

BULANIK DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ

FUZZY LINEAR REGRESSION ANALYSIS

DUYGU İÇEN

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
İSTATİSTİK Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2010

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'** nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :.....

Prof. Dr. Hamza GAMGAM

Üye (Danışman) :.....

Prof. Dr. Süleyman GÜNAY

Üye :.....

Doç. Dr. Sevil BACANLI

ONAY

Bu tez/...../..... tarihinde Enstitü Yönetimi Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Adil DENİZLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BULANIK DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ

Duygu İçen

ÖZ

Literatürde bulanık mantık ve uygulamaları konusunda yapılan çalışmalar son yıllarda hızla çoğalmaktadır. Bu çerçevede bulanık regresyon, sistem yapısındaki belirsizliğe bağlı olarak verinin tamamının ya da bir kısmının bulanık olması veya değişkenler arasındaki kesin ilişkilerin tanımlanamadığı durumlarda klasik regresyon analizi yerine kullanılan alternatif bir yöntem olarak tercih edilmektedir.

Bu çalışmada, bulanık doğrusal regresyon analizi yöntemleri ele alındı. Bu yöntemler doğrusal programlama temeline dayalı yöntem, bulanık en küçük kareler yöntemi ve sistem parametrelerinin bulanıklaştırılması olmak üzere üç ana başlık altında toplandı. Ayrıca bulanık doğrusal regresyon modeli parametrelerinin anlamlılığı için önerilen bulanık hipotez testleri incelendi.

Bu amaçla ikinci ve üçüncü bölümde bulanık mantık ve bulanık kümelerde kullanılan tanım ve kavramlar verildi. Dördüncü bölüm bulanık sayıların özellikleri ile bulanık sayılarla yapılan işlemlerden oluşmaktadır. Beşinci bölümde literatürde bulunan bulanık doğrusal regresyon analizi yöntemleri ele alındı. Bulanık hipotez testi altıncı bölümde incelendi. Yedinci bölümde Türkiye'deki işsizlik oranı tahminine yönelik modeller oluşturularak sonuçlar karar vericiye göre değerlendirildi ve bulanık sayılar olarak oluşturulan model parametrelerinin önemlilik testleri yapıldı. Son bölümde ise elde edilen sonuçlara yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, bulanık doğrusal regresyon, bulanık parametre tahmini, bulanık hipotez testi.

Danışman: Prof. Dr. Süleyman Günay, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Uygulamalı İstatistik Anabilim Dalı.

FUZZY LINEAR REGRESSION ANALYSIS

Duygu İçen

ABSTRACT

Literature related with fuzzy logic and applications are developing rapidly in recent years. In this framework, fuzzy regression is used as an alternative method for classical regression analysis in the cases of all or some of the data being fuzzy due to the ambiguous system structure or the system structures being unable to determine exact relations between variables.

In this study, fuzzy linear regression analysis methods are discussed. These methods are grouped under three main headings which are linear programming based method, fuzzy least square method and fuzzification of system parameters. Also fuzzy hypothesis tests which are proposed for the significance of linear regression analysis models' parameters are examined.

For this purpose, definitions and concepts which are used with fuzzy logic and fuzzy sets are given in the second and third section. Fuzzy numbers and their properties form the fourth section. In section five, the literature of fuzzy linear regression analysis methods are discussed. Fuzzy hypothesis testing is examined in the sixth section. In the seventh section, Turkey's unemployment rates are calculated according to the decision makers and significance of model parameters are tested. The results are discussed in the final section.

Keywords: Fuzzy sets, fuzzy linear regression, fuzzy parameter estimation, fuzzy hypothesis testing.

Advisor: Prof. Dr. Suleyman Gunay, Hacettepe University, Department of Statistics, Applied Statistics Section.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her aşamasında desteklerini benden esirgemeyen ve değerli önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof.Dr. Süleyman GÜNAY'a,
Öğrenciliğimden itibaren destek ve tavsiyeleriyle kendisini hep yanımda hissettiğim sevgili hocam Doç. Dr. Sevil BACANLI' ya,

Tez çalışmam sırasında göstermiş olduğu anlayış, sabır ve desteğinden dolayı oda arkadaşım Arş. Gör. Ceren Eda CAN' a,

Yüksek lisans öğrenimim sırasında maddi olarak verdiği destekten dolayı TÜBİTAK'a,

Ayrıca hayatımın her aşamasında bana sağladığı imkanlarla bugünlere gelmemde en büyük katkıyı sağlayan canım aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
TABLolar DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ ve ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	1
1.1 Giriş.....	1
1.2 Önceki Çalışmalarla İstatistiğe Bulanık Yaklaşımlar	3
1.2.1 Regresyon Analizi	3
1.2.2 Hipotez Testi	4
2. BULANIK MANTIK KAVRAMI	5
2.1 Bulanık Mantığın Başlangıcı ve Gelişimi.....	5
2.2 Bulanık Mantık Uygulamaları.....	7
3. BULANIK KÜME KURAMI.....	8
3.1. Klasik ve Bulanık Kümeler	9
3.1.1. Klasik Kümeler ve Klasik Küme İşlemleri.....	12
3.2. Bulanık Kümelerde Temel Kavramlar	14
3.2.1. Destek kümesi.....	16
3.2.2. Çekirdek Kümesi	16
3.2.3. Alfa Kesim Kümesi	17
3.2.4. Konveks Küme	17
3.2.5. Yükseklik	19
3.2.6. Normallik	19
3.3. Bulanık Kümenin Çeşitleri	20
3.3.1. Tip 1 Bulanık Kümeler	20
3.3.2. Tip 2 Bulanık Kümeler	21
3.4. Bulanık Kümelerin Özellikleri.....	22
3.4.1. Çelişmezlik İlkesi	22
3.4.2. Üçüncünün Olmazlığı İlkesi	22

3.5. Temel Bulanık Küme İşlemleri.....	23
3.5.1. Bulanık Kümelerin Kesişimi	23
3.5.2. Bulanık Kümelerin Birleşimi.....	23
3.5.3. Bulanık Kümelerin Tümlenyeni.....	24
3.5.4. Bulanık Kümelerin Kuvveti.....	25
3.5.5. Bulanık Kümelerde Kapsama	25
3.5.6. Bulanık Kümelerde Eşitlik.....	25
3.5.7. Bulanık Kümelerde Fark	25
3.5.8. Bulanık Kümelerde Cebirsel Çarpım	26
3.5.9. Bulanık Kümelerde Cebirsel Toplam	26
3.5.10. Bulanık Kümelerde Kartezyen Çarpım	26
4. BULANIK SAYILAR.....	29
4.1. Bulanık Sayı Kavramı	29
4.2. Bulanık Sayı Çeşitleri	31
4.2.1. Üçgensel Bulanık Sayı	32
4.2.3. Karesel Bulanık Sayı	33
4.2.4. Üstel Bulanık Sayı	34
4.3. Bulanık Sayılarda İşlemler.....	35
4.3.1. α Kesim Aralık İşlemleri	35
4.3.2. Genişletme İlkesi	39
5. BULANIK DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ.....	40
5.1. Bulanık Regresyon Analizinde “h düzeyi” ve İşlevi	42
5.2. Bulanık Doğrusal Regresyon Yöntemleri.....	45
5.2.1. Doğrusal Programlama Yaklaşımı	45
5.2.2. Sistem Parametrelerinin Bulandırılması Yöntemi	49
5.2.3. Bulanık En Küçük Kareler Yöntemi.....	52
6. BULANIK HİPOTEZ TESTİ	58
7. UYGULAMA	63
7.1. Klasik Regresyon Modeli.....	64
7.2. Doğrusal Programlama Yaklaşımı ile Bulanık Regresyon Modeli.....	64
7.3. Sistem Parametrelerinin Bulandırılması ile Bulanık Regresyon Modeli ...	69
7.4. Bulanık Hipotez Testi.....	75
8. SONUÇ ve TARTIŞMA.....	81
KAYNAKLAR DİZİNİ	84

EKLER	87
EK -1 SPSS Paket Programı İle Elde Edilen Sonuçlar	88
EK-2 Kesikli X Bağımsız Değişkenleri Ve Kesikli Y Bağımlı Değişkeni İçin Farklı Modellerin LINGO Paket Programında Gösterimi ve Elde Edilen Sonuçları.....	89
ÖZGEÇMİŞ	91

TABLULAR DİZİNİ

Tablo 1.1 Bulanık regresyon analizine yaklaşımlar

Tablo 1.2 Bulanık hipotez testine yaklaşımlar

Tablo 2.1 Klasik mantık ve bulanık mantık arasındaki temel farklılıklar

Tablo 3.1 Klasik küme işlemleri

Tablo 3.2 Bulanık küme işlemleri

Tablo 5.1 Literatürdeki çalışmalarda kullanılan h düzeyi değerleri

Tablo 5.2 Modeldeki değişken ve parametrelerin durumları

Tablo 6.1 Oluşturulan test istatistikleri ve karşılaştırılan tablo değerleri

Tablo 7.1 Yıllara göre Türkiye' deki tüketici fiyatları artış oranları, para arzı artış hızları ve işsizlik oranları

Tablo 7.2 $h = 0,3$ için Tanaka' nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

Tablo 7.3 $h = 0,5$ için Tanaka' nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

Tablo 7.4 $h = 0,7$ için Tanaka' nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

Tablo 7.5 Buckley' nin bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 3.1 Kesin kümenin karakteristik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve bulanık kümenin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x)$
- Şekil 3.2 Bulanık küme ve bulanık kümenin üyelik fonksiyonu
- Şekil 3.3 Sıfıra yakın reel sayılar kümesinin üyelik fonksiyonu
- Şekil 3.4 Sıfıra çok yakın reel sayılar kümesinin üyelik fonksiyonu
- Şekil 3.5 R^2 ' de Bulanık A kümesi için konveks kümeler A_1, A_2, A_3 ve konveks olmayan kümeler A_4, A_5, A_6 .
- Şekil 3.6 (a) Konveks bulanık küme, (b) Konveks olmayan bulanık küme
- Şekil 3.7 \tilde{A} bulanık kümesinin karakteristik özellikleri: yükseklik, çekirdek, destek ve α - kesimleri,
- Şekil 3.8 Tip-2 bulanık küme
- Şekil 3.9 Bulanık kümelerde kesişim işlemi
- Şekil 3.10 Bulanık kümelerde birleşim işlemi
- Şekil 3.11 Bulanık kümenin tümleyeni
- Şekil 4.1 Bulanık sayı $\tilde{A} = [a_1, a_2, a_3]$
- Şekil 4.2 Bulanık sayının α kesimi $(\alpha' \subset \alpha) \Rightarrow (A_{\alpha'} \subset A_{\alpha})$
- Şekil 4.3 L-R tipindeki bulanık sayılar
- Şekil 4.4 Üçgensel bulanık sayı ($\tilde{p} = tfn(\alpha_1, m, \alpha_r)$)
- Şekil 4.5 Karesel bulanık sayı ($\tilde{p} = qfn(\beta_1, m, \beta_2)$)
- Şekil 4.6 Üstel bulanık sayı ($\tilde{p} = efn(\tau_1, m, \tau_2)$)
- Şekil 4.7 Bulanık sayılarla işlemler (a. Toplama, b. Çıkarma, c. Çarpma, d. Bölme)
- Şekil 5.1 h düzeyi ile iki farklı üyelik fonksiyonunun incelenmesi
- Şekil 5.2 Tahmin değerleri (\tilde{Y}_i) , gözlem değerleri $(\tilde{\tilde{Y}}_i)$ ve uyum ölçütü (h düzeyi)
- Şekil 5.3 Bulanık parametre tahmini
- Şekil 7.1 $h = 0,3$ için Tanaka' nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri
- Şekil 7.2 $h = 0,5$ için Tanaka' nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

Şekil 7.3 $h = 0,7$ için Tanaka' nin bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri.

Şekil 7.4 σ^2 ' nin bulanık tahmini

Şekil 7.5 a parametresinin bulanık tahmini

Şekil 7.6 b parametresinin bulanık tahmini

Şekil 7.7 c parametresinin bulanık tahmini

Şekil 7.8 Buckley' nin bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

Şekil 7.9 Bulanık test istatistiği \tilde{T} ve bulanıklaştırılan tablo değerleri $C\tilde{V}_1$ ile $C\tilde{V}_2$

Şekil 7.10 Bulanık test istatistiği \tilde{T} ve bulanıklaştırılan tablo değeri $C\tilde{V}_1$

Şekil 7.11 Bulanık test istatistiği \tilde{T} ve bulanıklaştırılan tablo değeri $C\tilde{V}_2$

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

LIFE	Laboratory for Interchange Logic Systems Institue
FLSI	Fuzzy Logic Systems Institue
EKK	En Küçük Kareler
BDRA	Bulanık Doğrusal Regresyon Analizi
BDRM	Bulanık Doğrusal Regresyon Modeli
BEKK	Bulanık En Küçük Kareler
BEKKY	Bulanık En Küçük Kareler Yöntemi
KDRA	Klasik Doğrusal Regresyon Analizi
DPT	Devlet Planlama Teşkilatı

1. GİRİŞ ve ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Aralarında sebep sonuç ilişkisi bulunan nicel değerleri analiz etmek için kullanılan yöntemlerden biri regresyon analizidir. İncelenen her analiz tekniğinde karşılaşılan sorunlardan biri ve en etkilisi ise belirsizliktir. Belirsizlikleri modellemek için bulanık küme kuramına dayalı istatistiksel yöntemlerin kullanımı son yıllarda hızla artış göstermiştir. Üzerinde en çok çalışılan bu yöntemlerden biri ise bulanık doğrusal regresyon modelidir (BDRM).

Bu çalışmada, klasik doğrusal regresyon analizinin uygulanması için gerekli olan kısıtların sağlanamadığı durumlarda belirsizlikleri modellemek için 1982 yılında Tanaka (1982) tarafından önerilen ve insan düşünüş tarzına en yakın sonuçları veren yöntemlerden biri olan bulanık doğrusal regresyon analizi kullanılmıştır. Ayrıca literatürde geliştirilen BDRM çeşitleri verilmiş ve yapılan uygulama ile BDRA ile oluşturulan parametrelerin önemliliği Buckley (2004)' in önerdiği hipotez testi ile araştırılmıştır.

1.1 Giriş

Açık ya da kesin olmayan bilgi formatındaki belirsizlik, gerçek dünyanın karmaşıklığını arttırdığı gibi teknik, ekonomik, sosyal ve daha pek çok alanda insanlığı tedirgin etmeye devam etmektedir (Ross, 2007). Bu tedirginliği yok etmek için bilim ve mantık sistemlerinin zaman içindeki gelişimi, klasik mantığın önceleri üç değerli, ardından çok değerli ve son olarak sonsuz değerli mantığa ulaşmasını sağlamıştır. 1965' te Lotfi A. Zadeh tarafından olasılık teorisine alternatif olarak ortaya atılan bulanık kümeler kuramının en önemli özelliği, belirsizlik içeren sözel ve sayısal bilgiyi, insan düşünüş tarzına en yakın biçimde modelleyebilmesidir.

Bulanık küme kuramı yöneylem araştırması, yönetim bilimi, yapay zeka, uzman sistemler, kontrol kuramı, ekonometri, istatistik, bankacılık, finans, network ve daha pek çok alanda uygulama alanı bulmuştur. Bulanık küme kuramını temel alan bu tezin konusu, bulanık doğrusal regresyon analizini uygulamak ve oluşturulan bulanık parametrelerin güvenilirliğini Buckley (2004)'in önerdiği bulanık hipotez testi ile araştırmaktır.

Bu çalışma sekiz bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümünde farklı istatistiksel yöntemler için bulanık yaklaşımlar incelenmiştir ve BDRA ile BDRM parametrelerinin testi için kullanılan bulanık hipotez testleri hakkında literatür bilgisi verilmiştir.

İkinci bölümde, bulanık mantık kavramı, bulanık mantığın gelişimi ve bulanık mantık ile yapılan uygulamalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm, bulanık küme kuramında yer alan tanım ve kavramlardan oluşmaktadır. Bu bölümde ayrıca klasik kümeler ile bulanık kümeler arasındaki farklar yer almaktadır. Bulanık küme çeşitleriyle, temel bulanık küme işlemleri ise verilen örneklerle açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde, bulanık sayı kavramı ve bulanık sayı çeşitleri verilmiş, bulanık sayılarla yapılan işlemler verilen örneklerle ele alınmıştır.

Beşinci bölümde, bulanık doğrusal regresyon yöntemlerinden, Tanaka (1982)'nin önermiş olduğu doğrusal programlama modeli, sistem parametrelerinin bulandırılması yöntemi ve bulanık en küçük kareler yöntemi incelenmiştir.

Altıncı bölüm bulanık doğrusal regresyon modelindeki sistem parametreleri için Buckley (2004)'nin önerdiği bulanık hipotez testi ve bu amaçla verilen bir örnekten oluşmaktadır.

Yedinci bölümde Devlet Planlama Teşkilatı'nın internet sitesinden alınan veri kullanılarak bulanık doğrusal regresyon modeli elde edilmiş ve oluşturulan regresyon model katsayılarının önemliliği bulanık hipotez testi ile araştırılmıştır.

Sekizinci bölümde, yapılan uygulama sonuçları değerlendirilerek karşılaşılan sorunlara çözüm aranmıştır. Bu bölümde ayrıca ileride yapılacak çalışmalar için önerilere yer verilmiştir.

1.2 Önceki Çalışmalarla İstatistiğe Bulanık Yaklaşımlar

Burada verilen yaklaşımlar, Taheri (2003) ve Kahraman, Beşkese, Bozbura, (2006)' nın yaptığı çalışmaların bir derlemesidir.

1.2.1 Regresyon Analizi

Doğrusal regresyon analizine bulanık yaklaşım ilk olarak Tanaka (1982) tarafından önerilmiştir. Bu tarihten sonra çok farklı eleştirilere maruz kalan bulanık regresyona getirilen değişik yaklaşımlar Tablo 1.1 ile verilmektedir.

Tablo 1.1 Bulanık regresyon analizine yaklaşımlar

Tanaka ve ark. (1982)	BDRA tanıtılmış ve bir uygulama yapılmıştır.
Diamond (1988)	Bulanık en küçük kareler regresyonu tanıtılmıştır.
Bardossy (1990)	Regresyon denklemlerini genel biçimlerini tanımlamış ve bulanık regresyonun matematiksel programlama problemi olarak formülasyonunun nasıl olması gerektiğini açıklamıştır.
Sakawa ve Yano (1991)	Bulanık gözlemlerin olduğu durumda çok amaçlı BDRM' ni tanıtmışlardır.
Chang ve Ayyub (1997)	Ağırlıklandırılmış bulanık aritmetik ve en küçük kareler uyum kriterine göre oluşturulan melez en küçük kareler regresyonunu tanıtmışlardır.
Chang (1997)	BDRA ile zaman serilerinin trendini belirlemiş ve daha sonra bulanık mevsimselliği üyelik fonksiyonları ile hesaplamıştır.
Tanaka ve Lee (1998)	Aralık regresyonu tanımlanmıştır.
Kim ve Bishu (1998)	Gözlenen ve tahmin edilen bulanık sayılar arasındaki bulanık üyelik değerlerinin farkı minimize eden bir ölçüte dayalı bulanık lineer regresyon analizi önermiştir.
Cheng ve Lee (1999)	Bulanık regresyona bulanık uyarlamalı ağ yaklaşımını getirmişlerdir. Parametrik olmayan regresyon teknikleri ile bulanık regresyon tekniklerini farklı algoritmalarla birleştirmişlerdir.
Yen ve ark. (1999)	Bulanık regresyonda simetrik olmayan üçgensel bulanık sayıların kullanımını tanıtmışlardır.
Dunyak ve Wunsch (2000)	Doğrusal olmayan bulanık regresyonu sinir ağı modellerini kullanarak açıklamışlardır.

Tablo 1.1 Bulanık regresyon analizine yaklaşımlar (Devam)

D'Urso ve Gastaldi (2000)	Çekirdek regresyon modeli ve yayılım regresyon modelinden oluşan yeni bir bulanık doğrusal regresyon modeli önermişlerdir.
Peters (2001)	Bulanık örüntü tanıma ve ağırlıklı doğrusal regresyon modeli ile tahminlerde bulunmuştur.
Ishibuchi ve Nii (2001)	Bulanık regresyonun bazı kısıtlamalarını açıklamışlar ve simetrik olmayan bulanık veri kullanarak bulanık regresyona simetrik parametre tahminleri yapmışlardır.
Kao ve Chyu (2002)	Bulanık doğrusal regresyon analizi için iki aşamalı bir yaklaşım önermişlerdir.
Hong ve Hwang (2004)	Diamond'ın önerdiği modeli bulanık çoklu doğrusal regresyon modeli olarak geliştirmişlerdir.

1.2.2 Hipotez Testi

İstatistiksel hipotez testinde bulanık küme kuramı kullanılarak geliştirilen bulanık hipotez testindeki yaklaşımlar Tablo 1.2 ile verilmektedir.

Tablo 1.2 Bulanık hipotez testine yaklaşımlar

Casals ve ark. (1986) Casals ve Gil (1989)	Bulanık olayları ele alıp bunlar üzerinden oluşturulan hipotezlerin testlerini araştırmışlardır.
Saade ve Schwarzlander (1990)	Rasgele ve bulanık veri karışımı üzerinden hipotez testi geliştirmişlerdir.
Watanabe ve Imaizumi (1993)	Rastgele veri için bulanık hipotez test yöntemini tanıtmışlardır.
Takayanagi and Cliff (1994)	Hipotez testinin oluşumunda insan düşünüş tarzının etkisini araştırmışlardır.
Romer and Kandel (1995)	Belirsiz verinin istatistiksel hipotez testi üzerindeki etkisini araştırmışlardır.
Yao and Wu (2001)	Bulanıklık ve rasgeleliği beraber barındıran veri kümesi için bulanık ardışık test yöntemini tanıtmışlardır.
Buckley (2004)	Bulanık doğrusal regresyon parametreleri için güven aralıklarına dayalı hipotez testini önermiştir.
Taheri and Arefi (2009)	Bulanık Hipotez testinde bulanık sayıların alanlarını hesaplayarak yeni bir test geliştirmişlerdir.

2. BULANIK MANTIK KAVRAMI

Günlük hayatta karşılaşılan sistemler ve sorunlar çok karmaşık yapıya sahip olup geleneksel mantığın çoğu zaman yetersiz kaldığı durumlara neden olmaktadır. Bunun temel nedeni doğada var olan karmaşıklığın klasik mantığa dayanan geleneksel yöntemlerle tam olarak ifade edilememesidir. Çünkü belirsizlik, doğal hayatta ve günlük yaşantımızda büyük ölçüde rol oynamaktadır. Bulanık mantık, geleneksel mantığın açıklayamadığı ve sorunları çözmede yetersiz kaldığı durumlarda çözümler üretmekte ve klasik mantığın eksiklerini gidermektedir.

“Bulanık mantığın en çok geçerli olduğu iki durumdan ilki, incelenen olayın çok karmaşık olması ve bununla ilgili yeterli bilginin bulunmaması durumunda kişilerin görüş, deneyim ve değer yargılarına yer verilmesidir. İkincisi ise insan muhakemesine, kavrayışlarına ve karar vermesine ihtiyaç gösteren hallerdir.” (Şen, 2001)

2.1 Bulanık Mantığın Başlangıcı ve Gelişimi

Modern bilim, felsefe ve kültürel değişimlerin pek çok alanında 19., 20. ve 21. yüzyıl devrimlerle dolu bir süreci gösterir. Bu süreç henüz sonlanmamıştır ve tüm hızıyla devam etmektedir. Bilimsel buluşlar çağı olan günümüzde zaman zaman akla aykırı gelen bilimsel çalışmalar üretilerek algı, fizik ve kültür birikimimizi zenginleştirmiştir, böylece bilime dayalı dünya görüşümüz her an bir adım daha ileriye gitmektedir.

Bilimin başlangıcı olarak kabul edilen süreç eski yunan filozoflarından Aristoteles (İ.Ö.384–322) ile başlamış olarak kabul edilse de, Aristoteles'ten önce Elea Okulu ve Sofistler (İ.Ö.500) mantık biliminin kurulması için çalışmalar yapmışlardır. Ancak, mantığın ilkelerini belirleyen ve onu sistemli bir hale getiren Aristoteles'tir.

Aristo Mantığı olarak kabul edilen klasik mantık 20. yüzyılın ilk yarısından itibaren matematikçiler ve filozofların ürettikleri paradoksları açıklamada yetersiz kalmıştır. Çünkü gerçek dünyadaki herhangi bir önermenin sadece doğru ve yanlış olması beklenemez. Bu eksiklikten yola çıkılarak oluşturulan “çok değerli mantığın” en

ilkel hali olan üç değerli mantık, klasik mantığın genelleştirilmesi ile elde edilir. Ayrıca iki değerli mantığın değer kümesi genişletilerek üç boyutlu mantığa ulaşılabilir (Baykal ve Timur, 2004).

Doğru ile yanlış arasında sonsuz farklı değer olduğundan söz eden Polonyalı mantık bilimcisi Lukasiewicz 1900'lerin başında çok değerli mantığı ele alıp doğruluk değerleri kümesini $[0,1]$ aralığındaki rasyonel sayılar yerine tüm reel sayılar olarak tanımlayıp sonsuz değerli mantığa geçiş yapmış ve "olası" kavramını ortaya atmıştır (Baykal ve Timur, 2004). 1965'te Lotfi Zadeh, o zamana kadar yapılan tüm mantıksal yaklaşımları toplu bir şekilde ele alarak tanımlamış ve ulaştığı çıkarımlarla bulanık mantığı keşfeden kişi olmuştur. Günümüzde Zadeh (1965), bulanık mantık ile birlikte anılmaktadır.

Zadeh (1965)'in bulanık mantık üzerindeki ilk çalışmalarının sonucundaki temel fikir bir önermenin doğruluğunu araştırırken önermenin kesin yanlış ve kesin doğru arasındaki sonsuz sayıda doğruluk değerlerini içeren bir kümedeki değerleri olarak kabul edilmesidir. Sayısal olarak ifadesi ise önermenin doğruluğunu $[0,1]$ reel sayı aralığıyla ilişkilendiren bir fonksiyonun varsayımı olarak verilmektedir (Baykal ve Timur, 2004).

Bulanık mantığın genel özellikleri Zadeh (1978) tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir (Çetin, 2003):

- Bulanık mantıkta, kesin değerlere dayanan düşünme yerine, yaklaşık düşünme kullanılır.
- Bulanık mantıkta her şey $[0, 1]$ aralığında belirli bir derece ile gösterilir.
- Bulanık mantıkta bilgi büyük, küçük, çok, az gibi dilsel ifadeler şeklindedir.
- Bulanık çıkarım işlemi dilsel ifadeler arasında tanımlanan kurallar ile yapılır.
- Her mantıksal sistem bulanık olarak ifade edilebilir.
- Bulanık mantık matematiksel modeli çok zor elde edilen sistemler için çok uygundur.

Klasik mantığın ortaya çıkmasından bu yana aslında doğada var olan, ancak bilimselliği sonradan ispatlanan bulanık mantık Zadeh'in tanımlamalarıyla gerçek kimliğini kazanmıştır. Klasik ve Bulanık Mantık arasındaki temel farklılıklar Tablo 2.1 ile verilmiştir (Yücel, 2005).

Tablo 2.1 Klasik mantık ve bulanık mantık arasındaki temel farklılıklar

KLASİK (İki Değerli) MANTIK	BULANIK (Sonsuz Değerli) MANTIK
A veya A değil	A ve A değil
Kesinlikle	Kısmen
{0,1}	[0,1]
Dijital Bilgisayar	İnsan Beyni
Basic,Pascal, C, v.b.	Türkçe, İngilizce,v.b.
Bit (ikili birimler)	Fit (kısmi,dereceli birimler)

Bulanık mantığın en çok kullanıldığı durumdan ilki, araştırılan olayın çok karmaşık olmasının yanında olayla ilgili yeterli bilginin bulunmaması durumunda uzman kişilerin görüş ve değer yargılarına yer verilmesidir. Diğeri ise insan kavrayış ve kararına ihtiyaç duyulan hallerdir.

2.2 Bulanık Mantık Uygulamaları

Belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesine olanak sağlayan bulanık mantığın uygulama alanları son yıllarda giderek artmaktadır. ABD, Japonya, Çin başta olmak üzere otuzdan çok ülkede bulanık mantık hakkında araştırmalar yapılmaktadır.

Dr. Zadeh (1965) tarafından belirsizliği modellemek için 1965 yılında ortaya koyulan Bulanık Mantık ilk kez 1973 yılında Prof. Mamdani (1973) tarafından bir buhar makinesinde uygulanmıştır. Bulanık mantığın ilk önemli endüstriyel uygulaması ise 1980 yılında Danimarka'daki bir çimento fabrikasında F.L. Smidth (1980) tarafından gerçekleştirilmiştir

Bu tarihten sonra yapılan önemli bir uygulama ise Hitachi firması tarafından 1987 yılında Sendai Metro'sunun kontrolünde gerçekleştirilmiştir. Bulanık mantığın

kullanımıyla trenin metro istasyonlarında istenen konumda durması iyileştirilip ayrıca %10 enerji tasarrufu sağlanmıştır. Farklı sektörlerde uygulama alanı daha da genişleyen bulanık mantık bu kez Yamaichi Securities tarafından geliştirilen uzman sistem kullanılarak 1988 yılındaki Tokyo Borsasında yaşanan krizin sinyallerini 18 gün önceden haber vermiştir.

Farklı alanlarda çok başarılı sonuçlar veren bulanık mantığa ilgi gün geçtikçe artmıştır ve 1989 yılında Thomson, Hitachi, IBM, Toshiba ve Matsuhita gibi dünyaca ünlü şirketlerin katılımıyla 51 firma tarafından LIFE laboratuvarları kurulmuştur. Ayrıca FLSI adıyla farklı bir araştırma merkezi de Bulanık Mantığın elektronik, otomotiv ve üretim teknolojisi alanında kullanımı ile ilgili yeni çalışmalar yapmaktadır.

Tüm bu açıklamalardan sonra belirsizliğin her alanda bulunduğu ve bunların nesnel olarak incelenmesi için gerekli olan klasik teknik, yöntem ve yaklaşımların dışında onu sayısallaştırıp analize katacak bir yöntem ihtiyacı olduğu açıktır. Günlük konuşma dilinde geçen sözel belirsizlikleri de modele katıp hesaplamalarda kullanma tekniği olan bulanık mantık, insan zekasını en kapsamlı şekilde ele alıp analiz edebilen bir mantık sistemidir. Sonsuz değer alabilme özelliğini kullanarak makine ve sistemlere insanların özel veriyi işleyebilme ve onların deneyimlerinden yararlanarak çıkarsama yapma yeteneğini verir (Çetin, 2003).

2. BULANIK KÜME KURAMI

Günlük hayatta pek çok grup ve kategoriler kümeler ile ifade edilir. Sonlu veya sonsuz elemanlardan oluşan kümeler ile yapılan ayrıştırma ile kümeye ait olan ve olmayan elemanlar arasındaki sınır kesin bir çizgi ile belirlenir. Örneğin para atma deneyinin sonucu yazı ya da turadır. Aynı şekilde bir kura çekilişinde istenen sayının gelmesi veya gelmemesi gibi iki sonuç vardır.

Bu tür rasgelelikler dışında gerçek hayatta karşılaşılan pek çok olaydaki ayırım ve gruplamalar bu kadar kesin ve net değildir (Kocadağlı, 2006). Örneğin bir sınavın zorluğu öğrenciden öğrenciye değişmektedir. Aynı şekilde pahalı giyecek, ucuz

araba, az şekerli çay, güzel film, uzun boy, sıcak hava gibi kategori ve gruplamalar net sınırları olan ve herkes tarafından kabul edilen belirlenmiş ayırmalara sahip değildir. Bu tür ayırımlar için istenen sınır değerleri, bulunan çevreye ya da insanlara göre değişmektedir. Bu tür kümelerin oluşturulmasında bir elemanın bir kümenin kesin elemanı olup olamaması yerine, bir dereceye kadar eleman olması akla daha uygundur. Örneğin bir kişi belirli bir üyelik derecesine göre hem uzun boylu insanlar hem de kısa boylu insanlar kümesine ait olmaktadır. Bundan dolayı kısmi ve dereceli üyelik tanımlaması ve buna bağlı olarak problemlerin çözümü için bulanık küme kuramı geliştirilmiştir.

3.1 Klasik ve Bulanık Kümeler

Genel olarak incelenen bir olayın ya da verilen bir problemin sonucunda ulaşılabilmesi mümkün olan topluluğa küme denir (Baykal ve Timur, 2004). Geleneksel küme kuramında kesin sınırlı küme tanımı kullanılmaktadır. Bu kavram bir nesnenin bir kümenin elemanı olması ya da olmaması gibi iki seçeneğe dayanmaktadır. *“Aristo mantığına göre çalışan ve şimdiye kadar alışlagelen klasik küme kavramında, bir kümeye giren öğelerin o kümeye ait oluşları durumunda üyelik dereceleri 1'e, ait olamamaları durumunda ise 0'a eşit varsayılmıştır. İkisi arasındaki hiçbir üyelik derecesi düşünülemez. Ancak Bulanık kümeler kavramında 0 ve 1 arasında değişen değişik üyelik derecelerinden bahsetmek mümkündür”* (Şen,2001). Bu şekilde bulanık kümelerin doğal hayatta daha çok uygulanabilir olduğu sonucu çıkarılır.

Klasik mantıkta, önermeler ya doğrudur ya da yanlıştır, başka seçenekleri olamaması nedeniyle klasik mantığı kullanan klasik kümeler, evrensel kümenin elemanlarını, kümeye ait olanlar ve ait olmayanlar şeklinde ikiye böler. Klasik kümeler yaşadığımız dünyayı siyah ve beyaz, doğru ve yanlış, iyi ve kötü gibi kategorize ederek ikiye bölen birbirine zıt ikili kavramlarla oluşturulur. Örneğin bir sınıftaki yeşil gözlü öğrenciler bir küme oluşturur. Bu kümenin öğeleri olan öğrencilerin ortak özellikleri verilen bir zamanda, belirli bir sınıfta olup göz renklerinin yeşil olmasıdır.

Örneğin x 'in A kümesinin elemanı olması $x \in A$, elemanı olmaması ise $x \notin A$ şeklinde ifade edilir. x_1, x_2, \dots, x_n değişkenleri A kümesinin elemanları ise

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (3.1)$$

eşitliği ile gösterilir. $\mu_A(x)$ sadece 0 ve 1 değerini alan üyelik fonksiyonu olarak verildiğinde x 'in A kümesinin elemanı olup olmadığını belirleyen fonksiyon (Karakteristik Fonksiyon)

$$\mu_A(x) = E \rightarrow \{0,1\} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlik evrensel kümeden, $\{0,1\}$ kümesine bir fonksiyon olarak da ifade edilebilir.

Bir çeşit çok değerli küme kuramı olan bulanık küme kuramında ise bir birey, klasik küme kuramında olduğu gibi üye ya da üye değil olarak değil, bir dereceye kadar üye olarak görülür. Herhangi bir kum yığını oluşturulan kum taneciklerinin hepsi kümenin elemanları olarak düşünüldüğünde, kum yığından oluşan bir küme, bulanık küme kuramına örnek olarak gösterilebilir. Kum yığından bir küre alınır ayrıldığında kalan yığın hala aynı kum yığını mıdır? Ya da kum yığını olup olmama arasındaki sınır nedir? Bu gibi durumlarda kullanılan kısmi üyelik derecesi kavramı, bulanık küme kuramının uygulama alanına bir örnek oluşturur. Bulanık kümelerde klasik kümelerdeki karakteristik fonksiyon, $\mu_A(x) = E \rightarrow \{0,1\}$, yerini Eşitlik 3.3' de verilen üyelik fonksiyonuna bırakır (Baykal ve Timur, 2004). Bu ifade ile verilmiştir.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = E \rightarrow [0,1] \quad (3.3)$$

Başka örnek vermek gerekirse, normal koşullar altında suyun donma sıcaklık dereceleri A kümesini oluşturduğunda, A kümesi

$$A = \{x \in X \mid x \leq 0\} \quad (3.4)$$

ya da A kümesinin karakteristik fonksiyonu olan

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases} , x \in X \quad (3.5)$$

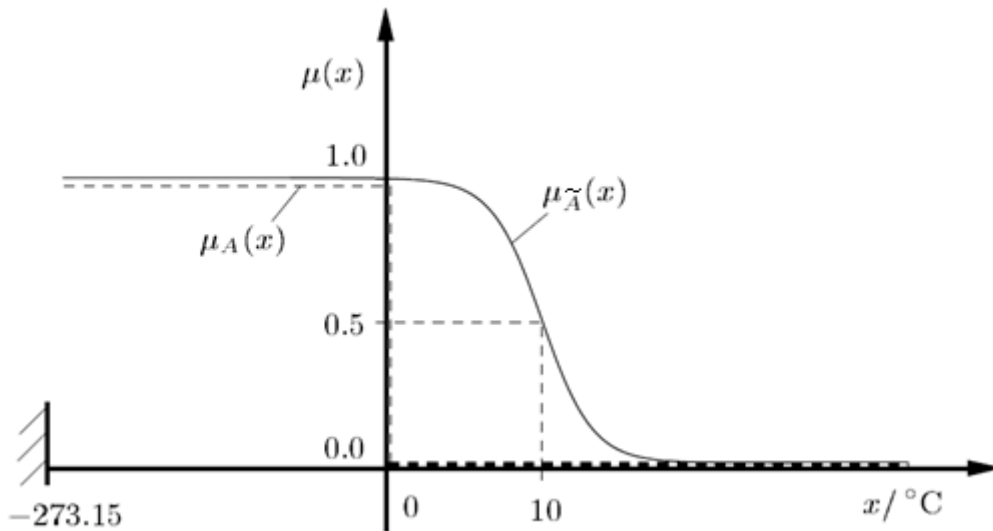
eşitlikleri ile ifade edilir ve Şekil 3.1 ile gösterilir. Buradaki A kümesinin elemanları kesin sınırlarla belirlenmiştir. Yukarıda verilen örnek daha kapsamlı olarak ele alınıp, A kümesi “düşük sıcaklıklar kümesi” olarak belirlenirse

$$\tilde{A}(x) = \text{”}x, \text{ düşük bir sıcaklıktır”} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir ve bulanık bir küme olan \tilde{A} kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = X \rightarrow [0,1] \quad (3.7)$$

olarak yazılır. Şekil 3.1 ile gösterilen bu eşitlik, üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır (Hanss, 2005). Bulanık kümelerde bir eleman için üyelik fonksiyonunun değeri 1’e yaklaştıkça, bu elemanın kümeye aitliği artmaktadır (Dubois ve Prade, 1980).



Şekil 3.1 Kesin kümenin karakteristik fonksiyonu ($\mu_A(x)$) ve bulanık kümenin üyelik fonksiyonu ($\mu_{\tilde{A}}(x)$).

Yukarıda özellikleri verilen bulanık küme kuramı ekonomi, yöneylem araştırması, istatistik ve diğer alanlardaki yapay zeka sistemlerinin oluşturulmasında önemli bir temel oluşturmaktadır.

3.1.1 Klasik Kümeler ve Klasik Küme İşlemleri

Ortak özelliğe sahip, birlikte ele alınabilen nesnelere topluluğu küme olarak adlandırılır (İnal ve Günay, 2010). Kümeyi meydana getiren nesnelere ise kümenin elemanları denir. Eğer a bir A kümesinin elemanı ise bu durum

$$a \in A \quad (3.8)$$

şeklinde gösterilir. Eğer b , A kümesinin elemanı değilse bu durum

$$b \notin A \quad (3.9)$$

biçiminde yazılır. Bir kümenin belirlenmesi için o kümenin elemanlarının tek tek belirtilmesi ya da küme elemanlarının belirlenmesine yarayan karakteristik özelliklerin verilmesi gerekir. Klasik kümelerde elemanların kümelere üyeliğini gösteren fonksiyona karakteristik fonksiyon denir, Eşitlik 3.10 ile ifade edilir.

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases} \quad (3.10)$$

Tanım 3.1. Bir A kümesinin her bir elemanı B kümesinin de bir elemanı ise, A kümesi, B 'nin alt kümesidir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

Tanım 3.2. Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise, A ile B kümeleri eşittir. $A = B$ biçiminde gösterilir. A kümesinin en az bir elemanı B 'de değilse veya B 'nin en az bir elemanı A 'da değilse A ile B farklıdır denir, $A \neq B$ ile ifade edilir.

Tanım 3.3. A ile B kümesinin tüm elemanlarının oluşturduğu kümeye, A ile B kümesinin birleşimi denir ve $A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$ ile gösterilir.

Tanım 3.4. A ile B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ile B kümesinin kesişimi denir ve $A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$ ile gösterilir.

Tanım 3.5. $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümeleri ayrık kümelerdir.

Tanım 3.6. Bir A kümesinin E evrensel kümesine göre tümleyeni öyle bir kümedir ki, bu küme, evrensel kümenin A'ya ait olmayan öğelerini kapsar. A kümesinin tümleyeni $A' = \{x : x \notin A\}$ ile gösterilir.

Klasik kümeye aynı zamanda *keskin küme* (crisp set) de denilmektedir. Keskin bir kümede çelişmezlik ilkesi (Law of contradiction) olarak bilinen kurala göre $A \cap A' = \emptyset$ dir. Bu kurala göre bir eleman A kümesine ya aittir, ya da ait değildir. İkisinin arasında başka bir durum söz konusu olamaz. Bunun yanı sıra üçüncünün olmazlığı (Law of excluded middle) olarak bilinen $A \cup A' = E$ kuralına göre, keskin bir kümenin elemanları ile tümleyen kümesindeki elemanların birleşimi evrensel kümeye eşittir. Klasik kümelere ait diğer küme işlemleri Tablo 3.1 ile verilmiştir.

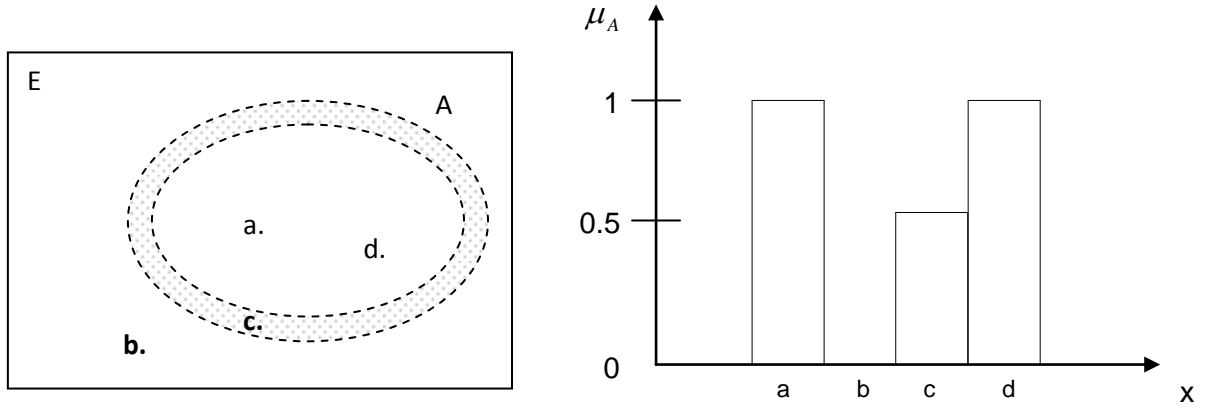
Tablo 3.1. Klasik küme işlemleri

Tümeleme	$A' = A$
Değişme Özelliği	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Birleşme Özelliği	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Dağılım Özelliği	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan Kuralı	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
Çelişmezlik	$A \cap A' = \emptyset$
Üçüncünün olamazlığı	$A \cup A' = E$

Tablo 3.1 de verilen çelişmezlik ilkesi ve üçüncünün olmazlığı ilkelerinden ortak bir sonuç çıkarmak gerekirse, keskin kümelerde bir eleman herhangi bir kümeye ya tamamen aittir, ya da kesinlikle ait değildir.

3.2 Bulanık Kümelerde Temel Kavramlar

Bulanık küme, üyelik değerleri sürekli olan nesnelerin bir kümesidir ve üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Üyelik fonksiyonu yardımıyla kümenin her bir elemanına 0 ile 1 arasında değişen üyelik değerleri atanmaktadır (Bandemer ve Gottwald, 1995). Şekil 3.2 ile bulanık kümenin sınırları Venn şeması ve üyelik fonksiyonu ile gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Bulanık küme ve bulanık kümenin üyelik fonksiyonu

Zadeh sonlu ve sonsuz sayıda elemana sahip bulanık kümelerin gösterimini Eşitlik 3.11 ve Eşitlik 3.12 ile tanımlamıştır. Burada Σ ve \int sembolleri, sırasıyla toplama ve integral anlamında kullanılmayıp, üyelik fonksiyonlarının birleşimini ifade eder. Ayrıca Eşitlik 3.11 ve Eşitlik 3.12' de belirtilen bölü “/” işareti matematiksel anlamında kullanılmaz. İfadenin paydasında küme elemanı bulunur. Pay kısmı ise paydada bulunan elemanın kümeye hangi üyelik derecesiyle bağlı olduğunu gösterir (Zimmermann, 2001).

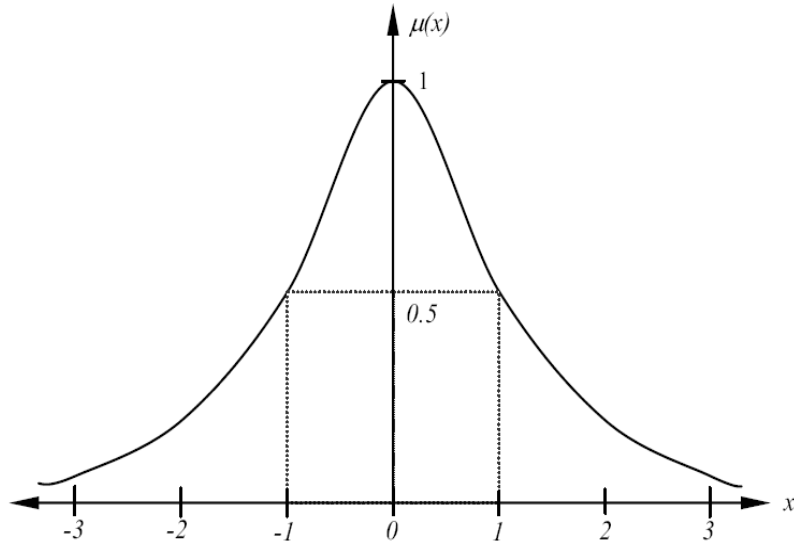
$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i \quad (3.11)$$

$$A = \int_x \mu_A(x)/x \quad (3.12)$$

Bulanık küme ile ilgili Lee'nin verdiği örnekte A kümesi "sıfıra yakın reel sayılar" olarak tanımlanmıştır. Görüldüğü gibi burada, belirtilen kümenin sınırları çok net çizilmemiştir. Lee bu kümenin üyelik fonksiyonunu Eşitlik 3.13'teki gibi belirlemiştir.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (3.13)$$

Eşitlik 3.13 ile verilen A kümesinin üyelik fonksiyonun grafiksel gösterimi Şekil 3.3 ile verilmiştir.

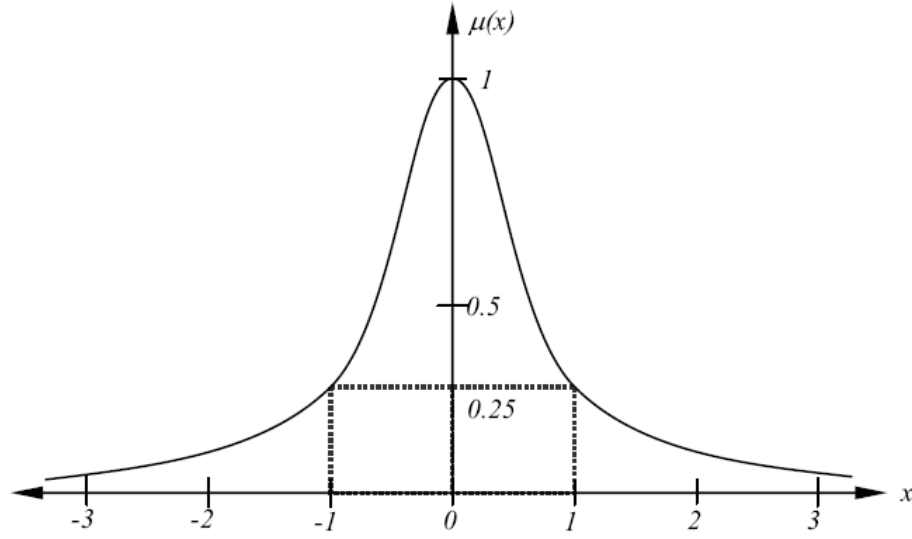


Şekil 3.3 Sıfıra yakın reel sayılar kümesinin üyelik fonksiyonu

Bulanık kümeler ile ilgili Lee'nin verdiği ikinci örnekte B kümesi "sıfıra çok yakın reel sayılar" olarak tanımlanmıştır. Bu kümenin üyelik fonksiyonu ise Eşitlik 3.14 ile verilmiştir.

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^2 \quad (3.14)$$

Eşitlik 3.14 ile verilen A kümesinin üyelik fonksiyonunun grafiksel gösterimi Şekil 3.4 ile verilmiştir.



Şekil 3.4 Sıfıra çok yakın reel sayılar kümesinin üyelik fonksiyonu

Bulanık kümelerde işlem yapabilmek için $x \in \mathfrak{R}$ olduğunda bazı temel kavramların açıklanmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

3.2.1. Destek kümesi

Bir bulanık kümenin sıfırdan büyük üyelik derecesine sahip olan elemanlarının oluşturduğu kümeye destek kümesi denir. A bulanık kümesinin desteği

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (3.15)$$

olarak tanımlanır (Hanss, 2005).

3.2.2 Çekirdek Kümesi

Bulanık bir \tilde{A} kümesi için üyelik derecesi bire eşit olan tüm elemanlar bu kümenin çekirdeğini oluşturur ve

$$Core(\tilde{A}) = C(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\} \quad (3.16)$$

olarak tanımlanır (Hanss, 2005).

3.2.3. Alfa Kesim Kümesi

Bulanık A kümesinin zayıf α - kesme (α - Seviye) kümesi Eşitlik 3.17 ile verilir,

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (3.17)$$

Aynı şekilde A bulanık kümesinin güçlü α - kesme kümesi Eşitlik 3.18 ile verilir.

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\} \quad (3.18)$$

Her iki eşitlikte $\alpha = (0,1]$ olarak belirlenmiştir (Hanss, 2005).

3.2.4. Konveks Küme

Herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki noktalar aynı kümede kalıyorsa, bu R^n (n boyutlu öklit uzay) kümesine konveks (dışbükey) küme denir. Herhangi bir A kümesinin konveks bir küme olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir.

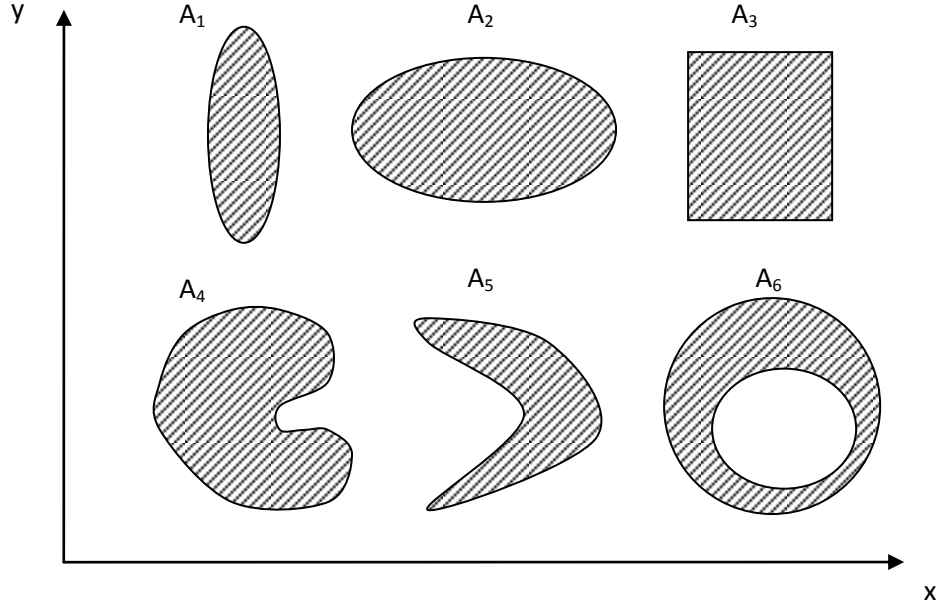
i) A kümesinden keyfi olarak alınan iki nokta “s” ve “r” olsun

$$r = (r_i | i \in N_n) \text{ ve } s = (s_i | i \in N_n) \quad (3.19)$$

ii) $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitliği sağlayan t noktası yine A kümesinde bulunuyor ise A kümesi dışbükey bir kümedir (Klir ve Yuan,1995).

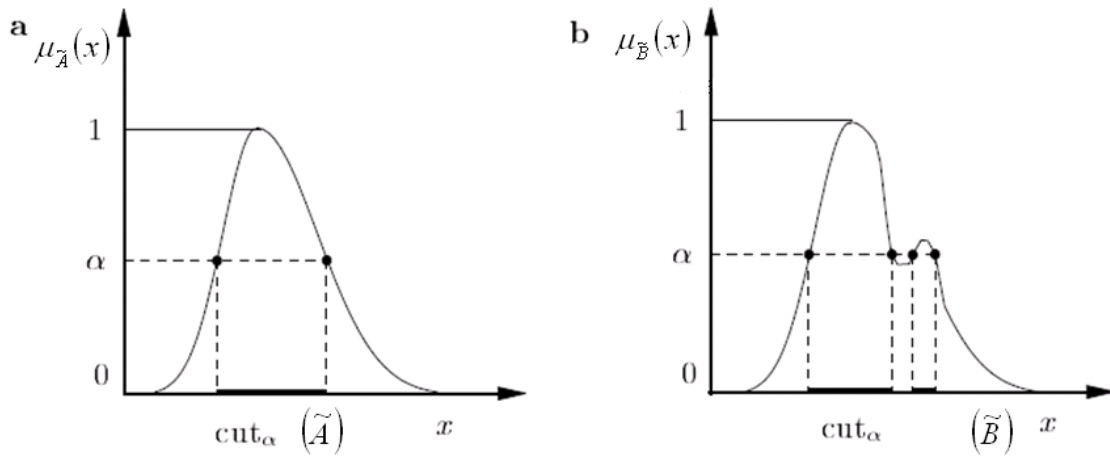
$$t = (\lambda r_i + (1 - \lambda)s_i | i \in N_n) \quad (3.20)$$

Bir başka ifade ile A kümesinden alınan herhangi iki noktadan geçen doğru parçası yine A kümesi içinde kalıyor ise, A kümesi konveks bir kümedir. Şekil 3.5 ile konveks ve konveks olmayan kümeler gösterilmektedir (Lee, 2005).



Şekil 3.5 R^2 ' de Bulanık A kümesi için konveks kümeler A_1, A_2, A_3 ve konveks olmayan kümeler A_4, A_5, A_6 .

Hanss (2005)' in verdiği örnekte $x \in \mathfrak{R}$ olmak üzere bulanık \tilde{A} ve \tilde{B} kümeleriyle bunlara ait $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ üyelik fonksiyonları Şekil 3.6 ile veriliyor.



Şekil 3.6 (a) Konveks bulanık küme, (b) Konveks olmayan bulanık küme

Verilen örnekte bulanık küme' da alınan her α kesimi için ($\alpha \in [0,1]$) kümenin konveks olduğu görülür. Ancak B kümesinde alınan her α kesiminde çizilen bazı doğru parçaları küme dışına çıkmaktadır. Bu nedenle bulanık \tilde{A} kümesi konveks bir kümedir, ancak bulanık \tilde{B} kümesi konveks bir küme değildir (Hanss, 2005).

3.2.5. Yükseklik

Bulanık A kümesinin yüksekliği Eşitlik 3.21 ile verilmiştir (Hanss, 2005).

$$hgt(\tilde{A}) = h(\tilde{A}) = \max_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (3.21)$$

Bulanık kümeler yüksekliğine göre normal ve normal olmayan bulanık kümeler olarak adlandırılır.

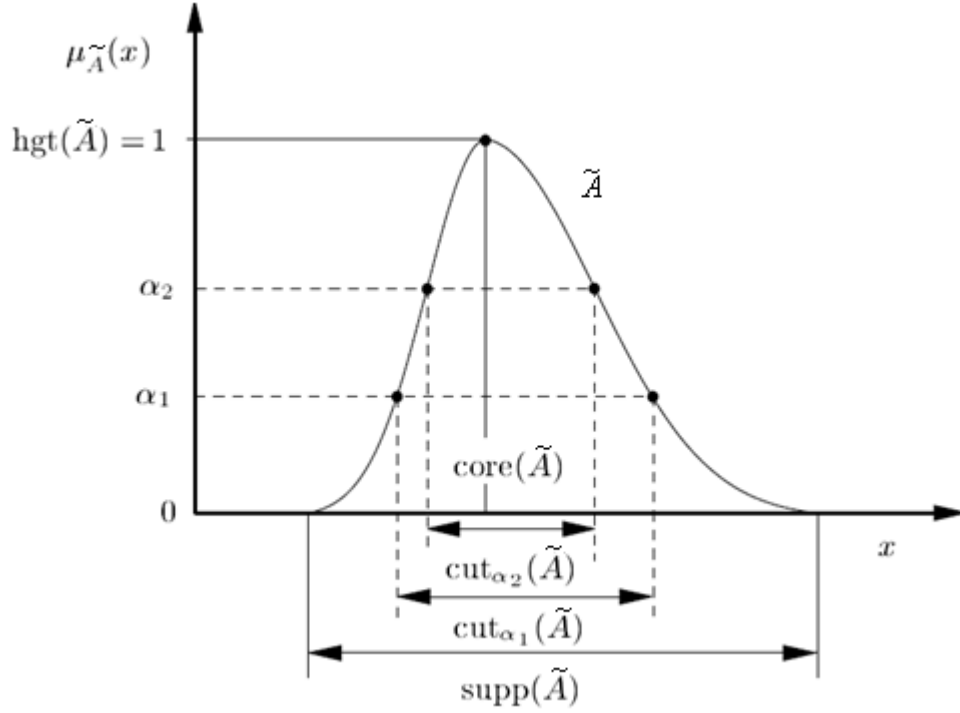
3.2.6. Normallik

Bulanık A kümesi için küme elemanlarının üyelik fonksiyonu değerlerinden en büyüğü 1 ise (Bulanık kümenin yüksekliği $hgt(\tilde{A})=1$ ise) bu *bulanık küme normaldir* denilir. Bunun için bulanık kümenin Eşitlik 3.22 sağlaması gerekir.

$$\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \quad (3.22)$$

Bulanık küme bu eşitliği sağlamıyor ise *normal olmayan bulanık kümedir*. Normalleştirme işlemi gerekiyorsa en büyük üyelik fonksiyonu değeri, diğer üyelik fonksiyonu değerlerine bölünerek normal bir bulanık küme oluşturulabilir (Hanss, 2005).

\tilde{A} bulanık bir küme olmak üzere bu bulanık kümenin belirtilen temel özellikleri Şekil 3.7 ile verilmiştir (Hanss, 2005).



Şekil 3.7 \tilde{A} bulanık kümesinin karakteristik özellikleri: yükseklik, çekirdek, destek ve α - kesimleri,

Şekil 3.7 ile önceki bölümlerde açıklanan bulanık kümeye ait temel kavramlar gösterilmiştir.

3.3. Bulanık Küme Çeşitleri

Bulanık kümeler belirsiz kavramları ve dilsel değişkenleri belirtmeye yarayan matematiksel ifadelerdir. Bu ifadeler, sadece temsil ettiği kavramların özelliklerine bağlı olmayıp onları oluşturan ya da kullanan bireylerin deneyim, önsezi ve kişisel görüşleriyle de yakından ilişki halinde olduğuna daha önceki bölümlerde değinilmiştir.

3.3.1. Tip 1 Bulanık Kümeler

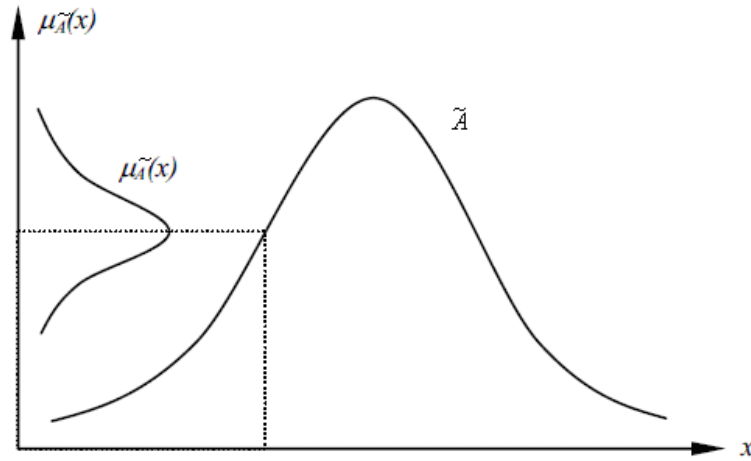
Bir bulanık kümeyi tanımlarken küme elemanları ve bu elemanların üyelik derecesi olarak iki unsur kullanılır. Bu bölüme kadar verilen tüm bulanık küme çeşitlerinde üyelik fonksiyonu uzaylarının reel sayılardan oluştuğu varsayılmıştır. Bu varsayımın sonucunda elde ettiğimiz bulanık kümenin üyelik dereceleri de *kesin*

sayılar (*crisp numbers*) olarak adlandırılır. Verilen bir bulanık A kümesi elemanlarının üyelik fonksiyon değerleri reel sayılardan oluşuyorsa bu çeşit bulanık kümeler *tip-1 bulanık kümeler* denir (Zimmermann, 2001).

Herhangi bir sistemin parametreleri oluşturulurken onları tanımlayan üyelik fonksiyonlarının sayısına ve şekline ait hiçbir kısıtlama olmadığı bilinmektedir, aksine bunları belirlemek tamamen araştırmacının istek ve deneyimine bağlıdır. Dolayısıyla aynı kümeyi birden fazla şekilde temsil etmek mümkündür. Bu unsurların da bulanık küme olma durumları söz konusu olabilir.

3.3.2. Tip 2 Bulanık Kümeler

Bir bulanık A kümesi verilsin. Buradaki A kümesinin üyelik fonksiyonu değerleri bulanık bir küme tarafından verilirse, bulanık A kümesine *tip-2 bulanık küme* denir ve bu durum Şekil 3.8’ da verilmiştir. Bu kavram *tip-n bulanık küme* kavramı olarak genelleştirilebilir.



Şekil 3.8 Tip-2 bulanık küme

Lee'nin verdiği örnekte “A=yetişkin” bulanık kümesi ele alınmaktadır. Bu kümenin üyelik fonksiyonu genç, orta yaş ve ihtiyarlık gibi çağları da kapsar. x,y,z kişileri için; $\mu_{\tilde{A}}(x)$ = “genç”, $\mu_{\tilde{A}}(y)$ = “orta yaş”, $\mu_{\tilde{A}}(z)$ = “ihtiyarlık” = ϕ olsun. Genç ve orta yaşlı üyelik derecesi de bulanık kümelerdir. Bundan dolayı “yetişkin” bulanık kümesi tip-2 bulanık kümeler sınıfına girer. Genç ve orta yaşlı üyelik derecesi

kümeleri tip–1 bulanık kümeleridir. Aynı şekilde genç ve orta yaşlı üyelik derecesi tip–2 bulanık küme olsaydı, yetişkin kümesi tip–3 bulanık küme olacaktı (Lee, 2005).

3.4. Bulanık Kümelerin Özellikleri

Bulanık küme kuramının siyah-beyaz gibi iki klasik kümeyi üyelik derecesi kavramı ile gri ölçeğe genişleten bir kavram olduğu önceki bölümlerde belirtilmişti. Bu durum klasik yaklaşımın iki ilkesini, çelişmezlik ve üçüncünün olmazlığı ilkelerini ortadan kaldırır. Bu durum bulanık kümenin bir elemanının bu kümenin tümleyeni içinde de yer alabilmesi anlamına gelir (Baykal ve Timur, 2004).

Klasik (kesin) kümelerdeki tek kuvvet, değişme, birleşme, dağılma, tümleme gibi tüm özellikleri ve De Morgan kuralı bulanık kümeler için de aynen geçerlidir. Fakat çelişmezlik ilkesi ve üçüncünün olmazlığı ilkesi, bulanık kümeler için farklı ifade edilir (Yücel, 2005).

3.4.1. Çelişmezlik İlkesi

Bulanık bir \tilde{A} kümesinin herhangi bir elemanı belli bir üyelik derecesi ile tümleyeninin de elemanı olabilir.

$$\tilde{A}' \cap \tilde{A} \neq \emptyset \quad (3.23)$$

Eşitlik 3.23 ile verilen bu ifade, bulanık \tilde{A} kümesi ile tümleyeninin kesişimi boş küme olmadığını belirtmektedir.

3.4.2. Üçüncünün Olmazlığı İlkesi

Bulanık bir \tilde{A}' kümesi, \tilde{A} kümesinin tümleyeni olsun. Bu durumda \tilde{A} ve \tilde{A}' kümelerinin birleşimi evrensel kümeyi vermez. Bu ifade Eşitlik 3.24 ile verilmiştir.

$$\tilde{A} \cup \tilde{A}' \neq E \quad (3.24)$$

Çünkü \tilde{A} 'daki herhangi bir eleman belli bir dereceye kadar aynı zamanda \tilde{A}' 'nın da elemanı olabilir.

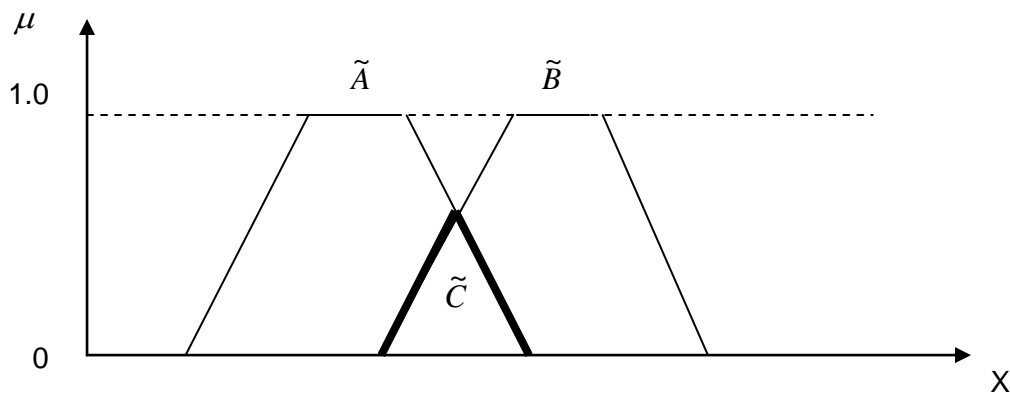
3.5. Temel Bulanık Küme İşlemleri

Bulanık kümelerde işlemler üyelik fonksiyonları yardımıyla yapılır. \tilde{A} ve \tilde{B} iki bulanık küme olmak üzere Zadeh (1965) tarafından tanımlanmış işlemler aşağıdaki başlıklarda açıklanmıştır (Yager and Filev,1994; Zimmermann, 2001; Yücel, 2005).

3.5.1. Bulanık Kümelerin Kesişimi

$\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ olmak üzere bulanık kümelerdeki kesişim işlemi

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \quad x \in X \quad (3.25)$$



Şekil 3.9 Bulanık kümelerde kesişim işlemi

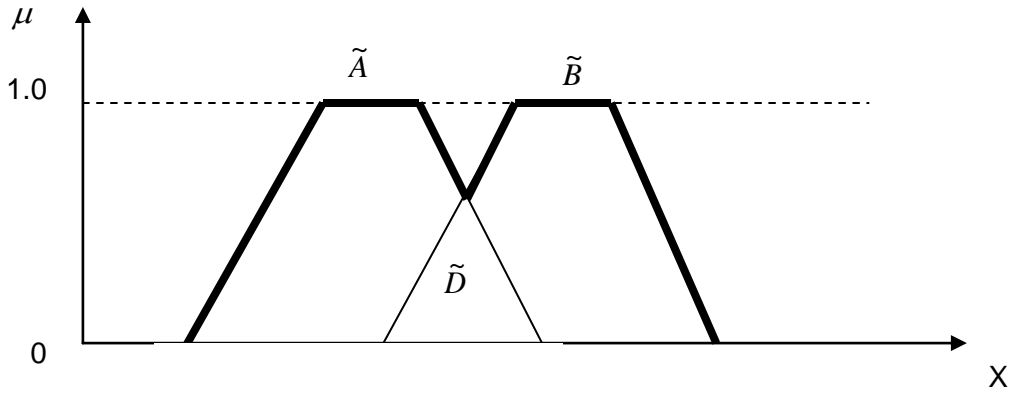
ile ifade edilir.

3.5.2. Bulanık Kümelerin Birleşimi

$\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ olmak üzere bulanık kümelerdeki birleşim işlemi

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \quad x \in X \quad (3.26)$$

eşitliği ve



Şekil 3.10 Bulanık kümelerde birleşim işlemi

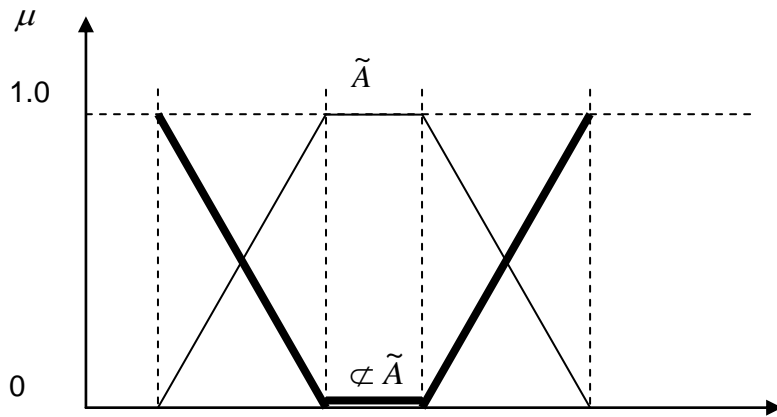
şekli ile verilir.

3.5.3. Bulanık Kümelerin Tümlenyeni

Normalleştirilmiş bir \tilde{A} bulanık kümesinin tümlenyeni $\mu_{\varphi\tilde{A}}(x)$ olarak gösterilsin.

Burada bulanık kümenin tümlenyeni Eşitlik 3.27 ve Şekil 3.11 ile verilir.

$$\mu_{\varphi\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \quad x \in X \quad (3.27)$$



Şekil 3.11 Bulanık kümenin tümlenyeni

3.5.4. Bulanık Kümelerin Kuvveti

Bulanık \tilde{A} kümesinin m . kuvveti de bir bulanık kümedir ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{A}^m}(x) = [\mu_{\tilde{A}}(x)]^m, \quad x \in X \quad (3.28)$$

biçiminde ifade edilir (Lee,2005).

3.5.5. Bulanık Kümelerde Kapsama

\tilde{A} ve \tilde{B} olarak verilen iki bulanık kümede $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ olma durumunun üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \quad x \in X \quad (3.29)$$

eşitsizliği ile ifade edilir.

3.5.6. Bulanık Kümelerde Eşitlik

Bulanık \tilde{A} ve bulanık \tilde{B} kümesi birbirine eşit ise $\tilde{A} = \tilde{B}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \quad x \in X \quad (3.30)$$

ile ifade edilir.

3.5.7. Bulanık Kümelerde Fark

\tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümelerinin farkı $\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}'$ (\tilde{B}' , \tilde{B} nin tümleyeni olmak üzere), Eşitlik 3.31 ile ifade edilir.

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}'}(x)\} = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad (3.31)$$

3.5.8. Bulanık Kümelerde Cebirsel Çarpım

\tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümelerinin cebirsel çarpımı Eşitlik 3.32, cebirsel çarpımın üyelik fonksiyonu ise Eşitlik 3.33 ile verilmiştir.

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \int_x \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{x}, \quad (3.32)$$

$$\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (3.33)$$

3.5.9. Bulanık Kümelerde Cebirsel Toplam

\tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümelerinin cebirsel toplamı Eşitlik 3.34 ile ifade edilir.

$$\tilde{C} = \left\{ (x, \mu_{\tilde{A} + \tilde{B}}(x)) / x \in X \right\} \quad (3.34)$$

Cebirsel toplamın üyelik fonksiyonu ise Eşitlik 3.35 ile verilir.

$$\mu_{\tilde{A} + \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (3.35)$$

3.5.10. Bulanık Kümelerde Kartezyen Çarpım

Bulanık kümelerin kartezyen çarpımından elde edilen eşleştirme klasik kümelerdeki gibi elde edilir. Her bir eşleştirmeyi temsil edecek üyelik derecesi en küçükleme işlemi ile bulunur. Her $x_1 \in \tilde{A}_1, x_2 \in \tilde{A}_2, \dots, x_n \in \tilde{A}_n$ için $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları $\mu_{\tilde{A}_1}, \mu_{\tilde{A}_2}, \dots, \mu_{\tilde{A}_n}$ olsun. Bu durumda $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ kartezyen çarpım sonucunun üyelik fonksiyonu Eşitlik 3.36 ile verilmiştir (Zimmermann, 2001).

$$\mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x) = \min_i \left\{ \mu_{\tilde{A}_i}(x) / x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in X_i \right\} \quad (3.36)$$

İki bulanık kümenin kartezyen çarpımı bulanık bir bağıntı olup, iki farklı evrenin birleşimidir.

Bulanık kümelerin sıkça kullanılan küme işlemlerinin özellikleri Tablo 3.2 ile verilmiştir (Ross, 2007).

Tablo 3.2 Bulanık küme işlemleri

Tümlleme	$\tilde{A}'' = \tilde{A}$
Değişme Özelliği	$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$ $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$
Birleşme Özelliği	$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap \tilde{C}$ $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \tilde{C}$
Dağılma Özelliği	$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$ $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$
De Morgan Kuralı	$(\tilde{A} \cup \tilde{B})' = \tilde{A}' \cap \tilde{B}'$ $(\tilde{A} \cap \tilde{B})' = \tilde{A}' \cup \tilde{B}'$
Çelişmezlik	$\tilde{A} \cap \tilde{A}' \neq \phi$
Üçüncünün Olmazlığı	$\tilde{A} \cup \tilde{A}' \neq E$

Örnek 1: Bulanık \tilde{A} ve \tilde{B} kümeleri ve bu kümelere ait elemanların üyelik fonksiyonu değerleri Eşitlik 3.37 ile verilmektedir.

$$\tilde{A}(x) = \{(3 ; 0.5), (5 ; 1.0), (7 ; 0.6)\} \quad (3.37)$$

$$\tilde{B}(x) = \{(3 ; 1.0), (5 ; 0.6)\}$$

Bu değerlerin kullanılmasıyla elde edilen \tilde{A} ve \tilde{B} kümelerine ait temel bulanık küme işlemleri sonuçları verilmiştir (Zimmermann, 2001).

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \{[(3; 3), 0.5], [(5; 3), 1.0], [(7; 3), 0.6], [(3; 5), 0.5], [(5; 5), 0.6], [(7; 5), 0.6]\}$$

$$\tilde{A}^2 = \{(3, 0.25), (5, 1.0), (7, 0.36)\}$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \{(3, 0.5), (5, 0.6)\}$$

Örnek 2: Bulanık \tilde{A} ve \tilde{B} kümesi veriliyor. Buna göre hesaplanan çeşitli küme işlemlerinin sonuçları verilmiştir (Ross, 2007).

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5} \right\} \quad \text{ve} \quad \tilde{B} = \left\{ \frac{0}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.4}{5} \right\}$$

Tümlleme:

$$\tilde{A}' = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{0.8}{5} \right\}$$

$$\tilde{B}' = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.6}{5} \right\}$$

Birleşim:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.4}{5} \right\}$$

Kesişim:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \left\{ \frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.2}{5} \right\}$$

Fark:

$$\tilde{A} / \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}' = \left\{ \frac{0.5}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5} \right\}$$

$$\tilde{B} / \tilde{A} = \tilde{B} \cap \tilde{A}' = \left\{ \frac{0}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.4}{5} \right\}$$

De Morgan Kuralı:

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})' = \tilde{A}' \cap \tilde{B}' = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{0.6}{5} \right\}$$

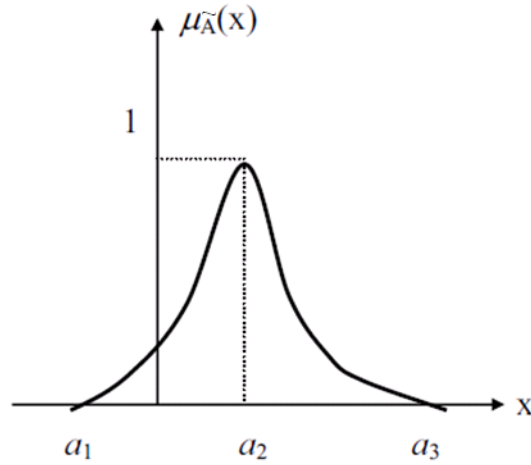
$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})' = \tilde{A}' \cup \tilde{B}' = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.8}{5} \right\}$$

4. BULANIK SAYILAR

Bu bölümde bulanık sayılar ile ilgili temel kavramlar verilecektir. Daha sonra bulanık sayı çeşitleri tanıtarak bulanık sayılarla yapılan matematiksel işlemler örneklerle çözülecektir.

4.1. Bulanık Sayı Kavramı

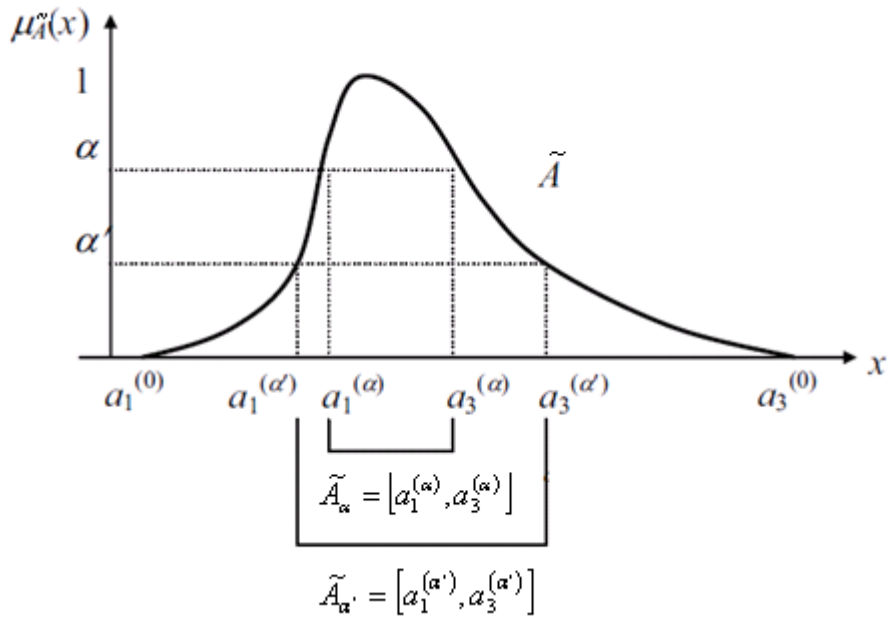
Bulanık sayı dışbükey, normalleştirilmiş, sınırlı-sürekli üyelik fonksiyonuna sahip ve reel sayılarda tanımlanmış bir bulanık küme olarak ifade edilir (Ross, 2007). Lee'nin yapmış olduğu tanımda bulanık sayı, reel sayıların alt kümesi olan ve bulanık aralıklarla ifade edilen bulanık bir küme olarak belirlenir (Lee,2005). Bulanık aralık genellikle iki bitiş noktası a_1 ve a_3 , bir tepe noktası a_2 olmak üzere $[a_1, a_2, a_3]$ olarak verilir (Şekil 4.1). Burada a_1 , a_2 , a_3 sırasıyla bulanık sayının alt sınırını, tepe noktasını ve üst sınırını gösterir. Bundan dolayı bulanık sayının sol tarafı $a_1: [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$ monoton artan iken, $a_2: [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$ monoton azalandır (Baykal ve Timur, 2004).



Şekil 4.1 Bulanık sayı $\tilde{A} = [a_1, a_2, a_3]$

Bir bulanık sayı için α kesme aralığı A_α olarak belirlenir ve $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$ kesim aralığı olarak tanımlanır. Bu sayının konveks olma durumu α kesme aralığının Eşitlik 4.1 ile belirlenen koşulunu yerine getirmesi ve α kesme aralığının sürekli olması ile mümkündür (Lee, 2005).

$$(\alpha' < \alpha) = (a_1^{(\alpha')} \leq a_1^\alpha, a_3^{(\alpha')} \geq a_3^\alpha) \quad (4.1)$$



Şekil 4.2 Bulanık sayının α kesimi $(\alpha' < \alpha) \Rightarrow (A_\alpha \subset A_{\alpha'})$

Bulanık kümelerin özel bir sınıfı olarak kabul edilen bulanık sayılar kavramını Dubois and Prade (1980) ve Hanss (2005) şöyle tanımlamıştır: Bulanık sayı

1. En az bir x değeri için, $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$ değerini almalıdır, (Bu özellik bulanık kümelerin normallik özelliği olarak adlandırılır)
 2. Üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x)$ parçalı süreklidir.
 3. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ konveks bir fonksiyondur.
- koşullarını sağlamalıdır.

4.2 Bulanık Sayı Çeşitleri

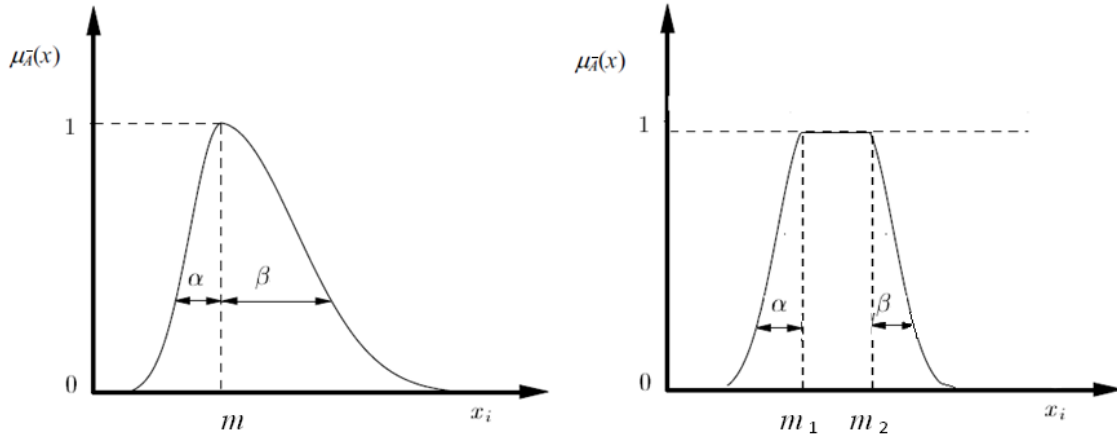
Bulanık sayıların, bulanık kümelerin özelleşmiş hali olduğu Bölüm 4.1’de verilmişti. Bulanık kümeler ise üyelik fonksiyonu ile tanımlandığı için üyelik fonksiyonu çeşidi kadar bulanık sayı çeşidi vardır (Lee, 2005). En sık kullanılan L-R (Left: sol taraf, Right: sağ taraf) bulanık sayıları ilk olarak Dubois ve Prade tarafından önerilmiş ve kullanılmıştır. Burada $L(x)$ ve $R(x)$ bulanık sayının sağ ve sol yanlarını tanımlayan referans fonksiyonlar olarak adlandırılır.

Üyelik fonksiyonunu sağ ve sol olarak iki şekilde adlandıran L-R tipindeki bir bulanık $\tilde{A} = (\alpha, m, \beta)$ sayısı için üyelik fonksiyonu Eşitlik 4.2 ile verilir. (Zimmermann, 2001).

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), x \leq m, \alpha > 0 \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), x \geq m, \beta > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Burada m , \tilde{A} bulanık sayısının ortasıdır. α ve β ise sırasıyla sol ve sağ yayılım değerleridir. $\alpha = \beta = 0$ olduğunda \tilde{A} bulanık sayısı, bir m keskin (crisp) sayı olur. L ve R fonksiyonlarına referans fonksiyonları ya da şekil fonksiyonları denir

(Hanss, 2005). \tilde{A} bulanık sayısı $\tilde{A} = (\alpha, m, \beta)$ olarak gösterilir. Eğer tepe noktası tek değilse, L-R bulanık sayısı $\tilde{A} = (\alpha, m_1, m_2, \beta)$ olarak yazılır. Bu durum Şekil 4.3 ile verilmiştir.



Şekil 4.3 L-R tipindeki bulanık sayılar

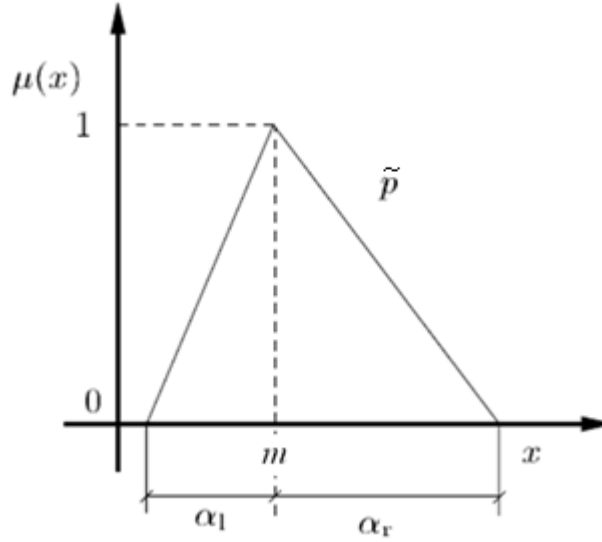
L-R tipi bulanık sayıların özelleşmiş hali olan ve sıklıkla kullanılan bulanık sayı çeşitleri ile üyelik fonksiyonları aşağıdaki bölümde verilmiştir (Hanss, 2005).

4.2.1 Üçgensel Bulanık Sayı

En basit üyelik fonksiyonuna sahip olması bakımından çok sık kullanılan bulanık sayı türlerinden biri “üçgensel bulanık sayı (triangular fuzzy number)” dır. $\tilde{p} = tfn(\alpha_l, m, \alpha_r)$ olarak ifade edildiğinde üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq m - \alpha_l \\ 1 + (x - m) / \alpha_l, & m - \alpha_l < x < m \\ 1 - (x - m) / \alpha_r, & m \leq x < m + \alpha_r \\ 0, & x \geq m + \alpha_r \end{cases}$$

ile verilmektedir. Üçgensel bulanık sayının gösterimi Şekil 4.4 ile verilmiştir.



Şekil 4.4 Üçgensel bulanık sayı ($\tilde{p} = \text{tfn}(\alpha_l, m, \alpha_r)$)

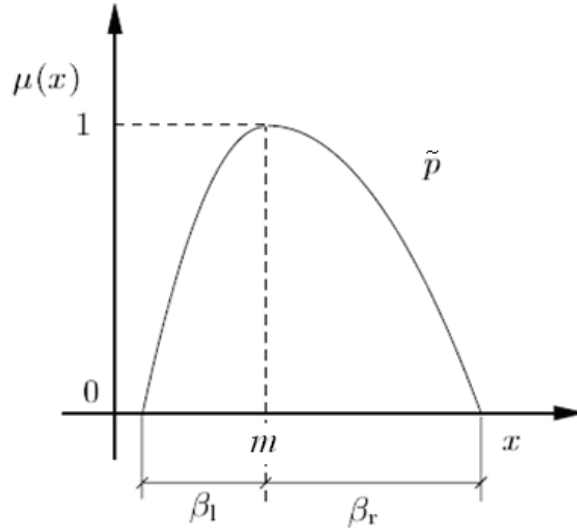
Burada m bulanık sayının kesin değerini belirtir. Verilen üyelik fonksiyonuna göre $\alpha_l = \alpha_r$ olduğunda üçgensel bulanık sayı, simetrik üçgensel bulanık sayı olarak adlandırılır.

4.2.2 Karesel Bulanık Sayı

Karesel bulanık sayı (Quadratic Fuzzy Number) $\tilde{p} = \text{qfn}(\beta_l, m, \beta_r)$ olarak ifade edilir. Üyelik fonksiyonu ise

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq m - \beta_l \\ 1 - (x - m)^2 / \beta_l^2 & , \quad x - \beta_l < x < m \\ 1 - (x - m)^2 / \beta_r^2 & , \quad m \leq x < m + \beta_r \\ 0 & , \quad x \geq m + \beta_r \end{cases}$$

yukarıdaki gibi yazılır. Karesel bulanık sayı Şekil 4.5 ile verilmiştir.



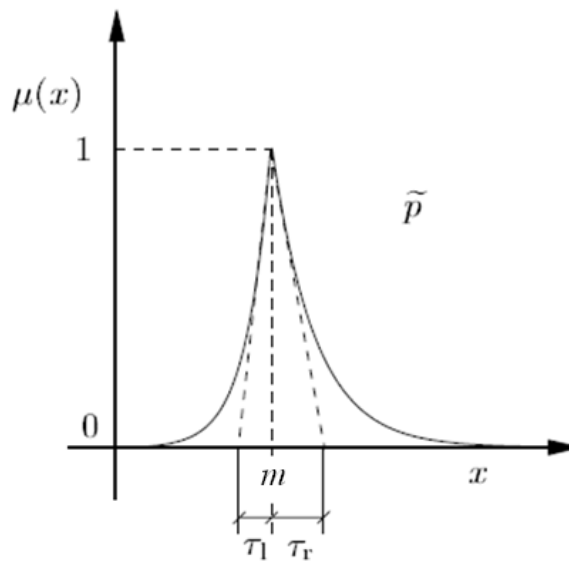
Şekil 4.5 Karesel bulanık sayı ($\tilde{p} = qfn(\beta_l, m, \beta_r)$)

4.2.3 Üstel Bulanık Sayı

Üstel Bulanık Sayı $\tilde{p} = efn(\tau_l, m, \tau_r)$ olarak ifade edilir. Üyelik fonksiyonu ise

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} \exp[-(x-m)/\tau_l], & x < m \\ \exp[-(x-m)/\tau_r], & x \geq m \end{cases} \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

Üstel bulanık sayı Şekil 4.6 ile verilmiştir.



Şekil 4.6 Üstel bulanık sayı ($\tilde{p} = efn(\tau_l, m, \tau_r)$)

4.3 Bulanık Sayılarda İşlemler

Bulanık sayılarda işlem yapmak için önerilen iki yöntemden birincisi α kesim aralık işlemleri diğeri ise Zadeh tarafından önerilen genişletme ilkesi (Extension principle) dir (Klir and Yuan,1995).

4.3.1 α Kesim Aralık İşlemleri

Kesin aralığın genelleştirilmiş hali olan bulanık sayılarla çalışmak için aralık işlemlerinin kullanılması gerekir.

$\forall a_1, a_3, b_1, b_3 \in \mathfrak{R}$ olmak üzere iki aralık $A = [a_1, a_3]$, $B = [b_1, b_3]$ şeklinde tanımlandığında bu iki aralık için aşağıda temel aralık işlemleri verilmektedir (Klir and Yuan,1995; Lee, 2005; Buckley, 2006; Ross, 2007) .

(1) Toplama işlemi

$$[a_1, a_3](+)[b_1, b_3] = [a_1 + b_1, a_3 + b_3] \quad (4.3)$$

(2) Çıkarma işlemi

$$[a_1, a_3](-)[b_1, b_3] = [a_1 - b_3, a_3 - b_1] \quad (4.4)$$

(3) Çarpma işlemi

$$\begin{aligned} [a_1, a_3](\bullet)[b_1, b_3] = \\ = [\min(a_1 \bullet b_1, a_1 \bullet b_3, a_3 \bullet b_1, a_3 \bullet b_3), \max(a_1 \bullet b_1, a_1 \bullet b_3, a_3 \bullet b_1, a_3 \bullet b_3)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Verilen A ve B aralıkları pozitif reel sayılarda tanımlı ise:

$$[a_1, a_3](\bullet)[b_1, b_3] = [a_1 \bullet b_1, a_3 \bullet b_3] \quad (4.6)$$

(4) Bölme İşlemi

$$\begin{aligned} [a_1, a_3] / [b_1, b_3] &= \\ &= [\min(a_1/b_1, a_1/b_3, a_3/b_1, a_3/b_3), \max(a_1/b_1, a_1/b_3, a_3/b_1, a_3/b_3)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Verilen A ve B aralıkları pozitif reel sayılarda tanımlı ise:

$$[a_1, a_3] / [b_1, b_3] = [a_1/b_3, a_3/b_1] \quad (4.8)$$

(5) Ters Aralık İşlemi

$$[a_1, a_3]^{-1} = [\min(1/a_1, 1/a_3), \max(1/a_1, 1/a_3)] \quad (4.9)$$

Verilen A ve B aralıkları pozitif reel sayılarda tanımlı ise

$$[a_1, a_3]^{-1} = [1/a_3, 1/a_1] \quad (4.10)$$

(6) En Küçük işlemi:

$$[a_1, a_3](\wedge)[b_1, b_3] = [a_1 \wedge b_1, a_3 \wedge b_3] \quad (4.11)$$

(7) En Büyük işlemi:

$$[a_1, a_3](\vee)[b_1, b_3] = [a_1 \vee b_1, a_3 \vee b_3] \quad (4.12)$$

$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ bulanık sayısının, α kesim aralığı olarak tanımı; $\forall \alpha \in [0,1]$, $a_1, a_3, a_1^\alpha, a_3^\alpha \in \mathfrak{R}$ olmak üzere $A_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha]$ olarak yapılmıştır. Bu sonuca göre A_α klasik bir aralıktır. Bu klasik aralığı kullanarak, yukarıda verilen aralık işlemleri α kesim aralığına uygulanabilir (Buckley, 2006).

Bulanık \tilde{B} kümesini α kesim aralığı $B_\alpha = [b_1^\alpha, b_3^\alpha]$ ve $\forall \alpha \in [0,1], b_1^\alpha, b_3^\alpha \in \mathfrak{R}$ olarak verilsin. Böylece \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık sayıları arasındaki işlemler α kesim aralık işlemleri yardımıyla Eşitlik 4.13 ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}](+) [b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}] &= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)} + b_3^{(\alpha)}] \\ [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}](-) [b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}] &= [a_1^{(\alpha)} - b_3^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ayrıca bu işlemler benzer şekilde çarpma ve bölmeye de uygulanabilir (Lee, 2005).

Örnek 3: \tilde{A} ve \tilde{B} olmak üzere iki tane bulanık sayı verilmiştir. Bu iki bulanık sayı ile yapılan matematiksel işlemler α kesim aralığı kullanılarak yapılmıştır. Bulanık sayı olarak elde edilen sonuçlar grafiksel olarak gösterilmiştir (Klir and Yuan, 1995).

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \text{ ve } x > 3 \\ (x+1)/2 & -1 < x \leq 1 \\ (3-x)/2 & 1 < x \leq 3 \end{cases} \quad \mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \text{ ve } x > 5 \\ (x-1)/2 & 1 < x \leq 3 \\ (5-x)/2 & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

\tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümelerinin α kesimleri Eşitlik 4.14 ile verilmiştir. Burada bulanık kümelere ait olan α kesim aralıkları kullanılarak matematiksel işlemler yapılmış, elde edilen bulanık kümelerin üyelik dereceleri ve grafiksel gösterimleri verilmiştir.

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha] \\ B_\alpha &= [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{A} + \tilde{B})_\alpha &= [4\alpha, 8 - 4\alpha] & \alpha \in (0, 1] \\ (\tilde{A} - \tilde{B})_\alpha &= [4\alpha - 6, 2 - 4\alpha] & \alpha \in (0, 1] \\ (\tilde{A} \bullet \tilde{B})_\alpha &= \begin{cases} [-4\alpha^2 + 12\alpha - 5, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15] & \alpha \in (0, 0.5] \\ [4\alpha^2 - 1, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15] & \alpha \in (0.5, 1] \end{cases} \\ (\tilde{A} / \tilde{B})_\alpha &= \begin{cases} [(2\alpha - 1)/(2\alpha + 1), (3 - 2\alpha)/(2\alpha + 1)] & \alpha \in (0, 0.5] \\ [(2\alpha - 1)/(5 - 2\alpha), (3 - 2\alpha)/(2\alpha + 1)] & \alpha \in (0.5, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

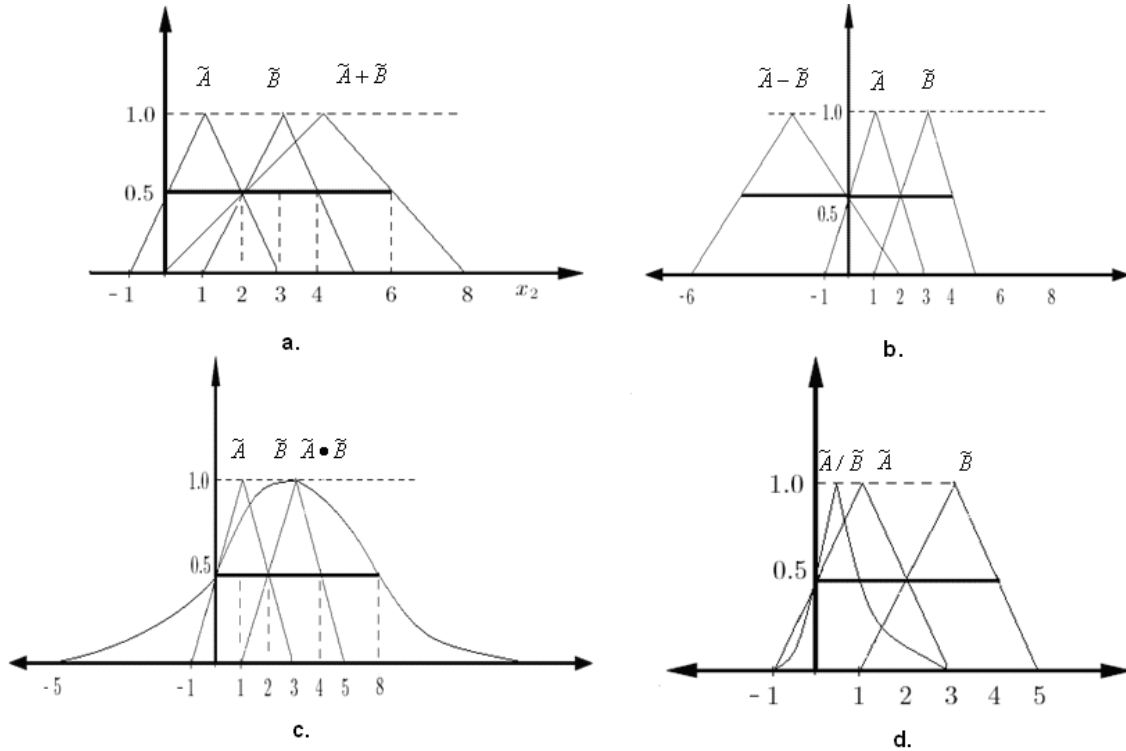
$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, x > 8 \\ x/4 & 0 < x \leq 4 \\ (8-x)/4 & 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -6, x > 2 \\ (x+6)/4 & -6 < x \leq -2 \\ (2-x)/4 & -2 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A} \bullet \tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x < -5, x \geq 15 \\ [3 - (4-x)^{1/2}]/2 & -5 \leq x < 0 \\ (1+x)^{1/2}/2 & 0 \leq x < 3 \\ [4 - (1+x)^{1/2}]/2 & 3 \leq x < 15 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, x \geq 3 \\ (x+1)/(2-2x) & -1 \leq x < 0 \\ (5x+1)/(2x+2) & 0 \leq x < 1/3 \\ (3-x)/(2x+2) & 1/3 \leq x < 3 \end{cases}$$

Yapılan işlemlerin grafiksel olarak gösterimi Şekil 4.7 ile verilmiştir.



Şekil 4.7 Bulanık sayılarla işlemler (a.Toplama, b.Çıkarma, c. Çarpma, d. Bölme)

4.3.2. Genişletme İlkesi

İlk olarak Zadeh (1987) tarafından ortaya atılan genişletme ilkesi standart analitik kümeler ve değişkenler arasındaki klasik bağıntının bulanık kümelerin klasik bağıntısına genişletilmesini sağlamaktadır (Filev and Yager, 1997). Bulanık küme kuramının temeli olan genişletme ilkesi, bulanık olmayan matematiksel kavramları bulanık miktarlar olarak ele alabilmek için kullanılan bir yöntemdir (Başaran, 2007).

$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$ evrensel kümelerinin kartezyen çarpımı ve $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_r$ evrensel kümelere bulanık kümeler olsun. Bulanık $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_r$ kümelerinin kartezyen çarpımı Eşitlik 4.15 ile verilir.

$$\mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_r}(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_r) = \text{Min}[\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)] \quad (4.15)$$

f fonksiyonu X uzayından F uzayına olsun.

$$f(X_1, X_2, \dots, X_r): X \rightarrow F$$

Bu durumda F 'de bulunan bulanık \tilde{B} kümesi f fonksiyonu ile elde edilebilir ve $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_r$ bulanık kümeleri aracılığıyla Eşitlik 4.16 gibi elde edilir.

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} 0 & , f^{-1}(y) = \phi \\ \text{Max}_{y=f(x_1, x_2, \dots, x_r)} [\text{Min}(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r))] & , \text{ö.d.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Burada $f^{-1}(y)$ y'nin tersine görüntüsüdür. $\mu_{\tilde{B}}(y)$ üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_r}(x_1, x_2, \dots, x_r)$ olan $y = f(x_1, \dots, x_r)$ nin üyeliğidir. f bire bir örten bir fonksiyon ise, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ olduğu zaman, $\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y))$ ' dir (Novak, 1989; Bandemer and Gottwald, 1995; Wu 2003; Hanss, 2005; Lee, 2005).

Genişletme ilkesinin uygulaması aşağıda örnek 4 ile verilmiştir.

rnek 4: Tamsayılar kümesinde tanımlanan bulanık \tilde{A} kümesinin elemanları, üyelik dereceleri ve f fonksiyonu verilmiştir.

$$\tilde{A} = \{(-1, 0.1), (0, 0.4), (1, 1.0), (2, 0.4), (3, 0.1)\}$$
$$f(x) = x^2 + 1$$

Buna göre hesaplanan bulanık \tilde{B} kümesi

$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \tilde{A}^2 + 1 = \{(1, 0.4), (2, 1.0), (5, 0.4), (10, 0.1)\}$ olarak bulunur. Örneğin \bar{B} kümesi elemanlarından biri olan $\mu_{\tilde{B}}(x = 2)$ ' nin hesaplanması

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{B}}(x = 2) &= \sup_{f(x)=2} \mu_{\tilde{A}}(x) = \text{Max}[\mu_{\tilde{A}}(x = -1), \mu_{\tilde{A}}(x = 1)] \\ &= \text{Max}[0.1, 1.0] \\ &= 1.0\end{aligned}$$

olarak verilmektedir.

5. BULANIK DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ

Tüm bilim dallarında uygulama alanı olan *regresyon analizi*, değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek ve gelecek veriyi tahmin etmek için kullanılan istatistiksel bir yöntemdir (Wang and Tsaur, 2000a). Temeli rasgelelik olan klasik regresyon analizinden doğru sonuçları elde etmek için analizde kullanılacak verinin doğadan kesin bir şekilde elde edilmesi gerekir. Bu nedenle klasik regresyon analizi, insan düşünüş tarzına yakın özellikler taşıyan bulanık sistemlerde zaman zaman yanlış kararlara neden olmaktadır.

Klasik doğrusal regresyonun pek çok uygulaması olmasına rağmen bazı durumlarda sorunlara yol açmaktadır. Bu sorunlar şöyle sıralanabilir (Shapiro, 2005; Yücel, 2005):

- Küçük örneklem sorunu (yeterli veriye ulaşılamaması).
- Dağılımlara ilişkin varsayımlar.
- Değişkenler arasındaki ilişkiyi doğrusallaştırmak adına veri yapısının bozulması.
- Hata terimlerinin normal dağılıma uymaması.
- Değişkenlerin bulanık olması (sayısal kodlama yapılamayacak derecede belirsiz olması).
- Değişkenler arasındaki ilişkinin kesin bir fonksiyon ile gösterilememesi.

Gerçek yaşamdaki kesin olmayış ile beraber bilim ve teknolojiye gelişmeler klasik regresyon modeline yeni yaklaşımlar önermiş ve gerçeği olduğu gibi ele alabilen daha kapsamlı çözüm yolları sunmuştur (Wang and Tsaur, 2000b). Bunlardan biri de klasik doğrusal regresyon yönteminin esnetilmesiyle elde edilen ve Zadeh' in bulanık küme teorisini esas alan "*Bulanık doğrusal regresyon analizi*" dir.

Bulanık regresyon analizinde bağımlı değişkenler ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişki klasik regresyon analizindeki gibi kesin değildir. Bu nedenle kullanılan bulanık teknikler, belirsiz olaylarda bağımsız değişkenlerin etkilerini daha gerçekçi bir şekilde yansıtır.

Bulanık regresyon, gözlenen değerler ile hesaplanan değerler arasındaki sapmaların; klasik regresyondaki gibi ölçüm ve gözlem hatalarından değil, sistem parametrelerinin (model katsayılarının) bulanıklığından kaynaklandığını temel alır. Bu nedenle bulanık regresyonda hata miktarı, modeldeki bulanık parametrelerin yayılımları toplamına eşittir (Chang, and Ayyub, 2001).

Bulanık doğrusal regresyon analizi ilk defa Tanaka (1982) tarafından önerilmiştir (Tanaka, Uejima and Asai,1982). Tanaka (1982)'nin modeli, ilk kurulan model olduğu için çeşitli eleştirilere maruz kalmıştır. Ancak getirilen bu eleştiriler yöntemin daha da genişletilmesine olanak sağlamış ve günümüzde karşılaşılan sorunlara daha kolay cevap veren sistemlerin oluşmasını kolaylaştırmıştır.

Bulanık mantığı temel alan bulanık regresyon analizi, doğada ve günlük hayatta klasik mantığa dayanan yöntemlerin yetersiz kaldığı durumlarda kullanılırken, sistem güvenilirliğini artırır ve maliyetlerde belirgin düşüşler sağlar, aynı zamanda doğayla tutarlı kararlar verilmesine yardımcı olur.

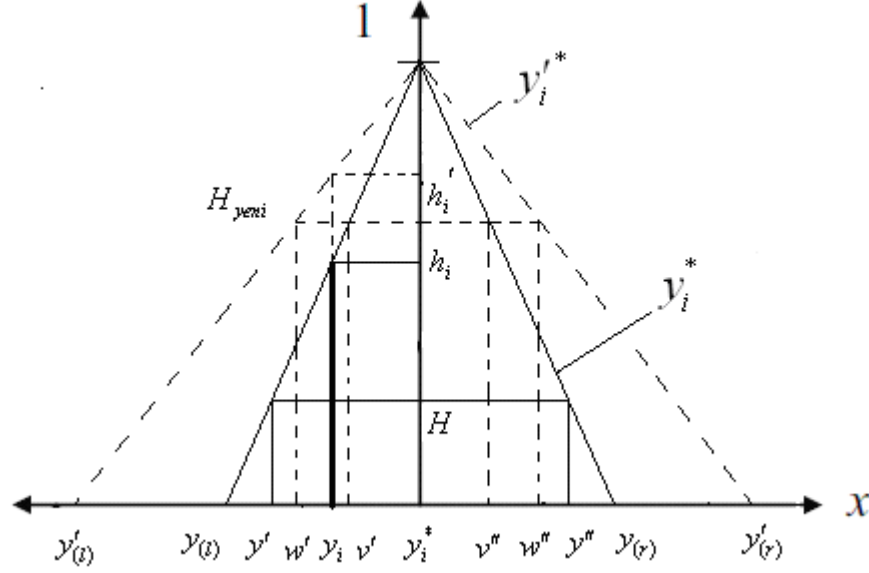
5.1 Bulanık Regresyon Analizinde “h düzeyi” ve İşlevi

Bulanık Doğrusal regresyon analizinde tahminler ile veri kümesi arasındaki uyumun ölçüsü h düzeyidir. h düzeyinin “modele uygunluğu” şeklindeki tanımıyla anlatılmak istenen, veri kümesiyle ilgili şüphenin en başından ortaya konmasıdır. Klasik doğrusal regresyon modelinde hatalar tek terime toplanırken, BDR’ da hata tüm model katsayılarına dağıtılır. Bu durumda her bir parametre belirli bir bulanıklık derecesi ile tahmin edilir. Burada h düzeyi analizde bulanıklığı azaltmak için kullanılır (Moskowitz and Kim,1993). Ayrıca BDRA’ da değişkenler arasında var olduğu düşünülen ancak tam olarak tanımlanamayan ya da klasik yollarla modele alınamayan bazı belirsiz ilişkileri regresyon analizine dahil etmek amacıyla da h düzeyi kullanılmaktadır. Kısacası h düzeyi gözlem değerlerinin en az h derecesi ile tahmin değerlerinin içinde yer alması şeklinde ifade edilir (Tanaka, Uejima and Asai,1982).

h düzeyi, analize başlamadan önce veri kümesinin eksik, yarım ya da tam olma durumuna göre araştırmacı tarafından $[0,1]$ aralığında belirlenir (Tanaka, Uejima and Asai, 1982), Veri kümesi yeterince geniş olduğunda $h=0$ alınması önerilirken, Veri kümesi ideal büyüklüğünden uzaklaştığında h düzeyine daha büyük değerler verilmektedir (Başaran, 2007). h düzeyinin en ideal değerinin ne olması gerektiği literatürde hala bir tartışma konusudur. Konu ile ilgili çalışmalarda h düzeyinin genellikle $[0,0.9]$ aralığında alınması önerilmektedir. Ayrıca $h=0$ alınması durumunda oluşturulan bulanık doğrusal regresyon, aralık regresyonu olarak adlandırılır.

BDRA’ da karar verici tarafından belirlenen h düzeyinin önemi Şekil 5.1 ile açıklanmıştır. Burada iki tane simetrik üçgensel bulanık sayı, bulanık regresyon analizinde parametre tahminlerini gösterebilir. Bunlar sırasıyla y_i^* ve $y_i'^*$ bulanık

sayılarıdır. Her ikisinin de merkez değeri y_i^* ile belirlenmiştir. Burada y_i^* bulanık sayısının yayılım değerleri $(y_{(l)}, y_{(r)})$, y_i^* bulanık sayısının yayılım değerleri ise $(y'_{(l)}, y'_{(r)})$ olarak belirtilmiştir.



Şekil 5.1 h düzeyi ile iki farklı üyelik fonksiyonunun incelenmesi

Şekil 5.1 de y_i değeri her bulanık parametrenin de destek bölgesinde yer almaktadır. y_i^* bulanık sayısının H kesiti $[y', y'']$ olarak gösterilir. y_i ve y_i^* değerleri sabit tutulduğunda, bulanık parametrelerin yayılımı arttıkça, h düzeyinin de artacağı görülmektedir. Örneğin yayılım değerleri arttığında bulanık tahminin destek bölgesi $[y_{(l)}, y_{(r)}]$ yerine $[y'_{(l)}, y'_{(r)}]$ olduğu görülür. y_i değerinin üyelik karşılığı h_i iken, yayılım değeri arttığında, aynı y_i için üyelik değeri h'_i , $h'_i > h_i$ eşitsizliğini sağlar. Yeni değer $H_{yeni} > h_i > H$ olarak belirlendiğinde y_i^* bulanık sayısı için H_{yeni} kesiti $[v', v'']$ aralığıdır. Oysa y_i değeri bu aralık dışındadır. y_i üyelik değerinin h_i kesiti altında y_i^* bulanık sayısı için H_{yeni} değerinden küçük olduğu görülmektedir. Oysa y_i^* bulanık sayısı için H_{yeni} kesiti ele alındığında, $[w', w'']$ aralığının merkez değeri y_i^* ile aynı olmasına karşın, yayılım değerinin y_i^* 'nin yayılım değerinden daha büyük olduğu görülmektedir. y_i değeri H aralığı içinde yer aldığından y_i^* bulanık sayısında h_i kesitinde y_i değerinin üyelik

derecesi H_{yeni} değerinden büyüktür. Daha yüksek değerli bir H değeri ancak bulanık tahminin merkez değeri değiştirilmeksizin yayılım değerinin artırılması ile elde edilir. Burada kavramsal olarak h değeri, tahminde istenilen güvenlik seviyesini göstermektedir. BDRA' da bulanık parametre tahminlerinin genişliğini ya da darlığını belirleyen h düzeyi' nin uygun bir değer olarak seçimi çok önemlidir. Tablo 5.1 ile literatürdeki çalışmalarda kullanılması önerilen h düzeyi değerleri verilmektedir (Başaran, 2007; Shapiro, 2005; Moskowitz and Kim,1993).

Tablo 5.1 Literatürdeki çalışmalarda kullanılan h düzeyi değerleri

Tanaka; Hayashi ve Tanaka; Suzuki, Furukawa, Inoue, Asai, Nakagava	$h=0,0$
Tanaka ve Wadata,	$h=0,2$
Tanaka Uejima ve Asai; Heshmaty ve Kandel	$h=0,5$
Brdossy, Bogardi ve Kelly; Bardossy, Bogardi ve Duckstein	$h=0,7$
Bardossy	$h=0,75$
Kim ve Lee	$h=0,9$

Veri kümesinin gerek büyüklük gerekse doğruluk açısından yeterli olmadığı durumlarda KDR'ye alternatif bir yöntem olan BDRA' da h düzeyinin önemi çok büyüktür. KDR' da önem düzeyi (α) genellikle %1 ya da %5 olarak alınır çünkü daha yüksek hatalarla çalışmak kabul edilemez. Ancak h düzeyi [0,1] aralığında sonsuz değer alabildiği için, çalışmanın amacına ve veri kümesinin durumuna göre

seçilen en uygun h düzeyi, gerçeğe daha yakın sonuçların elde edilmesini sağlar (Yücel, 2005).

5.2 Bulanık Doğrusal Regresyon Yöntemleri

Literatürde bulanık doğrusal regresyon modeli parametrelerinin tahmininde temelde 3 yaklaşım vardır. Birincisi *doğrusal programlama yaklaşımı (Tanaka Modeli)*, ikincisi *sistem parametrelerinin bulandırılması yöntemi* ve son olarak üçüncüsü *bulanık en küçük kareler yöntemidir*. Bulanık doğrusal regresyon yöntemlerinin veri türleriyle elde ettiği parametre ve tahminler Tablo 5.2 ile verilmiştir (Başaran, 2007).

Tablo 5.2 Modeldeki değişken ve parametrelerin durumları

Y (Bağımlı değişken)	X (Bağımsız değişken)	Parametre	\hat{Y} (Tahmin)
Reel	Reel	Bulanık	Bulanık
Bulanık	Reel	Bulanık	Bulanık
Bulanık	Bulanık	Bulanık	Bulanık
Sözel	Sözel	Bulanık	Sözel

Kullanılan tüm yöntemlerin amacı belirlenen uygunluk ölçüsüne (h düzeyi) göre veriye en uygun bulanık regresyon parametrelerini tahmin etmektir (Chang and Ayyub,2001).

5.2.1 Doğrusal Programlama Yaklaşımı

Tanaka (1982)'nin önermiş olduğu bulanık modelle bulanık doğrusal regresyon modeli ilk kez oluşturulmuştur. Bu yöntem literatürde *Tanaka Modeli* olarak da geçer. Bu yöntemde göre regresyon katsayıları bulanık sayılardır. Regresyon katsayıları bulanık olduğu için elde edilen bağımlı değişken Y değeri de simetrik bulanık bir sayıdır. Simetrik olmayan bulanık sayılar ile yapılan bulanık doğrusal regresyon analizi için Yen, Ghoshray ve Roig (1999) çalışması incelenebilir. Tek bağımsız değişkenli bulanık doğrusal regresyon modeli Eşitlik 5.1 ile verilmiştir.

$$\tilde{Y}_i = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 X_{i1} \quad (5.1)$$

Burada \tilde{A}_0 sabit bulanık katsayı, \tilde{A}_j bulanık eğim katsayısıdır. Her parametre $\tilde{A}_j = (\alpha_j, c_j)$ olarak ifade edildiğinde, α_j bulanık sayının merkezini, c_j ise yayılım değerini vermektedir. Burada \tilde{A}_j 'ler simetrik üçgensel bulanık sayılar olduğu için \tilde{Y}_i ' lerde aynı özelliğe sahiptirler. Buna göre Tanaka (1982) modelinde, tahmin değerlerinin gözlem değerlerini belirli bir h seviyesinde içermesi kısıtı altında bulanık parametrelerin toplam yayılımları minimize edilir. Burada $\tilde{Y} = (\bar{y}_i, e_i)$ gözlenen bulanık verinin değeri olmak üzere, \bar{y}_i bulanık merkez, e_i ise bulanık yayılımın ölçüsüdür. (Tanaka, Uejima, and Asai,1982; Terano, Asai and Sugeno, 1992; Chang and Ayyub, 2001).

$$\text{Min } S = n c_0 + c_1 \sum_{i=1}^n / X_i /$$

Kısıtı altında

$$c_0 \geq 0, \quad c_1 \geq 0$$

$$\sum_{j=0}^1 \alpha_j X_{ij} + (1-h) \sum_{j=0}^1 c_j / X_{ij} / \geq \bar{y}_i + (1-h)e_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

$$\sum_{j=0}^1 \alpha_j X_{ij} - (1-h) \sum_{j=0}^1 c_j / X_{ij} / \leq \bar{y}_i - (1-h)e_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

$$\alpha_j \in R, \quad 0 \leq h \leq 1 \quad (5.4)$$

Birden fazla bağımsız değişken olması durumunda bağımsız değişkenler vektörü $X_i = [X_{i0}, X_{i1}, \dots, X_{iN}]^T$ ve bulanık parametreler $\tilde{A}_j = (\alpha_j, c_j)$ üçgensel bulanık katsayılar olmak üzere bulanık parametreler vektörü $\tilde{A} = [\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_N]$ olarak verildiğinde BDRM Eşitlik 5.5 ile gösterilir.

$$\tilde{Y}_i = \tilde{A}_0 X_{i0} + \tilde{A}_1 X_{i1} + \tilde{A}_2 X_{i2} + \dots + \tilde{A}_N X_{iN} \quad (5.5)$$

Burada bulanık gözlem değerleri $\tilde{Y}_i = (\bar{y}_i, e_i)$ olmak üzere,

$$\mu_{\tilde{Y}_j}(y_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|y_i - \bar{y}_i|}{e_i}, & \bar{y}_i - e_i \leq y_i \leq \bar{y}_i + e_i \\ 0 & \text{ö.d} \end{cases}$$

ile verilir.

Regresyon modelindeki bulanık katsayıların üyelik fonksiyonu ise aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mu_{\tilde{A}_j}(a_j) = \begin{cases} 1 - \frac{|a_j - \alpha_j|}{c_j}, & \alpha_j - c_j \leq a_j \leq \alpha_j + c_j \\ 0 & \text{ö.d} \end{cases}$$

Eşitlik 5.5 'in daha açık bir ifadesi ise Eşitlik 5.6 ile verilir.

$$\tilde{Y}_i = (\alpha_0, c_0) + (\alpha_1, c_1)X_{i1} + (\alpha_2, c_2)X_{i2} + \dots + (\alpha_N, c_N)X_{iN} \quad (5.6)$$

Genişletme prensibi yardımıyla, $\tilde{Y}_i = (Y_i^L, Y_i^{h=1}, Y_i^R)$, $i = 1, 2, \dots, M$ olmak üzere \tilde{Y}_i bulanık tahmin değeri elde edilir. \tilde{Y}_i 'nin alt sınırı $Y_i^L = (\alpha - c)^T X_i$, merkez değeri $Y_i^{h=1} = \alpha^T X_i$ ve üst sınırı $Y_i^R = (\alpha + c)^T X_i$ olarak hesaplanır. Burada $c^T = (c_0, c_1, \dots, c_N)$ ve $\alpha^T = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ olmak üzere bulanık tahminin üyelik fonksiyonu Eşitlik 5.7 ile verilmiştir (Wang and Tsaur, 2000b).

$$\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|y_i - \alpha^T X_i|}{c^T X_i}, & X_i \neq 0 \\ 1 & , X_i = 0, y_i = 0 \\ 0 & , \text{ö.d.} \end{cases} \quad (5.7)$$

ile gösterilir. Burada oluşturulan BDRM' nin bulanık parametrelerini bulmak için Tanaka (1982) 'nin önerdiği doğrusal programlama modeli aşağıdaki eşitliklerle verilmektedir.

$$\text{Min } J = \sum_{j=0}^N \left(c_j \sum_{i=1}^M / x_{ij} / \right) = \text{Min } c^t / X / \quad (5.8)$$

Kısıtı altında (Subject to)

$$\sum_{j=0}^N \alpha_j X_{ij} + (1-h) \sum_{j=0}^N c_j / X_{ij} / \geq \bar{y}_i + (1-h)e_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, M \quad (5.9)$$

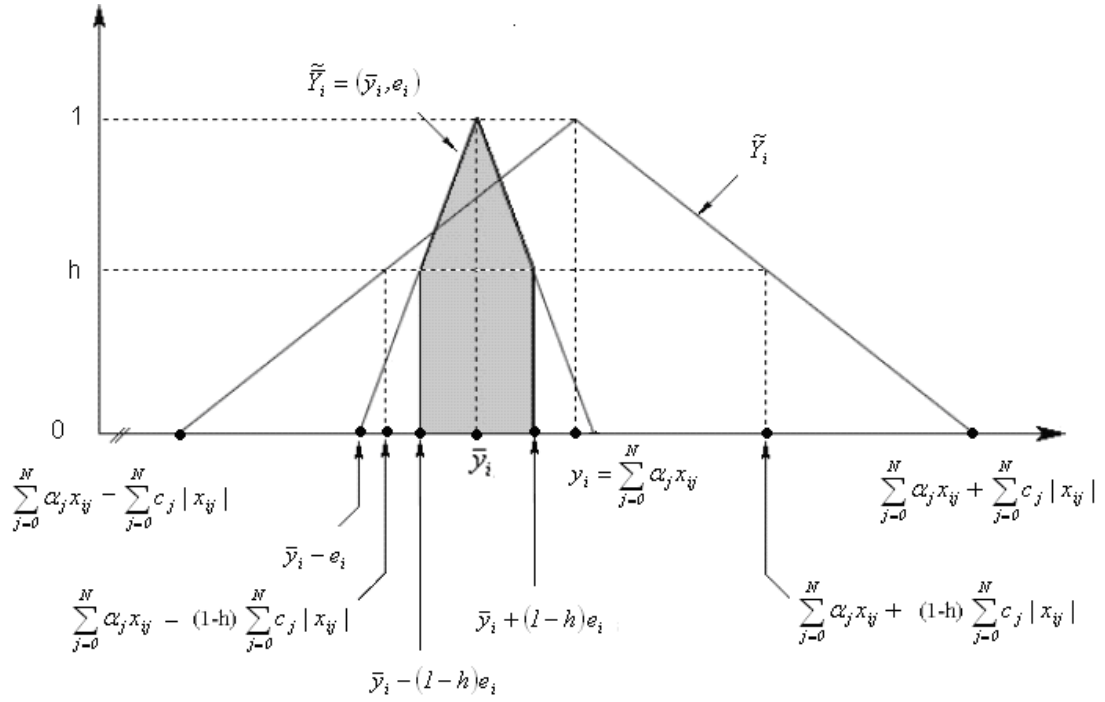
$$\sum_{j=0}^N \alpha_j X_{ij} - (1-h) \sum_{j=0}^N c_j / X_{ij} / \leq \bar{y}_i - (1-h)e_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, M \quad (5.10)$$

$$c_j \geq 0, \quad \alpha_j \in R, \quad X_{i0} = 1, \quad 0 \leq h \leq 1; \quad \forall i = 1, 2, \dots, M, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N \quad (5.11)$$

Burada J modeldeki toplam bulanıklığı göstermektedir. $\tilde{Y} = (\bar{y}_i, e_i)$ gözlenen bulanık verinin değeri olmak üzere, \bar{y}_i bulanık merkez, e_i ise bulanık yayılımın ölçüsüdür. Eğer gözlemlenen bir veri bulanık değilse e değeri sıfırdır. (Tanaka, Uejima and Asai, 1982). Buradaki kısıtlarda bulunan h düzeyi, \tilde{Y} gözlem değerinin \tilde{Y}_i tahminine en az h derecesi ile bağlı olması gerektiğini gösterir (Wang and Tsaur, 2000b).

Eşitlikler 5.8 – 5.11’ de kullanılan doğrusal programlama problemi Tanaka (1982) tarafından bulanık parametre tahmininde kullanılmıştır. Ancak bu yöntemle oluşturulan tahminlerin aykırı değerlerden çok etkilendiği belirlenmiştir. (Wang and Tsaur, 2000a). Bu durumda minimum bulanıklık seviyesine ulaşmak zor olabilir. Gerçek gözlem değerlerinin tamamının tahmin edilen bulanık alt (Y^L) ve üst (Y^U) sınır tarafından kapsanması sağlanırken tahminlerin, (\tilde{Y}_i) lerin yayılımı artar ve bulanıklık seviyesi büyür.

BDRA uygulandıktan sonra bulanık gözlem ve bulanık tahmin ile uygunluk ölçüsü h düzeyinin gösterimi Şekil 5.2 ile verilmiştir (Shapiro, 2005).



Şekil 5.2 BDR’ de Tahmin değerleri (\tilde{Y}_i), gözlem değerleri (\tilde{Y}_i) ve uyum ölçütü (h düzeyi)

Yukarıda verilen Tanaka (1982)’nin önerdiği modelde amaç fonksiyonu toplam yayılımı minimize ederken kısıtlar ise gözlem değerlerinin belirlenen h seviyesinde tahmin edilen bulanık sayı tarafından içerilmesi gerektiğini gösterir.

5.2.2 Sistem Parametrelerinin Bulandırılması Yöntemi

Regresyon modelinin katsayılarını bulandırarak BDRM ‘ye ulaşmak uygulamada sıkça tercih edilen ve oldukça basit bir yöntemdir. Bunun için KDRA ile oluşturulan model katsayıları belirlenen bir “ h seviyesinde” bulandırılır (Uras, 1998). Parametrelerin bulanıklaştırılmasına bir başka yaklaşım ise parametrelerin bulanık sayılar olarak tahmin edilmesiyle mümkün olmaktadır (Buckley, 2004). Bu yaklaşıma göre öncelikle $Y_i = \tilde{a} + \tilde{b}x_{i1} + \tilde{c}x_{i2}$ olarak ifade edilen bulanık regresyon modeli katsayıları kesin sayılar olarak düşünülür. Sonra kesin sayı olan a, b, c parametreleri ve varyansın güven aralıkları klasik regresyon analizindeki gibi elde edilir. Parametreler ve güven aralıkları tahminleri için matris notasyonu Eşitlik 5.12, veri matrisi ise Eşitlik 5.13 ile tanımlanmaktadır

$$\theta = [a, b, c], Y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \quad (5.12)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Son olarak parametrelerin nokta tahmin vektörü olarak $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ tanımlansın.

$\hat{\theta} = (X'X)^{-1} X'Y$ olarak hesaplanır. Varyans tahmini için ise Eşitlik 5.14 kullanılır

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 / (n-3) \quad (6.14)$$

Burada $\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ ve $\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_{1i} + \hat{c}x_{2i}$

olarak verilmektedir.

Regresyon modelindeki parametreleri bulanıklaştırmak için her bir parametreye ait (a, b, c, σ^2) güven aralığı hesaplanması gerekir. $(X'X)^{-1} = A = [a_{ij}]$ olduğunda a, b, c için $(1-\beta)$ güven katsayısındaki güven aralığının uç değerleri aşağıdaki eşitliklerle hesaplanır. A_{11} değeri $(X'X)^{-1} = A = [a_{ij}]$ matrisinin ilk elemanı olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left[\hat{a} - t_{\beta/2; n-3} \hat{\sigma} \sqrt{a_{11}}, \hat{a} + t_{\beta/2; n-3} \hat{\sigma} \sqrt{a_{11}} \right] \\ & \left[\hat{b} - t_{\beta/2; n-3} \hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}, \hat{b} + t_{\beta/2; n-3} \hat{\sigma} \sqrt{a_{22}} \right] \\ & \left[\hat{c} - t_{\beta/2; n-3} \hat{\sigma} \sqrt{a_{33}}, \hat{c} + t_{\beta/2; n-3} \hat{\sigma} \sqrt{a_{33}} \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

Daha sonra σ^2 ' nin güven aralığının hesaplanması gerekir.

$$P\left(\chi_{L, \beta/2; n-3}^2 \leq \frac{(n-3)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \chi_{R, \beta/2; n-3}^2 \right) = 1 - \beta \Rightarrow \left[\frac{(n-3)\hat{\sigma}^2}{\chi_{R, \beta/2; n-3}^2}, \frac{(n-3)\hat{\sigma}^2}{\chi_{L, \beta/2; n-3}^2} \right] \quad (5.16)$$

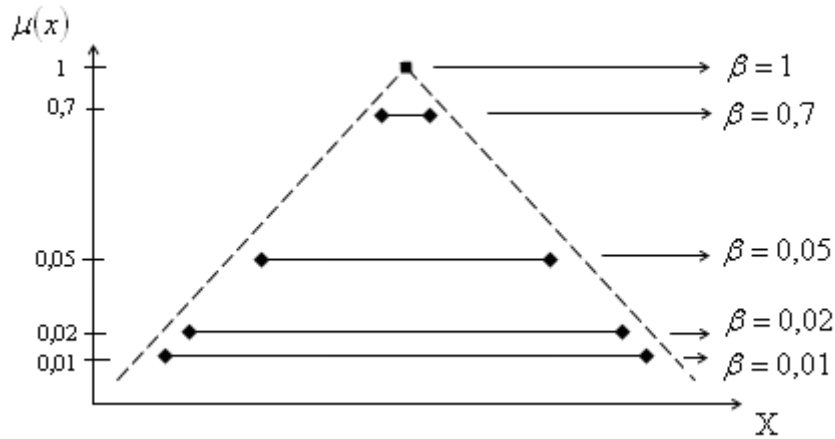
Eşitlik 5.15 ve 5.16 ile verilen denklemlerle her parametre için $0,01 \leq \beta \leq 1$ sınırlarında güven aralıkları hesaplanır. Her bir parametre için bulunan güven aralıkları üst üste koyulduğunda parametrenin bulanık tahminine ulaşılır. Ancak varyans için güven aralığından oluşturulan bulanık parametre tahmini yanlıdır. Üçgensel bulanık sayı olan parametre tahmininde $\alpha = 1$ kesim aralığında bulanık sayının merkez noktasını vermemektedir. Yansız parametre tahmini elde etmek için $L(\lambda)$ ve $R(\lambda)$ fonksiyonları Eşitlik 5.17 ile tanımlanır. Burada χ_R^2 ki-kare tablosunun sağ yan değerini, χ_L^2 ise ki-kare tablosunun sol yan değerini ifade eder.

$$L(\lambda) = [I - \lambda] \chi_{R, \beta/2, n-3}^2 + \lambda(n-3) \quad (5.17)$$

$$R(\lambda) = [I - \lambda] \chi_{L, \beta/2, n-3}^2 + \lambda(n-3)$$

Daha sonra α kesim kümesi $\left[\frac{(n-3)\hat{\sigma}^2}{L(\lambda)}, \frac{(n-3)\hat{\sigma}^2}{R(\lambda)} \right]$ olmak üzere yansız bulanık $\hat{\sigma}^2$ tahminine ulaşılır ($0 \leq \lambda \leq 1$, $0,01 \leq \beta \leq 1$).

Farklı güven düzeyleri kullanılarak oluşturulan regresyon modelinin bulanık parametreleri Şekil 5.3 ile verilmiştir.



Şekil 5.3 Bulanık parametre tahmini

Bulanıklaştırılan $Y_i = \tilde{a} + \tilde{b}x_{i1} + \tilde{c}x_{i2}$ regresyon modeli parametrelerinin $\alpha \in [0,1]$ için güven aralıklarının alt ve üst sınırları

$$\tilde{a}[\alpha] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

$$\tilde{b}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$$

$$\tilde{c}[\alpha] = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]$$

yukarıdaki gibi verildiğinde α kesimleri ve aralık aritmetiği işlemleri kullanılarak oluşturulan $\tilde{y}(x_1, x_2)(\alpha) = [y(x_1, x_2)_1(\alpha), y(x_1, x_2)_2(\alpha)]$ tahmini $\alpha \in [0,1]$ için aşağıdaki gibi hesaplanır (Buckley, 2006).

$$y(x_1, x_2)_1(\alpha) = a_1(\alpha) + x_1 b_1(\alpha) + x_2 c_1(\alpha)$$

$$y(x_1, x_2)_2(\alpha) = a_2(\alpha) + x_1 b_2(\alpha) + x_2 c_2(\alpha)$$

Regresyon modelinin parametrelerini bulanıklaştırmak için Buckley' in (2004) önerdiği yöntemle göre bulanık sayılar olarak oluşturulan katsayılar, belirlenen parametreler için farklı güven düzeylerinde oluşturulan güven aralıklarının üst üste koyulmasıyla elde edilir. Daha sonra, bulanıklaştırılan parametreler kullanılarak farklı alfa kesim kümeleri için oluşturulan bulanık tahminler oluşturulur.

5.2.3 Bulanık En Küçük Kareler Yöntemi

EKK yönteminin bulanık küme kuramına genişletilmiş hali olan bulanık en küçük kareler yöntemi (BEKK), bulanık parametreleri tahmin etmek için ilk kez Diamond (1988) tarafından kullanılmıştır (Wang and Tsaur, 2000b).

BEKK yönteminin amacı, tahmin edilen \tilde{Y}_i bulanık bağımlı değişken değerleri ile gözlenen $\tilde{Y}_i = (\bar{y}_i, e_i)$ değerleri arasındaki bulanık mesafeyi minimize etmektir (Diamond, 1988). Bu durumun KDRA' daki karşılığı, gerçek Y_i gözlem değerleri ile tahminleri arasındaki farkın minimize edilmek istenmesidir.

Bağımlı ve bağımsız değişkenin bulanık sayılar olduğu durum için geliştirilen BEKK yönteminde iki farklı modele göre parametre tahminleri önerilmiştir (Diamond,1988, Şanlı ve Apaydın, 2004). Bu modeller

$$\tilde{Y}_i = a + b\tilde{X}_{i1}$$

$$\tilde{Y}_i = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1x_{i1}$$

biçiminde verilir. Buradaki ilk modelde “a” ve “b” kesin sayılardır ve modele giren gözlem değerlerinin (\tilde{X}_i) bulanık sayı olduğu durumda oluşturulan regresyon modelidir. Bu çalışmada bulanık parametre değerlerine sahip regresyon modeli ile ilgilenildiğinden, $\tilde{Y}_i = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1x_{i1}$ için bulanık parametreleri tahmin etme adımları verilecektir.

$\tilde{Y}_i = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1X_{i1}$ ile tanımlanan tek değişkenli BDRM de, bulanık parametreler $\tilde{A}_0 = (\alpha_0, c_0)$ ve $\tilde{A}_1 = (\alpha_1, c_1)$ olmak üzere α_0 ve α_1 merkez değerleri, c_0 ve c_1 ise yayılım değerlerini göstermektedir. Burada \tilde{Y}_i bulanık bağımlı değişken değerleri ile gözlenen $\tilde{\tilde{Y}}_i = (\bar{y}_i, e_i)$ değerleri arasındaki fark Eşitlik 5.18 ile tanımlanır.

$$r(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1X_{i1}, \tilde{\tilde{Y}}_i) = \sum d(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1\tilde{X}_{i1}, \tilde{\tilde{Y}}_i)^2 = (\alpha_0 + c_0 + \alpha_1X_{i1} + c_1X_{i1} - \bar{y}_i - e_i)^2 + (\alpha_0 + \alpha_1X_{i1} - \bar{y}_i - e_i)^2 + (\alpha_0 - c_0 + \alpha_1X_{i1} - c_1X_{i1} - \bar{y}_i + e_i)^2 \quad (5.18)$$

Eşitlik 5.18 ile verilen denklemin 1. türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde, model katsayılarına ilişkin merkez ve yayılma değerleri elde edilir (Diamond, 1988). Wang ve Tsaur (2000b) ise Diamond tarafından önerilen BEKK yöntemini geliştirerek merkez değerlerinin sıfırdan büyük olup olmamalarına göre ayrı ayrı çözümlerin elde edilmesi gerektiğini göstermişlerdir. Bu nedenle tüm değerlerin sıfırdan küçük ya da büyük olma durumuna göre ayrı ayrı incelemelerin yapılması gerekir (Wang and Tsaur, 2000b). Bu durumlar aşağıda verilmiştir.

(a) $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, c_0$ ve c_1 kısıtsız

Bulanık mesafenin α_0 ' a göre 1. dereceden türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde α_1 ' in değeri bulunur. Burada N bulanık parametre sayısı olmak üzere diğer katsayıları bulmak için de aynı yol izlenir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 X_{il}, \tilde{Y}_i)}{\partial \alpha_0} &= \\ &= 2 \sum_{i=1}^M \{ \alpha_0 - c_0 + (\alpha_1 - c_1) X_{il} - (\bar{y}_i - e_i) + \alpha_0 + c_0 + (\alpha_1 + c_1) X_{il} - (\bar{y}_i + e_i) + \alpha_0 + \alpha_1 X_{il} - \bar{y}_i \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 X_{il}, \tilde{Y}_i)}{\partial c_0} &= \\ &= 2 \sum_{i=1}^M \{ \alpha_0 - c_0 + (\alpha_1 - c_1) X_{il} - (\bar{y}_i - e_i)(-1) + \alpha_0 + c_0 + (\alpha_1 + c_1) X_{il} - (\bar{y}_i + e_i) + \alpha_0 + \alpha_1 X_{il} - \bar{y}_i \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 X_{il}, \tilde{Y}_i)}{\partial \alpha_1} &= \\ &= 2 \sum_{i=1}^M X_{il} \{ \alpha_0 - c_0 + (\alpha_1 - c_1) X_{il} - (\bar{y}_i - e_i) + \alpha_0 + c_0 + (\alpha_1 + c_1) X_{il} - (\bar{y}_i + e_i) + \alpha_0 + \alpha_1 X_{il} - \bar{y}_i \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 X_{il}, \tilde{Y}_i)}{\partial c_1} &= \\ &= 2 \sum_{i=1}^M X_{il} \{ - [\alpha_0 - c_0 + (\alpha_1 - c_1) X_{il} - (\bar{y}_i - e_i)] + [\alpha_0 + c_0 + (\alpha_1 + c_1) X_{il} - (\bar{y}_i + e_i)] \} \end{aligned}$$

Buna göre elde edilen sonuçlar

$$\alpha_1 = \frac{N \sum_{i=1}^M X_{il} \bar{y}_i - \sum_{i=1}^M X_{il} \sum_{i=1}^M \bar{y}_i}{N \sum_{i=1}^M X_{il}^2 - \left(\sum_{i=1}^M X_{il} \right)^2} \quad (5.19)$$

$$\alpha_0 = \bar{y}_{ortalama} - \alpha_1 X_{ortalama} \quad (5.20)$$

$$c_1 = \frac{N \sum_{i=1}^M X_{i1} e_i - \sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M e_i}{N \sum_{i=1}^M X_{i1}^2 - \left(\sum_{i=1}^M X_{i1} \right)^2} \quad (5.21)$$

$$c_0 = e_{ortalama} - c_1 X_{ortalama} \quad (5.22)$$

olarak hesaplanır.

(b) $\alpha_0 < 0$, $\alpha_1 > 0$, $c_0 < 0$ ve c_1 kısıtsız

$$\alpha_1 = \frac{N \sum_{i=1}^M X_{i1} \bar{y}_i - \sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M \bar{y}_i}{N \sum_{i=1}^M X_{i1}^2 - \left(\sum_{i=1}^M X_{i1} \right)^2} \quad (5.23)$$

$$\alpha_0 = \bar{y}_{ortalama} - \alpha_1 X_{ortalama} \quad (5.24)$$

$$c_1 = \frac{N \sum_{i=1}^M X_{i1} e_i - \sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M e_i}{N \sum_{i=1}^M X_{i1}^2 - \left(\sum_{i=1}^M X_{i1} \right)^2} \quad (5.25)$$

$$c_0 = -(e_{ortalama} - c_1 X_{ortalama}) \quad (5.26)$$

(c) $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 < 0$, c_0 kısıtsız ve $c_1 < 0$

$$\alpha_1 = \frac{N \sum_{i=1}^M X_{i1} \bar{y}_i - \sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M \bar{y}_i}{N \sum_{i=1}^M X_{i1}^2 - \left(\sum_{i=1}^M X_{i1} \right)^2} \quad (5.27)$$

$$\alpha_0 = \bar{y}_{ortalama} - \alpha_1 X_{ortalama} \quad (5.28)$$

$$c_1 = -\frac{N \sum_{i=1}^M X_{il} e_i - \sum_{i=1}^M X_{il} \sum_{i=1}^M e_i}{N \sum_{i=1}^M X_{il}^2 - \left(\sum_{i=1}^M X_{il} \right)^2} \quad (5.29)$$

$$c_0 = e_{ortalama} - c_1 X_{ortalama} \quad (5.30)$$

(d) $\alpha_0 < 0$, $\alpha_1 < 0$, $c_0 < 0$ ve $c_1 < 0$

$$\alpha_1 = \frac{N \sum_{i=1}^M X_{il} \bar{y}_i - \sum_{i=1}^M X_{il} \sum_{i=1}^M \bar{y}_i}{N \sum_{i=1}^M X_{il}^2 - \left(\sum_{i=1}^M X_{il} \right)^2} \quad (5.31)$$

$$\alpha_0 = \bar{y}_{ortalama} - \alpha_1 X_{ortalama} \quad (5.32)$$

$$c_1 = -\frac{N \sum_{i=1}^M X_{il} e_i - \sum_{i=1}^M X_{il} \sum_{i=1}^M e_i}{N \sum_{i=1}^M X_{il}^2 - \left(\sum_{i=1}^M X_{il} \right)^2} \quad (5.33)$$

$$c_0 = -(e_{ortalama} - c_1 X_{ortalama}) \quad (5.34)$$

Ayrıca (d) durumu iki farklı bölüme ayrılabilir. Birincisi: $\alpha_0 < 0$, $\alpha_1 < 0$, $c_0 < 0$, c_1 kısıtsız olduğunda sonuç (b)'ye eşit olur. İkinci durumda ise $\alpha_0 < 0$, $\alpha_1 < 0$, c_0 kısıtsız, $c_1 < 0$ olarak incelenir ve sonucu (c)'ye eşittir.

Yukarıda hesaplanan değerleri kullanarak bulanık en küçük kareler regresyonu aşağıdaki adımsal yöntemle özetlenir.

1. α_0 ve α_1 değerleri Eşitlik 5.18 ile verilen denklemde $\frac{\partial r}{\partial \alpha_0} = 0$ ve $\frac{\partial r}{\partial \alpha_1} = 0$

çözümüyle elde edilir.

2. Eğer $\alpha_0 > 0$ ve $\alpha_1 > 0$ ise sonuç (a)' ya eşittir.

3. $\alpha_0 < 0$, $\alpha_1 > 0$ olduğunda $\sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M X_{i1} e_i - \sum_{i=1}^M X_{i1}^2 \sum_{i=1}^M e_i \geq 0$ ise sonuç (a)'dır,

aksi halde sonuç (b)' dir.

4. $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 < 0$ olduğunda $\sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M e_i - N \sum_{i=1}^M X_{i1} e_i \geq 0$ ise sonuç (a) 'dır,

aksi halde sonuç (c)' dir.

5. Eğer $\alpha_0 < 0$, $\alpha_1 < 0$ ve

$$\sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M X_{i1} e_i - \sum_{i=1}^M X_{i1}^2 \sum_{i=1}^M e_i \geq 0, \sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M e_i - N \sum_{i=1}^M X_{i1} e_i \geq 0 \text{ ise sonuç (a) dir.}$$

6. Eğer $\alpha_0 < 0$, $\alpha_1 < 0$ ve

$$\sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M X_{i1} e_i - \sum_{i=1}^M X_{i1}^2 \sum_{i=1}^M e_i < 0, \sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M e_i - N \sum_{i=1}^M X_{i1} e_i < 0 \text{ ise sonuç (d) dir.}$$

7. Eğer $\alpha_0 < 0$, $\alpha_1 < 0$ ve

$$\sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M X_{i1} e_i - \sum_{i=1}^M X_{i1}^2 \sum_{i=1}^M e_i < 0, \text{ ise sonuç (b) dir.}$$

8. Eğer $\alpha_0 < 0$, $\alpha_1 < 0$ ve

$$\sum_{i=1}^M X_{i1} \sum_{i=1}^M e_i - N \sum_{i=1}^M X_{i1} e_i < 0 \text{ ise sonuç (c) dir.}$$

Yukarıdaki eşitliklerle verilen BEKK yöntemine dayalı parametre tahmini Diamond (1988) tarafından önerilen ve tek değişkenli model için oluşturulan değerlerin Wang ve Tsaur (2000b) tarafından geliştirilmiş sonuçlarıdır (Wang and Tsaur, 2000b). Bu yöntemle oluşturulan parametrelerin bulanıklığı Tanaka (1982) tarafından önerilen yöntemle göre daha azdır ve gerçek değerler çok yakın tahminler üretmektedir. Ancak görüldüğü gibi modelde tek değişken olması durumunda bile BEKK yöntemiyle parametrelerin hesaplanması zaman almaktadır. Bu nedenle değişken sayısı arttığında belirli bir bulanıklık artışı kabul edilip Tanaka (1982)'nin önerdiği yaklaşım tercih edilir (Wang and Tsaur, 2000b).

6. BULANIK HİPOTEZ TESTİ

Oluşturulan regresyon modelindeki parametrelerin anlamlılığını araştırmak için kullanılacak olan “bulanık hipotez testi” klasik hipotez testinin genişletilmiş bir durumudur. Bu bölümde verilen bulanık hipotez testi Buckley (2004) yaklaşımıyla oluşturulan parametrelerin anlamlılığını araştırmak için kullanılır. Tüm hesaplamalar alfa (α) kesim kümesine göre yapılmaktadır (Buckley, 2004; Buckley, 2005; Kahraman, Beşkese and Bozbura, 2006).

Parametreleri test edilmek istenen BDR modeli

$$\tilde{Y}_i = \tilde{a} + \tilde{b}x_{1i} + \tilde{c}x_{2i} \quad (6.1)$$

ile gösterilsin. Bu yaklaşıma göre öncelikle $Y_i = \tilde{a} + \tilde{b}x_{1i} + \tilde{c}x_{2i}$ olarak ifade edilen bulanık regresyon modelinin bulanık katsayıları ve varyansın bulanık tahmini elde edilir. Daha sonra $(X'X)^{-1} = A = [a_{ij}]$ olmak üzere katsayıların önemliliği Buckley' in (2004) önermiş olduğu yaklaşımla aşağıdaki gibi test edilir.

Durum 1: $H_0 : \tilde{b} = 0, H_1 : \tilde{b} > 0$

KDRA' de önemliliği araştırılacak olan b parametresi için klasik hipotez testi ile oluşturulan test değeri Eşitlik 6.2 ile verilmektedir.

$$t_0 = \frac{\hat{b} - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 a_{22}}} \quad (6.2)$$

Burada γ testin önemlilik düzeyini göstermek üzere klasik yaklaşıma göre , $t_0 \geq t_\gamma$ ise H_0 reddedilecek, $t_0 < t_\gamma$ ise H_0 kabul edilecektir. Üçgensel bulanık sayı olarak tahmin edilen bulanık parametreler \tilde{b} ve $\tilde{\sigma}^2$ Eşitlik 6.2 de yerine koyulduğunda test değeri Eşitlik 6.3 'e ulaşılır.

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{b} - 0}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2 a_{22}}} = \frac{[a, b]}{[c, d]} = \left[\frac{a}{d}, \frac{b}{c} \right] \quad (6.3)$$

Hesaplamalar alfa (α) kesim kümesine göre yapıldığı için $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $0,01 \leq \beta \leq 1$ olmak üzere α kesim aralıkları oluşturulmuş aşağıda verilen bulanık parametreler

$$\tilde{b}[\alpha] = (\hat{b} - t_{\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}, \hat{b} + t_{\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}) \quad \tilde{\sigma}[\alpha] = \left[\sqrt{\frac{(n-3)\hat{\sigma}^2}{L(\lambda)}}, \sqrt{\frac{(n-3)\hat{\sigma}^2}{R(\lambda)}} \right]$$

Eşitlik 6.3' te yerine konulur. Aralık aritmetiği ve sadeleştirmelerin yardımıyla Eşitlik 6.4' e ulaşılır.

$$\begin{aligned} \tilde{T}[\alpha] &= \left[\frac{\hat{b} - t_{\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}}{\frac{\sqrt{(n-3)\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{R(\lambda)}} \sqrt{a_{22}}}, \frac{\hat{b} + t_{\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}}{\frac{\sqrt{(n-3)\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{L(\lambda)}} \sqrt{a_{22}}} \right] = \\ &= \left[\sqrt{\frac{R(\lambda)}{n-3}} \left(\frac{\hat{b} - t_{\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}}{\hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}} \right), \sqrt{\frac{L(\lambda)}{n-3}} \left(\frac{\hat{b} + t_{\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}}{\hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}} \right) \right] = \quad (6.4) \\ &= \left[\Pi_1 \left(\frac{\hat{b} - 0}{\hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}} - t_{\alpha/2} \right), \Pi_2 \left(\frac{\hat{b} - 0}{\hat{\sigma} \sqrt{a_{22}}} + t_{\alpha/2} \right) \right] = \left[\Pi_1 \cdot (t_0 - t_{\alpha/2}), \Pi_2 \cdot (t_0 + t_{\alpha/2}) \right] \end{aligned}$$

Burada test istatistiği α kesim kümeleri yardımıyla bulanık sayı olarak hesaplandığından tablo değerlerinin de bulanıklaştırılması gerekir. Burada γ önemlilik düzeyi olmak üzere tablonun sağ yan değeri $C\tilde{V}_2 = t_\gamma$ yi gösterebilir. $C\tilde{V}_{21}$, bulanıklaştırılan tablo değeri $C\tilde{V}_2$ ' nin alabileceği en küçük değeri, $C\tilde{V}_{22}$ ise $C\tilde{V}_2$ ' nin alabileceği en büyük değeri göstermektedir. Buna göre

$$P(\Pi_2(t_0 + t_{\alpha/2}) \geq CV_{22}(\alpha)) = \gamma$$

$$P(t_0 \geq (CV_{22}(\alpha) / \Pi_2) - t_{\alpha/2}) = \gamma$$

$$CV_{22}(\alpha) / \Pi_2 - t_{\alpha/2} = t_\gamma$$

$$CV_{22}(\alpha) = \Pi_2(t_\gamma + t_{\alpha/2})$$

olarak hesaplanır. Bulanıklaştırılan tablo değerinin alt ve üst sınırları aşağıda Eşitlik 6.5 ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} CV_2[\alpha] &= \left[\sqrt{R(\lambda)/(n-3)}(t_\gamma - t_{\alpha/2}), \sqrt{L(\lambda)/(n-3)}(t_\gamma + t_{\alpha/2}) \right] \\ &= \left[\Pi_1(t_\gamma - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_\gamma + t_{\alpha/2}) \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Eşitlik 6.5 ile verilen denklemde γ önemlilik düzeyini gösterir ve sabittir, α ise [0.01, 1] aralığında değişmektedir ve tüm işlemler aralıkların pozitif olduğu durum için yapılmıştır. Son olarak verilecek kararda ise \tilde{T} ve CV_2 'nin farklı durumları göz önüne alınarak hipotezin reddine ya da kabulüne karar verilir (Buckley, 2004). Buna göre

- (1) Eğer $\tilde{T} > CV_2$ ise H_0 reddedilsin.
- (2) Eğer $\tilde{T} < CV_2$ ise H_0 kabul edilsin.
- (3) Eğer $\tilde{T} \approx CV_2$ ise bir karar verilemez.

DURUM 2: $H_0 : \tilde{c} = 0, H_1 : \tilde{c} \neq 0$

KDRA' de önemliliği araştırılacak olan c parametresi için oluşturulan test değeri Eşitlik 6.6 ile verilmektedir.

$$t_0 = \frac{\hat{c} - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 a_{33}}} \quad (6.6)$$

Burada γ testin önemlilik düzeyini göstermek üzere, $t_0 \geq t_{\gamma/2}$ ya da $t_0 \leq -t_{\gamma/2}$ ise H_0 reddedilecek, diğer durumlarda ise H_0 kabul edilecektir. \tilde{c} ve $\tilde{\sigma}^2$ üçgensel bulanık sayı olarak tahmin edilen bulanık parametreler Eşitlik 6.6 da yerine koyulduğunda test değeri Eşitlik 6.7 'ye ulaşılır.

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{c} - 0}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2 a_{33}}} = \frac{[a, b]}{[c, d]} = \left[\frac{a}{d}, \frac{b}{c} \right] \quad (6.7)$$

Hesaplamalar alfa (α) kesim kümesine göre yapıldığı için α -kesimleri hesaplanmış bulanık parametreler eşitlikte yerine koyulur, tüm aralıkların pozitif olduğu durumda, aralık aritmetiği ve sadeleştirmelerin yardımıyla $\Pi_1 = \sqrt{R(\lambda)/(n-3)}$ ve $\Pi_2 = \sqrt{L(\lambda)/(n-3)}$ olmak üzere Eşitlik 6.8' e ulaşılır.

$$\bar{T}[\alpha] = \left[\Pi_1(t_0 - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_0 + t_{\alpha/2}) \right] \quad (6.8)$$

Buradaki test istatistiği, α kesim kümeleri yardımıyla bulanık sayı olarak hesaplandığından tablo değerlerinin de bulanıklaştırılması gerekir. Ayrıca γ önemlilik düzeyi olmak üzere tablonun sağ yan değeri $C\tilde{V}_2 = t_{\gamma/2}$ yi gösterebilir. $C\tilde{V}_{21}$, bulanıklaştırılan tablo değeri $C\tilde{V}_2$ ' nin alabileceği en küçük değeri, $C\tilde{V}_{22}$ ise $C\tilde{V}_2$ ' nin alabileceği en büyük değeri göstermektedir. T dağılımı simetrik bir dağılım olduğu için $\overline{C\tilde{V}}_1 = -\overline{C\tilde{V}}_2$ olarak hesaplanır. Buna göre bulanıklaştırılan tablo değeri Eşitlik 6.9 ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} \overline{C\tilde{V}}_2[\alpha] &= \left[\Pi_1(t_{\gamma/2} - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_{\gamma/2} + t_{\alpha/2}) \right] \\ \overline{C\tilde{V}}_1[\alpha] &= \left[\Pi_2(-t_{\gamma/2} - t_{\alpha/2}), \Pi_1(-t_{\gamma/2} + t_{\alpha/2}) \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Son olarak hesaplanarak tablo değerleri, \tilde{T} ile karşılaştırılarak yorumlanır.

- (1) Eğer $\tilde{T} \geq C\tilde{V}_2$ ise H_0 reddedilsin.
- (2) Eğer $\tilde{T} \leq C\tilde{V}_1$ ise H_0 reddedilsin..
- (3) Aksi halde hipotez kabul edilsin.

Buckley (2004)' in önermiş olduğu bu yöntem, oluşturulan test istatistik değerinin tablo değerine çok yakın bulunması durumunda kullanılması tavsiye edilmektedir.

Tablo 6.1 ile parametreleri test edilmek istenen BDR modeli Eşitlik 6.1 için,

$$\Pi_1 = \sqrt{\frac{R(\lambda)}{(n-3)}} \text{ ve } \Pi_2 = \sqrt{\frac{L(\lambda)}{(n-3)}} \text{ olmak üzere farklı aralıklar için oluşturulan test}$$

istatistikleri ve karşılaştırılan tablo değerleri verilmiştir.

Tablo 6.1 Oluşturulan test istatistikleri ve karşılaştırılan tablo değerleri.

Seçenek Hipotez	[+ a,+b]	
	Test İstatistiği	Tablo Değeri
Tek yanlı (<)	$\tilde{T}[\alpha] = [\Pi_1(t_0 - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_0 + t_{\alpha/2})]$	$CV_1 = [\Pi_2(-t_\gamma - t_{\alpha/2}), \Pi_1(-t_\gamma + t_{\alpha/2})]$
Tek yanlı (>)	$\tilde{T}[\alpha] = [\Pi_1(t_0 - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_0 + t_{\alpha/2})]$	$CV_2 = [\Pi_1(t_\gamma - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_\gamma + t_{\alpha/2})]$
İki yanlı (≠)	$\tilde{T}[\alpha] = [\Pi_1(t_0 - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_0 + t_{\alpha/2})]$	$CV_1 = [\Pi_2(-t_{\gamma/2} - t_{\alpha/2}), \Pi_1(-t_{\gamma/2} + t_{\alpha/2})]$ $CV_2 = [\Pi_1(t_{\gamma/2} - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_{\gamma/2} + t_{\alpha/2})]$
Seçenek Hipotez	[- a,-b]	
	Test İstatistiği	Tablo Değeri
Tek yanlı (<)	$\tilde{T}[\alpha] = [\Pi_2(t_0 - t_{\alpha/2}), \Pi_1(t_0 + t_{\alpha/2})]$	$CV_1 = [\Pi_2(-t_\gamma - t_{\alpha/2}), \Pi_1(-t_\gamma + t_{\alpha/2})]$
Tek yanlı (>)	$\tilde{T}[\alpha] = [\Pi_2(t_0 - t_{\alpha/2}), \Pi_1(t_0 + t_{\alpha/2})]$	$CV_2 = [\Pi_1(t_\gamma - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_\gamma + t_{\alpha/2})]$
İki yanlı (≠)	$\tilde{T}[\alpha] = [\Pi_2(t_0 - t_{\alpha/2}), \Pi_1(t_0 + t_{\alpha/2})]$	$CV_1 = [\Pi_2(-t_{\gamma/2} - t_{\alpha/2}), \Pi_1(-t_{\gamma/2} + t_{\alpha/2})]$ $CV_2 = [\Pi_1(t_{\gamma/2} - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_{\gamma/2} + t_{\alpha/2})]$

7. UYGULAMA

Bu çalışmada bulanık doğrusal regresyon modelinin bir uygulamasının yapılması ve oluşturulan regresyon model katsayılarının önemliliğinin test edilmesi için Devlet Planlama Teşkilatı'nın internet sitesinden alınan veri kullanıldı (<http://ekutup.dpt.gov.tr/ueg/2009/2009.asp>).

Uygulamada bağımlı değişken olarak Türkiye' deki işsizlik oranı ele alındı. Bu değişkeni etkileyen bağımsız değişkenler ise sırasıyla "tüketici fiyatları artış oranı" ve "para arzındaki artış hızı" olarak belirlendi. Ancak işsizlik oranının sadece yukarıda verilen değişkenlere bağlı olmadığı bilinmektedir. Ayrıca aynı tür veri farklı kaynaklarda farklı olarak belirlendiği için veriye olan güven düşüktür. Bu nedenle ortaya çıkan belirsizlik durumu sistemde bulanıklığa sebep olmaktadır.

Uygulamada kullanılacak olan bağımlı ve bağımsız değişkenler Tablo 7.1 ile verildi.

Tablo 7.1 Yıllara göre Türkiye' deki tüketici fiyatları artış oranları, para arzı artış hızları ve işsizlik oranları

YILLAR	TÜKETİCİ FİYATLARI ARTIŞ ORANI (X_1)	PARA ARZI ARTIŞ HIZI (X_2)	İŞSİZLİK ORANLARI (Y)
2000	75,9	42,5	6,6
2001	54,2	82,2	8,4
2002	45,1	28,2	10,3
2003	25,3	12,3	10,5
2004	8,6	23,7	10,3
2005	8,2	28,3	10,2
2006	9,6	25,0	9,9
2007	8,8	16,0	9,9
2008	10,4	25,8	10,6

Bu değişkenleri kullanarak *doğrusal programlama yaklaşımı* ve *sistem parametrelerinin bulandırılması yöntemiyle* bulanık doğrusal regresyon analizi yapıldı. Wang ve Tsaur (2000b)' un önerisiyle *bulanık en küçük kareler yaklaşımı* tercih edilmedi. Ayrıca *sistem parametrelerinin bulandırılması yöntemiyle* oluşturulan model parametrelerine ait Buckley (2006)' nin önerdiği hipotez testleri de alt bölümlerde verildi.

7.1 Klasik Regresyon Modeli

Türkiye’ de hesaplanan tüketici fiyatı artış oranı ve para arzındaki artış oranının işsizlik oranına olan etkisini belirlemek için çoklu regresyon modeli kurulmuştur.

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{i1} + \alpha_2 X_{i2} + \varepsilon_i$$

Tablo 7.1 deki veri kullanılarak klasik yöntemle oluşturulan regresyon modeli aşağıda verilmiştir. (SPSS 15 paket programı yardımıyla hesaplanan sonuçlar EK-1’ de verilmiştir.)

$$Y_i = 10,9933 - 0,038X_{i1} - 0,010X_{i2} + e_i \quad , \quad i = 1,2,\dots,9$$

Yukarıdaki eşitlikten, tüketici fiyatı artış oranı ve para arzı artış hızının işsizlik oranı üzerinde negatif yönlü bir etkiye sahip olduğu söylenebilir. Ancak Ek-1 de verilen sonuçlara bakıldığında tüketici fiyatı artış oranı, işsizlik oranını belirlemede anlamlı bir etkiye sahipken, aynı durum para arzı artış hızı değişkeni için söylenemez. Ancak dikkat edilirse tüketici fiyatı artış oranı değişkeninin çok küçük bir değer farkıyla modelde yer alması anlamlı bulunmuştur. Regresyon modelinin anlamlı olması kadar gözlem değerlerinin modele uyumunu gösteren belirtme katsayısı da önemli bir değerdir. Bu modelde $R^2 = 0,708$ olarak hesaplanmıştır. Bağımlı değişkendeki değişmelerin %70,8’i bağımsız değişkenler tarafından açıklanmaktadır. Bunun yanında düzeltilmiş R^2 değerinin 0,611 olarak bulunması da kurulan regresyon modeline olan güveni azaltmaktadır.

7.2 Doğrusal Programlama Yaklaşımı ile Bulanık Regresyon Modeli

Bu yöntemle göre her veri 2 kısıta dönüştürülür. Tablo 7.1 ile verilen değerler kullanılarak 18 kısıt oluşturulur. Eşitlik 5.8 ile verilen amaç fonksiyonu bulanık katsayıların toplam yayılımlarını minimize etmek içindir. Böylece Eşitlik 5.9, Eşitlik 5.10 ve Eşitlik 5.11 regresyon katsayılarının merkez değerini ve yayılımlarını oluşturmak için kullanılır. Uygulamada farklı h düzeyleri ele alınarak ($h = 0,3$, $h = 0,5$, $h = 0,7$) çözümlenmeler yapıldı ve sonuçlar karşılaştırıldı. LINGO paket

programı kullanılarak ve farklı h düzeyleri için oluşturulan bulanık regresyon modelleri aşağıda verilmiştir.

DURUM 1: $h=0,3$ için elde edilen çözüm aşağıda verildi. $\tilde{A}_j = (\alpha_j, c_j)$

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_i &= \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 X_{i1} + \tilde{A}_2 X_{i2} = (\alpha_0, c_0) + (\alpha_1, c_1) X_{i1} + (\alpha_2, c_2) X_{i2} \\ &= (10,54864; 0,27288) + (-0,02845; 0,02849) X_{i1} + (-0,00198; 0) X_{i2}\end{aligned}$$

Sistem Bulanıklığı=9,467765

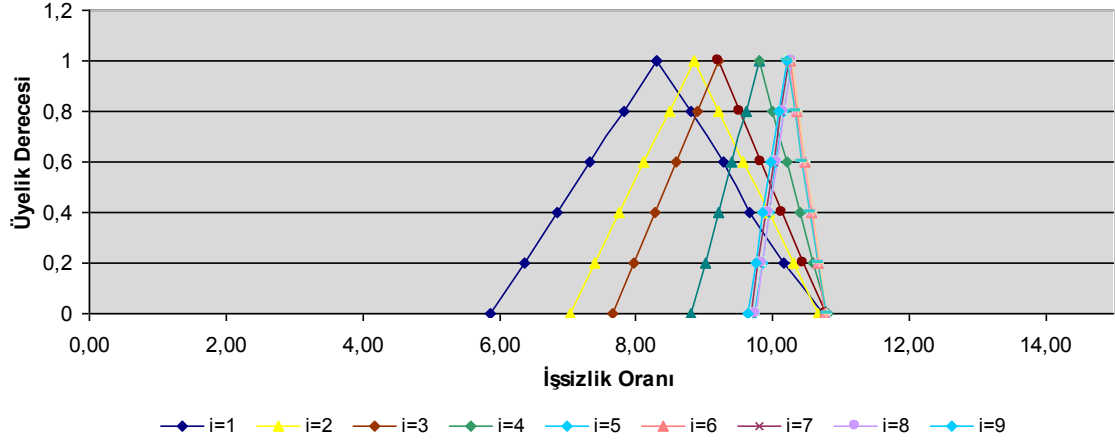
$$\bar{h} = \sum_{i=1}^9 h_i / 9 = 0,55$$

Burada bulanık regresyon modeli parametrelerinin merkez değerleri ve yayılımları bulundu. Bu modelin LINGO paket programındaki gösterimi ve elde edilen sonuçları EK-2' de verildi. Sistem bulanıklığı 9,467765 olarak hesaplandı (Düzyurt, 2008; Lindo Systems Inc., 2003). $h=0,3$ için Tanaka (1982)' nin yöntemi kullanılarak tahmin edilen işsizlik oranları Tablo 7.2 ile verildi. Sistemin ortalama h düzeyi ise $\bar{h} = 0,55 > 0,3$ olarak hesaplandı.

Tablo 7.2 $h=0,3$ için Tanaka' nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

h=0,3 için		Tahmin \tilde{Y}_i		Tahmin \tilde{Y}_i		\tilde{Y}_i 'lerin Uyumluk Derecesi
i	Gerçek y Değerleri	Alt Sınır	Üst Sınır	Merkez (α_i)	Yayılım (c_i)	(h_i)
1	6,6	5,869864	10,74041	8,305135	2,435271	0,34
2	8,4	7,026856	10,66093	8,843894	1,817038	0,99
3	10,3	7,651930	10,76749	9,209709	1,557779	0,30
4	10,5	8,810824	10,79818	9,804501	0,993677	0,30
5	10,3	9,739150	10,77494	10,25704	0,517894	0,99
6	10,2	9,752818	10,76581	10,25932	0,506498	0,99
7	9,9	9,679636	10,77240	10,22602	0,546384	0,40
8	9,9	9,743008	10,79019	10,26660	0,523592	0,30
9	10,6	9,63250	10,77085	10,20168	0,569176	0,31

Türkiye' deki bulanık işsizlik oranı $\tilde{Y}_i = (\alpha_i, c_i)$ ile açıklanabilir. İşsizlik oranının belirsizliği ise \tilde{A}_0 sabit katsayısının, \tilde{A}_1 tüketici fiyatları artış oranı ve \tilde{A}_2 para arzı artış oranının belirsizliği ile ifade edilebilir. Bu parametrelerin bulanıklığı tahmin edilen yayılımları ile açıklanabilir. $h = 0,3$ için oluşturulan bulanık tahminler Şekil 7.1 ile verildi.



Şekil 7.1 $h = 0,3$ için Tanaka' nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri.

DURUM 2: $h = 0,5$ için elde edilen çözüm aşağıda verildi.

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_i &= \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 X_{i1} + \tilde{A}_2 X_{i2} = (\alpha_0, c_0) + (\alpha_1, c_1) X_{i1} + (\alpha_2, c_2) X_{i2} \\ &= (10,54864; 0,38203) + (-0,02845; 0,03989) X_{i1} + (-0,00198; 0) X_{i2}\end{aligned}$$

Sistem Bulanıklığı=13,25487

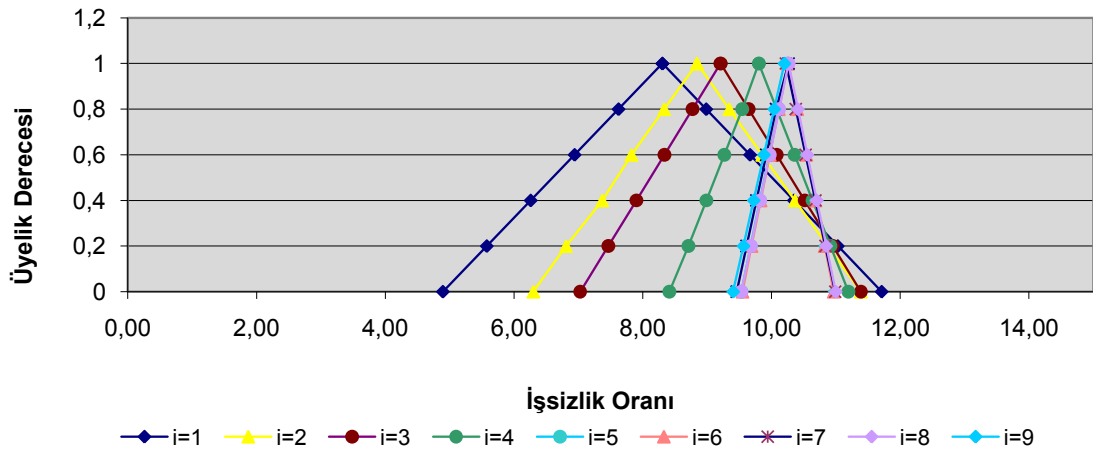
$$\bar{h} = \sum_{i=1}^9 h_i / 9 = 0,64$$

Burada bulanık regresyon modeli için katsayıları, merkez değerleri ve yayılımları bulundu. Sistem bulanıklığı 13,25487 olarak hesaplandı. $h = 0,5$ için Tanaka (1982)' nin yöntemi kullanılarak tahmin edilen işsizlik oranları Tablo 7.3 ile verildi. Sistemin ortalama h düzeyi ise $\bar{h} = 0,64 > 0,5$ olarak hesaplandı.

Tablo 7.3 $h = 0,5$ için Tanaka' nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

h=0,5 için		Tahmin \tilde{Y}_i		Tahmin \tilde{Y}_i		\tilde{Y}_i 'lerin Uygunluk Derecesi
i	Gerçek y Değerleri	Alt Sınır	Üst Sınır	Merkez (α_i)	Yayılım (c_i)	(h_i)
1	6,6	4,895454	11,71482	8,305135	3,409681	0,50
2	8,4	6,299826	11,38796	8,843894	2,544068	0,83
3	10,3	7,028640	11,39078	9,209709	2,181069	0,50
4	10,5	8,413254	11,19575	9,804501	1,391247	0,50
5	10,3	9,531960	10,98213	10,25704	0,725084	0,94
6	10,2	9,550188	10,96844	10,25932	0,709128	0,92
7	9,9	9,461046	10,99099	10,22602	0,764974	0,57
8	9,9	9,533538	10,99966	10,26660	0,733062	0,50
9	10,6	9,404790	10,99856	10,20168	0,796886	0,50

Türkiye' deki bulanık işsizlik oranı $\tilde{Y}_i = (\alpha_i, c_i)$ ile açıklanabilir. İşsizlik oranının belirsizliği ise \tilde{A}_0 sabit katsayısının, \tilde{A}_1 tüketici fiyatları artış oranı ve \tilde{A}_2 para arzı artış oranının belirsizliği ile ifade edilebilir. Bu parametrelerin bulanıklığı tahmin edilen yayılımları ile açıklanabilir.



Şekil 7.2 $h = 0,5$ için Tanaka' nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri.

Türkiye' deki bulanık işsizlik oranı değeri $\tilde{Y}_i = (\alpha_i, c_i)$ olarak açıklanabilir. İşsizlik oranının belirsizliği ise \tilde{A}_0 sabit katsayısının, \tilde{A}_1 tüketici fiyatları artış oranı ve \tilde{A}_2

para arzı artış oranının belirsizliği ile ifade edilebilir. Bu parametrelerin bulanıklığı tahmin edilen yayılımları ile açıklanabilir.

DURUM 3: $h=0,7$ için elde edilen çözüm aşağıda verildi.

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_i &= \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 X_{i1} + \tilde{A}_2 X_{i2} = (\alpha_0, c_0) + (\alpha_1, c_1) X_{i1} + (\alpha_2, c_2) X_{i2} \\ &= (10,54864; 0,63678) + (-0,02845; 0,06648) X_{i1} + (-0,00198; 0) X_{i2}\end{aligned}$$

Sistem Bulanıklığı=22,09145

$$\bar{h} = \sum_{i=1}^9 h_i / 9 = 0,78$$

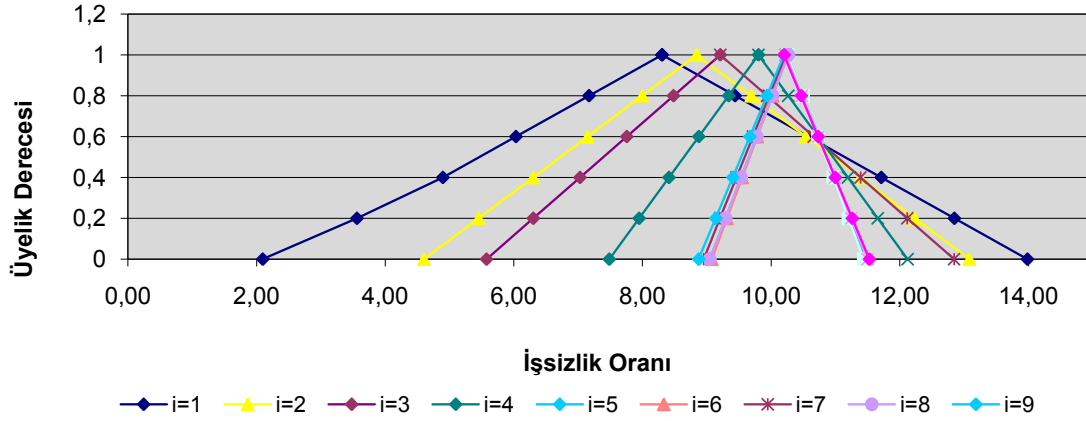
Burada bulanık regresyon modeli için katsayıları, merkez değerleri ve yayılımları bulundu. Sistem bulanıklığı 22,09145 olarak hesaplandı. $h=0,7$ için Tanaka (1982)'nin yöntemi kullanılarak tahmin edilen işsizlik oranları Tablo 7.4 ile verildi. Sistemin ortalama h düzeyi ise $\bar{h} = 0,78 > 0,7$ olarak hesaplandı.

Tablo 7.4 $h=0,7$ için Tanaka'nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

h=0,5 için		Tahmin \tilde{Y}_i		Tahmin \tilde{Y}_i		\tilde{Y}_i 'lerin Uygunluk Derecesi
i	Gerçek y Değerleri	Alt Sınır	Üst Sınır	Merkez (α_i)	Yayılım (c_i)	(hi)
1	6,6	2,622238	13,98732	8,304780	5,682542	0,50
2	8,4	4,603559	13,08341	8,843485	4,239926	0,83
3	10,3	5,574531	12,84445	9,209489	3,634958	0,50
4	10,5	7,485734	12,12304	9,804388	2,318654	0,50
5	10,3	9,048509	11,46539	10,25695	1,208438	0,94
6	10,2	9,077361	11,44105	10,25921	1,181846	0,92
7	9,9	8,950998	11,50083	10,22592	1,274918	0,57
8	9,9	9,044792	11,48826	10,26653	1,221734	0,50
9	10,6	8,873465	11,52967	10,20157	1,328102	0,50

Türkiye'deki bulanık işsizlik oranı değeri $\tilde{Y}_i = (\alpha_i, c_i)$ olarak açıklanabilir. İşsizlik oranının belirsizliği ise \tilde{A}_0 sabit katsayısının, \tilde{A}_1 tüketici fiyatları artış oranı ve \tilde{A}_2

para arzı artış oranının belirsizliği ile ifade edilebilir. Bu parametrelerin bulanıklığı tahmin edilen yayılımları ile açıklanabilir.



Şekil 7.3 $h = 0,7$ için Tanaka'nın bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri.

Yukarıdaki farklı 3 durum ele alındığında, seçilen farklı h düzeyine göre sistem parametrelerinin bulanıklığında değişiklik olduğu görülür. Ayrıca h düzeyi ne kadar büyük alınırsa parametrelerin bulanıklıklarının arttığı görülmektedir. Model, sistemde bulunan her verinin belirlenen h düzeyine eşit ya da ondan büyük olmaya zorlar. Araştırmacı tarafından seçilen h düzeyi ne kadar artarsa (modeldeki tahmin edilen verinin gerçek veriye ne kadar yakın olmasını isterse), tahmin edilen \tilde{Y} (işsizlik oranı) değerinin yayılımı ile sistem bulanıklığı da aynı doğrultuda artar.

7.3 Sistem Parametrelerinin Bulandırılması ile Bulanık Regresyon Modeli

Regresyon modelindeki parametreleri bulanıklaştırmak için klasik regresyon modelindeki her bir parametreye ait (a, b, c, σ^2) güven aralığının hesaplanması gerektiği Bölüm 5.2.2' de verilmişti.

Bu durumda Tablo 7.1 deki verinin kullanılmasıyla elde edilen matris aşağıda verildi.

$$(X'X)^{-1} = A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,4037 & -0,0012 & -0,00823 \\ -0,0012 & 0,000319 & -0,00024 \\ -0,00823 & -0,00024 & 0,000468 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi kullanarak her bir parametre için $(1 - \beta)$ güven katsayısındaki güven aralıkları aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\left(10,9933 - t_{\beta/2;n-3} \sqrt{0,669} \sqrt{0,4037} \leq a \leq 10,9933 + t_{\beta/2;n-3} \sqrt{0,669} \sqrt{0,4037} \right)$$

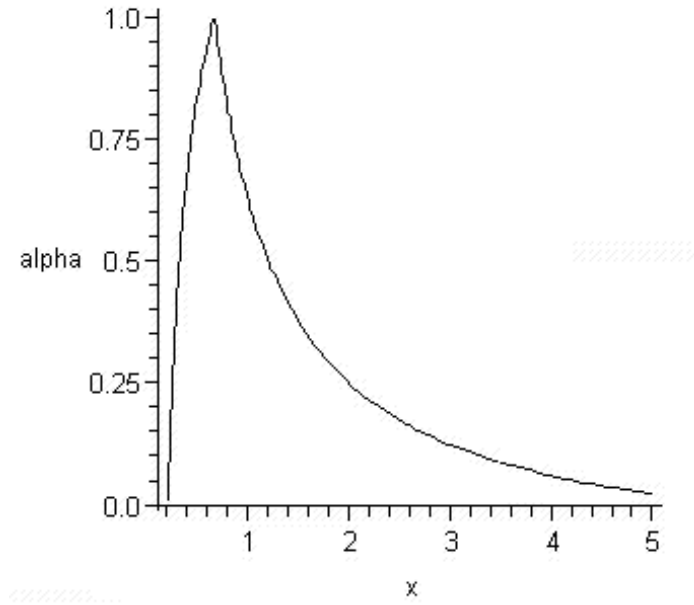
$$\left(-0,038 - t_{\beta/2;n-3} \sqrt{0,669} \sqrt{0,000319} \leq b \leq -0,038 + t_{\beta/2;n-3} \sqrt{0,669} \sqrt{0,000319} \right)$$

$$\left(-0,010 - t_{\beta/2;n-3} \sqrt{0,669} \sqrt{0,000468} \leq c \leq -0,010 + t_{\beta/2;n-3} \sqrt{0,669} \sqrt{0,000468} \right)$$

$$\left(\frac{(9-3) \cdot 0,669}{L(\lambda)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(9-3) \cdot 0,669}{R(\lambda)} \right) = \left(\frac{6,0,669}{(1-\lambda) \chi_{R;\beta/2;n-3}^2 + \lambda \cdot 6} \leq \sigma^2 \leq \frac{6,0,669}{(1-\lambda) \chi_{L;\beta/2;n-3}^2 + \lambda \cdot 6} \right)$$

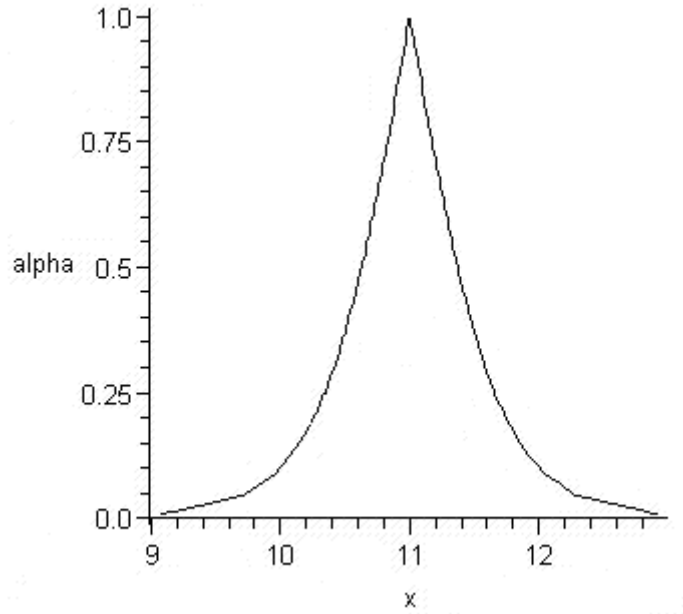
Bulanık regresyon parametreleri yukarıdaki güven aralıkları kullanılarak MAPLE 10 programında yazılmıştır. Burada $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $0,01 \leq \beta \leq 1$ olmak üzere oluşturulan bulanık parametre tahminleri Şekil 7.4, Şekil 7.5, Şekil 7.6 ve Şekil 7.7 ile verildi.

σ^2 parametresinin bulanık tahmini aşağıda Şekil 7.4 ile verildi.



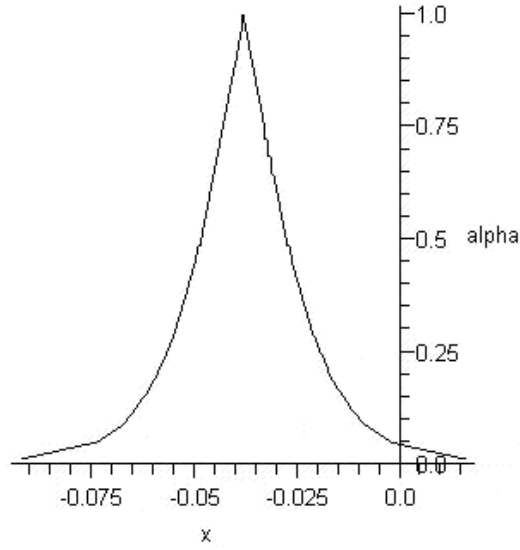
Şekil 7.4 σ^2 'nin bulanık tahmini

a parametresinin bulanık tahmini aşağıda Şekil 7.5 ile verildi.



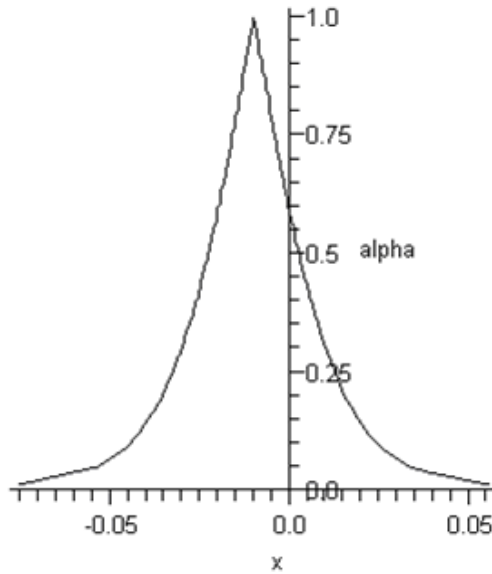
Şekil 7.5 a parametresinin bulanık tahmini

b parametresinin bulanık tahmini aşağıda Şekil 7.6 ile verildi.



Şekil 7.6 b parametresinin bulanık tahmini

c parametresinin bulanık tahmini aşağıda Şekil 7.7 ile verildi.



Şekil 7.7 c parametresinin bulanık tahmini

Burada bulanık regresyon modelinin katsayıları, merkez değerleri ve yayılımları bulunmuştur. Güven aralıklarını kullanarak $\tilde{y}(x_1, x_2)(\alpha) = [y(x_1, x_2)_1(\alpha), y(x_1, x_2)_2(\alpha)]$ tahmini için $\alpha \in [0, 1]$ de regresyon parametrelerinin alt ve üst sınırlarını veren denklemler aşağıdadır.

$$\tilde{a}[\alpha] = [a_1(\alpha); a_2(\alpha)] = (10,9933 - t_{\alpha/2; n-3} 0,519687; 10,9933 + t_{\alpha/2; n-3} 0,519687)$$

$$\tilde{b}[\alpha] = [b_1(\alpha); b_2(\alpha)] = (-0,038 - t_{\alpha/2; n-3} 0,01461; -0,038 + t_{\alpha/2; n-3} 0,01461)$$

$$\tilde{c}[\alpha] = [c_1(\alpha); c_2(\alpha)] = (-0,010 - t_{\alpha/2; n-3} 0,0176944; -0,010 + t_{\alpha/2; n-3} 0,0176944)$$

Örnek olarak $\alpha = 0.01$ için model parametreleri için aralıklar aşağıda verildi.

$$\tilde{a}[\alpha = 0.01] = [9,066817; 12,91978]$$

$$\tilde{b}[\alpha = 0.01] = [-0,092154; 0,016154]$$

$$\tilde{c}[\alpha = 0.01] = [-0,0755932; 0,0555932]$$

Buna göre $\alpha = 0.01$ kesim noktasında $\tilde{y}(x_1, x_2)(\alpha) = [y(x_1, x_2)_1(\alpha), y(x_1, x_2)_2(\alpha)]$ tahminini hesaplamak için

$$y_i(x_1, x_2)_1(\alpha) = 9,066817 + (-0,092154).x_{i1} + (-0,0755932).x_{i2}$$

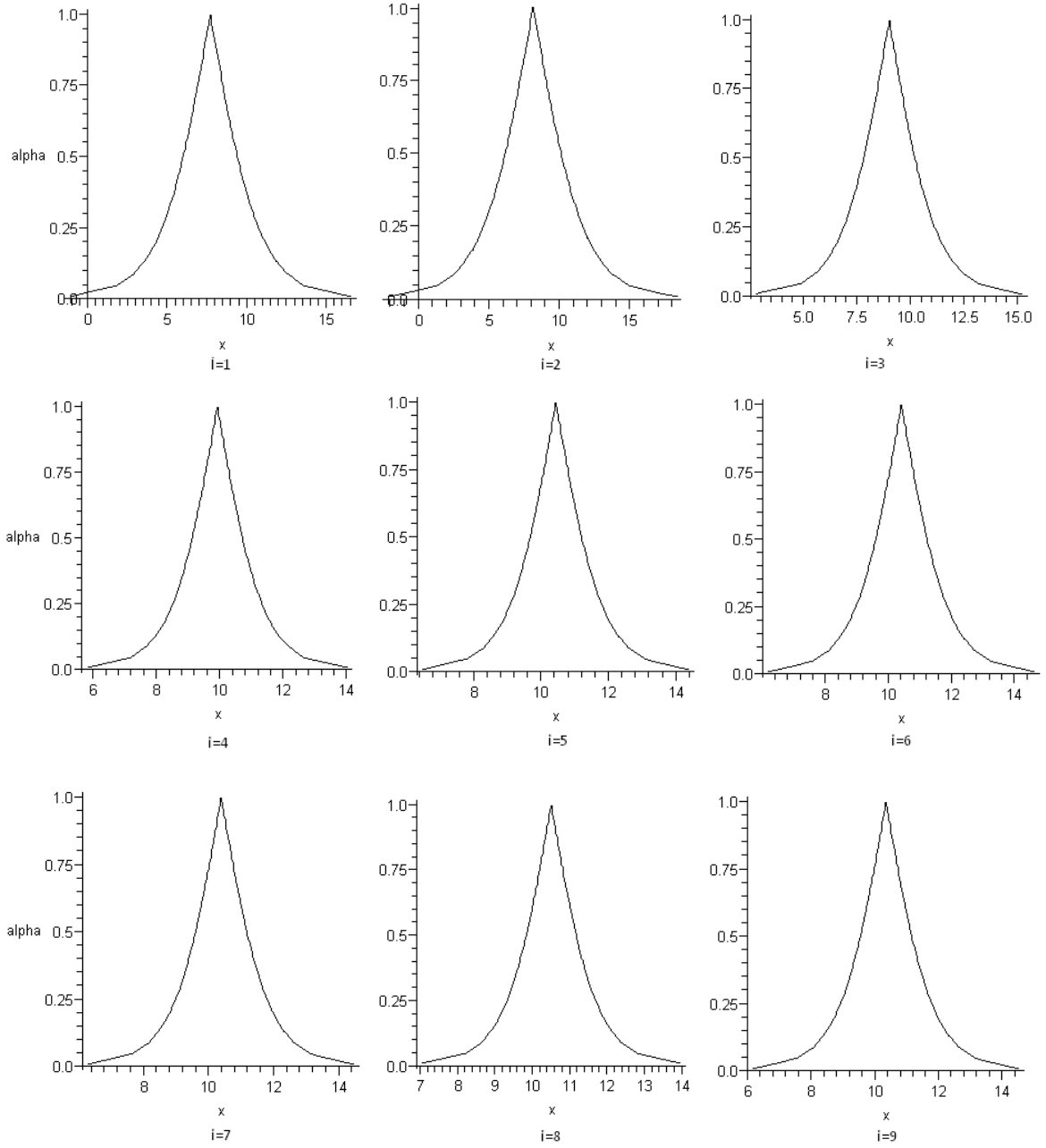
$$y_i(x_1, x_2)_2(\alpha) = 12,91978 + 0,016154x_{i1} + 0,0555932x_{i2}$$

denklemleri kullanılır. Burada tek kesim noktası için verilen işlemler tüm α kesim noktaları için MAPLE 10 paket programı kullanılarak yapılmıştır. Buna göre Buckley yöntemini kullanarak sistem parametrelerinin bulanıklaştırılmasıyla tahmin edilen işsizlik oranı değerleri ise Tablo 7.5 ile verildi.

Tablo 7.5 Buckley' nin bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

	Gerçek y Değerleri	Tahmin (\tilde{Y}_i)		Tahmin (\tilde{Y}_i)	
		Alt sınır	Üst sınır	Merkez	Yayılım
1	6,6	-1,14038	16,50859	7,684103793	8,824484
2	8,4	-2,14169	18,36509	8,111702708	10,253390
3	10,3	2,778945	15,21606	8,997502253	6,218557
4	10,5	5,805526	14,01228	9,908901263	4,103376
5	10,3	6,482735	14,37627	10,42950043	3,946765
6	10,2	6,171868	14,62553	10,39870041	4,226832
7	9,9	6,29231	14,46469	10,37850048	4,086190
8	9,9	7,046372	13,95143	10,49890044	3,452529
9	10,6	6,158113	14,52209	10,34010052	4,181988

Buckley' nin önerdiği bulanık doğrusal regresyon analizi tahminlerinin gösterimi Şekil 7.8 ile verildi.



Şekil 7.8 Buckley' nin bulanık regresyon analizi ile tahmin edilen işsizlik oranı değerleri

Buckley (2004) yöntemine göre oluşturulan bulanık parametrelerin önemlilik testleri Bölüm 7.4' te verildi.

7.4 Bulanık Hipotez Testi

Bu bölümde verilen bulanık hipotez testi Bölüm 7.3 de Buckley (2004) yöntemi ile oluşturulan regresyon parametrelerinin anlamlılığı için uygulanmaktadır.

$$(a) \quad H_0 : \tilde{a} = 0 \\ H_1 : \tilde{a} \neq 0$$

Buradaki iki yönlü hipotez testinde oluşturulan test istatistiği aşağıda Eşitlik 7.1 ile verildi.

$$\tilde{T}[\alpha] = \frac{\tilde{a} - 0}{\tilde{\sigma} \sqrt{a_{11}}} = \frac{[a, b]}{[c, d]} \quad (7.1)$$

Eşitlik 7.1' in değerini hesaplamak için bulanık parametre tahminleri olan \tilde{a} ve $\tilde{\sigma}$ değerlerinden yararlanılır.

$\hat{a} = 10,993$, $n = 9$, $\hat{\sigma}^2 = 0,669$, $t_{0,025;6} = 2,447$, $a_{11} = 0,4037$, $(0,01 \leq \beta \leq 1)$ ve $(0 \leq \lambda \leq 1)$ olmak üzere $t_0 = 21.153$ olarak bulunmuştur.

$$L(\lambda) = (1 - \lambda) \chi_{R,0,005;6}^2 + (n - 3) \lambda = (1 - \lambda) 18,548 + 6 \lambda = 18,548 - 12,548 \lambda$$

$$R(\lambda) = (1 - \lambda) \chi_{L,0,005;6}^2 + (n - 3) \lambda = (1 - \lambda) 0,676 + 6 \lambda = 0,676 + 5,324 \lambda$$

$$\Pi_1 = \sqrt{0,11267 + 0,8873 \lambda}$$

$$\Pi_2 = \sqrt{3,0913 - 2,0913 \lambda}$$

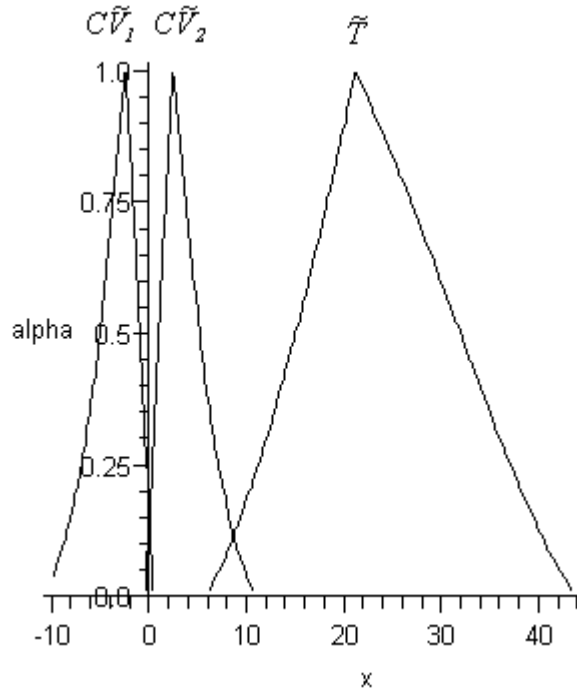
Yukarıda verilen $\Pi_1 = \sqrt{R(\lambda)/(n-3)}$ ve $\Pi_2 = \sqrt{L(\lambda)/(n-3)}$ eşitlikleri yerine koyulduğunda test istatistiğinin alfa kesim kümeleriyle beraber oluşturulan değeri Eşitlik 7.2 ile verildi.

$$\tilde{T}[\alpha] = [\Pi_1(t_0 - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_0 + t_{\alpha/2})] \quad (7.2)$$

Test istatistiğinin tüm α kesim kümeleri hesaplandıktan sonra tablo değerlerinin de bulanıklaştırılması gerekir. Bulanıklaştırılan tablo değerleri Eşitlik 7.3 ile verildi.

$$\begin{aligned} C\tilde{V}_1[\alpha] &= [\Pi_2(-t_{\gamma/2} - t_{\alpha/2}), \Pi_1(-t_{\gamma/2} + t_{\alpha/2})] \\ C\tilde{V}_2[\alpha] &= [\Pi_1(t_{\gamma/2} - t_{\alpha/2}), \Pi_2(t_{\gamma/2} + t_{\alpha/2})] \end{aligned} \quad (7.3)$$

Son olarak MAPLE 10 paket programı yardımıyla $\gamma = 0.05$ olmak üzere bulanık sayı olarak oluşturulan test istatistiği \tilde{T} ile tablo değeri $C\tilde{V}_1$ ve $C\tilde{V}_2$ karşılaştırılarak yorumlanır. Bu durum aşağıda Şekil 7.9' de görülmektedir.



Şekil 7.9 Bulanık test istatistiği \tilde{T} ve bulanıklaştırılan tablo değerleri $C\tilde{V}_1$ ile $C\tilde{V}_2$

Şekil 7.9 ile verilen sonuca göre üç bulanık sayının da kesim noktası Buckley (2006)' nin önerdiği 0,8 üyelik derecesinden küçüktür, buna göre $\tilde{T} > C\tilde{V}_2$ olduğu söylenir. Sonuç olarak H_0 hipotezi reddedilir. Aynı sonuç klasik hipotez testinde de geçerlidir.

$$(b) \quad H_0 : \tilde{b} = 0$$

$$H_1 : \tilde{b} < 0$$

Buradaki tek yönlü hipotez testinde oluşturulan bulanık test istatistiği aşağıda Eşitlik 7.4 ile verildi.

$$\tilde{T}[\alpha] = \frac{\tilde{b} - 0}{\tilde{\sigma} \sqrt{a_{22}}} = \frac{[a, b]}{[c, d]} \quad (7.4)$$

Eşitlik 7.4' ün değerini hesaplamak için bulanık parametre tahminleri olan \tilde{b} ve $\tilde{\sigma}$ değerlerinden yararlanılır.

$\hat{b} = -0,038$, $n = 9$, $\hat{\sigma}^2 = 0,669$, $-t_{0,05;6} = -1,943$, $a_{22} = 0,000319$, $(0,01 \leq \beta \leq 1)$ ve $(0 \leq \lambda \leq 1)$ olmak üzere $t_0 = -2,601$ olarak bulunmuştur. $t_0 = -2,601 < 0$ olarak hesaplandığı için $b < 0$ durumuyla ilgilenilir (Buckley, 2006).

$$L(\lambda) = (1 - \lambda)\chi_{R;0,005}^2 + (n - 3)\lambda = (1 - \lambda)18,548 + 6\lambda = 18,548 - 12,548\lambda$$

$$R(\lambda) = (1 - \lambda)\chi_{L;0,005}^2 + (n - 3)\lambda = (1 - \lambda)0,676 + 6\lambda = 0,676 + 5,324\lambda$$

$$\Pi_1 = \sqrt{0,11267 + 0,8873\lambda}$$

$$\Pi_2 = \sqrt{3,0913 - 2,0913\lambda}$$

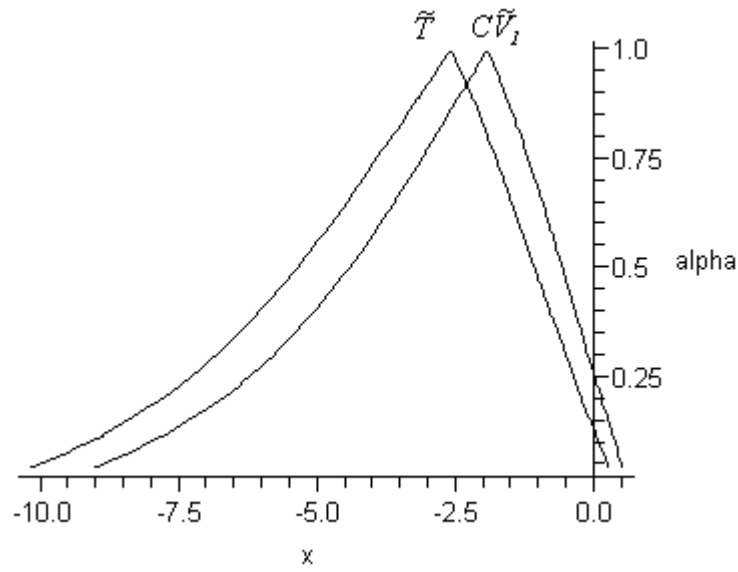
Yukarıda verilen $\Pi_1 = \sqrt{R(\lambda)/(n-3)}$ ve $\Pi_2 = \sqrt{L(\lambda)/(n-3)}$ eşitlikleri yerine koyulduğunda test istatistiğinin alfa kesim kümeleriyle oluşturulan değeri Eşitlik 7.5 ile verildi.

$$\tilde{T}[\alpha] = [\Pi_2(t_0 - t_{\alpha/2}), \Pi_1(t_0 + t_{\alpha/2})] \quad (7.5)$$

Test istatistiğinin kesim kümeleri hesaplandıktan sonra tablo değerlerinin de bulanıklaştırılması gerekir. Bulanıklaştırılan tablo değeri Eşitlik 7.6 ile verildi.

$$C\tilde{V}_1[\alpha] = [\Pi_2(-t_\gamma - t_{\alpha/2}), \Pi_1(-t_\gamma + t_{\alpha/2})] \quad (7.6)$$

Son olarak MAPLE 10 paket programı yardımıyla $\gamma = 0.05$ olmak üzere bulanık sayı olarak oluşturulan test istatistiği \tilde{T} ile tablo değeri $C\tilde{V}_1$ ile karşılaştırılarak yorumlanır. Bu durum Şekil 7.10' da görülmektedir.



Şekil 7.10 Bulanık test istatistiği \tilde{T} ve bulanıklaştırılan tablo değeri $C\tilde{V}_1$

Şekil 7.10 ile verilen sonuca göre her iki bulanık sayının kesim noktası noktasi Buckley (2006)' nin önerdiği üyelik derecesi 0,8'e yakındır. Buna göre $\tilde{T} \approx C\tilde{V}_1$ olduğu söylenir. Bulanık hipotez testi sonucunda, klasik yaklaşıma göre reddedilen buradaki H_0 hipotezi hakkında bir karara varılamaz.

(c) $H_0 : \tilde{c} = 0$
 $H_1 : \tilde{c} > 0$

Buradaki tek yönlü hipotez testinde oluşturulan test istatistiği Eşitlik 7.7 ile verildi.

$$\tilde{T}[\alpha] = \frac{\tilde{c} - 0}{\tilde{\sigma} \sqrt{a_{33}}} \quad (7.7)$$

Eşitlik 7.7' nin değerini hesaplamak için bulanık parametre tahminleri olan \tilde{c} ve $\tilde{\sigma}$ değerlerinden yararlanılır

$\hat{c} = -0,010$, $n = 9$, $\hat{\sigma}^2 = 0,669$, $t_{0,05;6} = 1,943$, $a_{33} = 0,000468$, $(0,01 \leq \beta \leq 1)$ ve $(0 \leq \lambda \leq 1)$ olmak üzere $t_0 = -0,5652$ olarak bulunmuştur. $t_0 = -0,5652$ olarak hesaplandığı için $c < 0$ durumuyla ilgilenilir (Buckley, 2006).

$$L(\lambda) = (1 - \lambda)\chi_{R,0,005}^2 + (n - 3)\lambda = (1 - \lambda)18,548 + 6\lambda = 18,548 - 12,548\lambda$$

$$R(\lambda) = (1 - \lambda)\chi_{L,0,005}^2 + (n - 3)\lambda = (1 - \lambda)0,676 + 6\lambda = 0,676 + 5,324\lambda$$

$$II_1 = \sqrt{0,11267 + 0,8873\lambda}$$

$$II_2 = \sqrt{3,0913 - 2,0913\lambda}$$

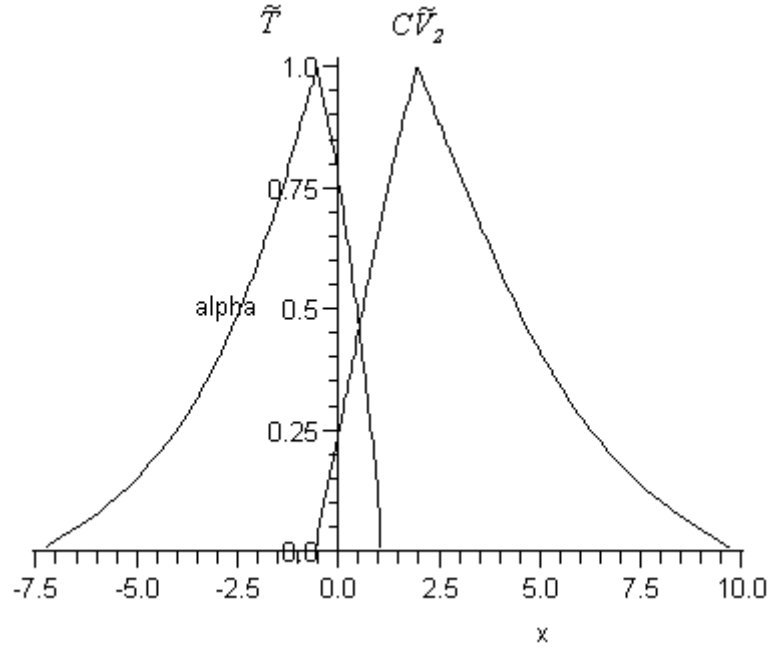
Bu ifadeler yerine koyulduğunda test istatistiğinin alfa kesim kümeleriyle beraber oluşturulan değeri $II_1 = \sqrt{R(\lambda)/(n-3)}$ ve $II_2 = \sqrt{L(\lambda)/(n-3)}$ olmak üzere Eşitlik 7.8 ile verildi.

$$\tilde{T}[\alpha] = [II_2(t_0 - t_{\alpha/2}), II_1(t_0 + t_{\alpha/2})] \quad (7.8)$$

Burada test istatistiği hesaplanırken aralık aritmetiğine göre gerekli değişiklikler yapılmıştır. Ayrıca tüm α kesim kümeleri hesaplandıktan sonra tablo değerinin de bulanıklaştırılması gerekir. Bulanıklaştırılan tablo değerleri Eşitlik 7.9 ile verildi.

$$C\tilde{V}_2[\alpha] = [II_1(t_\gamma - t_{\alpha/2}), II_2(t_\gamma + t_{\alpha/2})] \quad (7.9)$$

Son olarak MAPLE 10 paket programı yardımıyla $\gamma = 0.05$ olmak üzere bulanık sayı olarak oluşturulan test istatistiği \tilde{T} ile tablo değeri $C\tilde{V}_2$ karşılaştırılarak yorumlanır. Bu durum Şekil 7.11’ de görülmektedir.



Şekil 7.11 Bulanık test istatistiği \tilde{T} ve bulanıklaştırılan tablo değeri $C\tilde{V}_2$

Şekil 7.11 ile verilen sonuca göre üçgenel bulanık sayı olarak oluşturulan \tilde{T} test istatistiği ve bulanıklaştırılan tablo değeri $C\tilde{V}_2$ şekilde yer almaktadır. Burada bulanıklaştırılan test istatistiğinin tepe noktası, bulanıklaştırılan tablonun solunda yer almaktadır. Ayrıca üçgenel bulanık sayıların birbirini kestiği noktaların üyelik derecesinin 0,8’ den küçük olduğu görülmektedir. Buna göre $\tilde{T} < C\tilde{V}_2$ olduğu grafikte de görülmektedir. Sonuç olarak H_0 hipotezi kabul edilir. Aynı sonuç klasik hipotez testi için de geçerlidir.

8. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bilimsel alanda karşılaşılan sorunlardan en büyüğü ve en etkilisi kesin bilgiye ulaşmanın imkansız olmasıdır. Kesin olmayan bilgi formatındaki belirsizlik, yapılan analizlerin karmaşıklığını arttırdığı gibi analizlerden elde edilen sonuçlara olan güveni de düşürmektedir. Verinin tam bilgiyi içermemesi durumunda bulanık mantık ilkeleri ile modelleme yapmak, bilinen klasik modelleme tekniklerine göre daha kolay ve sağlıklıdır, Bu nedenle bulanık modellemenin yöneylem araştırması, yapay zeka, uzman sistemler, ekonometri, istatistik ve bankacılık alanlarındaki uygulamaları artarak devam etmektedir.

Bulanık küme kuramına dayanan ve belirsizlikleri modellemek için en uygun yöntemlerin başında gelen bulanık doğrusal regresyon analizi ilk kez Tanaka (1982) tarafından önerilmiştir. Doğrusal programlama temeline dayanan bu yöntemde amaç fonksiyonu toplam yayılımı minimize ederken oluşturulan kısıtlar gözlem değerlerinin belirlenen h düzeyinde oluşturulan tahminler tarafından içerilmesini sağlar. Diamond (1988)' in önerdiği bulanık regresyon modeline göre bulanık tahmin değerleri ile gözlem değerleri arasındaki bulanık uzaklığın minimize edilmesi amaçlanır. Buckley (2004) yöntemine göre klasik doğrusal regresyon ile oluşturulan regresyon parametreleri, güven aralıkları kullanılarak bulanıklaştırılır ve sistem parametrelerinin bulanıklaştırılmasıyla bulanık regresyon modeli elde edilir.

Bu çalışmada ilk olarak, bulanık mantığın tarihsel gelişimi ve bulanık kümeler tanımlanmıştır. Ayrıca klasik ve bulanık küme işlemleri arasındaki farklılıklar açıklanmıştır. Daha sonra bulanık sayılar ve bulanık sayılarla yapılan bulanık aritmetik işlemleri ile ilgili örneklere yer verilmiştir. Çalışmanın temelini oluşturan bulanık doğrusal regresyon analizi yöntemleri incelendikten sonra Buckley (2004)' nin bulanık doğrusal regresyon parametreleri için önerdiği bulanık hipotez testine de yer verildi.

Çalışmanın uygulama bölümünde Türkiye'deki İşsizlik oranı ele alınmış ve bu oran bulanık doğrusal regresyon yöntemlerinden; katsayıların bulandırılması yöntemi ve doğrusal programlama yöntemi ile tahmin edilmiştir. Türkiye'deki İşsizlik oranı

değişkenini etkileyen değişkenler olarak tüketici fiyatları artış oranı ve para arzındaki artış hızı değişkenleri seçildi.

Bilindiği gibi işsizlik oranı diğer pek çok ekonomik ve sosyal değişkenden etkilenmektedir. Ayrıca analiz için yapılan kaynak taramasında farklı kaynaklarda belirlenen işsizlik oranı aynı yıl için farklı değerler olarak verilmektedir. Bu nedenle ortaya çıkan belirsizlik durumu sistemde bulanıklığa sebep olmaktadır. Bunun için oluşturulan bulanık regresyon modelinde girdi değerlerinin kesin sayı olup değişkenler arasındaki ilişkinin bulanık olduğu durum düşünülmüştür.

Bulanık regresyon modeli tahmini için kullanılan doğrusal programlama yöntemi, farklı bulanıklık seviyelerinde tahmin yapabilme olanağı sunmaktadır. Uygulamada $h_1 = 0,3$, $h_1 = 0,5$ ve $h_1 = 0,7$ düzeyinde Lingo 11.0 paket programında yazılan kodlar kullanılarak bulanık tahminler yapılmıştır. Tahmin aralıkları bulanıklık seviyesi arttığında genişlerken, bulanıklık seviyesi düştüğünde daralmakta ve gerçek değerlere yaklaşmaktadır. Kısaca araştırmacı, gözlem değerlerinin yüksek derecelere tahmin değerlerinin içinde yer almasını istedikçe oluşturulan tahminlerin bulanıklığı artar. Bu yüzden analizlerde kullanılması gereken uygun bulanıklık derecesi seçimi literatürde hala süregelen bir tartışma konusudur. Ayrıca Tanaka (1982) yöntemine göre oluşturulan regresyon modeli, aykırı değerlere karşı çok duyarlıdır ve değişken sayısı çok olduğunda çoklu bağlantı sorunu etkileri görülebilir. Ayrıca yöntemde öngörüle bulunulamamaktadır.

Katsayıların bulandırılması yöntemi ile oluşturulan bulanık doğrusal regresyon analizinde ise klasik doğrusal regresyon analizi ile tahmin edilen model kullanılmıştır. Bulandırma yöntemi olarak Buckley (2005)' nin önerdiği klasik doğrusal regresyon modeli ile oluşturulan sistem parametrelerinin güven aralıkları kullanılmış ve modeldeki her parametrenin bulanık sayı olarak tahmini elde edildi.

Uygulamada kullanılan yöntemler göz önüne alındığında, bulguları gerçeğe en yakın olan yöntem, *doğrusal programlama yaklaşımı ile bulanık regresyon modeli* olarak tespit edilmiştir. Çünkü bulanık tahminler gerçek işsizlik oranına ilişkin değerleri doğru bir şekilde yansıtmaktadır. Klasik tahminler ise gerçek Y_i 'leri doğru bir biçimde yansıtamamışlardır. Katsayıların bulandırılması yönteminde de klasik regresyonun tahminleri esas alındığı için, bu yöntemle elde edilen bulgular da gerçek Y_i değerlerini yansıtmaktan uzaktır. Doğrusal programlama yöntemi

tahminleri ve gerçek Y_i değerlerini alttan ve üstten kuşatarak, işsizlik oranının aldığı değerleri olduğu gibi gözler önüne sermektedir. Dolayısıyla bulanık regresyonun yaptığı aralık tahminleri bu aşamada önemini göstermektedir. Ayrıca klasik yöntemlerle modele alınamayan değişkenler, bulanık regresyon yöntemiyle daha kolay modele alınabilmekte ve durum tespiti açısından daha başarılı tahminler yapılabilmektedir

Katsayıları bulandırma işleminin faydası ise, klasik tahminlerin tahmin aralığını genişleterek daha geniş bir bakış açısıyla yorumlar yapmayı sağlamasıdır. Görüldüğü üzere, bulandırma işlemi klasik tahminlerin mevcut yapısını koruyarak, sadece tahmin aralığını genişletmektedir. Ayrıca katsayıların bulandırılması yöntemiyle öngörü yapılabilir.

Uygulamanın üçüncü bölümünde bulanık hipotez testleri yer almaktadır. Sistem parametrelerinin bulandırılması ile bulanık regresyon modeli yöntemiyle tahmin edilen parametrelerin önemliliği tek yönlü ve iki yönlü kurulan seçenek hipotezlerle test edilmiştir. Maple 10 paket programında yazılan kodlarla, bulanık sayı olarak oluşturulan test istatistiği ve bulanıklaştırılan tablo değeri karşılaştırıldı. Ayrıca bulanık hipotez testi sonuçları klasik yöntemler tarafından desteklenmektedir. Bulanık hipotez testinin en önemli avantajı buradaki uygulamada da görülmüştür. Tüketici fiyatı artış oranı değişkenin önemliliği bulanık yöntemle test edildiğinde, klasik yaklaşıma göre reddedilen H_0 hipotezi hakkında net bir karara varılamaz. Kısacası tablo değerinin hesap değerine çok yakın olduğu durumlarda bulanık hipotez testi daha ayrıntılı sonuçların elde edilmesini sağlar.

Burada test istatistiği alt sınır değerinin negatif, üst sınır değerinin pozitif olması durumunda çeşitli sorunlarla karşılaşmıştır. Buckley' nin yapmış olduğu, test istatistiği tepe noktasının aldığı değere göre tablo değeri hesaplanması önerisi bazı durumlarda yetersiz kalmaktadır. Gelecekte yapılacak çalışmalarda test istatistiğinin aldığı tüm negatif ve pozitif değerler göz önüne alınarak yeni bir test istatistiği oluşturulabilir. Ayrıca Tanaka (1982) yöntemine göre oluşturulan parametrelerin önemliliğini test etmek için farklı test istatistikleri geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Bandemer, H. and Gottwald, S., 1995, Fuzzy Sets Fuzzy Logic Fuzzy Methods with Applications, John Wiley&Sons, England, s.9.
- [2] Başaran, M. A., 2007, Çok Değişkenli Bulanık Regresyonda Parametre Tahmini, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [3] Baykal, N. ve Timur, B., 2004, Bulanık Mantık İlke ve Temelleri, Bıçaklar Kitabevi Matematik Dizisi No:1, Ankara. S.223
- [4] Buckley, J.J., 2004, Fuzzy Statistics, Springer, Germany, p.167.
- [5] Buckley, J.J., 2005, Fuzzy statistics: regression and prediction, soft Comput, 9:769-775.
- [6] Buckley, J.J., 2006, Fuzzy Probability and Statistics, Springer, Netherlands, p.270
- [7] Chang, Y.H.O. and Ayyub, B.M., 2001, Fuzzy regression methods-a comparative assessment, Fuzzy Sets and Systems, 119,187-203.
- [8] Çetin, E., 2003, Bulanık mantık denetleyiciler:Kuram, Uygulama, Sinirsel Bulanık Mantık, Seçkin Yayıncılık, Ankara, s.22-40.
- [9] Diamond, P.,1988 Fuzzy Least Squares, Information Sciences, 46, 141-157,
- [10] Dubois, D. and Prade, H., 1980, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Pres, United States of America.
- [11] Düzyurt, S., 2008, Bulanık Regresyon ile Tahmin ve Bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 123s.
- [12] Filev, D.P. and Yager, R.R., 1997, Operations on fuzzy numbers via fuzzy reasoning, Fuzzy Sets and Systems, 91, p.137-142.
- [13] Hanss, M., 2005. Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications, Springer Berlin Heidelberg, New York.
- [14] İnal, C. ve Günay, S., 2010, Olasılık ve Matematiksel İstatistik, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- [15] Kahraman C., Beşkese, A. and Bozbura, F.T., 2006, Fuzzy regression approaches and applications, StudFuz, 201, 589-615.

- [16] Klir, G. J. and Yuan, B., 1995, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice-Hall Inc. A Simon & Schuster Company, Upper Saddle River, NJ.
- [17] Kocadağlı, O., 2006, Bulanık Matematiksel Programlama ve Portföy Analizi Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Mimar Sinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, s.20.
- [18] Lee, K. H., 2005, First Course on Fuzzy Theory and Applications, Springer, Germany.s.130
- [19] Lindo Systems Inc., 2003, Optimization Theory with LINDO, Fifth Edition, Chicago, USA, 560p.
- [20] Moskowitz, H. and Kim, K., 1993, On assessing the H value in fuzzy linear regression, Fuzzy Sets and Systems, 58, pp.303-327.
- [21] Novak, V., 1989, Fuzzy Sets and Their Applications, Adam Hilger, Bristol and Philadelphia, s.57.
- [22] Ross, T. J., 2007, Fuzzy Logic with Engineering Applications, John Wiley & Sons, England, s.37-39.
- [23] Shapiro, A.F., 2005, Fuzzy Regression Models, Penn State University, USA <http://www.soa.org/library/research/actuarial-research-clearing-house/2006/january/arch06v40n1-ii.pdf>
- [24] Şanlı, K. ve Apaydın A., 2004, Girdi Değişkenlerinin Bulanık Olması Durumunda Robust Regresyon Çözümlemesi, G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi, 17 (3): 71-84.
- [25] Şen, Z., 2001, Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri, Bilge Kültür Sanat Kitabevi, İstanbul, s.12-13,169s.
- [26] Taheri, S.M., 2003, Trends in fuzzy statistics, Austrian Journal of Statistics, vol.32, no:3, pp. 239-257.
- [27] Taheri S.M. and Arefi, M., 2009, Testing fuzzy hypothesis based on fuzzy test statistic, Soft Comput, 13: 617-625.
- [28] Tanaka, K., Uejima, S. and Asai, K., 1982, Linear regression analysis with fuzzy model, IEEE, vol. 12, no:6, pp.903-907.
- [29] Terano, T., Asai, K. and Sugeno, M., 1992, Fuzzy Systems Theory and Its Applications, Academic Pres, Boston, 268 p.
- [30] Uras,Y., 1998, Bulanık Mantığın Doğrusal Regresyon Analizinde Kullanılmasına İlişkin Bir Uygulama,Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Ana Bilim Dalı,İzmir.

- [31] Wang, H.F. and Tsaur, R.C., 2000a, Insight of a fuzzy regression model, *Fuzzy Sets and Systems*, 112, 355-369.
- [32] Wang, H.F. and Tsaur, R.C., 2000b, Resolution of fuzzy regression model, *European Journal of Operational Research*, 126, 637-650.
- [33] Wu, H.C., 2003, Linear regression analysis for fuzzy input and output data using the extension principle, *An International Journal Computers & Mathematics with Applications*. 45, pp.1849-1859.
- [34] Yager, R.R. and Filev D.P., 1994, *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*, John Wiley & Sons, Inc, Canada, s.7-13.
- [35] Yen, K.K., Ghoshray, S. and Roig, G., 1999, A linear regression model using triangular fuzzy number coefficient, *Fuzzy Sets and Systems*, 106, pp. 167-177.
- [36] Yücel, L. İ., 2005, *Bulanık Regresyon:Türkiye’de 1980-2004 Döneminde Kayıt Dışı Ekonominin Bulanık Yöntemlerle Tahminine İlişkin Bir Uygulama. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü. İstanbul, s.6.*
- [37] Zadeh, L.A., 1965, *Fuzzy Sets, Information and Control*, 8:338-353.
- [38] Zadeh, L.A., 1978, *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems*, 1:3-28.
- [39] Zadeh, L.A., 1987, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Fuzzy Sets and Its Applications*, R.R. Yager, R.M: Tong, S.Ovchinnikon and H.T. Hguyen, (eds.), John Wiley and Sons, New York, 684p.
- [40] Zimmermann, H.J., 2001, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, United States of America, Fourth Edition, s.13-23,28-29.

EKLER

EK – 1 SPSS paket programı ile elde edilen sonuçlar

Regression

Variables Entered/Removed^d

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	X2, X1 ^a		Enter

a. All requested variables entered.

b. Dependent Variable: Y

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,842 ^a	,708	,611	,8180

a. Predictors: (Constant), X2, X1

ANOVA^b

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	9,745	2	4,873	7,282	,025 ^a
	Residual	4,015	6	,669		
	Total	13,760	8			

a. Predictors: (Constant), X2, X1

b. Dependent Variable: Y

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	10,993	,520		21,152	,000	9,721	12,265
	X1	-,038	,015	-,737	-2,627	,039	-,074	-,003
	X2	-,010	,018	-,156	-,555	,599	-,053	,033

a. Dependent Variable: Y

EK-2 Kesikli X bağımsız değişkenleri ve kesikli Y bağımlı değişkeni için farklı modellerin LINGO paket programında gösterimi ve elde edilen sonuçları

DURUM 1: Tanaka' nın bulanık regresyon analizi modelinde h=0,3 için kodlar ve sonuçlar;

```

MIN=9*s0+246.1*s1+284*s2;
c0+75.9*c1+42.5*c2-0.7*s0-75.9*0.7*s1-42.5*0.7*s2<=6.6;
c0+75.9*c1+42.5*c2+0.7*s0+75.9*0.7*s1+42.5*0.7*s2>=6.6;
c0+54.2*c1+82.2*c2-0.7*s0-54.2*0.7*s1-82.2*0.7*s2<=8.4;
c0+54.2*c1+82.2*c2+0.7*s0+54.2*0.7*s1+82.2*0.7*s2>=8.4;
c0+45.1*c1+28.2*c2-0.7*s0-45.1*0.7*s1-28.2*0.7*s2<=10.3;
c0+45.1*c1+28.2*c2+0.7*s0+45.1*0.7*s1+28.2*0.7*s2>=10.3;
c0+25.3*c1+12.3*c2-0.7*s0-25.3*0.7*s1-12.3*0.7*s2<=10.5;
c0+25.3*c1+12.3*c2+0.7*s0+25.3*0.7*s1+12.3*0.7*s2>=10.5;
c0+8.6*c1+23.7*c2-0.7*s0-8.6*0.7*s1-23.7*0.7*s2<=10.3;
c0+8.6*c1+23.7*c2+0.7*s0+8.6*0.7*s1+23.7*0.7*s2>=10.3;
c0+8.2*c1+28.3*c2-0.7*s0-8.2*0.7*s1-28.3*0.7*s2<=10.2;
c0+8.2*c1+28.3*c2+0.7*s0+8.2*0.7*s1+28.3*0.7*s2>=10.2;
c0+9.6*c1+25.0*c2-0.7*s0-9.6*0.7*s1-25.8*0.7*s2<=9.9;
c0+9.6*c1+25.0*c2+0.7*s0+9.6*0.7*s1+25.8*0.7*s2>=9.9;
c0+8.8*c1+16*c2-0.7*s0-8.8*0.7*s1-16*0.7*s2<=9.9;
c0+8.8*c1+16*c2+0.7*s0+8.8*0.7*s1+16*0.7*s2>=9.9;
c0+10.4*c1+25.8*c2-0.7*s0-10.4*0.7*s1-25.8*0.7*s2<=10.6;
c0+10.4*c1+25.8*c2+0.7*s0+10.4*0.7*s1+25.8*0.7*s2>=10.6;
@FREE (c0);
@FREE (c1);
@FREE (c2);
END

```

Global optimal solution found.

Objective value: 9.467765
 Infeasibilities: 0.000000
 Total solver iterations: 6

Variable	Value	Reduced Cost
S0	0.2728780	0.000000
S1	0.2849193E-01	0.000000
S2	0.000000	74.08569
C0	10.54864	0.000000
C1	-0.2845271E-01	0.000000
C2	-0.1983301E-02	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9.467765	-1.000000
2	0.000000	1.776666
3	3.409581	0.000000
4	0.8285209	0.000000
5	1.715476	0.000000
6	2.181009	0.000000
7	0.000000	-2.446108
8	1.391213	0.000000
9	0.000000	-1.614001
10	0.4055920	0.000000
11	0.3194800	0.000000
12	0.2953564	0.000000
13	0.4137601	0.000000
14	0.5656735E-01	0.000000
15	0.7083933	0.000000

EK-2 (Devam) Kesikli X bağımsız değişkenleri ve kesikli Y bağımlı değişkeni için farklı modellerin LINGO paket programında gösterimi ve elde edilen sonuçları

16	0.000000	4.651905
17	0.7330497	0.000000
18	0.7968716	0.000000
19	0.000000	-2.368462

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Duygu İÇEN

Doğum Yeri: Manisa

Doğum Yılı: 03.02.1984

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise: 1999-2002, Dünder Çiloğlu Anadolu Lisesi, Manisa

Lisans:2002-2007, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, Ankara

Yabancı Dil: İngilizce

İletişim: duyguicn@hacettepe.edu.tr

İş Tecrübesi:

2007- ... Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi

