou; Global nonexistence for a quasilinear evolution equation with critical lower energy. *Arch. Inequal. Appl.* 2 (2004)(1), 41-47.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nedim UÇAR

Doğum Yeri : Üsküdar

Doğum Yılı : 1985

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise : 2000-2003 Süleyman Demirel Anadolu Lisesi, Ankara

Lisans : 2003-2007 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi :

2007- Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi